Российская Академия Наук
*Институт проблем управления*
*им. В.А. Трапезникова*

**Д.А. НОВИКОВ, А.Г. ЧХАРТИШВИЛИ**

# РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ

**СИНТЕГ**
**Москва – 2003**

УДК 519
ББК 22.18
Н 73

Н 73 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. **Рефлексивные игры**. М.: СИНТЕГ, 2003. – 149 с.

ISBN 5-89638-63-1

Монография посвящена обсуждению современных подходов к математическому моделированию рефлексии. Авторы вводят в рассмотрение новый класс теоретико-игровых моделей – *рефлексивные игры*, описывающие взаимодействие субъектов (*агентов*), принимающих решения на основании иерархии представлений о существенных параметрах, представлений о представлениях и т.д.

Анализ поведения *фантомных агентов*, существующих в представлениях других реальных или фантомных агентов, и свойств *информационной структуры*, отражающей взаимную информированность реальных и фантомных агентов, позволяет предложить в качестве решения рефлексивной игры *информационное равновесие*, которое является обобщением ряда известных концепций равновесия в некооперативных играх.

Рефлексивные игры дают возможность:

- моделировать поведение рефлексирующих субъектов;
- исследовать зависимость выигрышей агентов от рангов их рефлексии;
- ставить и решать задачи *рефлексивного управления*;
- единообразно описывать многие явления, связанные с рефлексией: скрытое управление, информационное управление через СМИ, рефлексию в психологии, художественных произведениях и др.

Книга адресована специалистам в области математического моделирования и управления социально-экономическими системами, а также студентам вузов и аспирантам.

*Рецензенты*: *д.т.н., проф. В.Н. Бурков,*
*д.т.н., проф. А.В. Щепкин*

УДК 519
ББК 22.18
Н 73

**ISBN 5-89638-63-1**

# СОДЕРЖАНИЕ

– Пескари привольно резвятся, в этом их радость!
– Ты же не рыба, откуда тебе знать, в чем ее радость?
– Ты же не я, откуда тебе знать, что я знаю, а чего не знаю?

*Из даосской притчи*

– Дело, разумеется, в том, достопочтенный архиепископ, что Вы верите в то, во что Вы верите, потому что Вы были так воспитаны.
– Может быть, и так. Но остается фактом, что и Вы верите в то, что я верю в то, во что я верю, потому что я был так воспитан, по той причине, что Вы были так воспитаны.

*Из книги Д. Майерса «Социальная психология»*

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена обсуждению современных подходов к математическому моделированию рефлексии и, в первую очередь, введению в рассмотрение нового класса теоретико-игровых моделей – рефлексивных игр, описывающих взаимодействие субъектов, принимающих решения на основании иерархии представлений о существенных параметрах, представлений о представлениях и т.д.

**Рефлексия.** Одним из фундаментальных свойств бытия человека является то, что наряду с природной («объективной») реальностью существует ее отражение в сознании. При этом между *природной реальностью* и ее образом в сознании (будем считать этот образ частью особой – *рефлексивной реальности*) существует неизбежный зазор, несовпадение.

Целенаправленное изучение этого феномена традиционно связано с термином «*рефлексия*», которому «Философский словарь» [84] дает следующее определение: «РЕФЛЕКСИЯ (лат. reflexio – обращение назад). Термин, означающий отражение, а также исследование познавательного акта».

Термин «рефлексия» введен Дж. Локком; в различных философских системах (у Дж. Локка, Г. Лейбница, Д. Юма, Г. Гегеля и др.) он имел различное содержание. Систематическое описание рефлексии с точки зрения психологии началось в 60-е годы XX века (школа

В.А. Лефевра). Кроме того, следует отметить, что существует понимание рефлексии в другом значении, имеющем отношение к рефлексу – «реакции организма на возбуждение рецепторов» [78; С. 1122]. В настоящей работе используется первое (философское) определение рефлексии.

Для прояснения понимания сути рефлексии рассмотрим сначала ситуацию с одним субъектом. У него есть представления о природной реальности, но он может и осознавать (отражать, рефлексировать) эти представления, а также осознавать осознание этих представлений и т.д. Так формируется рефлексивная реальность. Рефлексия субъекта относительно своих собственных *представлений* о реальности, принципах своей деятельности и т.д. называется *авторефлексией* или *рефлексией первого рода*. Отметим, что в большинстве гуманитарных исследований речь идет, в первую очередь, об авторефлексии, под которой в философии понимается процесс размышления индивида о происходящем в его сознании [55].

*Рефлексия второго рода* имеет место относительно представлений о реальности, принципах принятия решений, авторефлексии и т.д. других субъектов.

Приведем примеры рефлексии второго рода, иллюстрирующие, что во многих случаях правильные собственные умозаключения можно сделать, лишь если занять позицию других субъектов и проанализировать их возможные рассуждения.

Первым примером является классическая «*задача о грязных лицах*» (Dirty Face Game) [110], иногда ее называют «задачей о мудрецах и колпаках» [22] или «о мужьях и неверных женах» [132]. Опишем ее, следуя [22, С. 46].

«Представим себе, что в купе вагона Викторианской эпохи находятся Боб и его племянница Алиса. У каждого испачкано лицо. Однако никто не краснеет от стыда, хотя любой Викторианский пассажир покраснел бы, зная, что другой человек видит его грязным. Отсюда мы делаем вывод, что никто из пассажиров не знает, что его лицо грязное, хотя каждый видит грязное лицо своего компаньона.

В это время в купе заглядывает Проводник и объявляет, что в купе находится человек с грязным лицом. После этого Алиса покраснела. Она поняла, что лицо у нее испачкано. Но почему она поняла это? Разве Проводник не сообщил то, что она уже знала?

Проследим цепочку рассуждений Алисы. Алиса: Предположим, мое лицо чистое. Тогда Боб, зная, что кто-то из нас грязный, должен сделать вывод, что грязный он, и покраснеть. Раз он не краснеет, значит, моя посылка про мое чистое лицо ложная, мое лицо грязное и я должна покраснеть.

Проводник добавил к информации, известной Алисе, информацию о знаниях Боба. До этого она не знала, что Боб знает, что кто-то из них испачкан. Короче, сообщение проводника превратило знание о том, что в купе есть человек с грязным лицом, в общее знание».

Второй хрестоматийный пример – «*задача о скоординированной атаке*» (Coordinated Attack Problem) [112]; существуют близкие к ней задачи об оптимальном протоколе обмена информацией – Electronic Mail Game [138] и др. (см. обзоры в [105, 113]).

Ситуация выглядит следующим образом. На вершинах двух холмов расположены две дивизии, а в долине расположился противник. Одержать победу можно, только если обе дивизии нападут на противника одновременно. Генерал – командир первой дивизии – посылает генералу – командиру второй дивизии – гонца с сообщением: «Атакуем на рассвете». Так как гонец может быть перехвачен противником, то первому генералу необходимо дождаться от второго генерала сообщения о том, что первое сообщение получено. Но так как второе сообщение также может быть перехвачено противником, то второму генералу необходимо получить от первого подтверждение, что тот получил подтверждение. И так далее до бесконечности. Задача заключается в том, чтобы определить, после какого числа сообщений (подтверждений) генералам имеет смысл атаковать противника. Вывод следующий – в описанных условиях скоординированная атака невозможна, а выходом является использование вероятностных моделей [130, 131].

Третья классическая задача – «*задача о двух брокерах*» [94] (см. также модели спекуляций в [66]). Предположим, что у двух брокеров, играющих на фондовой бирже, имеются собственные экспертные системы, которые используются для поддержки принятия решений. Случается так, что сетевой администратор нелегально копирует обе экспертные системы и продает каждому брокеру экспертную систему своего оппонента. После этого администратор пытается продать каждому из них следующую информацию – «Ваш оппонент имеет Вашу экспертную систему». Потом администратор пытается продать информацию – «Ваш оппонент знает, что Вы имеете его экспертную систему», и т.д. Вопрос заключается в том, как брокерам следует использовать информацию, получаемую от администратора, а также какая информация на какой итерации является существенной?

Завершив рассмотрение примеров рефлексии второго рода, обсудим в каких ситуациях рефлексия является существенной. Если единственный рефлексирующий субъект является экономическим агентом, который стремится максимизировать свою целевую функцию, выбирая одно из этически допустимых действий, то природная реальность входит в целевую функцию как некий параметр, а результаты рефлексии (представления о представлениях и пр.) аргументами целевой функции не являются. Тогда можно сказать, что авторефлексия «не нужна», так как она не изменяет действия, выбираемого агентом.

Заметим, что зависимость действий субъекта от рефлексии может иметь место в ситуации, когда действия этически неравноценны, то есть наряду с *утилитарным* аспектом существует деонтологический (*этический*) – см. [92, 120-122]. Однако экономические решения, как правило, этически нейтральны, поэтому рассмотрим взаимодействие нескольких субъектов.

Если субъектов несколько (ситуация принятия решения является *интерактивной*), то в целевую функцию каждого субъекта входят действия других субъектов, то есть эти действия являются частью природной реальности (хотя сами они, разумеется, обусловлены рефлексивной реальностью). При этом рефлексия (и, следовательно, исследование рефлексивной реальности) становится необходимой. Рассмотрим основные подходы к математическому моделированию эффектов рефлексии.

**Теория игр.** Формальные (математические) модели поведения человека создаются и изучаются уже более полутора веков (см. обзор в [1]) и находят все большее применение как в теории управления, экономике, психологии, социологии и т.д., так и при решении конкретных прикладных задач. Наиболее интенсивное развитие наблюдается начиная с 40-х годов XX века – момента появления *теории игр*, который обычно датируют 1944 годом (выход первого издания книги Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [53]).

Под *игрой* в данной работе будем понимать взаимодействие сторон, интересы которых не совпадают (отметим, что возможно и другое понимание игры – как «вида непродуктивной деятельности, мотив которой заключается не в ее результатах, а в самом процессе» [78, С. 475] – см. также [87], где понятие игры трактуется гораздо более широко).

*Теория игр* – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [21]. Далее для обозначения субъекта, принимающего решения (игрока), используется термин «*агент*». В настоящей работе рассматриваются некооперативные статические игры в нормальной форме, то есть игры, в которых агенты однократно, одновременно и независимо выбирают свои *действия*.

Таким образом, основная задача теории игр заключается в описании взаимодействия нескольких агентов, интересы которых не совпадают, а результаты деятельности (выигрыш, полезность и т.д.) каждого зависят в общем случае от действий всех [21, 132]. Итогом подобного описания является прогноз разумного исхода игры – так называемого *решения игры* (*равновесия*).

Описание *игры* заключается в задании следующих параметров:

- *множества агентов*;
- *предпочтений агентов* (зависимостей выигрышей от действий): при этом предполагается (и этим отражается целенаправленность поведения), что каждый агент заинтересован в максимизации своего выигрыша;
- *множеств допустимых действий агентов*;
- *информированности агентов* (той информации, которой они обладают на момент принятия решений о выбираемых действиях);
- *порядка функционирования* (*порядок ходов* – последовательность выбора действий).

Условно говоря, множество агентов определяет, кто участвует в игре. Предпочтения отражают, что хотят агенты, множества допустимых действий – что они могут, информированность – что они знают, а порядок функционирования – когда они выбирают действия.

Перечисленные параметры задают игру, но они недостаточны для того, чтобы предсказать ее исход – решение игры (или равновесие игры), то есть множество рациональных и устойчивых с той или иной точки зрения действий агентов [15, 21, 22]. На сегодняшний день в теории игр не существует универсальной концепции равновесия – принимая те или иные предположения о принципах принятия агентами решений, можно получать различные решения. Поэтому основной задачей любого теоретико-игрового исследования (включая настоящую работу) является построение равновесия. Так как рефлексивные игры определяются как такое интерактивное взаимодействие агентов, в котором они принимают решения на основе иерархии своих представлений, то существенной является информированность агентов. Поэтому остановимся на ее качественном обсуждении более подробно.

**Роль информированности. Общее знание.** В теории игр, философии, психологии, распределенных системах и других областях науки (см. обзор в [111, 131]) существенны не только *представления* (beliefs) агентов о существенных параметрах, но и их представления о представлениях других агентов и т.д. Совокупность этих представлений называется *иерархией представлений* (hierarchy of beliefs) и в настоящей работе моделируется деревом информационной структуры рефлексивной игры (см. раздел 3.2). Другими словами, в ситуациях интерактивного принятия решений (моделируемых в теории игр) каждый агент перед выбором своего действия должен предсказать поведение оппонентов. Для этого у него должны быть определенные представления о в*и*дении игры оппонентами. Но оппоненты должны проделать то же самое, поэтому неопределенность относительно той игры, которая будет разыграна, порождает бесконечную иерархию представлений участников игры.

Приведем пример иерархии представлений. Предположим, что имеются два агента – А и Б. Каждый из них может иметь собственные нерефлексивные представления о неопределенном параметре $\theta$, который мы будем в дальнейшем называть *состоянием природы* (state of nature, state of the world). Обозначим эти представления $\theta_А$ и $\theta_Б$ соответственно. Но каждый из агентов в рамках процесса *рефлексии первого ранга* может задуматься о представлениях оппонента. Эти представления (*представления второго порядка*) обозначим $\theta_{АБ}$ и $\theta_{БА}$, где $\theta_{АБ}$ – представления агента А о представлениях агента Б,

$\theta_{БА}$ – представления агента Б о представлениях агента А. Но этим дело не ограничивается – каждый из агентов в рамках процесса дальнейшей рефлексии (*рефлексии второго ранга*) может задуматься над тем, каковы представления оппонента о его представлениях. Так порождаются представления *третьего порядка* – $\theta_{АБА}$ и $\theta_{БАБ}$. Процесс порождения представлений более высоких порядков может продолжаться до бесконечности (никаких логических ограничений увеличению ранга рефлексии не существует). Совокупность всех представлений – $\theta_{А}$, $\theta_{Б}$, $\theta_{АБ}$, $\theta_{БА}$, $\theta_{АБА}$, $\theta_{БАБ}$ и т.д. – образует иерархию представлений.

Частным случаем информированности – когда все представления, представления о представлениях и т.д. до бесконечности совпадают – является *общее знание*. Более корректно, термин «общее знание» (common knowledge), введен в [123] для обозначения факта, удовлетворяющего следующим требованиям:

1) о нем известно всем агентам;

2) всем агентам известно 1;

3) всем агентам известно 2 и т.д. до бесконечности

Формальная модель общего знания предложена в [96] и получила развитие во множестве работ – см. [97, 99, 106, 107, 108, 113, 116, 130, 140 и др.].

Моделям информированности агентов – иерархии представлений и общему знанию – в теории игр посвящена, фактически целиком, настоящая работа, поэтому приведем примеры, иллюстрирующие роль общего знания в других областях науки – философии, психологии и др. (см. также обзор [105]).

С точки зрения философии общее знание анализировалось при изучении *соглашений* [123, 142]. Рассмотрим следующий пример. В Правилах Дорожного Движения записано, что каждый участник дорожного движения должен соблюдать эти правила, а также вправе рассчитывать на то, что их соблюдают другие участники дорожного движения. Но другие участники дорожного движения также должны быть уверены в том, что остальные соблюдают правила, и т.д. до бесконечности. Следовательно, соглашение «соблюдать ПДД» должно быть общим знанием.

В психологии существует понятие *дискурса* – «(от лат. discursus – рассуждение, довод) – опосредованное прошлым опытом речевое мышление человека; выступает как процесс связанного логического рассуждения, в котором каждая последующая мысль обусловлена предыдущей» [76, С. 99)]. Роль общего знания в понимании дискурса иллюстрируется в [104, 105] следующим примером.

Два человека выходят из кинотеатра. Один спрашивает другого: «Как тебе фильм?». Для того чтобы второй человек понял вопрос, он должен понять, что его спрашивают о том фильме, который они только что вместе посмотрели. Кроме того, он должен понимать, что это понимает первый. Задающий вопрос, в свою очередь, должен быть уверен, что второй поймет, что речь идет о том фильме, который они посмотрели, и т.д. То есть для адекватного взаимодействия (общения) «фильм» должен быть общим знанием (люди должны достичь соглашения об использовании языка [123]).

Взаимная информированность агентов является существенной также в распределенных вычислительных системах [106, 108, 113], в искусственном интеллекте [112, 127] и других областях.

В теории игр, как правило, предполагается, что все[1] параметры игры являются *общим знанием*, то есть каждому агенту известны все параметры игры, а также то, что это известно всем агентам, и т.д. до бесконечности. Такое предположение соответствует *объективному описанию игры* и дает возможность использовать концепцию *равновесия Нэша*[2] [134] как прогнозируемого исхода некооперативной игры (то есть игры, в которой невозможны переговоры между агентами с целью создания коалиций, обмена информацией, совместных действий, перераспределения выигрышей и т.д.). Таким образом, предположение об общем знании позволяет утверждать, что все агенты знают, в какую игру они играют, и их представления об игре совпадают.

Вместо действия агента можно рассматривать нечто более сложное – его *стратегию*, то есть отображение имеющейся у агента информации во множество его допустимых действий. Примерами могут служить: стратегии в многошаговой игре, смешанные стратегии, стратегии в метаиграх Ховарда [117, 118] (см. также информа-

---

[1] *Если в исходной модели присутствуют неопределенные факторы, то используются процедуры устранения неопределенности, которые позволяют получить детерминированную модель.*

[2] *Вектор действий агентов является равновесием Нэша, если никому из них не выгодно одностороннее (то есть при условии, что остальные агенты выбирают соответствующие компоненты равновесия) отклонение от равновесия – см. корректное определение ниже.*

ционные расширения игр [18, 39, 40]). Однако и в этих случаях правила игры являются общим знанием. Наконец, можно считать, что игра выбирается случайным образом в соответствии с некоторым распределением, которое является общим знанием – так называемые *Байесовы игры* [109, 114, 132].

В общем случае каждый из агентов может иметь собственные представления о параметрах игры, каждому из которых соответствует некоторое *субъективное описание игры* [18]. При этом оказывается, что агенты участвуют в игре, но объективно не знают в какой, или по-разному представляют разыгрываемую игру – ее правила, цели, роли и информированность оппонентов и т.д. Универсальных подходов к построению равновесий при недостаточном общем знании на сегодняшний день в теории игр не существует.

С другой стороны, в рамках «рефлексивной традиции» гуманитарных наук для каждого агента окружающий его мир содержит (включает) остальных агентов, и представления о других агентах отражаются в процессе рефлексии (различия представлений могут быть обусловлены, в частности, неодинаковой информированностью). Однако до настоящего момента конструктивных формальных результатов в этой области получено не было.

Следовательно, возникает необходимость разработки и исследования математических моделей игр, в которых информированность агентов не является общим знанием и агенты принимают решения на основе иерархии своих представлений. Этот класс игр назовем ***рефлексивными играми*** (формальное определение приведено в разделе 3.2 настоящей работы).

Следует признать, что термин «рефлексивные игры» был введен В.А. Лефевром в 1965 г. в [42]. Однако в этой работе, а также в работах [43-47, 122] того же автора содержится, в основном, качественное обсуждение эффектов рефлексии во взаимодействии субъектов, и никакой общей концепции решения для этого класса игр предложено не было. То же замечание справедливо и для [19, 24-26, 66, 79], в которых рассматривался ряд частных случаев информированности участников игры.

Таким образом, актуальным является изучение рефлексивных игр и построение для них единой концепции равновесия, что и мотивирует настоящее исследование.

Прежде чем переходить к изложению основного содержания работы, обсудим на качественном уровне основные используемые ниже подходы.

**Основные подходы и структура работы.** В первой главе «Информация в принятии решений», носящей, в основном, обзорный и вводный характер, приводятся модели индивидуального и интерактивного принятия решений, проводится анализ информированности, необходимой для реализации тех или иных известных концепций равновесия, а также обсуждаются известные модели общего знания и иерархии представлений.

Как определено выше, рефлексивной является игра, в которой информированность агентов не является общим знанием[3] и агенты принимают решения на основе иерархии своих представлений. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений целесообразно разделять стратегическую и информационную рефлексию.

*Информационная рефлексия* – процесс и результат размышлений агента о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие агенты). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений агент не принимает.

*Стратегическая рефлексия* – процесс и результат размышлений агента о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие агенты) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.

Таким образом, информационная рефлексия обычно связана с недостаточной взаимной информированностью, и ее результат используется при принятии решений (в том числе – при стратегической рефлексии). Стратегическая рефлексия имеет место даже в случае полной информированности, предваряя принятие агентом решения о выбранном действии. Другими словами, информационная и стратегическая рефлексии могут изучаться независимо, однако в условиях неполной и недостаточной информированности обе они имеют место.

---

[3] *Если в рассматриваемой модели информированность является общим знанием, то все результаты исследования рефлексивных игр переходят в соответствующие классические результаты теории игр – см. ниже.*

Стратегическая рефлексия рассматривается во второй главе настоящей работы. Оказывается, что если предположить, что агент, моделируя поведение оппонентов, приписывает им и себе определенные ранги рефлексии, то исходная игра превращается в новую игру, в которой стратегией агента является выбор ранга рефлексии.

Если рассмотреть процесс рефлексии в новой игре, то получим новую игру и т.д. При этом, даже если в исходной игре множество возможных действий было конечно, то в новой игре множество возможных действий – число различных рангов рефлексии – бесконечно. Следовательно, основной задачей, решаемой при исследовании стратегической рефлексии, является определение максимального целесообразного ранга рефлексии. Ответ на этот вопрос получен во второй главе для биматричных игр (раздел 2.2) и моделей, учитывающих ограниченность возможностей человека по переработке информации (раздел 2.3).

Приведем пример стратегической рефлексии – «*Пенальти*» (см. также примеры «Игра в прятки» и «Снос на мизере» в разделе 2.2). Агентами являются игрок, бьющий по воротам, и вратарь. Предположим для простоты, что у игрока есть два действия – «бить в левый угол ворот» и «бить в правый угол ворот». У вратаря также есть два действия – «ловить мяч в левом углу» и «ловить мяч в правом углу». Если вратарь угадывает, в какой угол бьет игрок, то он ловит мяч.

Промоделируем рассуждения агентов. Пусть вратарю известно, что данный игрок обычно бьет в правый угол. Следовательно, ему нужно ловить мяч в правом углу. Но, если вратарь знает, что игроку известно, что вратарь знает, как обычно поступает игрок, то вратарю следует моделировать рассуждения игрока. Он может думать так: «Игроку известно, что я знаю его обычную тактику. Поэтому он ожидает, что я буду ловить мяч в правом углу и может ударить в левый угол. В этом случае мне надо ловить мяч в левом углу». Если игрок обладает достаточной глубиной рефлексии, то он может догадаться о рассуждениях вратаря и попытаться его перехитрить, ударив в правый угол. Эту же цепочку рассуждений может провести и вратарь и на этом основании ловить мяч в правом углу.

И игрок, и вратарь, могут увеличивать глубину рефлексии до бесконечности, проводя рассуждения друг за друга, и ни один из них не имеет рациональных оснований остановиться на некотором конечном шаге. Следовательно, в рамках моделирования взаимных рассуждений нельзя априори определить исход рассматриваемой игры. Сама игра, в которой у каждого из агентов есть по два возможных действия, может быть заменена на другую игру, в которой агенты выбирают ранги рефлексии, приписываемые оппоненту. Но и в этой игре нет разумного решения, так как каждый агент может моделировать поведение оппонента, рассматривая «дважды рефлексивную» игру, и т.д. до бесконечности.

Единственно, чем можно помочь в рассматриваемой ситуации агентам, так это ограничить глубину их рефлексии, подметив, что начиная со второго ранга рефлексии (в силу конечности исходного множества возможных действий) ситуация начинает повторяться – находясь как на нулевом, так и на втором (и, вообще, на любом четном) уровне рефлексии, игрок будет бить в правый угол. Следовательно, вратарю остается угадать четность уровня рефлексии игрока.

Максимальный ранг рефлексии, который следует иметь агенту для того, чтобы охватить все многообразие исходов игры (упуская из виду некоторые стратегии оппонента, агент рискует уменьшить свой выигрыш), назовем *максимальным целесообразным рангом рефлексии*. Оказывается, что во многих случаях этот ранг конечен – соответствующие формальные результаты приводятся в разделах 2.2 и 3.6). В примере «Пенальти» максимальный целесообразный ранг рефлексии агентов равен двум.

В случае отсутствия у вратаря информации о том, куда обычно бьет нападающий, действия последнего симметричны (левый и правый углы «равноценны»). Однако остаются возможности искусственно внести асимметрию, чтобы попытаться ею воспользоваться в своих целях. Например, вратарь может сдвинуться в сторону одного из углов, как бы приглашая нападающего ударить в другой (и бросается именно в тот, «дальний» угол). Более сложная стратегия состоит в следующем. Игрок команды вратаря подходит к нему и показывает, куда собирается бить нападающий, причем делает это так, что нападающий это видит (после чего в момент удара вратарь ловит мяч не в том углу, на который демонстративно показал ему товарищ по команде, а в противоположном). Заметим, что оба описанных приема взяты «из жизни» и оказались успешными. Первый имел место в международном матче сборной СССР, второй – в финале Кубка СССР по футболу в серии послематчевых пенальти.

Третья глава посвящена исследованию формальных моделей информационной рефлексии. Так как ключевым фактором в рефлексивных играх является информированность агентов – иерархия представлений, то для ее формального описания вводится понятие *информационной структуры* – дерева (в общем случае – бесконечного), вершинам которого соответствует информация (представления) агентов о существенных параметрах, представлениях других агентов и т.д. (см. пример иерархии представлений выше).

Понятие структуры информированности (информационной структуры) позволяет дать формальное определение некоторых интуитивно ясных понятий, таких как: адекватная информированность одного агента о другом, взаимная информированность, одинаковая информированность и др.

Одним из ключевых понятий, применяемых в данной работе для анализа рефлексивных игр, является понятие *фантомного агента*. Обсудим его на качественном уровне (отложив строгое математическое определение до раздела 3.2).

Пусть в некоторой ситуации взаимодействуют два агента – А и Б. Вполне естественно, что в сознании каждого из них имеется некий образ другого: у А имеется образ Б (назовем его АБ), а у Б – образ А (назовем его БА). Этот образы могут совпадать с реальностью, а могут отличаться от нее. Иными словами, агент, например, А может иметь адекватное представление о Б (этот факт можно записать в виде тождества АБ = Б), а может и не иметь.

Тут сразу возникает вопрос – а может ли в принципе выполняться тождество АБ = Б, ведь Б – это реальный агент, а АБ – лишь его образ? Не вдаваясь в обсуждение этого философского, по сути, вопроса, отметим следующие два обстоятельства. Во-первых, речь идет не о всецелом понимании личности во всей ее полноте, а о ее моделировании в данной конкретной ситуации. На обыденном, житейском уровне человеческого общения мы постоянно сталкиваемся с ситуациями как адекватного, так и неадекватного восприятия одним человеком другого.

Во вторых, в рамках формального (теоретико-игрового) моделирования человеческого поведения агент – участник ситуации – описывается относительно небольшим набором характеристик. И эти характеристики могут быть полностью известны другому агенту в той же мере, в какой они известны исследователю.

Рассмотрим подробнее случай, когда между Б и АБ имеется различие (это различие может проистекать, говоря формально, из неполноты информации А о Б, либо из доверия к ложной информации). Тогда А, принимая решение о каких-либо своих действиях, имеет в виду не Б, а тот его образ, который у него имеется, то есть АБ. Можно сказать, что субъективно А взаимодействует с АБ. Поэтому АБ можно назвать фантомным агентом. Его нет в реальности, но он присутствует в сознании *реального агента* А и, соответственно, влияет на его действия, то есть на реальность.

Приведем простейший пример. Пусть А считает, что они с Б друзья, а Б, зная об этом, является врагом А (эту ситуацию можно описать словом «предательство»). Тогда, очевидно, в ситуации имеется фантомный агент АБ, которого можно описать так: «Б, являющийся другом А»; в реальности такой субъект отсутствует. Отметим, что при этом Б адекватно информирован об А, то есть БА = А.

Таким образом, помимо реальных агентов, фактически участвующих в игре, предлагается рассматривать фантомных агентов, то есть агентов, которые существуют в сознании реальных и других фантомных агентов. Реальные и фантомные агенты в рамках своей рефлексии наделяют фантомных агентов определенной информированностью, которая отражается в информационной структуре.

Участвующих в игре реальных и фантомных агентов может быть бесконечно много, что означает потенциальную бесконечность осуществления актов рефлексивного отражения (бесконечную глубину дерева структуры информированности). Действительно, даже в простейшей ситуации возможно бесконечное развертывание рассуждений вида «я знаю…», «я знаю, что ты знаешь…», «я знаю, что ты знаешь, что я знаю…», «я знаю, что ты знаешь, что я знаю, что ты знаешь…» и т. д. Однако на практике такая «дурная бесконечность» не имеет места, поскольку начиная с некоторого момента представления «стабилизируются», и увеличение ранга рефлексии не дает ничего нового. Таким образом, в реальных ситуациях структура информированности имеет конечную *сложность*: у соответствующего дерева имеется конечное число попарно различных поддеревьев. Иными словами, в игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов[4].

Введение понятия фантомных агентов позволяет определить рефлексивную игру как игру реальных и фантомных агентов, а также определить *информационное равновесие* как обобщение равновесия Нэша на случай рефлексивной игры, в рамках которого предполагается, что каждый агент (реальный и фантомный) при вычислении своего *субъективного равновесия* (равновесия в той игре, в которую он со своей точки зрения играет) использует имеющуюся у него иерархию представлений об объективной и рефлексивной реальности [89].

Удобным инструментом исследования информационного равновесия является *граф рефлексивной игры*, в котором вершины соответствуют реальным и фантомным агентам, и в каждую вершину-агента входят дуги (их число на единицу меньше числа реальных агентов), идущие из вершин-агентов, от действий которых в субъективном равновесии зависит выигрыш данного агента. Граф рефлексивной игры может быть построен и без конкретизации целевых функций агентов. При этом он отражает если не количественное соотношение интересов, то качественное соотношение информированности рефлексирующих агентов, и является удобным и выразительным средством описания эффектов рефлексии (см. раздел 3.4).

Для описанного выше примера двух агентов граф рефлексивной игры имеет вид: Б $\leftarrow$ А $\leftrightarrow$ АБ – реальный агент Б (предатель) адекватно информирован об агенте А, который взаимодействует с фантомным агентом АБ (Б, являющимся другом А).

Приведем еще один пример графа, который отражает рефлексивное взаимодействие (хотя и не является формально графом рефлексивной игры в смысле введенного выше определения). На обложку настоящей книги вынесена картина Э. Берн-Джонса «Смертоносная голова», написанная в 1886-1887 гг. по мотивам мифа о Персее и Андромеде.

В ситуации участвуют три реальных агента: Персей (обозначим его буквой П), Андромеда (А) и горгона Медуза (М). Кроме того,

---

[4] *В предельном случае – когда присутствует общее знание – фантомный агент первого уровня совпадает со своим реальным прообразом и дерево имеет единичную глубину* (*точнее, все остальные поддеревья повторяют деревья более высокого уровня*).

имеются следующие «фантомные» агенты: отражение Персея (ОП), отражение Андромеды (ОА) и отражение Медузы (ОМ). Граф приведен на рисунке 1.

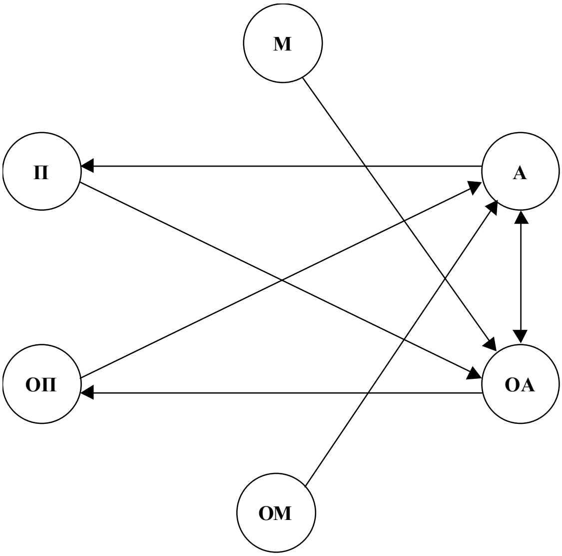


*Рис.* 1. *Граф картины Э. Берн-Джонса «Смертоносная голова»* (*см. обложку*)

Информированность реальных агентов в рассматриваемом примере следующая: Персей видит Андромеду; Андромеда не видит Персея, но видит его отражение, свое отражение и отражение горгоны Медузы; отражение Персея видит отражение Андромеды; отражение Андромеды видит всех реальных агентов. К счастью, саму горгону Медузу никто из реальных агентов не видит.

Введение информационной структуры, информационного равновесия и графа рефлексивной игры, во-первых, позволяет с единых методологических позиций и с помощью единого математического аппарата описывать и анализировать разнообразные ситуации коллективного принятия решений агентами, обладающими различной информированностью, исследовать влияние рангов рефлексии на выигрыши агентов, изучать условия существования и реализуемости информационных равновесий и т.д. Многочисленные примеры прикладных моделей приведены ниже.

Во-вторых, предложенная модель рефлексивной игры дает возможность изучать влияние рангов рефлексии (глубины информационной структуры) на выигрыши агентов. Полученные в разделах 2.2, 3.5 и 3.6 настоящей работы результаты свидетельствуют, что при минимальных предположениях можно показать ограниченность максимального целесообразного ранга рефлексии. Другими словами, во многих случаях неограниченное увеличение ранга рефлексии нецелесообразно с точки зрения выигрышей агентов.

В-третьих, наличие модели рефлексивной игры позволяет определить условия существования и свойства информационного равновесия, а также конструктивно и корректно сформулировать ***задачу рефлексивного управления***, заключающуюся в поиске управляющим органом такой информационной структуры, что реализующееся в ней информационное равновесие наиболее выгодно с его точки зрения. Задача рефлексивного управления ставится и решается для ряда случаев в разделе 3.7. Теоретические результаты ее решения используются в ряде приводимых в четвертой главе прикладных моделей – скрытое управление, информационное управление через СМИ и др.

И, наконец, в-четвертых, язык рефлексивных игр (информационные структуры, графы рефлексивной игры и др.) является удобным для описания эффектов рефлексии как в психологии (что иллюстрируется на примере шахматной игры, трансакционного анализа, моделей этического выбора и др.), так и в художественных произведениях – см. четвертую главу настоящей работы.

Завершив качественный обзор содержания работы, отметим, что можно предложить несколько подходов к ознакомлению с материалом настоящей книги. Первый – линейный, заключающийся в последовательном прочтении всех четырех глав. Второй рассчитан на читателя, интересующегося в большей степени формальными моделями, и заключается в прочтении второй и третьей глав и беглом ознакомлении с примерами в четвертой главе. Третий ориентирован на читателя, не желающего вникать в математические тонкости, и заключается в прочтении введения, четвертой главы и заключения.

# ГЛАВА 1. ИНФОРМАЦИЯ В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

В первой главе настоящей работы приводится модель индивидуального принятия решений (раздел 1.1), проводится обзор основных концепций решения некооперативных игр, обсуждаются используемые в этих концепциях предположения об информированности и взаимной информированности агентов (раздел 1.2), анализируются известные модели информированности и общего знания (раздел 1.3).

## 1.1. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ: МОДЕЛЬ РАЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Опишем, следуя [21, 58, 62], модель принятия решений единственным агентом. Пусть агент способен выбирать некоторое *действие* $x$ из множества $X$ допустимых действий. В результате выбора действия $x \in X$ агент получает выигрыш $f(x)$, где $f$: $X \to \mathfrak{R}^1$ – действительнозначная *целевая функция*, отражающая предпочтения агента.

Примем *гипотезу рационального поведения*, заключающуюся в том, что агент с учетом всей имеющейся у него информации выбирает действия, которые наиболее предпочтительны с точки зрения значений своей целевой функции (данная гипотеза не является единственно возможной – см., например, концепцию ограниченной рациональности [77]). В соответствии с гипотезой рационального поведения агент выбирает альтернативу из множества «лучших» альтернатив. В рассматриваемом случае это множество является множеством альтернатив, на которых достигается максимум целевой функции.

