Работа посвящена описанию моделей и методов материального стимулирования. Первая глава содержит описание постановки и общих подходов к решению задач согласования интересов участников организационных систем. Вторая глава отражает современное состояние исследований базовых математических моделей стимулирования. Главы с третьей по шестую носят прикладной характер и содержат описание анализа и синтеза систем стимулирования на различных объектах: предприятиях специального машиностроения, предприятиях автомобилестроения, предприятиях авиастроения, а также в медицинских учреждениях.

4625 ID 48210

9 785971 001065 >

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7 (495) 135–42–16

Тел./факс: 7 (495) 135–42–46

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине http://URSS.ru

О. Н. Васильева, В. В. Заскалов, Д. Ю. Иванов, Д. А. Новиков

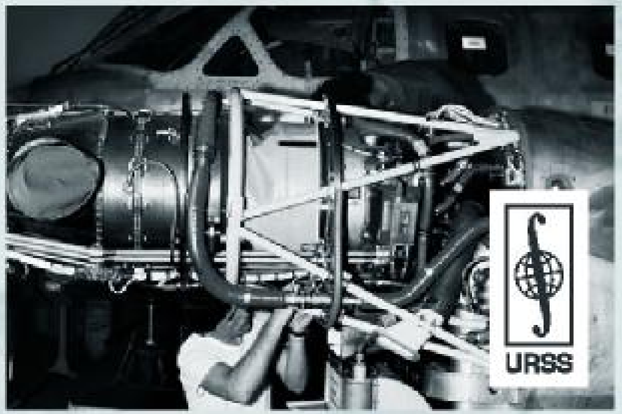
МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МАТЕРИАЛЬНОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ

URSS

О. Н. Васильева, В. В. Заскалов, Д. Ю. Иванов, Д. А. Новиков

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МАТЕРИАЛЬНОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА



URSS

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

САМАРСКИЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

О.Н. Васильева, В.В. Засканов, Д.Ю. Иванов, Д.А. Новиков

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МАТЕРИАЛЬНОГО СТИМУЛИРОВАНИЯ (ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА)

ЛЕНАНД
Москва – 2006

УДК 519
ББК 22.18

Васильева О.Н., Засканов В.В., Иванов Д.Ю., Новиков Д.А. **Модели и методы материального стимулирования (теория и практика)** / Под ред. проф. В.Г. Засканова и проф. Д.А. Новикова. – М.: ЛЕНАНД, 2007. – 288 с.

ISBN 978-5-97100106-5

Работа посвящена описанию моделей и методов материального стимулирования. Первая глава содержит описание постановки и общих подходов к решению задач согласования интересов участников организационных систем. Вторая глава отражает современное состояние исследований базовых математических моделей стимулирования. Главы с третьей по шестую носят прикладной характер и содержат описание анализа и синтеза систем стимулирования на различных объектах: предприятиях специального машиностроения, предприятиях автомобилестроения, предприятиях авиастроения, а также в медицинских учреждениях.

Книга рассчитана на широких круг читателей, интересующихся проблемами стимулирования в организационных системах: студентов и преподавателей вузов, аспирантов, руководителей предприятий и организаций, сотрудников HR-отделов.

Рецензенты: доктор технических наук, профессор В.Н. Бурков,
доктор экономических наук, профессор Р.М. Нижегородцев

Рекомендовано к печати Редакционным советом
Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Текст опубликован в авторской редакции

ВВЕДЕНИЕ

Организации и стимулирование. В соответствии с определением, данным в [51], *организация* (*организационная система*) – «объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил». Совокупность процедур, правил и т.д., регламентирующих взаимодействие участников организационной системы (ОС) называется *механизмом* ее *функционирования*[1] [38]. Частью механизма функционирования является *механизм управления* – совокупность процедур принятия управленческих решений.

Условия деятельности каждого субъекта в общем случае можно условно разделить на *ограничивающие* и *побуждающие*. Ограничивающие условия деятельности обусловлены принадлежностью к государству, нации, социальной группе, организации и т.д. и могут рассматриваться как институциональные. Среди них – система законов и норм, регламентирующих деятельность, начиная от законодательной системы и заканчивая «неписанными» законами и морально-этическими нормами. Они устанавливают систему ограничений, в рамках которой может осуществляться деятельность, разрешая или поощряя то, что не противоречит этой системе ограничений.

---

[1] Именно наличие механизма функционирования отличает организацию от коллектива (объединения людей, осуществляющих совместную деятельность) и группы (совокупности людей, объединенных общностью интересов).

Побуждающие условия деятельности носят более персонифицированный характер и направлены на целенаправленное (то есть, соответствующее целям и интересам отдельной личности, группы или коллектива, организации и т.д.) побуждение субъекта (или, опять же, группы, коллектива и т.д.) к совершению определенных действий. Каждый субъект, обладающий, в свою очередь, собственными целями и интересами, стремится к выбору действий, которые, с одной стороны, максимально соответствуют его целям и интересам, а, с другой стороны, удовлетворяют внешним и внутренним (ограничивающим) условиям деятельности.

Одной из разновидностей целенаправленных внешних побуждающих воздействий (создания условий деятельности) является *стимулирование* (от латинского stimulus – остроконечная палка, которой погоняли животных) – «внешнее воздействие на организм, личность или группу людей, побуждение к совершению некоторого действия» [45]. Описание стимулирования включает: изучение поведения в отсутствии побуждения, анализ возможных реакций на те или иные воздействия, поиск допустимых воздействий, обеспечивающих совершение требуемых действий.

Последний аспект соответствует *управлению*, понимаемому как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения желательного ее поведения [38]. При этом в социально-экономических системах характерной чертой стимулирования, как разновидности управления, является необходимость согласования интересов управляющего и управляемого субъектов (см. главу 1).

В настоящей работе стимулирование рассматривается именно с управленческой точки зрения (в том числе – при фиксированных институциональных ограничениях) и понимается в общем случае как комплексное целенаправленное внешнее воздействие на компоненты деятельности управляемой системы и процессы их формирования [36].

Следовательно, *механизм стимулирования* (*систему стимулирования*) можно определить как процедуру (правило) принятия управляющим органом решений относительно побуждения управляемых субъектов к совершению требуемых действий. Наиболее подробно изученной (и распространенной на практике) разновидностью стимулирования является *материальное стимулирование* – оплата труда. Поэтому, если не оговорено особо, под стимулированием будем понимать именно материальное стимулирование.

Стимулирование с точки зрения различных наук. Стимулирование изучается в таких областях науки как экономика, психология, управление и др. По «масштабу» рассмотрения и применяемым методам можно выделить следующие взаимосвязанные **подходы**:

- «*макроэкономический*», в котором в центре внимания находится рынок труда [3, 27, 52, 58, 65, 67, 69, 73];
- «*микроэкономический*», в котором акцент делается на рассмотрении стимулирования в рамках организации (предприятия, ведомства, фирмы и т.д.), причем основой является анализ именно экономической деятельности (как индивидуальной, так и коллективной) [9, 31, 32, 40, 71];
- «*агентный*», в котором центром рассмотрения является человек, группа, коллектив и т.д. с их потребностями и интересами [2, 33, 35, 36, 38, 61, 62].

Рассмотрим перечисленные подходы более подробно. Для их описания удобно использовать следующую качественную модель [36].

Выделим трех участников трудовых отношений (см. рис. В.1). Первый (управляемый) субъект – конкретный индивидуум, субъект (быть может, коллективный), например, работник, коллектив отдела и т.д., предложением которого является труд, за который он поощряется. Условно управляемого субъекта в дальнейшем будем обозначать термином «*агент*».

Второй (управляющий) субъект – «работодатель», то есть организация, предприятие, ведомство, фирма и т.д., которых мы будем обобщенно обозначать термином «*центр*», является «потребителем» труда агента, преобразуя его в некоторый товар (продукты, услуги и т.д.), обладающий рыночной стоимостью. Поставляя товар на рынок, центр получает определенный доход.

И, наконец, третий объект – «*рынок*» (будем считать, что рынок не обладает собственными интересами) как институт обмена правами собственности (в данном случае имеются в виду товарный, фондовый и др. рынки, но не рынок труда), является «потребителем» товара центра.