Следовательно, выбор действия агентом определяется *правилом индивидуального рационального выбора* $P(f, X) \subseteq X$, которое выделяет множество наиболее предпочтительных с точки зрения агента действий[5]:

$$P(f, X) = \mathrm{Arg}\max_{x \in X} f(x).$$

Усложним модель, а именно предположим, что выигрыш агента определяется не только его собственными действиями, но и значением неопределенного параметра $\theta \in \Omega$ – *состояния природы*. То есть в результате выбора действия $x \in X$ и реализации состояния природы $\theta \in \Omega$ агент получает выигрыш $f(\theta, x)$, где $f$: $\Omega \times X \to \Re^1$.

Если выигрыш агента зависит, помимо его действий, от неопределенного параметра – состояния природы, то в общем случае не существует однозначно «лучшего» действия – принимая решение о выбираемом действии, агент должен «предсказывать» состояние природы.

Поэтому введем *гипотезу детерминизма*, заключающуюся в том, что агент стремится устранить с учетом всей имеющейся у него информации существующую неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности [21, 33] (другими словами, окончательный критерий, которым руководствуется агент, принимающий решения, не должен содержать неопределенных параметров). То есть агент должен в соответствии с гипотезой детерминизма устранить неопределенность относительно независящих от него параметров (быть может, путем введения определенных предположений об их значениях).

В зависимости от той *информации I*, которой обладает агент о неопределенных параметрах, различают [21, 59]:

- *интервальную неопределенность* (когда известно только множество $\Omega$ возможных значений неопределенных параметров);

[5] *При использовании максимумов и минимумов подразумевается, что они достигаются.*

- *вероятностную неопределенность* (когда, помимо множества $\Omega$ возможных значений неопределенных параметров, известно их вероятностное распределение $p(\theta)$);

- *нечеткую неопределенность* (когда, помимо множества $\Omega$ возможных значений неопределенных параметров, известна функция принадлежности их значений).

В настоящей работе рассматривается простейший – «*точечный*» – случай, когда агенты имеют представления о конкретном значении состоянии природы. Возможность обобщения полученных результатов на случай интервальной или вероятностной неопределенности обсуждается в заключении.

Введем следующее <u>предположение</u> относительно используемых агентом процедур устранения неопределенности: интервальная неопределенность устраняется вычислением *максимального гарантированного результата* (МГР), вероятностная – ожидаемого значения целевой функции, нечеткая – множества максимально недоминируемых альтернатив[6].

Обозначим $f \underset{I}{\Rightarrow} \widehat{f}$ – процедуру устранения неопределенности, то есть процесс перехода от целевой функции $f(\theta, x)$ к целевой функции $\widehat{f}(x)$, которая не зависит от неопределенных параметров. В соответствии с введенным предположением в случае интервальной неопределенности $\widehat{f}(x) = \min\limits_{\theta \in \Omega} f(\theta, x)$, в случае вероятностной неопределенности $\widehat{f}(x) = \int\limits_{\Omega} f(x, \theta) p(\theta) d\theta$ и т.д. [58, 59].

Устранив неопределенность, получаем детерминированную модель, то есть правило индивидуального рационального выбора имеет вид:

$$P(f, X, I) = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} \widehat{f}(x),$$

---

[6] *Введенные предположения не являются единственно возможными. Использование других предположений (например, гипотезу об использовании МГР можно заменить гипотезой оптимизма, или гипотезой «взвешенного оптимизма-пессимизма» и т.д.) приведет к другим концепциям решения, однако процесс их получения будет следовать реализуемой ниже общей схеме.*

где $I$ – информация, используемая агентом при устранении неопределенности $f \underset{I}{\Rightarrow} \widehat{f}$.

До сих пор мы рассматривали индивидуальное принятие решений. Рассмотрим теперь *игровую неопределенность*, в рамках которой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений *обстановки игры* (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов поведения).

## 1.2. ИНТЕРАКТИВНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ: ИГРЫ И РАВНОВЕСИЯ

**Модель игры.** Для описания коллективного поведения агентов недостаточно определить их предпочтения и правила индивидуального рационального выбора по отдельности. Как отмечалось выше, в случае, когда в системе имеется единственный агент, гипотеза его рационального (индивидуального) поведения предполагает, что агент ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции. В случае, когда агентов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние: в этом случае возникает *игра* – взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов. Если в силу гипотезы рационального поведения каждый из агентов стремится выбором действия максимизировать свою целевую функцию, то понятно, что в случае нескольких агентов индивидуально рациональное действие каждого из них зависит от действий других агентов[7].

Рассмотрим теоретико-игровую модель взаимодействия между $n$ агентами. Каждый агент осуществляет выбор *действия* $x_i$, принадлежащего *допустимому множеству* $X_i$, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – *множеству агентов*. Выбор действий агентами осуществляется <u>однократно, одновременно и независимо</u>.

---

[7] *В теоретико-игровых моделях предполагается, что рациональность игроков, то есть следование их гипотезе рационального поведения, является общим знанием. В настоящей работе это предположение также принимается.*

Выигрыш $i$-го агента зависит от его собственного действия $x_i \in X_i$, от вектора действий $x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$ *оппонентов* $N \setminus \{i\}$ и от *состояния природы*[8] $\theta \in \Omega$, и описывается действительнозначной *функцией выигрыша* $f_i = f_i(\theta, x)$, где $x = (x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X' = \prod_{j \in N} X_j$ – вектор действий всех агентов. При фиксированном значении состояния природы совокупность $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N})$ множества агентов, множеств их допустимых действий и целевых функций называется *игрой в нормальной форме*. *Решением игры* (*равновесием*) называется множество устойчивых в том или ином смысле векторов действий агентов [15, 21, 65, 68, 86, 109, 126, 132].

В силу гипотезы рационального поведения каждый агент будет стремиться выбрать наилучшие для него (с точки зрения значения его целевой функции) действия при заданной обстановке. *Обстановкой* для него будет совокупность обстановки игры $x_{-i} \in X_{-i}$ и состояния природы $\theta \in \Omega$. Следовательно, принцип принятия им решения о выбираемом действии можно записать следующим образом ($BR$ обозначает наилучший ответ – best response):

(1) $BR_i(\theta, x_{-i}) = \operatorname{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N$.

Рассмотрим возможные принципы принятия решений агентами, каждый из которых порождает соответствующую концепцию равновесия, то есть определяет, в каком смысле устойчивым должен быть прогнозируемый исход игры. Параллельно будем обсуждать ту информированность, которая необходима для реализации равновесия.

**Равновесие в доминантных стратегиях.** Если для некоторого агента множество (1) не зависит от обстановки, то оно составляет множество его доминантных стратегий (совокупность доминантных стратегий агентов называется *равновесием в доминантных стратегиях* – РДС) [21]. Если у каждого из агентов существует доминантная стратегия, то они могут принимать решения независимо, то есть выбирать действия, не имея никакой информации и не делая никаких

---

[8] *Состояние природы может быть, в том числе, вектором, компоненты которого отражают индивидуальные характеристики агентов.*

предположений об обстановке. К сожалению, РДС существует далеко не во всех играх.

Для реализации агентами равновесия в доминантных стратегиях, если последнее существует, достаточно знания каждым из них только своей целевой функции и допустимых множеств $X'$ и $\Omega$.

**Гарантирующее равновесие.** Той же информированностью должны обладать агенты для реализации *гарантирующего* (*максиминного*) *равновесия*, которое существует почти во всех играх:

(2) $x_i^г \in \operatorname{Arg} \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}} \min\limits_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$

Если хотя бы для одного из агентов множество (1) зависит от обстановки (то есть не существует РДС), то дело обстоит более сложным образом. Исследуем соответствующие случаи.

**Равновесие Нэша.** Определим многозначное отображение

(3) $BR(\theta, x) = (BR_1(\theta, x_{-1}); BR_2(\theta, x_{-2}), \ldots, BR_n(\theta, x_{-n}))$.

*Равновесием Нэша* [21, 68, 132] при состоянии природы $\theta$ (точнее – *параметрическим равновесием Нэша*) называется точка $x^*(\theta) \in X'$, удовлетворяющая следующему условию:

(4) $x^*(\theta) \in BR(\theta, x^*(\theta))$.

Вложение (4) можно также записать в виде:

$$\forall\, i \in N,\ \forall\, y_i \in X_i \quad f_i(\theta, x^*(\theta)) \geq f_i(\theta, y_i,\ x_{-i}^*(\theta)\,).$$

Множество $E_N(\theta)$ всех точек вида (4) можно описать следующим образом:

(5) $E_N(\theta) = \{x \in X' \mid x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}),\ i \in N\}$.

Для случая двух агентов альтернативным эквивалентным способом определения множества $E_N(\theta)$ является его задание в виде множества пар точек ($x_1^*(\theta)$, $x_2^*(\theta)$), одновременно удовлетворяющих следующим условным соотношениям [17, 109, 132]:

(6) $x_1^*(\theta) \in BR_1(\theta, BR_2(\theta, BR_1(\theta, \ldots BR_2(\theta,\ x_2^*(\theta))\ldots)))$,

(7) $x_2^*(\theta) \in BR_2(\theta, BR_1(\theta, BR_2(\theta, \ldots BR_1(\theta,\ x_1^*(\theta))\ldots)))$.

Рассмотрим, какой информированностью должны обладать агенты, чтобы реализовать равновесие Нэша путем одновременного и независимого выбора своих действий.

По определению равновесие Нэша является той точкой, одностороннее отклонение от которой невыгодно ни для одного из агентов (при условии, что остальные агенты выбирают соответствующие компоненты равновесного по Нэшу вектора действий). Если агенты многократно осуществляют выбор действий, то точка Нэша является в определенном смысле (см. подробности в [63]) устойчивой и может считаться реализуемой в рамках знания, как и в случае с РДС, каждым агентом только своей целевой функции и допустимых множеств $X'$ и $\Omega$ (при этом, правда, необходимо введение дополнительных предположений о принципах принятия агентами решений о выборе действий в зависимости от истории игры [34, 56, 109]).

В настоящей работе рассмотрение ограничивается одношаговыми играми, поэтому в случае однократного выбора агентами своих действий знания ими только своих целевых функций и множеств $X'$ и $\Omega$ для реализации равновесия Нэша уже недостаточно. Поэтому введем следующее предположение, которое будем считать выполненным в ходе всего последующего изложения: информация об игре $\Gamma$, множестве $\Omega$ и рациональности агентов является общим знанием.

Содержательно введенное предположение означает, что каждый из агентов рационален, знает множество участников игры, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также знает множество возможных значений состояний природы. Кроме того, он знает, что другие агенты знают это, а также то, что они знают, что он это знает и т.д. до бесконечности (см. выше). Такая информированность может, в частности, достигаться публичным (то есть одновременно всем агентам собранным вместе) сообщением соответствующей информации, что обеспечивает возможное достижение всеми агентами бесконечного *ранга информационной рефлексии*. Отметим, что введенное предположение ничего не говорит об информированности агентов относительно конкретного значения состояния природы.

Если значение состояния природы является общим знанием, то этого оказывается достаточно для реализации равновесия Нэша. В качестве обоснования этого утверждения промоделируем на примере игры двух лиц ход рассуждений первого агента (второй агент рассуждает полностью аналогично, и его рассуждения будут рассматриваться отдельно только в том случае, если они отличаются от рассуждений первого агента). Он рассуждает следующим образом (см. выражение (6)): "Мое действие, в силу (1), должно быть наилучшим ответом на действие второго агента при заданном состоянии природы. Следовательно, мне надо промоделировать его поведение. Про него (в силу предположения о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием) мне известно, что он будет действовать в рамках (1), то есть будет искать наилучший ответ на мои действия при заданном состоянии природы (см. (7)). Для этого ему необходимо промоделировать мои действия. При этом он будет (опять же, в силу введенных предположений о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием) рассуждать так же, как и я, и т.д. до бесконечности (см. (6))." В теории игр для подобных рассуждений используется удачная физическая аналогия отражения в зеркалах – см., например, [48].

Таким образом, для реализации равновесия Нэша достаточно, чтобы все параметры игры, а также значение состояния природы были общим знанием (ослабление этого предположения рассмотрено в [97]). Рассматриваемые в настоящей работе рефлексивные игры характеризуются тем, что значение состояния природы не является общим знанием, и каждый агент в общем случае имеет собственные представления об этом значении, представлениях других агентов и т.д.

**Субъективное равновесие.** Рассмотренные виды равновесия являются частными случаями *субъективного равновесия*, которое определяется как вектор действий агентов, каждая компонента которого является наилучшим ответом соответствующего агента на ту обстановку игры, которая может реализоваться с его субъективной точки зрения. Рассмотрим возможные случаи.

Предположим, что $i$-ый агент рассчитывает на реализацию обстановки игры $\widehat{x}_{-i}^{B}$ ("B" обозначает beliefs; иногда используются термины «предположение», «догадка» – conjecture) и состояния природы $\widehat{\theta}_i$, тогда он выберет

(8) $x_i^B \in BR_i(\widehat{\theta}_i,\ \widehat{x}_{-i}^{B}),\ i \in N.$

Вектор $x^B$ является *точечным субъективным равновесием*.

Отметим, что при таком определении «равновесия» не требуется *обоснованности* предположений агентов о действиях оппонентов, то есть может оказаться, что $\exists\, i \in N$: $\widehat{x}_{-i}^{B} \neq x_{-i}^{B}$. Обоснованное субъективное равновесие, то есть такое, что $\widehat{x}_{-i}^{B} = x_{-i}^{B}$, $i \in N$, является равновесием Нэша (для этого, в частности, достаточно, чтобы все параметры игры были общим знанием, и чтобы каждый агент при построении $\hat{x}_{-i}^{B}$ моделировал рациональное поведение оппонентов). В частном случае, если наилучший ответ каждого агента не зависит от предположений об обстановке, то субъективное равновесие является равновесием в доминантных стратегиях.

В более общем случае $i$-ый агент может рассчитывать на выбор оппонентами действий из множества $X_{-i}^{B} \subseteq X_{-i}$ и реализацию состояния природы из множества $\hat{\Omega}_i \subseteq \Omega$ $i \in N$. Тогда наилучшим ответом будет *гарантирующее субъективное равновесие*:

(9) $x_i(X_{-i}^{B},\ \hat{\Omega}_i) \in \operatorname{Arg} \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}^{B}} \min\limits_{\theta \in \hat{\Omega}_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$

Если $X_{-i}^{B} = X_{-i}$, $\hat{\Omega}_i = \Omega$, $i \in N$, то $x_i(X_{-i}^{B}) = x_i^{г}$, $i \in N$, то есть гарантирующее субъективное равновесие является «классическим» гарантирующим равновесием. Разновидностью гарантирующего субъективного равновесия является П-равновесие, подробно описанное в [9].

В еще более общем случае в качестве наилучшего ответа $i$-го агента можно рассматривать распределение вероятностей $p_i(x_i)$, где $p_i(\cdot) \in \Delta(X_i)$ – множеству всевозможных распределений на $X_i$, которое максимизирует ожидаемый выигрыш агента с учетом его представлений о распределении вероятностей $\mu_i(x_{-i}) \in \Delta(X_{-i})$ действий, выбираемых другими агентами, и распределении вероятностей $q_i(\theta) \in \Delta(\Omega)$ состояния природы (получим *Байесов принцип принятия решений*):

(10) $p_i(\mu_i(\cdot), q_i(\cdot), \cdot) =$

$$= \arg \max_{p_i \in \Delta(X_i)} \int\limits_{X', \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i})\ p_i(x_i)\ q_i(\theta)\ \mu_i(x_{-i})\ d\theta\ dx,\ i \in N.$$

Таким образом, для реализации субъективного равновесия требуется минимальная информированность агентов – каждый из них должен знать свою целевую функцию $f_i(\cdot)$ и допустимые множества $\Omega$ и $X'$. Однако при такой информированности совокупность предположений агентов о состоянии природы и о поведении оппонентов могут быть *несогласованными*. Для достижения согласованности, то есть для того, чтобы предположения оправдывались, необходимы дополнительные предположения о взаимной информированности агентов. Наиболее сильным является предположение об общем знании, которое превращает субъективное точечное равновесие в равновесие Нэша, а совокупность Баейсовых принципов принятия решений – в равновесие Байеса–Нэша.

**Равновесие Байеса–Нэша.** Если в игре имеется неполная информация (см. [114]), то Байесова игра описывается следующим набором:

- множеством $N$ агентов;
- множеством $K$ возможных *типов* агентов, где тип $i$-го агента $k_i \in K_i$, $i \in N$, вектор типов $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K' = \prod_{i \in N} K_i$;
- множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;
- набором функций полезности $u_i$: $K' \times X' \to \Re^1$;
- представлениями $\mu_i(\cdot|k_i) \in \Delta(K_{-i})$, $i \in N$, агентов.

*Равновесие Байеса-Нэша* в игре с неполной информацией определяется как набор стратегий агентов вида $\sigma_i$: $K_i \to X_i$, $i \in N$, которые максимизируют соответствующие ожидаемые полезности

(11) $$U_i(k_i, \sigma_i(\cdot), \sigma_{-i}(\cdot)) = \int\limits_{k_{-i} \in \prod_{j \neq i} K_j} u_i(k, \sigma_i(k_i), \sigma_{-i}(k_{-i}))\, \mu_i(k_{-i}|\, k_i)\, dk_{-i},\ i \in N.$$

В Байесовых играх, как правило, предполагается, что представления $\{\mu_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ являются общим знанием. Для этого, в частности, достаточно, чтобы они были *согласованы*, то есть выводились каждым из агентов по формуле Байеса из распределения $\mu(k) \in \Delta(K')$, которое является общим знанием.

Для Баейсовых игр, в которых $\{\mu_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ является общим знанием, в [100, 135] введено понятие *рационализируемых стратегий* (*rationalizable strategies*) $D_i \subseteq \Delta(X_i)$, $i \in N$, таких что $D_i \subseteq BR_i(D_{-i})$, $i \in N$. В играх двух лиц множество рационализируемых стратегий совпадает с множеством стратегий, полученным в результате итеративного исключения строго доминируемых стратегий[9] [132]. Обобщение рационализируемых стратегий на случай максиминного

---

[9] *Напомним, что строго доминируемой (strongly dominated) называется такая стратегия агента, что найдется другая его стратегия, которая при любой обстановке обеспечивает этому агенту строго больший выигрыш. Итеративное исключение (iterative elimination) строго доминируемых стратегий заключается в последовательном (в общем случае бесконечном) их исключении из множества рассматриваемых стратегий агентов, что приводит к нахождению «слабейшего» решения игры – множества недоминируемых стратегий.*

(гарантирующего) равновесия осуществлено в [94]. Возможно усложнение конструкций субъективного равновесия за счет введения запретов на определенные комбинации действий агентов и т.д.

Таким образом, реализация РДС, гарантирующего и субъективного равновесия (если они существуют) требует, чтобы каждый агент обладал, как минимум, информацией о своей целевой функции и всех допустимых множествах, а реализация равновесия Нэша, если оно существует, дополнительно требует, чтобы значения всех существенных параметров являлись общим знанием.

Еще раз отметим, что реализуемость равновесия Нэша подразумевает возможность агентов (и управляющего органа – *центра*, или исследователя операций, если они обладают соответствующей информацией) априори и независимо рассчитать равновесие Нэша и в одношаговой игре сразу выбрать равновесные по Нэшу действия (при этом отдельный вопрос заключается в том, какое из равновесий выберут агенты и центр, если равновесий Нэша несколько [86]). Качественно, общее знание необходимо для того, чтобы каждый из агентов (и центр) мог промоделировать принципы принятия решений другими агентами, в том числе учитывающими его собственные принципы принятия решений и т.д.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что **концепция решения игры тесно связана с информированностью агентов**. Такие концепции решения, как РДС и равновесие Нэша, являются в некотором смысле предельными случаями – первая требует минимальной информированности, вторая – бесконечности ранга информационной рефлексии всех агентов. Поэтому ниже мы опишем другие («промежуточные») случаи информированности агентов – иерархии представлений – и построим соответствующие им решения игры. Прежде чем реализовывать эту программу, проведем обзор известных моделей общего знания и иерархии представлений.

## 1.3. ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

В рассмотренных в предыдущем разделе концепциях равновесия (за исключением, наверное, равновесий Нэша и Байеса-Нэша, в которых предполагается наличие общего знания) рефлексия отсутствует, так как каждый агент не пытается встать на позицию оппонентов.

Рефлексия имеет место в случае, когда агент имеет и использует при принятии решений иерархию представлений – свои представления о представлениях других агентов, их представлениях о его представлениях и представлениях друг друга и т.д. Анализ представлений о неопределенных факторах соответствует информационной рефлексии, а представлений о принципах принятия решений – стратегической рефлексии. В терминах субъективного равновесия стратегической рефлексии соответствуют предположения агента о том, что оппонент будет вычислять то или иное конкретное, например субъективное гарантирующее, равновесие, а информационной рефлексии – какие конкретные предположения об обстановке будет использовать оппонент.

Рассмотрим известные на сегодняшний день[10] подходы к описанию иерархии представлений и общего знания.

Как отмечается в [97, 99, 115], различают два подхода к описанию информированности – *синтаксический* и *семантический* (напомним, что «синтактика – синтаксис знаковых систем, то есть структура сочетания знаков и правил их образования и преобразования безотносительно к их значениям и функциям знаковых систем», «семантика – изучает знаковые систем как средства выражения смысла, основной ее предмет представляют интерпретации знаков и знакосочетаний» [84, С. 601]). Основы этих подходов были заложены в математической логике [116, 119].

При синтаксическом подходе иерархия представлений описывается в явном виде. Если представления задаются распределением вероятностей, то иерархии представлений на некотором уровне иерархии соответствуют распределения на произведении множества состояний природы и распределений, отражающих представления предыдущих уровней [128]. Альтернативой является использование «формул» (в логическом смысле), то есть правил преобразования элементов исходного множества на основе применения логических

---

[10] *Следует отметить, что иерархии представлений и общее знание стали предметом исследований в теории игр совсем недавно – пионерскими являются упомянутые выше книга D. Lewis* (1969) *и статья R. Aumann* (1976). *Анализ хронологии публикаций* (*см. библиографию*) *свидетельствует о растущем интересе к этой проблемной области*.

операций и операторов вида «игрок $i$ считает, что вероятность события … не меньше $\alpha$» [115, 144]. При этом знание моделируется предложениями (формулами), конструируемыми в соответствии с определенными синтаксическими правилами.

В рамках семантического подхода представления агентов задаются распределениями вероятностей на множестве состояний природы. Иерархия представлений при этом порождается исходя только из этих распределений. В простейшем детерминированном случае знание представляется множеством $\Omega$ возможных значений неопределенного параметра и разбиениями $\{P_i\}_{i \in N}$ этого множества. Элемент разбиения $P_i$, включающий $\theta \in \Omega$, представляет собой знание $i$-го агента – множество значений неопределенного параметра, неразличимых с его точки зрения при известном факте $\theta$ [96, 99].

Соответствие (условно говоря, «эквивалентность») между синтаксическим и семантическими подходами установлено в [97, 140 и др.].

Особо следует отметить экспериментальные исследования иерархий представлений в [103, 133, 141 и др.] – см. обзор в [143].

Проведенный краткий обзор свидетельствует, что существуют две «крайности». Первая «крайность» – общее знание (заслугой Дж. Харшаньи [114] является то, что он свел всю информацию об агенте, влияющую на его поведение, к единственной его характеристике – типу – и построил равновесие (Байеса-Нэша) в рамках гипотезы о том, что распределение вероятностей типов является общим знанием). Вторая «крайность» – бесконечная иерархия согласованных или несогласованных представлений. Примером последней служит конструкция, приведенная в [128], которая, с одной стороны, описывает все возможные Баейсовы игры и все возможные иерархии представлений, а, с другой стороны, (в силу своей общности) настолько громоздка, что не позволяет конструктивно ставить и решать конкретные задачи.

Большинство исследований информированности посвящено ответу на вопрос: в каких случаях иерархия представлений агентов описывает общее знание и/или адекватно отражает информированность агентов [102, 105 и др.]. Зависимость решения игры от конечной иерархии согласованных или несогласованных представлений агентов (то есть весь диапазон между двумя отмеченными выше «крайностями») практически не исследовалась. Исключения составляют, во-первых, работа [139], в которой равновесия Байеса–Нэша для трехуровневых иерархий несогласованных вероятностных представлений двух агентов строились в предположении, что на нижнем уровне иерархии представления совпадают с представлениями предыдущего уровня – см. также предположения типа $\Pi_m$ и соответствующие равновесия в [62]. Во-вторых – третья глава настоящей работы, в которой описываются произвольные (конечные или бесконечные, согласованные или несогласованные) иерархии «точечных» представлений, для которых строится и исследуется информационное равновесие – равновесие рефлексивной игры (возможность и целесообразность обобщения полученных результатов на случай интервальных или вероятностных представлений агентов обсуждается в заключении).

Таким образом, актуальным является как исследование стратегической рефлексии (глава 2 настоящей работы), так и построение решения рефлексивной игры, и изучение зависимости этого равновесия от иерархии представлений агентов (глава 3 настоящей работы).

# ГЛАВА 2. СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ

В настоящей главе исследуются теоретико-игровые модели стратегической рефлексии. В разделе 2.1 изучается модель стратегической рефлексии в игре двух лиц, что в разделе 2.2 позволяет решить задачу о максимальном целесообразном ранге стратегической рефлексии в биматричных играх. Раздел 2.3 посвящен обсуждению конечности ранга рефлексии, порождаемой ограниченностью способностей человека по переработке информации.

## 2.1. СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ В ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Рассмотрим последовательно, в порядке возрастания информированности, рефлексивные модели принятия решений в играх двух лиц.

**Нулевой ранг рефлексии.** Рассмотрим проблему принятия агентом решения в случае полного отсутствия информации о состоянии природы (напомним, что предположение о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием, считается выполненным). Представляется разумным, с одной стороны, принцип принятия решений на основе максимального гарантированного результата, в соответствии с которым $i$-ый агент выберет гарантирующую (по состоянии природы и действию оппонента) стратегию

(12) $_1 x_i^г = \arg \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{\theta \in \Omega} \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(\theta, x_i, x_{-i})$.

С другой стороны, гипотетически принцип (12) принятия решений не является единственно возможным – агент может рассчитывать, что его оппонент выберет не наихудшее действие, а собственную гарантирующую стратегию (отметим, что каждый агент может вычислить гарантирующую стратегию оппонента). Тогда наилучшим ответом будет

(13) $_2 x_i^г = \arg \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, {}_1 x_{-i}^г)$.

Но аналогичным образом может рассуждать оппонент рассматриваемого агента. Если рассматриваемый агент допускает такую возможность, тогда его гарантирующей стратегией будет

(14) $_3 x_i^г = \arg \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, {}_2 x_{-i}^г)$,

где $_2 x_{-i}^г$ вычисляется в соответствии с (13) заменой индекса «$i$» на «-$i$» и наоборот.

Цепочку наращивания «ранга рефлексии» (предположений агента о ранге рефлексии оппонента) можно продолжать и далее (см. аналогии в динамических моделях, рассматриваемых в [66]), определив рекуррентно

(15) $_k x_i^г = \arg \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, {}_{k-1} x_{-i}^г)$, $k = 2, 3, ...$,

где $_1 x_i^г$, $i = 1, 2$, определяются (12). Набор действий типа (15) будем называть множеством *рефлексивных гарантирующих стратегий*.

Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 1. Пусть целевые функции агентов имеют вид:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 / 2x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2 - x_2^2 / 2(x_1 + \delta),$$

где $\delta > 0$. Относительно допустимых множеств предположим, что $X_1 = X_2 = [\varepsilon; 1]$, $0 < \varepsilon < 1$. Будем считать, что каждая из констант $\varepsilon$ и

$\delta$ много меньше единицы. Гарантирующие стратегии агентов приведены в таблице 1.

*Табл*. 1. *Гарантирующие стратегии агентов в примере 1*

| **k** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **...** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ${}_k x_1^г$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | **...** |
| ${}_k x_2^г$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 4\delta$ | **...** |

Видно, что, во-первых, значения гарантирующих действий увеличиваются с ростом «ранга рефлексии». Во-вторых, различным «рангам рефлексии» агентов соответствуют в общем случае различные гарантирующие действия (отметим, что равновесием[11] Нэша в данном примере является вектор (1; 1)) •[12].

Вопрос о том, какое действие следует выбирать агенту, остается открытым. Единственно, можно констатировать, что, обладая информацией только о множестве возможных значений состояния природы, $i$-ый агент может выбирать одно из действий ${}_k x_i^г$, $i = 1, 2$; $k = 1, 2, ...$, определяемых выражениями (12) и (15).

Доопределить рациональный выбор агента в рассматриваемой модели можно следующим образом. Если агенту неизвестна целевая функция оппонента (что исключено в рамках предположения о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием), то единственным его рациональным действием является выбор (12), то есть классический МГР. В рамках введенных предположений агенту известна целевая функция оппонента, а также известно, что оппоненту известен этот факт и т.д. Поэтому с точки зрения агента нерационально использование классического МГР, и ему следует рассчитывать, как минимум, что оппонент будет ис-

---

[11] *В качестве отступления заметим, что, если в рассматриваемом примере целевая функция второго агента имеет вид* $f_2(x_1, x_2) = x_2 + x_2^2/2x_1$, *то у него существует доминантная стратегия* (*равная единице*), *и последовательность гарантирующих стратегий первого агента стабилизируется уже на втором члене*: ${}_1 x_i^г = \varepsilon$, ${}_2 x_i^г = 1/2$. *Если первый агент может вычислить доминантную стратегию своего оппонента, то представляется рациональным выбор им действия* ${}_2 x_i^г$.

[12] *Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера или доказательства.*

пользовать МГР, что приведет к выбору ${}_2x_i^г$. Но, опять же, в силу того, что целевые функции являются общим знанием, агент может предположить, что такой ход его рассуждений может быть восстановлен оппонентом, что сделает целесообразным выбор ${}_3x_i^г$ и т.д. до бесконечности. Следовательно, с точки зрения агента остается неопределенность относительно «ранга рефлексии» оппонента[13]. Относительно этого параметра он не имеет никакой информации (если у агента имеются некоторые убеждения по этому поводу, то может реализоваться соответствующее субъективное равновесие), что делает рациональным использование гарантированного результата по «рангу рефлексии» оппонента:

$$(16)\ x'_i = \arg \max_{x_i \in X_i} \min_{j=1,2,\dots} \min_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, {}_jx_{-i}^г).$$

Отметим, что, во-первых, $x'_i$ может отличаться от классической гарантирующей стратегии ${}_1x_i^г$, определяемой выражением (12). Во-вторых, при использовании стратегии (16) факт наличия доминантной стратегии оппонента будет учтен агентом (см. сноску в примере 1).

В таблице 2 приведены значения целевой функции первого агента в примере 1 в зависимости от «ранга рефлексии» оппонента и соответствующие действия оппонента. Видно, что при использовании стратегии (16) выигрыш $i$-го агента равен $\varepsilon + \delta$, что превышает выигрыш $\varepsilon$, получаемый при использовании классического МГР.

*Табл. 2. Выигрыши первого агента в примере* 1

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2 f_1(BR_1({}_jx_2^г), {}_jx_2^г)$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 4\delta$ |
| ${}_jx_2^г$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + \delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 2\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 3\delta$ | $\varepsilon + 4\delta$ |

[13] *Другими словами, исходная игра может быть заменена на игру, в которой агенты выбирают ранги своей рефлексии. Для новой игры могут быть также построены рефлексивные аналоги и т.д. до бесконечности* (*см. примеры*: *«Пенальти» – во введении, «Игра в прятки» и «Снос на мизере» – в разделе 2.2*). *Одним из возможных способов борьбы с подобной «бесконечностью» является использование гарантированного результата по рангу рефлексии оппонента. Другим возможным способом, эффективным для конечных игр, является определение максимального целесообразного ранга рефлексии агентов – см. раздел 2.2.*

Таким образом, рациональным в рассматриваемой модели можно считать использование агентом стратегии (15) или (16).

**Первый ранг рефлексии.** Предположим теперь, что агент обладает определенной информацией о состоянии природы, которую считает истинной, и больше ему ничего достоверно не известно.

В рамках существующей неопределенности в силу принципа детерминизма у агента, осуществляющего стратегическую рефлексию, имеются две альтернативы – либо предположить, что его оппонент не обладает никакой информацией, либо считать, что последний обладает той же информацией, что и он сам[14].

Если агент не вводит никаких предположений об информированности и принципах поведения оппонента, то он вынужден применять принцип максимального гарантированного результата (МГР) – никакой дополнительной (по сравнению с рассмотренной выше моделью нулевого ранга рефлексии) информации об оппоненте у агента не добавилось[15] – то есть рассчитывать на наихудший для него выбор второго агента из множества стратегий типа (16). Гарантирующей стратегией будет:

(17) $x_i^{г}(\theta_i) = \arg\max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{j=1,2,\dots} f_i(\theta_i, x_i, {}_j x_{-i}^{г})$.

Отметим, что, находясь в информационной ситуации, соответствующей рассматриваемой модели, вычисляя (17), агент рассматривает оппонента как находящегося в информационной ситуации, соответствующей предыдущей модели. Этот общий принцип – обладая некоторой информацией, агент может рассматривать оппонента как имеющего либо тот же, либо на единицу меньший ранг рефлексии – будет использован и в ряде других рефлексивных моделей принятия решений.

Если первый агент считает, что его оппонент обладает той же информацией, что и он сам (аналогично может рассуждать и второй агент – см. предположение $П_1$ в [62]), то он вычисляет *субъективное*

---

[14] *Данный принцип (и его обобщения) будет широко использоваться ниже при определении конечных информационных структур – действительно, обладая информацией $I_i$, i-ый агент может в случае неопределенности приписывать другим агентам только информированность, согласованную с $I_i$.*

[15] *Конечно, агент может предполагать, что оппонент обладает некоторой информацией, но, так как эта информация не фигурирует в модели, то рассматривать подобные предположения мы не будем.*

*равновесие* (то есть «равновесие Нэша» для соответствующего субъективного описания игры) $E_N(\theta_1) = \{(x^*_{11}(\theta_1),\ x^*_{12}(\theta_1))\}$ следующего вида:

$$(18)\ \forall x_1 \in X_1 \quad f_1(\theta_1,\ x^*_{11}(\theta_1),\ x^*_{12}(\theta_1)) \geq f_1(\theta_1, x_1,\ x^*_{12}(\theta_1)),$$

$$\forall x_2 \in X_2 \quad f_2(\theta_1,\ x^*_{11}(\theta_1),\ x^*_{12}(\theta_1)) \geq f_1(\theta_1,\ x^*_{11}(\theta_1), x_2).$$

Содержательно, приведенные системы неравенств отражают вычисление первым агентом «своего» равновесия Нэша и выбор соответствующей координаты этого равновесия. В общем случае агент и его оппонент вычислят разные равновесия – совпадение возможно, если информированность такова, что $x^*_{ij}(\theta_i) = x^*_{jj}(\theta_j)$, $i, j = 1, 2$.

Таким образом, рациональным в модели первого ранга рефлексии можно считать выбор агентом либо рефлексивной гарантирующей стратегии (17), либо субъективного равновесия (18).

Субъективное равновесие (18), определяемое первым агентом, может быть условно изображено в виде графа с двумя вершинами $x_1$ и $x_{12}$, соответствующими первому агенту и его представлениям о втором агенте[16] (см. рисунок 1). Входящие стрелки при этом отражают ту информацию, которую использует каждый из агентов об оппоненте.

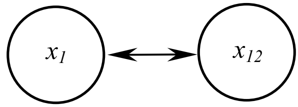


*Рис*. 1. *Субъективное равновесие в модели первого ранга стратегической рефлексии*

**Второй ранг рефлексии.** В модели второго ранга рефлексии $i$-ый агент обладает информацией о представлениях $\theta_{ij}$ оппонента о состоянии природы и о собственных представлениях $\theta_{ii}$ о состоянии природы (будем считать, что $\theta_i = \theta_{ii}$ – см. аксиому автоинформированности ниже).