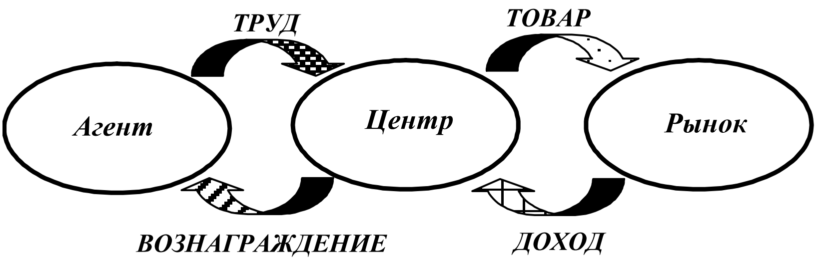


Рис. В.1. *Участники трудовых отношений*

Итак, агент обменивает свой труд на вознаграждение со стороны центра[1], вступая тем самым во взаимоотношения с другими участниками *рынка труда*; а центр «обменивает» на рынке товар, созданный с использованием труда агента, на доход (см. рис. В.1).

[1] Следует отметить, что в приводимых рассуждениях один и тот же агент свободен в выборе работодателя, а работодатель – в выборе работника, поэтому можно условно считать, что на рис. В.1 изображена одна из возможных комбинаций взаимодействия некоторых агента и центра.

Как отмечалось выше, в рамках настоящей работы нас интересуют вопросы стимулирования, в частности – оплаты труда. Для того чтобы ответить на вопрос, является ли то или иное вознаграждение допустимым и желательным с точки зрения агента и центра, следует определить их предпочтения.

Под *предпочтениями* центра (агента) мы будем понимать совокупность его свойств и способностей по определению индивидуальной ценности, полезности и т.д. различных альтернатив. В первом приближении можно считать, что центр заинтересован в максимизации прибыли (то есть его система предпочтений такова, что альтернативы, соответствующие большим значениям «прибыли», более предпочтительны), а агент – в максимизации некоторой субъективной полезности, зависящей от показателей труда и величины вознаграждения (то есть система предпочтений агента такова, что она позволяет ему «сравнивать» различные комбинации труда и вознаграждения).

Введя предположение о наличии предпочтений участников трудовых отношений, для корректной постановки задачи поиска величины вознаграждения агента со стороны центра осталось определить, что является целью деятельности каждого из субъектов, а что – ограничениями (внешними условиями) деятельности. Именно в этот момент возникают несколько альтернатив, соответствующих различным подходам к исследованию стимулирования. Будем считать, что каждый агент имеет свои представления о минимальной оплате, которая с его субъективной точки зрения соответствует его квалификации.

В рамках «макроэкономического» подхода предполагается, что (для каждого агента) объективно существует рыночная зарплата. Если зарплата, предлагаемая некоторым работодателем, не ниже рыночной, то агент соглашается работать за данную оплату. Ограничениями при этом являются экономическая эффективность (выгодность с точки зрения прибыли центра) найма данного агента и соответствие предлагаемой оплаты субъективным представлениям агента. Подобный подход, в рамках которого условно можно считать «основным» взаимодействие агента и рынка труда (см. рис. В.2а), развивается в многочисленных работах по исследованию предложения и спроса на рынке труда [18, 27, 58, 62, 70].

На рис. В.2 (а, б и в) условно обозначены связи между рассматриваемыми участниками трудовых отношений. Жирными кружками (линиями) в каждом из случаев выделены те элементы (связи), которые считаются «основными».

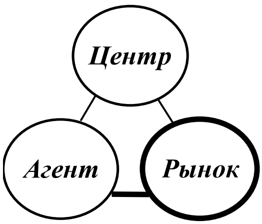


Рис. В.2а.
«Макроэкономический» подход

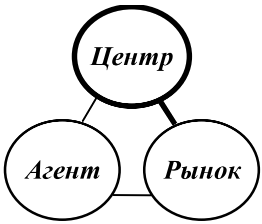


Рис. В.2б.
«Микроэкономический» подход

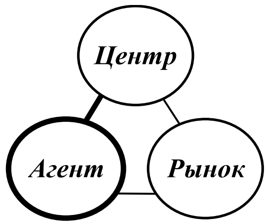


Рис. В.2в.
«Агентный» подход

При <u>«микроэкономическом» подходе</u> «основным» является взаимодействие центра и товарного рынка (см. рис. В.2б). Другими словами, центр нанимает конкретного агента, если его труд приводит к созданию товара или услуги, реализация которых приводит к максимальной прибыли. Ограничениями при этом являются субъективные представления агента и его рыночная зарплата. Задачи определения оптимальной (эффективной) заработной платы, оптимального числа нанимаемых работников и др. рассматриваются в работах по теории фирмы, теории контрактов и др. [31, 62].

Если в качестве «основного» рассматривается взаимодействие агента с центром (см. рис. В.2в), то есть соответствие предлагаемого центром вознаграждения предпочтениям агента, то такой подход считается агентным. Ограничениями при этом являются экономическая эффективность (с точки зрения прибыли центра) найма данного работника за данную оплату, а также рыночная зарплата данного работника. Агентный подход рассматривается в основном в работах по принятию решений, теории управления и др. [7, 8, 13, 14, 36, 39].

Ниже в настоящей работе развивается, в основном, агентный подход, а именно считается, что агент соглашается на такие условия оплаты, которые являются наилучшими с точки зрения его субъективных предпочтений. Такое решение будет допустимым, только если оно выгодно для центра (обеспечивает ему допустимую или максимально возможную в данных условиях прибыль) и не нарушает рыночного равновесия (величина вознаграждения данного агента не ниже его рыночной зарплаты).

В рамках агентного подхода, в зависимости от выделяемого предмета исследования и используемых методов исследования различают следующие **направления**:

- «*менеджмента*», как совокупности систематизированных положений о наиболее эффективном управлении организацией, носящих обобщающий, эмпирический и интуитивный характер [10, 11, 16, 26, 28, 33, 34, 42, 44, 55, 60, 64, 66]. Сюда же можно включить и *управление персоналом* [1, 15, 17, 20, 46, 47, 49, 50, 56, 61, 68];

- «*психолого-социологическое*», исследующее процессы мотивации деятельности человека или в более общем случае – деятельность групп и коллективов [19, 22, 25, 29, 30, 41, 43, 53, 54];

- «*математическое*», изучающее формальные (математические, имитационные и др.) модели – аналоги реальных систем [4, 5, 6, 8, 13, 36, 38, 57, 71].

Упомянутые направления и выделенные подходы взаимосвязаны и взаимно используют результаты и методы друг друга. Однако, к сожалению, на сегодняшний день это взаимопроникновение недостаточно глубоко, и зачастую исследователи говорят на разных языках, не осознавая возможности переноса результатов из одной области исследований в другую.

Более того, несмотря на то, что большинство исследователей отмечает многоаспектность стимулирования как составляющей части мотивации, то есть наличие разнообразных форм, методов и средств стимулирования, на сегодняшний день большинство работ явно или неявно посвящено изучению *материального стимулирования* – таких поощрений или наказаний субъектов, которые могут быть измерены в денежной форме. Помимо этого, многие результаты исследований стимулирования в «гуманитарных» областях науки носят интуитивный характер и не всегда достигают желательного уровня строгости и формализации.

Стимулирование в теории управления. Формальные (математические, точнее – теоретико-игровые) модели стимулирования исследуются в рамках теории управления социально-экономическими системами [38]. Необходимость использования моделей обусловлена сложностью, а зачастую и невозможностью проведения на социально-экономических системах натурного эксперимента. С одной стороны, применение математических моделей в ряде случаев дает возможность оценить эффективность различных механизмов управления, провести игровое и/или имитационное исследование, обучение управленческого персонала и т.д. С другой стороны, для большинства существующих теоретических результатов, полученных в упомянутых выше научных областях, характерен определенный отрыв от практики: как вводимые предположения, так и получаемые выводы не всегда сопровождаются содержательными интерпретациями или не доводятся до конструктивных прикладных алгоритмов и методик.

Другими словами, наблюдается значительный разрыв между теорией и практикой: с одной стороны, специалисты-практики иногда даже не подозревают о том, что в теории управления накоплен значительный опыт анализа и синтеза формальных моделей стимулирования; с другой стороны, специалисты-теоретики далеко не всегда доводят свои результаты до этапа практического использования, когда ими могут воспользоваться управленцы, не имеющие соответствующей математической подготовки.