Агент может рассчитывать, что его оппонент выберет гарантирующую (в рамках знания $\theta_{ij}$) стратегию. Тогда наилучшим ответом будет

---

[16] *Подобные агенты, существующие в представлениях других агентов, называются <u>фантомными агентами</u>.*

(19) $_{2}x_i^{г} = \arg\max_{x_i \in X_i} f_i(\theta_i, x_i, x_{-i}^{г}(\theta_{ij}))$,

где $x_{-i}^{г}(\theta_{i,-i})$ определяется (17).

Помимо гарантирующей стратегии (19), первый агент может вычислить *субъективное равновесие*

$$E_N(\theta_1, \theta_{12}) = \{(x_{11}^*(\theta_1, \theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1, \theta_{12}))\}$$

следующего вида:

(20) $\forall x_1 \in X_1 \; f_1(\theta_1, x_{11}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12})) \geq f_1(\theta_1, x_1, x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12}))$,

$\forall x_2 \in X_2 \; f_2(\theta_{12}, x_{121}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12})) \geq f_2(\theta_{12}, x_{121}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_2)$,

$\forall x_1 \in X_1 \; f_1(\theta_{12}, x_{121}^*(\theta_1,\theta_{12}), x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12})) \geq f_2(\theta_{12}, x_1, x_{12}^*(\theta_1,\theta_{12}))$.

Как и в предыдущей модели, в общем случае первый агент и его оппонент вычислят разные равновесия.

Таким образом, рациональным в модели второго ранга рефлексии можно считать выбор агентом либо рефлексивной гарантирующей стратегии (19), либо субъективного равновесия (20).

Отметим, что первые две системы неравенств в (20) отражают равновесие Нэша с точки зрения первого агента, а вторая и третья система неравенств – равновесие Нэша, которое должен определить второй агент с точки зрения первого агента – см. граф на рисунке 3, на котором пунктиром обведена «модель» второго агента, которую использует первый агент при принятии решений.

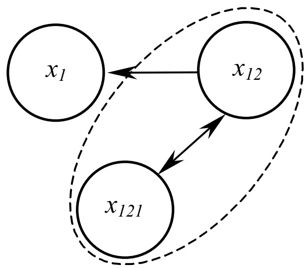


*Рис.* 3. *Субъективное равновесие в модели* $RDM_2$

Проведенный анализ простейших моделей стратегической рефлексии первых нескольких рангов свидетельствует, что в случае нескольких агентов и недостаточной их информированности можно рассматривать процессы принятия ими решений независимо – каждый из них моделирует поведение своих оппонентов, то есть стремится построить собственную замкнутую модель игры (см. обсуждение различий субъективного и объективного описания игры в [18]). В случае общего знания субъективные модели совпадают.

Выше мы рассмотрели рефлексию нулевого, первого и второго рангов. Наращивание рангов рефлексии можно по аналогии производить и дальше. Существенными во всех моделях являются предположения агента о том, какой ранг рефлексии имеет его оппонент, то есть, фактически, <u>ранг рефлексии агента определяется тем, какой ранг рефлексии он приписывает оппоненту</u>.

Никаких разумных рекомендаций, ограничивающих рост ранга собственной рефлексии, априори агенту предложить нельзя. С этой точки зрения можно констатировать, что не существует универсальной концепции равновесия для игр со стратегической рефлексией. Единственным выходом является использование в этом случае либо МГР по рангам рефлексии оппонента, либо субъективного равновесия, в рамках которого каждый агент вводит определенные предположения о ранге рефлексии оппонента и выбирает свое действие, оптимальное в рамках этих предположений.

Поэтому сконцентрируем основное внимание на изучении случаев, когда неограниченного роста ранга рефлексии не происходит. Существуют две причины, по которым ранг рефлексии может оказаться конечным. Во-первых, это – нецелесообразность увеличения ранга рефлексии, свыше некоторого, с точки зрения выигрыша агента (когда дальнейшее увеличение ранга рефлексии заведомо не приводит к увеличению выигрыша). Во-вторых, возможности человека по переработке информации ограничены, и бесконечный ранг рефлексии является не более чем математической абстракцией. Поэтому в последующих разделах настоящей главы приводятся модели, учитывающие обе приведенные причины – в разделе 2.2 на примере биматричных игр определяется максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии, а в разделе 2.3 исследуется роль информационных ограничений.

## 2.2. РЕФЛЕКСИЯ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Основная идея, развиваемая в настоящем разделе, заключается в том, что в биматричных играх[17], в которых не существует равновесия Нэша, или в которых при существующем равновесии Нэша агенты выбирают субъективные гарантирующие стратегии (см.

[17] *Напомним, что биматричными называются конечные игры двух лиц.*

предыдущий раздел настоящей работы) выигрыш каждого из агентов зависит как от его ранга рефлексии, так и от ранга рефлексии оппонента. Кроме того, показывается, что неограниченное увеличение ранга стратегической рефлексии не приводит к увеличению выигрыша. Перейдем к формальному описанию.

Рассмотрим биматричную игру[18], в которой выигрыши первого и второго агентов задаются матрицами $\boldsymbol{A} = ||a_{ij}||$ и $\boldsymbol{B} = ||b_{ij}||$ размерности $n \times m$ соответственно. Обозначим[19] $I = \{1, 2, ..., n\}$ – множество действий первого агента (выбирающего строку), $J = \{1, 2, ..., m\}$ – множество действий второго агента (выбирающего столбец).

В рассматриваемой игре гарантирующие стратегии агентов следующие:

$$i_0 \in \operatorname{Arg} \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij}, \;\; j_0 \in \operatorname{Arg} \max_{j \in J} \min_{i \in I} b_{ij}.$$

Введем следующие предположения. Пусть матрицы выигрышей таковы, что каждое действие каждого агента является наилучшим ответом на некоторое действие оппонента, и пусть, кроме того, наилучший ответ на каждое действие оппонента единственен (если наилучших ответов несколько, то можно ввести правило, доопределяющее выбор агента).[20] Следовательно, при определении наилучших ответов вместо выражений «$i_{\dots} \in \operatorname{Arg} \max\limits_{i \in I} ...$» и «$j_{\dots} \in \operatorname{Arg} \max\limits_{j \in J} \dots$» можно использовать, соответственно, выражения «$i_{\dots} = \arg \max\limits_{i \in I} ...$» и «$j_{\dots} = \arg \max\limits_{j \in J} \dots$».

Обозначим $a_0 = \max\limits_{i \in I} \min\limits_{j \in J} a_{ij}$, $b_0 = \max\limits_{j \in J} \min\limits_{i \in I} b_{ij}$ – максимальные гарантированные результаты (МГР) первого и второго агентов соответственно.

---

[18] *Так как матричные игры (антагонистические конечные игры двух лиц) являются частным случаем биматричных игр, то все приведенные в настоящем разделе результаты справедливы и для матричных игр.*

[19] *Будем надеяться, что использование одного и того же (исторически сложившегося) обозначения для информационной структуры и множества действий первого агента не приведет к путанице.*

[20] *Если отказаться от этих предположений, то все полученные в настоящем разделе результаты останутся в силе, так как вводимые предположения позволяют получить для максимального целесообразного ранга стратегической рефлексии оценку сверху.*

Определим рефлексивную биматричную игру $MG_{kl}$ (matrix game) как биматричную игру с матрицами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, в которой первый и второй агенты имеют ранги рефлексии, равные $k$ и $l$ соответственно, $k, l \in \aleph$, где $\aleph$ – множество натуральных чисел.

Поясним, что будет пониматься под *рангом рефлексии* (точнее – под рангом стратегической рефлексии) *в биматричных играх*. В биматричных (и не только биматричных – см. [13]) играх выбор действий агентами может осуществляться на основании знания рангов рефлексии оппонента. Ранги рефлексии определяются следующим образом. «Агент имеет нулевой ранг рефлексии, если он знает только матрицу платежей. Агент обладает первым рангом рефлексии, если он считает, что его противники имеют нулевой ранг рефлексии, то есть знают только матрицу платежей. Вообще, агент с $k$-ым рангом рефлексии предполагает, что его противники имеют $k$–1-й ранг рефлексии. Он проводит за них необходимые рассуждения по выбору стратегии и выбирает свою стратегию на основе знания матрицы платежей и экстраполяции действий своих противников» [72]. Приведем иллюстративный пример.

Пример 2 (*Игра в прятки*) [71]. Первый агент прячется в одной из нескольких комнат разной освещенности, а другой агент должен выбрать ту комнату, где будет его искать. Степени освещенности известны обоим агентам.

Стратегии агентов следующие. Ищущий при прочих равных условиях предпочитает искать, где светлее (там проще найти). Прячущемуся понятно, что в более темной комнате шансов найти его меньше, чем в освещенной. Возрастание ранга рефлексии означает, что агенту становится понятно, что это понятно и его противнику, и т.д. Представим ранги рефлексии агентов и соответствующие действия по выбору комнат в виде таблицы 3.

*Табл.* 3. *Ранг рефлексии агентов и соответствующие действия по выбору комнат*

| **Ранг рефлексии агента** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Комната, выбираемая прячущимся** | Самая темная | Любая, кроме самой светлой | Любая, кроме самой темной | Самая светлая | Самая темная |

| **Комната, выбираемая ищущим** | Самая светлая | Самая темная | Любая, кроме самой светлой | Любая, кроме самой темной | Самая светлая |
|---|---|---|---|---|---|

Можно видеть, что после второго ранга рефлексии исчерпывается все множество допустимых действий, а после третьего ранга рефлексии стратегии выбора комнат начинают повторяться. Этот факт являлся иллюстрацией того, что в игре двух лиц увеличение рангов рефлексии выше определенного объективно не дает ничего нового, хотя субъективное нарастание сложности может продолжаться.

Несоответствие рангов рефлексии успешности деятельности состоит в следующем. Пусть прячущийся имеет 0-й ранг (прячется в самой темной комнате). Если при этом ищущий имеет 1-й ранг, то он всегда выигрывает (ищет в самой темной комнате). Но если ищущий имеет 3-й ранг (ищет в любой комнате, кроме самой темной), то он всегда проигрывает прячущемуся с 0-м рангом, поскольку тот, как мы помним, не затрудняясь рассуждениями о том, что думает противник, прячется именно в этой самой темной комнате, куда ищущий, проведя серию рефлексивных рассуждений, никогда не заглянет.

Таким образом, невозможно однозначно утверждать, что более высокий ранг рефлексии лучше более низкого. Предпочтительность того или иного ранга определяется его взаимодействием с рангом рефлексии противника. •

Так как в биматричных играх предполагается, что каждый агент имеет некое убеждение о ранге рефлексии оппонента [71, 72], то это позволяет использовать понятие субъективной гарантирующей стратегии. Определим *субъективные гарантирующие стратегии* в биматричной игре $MG_{kl}$:

(21) $i_k = \arg \max\limits_{i \in I} \; a_{ij_{k-1}}$, $j_l = \arg \max\limits_{j \in J} \; b_{i_{l-1}j}$, $k, l \in \aleph$.

Таким образом, игра $MG_{00}$ совпадает с исходной игрой, а «равновесием» в игре $MG_{kl}$ является ($a_{i_k j_l}$ ; $b_{i_k j_l}$), $k, l \in \aleph$. Отметим два любопытных факта. Во-первых, выигрыш любого агента в игре $MG_{kl}$ при $k \geq 1, l \geq 1$ может оказаться меньше максимального гарантированного (см. пример «Снос на мизере» ниже). Во-вторых, приписывание каждым агентом оппоненту ранга рефлексии на единицу меньше его собственного противоречиво, так как в игре $MG_{kl}$ при $k \geq 1$, $l \geq 1$ это означает, что должно одновременно выполняться

$$l = k - 1 \text{ и } k = l - 1,$$

что, очевидно, невозможно. Следовательно, равновесие в рефлексивной игре является существенно субъективным, и априори агенты не знают в какую игру они играют (ранги рефлексии обоих агентов не могут быть общим знанием, так как это противоречило бы самому определению ранга рефлексии). Поэтому перспективным направлением будущих исследований представляется изучение информационной рефлексии относительно рангов рефлексии агентов в биматричных играх.

Внутренняя противоречивость стратегической рефлексии в биматричных играх может быть проиллюстрирована следующей схемой – на рисунке 4а приведено субъективное описание игры $MG_{kl}$ в терминах графа рефлексивной игры с точки зрения первого агента, на рисунке 4б – субъективное описание той же игры с точки зрения второго агента.

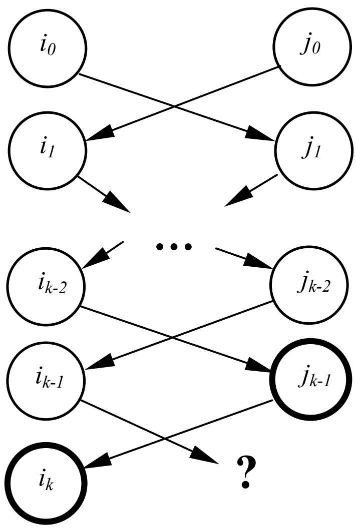


*Рис. 4а. Субъективное описание игры $MG_{kl}$ с точки зрения первого агента*

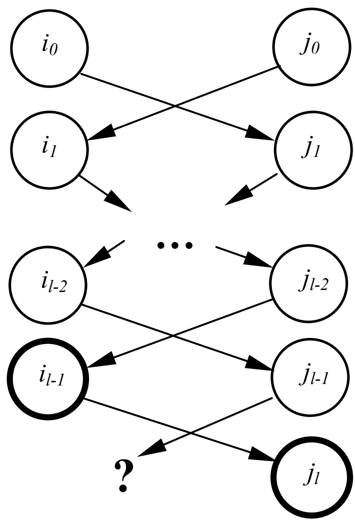


*Рис. 4б. Субъективное описание игры $MG_{kl}$ с точки зрения второго агента*

Несколько забегая вперед (см. раздел 3.4), отметим, что граф рефлексивной игры обладает тем свойством, что число дуг, входящих в каждую его вершину, должно быть на единицу меньше, чем число агентов (то есть в биматричных играх равняться единице). Субъективные равновесные действия выделены жирным шрифтом и приводят к «равновесию» ($i_k, j_l$). Действия $i_{k-1}$ для первого агента и $j_{l-1}$ для второго не используются в соответствующих субъективных описаниях игры (см. знаки вопроса на рисунке 4), то есть каждое из них оказывается внутренне незамкнутым.

Завершив краткое обсуждение внутренней противоречивости определения ранга стратегической рефлексии в биматричных играх, вернемся к исследованию зависимости субъективного равновесия и выигрышей агентов от рангов их рефлексии.

Обозначим $I_K = \bigcup_{k=0,1,\ldots,K} i_k$, $J_L = \bigcup_{l=0,1,\ldots,L} j_l$, $K = 0, 1, 2, \ldots$, $L = 0, 1, 2, \ldots$ . Под $I_\infty$ и $J_\infty$ будем понимать соответствующие объединения по всем рангам рефлексии от нуля до бесконечности.

Если одному агенту (или обоим агентам) неизвестен ранг рефлексии оппонента, то целесообразно рассмотрение игры $MG_{\infty\infty}$, в которой каждый агент вычисляет гарантированный результат по рангу рефлексии оппонента. Введем гарантирующие стратегии, соответствующие полной неопределенности относительно ранга рефлексии оппонента:

(22) $i_\infty = \arg \max_{i \in I} \min_{j \in J_\infty} a_{ij}$, $j_\infty = \arg \max_{j \in J} \min_{i \in I_\infty} b_{ij}$.

Аналогично можно определить гарантирующие стратегии в рамках информации о том, что ранг рефлексии оппонента не превышает известной величины (то есть первый агент считает, что ранг рефлексии второго не выше $L$, а второй – что ранг рефлексии первого не выше $K$):

(23) $i^L = \arg \max_{i \in I} \min_{l \in J_L} a_{ij_l}$, $j^K = \arg \max_{j \in J} \min_{k \in I_K} b_{i_k j}$ .

Отметим, что в (23), в отличие от (21), стратегия каждого из агентов не зависит от его собственного ранга рефлексии, а определяется информацией о ранге рефлексии оппонента.

Выражения (21)-(23) не исчерпывают всего многообразия возможных ситуаций, так как, например, первый агент может предположить, что второй выберет $j_\infty$, и тогда его наилучшим ответом будет $\arg\max_{i \in I} a_{ij_\infty}$, и т.д. Кроме того, хотя к увеличению ранга рефлексии способны лишь «сильные» агенты, интуитивно понятно, что при росте этого ранга, то есть при удлинении цепочки рассуждений «я думаю, что он думает, что я думаю...» есть опасность «перемудрить». Сильный агент с высоким рангом рефлексии переоценивает противника, предполагая, что у него ранг рефлексии тоже высокий. Но, если ранг соперника на самом деле низкий, это приводит к проигрышу более слабому противнику [73] – см. примеры «Игра в прятки» и «Снос на мизере». Следовательно, необходимо систематическое исследование соотношения выигрышей агентов в зависимости от типа разыгрываемой игры. Приведем результаты этого исследования.

Существенным для нашего рассмотрения является наличие или отсутствие равновесия Нэша, а также выбор агентами (и использование при построении субъективных равновесий) гарантирующих стратегий или действий, равновесных по Нэшу. Таким образом, возможны следующие четыре ситуации.

Вариант 1 (равновесие Нэша в чистых стратегиях существует, и агенты ориентируются на равновесные по Нэшу действия).

Обозначим $(i^*; j^*)$ – номера равновесных по Нэшу чистых стратегий. Тогда, если по аналогии с (21) считать, что в рефлексивной игре каждый агент выбирает свой наилучший ответ на выбор оппонентом соответствующей компоненты равновесия, то получим, что

(24) $i_k = \arg\max_{i \in I} a_{ij^*}$, $j_l = \arg\max_{j \in J} b_{i^* j}$, $k, l \in \aleph$.

Из (24) в силу определения равновесия Нэша следует, что $i_k = i^*, j_l = j^*$, $k, l \in \aleph$, то есть в рамках варианта 1 стратегическая рефлексия бессмысленна[21] (за исключением, быть может, случая, когда наилучшие ответы определяются таким образом, что агенты выбирают компоненты различных равновесий Нэша в случае, когда последних несколько).

Вариант 2 (равновесие Нэша в чистых стратегиях существует, но агенты выбирают гарантирующие стратегии (21)).

---

[21] *Под бессмысленностью стратегической рефлексии в биматричных играх будем понимать случай, когда равновесие в рефлексивной игре с любой комбинацией ненулевых рангов рефлексии агентов совпадает с равновесием в исходной игре.*

Если гарантирующие стратегии образуют равновесие Нэша (как это имеет место в антагонистических играх с седловой точкой), то попадаем в условия варианта 1. Следовательно, стратегическая рефлексия имеет смысл, только если в рамках варианта 2 равновесие Нэша не совпадает с равновесием в гарантирующих стратегиях $(i_0, j_0)$.

Вариант 3 (равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, и агенты ориентируются на равновесные по Нэшу смешанные стратегии[22]).

Если агенты при определении своих наилучших ответов по аналогии с (24) рассчитывают на то, что оппонент выберет равновесные по Нэшу смешанные стратегии, то легко показать, что максимум ожидаемого выигрыша каждого агента будет достигаться при выборе им также соответствующей равновесной по Нэшу смешанной стратегии. Следовательно, в рамках варианта 3 любое равновесие совпадает с равновесием Нэша в смешанных стратегиях, то есть стратегическая рефлексия в этом случае бессмысленна.

Вариант 4 (равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, и агенты ориентируются на гарантирующие стратегии (21)).

В четвертом варианте анализ рефлексии, очевидно, имеет смысл.

Таким образом, рассмотрев все четыре возможных варианта поведения агентов, получаем, что обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Стратегическая рефлексия в биматричных играх имеет смысл, если агенты используют субъективные гарантирующие стратегии (21), которые не являются равновесными по Нэшу.

Обозначим

(25) $K_{min} = \min \{K \in \aleph \mid I_K = I_\infty\}$,

(26) $L_{min} = \min \{L \in \aleph \mid J_L = J_\infty\}$.

Содержательно, $K_{min}$ и $L_{min}$ – минимальные ранги рефлексии первого и второго агентов, при которых их множества субъективных равновесных действий совпадают с максимально возможными в рассматриваемой игре множествами субъективных гарантирующих стратегий.

---

[22] *Напомним, что в биматричных играх равновесие Нэша в смешанных стратегиях всегда существует.*

В силу определения $\forall K, L \in \aleph \quad I_K \subseteq I_{K+1}, \ J_L \subseteq J_{L+1}$. Значит $\forall K \geq K_{min} \ I_K = I_\infty, \forall L \geq L_{min} \ J_L = J_\infty$.

Если ранг рефлексии первого и второго агентов не превышает $K$ и $L$ соответственно, то множества субъективных гарантирующих стратегий первого и второго агентов с точки зрения оппонента равны $I_{L-1}$ и $J_{K-1}$ соответственно. Значит, увеличение рангов рефлексии может приводить к расширению множества субъективных гарантирующих стратегий, если

(27) $L - 1 < K_{min}$,

(28) $K - 1 < L_{min}$.

Отметим, что с рассматриваемой точки зрения *максимальный целесообразный ранг рефлексии*[23] первого агента зависит от свойств субъективных гарантирующих стратегий второго агента (см. (28)), и наоборот.

С другой стороны, агенту не имеет смысла увеличивать ранг своей рефлексии, если он уже «исчерпал» собственное множество возможных субъективных равновесных действий. С этой точки зрения увеличение рангов рефлексии может приводить к расширению множества субъективных гарантирующих стратегий, если

(29) $K < K_{min}$,

(30) $L < L_{min}$.

Объединяя (28) и (29), а также (27) и (30), получаем, что первому агенту не имеет смысла увеличивать свой ранг рефлексии выше

(31) $K_{max} = \min \{K_{min}, L_{min} + 1\}$,

а второму агенту не имеет смысла увеличивать свой ранг рефлексии выше

(32) $L_{max} = \min \{L_{min}, K_{min} + 1\}$.

Обозначим

(33) $R_{max} = \max \{K_{max}, L_{max}\}$.

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

[23] *Под максимальным целесообразным рангом рефлексии агента будем понимать такое его значение, что увеличение ранга рефлексии выше данного не приводит к появлению новых субъективных* (*с точки зрения данного агента*) *равновесий.*

Утверждение 2. Использование агентами в биматричной игре рангов стратегической рефлексии выше, чем (31) и (32), не имеет смысла[24].

Утверждение 2 дает возможность в каждом конкретном случае (для конкретной разыгрываемой игры) каждому агенту (и исследователю операций) вычислить максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии обоих агентов.

Так как величины (31)-(33) зависят от игры (матриц выигрышей), то получим оценки зависимости этих величин от размерности матриц выигрышей (очевидно, что $|I_\infty| \le |I| = n$, $|J_\infty| \le |J| = m$, а для игр размерности два справедлива более точная оценка – см. утверждение 3). Для этого введем в рассмотрение граф наилучших ответов.

*Графом наилучших ответов* $G = (V, E)$ назовем конечный двудольный ориентированный граф, в котором множество вершин $V = I \cup J$, а дуги проведены от каждой вершины (соответствующей действию одного из агентов) к наилучшему на нее ответу оппонента. Опишем свойства введенного графа:

1. Из каждой вершины множества $I$ выходит дуга в вершину множества $J$ (у второго агента есть наилучший ответ на любое действие первого агента), из каждой вершины множества $J$ выходит дуга в вершину множества $I$ (у первого агента есть наилучший ответ на любое действие второго агента).

2. В каждую вершину множества $V$ входит ровно одна дуга (так как каждое действие каждого агента является наилучшим ответом на какое-либо действие оппонента).

3. Если любой путь дважды прошел через одну и ту же вершину, то по определению наилучших ответов его часть является контуром, и в дальнейшем новых вершин в этом пути не появится.

4. Максимальное число попарно различных действий первого агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $i_0$, равно $\min(n; m + 1)$.

5. Максимальное число попарно различных действий второго агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $i_0$, равно $\min(n; m)$.

---

[24] *То есть для любого ранга рефлексии, превышающего указанные оценки, найдется ранг рефлексии, удовлетворяющий указанным оценкам и приводящий к тому же субъективному равновесию.*

6. Максимальное число попарно различных действий первого агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $j_0$, равно min ($n$; $m$).

7. Максимальное число попарно различных действий второго агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине $j_0$, равно min ($n$ + 1; $m$).

Выявленные свойства графа наилучших ответов позволяют получить оценки сверху целесообразных рангов стратегической рефлексии в биматричных играх.

Утверждение 3. В биматричных играх $2 \times 2$, в которых не существует равновесия Нэша, $I_\infty = I$, $J_\infty = J$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную биматричную игру $2 \times 2$, в которой не существует равновесия Нэша. Пусть $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{y_1, y_2\}$. Вычислим гарантирующие стратегии $i_0$ и $j_0$. Положим для определенности $x_1 = i_0$, $y_1 = j_0$.

Возможны два взаимоисключающих варианта: $j_1 = y_1$ и $j_1 = y_2$.

Если $j_1 = y_1$, то $i_1 = i_2 = x_2$ (иначе $(x_1, y_1)$ – равновесие Нэша). Тогда $j_2 = j_3 = y_2$ (иначе $(x_2, y_1)$ – равновесие Нэша). Следовательно, $i_3 = i_4 = x_1$ (иначе $(x_2, y_2)$ – равновесие Нэша). То есть в первом случае $I_\infty = I$, $J_\infty = J$.

Если $j_1 = y_2$, то $i_2 = x_2$ (иначе $(x_1, y_2)$ – равновесие Нэша). Тогда $j_3 = y_1$ (иначе $(x_2, y_2)$ – равновесие Нэша). Следовательно, $i_4 = x_1$ (иначе $(x_2, y_1)$ – равновесие Нэша). То есть во втором случае также $I_\infty = I$, $J_\infty = J$. •

Качественно, утверждение 3 означает, что в биматричной игре $2 \times 2$, в которой не существует равновесия Нэша, любой исход может быть реализован как субъективное равновесие.

Перспективным направлением дальнейших прикладных исследований можно считать анализ субъективных равновесий в базовых *ординарных играх двух лиц* $2 \times 2$ (напомним, что существуют 78 структурно различных ординарных игр, то есть игр, в которых оба агента, каждый из которых имеет два допустимых действия, может строго упорядочить собственные выигрыши от лучшего к худшему [101, 136]).

Утверждение 3 наводит на мысль, что, быть может, во всех биматричных играх, в которых не существует равновесия Нэша, выполнено $I_\infty = I$, $J_\infty = J$. Контрпримером служит приведенный на рисунке 5 граф наилучших ответов в игре $4 \times 4$, в котором вершины $i_0$ и $j_0$ затенены.

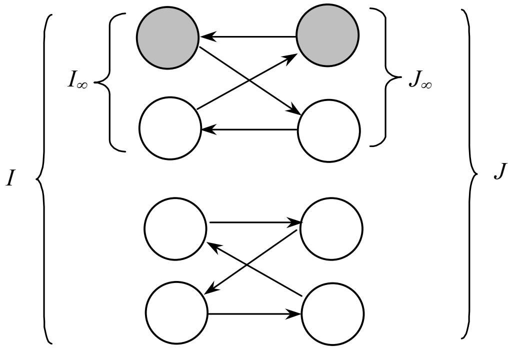


*Рис. 5. Пример графа наилучших ответов в биматричной игре* $4 \times 4$, *в которой* $I_\infty \subset I$, $J_\infty \subset J$

Имея грубые оценки сверху ($|I_\infty| \leq n$, $|J_\infty| \leq m$) «размеров» множеств $I_\infty$ и $J_\infty$, исследуем, как быстро (при каких минимальных рангах стратегической рефлексии) эти множества «покрываются» соответствующими субъективными равновесиями.

Третье свойство графа наилучших ответов означает, что в биматричной игре целесообразное увеличение ранга стратегической рефлексии, начиная со второго шага, обязательно изменяет множество стратегий, которые должны быть субъективными гарантирующими при рангах рефлексии меньших или равных данному.

Так как в биматричных играх множества допустимых действий конечны, то конечны множества $I_\infty$ и $J_\infty$, следовательно, в силу свойств 4-7 графа наилучших ответов конечны и величины $L_{min}$ и $K_{min}$, то есть **в биматричных играх неограниченное увеличение ранга рефлексии заведомо нецелесообразно**. Опять же в силу конечности допустимых множеств, величины (31) и (32), определяющие максимальные целесообразные ранги рефлексии, могут быть легко рассчитаны для любой конкретной биматричной игры. Но свойства графа наилучших ответов позволяют получить конкретные оценки сверху максимальных целесообразных рангов рефлексии.

В биматричной игре $n \times m$ гарантированные оценки[25] величин (31)-(33), очевидно, будут зависеть от размерности матриц выигрышей, то есть $K_{min} = K_{min}(n)$, $L_{min} = L_{min}(m)$. Следовательно,

(34) $K_{max}(n, m) = \min \{K_{min}(n), L_{min}(m) + 1\}$,

(35) $L_{max}(n, m) = \min \{L_{min}(m), K_{min}(n) + 1\}$.

Выражение (33) примет при этом вид:

(36) $R_{max}(n, m) = \max \{K_{max}(n, m), L_{max}(n, m)\}$.

Из свойств 4-7 графа наилучших ответов и выражений (34)-(36) следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. В биматричных играх $n \times m$ максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии первого и второго агентов удовлетворяют следующим неравенствам

(37) $K_{max}(n, m) \le \min \{n, m + 1\}$,

(38) $L_{max}(n, m) \le \min \{m, n + 1\}$,

(39) $R_{max}(n, m) \le \max \{\min \{n, m + 1\}, \min \{m, n + 1\}\}$.

Следствие 1. В биматричной игре $n \times n$, $n \ge 2$, максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии любого агента[26]

$$R_{max}(n, n) \le n.$$

Для случая двух допустимых действий (в силу его распространенности в прикладных моделях) сформулируем отдельное следствие.

Следствие 2. В биматричной игре $2 \times 2$ максимальный целесообразный ранг рефлексии не превосходит двух.

Еще раз отметим, что оценки (37)-(39) являются оценками сверху – существование нескольких наилучших ответов на одно и то же действие, наличие в исходной игре равновесия Нэша или доминируемых стратегий может привести только к тому, что максимальный целесообразный ранг рефлексии уменьшится.

Рекламную версию утверждения 4 можно сформулировать следующим образом: **в биматричной игре максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии превышает минимальное число допустимых стратегий агентов не более чем на единицу**.

---

[25] *Под гарантированной оценкой будем понимать оценку сверху, то есть максимально возможную для данного класса игр соответствующую величину.*

[26] *Очевидно, что в игре, в которой один из агентов имеет единственное допустимое действие, рефлексия бессмысленна.*

Приведем примеры, иллюстрирующие полученные теоретические результаты анализа стратегической рефлексии в биматричных играх (см. также пример 2 выше).

Пример 3 (*Дилемма заключенного*) [132]. Рассмотрим хрестоматийную биматричную игру (“Prisoners’ Dilemma”): у каждого из двух заключенных-сообщников есть два действия: «Н» – «не сознаваться в совершении преступления» и «С» – «сознаться в совершении преступления». Если сознаются оба агента, то они получают наказание – их выигрыш есть вектор (1; 1). Если первый сознается, а второй нет, то первый выходит на свободу, а второй получает значительное наказание – вектор выигрышей (исход) – (6; 0). Симметричным образом обстоит дело, если сознается второй агент и не сознается первый. И, наконец, если не сознаются оба, то оба получают небольшое наказание, каждый получая выигрыш равный 5, то есть меньший, чем если бы он вышел на свободу. Матрица выигрышей приведена на рисунке 6 (отметим, что действие «С» у обоих агентов доминирует действие «Н»).

| Действия | **Н** | **С** |
|---|---|---|
| **Н** | (5; 5) | (0; 6) |
| **С** | (6; 0) | (1; 1) |

*Рис. 6. Матрица выигрышей в игре «Дилемма заключенного»*

Единственным равновесием Нэша в рассматриваемой игре является («С»; «С»), которое состоит из гарантирующих стратегий агентов и дает им соответственно выигрыши $a_0 = 1$ и $b_0 = 1$. Следовательно, $i_0 = i_1 = i_2 = \dots i_\infty =$ «С», $j_0 = j_1 = j_2 = \dots j_\infty =$ «С», и рассмотрение рефлексии в данной игре бессмысленно (по крайней мере, ни одно из определений (21)-(23) не дает «нового» равновесия, то есть отличного от равновесия Нэша, в том числе, не позволяет обосновать устойчивости Парето-эффективного исхода («Н»; «Н»), что является одной из тестовых проблем теории игр). •

Пример 4 (*Семейный спор*) [132]. Рассмотрим вторую хрестоматийную биматричную игру (“Battle of Sexes”), которую разыгрывают муж и жена. Муж предпочитает пойти на футбол («Ф»), а жена – в театр («Т»), но каждый из них предпочитает провести время с партнером, нежели в одиночестве. Матрица выигрышей приведена на рисунке 7.

| Действия | **Ф** | **Т** |
|---|---|---|
| **Ф** | (3; 1) | (0; 0) |
| **Т** | (0; 0) | (1; 3) |

*Рис. 7. Матрица выигрышей в игре «Семейный спор»*

В рассматриваемой игре существуют два равновесия Нэша в чистых стратегиях – («Ф»; «Ф») и («Т»; «Т»). С точки зрения рефлексии каждому агенту выгодно повторять выбор оппонента, однако, так как выбор любого допустимого действия является гарантирующей стратегией, выделить определенный исход в соответствующей рефлексивной игре не представляется возможным.

Помимо двух равновесий Нэша в чистых стратегиях, в данной игре существует одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Пусть $p \in [0; 1]$ – вероятность выбора мужем похода на футбол, $q \in [0; 1]$ – вероятность выбора женой похода в театр. Тогда равновесием будет $p = q = 3/4$, то есть равновесие в смешанных стратегиях имеет вид: (3/4, 1/4) и (1/4, 3/4), обеспечивая агентам ожидаемые выигрыши (3/4; 3/4).

Если муж считает, что ему известна смешанная стратегия жены, то он может выбирать $p_1 = \arg\max\limits_{p \in [0;1]} [3\,p/4 + 3\,(1 - p)/4]$. Видно, что ожидаемый выигрыш мужа не зависит от его смешанной стратегии и равен 3/4. Аналогичный вывод можно сделать и для стратегии $q_1$ жены, а также для всех других рефлексивных смешанных стратегий обоих агентов. Другими словами, любым рефлексивным равновесием в смешанных стратегиях будет равновесие Нэша в смешанных стратегиях, следовательно, в этом случае рассмотрение рефлексии бессмысленно. •

Пример 5 (*Снос на мизере*). Данный пример является частным случаем примера «Игра в прятки» и заключается в следующем. Пусть во время партии в преферанс один из партнеров играет мизер. Будем считать его агентом номер один. Всех остальных участвующих в игре будем считать агентом номер два.

Предположим, что у первого агента есть два действия: «С» – стандартный снос, и «Н» – нестандартный снос. У его оппонента (второго агента, ловящего мизер) тоже есть два действия: «С» – ловить стандартный снос и «Н» – ловить нестандартный снос. Если первый агент делает стандартный снос, а второй ловит нестандартный, то выигрывает первый агент – вектор выигрышей имеет вид (5; 0). Выигрыши (5; 1) получаются в ситуации, когда первый агент делает нестандартный снос, а второй ловит стандартный (стандартный снос ловить проще, чем нестандартный). Будем считать, что нестандартный снос поймать сложнее, чем стандартный, поэтому ситуациям («С»; «С») и («Н»; «Н») соответствуют выигрыши (2, 3) и (3, 2). Таким образом, матрица выигрышей имеет вид, приведенный на рисунке 8.

| Действия | **Н** | **С** |
|---|---|---|
| **Н** | (3; 2) | (5; 1) |
| **С** | (5; 0) | (2; 3) |

*Рис*. 8. *Матрица выигрышей в игре «Снос на мизере»*

В рассматриваемом примере равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, а гарантирующие стратегии следующие: $i_0$ = *«Н»*, $j_0$ = *«С»*. В соответствии с выражением (21) получаем:

$i_1$ = *«Н»*, $j_1$ = *«Н»*,

$i_2$ = *«С»*, $j_2$ = *«Н»*,

$i_3$ = *«С»*, $j_3$ = *«С»*,

$i_4$ = *«Н»*, $j_4$ = *«Н»*,

…

Видно, что четвертый уровень одинаковых рангов рефлексии повторяет первый, и дальше субъективные гарантирующие стратегии будут периодически повторяться. Кроме того, $I_K = I$ при $K = 2$, а $J_L = J$ при $L = 1$, то есть первые два ранга рефлексии исчерпывают множества допустимых действий агентов, а первые три ранга исчерпывают все комбинации чистых стратегий. То есть $I_\infty = I$, $J_\infty = J$ и $i_\infty = i_0$, $j_\infty = j_0$.

Первому агенту выгодны следующие игры (то есть следующие комбинации рангов рефлексии): $MG_{00}$, $MG_{03}$, $MG_{10}$, $MG_{13}$, $MG_{21}$, $MG_{22}$, $MG_{32}$. При этом он в пяти случаях из семи имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

Второму агенту выгодны следующие игры: $MG_{01}$, $MG_{02}$, $MG_{11}$, $MG_{12}$, $MG_{23}$, $MG_{33}$. При этом он во всех шести случаях имеет ранг рефлексии, не меньший, чем у оппонента.

Как отмечалось выше, выигрыш агента может оказаться меньше его МГР. Так, МГР первого агента в рассматриваемой игре равен трем, второго – единице. В играх $MG_{20}$, $MG_{23}$ и $MG_{33}$ первый агент получает выигрыш, равный двум, что строго меньше его МГР $a_0 = 3$. В играх $MG_{22}$, $MG_{31}$ и $MG_{32}$, второй агент получает нулевой выигрыш, что строго меньше его МГР $b_0 = 1$.

Вычислим для рассматриваемой игры равновесие в смешанных стратегиях. Обозначая $p$ – вероятность нестандартного сноса первым агентом, $q$ – вероятность ловли нестандартного сноса вторым агентом, получаем: $p = 3/4$, $q = 3/5$. То есть равновесие в смешанных стратегиях имеет вид: (3/4, 1,4) и (3/5, 2/5), что обеспечивает агентам ожидаемые выигрыши (19/5; 3/2). Если первый агент считает, что ему известна смешанная стратегия второго, то он может выбирать $p_1 = \arg \max\limits_{p \in [0;1]} [p\,(9/5 + 2) + (1 - p)\,(3 + 4/5)]$. Видно, что ожидаемый выигрыш первого агента не зависит от его смешанной стратегии и равен 19/5. Аналогичный вывод можно сделать и для стратегии $q_1$ второго агента, а также для всех других рефлексивных смешанных стратегий обоих агентов. Другими словами, любым рефлексивным равновесием в смешанных стратегиях будет равновесие Нэша в смешанных стратегиях, следовательно, в этом случае рассмотрение рефлексии бессмысленно. •

В заключение настоящего раздела еще раз напомним, что в реальных играх двух лиц (в том числе – описываемых биматричными играми) тип разыгрываемой игры (ранги рефлексии обоих оппонентов $k$ и $l$) неизвестен достоверно ни одному из агентов. Поэтому процесс принятия ими решений стоит рассматривать скорее не как игру, а как рефлексивное принятие решений, которое состоит из двух этапов – принятие предположения о значении ранга рефлексии оппонента и выбор соответствующего этому рангу собственного наилучшего ответа. С этой точки зрения полученные в настоящем разделе результаты связывают мощности множеств стратегий агентов с максимальными рангами рефлексии, которые имеет смысл рассматривать.

## 2.3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РАНГА РЕФЛЕКСИИ

На всем протяжении настоящей работы исследуется нормативный аспект[27] рефлексивного взаимодействия – каким должен быть ранг рефлексии агента (максимальный целесообразный ранг его рефлексии) для того, чтобы его выигрыш в рефлексивной игре был максимален. Другими словами, максимальным целесообразным является такое значение ранга рефлексии, превышение которого не увеличивает выигрыш, и целью исследования является получение соответствующих ограничений исходя только из теоретико-игровой модели.

Во многих случаях оказывается, что с точки зрения нормативной модели принятия решений агенту следует неограниченно увеличивать ранг стратегической рефлексии. С другой стороны, понятно, что существуют *информационные ограничения*, то есть возможности любого реального агента по переработке информации ограничены, поэтому бесконечная рефлексия является не чем иным, как математической абстракцией. Поэтому в настоящем разделе на качественном уровне (все приводимые утверждения являются нестрогими, так как лежащие в основе их вывода «аксиомы» являются предположениями, обоснованность которых может показаться спорной) рассматривается взаимосвязь между информационными ограничениями и рангом рефлексии.

В качестве информационного ограничения возьмем общепринятое в психологии *число Миллера* – 7±2 [3, 129], отражающее максимальное число объектов (признаков, альтернатив и т.д.), которыми человек может одновременно оперировать.

Как отмечалось в предыдущем разделе, процесс принятия решений рефлексирующими агентами стоит рассматривать, скорее, не как игру, а как рефлексивное принятие решений, которое состоит из двух этапов – принятия предположений о возможных значениях

---

[27] *Частные модели, рассматриваемые в рамках дескриптивного аспекта, приведены в четвертой главе настоящей работы.*

[29] *В настоящем разделе предполагается, что в многоэлементной системе каждый агент рассматривает всех оппонентов в качестве одного агента. Если отказаться от этого предположения и считать, что каждый агент анализирует возможное поведение каждого из своих оппонентов, то оценки максимального ранга стратегической рефлексии лишь уменьшатся (ему придется рассматривать $n$ реальных агентов и $n!$ связей между ними, что превышает число Миллера уже в системе с четырьмя агентами и на рефлексию «не остается места»).*

ранга рефлексии оппонента и выбора соответствующих наилучших ответов.

Рассмотрим процесс принятия решений $i$-ым агентом, точнее – элементарный акт анализа им игровой ситуации. Он может рассуждать следующим образом. «Предположим, что я намереваюсь выбрать действие $x_i \in X_i$, а оппонент (под оппонентом будем понимать множество всех агентов[29], кроме $i$-го) – действие $x_{-i} \in X_{-i}$ (нулевой ранг рефлексии). Тогда, если этот факт отражен оппонентом (первый ранг рефлексии), то он может выбрать $BR_{-i}(x_i)$, а я – $BR_i(x_{-i})$. Если и этот факт отражен оппонентом (второй ранг рефлексии), то появляются возможности выбора соответственно $BR_{-i}(BR_i(x_{-i}))$ и $BR_i(BR_{-i}(x_i))$». Данная цепочка построения графа наилучших ответов может продолжаться и далее (до тех пор, пока не исчерпается все множество допустимых действий – см. разделы 2.2 и 3.6, или пока в цепочке не перестанут появляться новые действия – см. раздел 2.2), если не учитывать информационных ограничений. Если $w$ – ранг рефлексии, то число действий (число реальных и фантомных агентов), которые необходимо принимать во внимание агенту (при произвольных $x_i \in X_i$ и $x_{-i} \in X_{-i}$), равно $2\,(w + 1)$, а число связей между ними – $(w + 1)!$ (при этом предполагается, что агент считает оппонента примерно таким же рациональным, каким и себя).

Если учесть информационные ограничения, то получим, что, должно выполняться либо $2\,(w + 1) \le 7\pm2$, либо $(w + 1)! \le 7\pm2$. Решение первого неравенства в целых положительных числах дает $w \in \{0; 1; 2; 3\}$, второго – $w \in \{0; 1; 2\}$. При числе Миллера равном 7 получаем, что **максимальный (в силу информационных ограничений) ранг стратегической рефлексии равен двум.**

Альтернативным объяснением конечности информационной структуры (и, следовательно, ранга стратегической рефлексии) является ограниченность количества информации, содержащейся в любом сообщении конечной длины. Действительно, иерархия представлений – информационная структура – формируется в результате получения агентами некоторой информации. Если эта информация ограничена, то информационная структура не может быть бесконечной. Установление соответствия между получаемой агентами информацией и формирующейся при этом информационной структурой является перспективной задачей будущих исследований.

Итак, во второй главе рассмотрены модели стратегической рефлексии. Перейдем к изучению информационной рефлексии.

# ГЛАВА 3. ИНФОРМАЦИОННАЯ РЕФЛЕКСИЯ

Целью данной главы является определение информационного равновесия и исследование его свойств. Для этого сначала описывается информационная рефлексия в играх двух лиц (раздел 3.1), затем (в разделе 3.2) приводится общая модель – описывается структура информированности, на основании которой принимаются решения участниками рефлексивной игры; определяется понятие сложности структуры информированности. В разделе 3.3 в качестве концепции решения рефлексивной игры вводится понятие информационного равновесия, в разделе 3.4 описывается граф рефлексивной игры, с помощью которого исследуются свойства информационного равновесия. В разделе 3.5 определяются регулярные структуры информированности и приводятся достаточные условия существования информационного равновесия. Раздел 3.6 посвящен исследованию влияния рангов рефлексии на выигрыши агентов, а также изучению зависимости между структурой информированности и информационным равновесием. Заключительный раздел третьей главы (раздел 3.7) содержит постановку и исследование задач рефлексивного управления.

## 3.1. ИНФОРМАЦИОННАЯ РЕФЛЕКСИЯ В ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Настоящий раздел содержит качественное обсуждение иерархии представлений и информационной рефлексии двух агентов и является вводным для общей модели, рассматриваемой в разделе 3.2.

Как отмечалось выше, предположение о том, что значение состояния природы – общее знание, является «предельным», то есть требующим от агентов бесконечной рефлексии, и ему в соответствие может быть поставлено классическое равновесие Нэша. Однако информированность агентов может быть другой, поэтому рассмотрим возможные случаи.

Примем следующие обозначения (см. также [62]): $\theta_i$ – информация (представления) $i$-го агента о состоянии природы, $\theta_{ij}$ – информация $i$-го агента об информации $j$-го агента о состоянии природы, $i \neq j$, $\theta_{iji}$ – информация $i$-го агента об информации $j$-го агента об информации $i$-го агента о состоянии природы[30], и т.д., $i, j = 1, 2$. Будем считать, что при принятии решений каждый агент считает истинной «свою» информацию о состоянии природы[31] (см. принцип доверия в [62]).

Таким образом, информированностью $i$-го агента будем называть $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk}, ...)$, то есть всю имеющуюся на момент принятия им решений информацию (иерархию его представлений, в которой уровни определяются длиной последовательности индексов в записи компонентов информированности). Совокупность $I_1$ и $I_2$ назовем информационной структурой рефлексивной игры двух агентов (модель информационной структуры рефлексивной игры произвольного конечного числа агентов приведена в следующем разделе). *Длина* максимальной *последовательности индексов* характеризует (на единицу превышает) ранг рефлексии агента.

В терминах *рефлексивных многочленов* В.А. Лефевра [43] единичной длине последовательности индексов соответствует ситуация, в которой $i$-ый агент, во-первых, «видит» только плацдарм $T$, в роли которого в рассматриваемой системе выступает множество возможных значений состояния природы. Во-вторых, у агента имеется информация о конкретном значении состояния природы – агент имеет свое представление о плацдарме: $T + Ti$, но рефлексия при этом по-прежнему отсутствует (ранг рефлексии равен нулю).

Максимальная длина последовательности индексов, равная двум, соответствует единичному рангу рефлексии, когда агент имеет информацию о представлениях других агентов (и, в том числе, быть может, о своих собственных представлениях – в этом случае говорят об *авторефлексии* $Tii$) о плацдарме: $T + Ti + Tji$, и т.д.[32]

---

[30] *Отметим, что используемая система индексов (слева направо) является «обратной» предложенной В.А. Лефевром (справа налево).*

[31] *Вопрос о том, как i-ый агент на основании информации, например, об $\theta_{iji}$ корректирует свои представления $\theta_i$ о возможных значениях состояния природы, заслуживает отдельного исследования.*

[32] *Рефлексия начальных уровней также может интерпретироваться следующим образом. Предположим, что есть субъект, который воспринимает окружающий его мир. Можно выделить несколько уровней восприятия (уровней рефлексии). На*

В общем случае, если интерпретировать $\theta$ как плацдарм $T$, то конечной информационной структуре $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{i_1 i_2 \dots i_k})$, $k < \infty$, $i$-го агента соответствует рефлексивный многочлен $T\,i + T\,j\,i + \dots + T\,i_k \dots i = (T + T\,j + \dots + i_k \dots)\,i$. Другими словами, и информационные структуры, и рефлексивные многочлены описывают информированность агентов, однако информационные структуры позволяют конструктивно учитывать взаимную информированность агентов (см. раздел 3.2).

Примем следующее соглашение (аксиому автоинформированности): совпадение индексов, идущих подряд в записи информированности агентов, запрещено. Другими словами, запрещены модели информированности, включающие информацию, в записи которой фигурируют подряд одни и те же индексы, отражающие информированность агентов вида: «что я знаю (думаю и т.д.) о том, что оппонент думает (знает и т.д.) о том, что он знает (думает и т.д.) о ...» и т.д. Например, исключаются комбинации $\theta_{11}$ $\theta_{211}$, $\theta_{1221}$ и т.д.

Введенная система классификаций позволяет ввести обозначение $RG_{kl}$, $k, l = 0, 1, 2,...$, для рефлексивных игр (Reflexive Games) двух лиц, где первый индекс на единицу превышает ранг рефлексии (и соответствующую информированность) первого агента, а второй индекс – ранг рефлексии (и соответствующую информированность) второго агента.

---

*нулевом (бытийном, нерефлексивном) уровне у субъекта существуют определенные представления об окружающем мире (возникающие как его отражение), однако он не осознает, что представления могут быть неполными, искаженными и т.д. Образно говоря, при этом окружающий субъекта мир совпадает с представлениями о нем. Следующий (первый) уровень соответствует осознанию субъектом возможности различия окружающего мира и своих представлений об этом мире (при этом субъект получает возможность «посмотреть» на себя со стороны). В результате этого осознания могут измениться как представления о мире, так и способы его отражения. Первый уровень восприятия, на котором уже присутствует рефлексия, назовем научным, так как именно на нем впервые возникают осознанные различия между субъективным и объективным описанием действительности (характерным примером первого ранга рефлексии является научная рефлексия по Г.П. Щедровицкому* [94]). *Второй уровень рефлексии назовем философским, так как он характеризуется появлением представлений о многообразии способов отражения и осознанием возможности выбора способа познания. Продолжать наращивание уровней рефлексии можно и дальше, однако в рамках используемых интерпретаций содержательные интерпретации третьего, четвертого и др. (более высоких) уровней затруднительны.*

Между информированностью и рангом рефлексии в рамках рассматриваемой модели, очевидно, существует следующее соответствие: **ранг рефлексии агента на единицу меньше максимального числа индексов, отражающих его информированность**. Например, агент, имеющий информированность $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, ..., \theta_{i_1 i_2 ... i_k})$, где $i, j, i_1, i_2, ..., i_k \in N$ обладает рангом рефлексии $k - 1$.

Введенные предположения налагают следующие ограничения на структуру информированности двух агентов: если $\theta_{i_1 i_2 ... i_k} \neq \varnothing$ отражает информацию $i$-го агента, то $i_1 = i$ (то есть первый индекс всегда равен номеру агента, обладающего этой информацией); если $k > 2$, то индексы чередуются. Следовательно, при четных $k$ (то есть при нечетных рангах рефлексии) $i_k = 3 - i$ (первый и последний индексы различаются), а при нечетных $k$ (то есть при четных рангах рефлексии) $i_k = i$ (первый и последний индексы совпадают).

Таким образом, для задания рефлексивной игры необходимо, помимо целевых функций и допустимых множеств, перечислить информированности агентов, например, с помощью записи $RG_{kl}(I_1, I_2)$.

Сложность моделирования рефлексивных игр заключается отчасти в том, что приведенное описание и система классификаций произведены с точки зрения исследователя операций, то есть в каждом конкретном случае агенты могут не знать, в какую игру они играют.

В рамках модели принятия решений, описанной в [21, 62], будем считать, что каждый из агентов стремится с учетом всей имеющейся у него информации выбрать наилучшее с его точки зрения действие. Недостаточная информированность (отсутствие общего знания) приводит к тому, что фактический вектор действий агентов может отличаться от векторов, на которые они рассчитывают по отдельности, то есть реализуется не равновесие Нэша, а ***информационное равновесие***[33], которое является субъективным равновесием рефлексивной игры в традиционном смысле термина «равновесие». Примерами информационного равновесия рефлексивной игры двух лиц с конечной информационной структурой служат (18) и (20).

При устранении существующей в моделях рефлексивных игр неопределенности агенты могут использовать два подхода: рассчи-

[33] *Корректное определение информационного равновесия приведено в разделе* 3.3.

тывать на наихудшие значения неопределенных параметров, то есть использовать принцип гарантированного результата, что приводит к реализации ***субъективного*** (рефлексивного – с учетом принципов принятия решений оппонентами) ***максиминного*** (***гарантирующего***) ***равновесия*** (см. вторую главу настоящей работы); или «наделять» других агентов некоторой информированностью, например, той же, которой характеризуются они сами, что приводит к реализации ***субъективного «информационного» равновесия***.

Отметим существенность прилагательного «субъективный», так как в рефлексивных играх каждый из агентов вычисляет «свое» равновесие, а исход игры (вектор действий агентов), в общем случае не является равновесием[34] в «классическом» смысле [15, 21, 65]. При этом ключевой идеей является то, что каждый из агентов определяет «равновесие» *независимо* от других агентов, что существенно упрощает описание и исследование моделей их поведения.

Последнее утверждение существенно, так как оно позволяет рассматривать принципы принятия агентами решений, зависящие от той информации, которой они обладают к моменту принятия решений. Другими словами, вместо рефлексивной игры $RG_{kl}(I_1, I_2)$ можно рассматривать независимо две рефлексивные модели принятия решений агентами, обладающими иерархиями представлений $I_1$ и $I_2$ с рангами рефлексии $k - 1$ и $l - 1$, соответственно (еще раз подчеркнем, что ранг рефлексии агента в рассматриваемой модели определяется его информированностью). При этом существенно, что все знания агента (о состоянии природы, представлениях оппонента, его принципах принятия решений и т.д.) включены в его информированность – иерархию представлений.

Более подробно перечисленные аспекты рассматриваются в следующем разделе при систематическом описании информационной рефлексии.

## 3.2. ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ИГРЫ

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ агентов.

[34] *Если классическое равновесие Нэша является «объективно» рациональным, то информационное равновесие является субъективно рациональным* (*в рамках имеющейся информированности*).

Если в ситуации присутствует неопределенный параметр $\theta \in \Omega$ (будем считать, что множество $\Omega$ является общим знанием), то *структура информированности* $I_i$ (как синоним будем употреблять термины *информационная структура* и иерархия представлений) $i$-го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление $i$-го агента о параметре $\theta$ – обозначим его $\theta_i$, $\theta_i \in \Omega$. Во-вторых, представления $i$-го агента о представлениях других агентов о параметре $\theta$ – обозначим их $\theta_{ij}$, $\theta_{ij} \in \Omega$, $j \in N$. В третьих, представления $i$-го агента о представлении $j$-го агента о представлении $k$-го агента – обозначим их $\theta_{ijk}$, $\theta_{ijk} \in \Omega$, $j$, $k \in N$. И так далее.

Таким образом, структура информированности $I_i$ $i$-го агента задается набором всевозможных значений вида $\theta_{ij_1 \dots j_l}$, где $l$ пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Omega$.

Аналогично задается *структура информированности I игры* в целом – набором значений $\theta_{i_1 \dots i_l}$, где $l$ пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Omega$.. Подчеркнем, что структура информированности $I$ «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть.

Таким образом, структура информированности – бесконечное $n$-дерево (то есть тип структуры постоянен и является $n$-деревом), вершинам которого соответствует конкретная информированность реальных и фантомных агентов.

***Рефлексивной игрой*** $\Gamma_I$ назовем игру, описываемую следующим кортежем:

(40) $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, I\}$,

где $N$ – множество реальных агентов, $X_i$ – множество допустимых действий $i$-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, $I$ – структура информированности.

Таким образом, рефлексивная игра является обобщением понятия игры в нормальной форме, задаваемой кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}\}$, на случай, когда информированность агентов отражена иерархией их представлений (информационной структурой $I$). В рамках принятого определения «классическая» игра в нормальной форме является частным случаем рефлексивной игры – игры с общим знанием. В «предельном» случае – когда состояние природы является общим знанием – предлагаемая в настоящей работе концепция решения рефлексивной игры (информационное равновесие – см. раздел 3.3) переходит в равновесие Нэша.

Совокупность связей между элементами информированности агентов можно изобразить в виде дерева (см. рисунок 9). При этом структура информированности $i$-го агента изображается поддеревом, исходящим из вершины $\theta_i$.

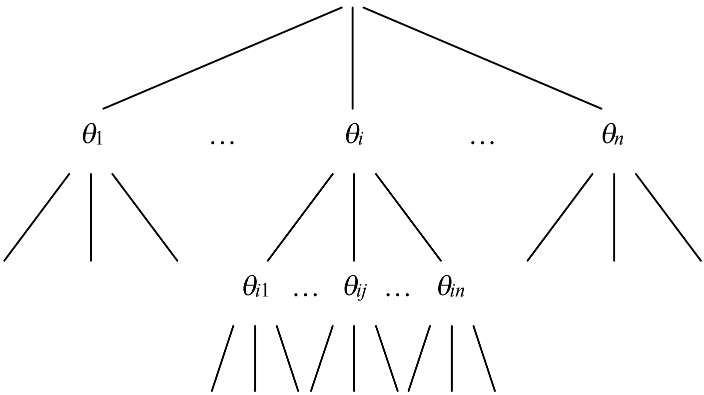


*Рис.* 9. *Дерево информационной структуры*

Сделаем важное замечание: в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением «точечной» структуры информированности, компоненты которой состоят лишь из элементов множества $\Omega$. Более общим случаем является, например, интервальная или вероятностная информированность (см. описание моделей информированности в разделе 1.3 и обсуждение перспектив дальнейших исследований в заключении).

Для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения:

$\Sigma_+$ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из $N$;

$\Sigma$ – объединение $\Sigma_+$ с пустой последовательностью;

$|\sigma|$ – количество индексов в последовательности $\sigma$ (для пустой последовательности принимается равным нулю), которое выше было названо длиной последовательности индексов.

Если $\theta_i$ – представления $i$-го агента о неопределенном параметре, а $\theta_{ii}$ – представления $i$-го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $\theta_{ii} = \theta_i$. Иными словами, $i$-й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной.

**Аксиома автоинформированности:**

$$\forall\, i \in N\ \forall\, \tau,\, \sigma \in \Sigma\ \theta_{\tau i i \sigma} = \theta_{\tau i \sigma}.$$

Эта аксиома означает, в частности, что, зная $\theta_\tau$ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| = \gamma$, можно однозначно найти $\theta_\tau$ для всех $\tau \in \Sigma_+$, таких что $|\tau| < \gamma$.

Наряду со структурами информированности $I_i$, $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности $I_{ij}$ (структура информированности $j$-го агента в представлении $i$-го агента), $I_{ijk}$ и т.д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с *n реальными* агентами (*$i$-агентами*, где $i \in N$) со структурами информированности $I_i$, в игре участвуют ***фантомные агенты*** (*$\tau$-агенты*, где $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \geq 2$) со структурами информированности $I_\tau = \{\theta_{\tau\sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$. Фантомные агенты, существуя в сознании реальных агентов, влияют на их действия, о чем пойдет речь далее.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности.

Структуры информированности $I_\lambda$ и $I_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

1. $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_{\mu\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2. последние индексы в последовательностях $\lambda$ и $\mu$ совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_\lambda = I_\mu$.

Первое из двух условий в определении тождественности структур прозрачно, второе же требует некоторых пояснений. Дело в том, что далее мы будем обсуждать действие $\tau$-агента в зависимости от его структуры информированности $I_\tau$ и целевой функции $f_i$, которая как раз определяется последним индексом последовательности $\tau$. Поэтому удобно считать, что тождественность структур информированности означает в том числе и тождественность целевых функций.

<u>Утверждение 5.</u> $I_\lambda = I_\mu \Leftrightarrow \forall\ \sigma \in \Sigma\ \ I_{\lambda\sigma} = I_{\mu\sigma}$.

Доказательство. $I_\lambda = I_\mu \Rightarrow \forall\ \sigma, \kappa \in \Sigma \quad \theta_{\lambda\sigma\kappa} = \theta_{\mu\sigma\kappa} \Rightarrow \forall\ \sigma \in \Sigma$ $I_{\lambda\sigma} = I_{\mu\sigma}$. Обратная импликация очевидна: достаточно положить $\sigma$ равной пустой последовательности. •

Содержательный смысл утверждения 5 состоит в том, что тождественность двух структур информированности в точности означает тождественность всех их подструктур.

Следующее утверждение является, по сути, иной формулировкой аксиомы автоинформированности.

Утверждение 6. $\forall\ i \in N\ \ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma\ \ I_{\tau ii\sigma} = I_{\tau i\sigma}$.

Доказательство. $\forall\ i \in N\ \ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma \quad \theta_{\tau ii\sigma} = \theta_{\tau i\sigma} \Leftrightarrow \forall\ i \in N$ $\forall\ \tau, \sigma, \kappa \in \Sigma \quad \theta_{\tau ii\sigma\kappa} = \theta_{\tau i\sigma\kappa} \Leftrightarrow \forall\ i \in N\ \ \forall\ \tau, \sigma \in \Sigma \quad I_{\tau ii\sigma} = I_{\tau i\sigma}$. •

Определение тождественности структур информированности (как и последующие, приводимые в настоящем разделе) можно переформулировать так, чтобы соответствующее свойство структуры информированности выполнялось не объективно, а *$\tau$-субъективно* – в представлении $\tau$-агента ($\tau \in \Sigma_+$): структуры информированности $I_\lambda$ и $I_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *$\tau$-субъективно тождественными*, если $I_{\tau\lambda} = I_{\tau\mu}$.

В дальнейшем будем формулировать определения и утверждения сразу $\tau$-субъективно для $\tau \in \Sigma$, имея в виду, что если $\tau$ – пустая последовательность индексов, то «$\tau$-субъективно» означает «объективно».

$\lambda$-агент называется $\tau$-субъективно *адекватно информированным* о представлениях $\mu$-агента (или, короче, о $\mu$-агенте), если

$$I_{\tau\lambda\mu} = I_{\tau\mu} \quad (\lambda, \mu \in \Sigma_+,\ \tau \in \Sigma).$$

Будем обозначать $\tau$-субъективную адекватную информированность $\lambda$-агента о $\mu$-агенте следующим образом: $I_\lambda >_\tau I_\mu$.

Утверждение 7. Каждый реальный агент $\tau$-субъективно считает себя адекватно информированным о любом агенте, то есть

$$\forall\ i \in N\ \ \forall\ \tau \in \Sigma\ \ \forall\ \sigma \in \Sigma_+\ \ I_i >_{\tau i} I_\sigma .$$

Доказательство. В силу утверждения 6 справедливо тождество $I_{\tau ii\sigma} = I_{\tau i\sigma}$, что по определению $\tau$-субъективно тождественных структур информированности означает, что $I_i >_{\tau i} I_\sigma$. •

Содержательно утверждение 7 отражает тот факт, что рассматриваемая точечная структура информированности подразумевает наличие у каждого агента уверенности в своей адекватной информированности о всех элементах этой структуры.

$\lambda$-агент и $\mu$-агент называются $\tau$-субъективно *взаимно информированными*, если одновременно выполнены тождества

$$I_{\tau\lambda\mu} = I_{\tau\mu}, \quad I_{\tau\mu\lambda} = I_{\tau\lambda} \quad (\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma).$$

Будем обозначать $\tau$-субъективную взаимную информированность $\lambda$-агента и $\mu$-агента следующим образом: $I_\lambda >\!\!<_\tau I_\mu$.

$\lambda$-агент и $\mu$-агент называются $\tau$-субъективно *одинаково информированными о $\sigma$-агенте*, если $I_{\tau\lambda\sigma} = I_{\tau\mu\sigma}$ $(\sigma, \lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma)$.

Будем обозначать $\tau$-субъективную одинаковую информированность $\lambda$-агента и $\mu$-агента о $\sigma$-агенте следующим образом:

$$I_\lambda >_\sigma <_\tau I_\mu.$$

$\lambda$-агент и $\mu$-агент называются *$\tau$-субъективно одинаково информированными*, если $\forall\, i \in N \;\; I_{\tau\lambda i} = I_{\tau\mu i}$ $(\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma)$.

Будем обозначать $\tau$-субъективную одинаковую информированность $\lambda$-агента и $\mu$-агента следующим образом: $I_\lambda \sim_\tau I_\mu$.

Отметим, что отношения одинаковой информированности о каком-либо агенте и одинаковой информированности являются отношениями эквивалентности (то есть рефлексивны, симметричны и транзитивны на множестве агентов).

Покажем, что одинаковая информированность равносильна одинаковой информированности о любом агенте.

<u>Утверждение 8.</u> $I_\lambda \sim_\tau I_\mu \Leftrightarrow \forall\, \sigma \in \Sigma_+ \;\; I_\lambda >_\sigma <_\tau I_\mu$.

Доказательство. $I_\lambda \sim_\tau I_\mu \Leftrightarrow \forall\, i \in N \;\; I_{\tau\lambda i} = I_{\tau\mu i} \Leftrightarrow$ {в силу утверждения 5} $\Leftrightarrow \forall\, i \in N \;\; \forall\, \kappa \in \Sigma \;\; I_{\tau\lambda i\kappa} = I_{\tau\mu i\kappa} \Leftrightarrow$ {полагая $\sigma = i\,\kappa$} $\Leftrightarrow \forall\, \sigma \in \Sigma_+ \; I_{\tau\lambda\sigma} = I_{\tau\mu\sigma} \Leftrightarrow \forall\, \sigma \in \Sigma_+ \;\; I_\lambda >_\sigma <_\tau I_\mu$. •

Приведенные определения показывают, что описание ситуации в содержательных терминах адекватной, взаимной и одинаковой информированности могут быть описаны через тождество соответствующих структур информированности. Следующее утверждение касается связи введенных понятий друг с другом.

<u>Утверждение 9.</u> Для любого $\tau \in \Sigma$ следующие три условия равносильны:

1. любые два реальных агента $\tau$-субъективно являются взаимно информированными;

2. все реальные агенты $\tau$-субъективно являются одинаково информированными;

3. для любого $i \in N$ значение $I_{\sigma i}$ $\tau$-субъективно зависит только от $i$.

То есть для любого $\tau \in \Sigma$ выполнено:

$$(\forall\, i, j \in N\, I_i >\!\!<_\tau I_j) \Leftrightarrow (I_1 \sim_\tau \ldots \sim_\tau I_n) \Leftrightarrow (\forall\, i \in N\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \ I_{\tau\sigma i} = I_{\tau i}).$$

Доказательство. Докажем для трех условий утверждения импликации $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Для любых $i, j, m \in N$ имеем $I_i >_\tau I_m$, $I_j >_\tau I_m$, что означает выполнение тождеств $I_{\tau im} = I_{\tau m}$, $I_{\tau jm} = I_{\tau m}$. Отсюда $I_{\tau im} = I_{\tau jm}$, что доказывает условие 2 (с учетом утверждения 8).

$2 \Rightarrow 3$. Для пустой последовательности $\sigma$ условие 3 тривиально, поэтому возьмем произвольную непустую последовательность $\sigma \in \Sigma_+$. Тогда $\sigma = i_1 \ldots i_l$ $(i_k \in N,\ k = 1, \ldots, l)$, при этом для любого $i \in N$ справедливы следующие соотношения:

$I_{\tau i}$ = {в силу утверждения 6} = $I_{\tau ii}$ = {поскольку $I_i \sim_\tau I_{i_l}$} = $I_{\tau i_l i}$ = {в силу утверждения 6} = $I_{\tau i_l i_l i}$ = {поскольку $I_{i_l} \sim_\tau I_{i_{l-1}}$ и в силу утверждения 8} = $I_{\tau i_{l-1} i_l i}$ = … = $I_{\tau i_1 \ldots i_l i}$ = $I_{\tau\sigma i}$.

$3 \Rightarrow 1$. Для любых $i, j \in N$ имеем $I_{\tau ij} = I_{\tau j}$, $I_{\tau ji} = I_{\tau i}$, что означает $I_i >\!\!<_\tau I_j$. •

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой $I$ имеется счетное множество структур $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Будем говорить, что структура информированности $I$ имеет *конечную сложность* $\nu = \nu(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{\tau_1}, I_{\tau_2}, \ldots, I_{\tau_\nu}\}$, $\tau_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$, что для любой структуры $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура $I_{\tau_l}$ из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура $I$ имеет бесконечную сложность: $\nu(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющею конечную сложность, будем называть *конечной* (еще раз отметим, что при этом дерево структуры информированности все равно остается бесконечным). В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, такой, что любая структура $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, назовем *базисом* структуры информированности $I$.

Если структура информированности $I$ имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов $\gamma$ такую, что, зная все структуры $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \gamma$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Будем говорить, что структура информированности $I$, $\nu(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $\gamma = \gamma(I)$, если

1. для любой структуры $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \le \gamma$;

2. для любого целого положительного числа $\xi$, $\xi < \gamma$, существует структура $I_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_+$, не тождественная никакой из структур $I_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \xi$.

Если $\nu(I) = \infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $\gamma(I) = \infty$.

Имея описание структуры информированности, можно рассматривать процесс совместного принятия решений реальными и фантомными агентами, что приводит к понятию информационного равновесия.

## 3.3. ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Если задана структура $I$ информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор $\tau$-агентом своего действия $x_\tau$ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности $I_\tau$, поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, назовем ***<u>информационным равновесием</u>***, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности $I$ имеет конечную сложность $\nu$;

2. $\forall \lambda, \mu \in \Sigma_+ \quad I_\lambda = I_\mu \Rightarrow x_\lambda^* = x_\mu^*$;

3. $\forall\, i \in N$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$

(41) $x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^* \dots, x_{\sigma i, n}^*)$ .

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И, наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

Необходимость третьего условия в определении информационного равновесия, по-видимому, не вызывает сомнений. Приведем два примера, показывающих важность первых двух условий.

<u>Примеры 6-7.</u> В этих примерах участвуют два агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_1(\theta, x_1, x_2) = (\theta - x_2)x_1 - \frac{x_1^2}{2},\ \ f_2(\theta, x_1, x_2) = (\theta - x_1)x_2 - \frac{x_2^2}{2},$$

где $x_i \in \mathfrak{R}^1$, $i = 1, 2$. Различие лишь в структурах информированности.

<u>Пример 6.</u> Пусть структура информированности имеет следующий вид (напомним, что в силу аксиомы автоинформированности можно не рассматривать элементы с идущими подряд одинаковыми индексами):

$$\theta_1 = 1,\ \theta_{12} = 3,\ \theta_{121} = 5,\ \theta_{1212} = 7,\ \dots;$$
$$\theta_2 = 2,\ \theta_{21} = 4,\ \theta_{212} = 6,\ \theta_{2121} = 8,\ \dots .$$

Она имеет бесконечную сложность. Система уравнений (41) в данном случае принимает следующий вид:

| | |
|---|---|
| $x_1 = 1 - x_{12}$, | $x_2 = 2 - x_{21}$, |
| $x_{12} = 3 - x_{121}$, | $x_{21} = 4 - x_{212}$, |
| $x_{121} = 5 - x_{1212}$, | $x_{212} = 6 - x_{2121}$, |
| $x_{1212} = 7 - x_{12121}$, | $x_{2121} = 8 - x_{21212}$, |
| и т.д.; | и т.д. |

Видно, что в системе счетное число уравнений, причем решений у нее бесконечно много – произвольно выбирая значения $x_1$ и $x_2$, можно выразить через них остальные переменные. •

Пример 7. Пусть структура информированности имеет следующий вид: $\theta_\sigma = 1$ для любого $\sigma \in \Sigma_+$. Если при этом условие 2 определения информационного равновесия не выполнено, то в системе (41) оказывается счетное число уравнений:

| | |
|---|---|
| $x_1 = 1 - x_{12}$, | $x_2 = 1 - x_{21}$, |
| $x_{12} = 1 - x_{121}$, | $x_{21} = 1 - x_{212}$, |
| $x_{121} = 1 - x_{1212}$, | $x_{212} = 1 - x_{2121}$, |
| $x_{1212} = 1 - x_{12121}$, | $x_{2121} = 1 - x_{21212}$, |
| и т.д.; | и т.д. |

И здесь, как и в примере 6, решений бесконечно много – произвольно выбирая значения $x_1$ и $x_2$, можно выразить через них остальные переменные. •

В соответствии с условием 2, для определения информационного равновесия требуется решить, казалось бы, бесконечное (счетное) число уравнений и получить столько же значений $x_\tau^*$. Однако оказывается, что на самом деле число уравнений и значений конечно.