Существующий разрыв отрицательно сказывается на обеих областях – игнорирование последних достижений науки не позволяет достичь высокой эффективности системы управления организацией, а отрыв от практики приводит к изоляции и выхолащиванию содержания теоретических моделей.

Поэтому настоящая работа может рассматриваться как попытка сделать шаг в сторону установления более тесных связей результатов анализа математических моделей стимулирования и практических задач.

Структура изложения. Изложение материала настоящей работы имеет следующую структуру.

Первая глава (Д.А. Новиков) содержит описание постановок и общих подходов к решению задач согласования интересов участников организационных систем. Вторая глава (Д.А. Новиков) отражает современное состояние исследований базовых математических моделей стимулирования. Главы с третьей по шестую носят прикладной характер и содержат описание анализа и синтеза систем стимулирования на различных объектах: предприятиях специального машиностроения (глава 3 – Д.Ю. Иванов), предприятиях автомобилестроения (глава 4 – О.Н. Васильева) и авиастроения (глава 5 – В.В. Засканов и Д.Ю. Иванов), а также в медицинских учреждениях (глава 6 – В.В. Засканов).

В приложение вынесен список основных используемых обозначений и сокращений.

Настоящая работа рассчитана на широких круг читателей, интересующихся проблемами стимулирования в организационных системах, и не требует углубленной математической или экономической подготовки (достаточными являются знания высшей математики в объеме первых двух курсов технического или экономического вуза).

Можно предложить несколько подходов к ознакомлению с материалом настоящей книги. Первый – линейный, заключающийся в последовательном прочтении всех глав. Второй рассчитан на читателя, интересующегося в большей степени формальными моделями, и заключается в прочтении первой и второй глав и беглом ознакомлении с остальными главами. Третий ориентирован на читателя, ориентированного на решение практических задач и не желающего вникать в математические тонкости, и заключается в прочтении первой главы, а также глав с третьей по шестую (которые можно читать независимо).

ЛИТЕРАТУРА К ВВЕДЕНИЮ

1 Абакумова Н.Н. Политика доходов и заработной платы. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 223 с.

2 Автономов В.С. Модель человека в экономической науке. – СПб.: Экономическая школа, 1998. – 230 с.

3 Адамчук В.В., Кокин Ю.П., Яковлев Р.А. Экономика труда. – М.: Финстатинформ, 1999. – 431 с.

4 Баркалов С.А., Новиков Д.А., Попов С.С. Индивидуальные стратегии предложения труда: теория и практика. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 109 с.

5 Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 255 с.

6 Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. – М.: Наука, 1989. – 245 с.

7 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.

8 Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Математика конфликта и сотрудничества. – М.: Знание, 1973. – 64 с.

9 Верховцев А.В. Заработная плата. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 136 с.

10 Веснин В.Р. Практический менеджмент персонала. – М.: Юрист, 1998. – 496 с.

11 Виханский О.С., Наумов А.И. Менеджмент: человек, стратегия, организация, процесс. – М.: Изд-во МГУ, 1996. – 416 с.

12 Волгин Н.А. Николаев В.В. Доходы работника и результативность производства. – М.: Универсум, 1994. – 274 с.

13 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.

14 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 139 с.

15 Дудашова В.П. Мотивация труда в менеджменте. – Кострома: КГТУ, 1996. – 80 с.

16 Дункан Д.У. Основополагающие идеи в менеджменте. – М.: Дело, 1996. – 272 с.

17 Егоршин А.П. Управление персоналом. – Н. Новгород: НИМБ, 1997. – 607 с.

18 Еловиков Е.А. Экономика труда. Часть 2: Оплата труда. – Омск: ОмГУ, 1996. – 133 с.

19 Емельянов Е.Н., Поварницына С.Е. Психология бизнеса. – М.: Армада, 1998. – 511 с.

20 Ивановская Л.В., Свистунов В.М. Обеспечение системы управления персоналом на предприятии. – М.: ГАУ, 1995. – 71 с.

21 Иванцевич Д., Лобанов А.А. Человеческие ресурсы управления. – М.: Дело, 1993. – 304 с.

22 Кабаченко Т.С. Психология управления. – М.: Педагогическое общество России, 2001. – 384 с.

23 Каз М.С. Многофакторные системы заработной платы: учебное пособие. – Томск: ТГУ, 1991. – 140 с.

24 Карпов А.В. Психология принятия управленческих решений. – М.: Юристъ, 1998. – 440 с.

25 Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.

26 Крашенинникова М.С. Оплата труда. – М.: ПРИОР, 1997. – 336 с.

27 Кулинцев И.И. Экономика и социология труда. – М.: Центр экономики и маркетинга, 1999. – 288 с.

28 Лузгина О.А. Основы стимулирования труда. Конспект лекций. – Пенза, 1996. – 46 с.

29 Майерс Д. Социальная психология. – СПб.: Питер, 1998. – 688 с.

30 Маслоу А.Г. Мотивация и личность. – СПб.: Евразия, 1999. – 479 с.

31 Менар К. Экономика организаций. – М.: ИНФРА-М, 1996. –160 с.

32 Мескон М., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. – М.: Дело, 1998. – 800 с.

33 Мильнер Б.З. Теория организации. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 480 с.

34 Морозова Л.Л. Труд и заработная плата. – СПб.: «ИЧП-Актив», 1997. – 382 с.

35 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.

36 Новиков Д. А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003. – 312 с.

37 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

38 Новиков Д. А. Теория управления организационными системами. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.

39 Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. – М.: Апостроф, 2000. – 184 с.

40 Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. – М.: Дело, 2001. – 808 с.

41 Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. – М.: Логос, 1998. – 280 с.

42 Поварич И.П., Прошкин Б.Г. Стимулирование труда: системный подход. – Новосибирск: Наука, 1990. – 193 с.

43 Пригожин А.И. Современная социология организаций. – М.: Интерпресс. 1995. – 296 с.

44 Прошкин Б.Г. О построении единой ступенчатой системы индивидуальных моральных стимулов. – Кемерово: КГУ, 1990. –250 с.

45 Психологический словарь / Под ред. В.П. Зинченко. М.: Педагогика-пресс, 1996. – 400 с.

46 Спивак В.А. Организационное поведение и управление персоналом. – СПб.: Питер, 2000. – 412 с.

47 Старобинский Э.Е. Как управлять персоналом. – М.: Бизнес-школа «Интел-синтез», 1998. – 368 с.

48 Тамбовцев В.Л. Введение в экономическую теорию контрактов. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 144 с.

49 Травин В.В., Дятлов В.А. Основы кадрового менеджмента. – М.: Дело, 1997. – 336 с.

50 Уткин Э.А. Мотивационный менеджмент. – М.: ЭКМОС, 1999. – 256 с.

51 Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 840 с.

52 Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. – М.: Дело, 1993. – 864 с.

53 Фролов С.С. Социология. – М.: Гардарики, 2000. – 344 с.

54 Хекхаузен Х. Мотивация и деятельность. – М.: Педагогика, 1986. Том 1. – 408 с.; Том 2 – 392 с.

55 Чеботарь Ю.М. Оплата труда и ценообразование. – М.: Мир деловой книги, 1997. – 126 с.

56 Шекшня С.В. Управление персоналом современной организации. – М.: Бизнес-школа «Интел-синтез», 1997. – 336 с.

57 Щепкин А.В. Механизмы внутрифирменного управления. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 80 с.

58 Эренберг Р.Дж., Смит Р.С. Современная экономика труда. Теория и государственная политика. – М.: Изд-во МГУ, 1996. – 800 с.

59 Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю. Основы теории контрактов: модели и задачи. – М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 352 с.

60 Яковлев Р.А. Оплата труда на предприятии. – М.: Центр экономики и маркетинга, 1999. – 248 с.

61 Armstrong M. Reward management. – London, 2000. – 804 p.

62 Bolton P., Dewatripont M. Contract Theory. MIT Press, 2005. – 688 p.

63 Byars L.L., Leslie W.R. Human resource management. – Boston: Homewood, 1991. – 545 p.

64 Campbell D.E. Incentives, motivation and economic information. Cambridge University Press, 1995. – 355 p.

65 Frank J. The new Keynesian economics: unemployment, search and contracting. – Brington: Wheatsheaf books, 1986. – 283 p.

66 Freemantle D. The stimulus factor. – London: Prentice Hall, 2001. – 212 p.

67 Handbook of labor economics / Ed. by O.Ashenfelter, R. Layard. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1986. Vol.1 – 787 p. Vol. 2. – P. 788 – 1273.

68 Hiam A. Motivating and rewarding employees. – Massachusetts: Adams Media Corporation, 2001. – 320 p.

69 Killingworth M. Labor supply. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. – 493 p.

70 Labor demand and equilibrium wage formation / J.C. Van Ours, G.A. Pfann, G. Ridder (eds.). – Amsterdam: North-Holland Publishing company, 1993. – 379 p.

71 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

72 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

73 Sapsford D., Tzannatos Z. The economics of the labor market. – London: Macmillan, 1993. – 463 p.

ГЛАВА 1. ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ УЧАСТНИКОВ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

В математическом моделировании для описания поведения людей, их групп или коллективов, используется *гипотеза рационального поведения* [6], заключающаяся в том, что агент с учетом имеющейся у него информации выбирает из множества допустимых действий наиболее предпочтительное действие. Пояснений требуют два понятия: «допустимость» и «предпочтительность».

Выбор агента может быть ограничен существующими законами, нормативами, инструкциями, нормами поведения, физическими, логическими, технологическими и другими ограничениями. Множество тех альтернатив, из которых производится выбор, и которые удовлетворяют всем ограничениям, называется *множеством допустимых действий*. Обозначим это множество A, а его элемент (действие) обозначим y.

Предпочтения и интересы агента обычно моделируются его *целевой функцией* (функцией выигрыша, функцией полезности, функцией предпочтения – делать различий между этими терминами мы не будем) $f(y)$, которая отображает множество допустимых действий на числовую ось, то есть, ставит в соответствие каждому действию действительное число, интерпретируемое как «выигрыш» агента от выбора данного действия. Тогда можно считать, что предпочтения агента отражены целевой функцией, в том смысле, что одно действие лучше (не хуже) другого, если первое приводит к большему (не меньшему) выигрышу, чем второе.

Следовательно, рациональный агент (стремящийся максимизировать свой выигрыш) выбирает действие, которое максимизирует его целевую функцию.

Гипотеза рационального поведения описывает поведение одного агента, выигрыш которого зависит только от его собственных действий. Но такая ситуация редко встречается на практике – члены организации, экономические агенты, организации и предприятия взаимодействуют друг с другом, и обычно выигрыш каждого из участников взаимодействия зависит не только от его собственных действий, но и от действий его оппонентов – других агентов. То или иное действие некоторого агента может быть выгодно для него, но невыгодно для какого-то другого агента (или даже для всех остальных агентов), и наоборот. Возникает вопрос – а возможно ли так организовать совместную деятельность агентов, чтобы сделать ее максимально выгодной для всех них?

Ответ на этот вопрос зависит от того, что понимать под «выгодностью для всех». Однозначного определения здесь, естественно, нет. Общепринятой концепцией является *эффективность по Парето*: состояние системы *эффективно* (по Парето), если для любого другого состояния, которое хотя бы один агент считает лучше исходного, найдется другой агент, предпочитающий исходное состояние. [6, 9]. Другими словами, эффективным является состояние системы, при котором нельзя улучшить результат одного агента, не ухудшив при этом результат другого (других).

Задача согласования интересов агентов заключается в поиске механизма перехода в максимально выгодное для них (в том или ином смысле, оговариваемом в каждом конкретном случае) состояние. Согласование интересов, в частности, возможно за счет *побочных платежей*, когда одни агенты делятся частью своего выигрыша с другими агентами за то, что последние выбирают выгодные для первых действия [5, 7, 11].

Частным случаем побочных платежей является материальное стимулирование, математические модели которого рассмотрены во второй главе ниже. В этих терминах задача согласования интересов заключается в том, чтобы найти такую зависимость между действиями агентов и теми побочными платежами, которые они должны друг другу выплачивать, чтобы действия, выгодные с индивидуальной точки зрения соответствующих агентов, были максимально выгодны другим агентам. Ряд примеров решения этой задачи рассматривается ниже. Более сложные модели можно найти в [1, 2, 4].

Настоящая глава посвящена описанию основных подходов и результатов теоретического исследования задач согласования интересов участников организационных систем. Сначала рассматривается задача вертикального согласования (раздел 1.1) в двухуровневой системе, состоящей из управляющего органа – центра – и подчиненных ему управляемых субъектов – агентов. Затем описываются механизмы горизонтального согласования интересов агентов, находящихся на одном уровне иерархии (раздел 1.2).

1.1. Вертикальное согласование

Рассмотрим сначала двухуровневую организационную систему, состоящую из двух участников – центра на верхнем уровне иерархии и агента на нижнем. Агент характеризуется целевой функцией $f: A \to \Re_1$ и в отсутствии управления со стороны центра выбирает действие y^*, максимизирующее его целевую функцию.

Центр характеризуется целевой функцией $\Phi(y)$, которая достигает максимума при действии агента, равном

$y_* = \arg\max_{y \in A} \Phi(y)$. В общем случае интересы центра и агента могут не совпадать, то есть $y_* \neq y^*$: центр хотел бы, чтобы агент выбрал действие y_*, но у агента свои интересы, и он склонен к выбору действия y^*.

Как же согласовать интересы центра и агента? Каждый из них обладает свойством активности – способностью самостоятельно принимать решения – выбирать зависящие от него параметры. Если центр имеет возможность устанавливать побочные платежи[1] (стимулирование), то он может предложить агенту: «Я хотел бы, чтобы ты выбрал действие x, и готов платить тебе за выбор действия y сумму $\sigma(x, y)$». Желательное с точки зрения центра действие агента x называется *планом*, и вознаграждение агента $\sigma(x, y) \geq 0$ в общем случае зависит как от его действия y, так и от плана x.

Агент выберет действие, совпадающее с планом, если такой выбор обеспечит максимум его выигрыша с учетом платежей со стороны центра[2]:

$$y \in A \;\; f(x) + \sigma(x, x) \geq f(y) + \sigma(x, y), \qquad (1)$$

то есть выбор любого допустимого действия $y \in A$ должен приносить агенту не больший выигрыш, чем выполнение плана. Условия (1) называется *условием согласованности* плана с интересами агента.

Обозначим $y^* = \arg\max_{y \in A} f(y)$ – действие, доставляющее максимум целевой функции агента, а максимальный размер выигрыша агента обозначим $f^* = f(y^*)$.

Если для некоторого платежа $\sigma(x, \cdot)$ выполнено (1), то это же неравенство выполнено и для **платежа, который**

---

[1] Для этого необходимо, чтобы целевые функции центра и агента были «одной природы» и измерялись в одних и тех же единицах, например – рублях.

[2] В настоящей работе принята независимая внутри разделов нумерация формул, рисунков, таблиц и примеров.

минимален (равен нулю) при всех действиях агента, отличных от плана, то есть $\sigma(x, y) = 0$ при $y \neq x$. Поэтому, вычисляя максимум правой части по y, выражение (1) можно записать в виде:

$$\sigma(x, x) \geq f^* - f(x). \qquad (2)$$

Содержательно, выражение (2) означает, что **центр должен компенсировать агенту потери, связанные с выбором действия, неоптимального с точки зрения последнего**.

С учетом побочных платежей целевая функция центра имеет вид $\Phi(y) - \sigma(x, y)$. Так как побочные платежи входят в целевую функцию центра со знаком «минус», то центр заинтересован в минимизации этих платежей, следовательно, условие согласованности можно записать в виде равенства:

$$\sigma(x, x) = f^* - f(x). \qquad (3)$$

С точки зрения центра выгодными будут планы, обеспечивающие ему выигрыш, не меньший, чем в случае выбора агентом действия y^* в отсутствии платежей (это условие называется *условием индивидуальной рациональности* центра). Значит, *множество согласованных планов S* имеет вид:

$$S = \{x \in A \mid \Phi(x) + f(x) \geq f^* + \Phi(y^*)\}. \qquad (4)$$

Оптимальным согласованным планом будет **план x^*, максимизирующий целевую функцию центра на множестве согласованных планов**:

$$x^* = \arg \max_{x \in S} \; [\Phi(x) + f(x)]. \qquad (5)$$

Отметим, во-первых, что и само решение (3), (5), и «методика» его получения, практически, совпадают с решением задачи стимулирования, приведенным ниже в разделе 2.1.