Утверждение 10. Если информационное равновесие $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем ν попарно различных действий, а в системе (41) содержится не более чем ν попарно различных уравнений.

Доказательство. Пусть $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, – информационное равновесие. Тогда из конечности структуры информированности и условия 2 сразу следует, что попарно различных чисел $x_\tau^*$ не более $\nu$.

Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: $I_\lambda = I_\mu$. Соответственно, имеем $\theta_\lambda = \theta_\mu$ и $x_\lambda^* = x_\mu^*$. Далее, для любого $i \in N$ справедливо $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$, следовательно, $x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$. Поэтому два уравнения системы (41), у которых в левой части стоят действия $x_\lambda^*$ и $x_\mu^*$, тождественно совпадают. •

Таким образом, для нахождения информационного равновесия $x_\tau^*$, $\tau \in \Sigma_+$, достаточно записать $\nu$ условий (41) для каждого из $\nu$ попарно различных значений $x_\tau^*$, отвечающих попарно различным структурам информированности $I_\tau$.

Если все агенты являются одинаково информированными, то сложность структуры информированности минимальна и равна числу агентов. В этом случае система (41) переходит в определение равновесия Нэша, а информационное равновесие – в равновесие Нэша.

Итак, в случае, когда все реальные агенты являются одинаково информированными (то есть рефлексивная реальность является общим знанием), информационное равновесие переходит в равновесие Нэша (фантомных агентов «не возникает»). Однако и в общем случае между информационным равновесием и равновесием Нэша существует тесная связь.

Пусть имеется структура информированности $I$ конечной сложности $\nu$ с базисом $\{I_{\tau_1}, \ldots, I_{\tau_\nu}\}$. Тогда в информационном равновесии участвуют реальные и фантомные агенты из множества $\Xi = \{\tau_1, \ldots, \tau_\nu\}$, каждый из которых выбирает действие $\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_\nu}\}$ соответственно, $x_{\tau_l} \in X_{\omega(\tau_l)}$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$ – здесь и далее в этом разделе будем обозначать $\omega(\sigma)$ последний индекс в последовательности $\sigma$, где $\sigma \in \Sigma_+$.

Запишем целевую функцию каждого из агентов из множества $\Xi$ следующим образом:

(42) $\varphi_{\tau_l}(x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_\nu}) = f_{\omega(\tau_l)}(\theta_{\tau_l}, x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n})$,

где $I_{\tau_l i} = I_{\sigma_i}$, $\sigma_i \in \Xi$ для всех $i \in N$, $l \in \{1, \ldots, \nu\}$. Заметим, что $I_{\sigma_{\omega(\tau_l)}} = I_{\tau_l \omega(\tau_l)} = I_{\tau_l}$, поэтому соотношение (42) можно записать более подробно в следующем виде:

(43) $\varphi_{\tau_l}(x_{\tau_1},\ldots,x_{\tau_{l-1}},x_{\tau_l},x_{\tau_{l+1}},\ldots,x_{\tau_\nu}) =$

$$= f_{\omega(\tau_l)}(\theta_{\tau_l}, x_{\sigma_1},\ldots,x_{\sigma_{\omega(\tau_l)-1}}, x_{\tau_l}, x_{\sigma_{\omega(\tau_l)-1}},\ldots,x_{\sigma_n}).$$

Содержательно соотношения (42) и (43) означают следующее: целевая функция, которую $\tau_l$-агент ($\tau_l \in \Xi$) максимизирует в рефлексивной игре, субъективно зависит от его представлений о параметре $\theta$, от его действия и от действий ($n - 1$) агента из множества $\Xi$. Иными словами, функция $\varphi_{\tau_l}$ существенно зависит лишь от переменных $\{x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_\nu}\}$ (и от величины $\theta_{\tau_l}$ как от параметра), причем эта зависимость совпадает с функцией $f_i$, где $i = \omega(\tau_l)$. Поэтому функция $\varphi_{\tau_l}$ «наследует» свойства функции $f_{\omega(\tau_1)}$.

Несколько забегая вперед, приведем следующий пример. Пусть граф рефлексивной игры (см. следующий раздел) выглядит как на рисунке 11 (см. пример 9), а целевые функции реальных агентов – $f_i(\theta, x_1, x_2, x_3)$, $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда в информационном равновесии участвуют пять агентов из множества $\Xi = \{1, 2, 3, 31, 32\}$ со следующими целевыми функциями:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_1(\theta_1, x_1, x_2, x_3);$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_2(\theta_2, x_1, x_2, x_3);$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_3(\theta_3, x_{31}, x_{32}, x_3);$$
$$\varphi_{31}(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_1(\theta_{31}, x_{31}, x_{32}, x_3);$$
$$\varphi_{32}(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) = f_2(\theta_{32}, x_{31}, x_{32}, x_3).$$

С учетом соотношения (43) система уравнений (41) для определения информационного равновесия $(x^*_{\tau_1}, \ldots, x^*_{\tau_\nu})$ представима в виде:

$$x^*_{\tau_l} = \arg\max_{x_{\tau_l} \in X_{\omega(\tau_l)}} \varphi_{\tau_l}(x^*_{\tau_{l-1}}, \ldots, x^*_{\tau_{l-1}}, x_{\tau_l}, x^*_{\tau_{l+1}}, \ldots, x^*_{\tau_\nu}),$$

где $l$ пробегает все значения от 1 до $\nu$. Нетрудно видеть, что это не что иное, как система соотношений для определения равновесия Нэша в игре с одинаковой информированностью $\tau_l$–агентов, $l \in \{1,\ldots,\nu\}$. Это обстоятельство позволяет применять к информационному равновесию (соответствующим образом модифицировав) достаточные условия существования, известные для равновесия Нэша.

Например, известен следующий факт (см. [21, С. 74]): если в непрерывной игре множества действий $X_i$ – выпуклые подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция $f_i$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной $x_i$, то в этой игре существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Этот факт можно переформулировать, получив достаточное условие существования информационного равновесия в рефлексивной игре.

Утверждение 11. Пусть в рефлексивной игре со структурой информированности конечной сложности множества действий $X_i$ – выпуклые подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция $f_i(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ при любом $\theta \in \Omega$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной $x_i$. Тогда в этой игре существует информационное равновесие.

Доказательство. Непрерывность по всем аргументам функции $f_i$ и ее строгая вогнутость по переменной $x_i$ означает непрерывность по всем аргументам функций $\varphi_{\tau_l}$ (где $\tau_l \in \Xi$, $\omega(\tau_l) = i$), определяемых соотношениями (43), и строгую вогнутость каждой из них по $x_{\tau_l}$. Поэтому утверждение сразу вытекает из приведенного выше факта [21, С. 74]. •

Как нетрудно убедиться, требуемыми свойствами обладают целевые функции из примеров 8-10. Поэтому информационное равновесие для рефлексивных игр с этими функциями существует для любых структур информированности конечной сложности.

Информационное равновесие (см. (41)) является достаточно громоздкой конструкцией, и сразу увидеть связь между информационной структурой и информационным равновесием зачастую бывает затруднительно. Удобным языком описания взаимной информированности агентов и выразительным средством анализа свойств информационного равновесия является граф рефлексивной игры, к описанию которого мы и переходим.

## 3.4. ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ

Если структура информированности имеет конечную сложность, то можно построить ***граф рефлексивной игры***, наглядно показывающий взаимосвязь между действиями агентов (как реальных, так и фантомных), участвующих в равновесии.

Вершинами этого ориентированного графа являются действия $x_\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, отвечающие попарно нетождественным структурам информированности $I_\tau$, или компоненты структуры информированности $\theta_\tau$, или просто номер $\tau$ реального или фантомного агента, $\tau \in \Sigma_+$.

Между вершинами проведены дуги по следующему правилу: к каждой вершине $x_{\sigma i}$ проведены дуги от $(n-1)$ вершин, отвечающих структурам $I_{\sigma ij}$, $j \in N \setminus \{i\}$. Если две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами, будем изображать одно ребро с двумя стрелками.

Подчеркнем, что граф рефлексивной игры соответствует системе уравнений (41) (то есть определению информационного равновесия), в то время как решения ее может и не существовать.

Итак, граф $G_I$ рефлексивной игры $\Gamma_I$ (см. определение рефлексивной игры в предыдущем разделе), структура информированности которой имеет конечную сложность, определяется следующим образом:

- вершины графа $G_I$ соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, то есть попарно нетождественным структурам информированности;

- дуги графа $G_I$ отражают взаимную информированность агентов: если от одного агента (реального или фантомного) существует путь к другому агенту, то второй адекватно информирован о первом.

Если в вершинах графа $G_I$ изображать представления соответствующего агента о состоянии природы, то рефлексивная игра $\Gamma_I$ с конечной структурой информированности $I$ может быть задана кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, G_I\}$, где $N$ – множество реальных агентов, $X_i$ – множество допустимых действий $i$-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, $G_I$ – граф рефлексивной игры.

Отметим, что во многих случаях рефлексивную игру более удобно (и наглядно) описывать именно в терминах графа $G_I$, а не дерева информационной структуры.

Рассмотрим несколько примеров нахождения информационного равновесия.

Примеры 8-10. В этих примерах участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$.

Содержательно, $x_i$ – объем выпуска продукции $i$-ым агентом, $\theta$ – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж (см. модели олигополии Курно в [1, 126, 132]), а второе слагаемое – как затраты на производство.

Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($\theta = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($\theta = 2$) – оптимистом. Таким образом, в примерах 8-10 ситуации различаются лишь вследствие различных структур информированности.

<u>Пример 8.</u> Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы. Тогда, в соответствии с утверждением 9, для любого $\sigma \in \Sigma$ выполняются тождества $I_{\sigma 1} = I_1$, $I_{\sigma 2} = I_2$, $I_{\sigma 3} = I_3$.

В соответствии со свойством 2 определения информационного равновесия, аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий $x_\sigma^*$.

Видно, что любая структура информированности тождественна одной из трех, образующих базис: $\{I_1, I_2, I_3\}$. Поэтому сложность данной структуры информированности равна трем, а глубина равна единице. Граф рефлексивной игры изображен на рисунке 10.

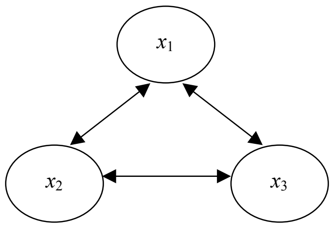


*Рис.* 10. *Граф рефлексивной игры в примере* 8

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (41)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими:

$$x_1^* = x_2^* = 1/2,\ x_3^* = 0. \bullet$$

Пример 9. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

Имеем: $I_1 \sim I_2$, $I_1 > I_3$, $I_2 > I_3$, $I_1 \sim_3 I_2 \sim_3 I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $\sigma \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 5, 6, 9):

$I_{12\sigma} = I_{2\sigma}$, $I_{13\sigma} = I_{3\sigma}$, $I_{21\sigma} = I_{1\sigma}$, $I_{23\sigma} = I_{3\sigma}$, $I_{3\sigma1} = I_{31}$, $I_{3\sigma2} = I_{32}$, $I_{3\sigma3} = I_3$.

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий $x_\sigma^*$. Левые части этих тождеств показывают, что любая структура $I_\sigma$ при $|\sigma|>2$ тождественна некоторой структуре $I_\tau$, $|\tau|<|\sigma|$. Поэтому глубина структуры $I$ не превосходит двух и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части показывают, что базис образуют следующие структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{32}\}$ (нетрудно убедиться, что они попарно различны).

Таким образом, сложность данной структуры информированности равна пяти, а глубина равна двум. Граф рефлексивной игры изображен на рисунке 11.

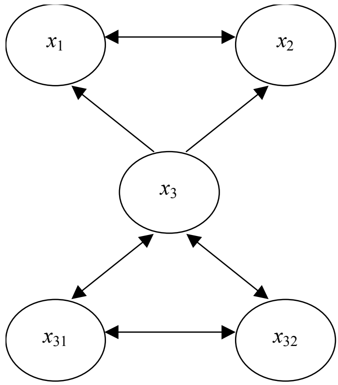


*Рис*. 11. *Граф рефлексивной игры в примере* 9

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (41)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 9/20$, $x_3^* = 1/5$. •

Пример 10. Пусть все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами.

Имеем: $I_1 >< I_2$, $I_2 >< I_3$, $I_1 \sim_{13} I_2 \sim_{13} I_3$, $I_1 \sim_{31} I_2 \sim_{31} I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $\sigma \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 5, 6, 9):

$$I_{12\sigma} = I_{2\sigma},\ I_{13\sigma1} = I_{131},\ I_{13\sigma2} = I_{132},\ I_{13\sigma3} = I_{13},\ I_{21\sigma} = I_{1\sigma},$$
$$I_{23\sigma} = I_{3\sigma},\ I_{31\sigma1} = I_{31},\ I_{31\sigma2} = I_{312},\ I_{31\sigma3} = I_{313},\ I_{32\sigma}=I_{2\sigma}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий $x_\sigma^*$.

Левые части этих тождеств показывают, что любая структура $I_\sigma$ при $|\sigma|>3$ тождественна некоторой структуре $I_\tau$, $|\tau|<|\sigma|$. Поэтому глубина структуры $I$ не превосходит трех и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части тождеств показывают, что в базис могут входить лишь следующие структуры информированности: $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_{31}$, $I_{13}$, $I_{131}$, $I_{132}$, $I_{312}$, $I_{313}$.

Далее, для любого $\sigma \in \Sigma$ справедливы соотношения $\theta_{131\sigma} = \theta_{31\sigma} = \theta_{313\sigma} = \theta_{13\sigma} = \theta_{132\sigma} = \theta_{312\sigma} = 1$, из которых вытекают тождества $I_{131} = I_{31}$, $I_{313} = I_{13}$, $I_{123} = I_{213}$.

Таким образом, базис образуют следующие попарно различные структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{132}\}$. Сложность данной структуры информированности равна шести, а глубина равна трем. Граф соответствующей рефлексивной игры изображен на рисунке 12.

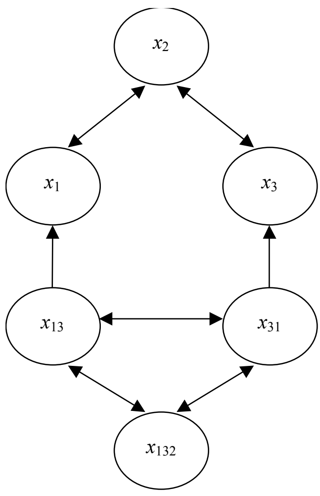


*Рис. 12. Граф рефлексивной игры в примере 10*

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (41)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{2 - x_{31}^* - x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{132}^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{13}^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_2^* = \dfrac{12}{35}, \\ x_3^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_3^* = 17/35$, $x_2^* = 12/35$. •

Завершив описание графа рефлексивной игры, продолжим исследование свойств информационного равновесия.

## 3.5. РЕГУЛЯРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

В разделе 3.2 было введено понятие структуры информированности – бесконечного дерева, отражающего иерархию представлений агентов в рефлексивной игре. В разделе 3.3 показано, что информационное равновесие (как решение рефлексивной игры) существует в случае, если структура информированности конечна. Конечность информационной структуры по своему определению означает не конечность ее дерева, а существование конечного базиса, в рамках которого рассмотрение фантомных агентов, имеющих ту же информированность, что и другие реальные или фантомные агенты, не дает новой информации и поэтому нецелесообразно.

Если априори имеется (например, построено исходя из содержательных соображений) конечное дерево, отражающее несколько первых уровней представлений агентов, то в общем случае нельзя однозначно сказать какой бесконечной информационной структуре оно соответствует. Другими словами, может существовать множество информационных структур, любое конечное число верхних уровней которых совпадает.

Поэтому для определения информационного равновесия по конечному дереву представлений агентов необходимо введение дополнительных предположений. Например, можно постулировать, что каждый фантомный агент, соответствующий нижнему уровню конечного дерева представлений, при определении своего действия считает, что агент, соответствующий предыдущему уровню иерархии, адекватно информирован о нем (см. предположения $\Pi_m$ в [62] и субъективные Байесовы равновесия в [139]).

В настоящем разделе рассматриваются регулярные структуры информированности, обладающие, в частности, тем свойством, что, если задано конечное дерево представлений и известно, что информационная структура регулярна, то информационное равновесие определяется однозначно. Кроме того, для регулярных структур информированности удается: получить конструктивные условия существования информационного равновесия, исследовать зависимость информационного равновесия от структуры информированности (раздел 3.6), поставить и решить задачу рефлексивного управления (раздел 3.7).

Как отмечалось выше, понятие структуры информированности является довольно общим и объемлет, в том числе, случаи, содержательная интерпретация которых представляется затруднительной. Поэтому введем в рассмотрение класс *регулярных структур информированности*, который, с одной стороны, является достаточно широким и охватывает множество реальных ситуаций, а с другой – легко описывается. Для задания этих структур введем вспомогательное понятие *регулярного конечного дерева* (РКД), которое определим рекуррентно.

Пусть в игре участвуют $n$ агентов. Если (в простейшем случае) все агенты одинаково информированы, то структура информированности имеет сложность $n$ и единичную глубину. Будем изображать эту ситуацию в виде дерева, состоящего из корневой вершины, $n$

ребер и $n$ висячих вершин. На рисунке 13 изображено такое дерево для случая трех агентов (здесь и далее будем для большей наглядности отмечать в вершинах дерева вместо $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_{12}$ и т.д. просто 1, 2, 12 и т.д.).

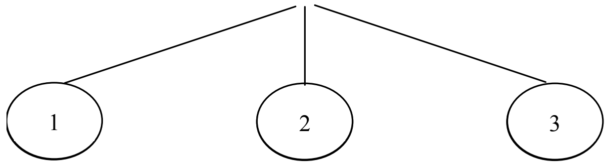


*Рис.* 13. *Регулярное конечное дерево*

Данному РКД соответствует граф рефлексивной игры, приведенный на рисунке 14.

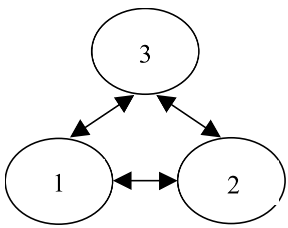


*Рис.* 14. *Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рисунке* 13

Далее РКД может «расти» следующим образом: к каждой висячей вершине $\tau i$, $\tau \in \Sigma$, присоединяется ровно $(n - 1)$ ребро, при этом возникает $(n - 1)$ висячая вершина $\tau ij$, $j = 1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n$. Построенное РКД будем интерпретировать так: если имеется висячая вершина $\tau i$, $\tau \in \Sigma$, то $\tau i$-агент одинаково информирован с $\tau$-агентом (если $\tau$ – пустая последовательность, то $\tau i$-агент является реальным, и его субъективные представления совпадают с объективными).

В качестве примеров регулярных структур информированности приведем все возможные (с точностью до перенумерации агентов) структуры глубины 2.

Начнем с РКД, изображенного на рисунке 15.

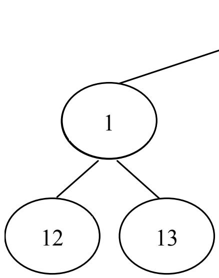


*Рис. 15. Пример РКД глубины* 2

Если $\theta_{12} = \theta_2$ и $\theta_{13} = \theta_3$, то опять получаем граф, приведенный на рисунке 14. Если же хотя бы одно из этих равенств нарушено, получается граф рефлексивной игры, изображенный на рисунке 16.

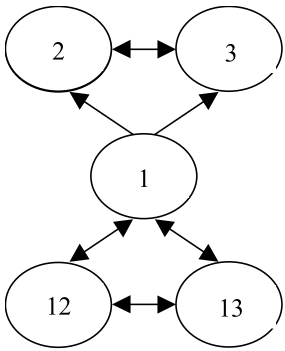


*Рис. 16. Граф рефлексивной игры для РКД,*
*приведенного на рисунке* 15

Следующий случай РКД изображен на рисунке 17.

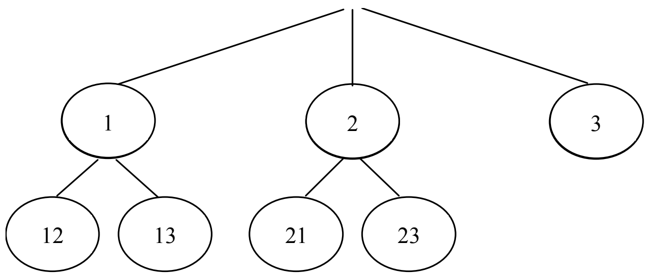


*Рис. 17. Пример РКД глубины* 2

Здесь возможны два варианта графов рефлексивной игры, не сводимых к предыдущим – см. рисунки 18 и 19.

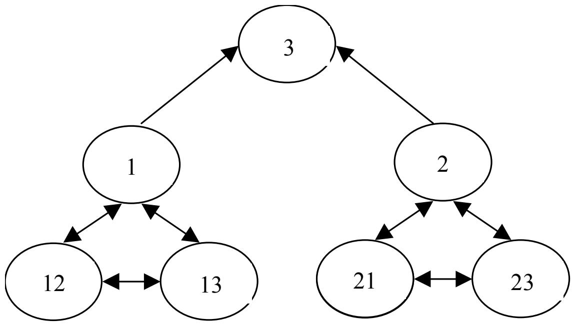


*Рис*. 18. *Граф рефлексивной игры для РКД,*
*приведенного на рисунке* 17

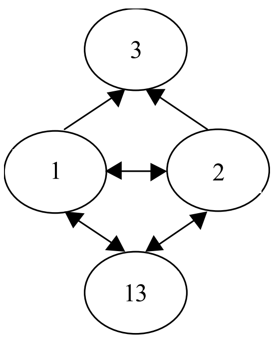


*Рис*. 19. *Граф рефлексивной игры для РКД,* *приведенного на рисунке* 17

Наконец, последний случай РКД изображен на рисунке 20.

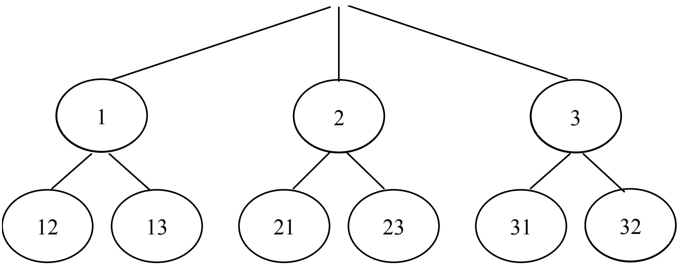


*Рис. 20. Пример РКД глубины* 2

Этому случаю соответствуют три варианта графов рефлексивной игры, не сводимых к предыдущим – см. рисунки 21, 22 и 23. Как видим, графы на рисунках 21 и 22 являются несвязными.

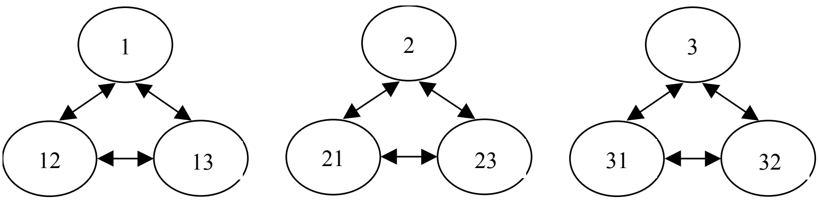


*Рис*. 21. *Граф рефлексивной игры для РКД,*
*приведенного на рисунке* 20

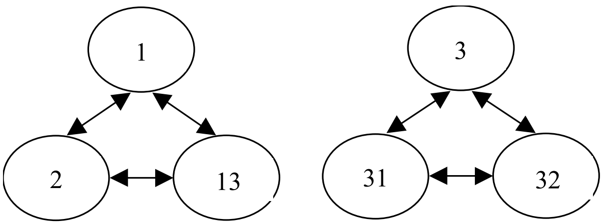


*Рис*. 22. *Граф рефлексивной игры для РКД,*
*приведенного на рисунке* 20

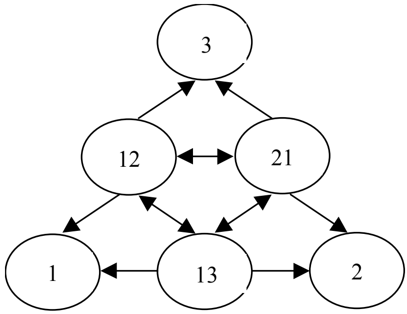


*Рис*. 23. *Граф рефлексивной игры для РКД*,
*приведенного на рисунке* 20

Содержательная интерпретация каждой из семи возможных структур информированности глубины не более двух (см. рисунки 14, 16, 18, 19, 21-23) не вызывает затруднений. Остановимся на трех симметричных структурах (см. рисунки 14, 21 и 23).

Рисунок 14 соответствует, как отмечалось выше, одинаковой информированности агентов. Их рефлексивные реальности совпадают. Можно сказать, агенты играют в одну игру, правила которой являются общим знанием.

Рисунок 21 соответствует в некотором смысле противоположной ситуации. У агентов искаженные и попарно несогласованные представления друг о друге. Каждый из них считает, что все одинаково информированы, но все агенты заблуждаются. На самом деле каждый играет в свою игру.

Рисунок 23 соответствует ситуации, когда каждый агент считает себя более информированным, чем остальные. Например: агенты провели переговоры, сообщив друг другу свои представления о неизвестном параметре, однако все трое скрыли свои истинные представления, считая при этом, что остальные двое были правдивы и поверили своим оппонентам. Возможна и несколько иная интерпретация того же рисунка 23: агенты заключили договор, но каждый собирается его нарушить, считая при этом, что оппоненты считают договор стабильным – не собираются его нарушать, не ждут этого от оппонентов и т.д.

Описанные в настоящем разделе свойства регулярных информационных структур будут использованы ниже при исследовании задач рефлексивного управления (см. раздел 3.7).

Рассмотрим в заключение настоящего раздела вопрос о существовании информационного равновесия для регулярных структур информированности.

Из построения РКД видно, что равновесные действия агентов (если они существуют) могут быть найдены «снизу вверх», то есть от висячих вершин к корню РКД. Пусть, например, для некоторого $\tau \in \Sigma_+$ висячими являются $(n-1)$ вершин $\tau ij$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда, по определению РКД, $n$ агентов из множества $\{\tau ij\}$, $j \in N$, являются одинаково информированными (напомним, что в силу аксиомы автоинформированности (см. раздел 3.2) мы отождествляем $\tau i$- и $\tau ii$-агентов). Поэтому для их равновесных действий справедливы соотношения $x^*_{\tau ijk} = x^*_{\tau ik}$, $j, k \in N$,

(44) $x^*_{\tau ij} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_{\tau ij} \in X_i} f_j(\theta_{\tau ij}, x^*_{\tau i1}, \dots, x^*_{\tau i, j-1}, x_{\tau ij}, x^*_{\tau i, j+1} \dots, x^*_{\tau in})$, $j \in N$.

Отметим, что остальные агенты находятся «вне поля зрения» рассматриваемых нами $n$ агентов $\{\tau ij\}$, $j \in N$.

Система (44) является записью «обычного» равновесия Нэша в игре с общим знанием. Если она имеет решение, из нее, в частности, можно найти действие $\tau i$-агента.

Далее, рассмотрим вершину $\tau$, $\tau \in \Sigma_+$, и вершины $\tau m$, $m \in N \setminus \{\omega(\tau)\}$, (напомним, что $\omega(\tau)$ – последний индекс в последовательности $\tau$), среди которых находится и вершина $\tau i$. Все $\tau m$ – агенты делятся на два множества: одинаково информированные с $\tau$–агентом и прочие (к последним относится и $\tau i$-агент). Чтобы удобнее было их разделять, введем обозначение:

$$\overline{N_\tau} = \{k \in N \mid I_{\tau k} \sim I_\tau\}.$$

Как мы видели, равновесное действие $\tau i$-агента (и, аналогично, действия всех $\tau m$-агентов, $m \notin \overline{N_\tau}$) определяется независимо от действия прочих $\tau m$-агентов, $m \in N$. Поэтому все $\tau k$-агенты, $k \in \overline{N_\tau}$, могут просто подставить действия $x^*_{\tau m}$, $m \notin \overline{N_\tau}$, в свои целевые функции. Таким образом, для вычисления равновесных действий $x^*_{\tau k}$, $k \in \overline{N_\tau}$ надо решить систему уравнений

(45) $x^*_{\tau k} = \arg\max_{x_{\tau k} \in X_k} f_k(\theta_{\tau k}, x^*_{\tau 1}, \dots, x^*_{\tau, k-1}, x_{\tau k}, x^*_{\tau, k+1} \dots, x^*_{\tau n})$, $k \in \overline{N_\tau}$ .

Система (45) является записью равновесия Нэша в игре $\tau k$-агентов, $k \in \overline{N_\tau}$ . Ее решение (если оно существует), позволяет найти равновесное действие $x^*_\tau$.

Двигаясь от висячих вершин к корню, можно последовательно найти все равновесные действия. Для этого все системы типа (44) и (45) должны иметь решение. Таким образом, можно сформулировать следующее достаточное условие существования информационного равновесия для регулярных структур информированности (множество реальных агентов $N$, их целевые функции $\{f_i\}$, множества допустимых действий $\{X_i\}$, а также множество возможных значений $\Omega$ неопределенного параметра считаем фиксированными).

Утверждение 12. Пусть для любого непустого множества $\overline{N} \subseteq N$ справедлив следующий факт: для любых $\theta_k \in \Omega$, $k \in \overline{N}$ , и любых $x^*_m \in X_m$, $m \notin \overline{N}$, существует равновесие Нэша в игре с общим знанием $k$-агентов, то есть существуют $x^*_k$, $k \in \overline{N}$ , удовлетворяющие

$$x^*_k \in \operatorname{Arg}\max_{x_k \in X_k} f_k(\theta_k, x^*_1, \dots, x^*_{k-1}, x_k, x^*_{k+1} \dots, x^*_n),\ k \in \overline{N}.$$

Тогда для любой конечной структуры информированности существует информационное равновесие.

Имея язык описания информированности агентов (информационную структуру – см. раздел 3.2), определение решения рефлексивной игры (информационное равновесие – см. раздел 3.3), а также свойства графа рефлексивной игры (раздел 3.4) и регулярных структур информированности (настоящий раздел), мы имеем возможность перейти к исследованию влияния информированности агентов (и, в первую очередь, рангов их рефлексии) на информационное равновесие, и, следовательно, на их выигрыши, что, в свою очередь, позволит изучить задачи рефлексивного управления.

## 3.6. РАНГ РЕФЛЕКСИИ И ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Напомним, что в разделе 1.2 было определено параметрическое равновесие Нэша, в котором вектор равновесных действий зависел от значения состояния природы, которое являлось общим знанием. В разделе 3.3 было введено понятие информационного равновесия как субъективного равновесия, зависящего от структуры информированности $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$, где $I_i$ – структура информированности $i$-го агента, $i \in N$.

Обозначим $x_i^*(I_i)$ – множество субъективно равновесных действий[35] $i$-го агента, имеющего структуру информированности $I_i$, $i \in N$, $x^*(I_i)$ – соответствующие множество векторов субъективно равновесных действий. Введем $\Psi_i$ – множество всевозможных структур информированности $i$-го агента[36], $\psi_i^{k_i}$ – множество всевозможных конечных (глубины не более $k_i$) структур информированности $i$–го агента, $i \in N$. В соответствии с определением, приведенным выше, будем считать, что **агент, имеющий конечную структуру информированности глубины *k*, обладает рангом информационной рефлексии, равным *k* – 1**. Если информационные структуры всех агентов конечны, то глубина $\gamma(I)$ информационной структуры $I$ также конечна и равна

$$\gamma(I) = 1 + \max_{i \in N} \{k_i\}.$$

Определим множество

$$X_i^*(\Psi) = \bigcup_{I_i \in \Psi} x_i^*(I_i), \tag{46}$$

где $\Psi \subseteq \Psi_i$, тех действий $i$-го агента, которые могут быть субъективно равновесными при условии, что его информационные структуры принадлежат множеству $\Psi$, $i \in N$, и множество субъективных равно-

---

[35] *Напомним, что под субъективно равновесным действием агента понимается соответствующая его информированности компонента информационного равновесия.*

[36] *Так как элементами информационной структуры являются значения состояния природы, то множество всевозможных структур информированности зависит от множества $\Omega$ возможных значений состояния природы. Помня об этом, отражать зависимость в явном виде мы не будем.*

весий при всевозможных информационных структурах из множества $\Psi$:

(47) $X^*(\Psi) = \bigcup_{I \in \Psi} x^*(I)$.

Так как при фиксированном множестве $\Omega$ возможных значений состояний природы выполнено $\psi_i^{k_i} \subseteq \psi_i^{k_i+1}$, $k_i \in \aleph$, $i \in N$, то с увеличением глубины структуры информированности множество возможных субъективных равновесий не сужается.

Таким образом, известны зависимости (46) и (47) множеств потенциальных равновесий от множества возможных информационных структур. При бесконечных информационных структурах $i$-го агента $I_i \in \Psi_i$ множество возможных субъективных равновесий составляет $X^*(\Psi_i) = \bigcup_{I_i \in \Psi_i} x^*(I_i)$, $i \in N$. Возникает вопрос – существует ли множество конечных информационных структур (и какова глубина этих структур), дающих для данного агента то же множество возможных субъективных равновесий? Сформулируем соответствующую задачу.

Пусть целевые функции и допустимые множества всех агентов[37], а также множество возможных значений состояний природы фиксированы и являются общим знанием. Тогда ***задачей о максимальном целесообразном объективном ранге информационной рефлексии*** назовем задачу нахождения:

(48) $k_i^* = \min \{k_i \in \aleph \mid X^*(\Psi_i) = X^*(\Psi_i^{k_i})\}$, $i \in N$.

Отметим, что задача (48) формулируется с точки зрения исследователя операций, и его интересует минимальный ранг рефлексии, при котором любое действие данного агента, являющееся субъективным равновесием при одной из допустимых его информационных структур, также является субъективным равновесием в одной из информационных структур, глубина которой превышает искомый ранг рефлексии не более, чем на единицу. Этим обусловлено использование термина «объективный». Альтернативой является занятие позиции самого агента и сравнение его выигрышей (гарантирован-

---

[37] *По умолчанию будем предполагать, что целевые функции непрерывны, а допустимые множества компактны.*

ных значений целевой функции) при различных рангах рефлексии. Сформулируем соответствующую задачу.

Прежде всего, определим, что понимать под выигрышем агента. Обозначим классический МГР $i$-го агента[38]

(49) $v_i = \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{x_{-i} \in X_{-i}} \min\limits_{\theta_i \in \Omega} f_i(\theta_i, x_i, x_{-i}), i \in N,$

и введем субъективный МГР $i$-го агента по множеству всех субъективных равновесий при всевозможных информационных структурах из множества $\Psi \subseteq \Psi_i$:

(50) $v_i^s(\Psi) = \min\limits_{y \in X^*(\Psi)} f_i(\theta_i, x), i \in N.$

Из (47), (49) и (50) следует, что $v_i^s(\varphi) \geq v_i$, $\varphi \subseteq \Psi_i$, $i \in N$.

Пусть целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также множество возможных значений состояний природы фиксированы и являются общим знанием. ***Задачей о максимальном целесообразном i-субъективном ранге информационной рефлексии*** назовем задачу нахождения:

(51) $s_i^* = \min \{s_i \in \aleph \mid v_i^s(\Psi_i) = v_i^s(\Psi_i^{s_i})\}, i \in N.$

Выражение (51) означает, что требуется найти такой минимальный ранг информационной рефлексии агента, что при любом большем ранге рефлексии не найдется информационного равновесия, дающего ему строго меньший выигрыш.

Из (48), (50) и (51), а также из установленной выше монотонности множеств субъективных равновесий по глубине информационных структур следует справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение 13.</u> $s_i^* \leq k_i^*$, $i \in N$.

Утверждение 13 гласит, что, если под выигрышем агента понимать гарантированное по множеству всевозможных субъективных равновесий значение его целевой функции, то максимальный целесообразный субъективный ранг информационной рефлексии любого агента не превосходит максимального целесообразного объективного ранга его информационной рефлексии. Другими словами, если существует ранг информационной рефлексии, «исчерпывающий» множество субъективных равновесий, то он является оценкой сверху

---

[38] *Будем считать, что множество информационных структур $\Psi$ таково, что $\theta_i \in \Omega$, $i \in N$.*

максимальной глубины структуры информированности, которая целесообразна с точки зрения рассматриваемого агента.

В соответствии с утверждением 13 имеет смысл рассматривать задачу (48), однако получение ее решения в общем случае затруднительно. Поэтому проанализируем частный случай рефлексивной игры двух лиц (по аналогии результаты могут быть распространены на случай любого конечного числа агентов) с регулярной информационной структурой.

Рассмотрим РКД и соответствующие графы рефлексивной игры. Напомним, что на нижних уровнях РКД возникает субъективное общее знание (субъективный common knowledge). То есть в рефлексивной игре, структура информированности которой является регулярной, агенты двух нижних уровней могут иметь как одинаковые представления о неопределенных параметрах, (назовем этом случай *симметричным общим знанием на нижнем уровне*), так и неодинаковые (назовем этом случай *несимметричным общим знанием на нижнем уровне*).

Обозначим «классическое» равновесие Нэша игры двух агентов, в котором информация о значениях $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$ является общим знанием

$$(52)\ E_N(\theta_1, \theta_2) = \{(x_1(\theta_1, \theta_2), x_2(\theta_1, \theta_2)) \in X' \mid \forall y_1 \in X_1\ f_1(\theta_1, x_1(\theta_1, \theta_2), x_2(\theta_1, \theta_2)) \geq f_1(\theta_1, y_1, x_2(\theta_1, \theta_2))\ \forall y_2 \in X_2\ f_2(\theta_2, x_1(\theta_1, \theta_2), x_2(\theta_1, \theta_2)) \geq f_2(\theta_2, x_1(\theta_1, \theta_2), y_2)\}.$$

Введем множество наилучших ответов $i$-го агента на выбор оппонентом действий из множества $X_{-i}$ при множестве $\Omega$ возможных состояний природы:

$$BR_i(\Omega, X_{-i}) = \bigcup_{x_{-i} \in X_{-i},\, \theta \in \Omega} \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i = 1, 2,$$

а также следующие величины и множества

$$(53)\ E_N = \bigcup_{\theta_1, \theta_2 \in \Omega} E_N(\theta_1, \theta_2),\ E_N^0 = \bigcup_{\theta \in \Omega} E_N(\theta, \theta),$$

$$(54)\ X_i^0 = \bigcup_{\theta_1, \theta_2 \in \Omega} x_i(\theta_1, \theta_2) = Proj_i\, E_N,\ i = 1, 2,$$

$$(55)\ X_i^k = BR_i(\Omega, X_{-i}^{k-1}),\ k = 1, 2, \dots,\ i = 1, 2.$$

Отображение $BR_i(\Omega, X_{-i}): \Omega \times X_{-i} \to X_i$ назовем *рефлексивным отображением* $i$-го агента, $i = 1, 2$.

Свойства введенных множеств описываются следующим утверждением, истинность которого следует из определений (52)-(55).

Утверждение 14. $E_N^0 \subseteq E_N$, $X_i^k \subseteq X_i^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2$.

Исследуем рефлексивную игру двух агентов с конечной[39] и регулярной структурой информированности.

Рефлексивное отображение $i$-го агента назовем *стационарным*, если $X_i^k = X_i^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2$.

Рассмотрим $i$-го агента, $i = 1, 2$, и исследуем его субъективные равновесия при различных рангах информационной рефлексии, увеличивая их последовательно, начиная с нулевого (еще раз напомним, что ранг информационной рефлексии на единицу меньше глубины соответствующей информационной структуры).

При фиксированной глубине регулярной информационной структуры $I_i$ граф рефлексивной игры может быть построен двумя способами. Во-первых, можно ввести предположение, что на нижнем уровне имеет место несимметричное общее знание. Во-вторых, можно ввести предположение, что на нижнем уровне имеет место симметричное общее знание, то есть ввести «дополнительного» фантомного агента, наделив его той же информацией, что обладает агент, соответствующий нижнему уровню дерева $I_i$. Будем рассматривать параллельно оба случая.

**1.** Если глубина структуры $\psi_i^1$ информированности $i$-го агента, $i = 1, 2$, равна $k_i = 1$ (имеется только $\theta_i$), то соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftrightarrow x_{ij}$ (здесь и далее $j \neq i$). То есть реальный $i$-ый агент разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом, причем оба они с точки зрения $i$-го агента обладают информацией $\theta_i$ (симметричное общее знание на нижнем уровне). Следовательно, $X^*(\psi_i^1) = E_N^0$.

**2.** Если глубина структуры информированности $\psi_i^2$ $i$-го агента равна $k_i = 2$ (имеются $\theta_i$, $\theta_{ij}$), то возможны два варианта[40].

---

[39] *Требование конечности информационной структуры представляется вполне естественным: как отмечалось выше, возможности человека по переработке информации ограничены, тем более, что глубина структуры информированности может быть ограничена любым (достаточно большим, но конечным) числом.*

[40] *Рассматриваемые для каждого ранга рефлексии два случая соответствуют «симметричному» и «несимметричному» (субъективному) общему знанию.*

В первом случае соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftrightarrow x_{ij}$ (несимметричное общее знание на нижнем уровне). То есть реальный $i$-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом, который обладает информацией $\theta_{ij}$. С точки зрения $i$-го агента множество возможных равновесий игры равно $E_N \supseteq X^*(\psi_i^1)$.

Во втором случае (симметричное общее знание на нижнем уровне) соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftarrow x_{ij} \leftrightarrow x_{iji}$. То есть реальный $i$-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом, который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным $iji$-ым агентом, причем оба они с точки зрения $i$-го агента обладают информацией $\theta_{ij}$. С точки зрения $i$-го агента множество возможных равновесий игры $ij$-го и $iji$-го агентов равно $E_N^0$, следовательно, $ij$-ый агент может (опять же с точки зрения $i$-го) выбрать одно из действий из множества $Proj_j\, E_N^0$. Таким образом,

(56) $X^*(\psi_i^2) = BR_i(\Omega, Proj_j\, E_N^0) \times Proj_j\, E_N^0 \subseteq X_i^1 \times X_j^0$.

Так как $E_N \subseteq X_i^0 \times X_j^0$, то $X^*(\psi_i^1) \subseteq X^*(\psi_i^2)$, то есть увеличение ранга рефлексии с нуля до единицы с точки зрения задачи (48) для $i$-го агента целесообразно.

**3.** Если глубина структуры информированности $\psi_i^3$ $i$-го агента равна $k_i = 3$ (имеются $\theta_i$, $\theta_{ij}$, $\theta_{iji}$), то возможны два варианта.

В первом случае (несимметричное общее знание на нижнем уровне) соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид: $x_i \leftarrow x_{ij} \leftrightarrow x_{iji}$, то есть реальный $i$-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом (полагающим, что состояние природы равно $\theta_{ij}$), который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным $iji$-ым агентом (обладающим информацией $\theta_{iji}$). С точки зрения $i$-го агента множество возможных равновесий игры $ij$-го и $iji$-го агентов равно $E_N$, следовательно

$$X^*(\psi_i^3) = BR_i(\Omega,\ X_j^0) \times X_j^0 = X_i^1 \times X_j^0.$$

Во втором случае (симметричное общее знание на нижнем уровне) соответствующий граф рефлексивной игры имеет вид:

$x_i \leftarrow x_{ij} \leftarrow x_{iji} \leftrightarrow x_{ijij}$. То есть реальный $i$-ый агент (полагающий, что состояние природы равно $\theta_i$) считает, что разыгрывает игру с фантомным $ij$-ым агентом (полагающим, что состояние природы равно $\theta_{ij}$), который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным $iji$-ым агентом, который, в свою очередь, разыгрывает игру с фантомным $ijij$-ым агентом, причем оба они с точки зрения $i$-го агента обладают информацией $\theta_{iji}$. С точки зрения $i$-го агента множество возможных равновесий игры $iji$-го и $ijij$-го агентов равно $E_N^0 \subseteq X_i^0 \times X_j^0$, следовательно, $iji$-ый агент может (с точки зрения $i$-го) выбрать одно из действий из множества $Proj_i\, E_N^0$. Тогда $ij$-ый агент может (опять же с точки зрения $i$-го) выбрать одно из действий из множества $BR_j(\Omega, Proj_i\, E_N^0)$. Таким образом,

$$X^*(\psi_i^3) = BR_i(\Omega, BR_j(\Omega, Proj_i\, E_N^0)) \times BR_j(\Omega, Proj_i\, E_N^0) \subseteq X_i^2 \times X_j^1.$$

Так как $X^*(\psi_i^2) \subseteq X^*(\psi_i^3)$, то увеличение ранга рефлексии с единицы до двух с точки зрения задачи (48) целесообразно для $i$-го агента.

По аналогии, легко показать, что при несимметричном (Asymmetric) общем знании на нижнем уровне множество субъективных равновесий $i$-го агента равно

(57) $AX_i^*(\Psi_i^{k_i}) = X_i^{k_i-2}$, $k_i = 2, 3, \dots$ ,

а при симметричном (Symmetric) общем знании на нижнем уровне множество субъективных равновесий $i$-го агента равно

(58) $SX_i^*(\Psi_i^{k_i}) = BR_i(\Omega, \dots BR_j(\Omega, Proj_i\, E_N^0), \dots)$, $k_i = 2, 3, \dots$ .

Так как $SX_i^*(\Psi_i^{k_i}) \subseteq X_i^{k_i-1} \subseteq X_i^{k_i}$, то справедливо следующее утверждение 15, из которого следует, что, увеличивая глубину структуры информированности (на единицу), любое субъективное равновесие, полученное в рамках симметричного общего знания на нижнем уровне, можно сделать субъективным равновесием в рамках несимметричного общего знания на нижнем уровне.

Утверждение 15. $SX_i^*(\Psi_i^{k_i}) \subseteq AX_i^*(\Psi_i^{k_i+1})$, $k_i = 2, 3, \dots$ .

Из утверждения 15 и определения стационарности рефлексивного отображения следует, что для рефлексивных игр двух лиц с регулярной информационной структурой независимо то того, симметричное или асимметричное общее знание имеется на нижнем уровне, следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 16. Если рефлексивные отображения агентов стационарны, то максимальный целесообразный субъективный ранг информационной рефлексии равен двум и

$$X_i^*(\Psi) = X_i^0,\ i = 1, 2.$$

Результат утверждения 16 позволяет в случае стационарных рефлексивных отображений рассматривать рефлексивное управление как *информационное регулирование*, при котором объектом управления являются представления агентов о неопределенных параметрах [19, 62].

В общем случае возможны три варианта:

1) Если рефлексивные отображения стационарны, то множество субъективных равновесий есть $\prod_{i \in N} X_i^0 \subseteq X'$, то есть является подмножеством (быть может, собственным – см. пример 11) множества $X'$ допустимых действий агентов;

2) Если рефлексивные отображения не стационарны, то множество субъективных равновесий может совпадать с множеством $X'$ допустимых действий агентов – см. пример 12;

3) Если рефлексивные отображения не стационарны, то множество субъективных равновесий может быть строго шире $\prod_{i \in N} X_i^0$, но не совпадать (быть уже) с множеством $X'$ допустимых действий агентов – см. пример 13;

Пример 11. Пусть $f_i(\theta, \theta) = x_i - x_i^2 / 2\,(\theta + \alpha\, x_i)$, где $\alpha \in (0; 1)$, $i = 1, 2$, $\Omega = [0; 1]$. Тогда $BR_i(\theta_i, x_j) = \theta_i + \alpha\, x_j$, $j \neq i$, $i, j = 1, 2$.

Вычислим равновесие Нэша: $x_i^*(\theta_i, \theta_j) = (\theta_i + \alpha\, \theta_j) / (1 - \alpha^2)$, $j \neq i$, $i, j = 1, 2$. Определим $X_i^0 = [0; 1 / (1 - \alpha)]$, $i = 1, 2$. Легко проверить, что рефлексивное отображение в рассматриваемом примере является стационарным, то есть $X_i^k = X_i^0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$ – см. рисунок 24.

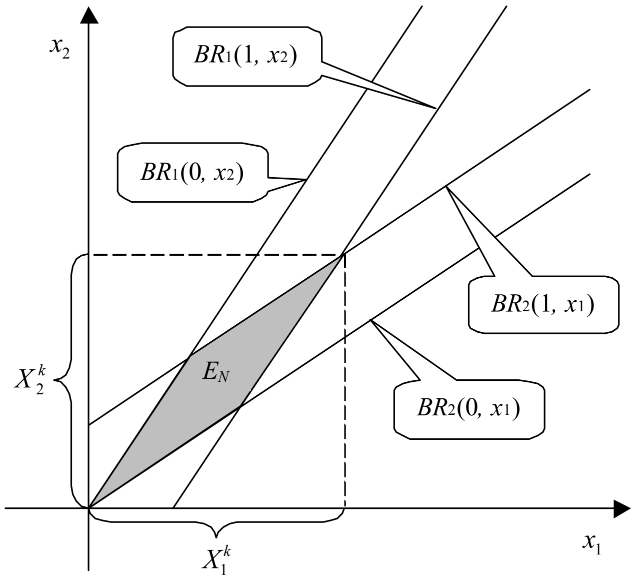


*Рис*. 24. *Множество субъективных равновесий в примере* 11

Изменяя $\theta_i$ и $\theta_j$, то есть, осуществляя информационное регулирование, центр может реализовать как субъективное равновесие любую точку из множества $[0; 1 / (1 - \alpha)]^2$. •

В общем случае (при нестационарных рефлексивных отображениях) с увеличением глубины структуры информированности множество субъективных равновесий не сужается, поэтому из анализа теоретико-игровой модели нельзя априори ограничить максимальный целесообразный ранг рефлексии (см. обсуждение роли информационных ограничений в разделе 2.3) агентов. Приведем пример.

Пример 12. Пусть $f_1(\theta, x_1, x_2) = \theta\,(1 - x_2)\,x_1 - x_1^2/2$, $f_2(\theta, x_1, x_2) = \theta\,x_1\,x_2 - x_2^2/2$, где $\Omega = [^1/_2\,;1]$, $X_1 = X_2 = (0\,;1)$. Тогда $BR_1(\theta, x_2) = \theta\,(1 - x_2)$, $BR_2(\theta, x_1) = \theta\,x_1$.

Легко проверить, что множеством $E_N$ является четырехугольник с вершинами $(^2/_5\,,^1/_5)$, $(^2/_3\,,^1/_3)$, $(^1/_2\,,^1/_2)$ и $(^1/_3\,,^1/_3)$, поэтому $X_1^0 = [^1/_3\,;^2/_3]$, $X_2^0 = [^1/_5\,;^1/_2]$ (см. рисунок 25).

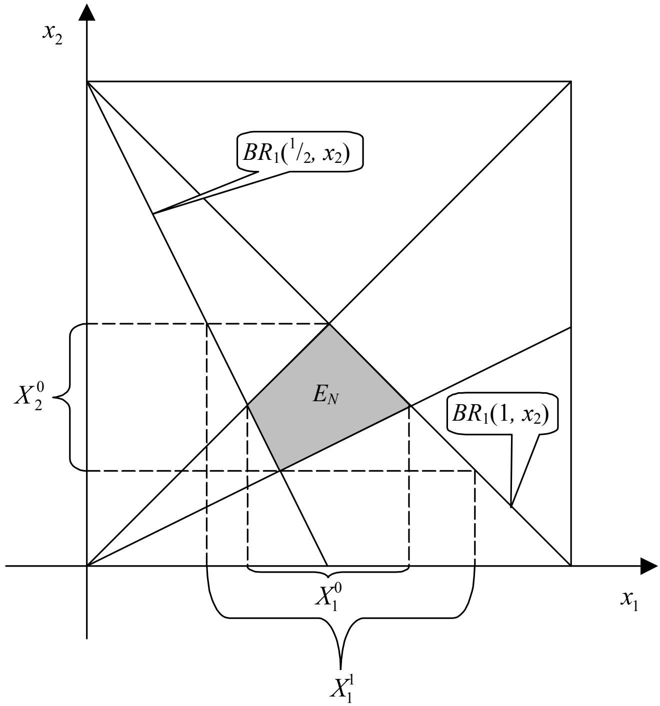


*Рис*. 25. *Множество субъективных равновесий в примере* 12

Обозначим левую и правую границы отрезка $X_i^k$ за $\alpha_{i,k}$ и $\beta_{i,k}$ соответственно, $i = 1, 2$. Тогда имеем следующие соотношения:
$\alpha_{2,k+1} = ½\ \alpha_{1,k}$ , $\beta_{2,k+1} = \beta_{1,k}$ , $\alpha_{1,k+1} = ½\ (1 - \beta_{2,k})$, $\alpha_{1,k}$ , $\beta_{1,k+1} = 1 - \alpha_{2,k}$ , где $k = 0, 1, \ldots$ . Из последних соотношений нетрудно вывести следующие:

$$\alpha_{i,k+4} = ¼\ \alpha_{i,k},\ \ \beta_{i,k+4} = ¾ + ¼\ \beta_{i,k},\ \ i = 1, 2,\ \ k = 0,1,\ldots .$$

Таким образом, $\alpha_{i,k} \to 0$, $\beta_{i,k} \to 1$ при $k \to \infty$, где $i = 1, 2$. Поэтому $\bigcup_{k \geq 0} X_i^k = (0;1) = X_i$ , $i = 1, 2$. Это означает, что, надлежащим образом увеличив глубину рефлексии агента, можно добиться любого его допустимого действия. •

Примеры 11 и 12 показывают, что множество субъективно равновесных действий $i$-агента (при всевозможных его структурах информированности) $\bigcup_{k\ge 0} X_i^k$ может как совпадать с $X_i^0$, то есть быть достаточно узким, так и совпадать с $X_i$, то есть быть максимально широким. Убедимся, что возможны и «промежуточные» варианты, то есть ситуации, в которых множество субъективных равновесий строго шире исходного множества $E_N$ равновесий Нэша, но строго уже множества допустимых действий.

Пример 13. Пусть целевые функции агентов и множество $\Omega$ такие же, как и в предыдущем примере. Изменим лишь множества допустимых действий: $X_1 = X_2 = (-c\ ;1 + c)$, $c > 0$. Тогда по-прежнему $\bigcup_{k\ge 0} X_i^k = (0;1)$, $i = 1, 2$, но теперь $(0;1) \subset X_i$. •

Так как множества субъективных равновесий монотонны по рангу рефлексии (глубине информационной структуры) – см. утверждение 14, то перспективными задачами будущих исследований являются:

1. Поиск минимального ранга рефлексии, при котором «исчерпывается» множество субъективных равновесий (задача (48));

2. Получение оценок скорости изменения (или сходимости) последовательности $\{X_i^k\}$;

3. Определение для заданного действия агента минимального ранга его информационной рефлексии, при котором данное действие может оказаться субъективным равновесием и т.д.

В заключение настоящего раздела отметим, что, по-видимому, существует определенная аналогия между рефлексивными играми и информационными расширениями игр [14, 39, 40], в том числе – метаиграми Н. Ховарда [117, 118]. В информационных расширениях игр предполагается, что существует упорядочение агентов, в рамках которого агент, принимающий решение о выбираемом действии, может рассчитывать на знание действий агентов, которые производят свой выбор раньше (в заданном упорядочении) него. Такие игры – с фиксированной последовательностью ходов – называются *иерархическими играми* [18, 19, 34, 39]. В рамках этой модели доказано [39], что любой вектор действий, обеспечивающий агентам выигрыши не меньше соответствующих максиминов в исходной игре, может быть реализован как равновесие в некотором информационном расширении исходной игры. Для рефлексивных игр с РКД это, вообще говоря, не так – пример 11 показывает, что для некоторых случаев множество информационных равновесий остается достаточно узким. В то же время, «иерархичность» и «рефлексивность» игр не противоречат друг другу – например, иерархическая игра может быть рефлексивной. Синтез результатов исследования метаигр и рефлексивных игр представляется перспективной задачей будущих исследований.

Зная исследованную в настоящем разделе зависимость множества информационных равновесий от структуры информированности, можно ставить и решать задачу рефлексивного управления – управления информационной структурой и, следовательно, информационным равновесием.

## 3.7. РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В [62] введена система классификаций задач управления в организационных системах и выделены следующие его типы (основание классификации – целенаправленно изменяемые компоненты управляемой системы):

- **институциональное управление** (изменение допустимых множеств);
- **мотивационное управление** (изменение целевых функций);
- **информационное управление** (изменение информации, которую агенты используют при принятии решений).

В информационном управлении предложено было различать следующие его виды (основание классификации – объекты и субъекты, информация о которых сообщается):

- **информационное регулирование** – целенаправленное влияние на информацию о состоянии природы;
- **рефлексивное управление** – целенаправленное влияние на информацию о моделях принятия субъектами решений;
- **активный прогноз** – целенаправленное сообщение информации о будущих значениях параметров, зависящих от состояния природы и действий субъектов (в том числе – в качестве этих параметров могут выступать результаты деятельности агентов, их действия или значения их целевых функций).

Задачи информационного регулирования рассматривались в работах [19, 62], активного прогнозирования – в [62]. Поэтому перейдем к применению полученных выше результатов для постановки и решения задач рефлексивного управления.

Проанализировав множества субъективных информационных равновесий агентов (см. выражения (57) и (58)), сформулируем ***задачу рефлексивного управления***, заключающуюся в формировании управляющим органом – центром[41] – такой структуры информированности агентов, при которой субъективным равновесием является требуемый для центра (или максимально для него выгодный) вектор действий агентов. Отметим, что в таком виде задача рефлексивного управления включает как частный случай задачу информационного регулирования [19, 62].

Пусть на множестве состояний системы (множестве $X'$ векторов действий агентов) введен функционал $\Phi(\cdot)$, отражающий интересы центра.

Предположим сначала, что глубина информационной структуры (так как рефлексивное управление различными агентами можно осуществлять независимо, то все рассуждения будем проводить для произвольного $i$-го агента) ограничена конечным числом $\nu_i$. Тогда в соответствии с выражением (57) выполнено: $AX_i^*(\Psi_i^{\nu_i}) = X_i^{\nu_i - 2}$. Следовательно, изменяя информационную структуру, центр имеет возможность побудить агента выбрать как субъективное равновесие любое действие из множества $X_i^{\nu_i - 2}$, которое можно, следуя [58, 59], назвать *множеством реализуемых действий*. Задача управления заключается в нахождении вектора $x^*$ реализуемых действий, максимизирующего целевую функцию центра:

(59) $x^* = \arg \max\limits_{\{x_i \in X_i^{\nu_i}\}_{i \in N}} \Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$,

и вычислении в соответствии с выражениями (52)-(58) информационных структур, при которых данный вектор действий является субъективным равновесием игры агентов. Задача (59) является стандартной задачей оптимизации

Если рефлексивное отображение стационарно, то в силу утверждения 16 задача (59) примет вид:

$$x^* = \arg \max_{\{y_i \in X_i^0\}_{i \in N}} \Phi(x_1, x_2, ..., x_n).$$

[41] *В качестве центра может выступать один из агентов.*

Предположим теперь, что глубина информационной структуры априори не ограничена. Фиксируем действие $x^* \in X'$, которое центр хотел бы реализовать.

Если рефлексивные отображения стационарны, то в силу утверждения 16, если $x^* \in X^0 = \prod_{i \in N} X_i^0$, то это действие реализуемо как субъективное информационное равновесие. Если $x^* \notin X^0$, то реализовать данное действие как информационное равновесие невозможно.

Если рефлексивные отображения не стационарны, то в силу утверждения 15 необходимо найти для каждого агента регулярную информационную структуру глубины $k_i^*(x_i)$, в рамках которой искомое действие является субъективным равновесием, то есть:

(60) $k_i^*(x_i) = \min \{k \in \aleph \mid x_i^* \in X_i^{k-2}\}, i \in N.$

Примеры постановок и решений задач рефлексивного управления для многих практически важных частных случаев приведены в четвертой главе настоящей работы.

К сожалению, в общем случае априори ничего нельзя сказать о том, существует ли конечная глубина информационной структуры, при которой данное действие реализуемо как информационное равновесие (то есть существует ли решение задачи (60)). Единственный выход – в каждой конкретной ситуации вычислять последовательно множества (57) и (58) до тех пор, пока либо очередное множество не включит в себя $x_i^*$, либо не будет достигнута некоторая заранее установленная центром глубина структуры информированности (после чего можно будет сделать вывод, что при данном ограничении на ранг рефлексии агента реализовать требуемое действие как информационное равновесие нельзя).

Приведем алгоритм[42] решения задачи (60) для случая двух агентов. Для этого введем для произвольного действия $x_i \in X_i$ $i$-го агента множество тех действий его оппонента, на которые при некотором допустимом состоянии природы данное действие является наилучшим ответом:

(61) $U_j(x_i) = \{x_j \in X_j \mid \exists\, \theta \in \Omega : x_i \in \operatorname{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_j)\}$.

---

[42] *Как отмечалось выше, в общем случае нельзя априори гарантировать сходимость этого алгоритма.*

Алгоритм.

1. Если $U_j(x_i) = \varnothing$, то решения не существует, иначе – перейти к шагу 2.

2. Если $x_i \in X_i^0$, то решение найдено и $k_i^*(x_i) = 2$, иначе – перейти к шагу 3.

3. Если $U_j(x_i) \cap X_j^0 \neq \varnothing$, то решение найдено и $k_i^*(x_i) = 3$, иначе – перейти к шагу 4.

4. Если $\bigcup_{x_j \in U_j(x_i)} U_i(x_j) \cap X_i^0 \neq \varnothing$, то решение найдено и $k_i^*(x_i) = 4$, иначе – перейти к шагу 5.

5. и т.д. до тех пор, пока решение не будет найдено.

Приведенные в настоящем разделе результаты дают решение задачи рефлексивного управления для ряда практически важных случаев. Актуальным направлением дальнейших исследований представляется постановка и решение задач рефлексивного управления для произвольных информационных структур в моделях рефлексивных игр многих лиц. В частности, можно предположить, что перечисленные в предыдущем и настоящем разделах свойства множеств субъективных равновесий и подходы к формулировке и решению задач рефлексивного управления останутся в силе при непосредственном их переносе на многоэлементные модели, тем более что все результаты по субъективным равновесиям были получены при независимом рассмотрении информационных структур отдельных агентов[43].

[43] *Отмеченное свойство – возможность независимого влияния на поведение участвующих в рефлексивной игре агентов за счет изменения их субъективного описания игры – является существенной позитивной чертой рефлексивного управления.*

# ГЛАВА 4. ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГР

Ниже рассматривается ряд прикладных моделей рефлексивных игр (скрытое управление, информационное управление через средства массовой информации, а также рефлексия в психологии и художественных произведениях), которые иллюстрируют приведенные выше общие модели принятия решений и игрового взаимодействия в условиях различной информированности. Объединяет эти модели то, что в них в большинстве случаев имеются два агента[44], ранг рефлексии которых в рамках принципа доверия (в соответствии с которым у реципиента информационного сообщения не возникает сомнений в истинности полученных сведений) равен нулю, единице или двойке. Многочисленные ссылки позволят заинтересованному читателю получить подробную информацию о возможностях использования рассматриваемого подхода в различных прикладных задачах.

## 4.1. СКРЫТОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В настоящее время существует значительное число работ [4, 11, 12, 16, 20, 23, 30, 69, 75, 90, 91 и др.], посвященных так называемому *скрытому управлению* людьми, под которым понимается замаскированное управляющее воздействие, не вызывающее возражений у управляемого субъекта. Частным случаем скрытого управления является манипулирование – «скрытое управление человеком против его воли, приносящее инициатору определенные преимущества» [91, С. 4]. Анализ существующих работ в этой области (основные выводы из этого анализа выделены ниже жирным шрифтом и используются в качестве предположений при построении модели) позволяет предложить рассматриваемую в настоящем разделе формальную *модель скрытого управления*, описываемого в терминах рефлексивных игр как разновидность рефлексивного управления.

Прежде всего отметим, что, во-первых, предметом воздействия при скрытом управлении является информация, используемая

[44] *Несмотря на то, что во многих моделях один из агентов выступает в качестве центра (осуществляет информационное управление), информационное равновесие все равно имеет место – хотя бы как субъективное равновесие управляемого агента.*

управляемым субъектом при принятии решений. Следовательно, в терминах системы классификаций, предложенной в [62], **скрытое управление является информационным управлением**.

Во вторых, необходимо подчеркнуть, что в подавляющем большинстве известных ситуаций, в которых имеет место скрытое управление, **взаимодействуют только два субъекта** (быть может, коллективных). Значит, в первом приближении достаточно выделить управляющего субъекта, которого условно назовем *активным агентом*, и управляемого субъекта, которого условно назовем *пассивным агентом*.

В третьих, считается, что **активный агент адекватно информирован о пассивном агенте**, из чего вытекает, что он имеет возможность правильно прогнозировать поведение последнего в рамках любой информационной ситуации. Более того, во-первых, считается, что **активному агенту известно истинное значение неопределенного параметра**, а, во-вторых, **пассивный агент в** большинстве случаев **считает, что активный агент адекватно информирован о нем** (то, что пассивный агент 2-субъективно (то есть со своей точки зрения) адекватно информирован об активном агенте, следует из утверждения 7).

Если активный агент имеет возможность изменять (воздействовать, модифицировать и т.д.) структуру информированности пассивного агента, то целью осуществляемого активным агентом рефлексивного управления является навязывание пассивному агенту такой информационной структуры, что принимаемое в ее рамках решение наиболее благоприятно для активного агента. То есть **критерием эффективности информационного воздействия (скрытого управления) является значение выигрыша, полученного активным агентом**.

Таким образом, скрытое управление может быть представлено в терминах рефлексивной игры следующим образом. Пусть имеются два агента (активный и пассивный), известны их целевые функции и множества допустимых действий. Структура информированности такова, что активный агент адекватно информирован о пассивном агенте, ему известно истинное значение неопределенного параметра, а пассивный агент, если не оговорено особо, считает, что активный агент адекватно информирован о нем.

Предположим, что задано множество допустимых структур информированности пассивного агента. *Задача синтеза оптимального* (с точки зрения активного агента) *информационного воздействия* (точнее – воздействия на информированность) заключается в нахождении такой допустимой информационной структуры пассивного агента (напомним, что тем самым в соответствии с введенными предположениями информационная структура активного агента фиксирована), что соответствующее ей информационное равновесие наиболее выгодно активному агенту (обеспечивает максимальное значение его целевой функции).

Чрезвычайно важным и значительно упрощающим модель является тот факт, что во всех известных нам моделях скрытого управления **ранг рефлексии не превышает двух** (то есть максимальная длина существенной последовательности индексов, описывающей элемент информационной структуры, не превышает трех).

Решение сформулированной в терминах рефлексивной игры задачи скрытого управления позволяет определить с нормативной точки зрения ту структуру информированности, которую активный агент должен навязать пассивному агенту. Но **за рамками рассматриваемых ниже формальных моделей остается *технология скрытого управления***, понимаемая как совокупность методов, операций, приемов, этапов и т.д., последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной задачи [21, 55]. Прикладные технологии информационного управления изучаются и применяются в социальной психологии, нейро-лингвистическом программировании, психотерапии и т.д. [11, 12,16, 20, 22, 27, 30 30, 49-51, 69, 75, 88, 91, 93 и др.].

Другими словами, в рамках рефлексивной теоретико-игровой модели можно рекомендовать активному агенту сформировать у пассивного агента определенную информационную структуру, но ничего нельзя сказать о том, *как* ему это сделать. С другой стороны, описываемое в упомянутых выше работах по скрытому управлению многообразие способов воздействия касается именно технологии формирования активным агентом информационной структуры пассивного агента при известных целях воздействия. Следовательно, формальные модели позволяют получить ответ на вопрос – *что* следует делать активному агенту в рамках информационного управления, а социальная психология и другие гуманитарные науки

[27, 33, 50, 88, 91, 93] накапливают факты об эффективных способах достижения цели.

Число возможных реальных ситуаций, в которых может быть использовано информационное управление, настолько велико, а сами ситуации настолько разнородны (несколько упрощает ситуацию тот факт, что в известных работах **пассивный агент не подвергает сомнению сообщаемую активным агентом информацию**, то есть проблема доверия [62] практически не рассматривается), что на сегодняшний день не найдено универсальных рецептов и **технология скрытого управления является искусством**. Превращение ее в науку (путем систематизации, разработки нормативных моделей самого *процесса воздействия*, их исследования, идентификации и т.д.) является перспективной и актуальной задачей, но выходит за рамки настоящего исследования. Поэтому остановимся более подробно на анализе нормативных моделей, для которых изучим задачи синтеза оптимальных информационных воздействий.

Из того, что активный агент (следуя терминологии теории иерархических игр, будем его условно обозначать номером «1») имеет достоверную информацию о неопределенном параметре следует, что $\theta_1 = \theta$. Из того, что он адекватно информирован о пассивном агенте (которого будем условно обозначать номером «2»), следует, что $I_{12} = I_2$. Из того, что пассивный агент считает активного адекватно информированным о нем, следует, что $I_{212} = I_2$. Из того, что ранг рефлексии не превышает двух, следует, что активный агент имеет возможность влиять на $\theta_2$, $\theta_{21}$, $\theta_{212}$ и всевозможные их комбинации.

Итак, гипотетически имеем <u>семь вариантов</u>:

- ранг рефлексии пассивного агента равен нулю, информационное воздействие направлено на $\theta_2$ (условно назовем эту задачу *задачей А*);
- ранг рефлексии равен единице, информационное воздействие направлено на $\theta_{21}$ (условно назовем эту задачу *задачей Б*);
- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей В*);
- ранг рефлексии равен единице, информационное воздействие направлено на $\theta_2$ и $\theta_{21}$ (условно назовем эту задачу *задачей АБ*);
- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_2$ и $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей АВ*);

- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_{21}$ и $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей БВ*);

- ранг рефлексии равен двум, информационное воздействие направлено на $\theta_2$, $\theta_{21}$ и $\theta_{212}$ (условно назовем эту задачу *задачей АБВ*).

Рассмотрим перечисленные варианты, считая без ограничения общности, что множества возможных информированностей пассивного агента – допустимых значений $\theta_2$, $\theta_{21}$ и $\theta_{212}$ – равны $\Omega$ и не зависят от ранга рефлексии. В качестве содержательных иллюстраций будем приводить ссылки на номера *стратагем* – стратегий, применяемых в политике и военном искусстве – в соответствии с их описанием в [16][45] (обзор современных подходов к использованию рефлексивного управления в военном деле приведен в [83]).

Задача А. В данной задаче будем считать, что целевая функция $f_2(\cdot)$ пассивного агента не зависит от действий активного агента, или в ней фигурирует некоторое фиксированное действие активного агента – см. рисунок 26[46], на котором изображены существенные компоненты информационной структуры.