Во-вторых, оптимальный согласованный план (5) эффективен по Парето, так как максимизирует сумму целевых функций участников – центра и агента. Это свойство оптимального согласованного плана выполняется и в более широком классе организационных систем (см. ниже и [2, 6, 8, 10, 11]). Оно имеет важный методологический смысл: если рассматривать организационную систему в целом, то сумма целевых функций ее участников является характеристикой именно системы в целом («внутренние» побочные платежи взаимно сокращаются при суммировании). Поэтому **важность согласования интересов заключается в том, что оно позволяет не только скоординировать взаимодействие участников, но и повысить эффективность функционирования всей системы в целом**. Этот вывод справедлив и для вертикального, и для горизонтального, согласования.

Пример 1.1. Пусть $\Phi(y) = 5 - y$, $f(y) = 2\,y - y^2 / 4$, $y \geq 0$. Тогда получаем, что центр хотел бы, чтобы агент выбрал действие $y_* = 0$; агент в отсутствии управления выберет действие $y^* = 4$; при этом его выигрыш составит $f^* = 4$, а выигрыш центра – $\Phi(y^*) = 1$. Находим множество согласованных планов $S = [0; 4]$, и оптимальный согласованный план $x^* = 2$ – см. Рис. 1.1. •[1]

Таким образом, в рассмотренном простейшем случае задачи вертикального согласования интересов двух участников ее решение заключается в поиске побочных платежей (3) со стороны центра агенту за выполнение оптимального согласованного плана (5). Аналогичным образом ищутся согласованные побочные платежи и в случаях, когда центр устанавливает систему штрафов [1]; когда имеется нескольких невзаимодействующих друг с другом агентов, подчиненных одному центру [2, 8, 10]; когда согласование достигается не за счет побочных платежей, а выбором управляющих параметров, входящих в целевые функции участников [2].

[1] Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера.

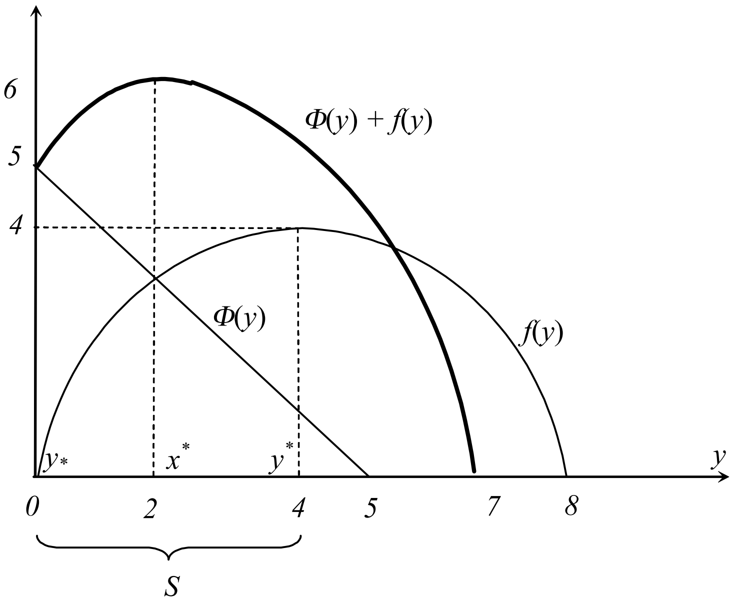


Рис. 1.1. *Множество согласованных планов в примере 1.1*

Еще раз отметим, что общая идея согласования интересов посредством системы побочных платежей заключается в следующем. Во-первых, система платежей может быть выбрана такой, что агент не получает вознаграждения, если он не выполнил план. Во-вторых, для согласованности плана достаточно компенсации центром потерь агента, связанных с выполнением плана по сравнению с выбором действия, оптимального с точки зрения агента. И, наконец, в третьих, оптимальный согласованный план должен максимизировать выигрыш центра с учетом платежей агенту. Обобщим эту схему решения задачи согласования интересов на случай, когда имеется несколько взаимосвязанных агентов.

Рассмотрим двухуровневую организационную систему веерного типа, состоящую из одного центра на верхнем уровне иерархии и n агентов на нижнем. Множество агентов обозначим $N = \{1, 2, ..., n\}$. Действие i-го агента y_i принадлежит множеству допустимых действий A_i. Взаимосвязь агентов отражается тем, что целевая функция каждого из них зависит в общем случае от действий всех, то есть $f_i = f_i(y)$, где $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор действий агентов. Множество допустимых векторов действий агентов обозначим $A' = \prod_{i \in N} A_i$.

В качестве отступления напомним [6, 9], что *равновесием Нэша* игры агентов, принимающих решения однократно, одновременно и независимо, является такой вектор $y^N \in A'$ их действий, одностороннее отклонение от которого не выгодно никому из агентов:

$$\forall\, i \in N,\ \forall\, y_i \in A_i\ \ f_i(y^N) \geq f_i(y_i,\ y_{-i}^N), \qquad (6)$$

где $y_{-i} = (y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_i$ – *обстановка игры* для i-го агента.

Доминантной стратегией i-го агента называется такое его действие $y_i^D \in A_i$, которое доставляет максимум его целевой функции при любой обстановке игры [6]:

$$\forall\, y_{-i} \in A_{-i},\ \forall\, y_i \in A_i\ \ f_i(y_i^D, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}). \qquad (7)$$

Равновесием в доминантных стратегиях (РДС) $y^D \in A'$ называется совокупность доминантных стратегий агентов (если таковые существуют): $y^D = (y_1^D, y_2^D, ..., y_n^D)$.

Фиксируем вектор планов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и рассмотрим две системы платежей со стороны центра агентам:

$$\sigma_i^D(x_i, y) = \begin{cases} \max\limits_{\hat{y}_i \in A_i} f_i(\hat{y}_i, y_{-i}) - f_i(x_i, y_{-i}), & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases},\ i \in N, \qquad (8)$$

$$\sigma_i^N(x, y_i) = \begin{cases} \max\limits_{\hat{y}_i \in A_i} f_i(\hat{y}_i, x_{-i}) - f_i(x), & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases},\ i \in N. \qquad (9)$$

Содержательно, при использовании системы платежей (8) центр говорит каждому из агентов: «При условии выполнения плана, я компенсирую тебе потери (по сравнению с тем, что ты мог бы получить, максимизируя свою целевую функцию), независимо от того, выполнили ли план другие агенты». При использовании системы платежей (9) центр говорит каждому из агентов: «При условии выполнения плана, я компенсирую тебе потери (по сравнению с тем, что ты мог бы получить, максимизируя свою целевую функцию), считая, что остальные агенты выполнили план».

Оказывается [8, 11], **при использовании системы платежей (8) выполнение плана является РДС игры агентов; а при использовании системы платежей (9) выполнение плана является равновесием Нэша игры агентов**.

Обозначим $y_0 \in A'$ – вектор действий, который агенты выбирают в отсутствии воздействий со стороны центра (например, РДС или равновесие Нэша их игры). Так как в рамках (8) или (9) агентам выгодно выполнять планы, то можно вычислить суммарные по всем агентам затраты центра на платежи в случае выполнения плана (**эти суммарные затраты одинаковы для систем платежей (8) и (9)**):

$$C(x) = \sum_{i \in N} \left[\max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, x_{-i}) - f_i(x) \right], \qquad (10)$$

и найти множество согласованных планов (с учетом условия индивидуальной рациональности центра):

$$S = \{x \in A' \mid \Phi(x) - C(x) \geq \Phi(y_0)\}. \qquad (11)$$

Задача оптимального согласованного планирования примет вид:

$$x^* = \arg \max_{x \in S} \ [\Phi(x) - C(x)\ ], \qquad (12)$$

Итак, выражения (12) и (8) или (9) дают решение задачи вертикального согласования интересов центра и подчиненных ему взаимосвязанных агентов. Отметим, что решение задачи стимулирования, приведенное ниже в разделе 2.3, соответствует описанной выше схеме. В «предельном» случае – при $n = 1$ – многоагентная модель перейдет в рассмотренную выше в настоящем разделе: (10) совпадет с (3), (11) – с (4), а (12) – с (5).