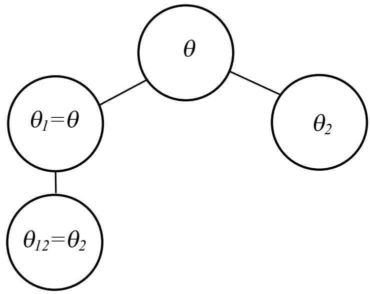


*Рис. 26. «Информационная структура» в задаче А*

Так как воздействие направлено на $\theta_2$, то в соответствии с классификацией, введенной в [62], задача А является задачей информационного регулирования и рефлексивное управление в ней отсутствует (в остальных шести задачах оно присутствует).

Рассматриваемая рефлексивная игра является иерархической игрой типа $\Gamma_1$ [18, 19, 21, 34] (игрой Штакельберга), в которой ак-

---

[45] *Отметим, что в большинстве «классических» стратагем (а их всего 36) информационное управление отсутствует (см. стратагемы №№ 2, 4, 5, 9, 11, 12, 15-26, 28-31, 33, 35, 36), и они могут рассматриваться как изложение проверенных временем и широко распространенных технологий (см. определение выше) скрытого или институционального (см., например, стратагемы №№ 2, 4, 5 и др.) управления (то есть управления условиями деятельности активного и/или пассивного агентов).*

[46] *Напомним, что слева отражается информированность первого (активного) агента – $\theta_1$, $\theta_{12}$, $\theta_{121}$ и т.д., а справа – информированность второго (пассивного) агента – $\theta_2$, $\theta_{21}$, $\theta_{212}$ и т.д.*

тивный агент, делая первый ход, вынужден предсказывать ответную реакцию пассивного агента. Обозначим $X_2(\theta_2) = \mathrm{Arg} \max\limits_{x_2 \in X_2} f_2(\theta_2, x_2)$ – множество действий пассивного агента (множество «наилучших ответов»), доставляющих максимум его целевой функции при информированности $\theta_2 \in \Omega$. В рамках существующей информационной структуры это множество может быть вычислено активным агентом. Следовательно, его целью является выбор такого «сообщения» $\theta_2^* \in \Omega$, которое обеспечивало бы выбор пассивным агентом действия из наиболее выгодного для активного агента множества наилучших ответов. Если в качестве критерия сравнения множеств наилучших ответов использовать гарантированное значение целевой функции активного агента, то решение задачи А имеет вид:

$$\theta_2^*(\theta) = \arg \max_{w \in \Omega} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2(w)} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

В рассматриваемой задаче граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на рисунке 27 (стрелка от $x_1$ к $x_2$ отсутствует, так как целевая функция пассивного агента не зависит в рассматриваемой модели от действий активного агента).

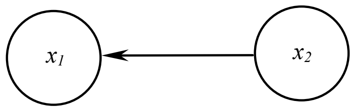


*Рис. 27. Граф рефлексивной игры в задаче А*

Задача А возникает в стратагемах № 7 («извлечь нечто из ничего» – стратегия моделирования реальности, которой нет на самом деле) и № 32 («стратагема открытых городских ворот» – представить ложное настоящим, а настоящее ложным).

Задачи Б и АБ. Данная задача отражает наиболее распространенный в скрытом управлении случай – воздействие на $\theta_{21}$. В этой ситуации пассивный агент обладает собственными представлениями $\theta_2$ о состоянии природы, которые достоверно известны активному агенту. Информационная структура приведена на рисунке 28.

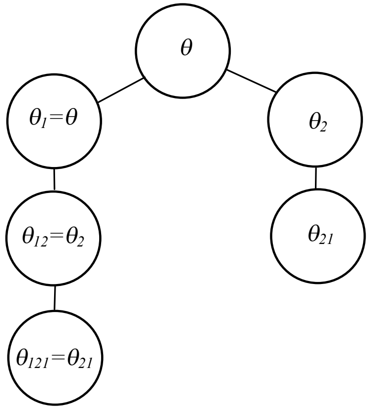


*Рис*. 28. *«Информационная структура» в задачах Б и АБ*

Активный агент может вычислить субъективное равновесие пассивного агента:

$$X_2(\theta_2, \theta_{21}) = \{x_2 \in X_2, x_{21} \in X_1 \mid \forall y_2 \in X_2 \ f_2(\theta_2, x_{21}, x_2) \geq f_2(\theta_2, x_{21}, y_2), \forall y_1 \in X_1 \ f_1(\theta_{21}, x_{21}, x_2, \theta_{21}) \geq f_1(\theta_{21}, y_1, x_{21})\}.$$

Отметим, что в силу $I_{212} = I_2$ выполнено $x_{212} = x_2$, то есть при определении своего субъективного равновесия пассивный агент считает, что его равновесное действие $x_2$ может быть «вычислено» активным агентом.

При фиксированном (и известном достоверно обоим агентам) значении $\theta_2$ задача рефлексивного управления заключается в нахождении активным агентом такого значения $\theta_{21}$, при котором выбираемое пассивным агентом из множества $X_2(\theta_2, \theta_{21})$ действие максимизировало бы целевую функцию активного агента:

$$\theta_{21}^*(\theta) = \arg \max_{w \in \Omega} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in \mathrm{Proj}_2(X_2(\theta_2, w))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

Если активный агент имеет возможность в задаче Б влиять и на $\theta_2$, то получаем задачу АБ, в которой максимизация целевой функции активного агента должна вестись и по параметру $\theta_2$, то есть решение задачи АБ имеет вид:

$$(\theta_2^*(\theta), \theta_{21}^*(\theta)) = \arg \max_{u, w \in \Omega} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in \mathrm{Proj}_2(X_2(u, w))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

В рассматриваемой задаче граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на рисунке 29.

Задача Б возникает в следующих стратагемах (напомним, что ссылки на номера стратагем приводятся в соответствии с их описанием в [16]):

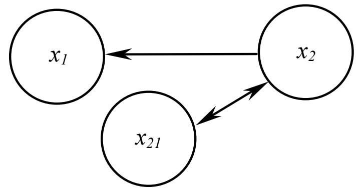


*Рис.* 29 . *Граф рефлексивной игры в задачах Б и АБ*

- №1 – «обмануть императора, чтобы он переплыл море» – открыто проводятся действия, маскирующие действительную цель, в результате чего противнику навязывается шаблон восприятия;

- №3 – «убить чужим ножом» – противник уничтожается или ослабляется чужими руками;

- №6 – «на востоке поднимать шум, на западе наступать» – скрывается истинное направление агрессии, нанесения удара;

- №8 – «для вида чинить мостики, втайне выступать в Чень-цань» – убеждение врага в том, что он правильно оценивает твои планы, и достижение победы нестандартным маневром;

- №10 – «скрывать за улыбкой кинжал» – сокрытие за внешними дружескими проявлениями враждебности, неприязни, агрессивных планов;

- №14 – «позаимствовать труп, чтобы вернуть душу» – использование для решения новых проблем известных ранее способов, идей, средств, лидеров;

- №27 – «делать безумные жесты, не теряя равновесия» – заставить противника недооценить твои возможности, способности, интеллект, осведомленность.

Подробное содержательное описание и примеры практического использования упомянутых стратагем можно найти в [16, 51, 91].

Отметим, что стратагема № 3 (см. [16]) является, пожалуй, единственной, в которой в конфликте явным образом участвуют (помимо активного и пассивного агента) *третьи лица*. Другими словами, в этом случае активный агент стремится использовать для достижения своих целей третьих лиц, убедив их, что они действуют в собственных интересах, и сформировав соответствующее убеждение у пассивного агента, то есть воздействие направлено на $\theta_{23}$ или $\theta_{31}$, $\theta_{32}$ и т.д.

Задача Б отражает, наверное, наиболее распространенный тип скрытого управления, в котором активный агент навязывает определенный шаблон действий пассивному агенту за счет формирования у последнего требуемых представлений о шаблоне поведении активного агента. При этом манипуляция оказывается эффективной только в случае, если факт ее наличия не осознается пассивным агентом (см. предположения о структуре информированности выше).

Рассмотрим иллюстративный пример. В [88, С.235] описан психологический эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину. «Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника. …По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше… Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией … приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме». В данном примере имеет место задача АБ: части клиентов сообщалась информация $\theta_i$ о состоянии природы, другим агентам помимо этого сообщалась информация $\theta_{ij}$, которой якобы владеют остальные агенты.

Использование термина «*шаблон*» при содержательных интерпретациях задачи Б представляется очень удачным, так как соответствует используемым в *ситуационном управлении* [32, 74] типовым связям между ситуациями и действиями (управлениями), наиболее эффективными в этих ситуациях.

Первой возможной интерпретацией является следующая: активный агент убеждает пассивного, что первый использует некоторый шаблон. Пассивный агент в ответ также использует некоторый шаблон. Получается «равновесие в шаблонах». Далее активный агент ведет себя нестандартно (вне своего шаблона). Если пассивный агент остается в рамках своего шаблона, то активный агент может получить определенный выигрыш. Аналогичный эффект имеет место в случае, когда у пассивного агента уже сформирован какой-то собственный шаблон, известный активному агенту.

Отметим, что неэффективность шаблонной деятельности пассивного агента во многих случаях является кажущейся, так как применяемый им шаблон может оказаться эффективным «в среднем», то есть как *унифицированная реакция* на поведение разных оппонентов в регулярно меняющихся внешних условиях (в формальных терминах шаблоны могут быть описаны как наилучшие ответы агентов на действия оппонентов).

Задача B. Данная задача отражает достаточно редко встречающийся в скрытом управлении случай – воздействие на $\theta_{212}$. В этой ситуации пассивный агент обладает собственными представлениями $\theta_2$ о состоянии природы и информированности о состоянии природы активного агента $\theta_{21}$, которые достоверно известны активному агенту. Отметим, что при этом пассивный агент *не* считает активного агента адекватно информированным о нем, иначе имело бы место $I_{212} = I_2$ и воздействие на $\theta_{212}$ было бы бессмысленно. Информационная структура приведена на рисунке 30.

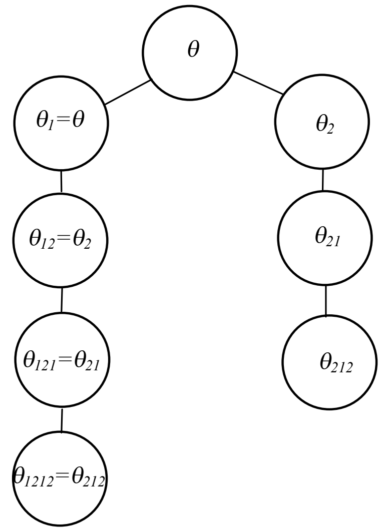


*Рис. 30. «Информационная структура» в задачах В, АВ, БВ и АБВ*

Активный агент может вычислить субъективное равновесие пассивного агента:

$$X_2(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}) = \{x_2 \in X_2, x_{21} \in X_1, x_{212} \in X_2 \mid \forall y_2 \in X_2 \; f_2(\theta_2, x_{21}, x_2) \geq f_2(\theta_2, x_{21}, y_2), \forall y_1 \in X_1 \; f_1(\theta_{21}, x_{21}, x_{212}) \geq f_1(\theta_{21}, y_1, x_{212}), \forall y_2 \in X_2 \; f_2(\theta_{212}, x_{21}, x_{212}) \geq f_2(\theta_{212}, x_{21}, y_2)\}.$$

При фиксированных (и известных достоверно обоим агентам) значениях $\theta_2$ и $\theta_{21}$ задача рефлексивного управления заключается в нахождении активным агентом такого значения $\theta_{212}$, при котором выбираемое пассивным агентом из множества $X_2(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212})$ действие максимизировало бы целевую функцию активного агента:

$$\theta_{212}^*(\theta) = \arg \max_{w \in \Omega} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in \mathrm{Proj}_2(X_2(\theta_2, \theta_{21}, w))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

Если активный агент имеет возможность в задаче В влиять и на $\theta_2$ и/или $\theta_{21}$, то получаем задачу АВ, БВ или АБВ в которой максимизация целевой функции активного агента должна вестись и по параметру $\theta_2$, то есть решение задачи АБВ имеет вид:

$$(\theta_2^*(\theta), \theta_{21}^*(\theta), \theta_{212}^*(\theta)) = \arg \max_{u, w, h \in \Omega} \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in \mathrm{Proj}_2(X_2(u, w, h))} f_1(\theta, x_1, x_2).$$

В рассматриваемой задаче граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на рисунке 31.

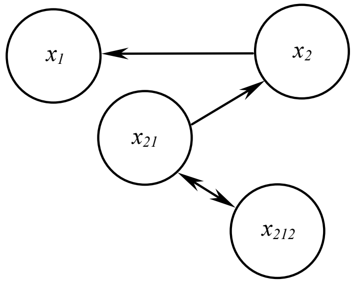


*Рис*. 31. *Граф рефлексивной игры в задачах В*, *АВ*, *БВ и АБВ*

Задача В возникает в стратагемах № 13 («бить по траве, чтобы вспугнуть змею» – произвести демонстративное действие, которое может спровоцировать проявление врагом истинных намерений) и № 34 («стратагема самострела» – демонстрация наличия противоречий в собственном лагере). Подробное содержательное описание и примеры практического использования упомянутых стратагем можно найти в [16, 51, 91].

Таким образом, **базовыми из семи перечисленных выше задач скрытого управления являются отличающиеся на единицу по рангу рефлексии задачи А, АБ и АБВ**. Приведенные результаты позволяют в каждом конкретном случае ставить и решать эти задачи.

## 4.2. СМИ И ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Опишем в терминах структур информированности информационное управление (скрытое управление, манипуляции и т.д.), осуществляемое средствами массовой информации (СМИ), на примере рекламы и предвыборных технологий (данный тип информационного воздействия может рассматриваться как разновидность скрытого управления, однако, в силу массового распространения первого на практике ему посвящается отдельный раздел).

Предположим, что имеется агент – объект информационного воздействия. Цель воздействия – сформировать у агента определенное отношение к конкретному объекту или субъекту.

В случае рекламы агентом является потребитель, а объектом – товар или услуга [80, 85]. Требуется, чтобы потребитель приобрел данный товар или услугу.

В случае предвыборных технологий агентом является избиратель, а субъектом – кандидат. Требуется, чтобы избиратель проголосовал за данного кандидата.

Рассмотрим $i$-го агента. Всех остальных агентов объединим в одного, для обозначения которого будем использовать индекс $j$. Пусть $\theta \in \Omega$ – объективная характеристика объекта, неизвестная достоверно ни одному из агентов. В качестве характеристик могут выступать потребительские свойства товаров, качества кандидатов и т.д.

Обозначим $\theta_i \in \Omega$ – представления $i$-го агента об объекте, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях об объекте $j$-го агента, и т.д.

Предположим для простоты, во-первых, что множество возможных действий каждого агента состоит из двух действий: $X_i = X_j = \{a; r\}$, где действие $a$ (accept) соответствует приобретению товара или услуги, голосованию за рассматриваемого кандидата и т.д., а действие $r$ (reject) – отказу от приобретения товара или услуги, голосованию за других кандидатов и т.д. Во-вторых, предположим, что множество $\Omega$ состоит из двух элементов, характеризующих качества объекта – g (good) и b (bad), то есть $\Omega = \{g; b\}$.

Рассмотрим последовательно (в порядке усложнения) ряд моделей поведения агента.

<u>Модель 0 (рефлексия отсутствует).</u> Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множества $\Omega$ свойств объекта во множество $X_i$ действий агента, то есть $B_i$: $\Omega \to X_i$. Примером такого отображения может служить следующее: $B_i(g) = a$, $B_i(b) = r$, то есть, если агент считает, что товар (кандидат) хороший, то он его приобретает (отдает за него свой голос), и отвергает в противном случае.

В рассматриваемой модели информационное управление является информационным регулированием [19, 62] и заключается в формировании у агента представлений об объекте, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$.

Напомним, что в настоящей работе технологии информационного управления (то есть способы формирования требуемых представлений) не рассматриваются – см. их описание в [5, 11, 12, 20, 23, 51, 69, 75, 80, 91].

<u>Модель 1 (первый ранг рефлексии).</u> Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта и $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов – во множество $X_i$ его действий, то есть $B_i$: $\Omega \times \Omega \to X_i$. Примерами такого отображения могут служить следующие:

$$B_i(g, g) = a, B_i(g, b) = a, B_i(b, g) = r, B_i(b, b) = r,$$

и

$$B_i(g, g) = a, B_i(g, b) = r, B_i(b, g) = a, B_i(b, b) = r.$$

В первом случае агент ориентируется на собственное мнение, во втором – на мнение других агентов («общественное мнение»).

В рассматриваемой модели информационное управление является и информационным регулированием, и рефлексивным управлением, и заключается в формировании у агента представлений об объекте и о представлениях других агентов, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо в первом случае сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$, $\theta_{ij}$ – любое, а во втором случае – $\theta_{ij} = g$, $\theta_i$ – любое.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении посредством СМИ не всегда воздействие направлено на формирование непосредственно $\theta_{ij}$ – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о поведении (выбираемых действиях) других агентов, по которым данный агент может восстановить их представления. Примерами косвенного формирования представлений $\theta_{ij}$ могут служить рекламные лозунги «Новое поколение выбирает Pepsi», «В то время, когда все настоящие мужики …», обращение к мнению авторитетных людей и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения значительное число избирателей собирается поддержать данного кандидата и т.д.

<u>Модель 2 (второй ранг рефлексии).</u> Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта, $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о пред-

ставлениях других агентов, и $\Omega \ni \theta_{iji}$ – представлений агента о представлениях других агентов о его собственных представлениях – во множество $X_i$ его действий, то есть $B_i$: $\Omega \times \Omega \times \Omega \to X_i$. Примером такого отображения, в котором проявляются отличные от нулевой и первой моделей свойства, может служить следующее:

$$\forall\, \theta \in \Omega \;\; B_i(\theta, \theta, g) = a,\; B_i(\theta, \theta, b) = r.$$

В данном случае агент следует своей «социальной роли» и производит выбор, которого от него ожидают другие агенты (данная модель качественно близка к «этическим» моделям, опимываемым в разделе 4.3.4).

В рассматриваемой модели информационное управление является рефлексивным управлением и заключается в формировании у агента представлений о представлениях других агентов о его собственных представлениях, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_{iji} = g$.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении воздействие не всегда направлено на формирование непосредственно $\theta_{iji}$ – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о том, что другие агенты ожидают от него определенных действий. В данном случае речь идет о так называемом социальном влиянии, многочисленные примеры которого можно найти в учебниках по социальной психологии [27, 50, 93]. Примерами косвенного формирования представлений $\theta_{iji}$ могут служить лозунги «Ты записался добровольцем?», «А ты купил (сделал) …?», «В Вашем положении (при Вашем статусе) …?» и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения большинство представителей социальной группы, к которой принадлежит (или с которой идентифицирует себя) агент, собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Таким образом, мы рассмотрели простейшие модели информационного управления посредством СМИ, сформулированные в терминах рефлексивных моделей принятия решений и структур информированности. Во всех этих моделях ранг рефлексии не превышал двух[47]. Представить себе реальные ситуации, в которых информационное воздействие направлено на более глубокие компоненты структуры информированности, затруднительно. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является изучение формальных моделей информационного управления (и технологий этого управления) агентами, осуществляющими коллективное принятия решений в условиях взаимосвязанной информированности.

## 4.3. РЕФЛЕКСИЯ В ПСИХОЛОГИИ

В настоящем разделе в терминах рефлексивных игр описываются некоторые явления и процессы, являющиеся предметом исследований в психологии – психология шахматного творчества; трансакционный анализ; окно Джохари; модель этического выбора. Авторы не претендуют на новые результаты в области психологии, а лишь преследуют цель проиллюстрировать возможность и целесообразность использования аппарата рефлексивных игр в гуманитарных областях.

### 4.3.1. Психология шахматного творчества

Хрестоматийным примером рефлексивного анализа является шахматная игра [28]. Можно выделить два аспекта рассмотрения взаимодействия агентов. Во-первых, при выборе хода каждый из шахматистов анализирует дерево игры – возможные варианты своего хода, ответа противника (соперника), ответа на ответ и т.д. [2]. Во-вторых, при оценке той или иной позиции или совокупности позиций, соответствующей тому или иному дереву игры, шахматист при анализе возможных ответов противника вынужден смотреть на позицию «его глазами», предсказывать представления противника о его собственной оценке и т.д. (см. описание стратегической и ин-

[47] *Исключением является, наверное, очень редко встречающаяся на практике ситуация, когда информационное воздействие направлено на формирование сразу всей информационной структуры, например путем навязывания «общего знания» – «Голосуй сердцем!», «… – наш выбор!» и т.д.*

формационной рефлексии выше). В настоящем разделе мы не будем рассматривать рефлексивные аспекты повторяющихся игр, а сконцентрируем основное внимание на рефлексивном анализе агентами позиций.

Рассмотрим следующую модель. Пусть $\theta$ – объективная (сложившаяся на шахматной доске) позиция, $\theta_1$ – оценка этой позиции (ее видение) первым агентом (пусть для определенности это будет агент, играющий белыми фигурами), $\theta_2$ – оценка этой позиции (ее видение) вторым агентом (агентом, играющим черными фигурами), $\theta_{12}$ – представления первого агента об оценке позиции вторым и т.д.

Проанализируем, основываясь на [37], какие компоненты информационной структуры присутствуют в оценках позиции и влиянии на оценку этой позиции противником (это влияние названо в упомянутой работе психологическим влиянием). Для этого перечислим основные факторы психологического влияния[48]:

- ходы на шахматной доске;
- поведение противника;
- темп игры (скорость принятия решений противником);
- мнение относительно класса игры противника;
- информация агента о мнении противника относительно класса игры обоих шахматистов;
- турнирное положение соперников и др.

Ярким примером влияния поведения является следующий [37, С. 137]: «Играя с Фишером, Таль попал под сильную атаку и его положение стало критическим. В этот момент юный Фишер записал намеченный ход (сильнейший в данной позиции) и чуть ли не подсунул бланк сопернику. М. Таль рассказывал: «Просит визу, подумал я. Но как реагировать? Нахмуриться – нельзя, улыбнуться – может расшифровать. И я сделал единственное: встал и спокойно начал прогуливаться по сцене». Р. Фишера поразило невозмутимое и уверенное поведение противника. Он засомневался, начал сомневаться в правильности намеченного плана. А затем сделал другой,

---

[48] *Отметим, что использование тех или иных факторов психологического влияния является не содержанием, а, скорее, технологией информационного управления.*

более слабый ход, вскоре допустил еще один серьезный промах и в результате проиграл партию[49]».

Таким образом, естественно, в информационную структуру входят компоненты $\theta_i$, $i = 1, 2$, поскольку они отражают собственные представления шахматистов о позиции. Большинство шахматной литературы посвящено, фактически, проблемам «правильной» оценки позиций и обучения шахматистов этим оценкам. Из перечисленных выше факторов психологического влияния воздействию на $\theta_i$ соответствуют: ходы на шахматной доске, мнение относительно класса игры противника и турнирное положение соперников.

Значительно меньшее внимание (см. ссылки в [35-37]) уделялось компонентам $\theta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, влияние на которые может осуществляться поведением противника и темпом игры.

И, наконец, чрезвычайно редко принимаются во внимание компоненты $\theta_{ijk}$, $i, j, k = 1, 2$, соответствующие второму рангу рефлексии – например, информация агента о мнении противника относительно класса игры обоих шахматистов.

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что при описании шахматной игры[50] в терминах информационного управления (рефлексивной игры) в большинстве случаев имеет место следующее:

1. Число агентов равно двум.
2. Ранг рефлексии не превышает двух (максимальное число существенных индексов равно трем).
3. Большинство ситуаций рефлексивного управления в шахматах описывается задачей Б (см. выше), в которой ранг рефлексии равен единице.

В заключение отметим, что существует множество работ, в которых технология рефлексивного управления в шахматах (правда, авторы, наверное, не всегда осознают, что описывают процесс и результат информационного управления) описывается ярко, образно и захватывающе (см. [35-37] и ссылки в этих работах). С другой

---

[49] *В данном примере в качестве активного агента выступали сначала Фишер, а затем Таль, причем, если бы Фишер не инициировал информационное воздействие, то, может быть, партия развивалась бы по-другому.*

[50] *Отметим, что при описании шахматной игры, в отличие от скрытого управления, трудно выделить активного и пассивного агента, так как в общем случае распределение ролей априори неизвестно и зависит от личностных качеств шахматистов.*

стороны, как справедливо признают и шахматисты, и психологи, и математики шахматы являются очень удобным «полигоном» для построения и верификации моделей конфликтного взаимодействия. Поэтому представляется перспективным систематическое исследование формальных моделей рефлексивных эффектов в шахматной игре.

### 4.3.2. Трансакционный анализ

Основателем *трансакционного анализа* является Э. Берн – известный американский психотерапевт и теоретик психоаналитического направления [4]. Суть предложенного им метода заключается в том, что человек в социальной группе в каждый момент времени обнаруживает одно из состояний своего «Я» – *Родителя*, *Взрослого* или *Ребенка*. Агент, находящийся в одном из трех перечисленных состояний (*ситуаций*), создает трансакционный *стимул* к другому агенту, который в ответ осуществляет трансакционную *реакцию*, которая в свою очередь становится стимулом, и т.д.

Пара «стимул-реакция» образуют *трансакцию*. Если источник стимула и получатель реакции, а также получатель стимула и источник реакции совпадают, то такая трансакция называется *дополнительной*, если нет – то *пересекающейся*. Игрой Э. Берн называет «серию следующих друг за другом скрытых дополнительных трансакций с четко определенным предсказуемым исходом» [4, С. 37].

В игре могут участвовать несколько агентов (быть может, коллективных), но, тем не менее, **трансакция всегда имеет место между двумя агентами**.

Опишем произвольную трансакцию в терминах рефлексивной игры. Любая трансакция между двумя агентами (инициатора условно будем называть первым агентом) может быть представлена в виде $(a \to b)$, $(c \to d)$, где $a, b, c, d \in \Omega$ = {Родитель, Взрослый, Ребенок} – ситуации, соответственно источника стимула, получателя стимула, источника реакции и получателя реакции. Можно считать, что трансакции соответствует одна из двух конечных информационных структур, приведенных на рисунках 32 и 33[51], где $\theta_1 = a$ ($\theta_{121} = a$), $\theta_{12} = b$, $\theta_2 = c$ ($\theta_{212} = c$), $\theta_{21} = d$.

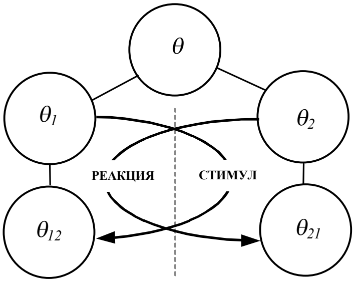


*Рис*. 32. *Информационная структура трансакции*

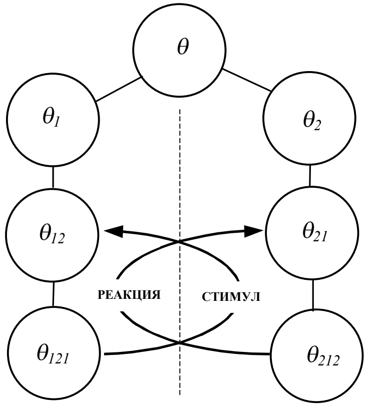


*Рис*. 33. *Информационная структура трансакции*

Таким образом, трансакция может быть записана в виде ($\theta_1 \to \theta_{12}$), ($\theta_2 \to \theta_{21}$) или ($\theta_{121} \to \theta_{12}$), ($\theta_{212} \to \theta_{21}$).

Граф рефлексивной игры в данном случае включает шесть вершин (два реальных агента и четыре фантомных). Специфика информационного равновесия для трансакционного анализа заключается в том, что, принимая решения (то есть занимая позиции Родителя, Взрослого или Ребенка) первый и второй агент обладают различной информацией – первый агент, производя выбор, моделирует желаемую для него ситуацию, а второй агент – констатирует – фиксирует распределение ролей, зная выбор первого.

Приведем пример. Пусть трансакция описывается структурной диаграммой, приведенной на рисунке 34.

---

[51] *Различие заключается в том, рассматривает ли себя инициатор трансакции независимо* ($a = \theta_1$), *или ориентируется на имеющиеся у него представления оппонента о нем* ($a = \theta_{121}$).

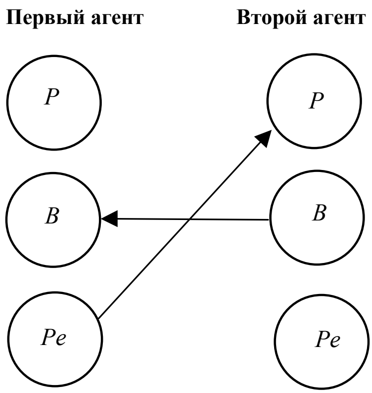


*Рис. 34. Пример пересекающейся трансакции*

В рассматриваемом примере первый агент «обращается» ко второму с позиции Ребенка (то есть предлагает ему рассматривать себя как ребенка: $\theta_{121}$ = «Ребенок»), считая последнего Родителем ($\theta_{12}$ = «Родитель»). Второй агент «отвечает» первому как Взрослый Взрослому (то есть предлагает ему рассматривать себя как Взрослого: $\theta_{212}$ = «Взрослый», считая его также Взрослым: $\theta_{21}$ = «Взрослый»).

В заключение отметим, что в трансакционном анализе максимальный ранг рефлексии агентов равен двум.

### 4.3.3. Окно Джохари

Одним из широко распространенных в социальной психологии методов изучения потенциальной изменчивости личностных характеристик в социальной среде связан с применением *окна Джохари* (см. рисунок 35), названного так по именам создания метода – Джозефа Лафта и Гарри Ингама [124, 125].

| **Другие**<br>**Я** | Что другие знают обо мне | Чего другие не знают обо мне |
|---|---|---|
| Что я знаю о себе | **I** | **II** |
| Чего я не знаю о себе | **III** | **IV** |

*Рис*. 35. *Окно Джохари*

Этот метод позволяет представить агента в двух измерениях – «Я» и «другие» и используется в процессе обучения работников, чья деятельность требует от них понимания того, как и почему окружающие имеют о них мнение, отличное от их собственного.

Окно I (см. рисунок 35) называется *открытой областью* и соответствует информации, которая известна и агенту и другим о нем.

Окно II называется *скрываемой областью* и соответствует информации об агенте, которая известна ему, но неизвестна другим.

Окно III называется *скрытой областью* и соответствует информации об агенте, которая известна другим, но неизвестна ему.

Область IV называется *слепой областью* и соответствует информации об агенте, которая неизвестна никому (ни ему, ни другим).

В рамках рассматриваемых в настоящей работе рефлексивных игр обозначим $\theta$ – объективная информация об агенте, $\theta_1$ – его субъективная информация о себе, $\theta_2$ – информация о нем других агентов. Без ограничений общности можно считать, что все информационные компоненты – $\theta$, $\theta_1$ *и* $\theta_2$ – являются подмножествами некоторого универсального множества $\Omega$.

Тогда открытой области (окно I на рисунке 35) соответствует информация $\theta_1 \cap \theta_2$, скрываемой области (окно II) – информация $\theta_1 \cap(\theta \setminus \theta_2)$, скрытой области (окно III) – информация $\theta_2 \cap(\theta \setminus \theta_1)$, слепой области (окно IV) – информация $(\theta \setminus \theta_1)\cap(\theta \setminus \theta_2)$. Легко видеть, что объединение всех четырех областей дает универсальное множество $\theta$.

В данном случае описание ведется с некоторой внешней (объективной) точки зрения, то есть неявно предполагается, что $\theta_1 \subseteq \theta$, $\theta_2 \subseteq \theta$. При этом ранг рефлексии равен нулю. Если отказаться от объективности и рассматривать ситуацию с точки зрения некоторого агента (например, того, для которого строится окно Джохари), то ранг рефлексии будет равен единице. Если агентов всего два («я» и «другие»), то ранг рефлексии будет не больше двух. Более того, возможно построение окон Джохари, существующих в представлениях фантомных агентов ($\tau$-агентов, где $|\tau| \geq 2$), то есть информационная структура для рефлексивной игры двух агентов может рассматриваться как совокупность $\tau$-субъективных окон Джохари.

### 4.3.4. Модель этического выбора

Как отмечалось выше, в данной работе нас в первую очередь интересует не столько авторефлексия, сколько рефлексия второго рода, связанная с представлениями субъекта о представлениях других участников ситуации. В экономических моделях, где субъект рассматривается как рациональный индивид (букв. «неделимый»), авторефлексия не дает ничего нового: «Я знаю, что я знаю, что я знаю... что…» не дает новой информации по сравнению с «Я знаю, что…». Этому обстоятельству соответствует аксиома автоинформированности (см. раздел 3.2).

Однако по иному обстоит дело в психологии, которая рассматривает человека как некоторую сложную целостность.

В.А. Лефевром [44, 46, 120-122] и другими исследователями [38, 81, 82, 92] изучается рефлексивная модель принятия решений человеком, подчиняющегося системе культурных и этических норм. В частности, в работе [122] описывается модель игрового взаимодействия двух агентов, выбор которых из двух возможных альтернатив (действием является вероятность выбора первой альтернативы) осуществляется с учетом двух аспектов: утилитарного и этического (см. также введение). Утилитарный аспект соответствует максимизации собственного выигрыша, в то время как итоговый выбор учитывает этическую «нагруженность» альтернатив. Опишем, следуя упомянутой работе, *модель этического выбора* в терминах развиваемой в настоящей работе концепции информационного равновесия.

В описываемой ситуации для каждого из двух агентов (обозначим их номерами 1 и 2) можно выделить утилитарный аспект их выбора в виде «агентов» $1_u$ и $2_u$ соответственно. Тогда процесс итогового выбора осуществляется следующим образом (см. рисунок 36).

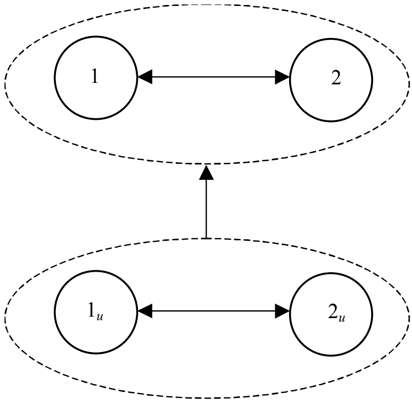


*Рис. 36. Модель этического выбора*

Сначала «агенты» $1_и$ и $2_и$ «разыгрывают» между собой игру с общим знанием и находят свои равновесные стратегии $x^*_{1_и}$ и $x^*_{2_и}$ (интерпретируемые как вероятности выбора первой альтернативы). Затем агенты 1 и 2, для которых пара ($x^*_{1_и}$, $x^*_{2_и}$) является общим знанием, разыгрывают еще одну игру для итогового выбора. При этом они ищут вектор действий, удовлетворяющий системе соотношений

$$(62)\quad \begin{cases} x_1 \in BR_1(x_2, x^*_{1_и}, x^*_{2_и}), \\ x_2 \in BR_2(x_1, x^*_{1_и}, x^*_{1_и}). \end{cases}$$

Решением системы (62) являются числа $x_1^*$ и $x_2^*$, которые интерпретируются как вероятности итогового выбора первой альтернативы.

## 4.4. РЕФЛЕКСИЯ В ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Как отмечалось выше, граф рефлексивной игры может быть построен и без конкретизации целевых функций агентов; при этом он отражает качественное соотношение информированностей рефлексирующих агентов. Приведем примеры из художественных произведений.

Если научная литература содержит субъективное описание объективной реальности и характеризуется стремлением к максимальной объективизации, то художественной литературе свойственна рефлексия хотя бы с той точки зрения, что любое художественное произведение описывает рефлексивную реальность, то есть, является результатом рефлексии автора.

Кроме того, сюжеты многих художественных произведений построены на несовпадении объективной реальности и/или рефлексивных реальностей героев. Поясним последнее утверждение.