Из (10) и (12) следует, что оптимальный согласованный план (12) максимизирует сумму целевых функций участников системы (центра и агентов):

$$x^* = \arg \max_{x \in S} \; [\Phi(x) + \sum_{i \in N} f_i(x)]. \qquad (13)$$

Таким образом, при использовании побочных платежей, **решая задачу согласования интересов, удается достичь эффективного по Парето состояния системы** (на множестве состояний, удовлетворяющих условиям индивидуальной рациональности участников).

Пример 1.2. Рассмотрим дуополию Курно:

$$f_i(y) = (10 - y_1 - y_2)\, y_i - (y_i)^2 / [4\, i + 2],\ i = 1, 2, \qquad (14)$$

в которой неотрицательные действия агентов интерпретируются как объемы выпускаемой ими продукции, первое слагаемое в (14) – как выручка (равная произведению цены на объем выпуска), второе слагаемое в (14) – как затраты агента. Взаимосвязь агентов отражена тем, что цена линейно убывает с ростом суммарного предложения.

Дифференцируя (14) и решая соответствующую систему уравнений, найдем равновесие Нэша: $y^N = (90/31;\ 100/31)$. При выборе агентами равновесных по Нэшу стратегий сумма значений целевых функций всех участников системы равна 18,96.

Пусть целевая функция центра имеет вид:

$$\Phi(y) = -(y_1 - 2)^2 - (y_2 - 2)^2,$$

то есть центр заинтересован в том, чтобы объемы выпуска обоих агентов были как можно ближе к $y_* = (2;\ 2)$. Центром в данном случае может быть, например, государство или надгосударственный орган, обеспечивающий согласование интересов производителей в различных государствах-участниках.

Считая, что в отсутствии управлений со стороны центра агенты выбирают равновесие Нэша (то есть, $y_0 = y^N$), вычислим $\Phi(y_0) \approx - 2{,}32$.

Положим $x = y_* = (2, 2)$, то есть найдем систему платежей, побуждающих агентов выбрать наиболее выгодные для центра действия. Вычисляем: $f_1(y_*) = 34/3$, $f_2(y_*) = 58/5$, $C(y_*) \approx 5{,}33$. Получаем, что $\Phi(y_*) - C(y_*) \approx - 5{,}33 < \Phi(y_0) \approx - 2{,}32$, то есть, центру не выгодно побуждать агентов выбирать оптимальные для него действия.

Найдем план, максимизирующий сумму целевых функций центра и обоих агентов: $x_0 \approx (2{,}17;\ 2{,}30)$. Вычисляем: $f_1(x_0) \approx 11{,}21$, $f_2(x_0) \approx 12{,}19$, $C(x_0) \approx 3{,}23$. Получаем, что $\Phi(x_0) - C(x_0) \approx - 3{,}35 < \Phi(y_0) \approx - 2{,}32$, то есть, план x_0 не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности центра.

Найдем из (13) оптимальный согласованный план: $x^* \approx (2{,}37;\ 2{,}47)$. Вычисляем: $f_1(x^*) \approx 11{,}28$, $f_2(x^*) \approx 12{,}15$, $C(x^*) \approx 1{,}96$. Получаем, что $\Phi(x^*) - C(x^*) = \Phi(y_0) \approx - 2{,}32$, то есть, план x^* удовлетворяет условию индивидуальной рациональности центра (оно выполняется как равенство).

При использовании центром оптимальной согласованной системы платежей сумма значений целевых функций всех участников системы равна 23,07, то есть, согласование интересов позволило увеличить этот показатель примерно на 22 %. •

Завершив рассмотрение вертикального согласования интересов, перейдем к описанию «горизонтального» согласования, то есть изучению моделей согласованного взаимодействия нескольких равноправных (находящихся на одном и том же уровне иерархии) агентов.

1.2. Горизонтальное согласование

Рассмотрим организационную систему, состоящую из n агентов, находящихся на одном (и единственном) уровне иерархии. Множество агентов обозначим $N = \{1, 2, ..., n\}$. Действие i-го агента y_i принадлежит множеству допустимых действий A_i. Целевая функция i-го агента в общем случае зависит от действий всех агентов, то есть $f_i = f_i(y)$, где $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор действий агентов. Множество допустимых векторов действий агентов обозначим $A' = \prod_{i \in N} A_i$.

Вопрос, какие действия выберут агенты, в общем случае, остается открытым. Если существует равновесие в доминантных стратегиях (РДС), то обычно предполагают, что агенты выберут именно доминантные стратегии. Если РДС не существует, то в качестве состояния системы обычно принимается равновесие Нэша. Если равновесий Нэша несколько, и среди них существуют равновесия, недоминируемые по Парето другими равновесиями, то, как правило, считают, что агенты выберут недоминируемые равновесия.

Содержательно, концепции равновесия в доминантных стратегиях и равновесия Нэша отражают индивидуальную рациональность поведения агентов. В первом случае существует оптимальное действие, не зависящее от обстановки; во втором – индивидуальное отклонение любого агента не выгодно ему, если все остальные агенты не отклоняются от равновесия.

К сожалению, во многих случаях индивидуальная рациональность входит в противоречие с коллективной рациональностью (условно отражаемой аксиомой Парето – предположением, что состояние системы должно быть эффективно). Противоречие следующее – с одной стороны, набор индивидуально рациональных действий (например, РДС или равновесие Нэша) может доминироваться другим набором действий (при котором все агенты получают не меньшие выигрыши, а кто-то – строго большие). С другой стороны, коллективно рациональных действий (эффективных по Парето) может быть несколько, и они могут быть неустойчивы относительно индивидуальных отклонений агентов (может найтись агент, который один, изменяя свое действие, еще более увеличивает свой выигрыш). Более того, в кооперативных играх [6, 9] отклоняться могут коалиции (множества из нескольких игроков) и решение игры должно быть устойчиво относительно подобных отклонений. Таким образом, соотношение индивидуальной и коллективной рациональности является одной из ключевых проблем теории игр (см. примеры и ссылки в [6, 9, 15]).

Интуитивно ясно, что если существует лучшая для всех агентов (по сравнению с индивидуально рациональным) линия поведения, то следует выработать процедуру (механизм) наказания тех агентов, которые будут от нее отклоняться. Эти «наказания» могут осуществляться либо самими агентами, либо/и метаигроком – центром. Следует отметить, что механизм наказания является «внешним» по отношению к агентам и зачастую навязывается им извне, например, центром, или является предметом их договоренности (расширение игры [5, 7]). Поясним это утверждение.

Если последовательно разыгрываются несколько партий игры, то, изменяя свои действия, агенты могут в текущем и будущих периодах наказать агента, отклонившегося в предыдущем периоде. Задачи построения таких стратегий решаются в теории повторяющихся игр (см. [15], а также обзор в [12]). Сложнее дело обстоит в статике – при разыгрывании одной единственной партии игры, так как в этом случае угроза будущего наказания со стороны партнеров бессмысленна.

Угроза наказания приобретает смысл в статике, если имеется третий (по отношению к агентам) субъект, наделенный соответствующими властными полномочиями, например

– центр. Осуществляя управление, т.е. поощряя агентов, налагая на них штрафы и т.д., центр может сделать невыгодным индивидуальное отклонение от коллективного оптимума, то есть сделать Парето-оптимальную стратегию устойчивой по Нэшу. Это – первое, что может предложить центр агентам. Второй эффект от введения центра заключается в снижении объема информации, перерабатываемой агентами. Действительно, для «вычисления», например, равновесия Нэша каждый из агентов должен знать целевые функции и допустимые множества всех агентов с тем, чтобы, опять же, каждый из них мог независимо решить систему неравенств (6) раздела 1.1. При введении центра последнему достаточно, обладая информацией о каждом из агентов (информированность агентов друг о друге [13] уже не нужна), вычислить все равновесия, разработать согласованную систему побочных платежей (см. описание задачи вертикального согласования интересов в разделе 1.1), и дать соответствующую информацию агентам. Решением вышеприведенной задачи управления может заняться один из агентов – инициатор согласования интересов, либо агенты могут выбрать такого представителя из своего числа. Возможен вариант, когда для решения задачи согласования интересов агентами приглашается стороннее лицо – аналитик, консалтинговая фирма, банк и т.д.

Рассмотрим случай, когда центр в явном виде отсутствует, и опишем соответствующую задачу горизонтального согласования интересов.

Фиксируем вектор $x \in A'$ и рассмотрим следующую систему побочных платежей:

$$\sigma_{ij}(x, y_j) = \begin{cases} s_{ij}(x), & y_j = x_j \\ 0, & y_j \neq x_j \end{cases}, \; i, j \in N, \qquad (1)$$

где $\sigma_{ij}(\cdot) \geq 0$ – платеж от i-го агента j-му, $i, j \in N$. Естественно считать, что $\forall\, x \in A'$ $s_{ii}(x) = 0$, то есть агент сам себе ничего не платит, $i \in N$. То есть, система платежей (1) задается $n^2 - n$ числами.

Запишем условие того, что x – равновесие Нэша игры агентов (учтем при этом, что любой агент осуществляет платежи другим агентам, независимо от того, какое действие выбрал он сам):

$$\sum_{k \in N} s_{ki}(x) \geq \max_{y_i \in A_i} f_i(y_i, x_{-i}) - f_i(x),\ i \in N. \quad (2)$$

Отметим, что мы оставили вне рассмотрения вопрос о том, как заставить агентов осуществлять выплаты друг другу, предполагая, что соответствующий механизм принуждения существует[1] (в противном случае может оказаться, что какой-то агент, получив платежи от других агентов, откажется платить им). Одним из механизмов является введение центра – представителя более высокого уровня иерархии, наделенного полномочиями налагать штрафы на агентов, отказавшихся от выполнения своих обязательств. Подобные вопросы (оппортунистическое поведение) подробно рассматриваются в теории контрактов [14, 16, 17].

Предположим, что существует вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ограничений на выигрыши агентов – так называемая *резервная полезность*, то есть u_i – размер гарантированного выигрыша i-го агента, который должен быть ему обеспечен при участии в данной организационной системе, $i \in N$. Резервная полезность может рассчитываться исходя из равновесия Нэша в отсутствии согласования интересов: $u_i = f_i(y^N)$, или как гарантированный выигрыш: $u_i = \max_{y_i \in A_i} \min_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i})$, или каким-либо другим способом (см., например, [2]).

Тогда условие индивидуальной рациональности для i-го агента (условие его участия в процедуре согласования интересов) можно записать в следующем виде:

---

[1] Примером является суд, в который можно подать исковое заявление в случае нарушения оппонентом условий договора/контракта.

$$f_i(x) + \sum_{k\in N} s_{ki}(x) - \sum_{j\in N} s_{ij}(x) \geq u_i,\ i \in N. \qquad (3)$$

то есть выигрыш агента в новом равновесии с учетом получаемых и отдаваемых платежей должен быть не меньше его резервной полезности.

Суммируя (3) по всем агентам («внутренние» платежи при этом взаимно сокращаются), получим, что **за счет побочных платежей можно осуществить переход в такое состояние системы, чтобы сумма выигрышей всех участников в этом состоянии была не меньше, чем в первоначальном состоянии**.

Множеством согласованных планов в данной модели естественно назвать планы, для которых существует система побочных платежей (1), удовлетворяющая условиям (2) и (3):

$$S = \{x \in A' \mid \exists\, s_{ij}(x),\ i, j \in N: (2), (3)\}. \qquad (4)$$

Пример 1.3. *Линейными* называются организационные системы, в которых целевая функция каждого агента линейно зависит от стратегий всех агентов [10]:

$$H_i(y) = \alpha_{i0} + \sum_{j\in N} \alpha_{ij} y_j\,, \qquad (5)$$

где $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\alpha_{i0}\}$ – известные константы, причем без потери общности можно считать, что $A_i = [0; 1]$, $i \in N$. В линейных системах у каждого агента существует доминантная стратегия: $y_i^D = \mathrm{Sign}(\alpha_{ii})$, где $\mathrm{Sign}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$.

Обозначим $\beta_j = \sum_{i\in N} \alpha_{ij}$, $\beta_0 = \sum_{i\in N} \alpha_{i0}$. Тогда суммарный выигрыш агентов равен

$$\Sigma(y) = \beta_0 + \sum_{j\in N} \beta_j y_j\,. \qquad (6)$$

Парето-оптимальное (доставляющее максимум выражению (6)) действие i-го агента есть:

$$y_i^P = \mathrm{Sign}(\beta_i),\ i \in N. \qquad (7)$$

Если $\forall\, i \in N$ $\mathrm{Sign}(\alpha_{ii}) = \mathrm{Sign}(\beta_i)$, то РДС является эффективным по Парето. Если $\exists\, i \in N$: $\mathrm{Sign}(\alpha_{ii}) \neq \mathrm{Sign}(\beta_i)$, то требуется согласование интересов агентов.

Найдем условия, когда план y^P является согласованным, то есть, существует соответствующая ему система взаимных платежей агентов, удовлетворяющая условиям (2) и (3). Для простоты рассмотрим случай $n = 2$:

$$f_1(y) = y_1 - 2\, y_2,\;\; f_2(y) = -\, 3\, y_1 + y_2.$$

Доминантной стратегией каждого агента является выбор единичного действия: $y^D = (1;\, 1)$. При этом выигрыши агентов составляют: $f_1(y^D) = -1,\;\; f_2(y^D) = -2$.

Максимум суммы целевых функций агентов достигается при выборе ими вектора действий $y^P = (0;\, 0)$. При этом выигрыши агентов составляют: $f_1(y^P) = f_2(y^P) = 0$.

Выбор нулевых действий выгоден обоим агентам (доминирует по Парето РДС), однако не является равновесием Нэша – любой из агентов может, выбрав ненулевое действие, увеличить свой выигрыш, уменьшив при этом выигрыш оппонента.

В качестве резервной полезности выберем выигрыш агента в РДС: $u_i = f_i(y^D),\ i = 1,\, 2$.

Тогда система неравенств (2) примет вид:

$$s_{12}(y^P) \geq 1,\;\; s_{21}(y^P) \geq 1;$$

а система неравенств (3):

$$s_{12}(y^P) - s_{21}(y^P) \geq -2,\;\; s_{21}(y^P) - s_{12}(y^P) \geq -1.$$

Минимум суммы взаимных платежей достигается при

$$s_{12}(y^P) = 1,\;\; s_{21}(y^P) = 1.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае каждый из агентов платит оппоненту ровно столько, сколько от него и получает, то есть, фактически, можно не осуществлять платежей – важно наличие договоренности об условиях этих платежей!

Разность $\Sigma(y^P) - \Sigma(y^D) = 3$, с одной стороны, может рассматриваться как эффект, возникающий в результате согласования интересов. С другой стороны, эта величина служит оценкой максимальных выплат, которые агентам выгодно сделать внешнему «арбитру» (например, центру) за то, чтобы тот установил и обеспечил соблюдение правил игры. •

Таким образом, **необходимость и возможность эффективного согласования интересов взаимодействующих агентов является одним из объяснений возникновения в организационных системах иерархических структур.**

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1 Ашимов А.А., Бурков В.Н., Джапаров Б.А., Кондратьев В.В. Согласованное управление активными производственными системами. – М.: Наука, 1986. – 248 с.

2 Богатырев В.Д. Модели механизмов взаимодействия в активных производственно-экономических системах. – Самара: СНЦ РАН, 2003. – 230 с.

3 Бурков В. Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 255 с.

4 Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

5 Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.

6 Губко М. В., Новиков Д. А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.

7 Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 211 с.

8 Леонтьев С.В., Новиков Д.А., Петраков С.Н. Критериальное и мотивационное управление в активных системах // Автоматика и Телемеханика. 2002. № 7. С. 107 -116.

9 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

10 Новиков Д. А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.

11 Новиков Д. А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003. – 312 с.

12 Новиков Д. А., Смирнов И. М., Шохина Т. Е. Механизмы управления динамическими активными системами. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

13 Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003. – 160 с.