Если отвлечься от тривиальной «рефлексии» типа «У попа жила собака…», то в любом художественном произведении имеется набор персонажей – людей, играющих те ли иные роли[52] (ситуационные, коммуникативные, социальные и т.д.), которые обусловлены обстановкой и с которыми взаимодействует персонаж.

При этом один и тот же герой художественного произведения может выступать в различных ролях (ему при этом соответствуют различные фантомные агенты) – восприятие им самого себя может отличаться от восприятия его другими героями.

В основе многих сюжетов лежит смена ролей или обмен ролями, юмор (а иногда и трагедия) заключается в несоответствии между ролями одного и того же героя (см. также несоответствие шаблону в разделе 4.1).

Опишем формально возможные варианты взаимной информированности двух субъектов – «*Героя*» и «*Окружения*», которых будем обозначаться соответственно символами «Г» и «О».

Обозначим: Г – нерефлексивные представления героя об объективной реальности (в которую входят все, включая его самого и его окружение); О – нерефлексивные представления окружения об объективной реальности. Герой и окружение являются реальными агентами, в то время как следующие агенты являются фантомными: ГГ – представления героя о себе; ГО – представления героя об окружении; ГОГ – представления героя о представлениях окружения о

---

*[52] Отдельным, но выходящим за рамки настоящего исследования, вопросом, традиционно поднимаемым в рассуждениях об актерском мастерстве, является следующий – насколько глубоко актеру следует вживаться в роль? Однозначного ответа на него нет даже среди профессионалов – часть маститых актеров считает, что должна происходить полная внутренняя идентификация актера и персонажа, часть – что всегда необходимо контролировать различие между собой и персонажем.*

нем; ОО – представления окружения о себе; ОГ – представления окружения о герое; ОГО – представления окружения о представлениях героя об окружении[53].

Конечные (ранг рефлексии равен двум) информационные структуры героя и его окружения приведены на рисунке 37, на котором компоненты информированности героя или о герое выделены жирными линиями.

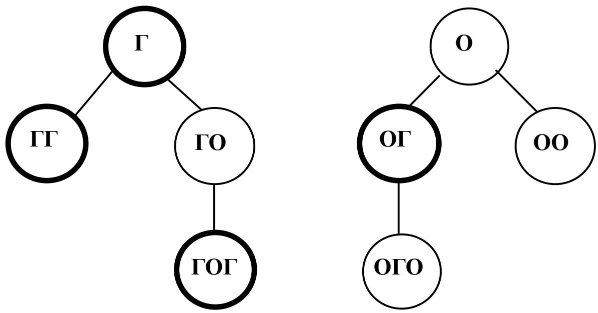


*Рис*. 37. *Информационные структуры героя и его окружения*

Обсудим содержание вершин графа, приведенного на рисунке 37. С точки зрения героя вершина ГГ соответствует авторефлексии (осознание собственной «роли»), вершина ГО – роли окружения, ГОГ – той роли, которой соответствует (или, с нормативной точки зрения, должен соответствовать) герой с точки зрения окружения. Аналогично описываются вершины с точки зрения окружения.

Как отмечалось выше, в основе многих сюжетов, например «комедии положений» и др., лежит несоответствие (конфликт) между ролями одного и того же субъекта (быть может, коллективного). Рассматриваемая информационная структура (см. рисунок 37) позволяет перечислить возможные конфликты[54].

Прежде всего, следует различать *внутренние* (осознаваемые субъектом в рамках его информированности, то есть возникающие между компонентами его собственной структуры информированности) и *внешние* (между компонентами структур информированности

---

*[53] Содержательные интерпретации компонентов ГГО, ГГГ, ГОО, ООО, ООГ, ОГГ затруднительны.*

*[54] Во многих художественных произведениях присутствуют одновременно конфликты нескольких типов.*

субъекта и окружения) *конфликты*. Всего между четырьмя затененными на рисунке 37 компонентами информированности возможны шесть типов конфликтов. Перечислим их и приведем примеры[55].

Возможны <u>три типа внутренних конфликтов</u>:

1. *Несовпадение Г и ГГ* – внутренний конфликт между героем и его представлениями о себе. Примерами являются: практически все произведения Ф.М. Достоевского, которого можно по праву считать непревзойденным знатоком и мастером использования эффектов авторефлексии; «Детство, отрочество, юность» Л.Н. Толстого; все произведения, принадлежащие такому жанру как «исповедь», включая бл. Августина, А. Мюссе, Ж.- Ж. Руссо, Л.Н. Толстого, Н.А. Бердяева и др.

2. *Несовпадение Г и ГОГ* – внутренний конфликт между героем и его представлениями о его роли с точки зрения окружения. Примерами являются: «Герой нашего времени» М.Ю. Лермонтова (Печорин); «Подросток» Ф.М. Достоевского, «Отец Горио» О. Бальзака (Ростиньяк) и др.

3. *Несовпадение ГГ и ГОГ* – внутренний конфликт между ценностями окружения и героя с точки зрения последнего. Примерами являются: «Преступление и наказание», «Записки из подполья», «Агент», «Бесы» Ф.М. Достоевского; «Княжна Мэри» М.Ю. Лермонтова; «Леди Макбет Мценского уезда» Н.С. Лескова; «Утраченные иллюзии» О. Бальзака; а также большинство маргинальной литературы – де Сад, Г. Миллер, В. Ерофеев и др.

Кроме того, возможны <u>три типа внешних конфликтов</u>:

4. *Несовпадение Г и ОГ* – внешний конфликт между героем и представлениями (требованиями) окружения о нем. Примерами являются: «Горе от Ума» А.С. Грибоедова (Чацкий), «Собор Парижской Богоматери» В. Гюго; многие произведения классической литературы русского и зарубежного реализма: Л.Н. Толстой (например, «Три смерти», «Смерть Ивана Ильича» и др.), И.С. Тургенев, М.Е. Салтыков-Щедрин, Ж.–Б. Мольер, П. Корнель, Ж. Расин и др.

5. *Несовпадение ГГ и ОГ* – внешний конфликт между представлениями героя о себе и представлениями о нем с точки зрения окружения. Примерами являются: «Евгений Онегин» А.С. Пушкина;

---

[55] *Авторы признательны проф. Е.В. Жаринову за ценные замечания и помощь в подборе примеров рефлексивных конфликтов в литературных произведениях.*

«Герой нашего времени» М.Ю. Лермонтова (Грушницкий, Печорин); «Рудин» И.С. Тургенева, «Бельтов» А.И. Герцена и др.

6. *Несовпадение ОГ и ГОГ* – внешний конфликт между представлениями окружения о герое и тем как эти представления видятся самому герою. Примерами являются: «Ревизор» Н.В. Гоголя, (Хлестаков); «Маленькие трагедии» А.С. Пушкина; «Гобсек» О. Бальзака и др.

Перечисленные шесть типов конфликтов типичны для классической литературы. В современной массовой литературе дело, в основном, обстоит несколько проще – подавляющее большинство сюжетов можно отнести к одному из следующих типов – «Детектив», «Шпионские страсти», «Любовный треугольник (или многоугольник)». Приведем примеры соответствующих графов рефлексивной игры.

Пример 14 («Детектив»). Пусть имеются следователь и преступник. Обозначим их, соответственно 1 и 2. Тогда этапу процесса раскрытия преступления соответствует граф рефлексивной игры $2 \leftarrow 1 \leftrightarrow 12$ (компонент 12 соответствует тому, что преступник пытается убедить следователя в собственной невиновности), а факту раскрытия преступления – переход к графу $1 \leftrightarrow 2$.

Возможны и более сложные случаи информированности. Так, например, Смердяков и Иван Федорович (роман «Братья Карамазовы» Ф.М. Достоевского) по-разному информированы относительно убийства своего отца и отношения к этому друг друга. С точки зрения Смердякова ситуация (граф рефлексивной игры) выглядит следующим образом: «Смердяков» ← «Иван Федорович, желающий смерти отца» ↔ «Смердяков-убийца», а с точки зрения Ивана Федоровича: «Иван Федорович» ← «Смердяков-невиновный» ↔ «Иван Федорович, не желающий смерти отца».

Аналогичная по сложности ситуация имеет место в романе «Преступление и наказание». Раскольников не знает, что следователю известно, что он убийца. Обозначая их, соответственно, 1 и 2, получим, что с точки зрения Раскольникова имеет место $1 \leftarrow 12 \leftrightarrow 121$, в то время как полный граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на рисунке 38.

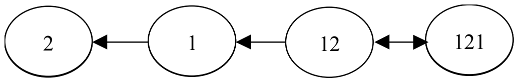


*Рис*. 38. *Граф рефлексивной игры в сюжете «Детектив»*

Пример 15 («Шпионские страсти-1»). Пусть в ситуации участвуют два государства (*A* и *B*) и агент, который, будучи высокопоставленным чиновником государства *A* является одновременно осведомителем государства *B*, о чем государству *A* неизвестно. Граф рефлексивной игры описанной ситуации[56] изображен на рисунке 39.

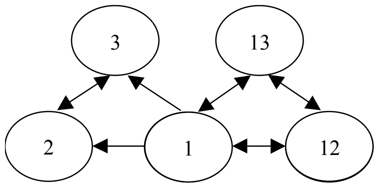


*Рис*. 39. *Граф рефлексивной игры*
*в сюжете «Шпионские страсти*-1*»*

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – государство *A*; 2 – государство *B*; 3 – агент; 12 – государство *B*, которое воспринимает агента как чиновника, верного государству *A*; 13 – агент – чиновник, верный государству *A*. •

Рассмотрим несколько усложненную версию предыдущего сюжета.

Пример 16 («Шпионские страсти-2»). Ситуация похожа на описанную в примере 15, различие в том, что агент на самом деле работает на государство *A*, а государству *B* передает лишь соответствующим образом обработанные сведения. Граф рефлексивной игры для этой, более сложной, ситуации изображен на рисунке 40.

[56] *Легко видеть, что аналогичная информированность имеет место и в сюжете «Любовный треугольник».*

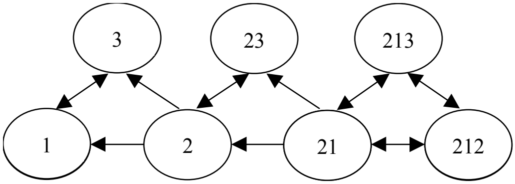


*Рис*. 40. *Граф рефлексивной игры*
*в сюжете «Шпионские страсти*-2*»*

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – государство *A*; 2 – государство *B*; 3 – агент; 21 – государство *A*, которое ошибочно полагает, что агент – его чиновник, не входивший ни в какие контакты с *B*; 23 – агент, работающий в пользу государства *B*; 212 – государство *B*, которое не входило ни в какие контакты с агентом – чиновником государства *A*; 213 – агент – чиновник, верный государству *A* и не входивший ни в какие контакты с государством *B*. •

Отметим, что во всех рассмотренных выше в настоящем разделе примерах ранг рефлексии (который на единицу меньше длины максимальной последовательности индексов) не превышает двух. Более высокие ранги рефлексии в художественных произведениях встречаются чрезвычайно редко, однако их можно найти, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 17. В фильме «Император и убийца» (1999, режиссер – Чен Кайге) описывается ситуация, основными участниками которой являются два человека – китайский император и убийца. Убийцу посылают к императору под видом посла соседнего государства. Император, между тем, осведомлен о том, что посол на самом деле является убийцей. Однако убийца знает о том, что император знает, что он собирается убить его.

Граф рефлексивной игры для этой ситуации изображен на рисунке 41.

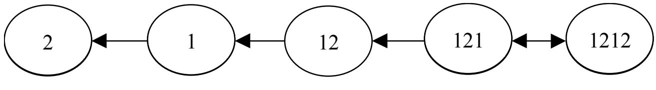


*Рис*. 41. *Граф рефлексивной игры в фильме «Император и убийца»*

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – император; 2 – убийца; 12 – убийца, который считает императора неосведомленным; 121 – император, который считает пришедшего к нему человека послом соседнего государства; 1212 – посол соседнего государства.

Роль жены императора в интриге фильма читатель может увидеть из графа рефлексивной игры, приведенного на рисунке 42, в котором она обозначена номером 3. •

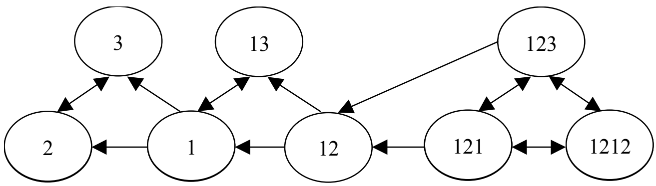


*Рис*. 42. *Роль жены императора в фильме «Император и убийца»*

В заключение настоящего раздела отметим, что в последнее время наличие нескольких рефлексивных (виртуальных, быть может, вложенных друг в друга) реальностей лежит в основе сюжетов многих художественных фильмов – «Матрица», «13-ый этаж», «Ванильное небо», «Авалон», «Шоу Трумэна» и др. Используя предложенный в настоящей работе подход, читатель без труда построит соответствующие графы рефлексивной игры.

Таким образом, язык графов рефлексивной игры является удобным средством единообразного описания эффектов рефлексии в художественных произведениях.

Подводя итог рассмотрению прикладных моделей рефлексивных игр, можно сделать вывод, что построение и анализ формальных моделей позволяют систематически и унифицированно (с единых методологических позиций) формулировать и решать задачи анализа и синтеза эффективных информационных воздействий в самых разных ситуациях коллективной деятельности. Недостатком такого подхода на сегодняшний день является его нормативный характер, то есть отсутствие возможности разработки эффективных технологий информационного управления, которые на сегодняшний день остаются искусством. Применение для этих целей математических моделей представляется перспективной задачей будущих[57] исследований.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены **рефлексивные игры**, описывающие интерактивное взаимодействие агентов, которые принимают решения на основе иерархии своих представлений о существенных параметрах, представлениях других агентов и т.д.

Ключевыми понятиями являются следующие (см. подробности и корректные определения выше):

- **фантомный агент** – существующий в представлении реального или другого фантомного агента и наделяемый в рамках этих представлений определенной информированностью;
- **информационная структура** – бесконечное дерево, отражающее взаимную информированность агентов (реальных и фантомных);
- **информационное равновесие** – равновесие рефлексивной игры (то есть обобщение равновесия Нэша на случай некооперативной игры реальных и фантомных агентов при заданной структуре информированности);
- **граф рефлексивной игры** – удобный инструмент исследования свойств последней и выразительное средство описания информационной структуры и взаимодействия агентов;
- **рефлексивное управление** – поиск допустимой информационной структуры, которой соответствует наилучшее (с точки зрения управляющего органа) информационное равновесие.

С точки зрения теории игр предложенная в настоящей работе концепция информационного равновесия охватывает ситуации принятия игроками решений на основе иерархии в общем случае несогласованных точечных представлений и является обобщением равновесия Нэша.

[57] *Нужно честно признать, что в силу отсутствия систематических и полных результатов экспериментальных (а не ретроспективных!) исследований вряд ли можно ожидать существенного прогресса в этой области в ближайшее время.*

Кроме того, предложенная модель рефлексивной игры, во-первых, охватывает, то есть позволяет единообразно описывать как частные случаи, многие прикладные задачи (скрытое управление, информационное управление через СМИ, рефлексию в психологии и художественных произведениях и др. – см. четвертую главу настоящей работы).

Во-вторых, в рамках построенной модели появляется возможность исследования зависимости информационного равновесия и выигрышей агентов от их информированности (в том числе – рангов рефлексии) и, в частности, определения максимального целесообразного в той или иной ситуации ранга рефлексии (см. разделы 2.2 и 3.6).

В третьих, имея зависимость информационного равновесия от структуры информированности, можно ставить и решать задачи рефлексивного управления – определения той структуры информированности, при которой система оказывается в требуемом равновесии.

Перечисленное выше относится к полученным результатам, которые отнюдь не следует считать исчерпывающими. Поэтому в заключение обсудим[58] перспективные направления исследований.

1. В настоящей работе рассмотрены модели одношаговых рефлексивных игр. Перспективным направлением дальнейших исследований теоретико-игровых рефлексивных моделей представляется изучение динамических (в том числе – в развернутой форме) и иерархических рефлексивных игр.

2. Определение информационного равновесия введено для случая однократного и одновременного выбора агентами своих действий. Напомним, что информационное равновесие является субъективным равновесием – каждый агент «играет в собственную игру». Но результаты выбора (или получаемые выигрыши), в конце концов, становятся известны агентам, поэтому, если выбор действий проводится многократно, то, наблюдая историю игры, агенты могут корректировать свои представления. Следовательно, необходимо теоретическое и экспериментальное (быть может, с построением имитационных моделей) исследование процесса трансформации информационных структур.

[58] *Порядок перечисления задач вовсе не отражает их приоритетности, даже с субъективной точки зрения авторов.*

3. Выше при постановке задачи рефлексивного управления предполагалось, что агенты воспринимают информацию, сообщаемую управляющим органом (центром), как истинную, и используют ее при принятии решений (см. также принцип доверия в [62]). Поэтому представляли бы интерес результаты, описывающие процесс восприятия агентами информации в зависимости от истории игры, их личного опыта, репутации центра и т.д. Первым шагом может служить исследование стабильности информационного управления, при осуществлении которого каждый агент получает именно тот результат, которого ожидает [62].

4. В разделе 3.6 установлено, что в общем случае с ростом ранга рефлексии множество информационных равновесий может расширяться. Поэтому целесообразно систематическое изучение как условий, при которых рефлексивные отображения стационарны, так и условий, в рамках которых при конечном ранге рефлексии любое действие из заданного (или всего допустимого) множества может быть реализовано как информационное равновесие.

5. В моделях рефлексивного управления целесообразно рассмотрение центра, как одного из субъектов, относительно которого у управляемых субъектов могут иметься собственные представления. Другими словами, целесообразен анализ рефлексии агентов по поводу поведения центра.

6. В рассмотренной модели информационной структуры предполагалось, что, во-первых, имеется «точечная» (в виде вектора) информация о состоянии природы, а, во-вторых, не накладывалось ограничений на комбинации информированности реальных и фантомных агентов. Ослабление этих требований (то есть рассмотрение структур информированности, в которых информация описывается множеством возможных значений неопределенного параметра, распределением вероятностей, функцией принадлежности и т.д., а также существуют ограничения на непротиворечивые комбинации

информированности агентов) существенно расширит круг реальных ситуаций, описываемых моделями рефлексивных игр[59].

7. В рамках предложенной в [62] системы классификаций выделены такие типы информационного управления как: информационное регулирование, рефлексивное управление и активный прогноз. Можно утверждать, что в рамках концепции информационного равновесия, развиваемой в настоящей работе, информационное регулирование является частным случаем рефлексивного управления, а активный прогноз не охватывается этой моделью. Поэтому перспективной является разработка единой теоретико-игровой модели информационного управления.

8. Как неоднократно отмечалось в четвертой главе настоящей работы, решение сформулированной в терминах рефлексивной игры задачи скрытого управления позволяет определить с нормативной точки зрения ту структуру информированности, которую активный агент должен навязать пассивному агенту. Но за рамками рассмотренных формальных моделей остается технология скрытого управления, понимаемая как совокупность методов, операций, приемов, этапов и т.д., последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной задачи, достижение цели управления. Другими словами, в рамках рефлексивной теоретико-игровой модели можно рекомендовать активному агенту сформировать у пассивного агента определенную информационную структуру, но ничего нельзя сказать о том, как ему это сделать. Поэтому актуальной является систематизация известных технологий рефлексивного управления и разработка нормативных моделей процесса информационного воздействия.

9. И, наконец, естественно, необходимо установление более тесного и полного соответствия между результатами теоретико-игрового моделирования и практическими задачами управления организационными и социально-экономическими системами.

---

[59] *Все результаты третьей главы останутся в силе, если элементами информационной структуры являются независимые распределения вероятностей, а при определении информационного равновесия используются математические ожидания по этим распределениям. Ситуация существенно усложнится, если распределения не являются независимыми. Исследование рефлексивных игр, в которых информированность агентов описывается иерархией несогласованных коррелирующих вероятностных распределений, представляется перспективной задачей будущих исследований.*

В целом совокупность перечисленных нерешенных задач может рассматриваться как программа будущих исследований формальных моделей взаимодействия рефлексирующих субъектов.

## ЛИТЕРАТУРА


**1** Автономов В.С. Модель человека в экономической науке. СПб.: Экономическая школа, 1998. – 230 с.

**2** Адельсон-Вельский Г.М., Арлазаров В.Л., Донской М.В. Программирование игр. М.: Наука, 1978. – 255 с.

**3** Аткинсон Р. Человеческая память и процесс обучения. М.: Прогресс, 1980. – 528 с.

**4** Берн Э. Игры, в которые играют люди. Люди, которые играют в игры. М.: Прогресс, 1988. – 400 с.

**5** Бирштейн Б.И., Боршевич В.И. Стратагемы рефлексивного управления в западной и восточных культурах // Рефлексивные процессы и управление. 2002. Т. 2. № 1. С. 27 – 44.

**6** Бирштейн Б.И., Боршевич В.И. Теория рефлексивности Дж. Сороса: опыт критического анализа // Рефлексивные процессы и управление. 2001. № 1. С. 88 – 101.

**7** Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 – 30.

**8** Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 – 25.

**9** Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. – 384 с.

**10** Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999. – 128 с.

**11** Бэндлер Р., Гриндер Д. Структура магии. СПб.: Издательство «Белый кролик», 1996. – 496 с.

**12** Бэндлер Р., Гриндер Д. Из лягушек – в принцы (нейро-лингвистическое программирование). Екатеринбург, 1998. – 206 с.

**13** Варшавский В.И., Поспелов Д.А. Оркестр играет без дирижера. М.: Наука, 1989. – 208 с.

**14** Васин А.А., Гурвич В.А. Коалиционные ситуации равновесия в метаиграх / Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 38 – 44.

**15** Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука. 1990. – 256 с.

**16** Воеводин А.И. Стратагемы – стратегии войны, манипуляции, обмана. М.: Белые альвы, 2002. – 256 с.

**17** Волгин Л.Н. Принцип согласованного оптимума. М.: Советское радио, 1977. – 144 с.
**18** Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.
**19** Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
**20** Грачев Г., Мельник И. Манипулирование личностью: организация, способы и технологии информационно-психологического воздействия. М.: Институт философии РАН, 1999. – 235 с.
**21** Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.
**22** Данилов В.И. Лекции по теории игр. М.: Российская экономическая школа, 2002. – 140 с.
**23** Доценко Е.Л. Психология манипуляции: феномены, механизмы и защита. М.: ЧеРо, 2000. – 344 с.
**24** Ерешко Ф.И., Лохныгина Ю.В. Рефлексивные стратегии в системах управления / Труды Юбилейной международной научно-практической конференции «Теория активных систем». Общая редакция – В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. М.: Синтег, 1999. С. 211 –213.
**25** Ерешко Ф.И., Лохныгина Ю.В. Исследование моделей рефлексивных стратегий в управляемых системах. М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.
**26** Ерешко Ф.И. Моделирование рефлексивных стратегий в управляемых системах. М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.
**27** Зимбардо Ф., Ляйппе М. Социальное влияние. СПб.: Питер, 2000. – 448 с.
**28** Зинченко В.П. Рефлексивные процессы в интернет-взаимодействиях (на примере шахматных игр) // Рефлексивные процессы и управление. 2002. Т. 2. № 1. С. 90 – 95.
**29** Информационное общество: Информационные войны. Информационное управление. Информационная безопасность / Под ред. М.А. Вуса. Спб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999. – 212 с.
**30** Кабаченко Т.С. Методы психологического воздействия. М.: Педагогическое общество России, 2000. – 544 с.
**31** Карнеги Д. Как завоевывать друзей и оказывать влияние на людей. М.: Прогресс, 1989.
**32** Клыков Ю.И. Ситуационное управление большими системами. М.: Энергия, 1974. – 136 с.
**33** Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979. – 504 с.

**34** Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.
**35** Крогиус Н.В. Личность в конфликте. Саратов: СГУ, 1976. – 144 с.
**36** Крогиус Н.В. О психологии шахматного творчества М.: Физкультура и спорт, 1969. – 96 с.
**37** Крогиус Н.В. Психология шахматного творчества. М.: Физкультура и спорт, 1981. – 183 с.
**38** Крылов В.Ю. Методологические и теоретические проблемы математической психологии. М.: Янус-К, 2000.
**39** Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984. – 104 с.
**40** Кукушкин Н.С. Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами // ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. № 4. С. 1029 – 1034.
**41** Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н., Вус М.А. Введение в информационное управление. С.Пб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 1999. – 116 с.
**42** Лефевр В.А. Исходные идеи логики рефлексивных игр /Материалы конференции «Проблемы исследования систем и структур». М.: Издание АН СССР, 1965.
**43** Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. М.: Советское радио, 1973. – 158 с.
**44** Лефевр В.А. Космический субъект. М.: Институт психологии РАН,1997.
**45** Лефевр В.А. Логика рефлексивных игр и рефлексивное управление / Принятие решений человеком. Тбилиси: Мецниереба, 1967.
**46** Лефевр В.А. Формула человека. Контуры фундаментальной психологии. М.: Прогресс, 1991. – 108 с.
**47** Лефевр В.А. Элементы логики рефлексивных игр / Проблемы инженерной психологии. Вып. 4. Ленинград, 1966. С. 273 – 299.
**48** Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения. М.: Изд-во Иностр. Лит., 1961 – 642 с.
**49** Лэйнг Р. Я и другие. М.: Эксмо-пресс, 2002. – 304 с.
**50** Майерс Д. Социальная психология. СПб.: Питер, 1998. – 688 с.
**51** Малявин В.В. (перевод с кит.) Тридцать шесть стратагем. М.: Белые альвы, 2000.
**52** Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. – 256 с.
**53** Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. – 708 с.
**54** Нижегородцев Р.М. Теоретические основы информационной экономики. Владикавказ: Проект-Пресс, 1998. – 248 с.

**55** Новиков А.М. Методология образования. М.: Эгвес, 2002. – 320 с.
**56** Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 – 26.
**57** Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.
**58** Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.
**59** Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.
**60** Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования многоэлементных организационных систем. М.: ИПУ РАН, 2001. – 188 с.
**61** Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.
**62** Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. М.: ИПУ РАН, 2002. – 101 с.
**63** Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. – 248 с.
**64** Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. – 206 с.
**65** Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. – 230 с.
**66** Охрименко В.В. Простая модель экономической динамики со спекуляциями. М.: ВЦ РАН, 2002. – 31 с.
**67** Петровский В.А. Опыт событийной транскрипции в рефлексии // Рефлексивные процессы и управление. 2001. № 1. С. 61 – 70.
**68** Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
**69** Пиз А. Язык телодвижений. Н. Новгород: Ай кью, 1992.
**70** Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. М.: Дело, 2001 – 808 с.
**71** Поддъяков А.Н. Исследовательское поведение: стратегии познания, помощь, противодействие, конфликт. Фак-т психологии МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002. – 189 с.
**72** Поспелов Д.А. Игры рефлексивные / Энциклопедия кибернетики. Т. 1. Киев: Гл. редакция УСЭ, 1974. С. 343.
**73** Поспелов Д.А. Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. М.: Радио и связь, 1989.
**74** Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. М.: Наука, 1986. – 288 с.
**75** Почепцов Г.Г. Информационно-психологическая война. М.: Синтег, 2000. – 180 с.

**76** Психологический словарь / Под ред. В.П. Зинченко. М.: Педагогика-пресс, 1996. – 400 с.
**77** Саймон Г. Науки об искусственном. М.: Мир, 1972. – 147 с.
**78** Советский энциклопедический словарь М.: Советская энциклопедия, 1988.
**79** Сорос Д. Алхимия финансов. М.: ИНФРА-М, 1999. – 416 с.
**80** Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К. Реклама: теория и практика. М.: Прогресс, 1989.
**81** Таран Т. Логические модели рефлексивного выбора // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 103 – 117.
**82** Таран Т.А. Рефлексивные модели в системах поддержки принятия решений / Труды 2-й Международной конференции «Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций». М.: ИПУ РАН, 2002. Том 2. С. 117 – 135.
**83** Томас Т.Л. Рефлексивное управление в России: теория и военные приложения // Рефлексивные процессы и управление. 2002. Т. 2. № 1. С. 71 – 89.
**84** Философский энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1983.
**85** Харрис Р. Психология массовых коммуникаций. СПб.: Прайм-Еврознак, 2002. – 448 с.
**86** Харшаньи Д., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. СПб.: Экономическая школа, 2001. – 405 с.
**87** Хёйзинга Й. Homo ludens. В тени завтрашнего дня. М.: Прогресс, 1992. – 464 с.
**88** Чалдини Р. Психология влияния. СПб.: Питер, 2001. – 288 с.
**89** Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие / Управление большими системами. Сборник трудов молодых ученых. Общая редакция – Д.А. Новиков. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, 2003. С. 100 – 119.
**90** Шейнов В.П. Психология обмана и мошенничества. М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 512 с.
**91** Шейнов В.П. Скрытое управление человеком (психология манипулирования). М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 848 с.
**92** Шеманов А.Ю. Самоидентификация на пороге «осевых времен» (к интерпретации модели рефлексии В. Лефевра) / От философии жизни к философии культуры. СПб., 2001. С. 137 – 158.
**93** Шибутани Т. Социальная психология. Ростов-на-Дону: Феникс, 1998. – 544 с.
**94** Щедровицкий Г.П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок / Системные исследования. М., 1981. С. 193 – 227.

**95** Ambroszkiewicz S. On the concepts of rationalizability in games // Annals of Operations Research. 2000. № 97. P. 55 – 68.
**96** Aumann R.J. Agreeing to disagree // The Annals of Statistics. 1976. Vol. 4. № 6. P. 1236 – 1239.
**97** Aumann R.J., Brandenbunger A. Epistemic conditions for Nash equilibrium // Econometrica. 1995. Vol. 63. № 5. P. 1161 – 1180.
**98** Aumann R.J., Heifetz A. Incomplete information . Handbook of Game Theory. Vol III. Chapter 43. Amsterdam, Elseiver (forthcoming).
**99** Aumann R.J. Interactive epistemology I: Knowledge // International Journal of Game theory. 1999. № 28. P. 263 – 300.
**100** Bernheim D. Rationalizable strategic behavior // Econometrica. 1984. № 5. P. 1007 – 1028.
**101** Brams S.J. Theory of moves. Cambridge: Univ. of Cambridge, 1995. – 248 p.
**102** Brandenburger A., Dekel E. Hierarchies of beliefs and common knowledge // Journal of Economic Theory. 1993. Vol. 59. P. 189 – 198.
**103** Camerer C., Weigelt K. Information mirages in experimental asset markets // Journal of Business. 1991. Vol. 64. P. 463 – 493.
**104** Clark H.H., Marshall C.R. Definite reference and mutual knowledge / Elements of Dicourse Understanding (ed. By A.K. Joshi, B.L. Webber, I.A. Sag). Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
**105** Fagin R., Geanakoplos J., Halpern J.Y., Vardi M.Y. The hierarchical approach to modeling knowledge and common knowledge // International Jounal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 331 – 365.
**106** Fagin R., Halpern J., Moses Y., Vardi M.Y. Reasoning about knowledge. Cambridge: MIT Press, 1995.
**107** Fagin R., Halpern J., Moses Y., Vardi M.Y. Common knowledge revisited // Annals of Pure and Applied Logic. 1999. Vol. 96. P. 89 – 105.
**108** Fagin R., Halpern J., Vardi M.Y. A model-theoretic analysis of knowledge // Journal of Assoc. Comput. Mach. 1991. Vol. 38. № 2. P. 382 – 428.
**109** Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT Press, 1995. – 579 p.
**110** Gamov G., Stern M. Puzzle Math. N.Y.: Viking Press, 1958.
**111** Geanakoplos J. Common Knowledge / Handbook of Game Theory. Vol. 2. Amsterdam: Elseiver, 1994. P. 1438 – 1496.
**112** Gray J. Notes on database operating system / Operating Systems: An Advanced Course. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 66. Berlin: Springer, 1978.
**113** Halpern J., Moses Y.O. Knowledge and common knowledge in a distributed environment // Journal of Assoc. Comput. Mach. 1990. Vol. 37. № 3. P. 549 – 587.

**114** Harsanyi J. Games with incomplete information played by "Bayesian" players // Management Science. Part I: 1967. Vol. 14. № 3. P. 159 – 182. Part II: 1968. Vol. 14. № 5. P. 320 – 334. Part III: 1968. Vol. 14. № 7. P. 486 – 502.
**115** Heifetz A. Iterative and fixed point belief // Journal of Philosophical Logic. 1999. Vol. 28. P 61 – 79.
**116** Hintikka J. Knowledge and belief. Ithaca: Cornell University Press, 1962.
**117** Howard N. Theory of meta-games / General systems. 1966. № 11. P. 187 – 200.
**118** Howard N. "General" metagames: an extension of the metagame concept / Game theory as a theory of conflict resolution. Dordrecht: Reidel, 1974. P. 258 – 280.
**119** Kripke S. A completeness theorem in modal logic // Journal of Symbolic Logic. 1959. № 24. P. 1 – 14.
**120** Lefebvre V.A. Algebra of Conscience. Dordrecht, Holland: Reidel, 1982.
**121** Lefebvre V.A. Psychological theory of bipolarity and reflexivity. Levinston: The Edvin Mellen Press, 1992.
**122** Lefebvre V.A. Sketch of reflexive game theory / Proc. Of Workshop on Multi-Reflexive Models of Agent Behavior. Los Alamos, New Mexico, USA, 1998. P. 1 – 44.
**123** Lewis D. Convention: a philosophical study. Cambridge: Harvard University Press, 1969.
**124** Luft J. On Human interaction. Palo Alto, CA: National Press, 1969. – 177 p.
**125** Luft J., Ingham H. The Johari window: a graphic model for interpersonal relations. University of California: Western Training Lab, 1955.
**126** Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.
**127** McCarthy J., Sato M., Hayashi T., Igarishi S. On the model theory of knowledge. Technical Report STAN-CS-78-657. Stanford University, 1979.
**128** Mertens J.F., Zamir S. Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information // International Journal of Game Theory. 1985. № 14. P. 1– 29.
**129** Miller G. The magical number seven plus or minus two: some limits on capacity for information processing // Psychological Review. 1956. Vol. 63. № 1. P. 81 – 92.
**130** Morris S. Approximate common knowledge revisited // International Journal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 385 – 408.
**131** Morris S., Shin S.S. Approximate common knowledge and coordination: recent lessons from game theory // Journal of Logic, Language and Information. 1997. Vol. 6. P. 171 – 190.
**132** Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

**133** Nagel R. Experimental results on interactive competitive guessing // American Economic Review. 1995. Vol. 85. № 6. P. 1313 – 1326.
**134** Nash J.F. Non-cooperative games / Ann. Math. 1951. Vol. 54. P. 286 – 295.
**135** Pearce D.G. Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection // Econometrica. 1984. № 5. 1029 – 1050.
**136** Rapoport A., Guyer M. A taxonomy of 2×2 games / General Systems: Yearbook of the Society for General Systems Research. 1966. № 11. P. 203 – 214.
**137** Ross L., Greene D., House P. The "false consensus" effect: an egocentric bias in social perception and attribution // Journal of Experimental Social Psychology. 1977. Vol. 13. P. 279 – 301.
**138** Rubinstein A. The electronic mail game: strategic behavior under "almost common knowledge" // American Economic Review. 1989. Vol 79. P. 385 – 391.
**139** Sakovics J. Games of incomplete information without common knowledge priors // Theory and decision. 2001. № 50. P. 347 – 366.
**140** Simon R.S. The difference of common knowledge of formulas as sets // International Journal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 367 – 384.
**141** Stahl D.O., Wilson P.W. Experimental evidence on players' models of other players // Journal of Economic Behavior and Organization. 1994. Vol. 25. P. 309 – 327.
**142** Vanderschraaf P. Knowledge, equilibrium and conventions // Erkenntnis. 1998. Vol. 49. P. 337 – 369.
**143** Weber R. Behavior and learning in the "Dirty Face" game // Experimental Economics. 2001. Vol. 4. P. 229 – 242.
**144** Wolter F. First order common knowledge logics // Studia Logica. 2000. Vol. 65. P. 249 – 271.