14 Bolton P., Dewatripont M. Contract Theory. MIT Press, 2005. – 688 p.

15 Myerson R. B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

16 Salanie B. The economics of contracts. MIT Press, 1999. – 223 p.

17 Stole L. Lectures on the theory of contracts and organizations. – Chicago: Univ. of Chicago. 1997. – 104 p.

ГЛАВА 2. БАЗОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Стимулированием называется побуждение (осуществляемое посредством воздействия управляющего органа – *центра* – на предпочтения управляемого субъекта – *агента*) к совершению определенных действий.

Исследование формальных моделей стимулирования в рамках *теории управления организационными системами* [28] началось практически одновременно и независимо как в бывшем СССР, так и за рубежом, примерно в конце 60-х годов прошлого века. Основными научными школами по этому направлению исследований являются *теория активных систем* [1, 3, 5, 23, 24, 25] (научный центр – Институт проблем управления РАН), *теория иерархических игр* [9, 15] (научный центр – Вычислительный центр РАН) и *теория контрактов*, развиваемая в основном зарубежными учеными [18, 34]. Кроме того, проблемы стимулирования (спроса на труд, предложения труда и т. д.) традиционно находятся в центре внимания *экономики труда*. Прикладные задачи стимулирования рассматриваются и используются, в том числе, в управлении персоналом [8].

Настоящая глава посвящена описанию основных подходов и результатов теоретического исследования задач стимулирования. Последовательность изложения следующая: сначала рассматривается задача стимулирования одного агента – раздел 2.1, затем описываются базовые механизмы стимулирования, отражающие наиболее распространенные на практике формы и системы оплаты труда (раздел 2.2).

Разделы 2.3-2.8 посвящены различным механизмам стимулирования коллектива агентов, осуществляющих совместную деятельность.

2.1. Задача стимулирования

Основным аппаратом моделирования задач стимулирования в теории управления является теория игр – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [11, 35]. Простейшей игровой моделью является взаимодействие двух игроков – центра (*principal*) и подчиненного ему агента (*agent*). Такая *организационная система* (ОС) имеет следующую структуру: на верхнем уровне иерархии находится центр, на нижнем – подчиненный ему агент. В качестве центра может выступать работодатель, непосредственный руководитель агента или организация, заключившая трудовой (или какой-либо иной – страховой, подрядный и т. д. – см. ниже) договор с агентом. В качестве агента может выступать наемный работник, подчиненный или организация, являющиеся второй стороной по соответствующему договору.

Стратегией агента является выбор *действия* $y \in A$, принадлежащего множеству допустимых (то есть, удовлетворяющих существующим ограничениям) действий A. Содержательно действием агента может быть количество отрабатываемых часов, объем произведенной продукции и т. д. Множество допустимых действий представляет собой набор альтернатив, из которых агент производит свой выбор, например, диапазон возможной продолжительности рабочего времени, неотрицательный и не превышающий технологические ограничения объем производства и т. д.

Введем ряд определений. *Механизмом стимулирования* называется правило принятия центром решений относительно стимулирования агента. Механизм стимулирования включает в себя систему стимулирования, которая в рамках моделей, рассматриваемых в настоящей работе, полностью определяется функцией стимулирования. Функция стимулирования задает зависимость размера вознаграждения агента, получаемого им от центра, от выбираемых действий. Поэтому в дальнейшем мы будем употреблять термины «механизм стимулирования», «система стимулирования» и «функция стимулирования» как синонимы.

Стратегией центра является выбор *функции стимулирования* $\sigma(\cdot) \in M$, принадлежащей допустимому множеству M и ставящей в соответствие действию агента некоторое неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром, то есть $\sigma: A \to \Re_1^{\ +}$. Множество допустимых вознаграждений может ограничиваться как законодательно (например, минимальным размером оплаты труда), так и, например, соображениями экономической эффективности деятельности центра, тарифно-квалификационными требованиями к оплате труда данного агента и т. д.

Выбор действия $y \in A$ требует от агента *затрат* $c(y)$ и приносит центру *доход* $H(y)$[1]. *Функцию затрат агента* $c(y)$ и *функцию дохода центра* $H(y)$ будем считать известными (см. обсуждение проблем и результатов их идентификации в [14, 23]).

Интересы участников организационной системы (центра и агента) отражены их *целевыми функциями* (функциями выигрыша, полезности и так далее, в записи которых зависи-

---

[1] Исходя из содержательных интерпретаций функцию $H(y)$ правильнее было бы называть «прибылью», а не «доходом». Тем не менее, мы будем следовать установившейся в теории управления терминологии.

мость от стратегии центра будет опускаться), которые обозначим соответственно: $\Phi(y)$ и $f(y)$.

Целевые функции представляют собой: для агента – разность между стимулированием и затратами:

$$f(y) = \sigma(y) - c(y), \qquad (1)$$

а для центра – разность между доходом и *затратами центра на стимулирование* – вознаграждением, выплачиваемым агенту:

$$\Phi(y) = H(y) - \sigma(y). \qquad (2)$$

После того как введены целевые функции, отражающие предпочтения участников ОС, целесообразно обсудить различия в описании морального и материального стимулирования.

Наличие скалярной целевой функции подразумевает существование единого эквивалента, в котором измеряются все компоненты целевых функций (затраты агента, доход центра и, естественно, само стимулирование).

В случае, когда речь идет о материальном вознаграждении агента, таким эквивалентом выступают деньги. Содержательные интерпретации дохода центра при этом очевидны (более того, практически во всех работах, содержащих описание формальных моделей стимулирования, предполагается, что и стимулирование, и доход центра «измеряются» в денежных единицах). Сложнее дело обстоит с затратами агента, ведь не всегда можно адекватно выразить в денежных единицах, например, удовлетворенность агента работой и т. д. С экономической точки зрения затраты агента можно интерпретировать как денежный эквивалент тех усилий, которые агент должен произвести для достижения того или иного действия. В рамках такой интерпретации вполне естественной выглядит идея компенсации затрат – вознаграждение со стороны центра должно как минимум компенсировать затраты агента (см. более подробно формальное описание ниже).

Если затраты агента измеряются в некоторых единицах «полезности» (учитывающей, например, физическую усталость, моральное удовлетворение от результатов труда и т. д.), отличных от денежных единиц (и несводимых к ним линейным преобразованием), то для того, чтобы иметь возможность складывать или вычитать полезности при введении целевой функции типа (1), необходимо определить полезность вознаграждения. Например, если используется материальное стимулирование, то можно ввести функцию полезности $u(\sigma(y))$, которая отражала бы полезность денег для рассматриваемого агента. Целевая функция агента при этом примет вид: $f(y) = u(\sigma(y)) - c(y)$.

Введем следующие **предположения**, которых будем придерживаться, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения.

Во-первых, будем считать, что множество A возможных действий агента составляет положительную полуось $\Re_1^+$. Отказу агента от участия в рассматриваемой ОС (бездействию) соответствует нулевое действие ($y = 0$).

Во-вторых, относительно функции затрат агента $c(y)$ предположим, что она не убывает, непрерывна, а затраты от выбора нулевого действия равны нулю (иногда дополнительно будем требовать, чтобы функция затрат была выпукла и непрерывно дифференцируема).

В третьих, допустим, что функция дохода центра $H(y)$ непрерывна, принимает неотрицательные значения и доход центра достигает максимума при ненулевых действиях агента.

В четвертых, предположим, что значение вознаграждения, выплачиваемого центром агенту, неотрицательно: $\sigma(y) \geq 0$.

Приведем содержательные интерпретации введенных предположений.

Первое предположение означает, что возможными действиями агента являются неотрицательные действительные числа, например, количество отработанных часов, объем произведенной продукции и т. д.

Из второго предположения следует, что выбор бóльших действий требует от агента не меньших затрат, например, затраты могут расти с ростом объема выпускаемой продукции. Кроме того, нулевое действие (отсутствие деятельности агента) не требует затрат, а предельные затраты[1] возрастают с ростом действия, то есть каждый последующий прирост действия на одну и ту же величину требует все больших затрат.

Третье предположение накладывает ограничения на функцию дохода центра, требуя, чтобы центру была выгодна деятельность агента (в противном случае – если максимум дохода центра достигается при бездействии агента – задачи стимулирования не возникает, так как в этом случае центр может ничего не платить агенту, а тот в силу второго предположения ничего не будет делать).

Четвертое предположение означает, что центр не может штрафовать агента.

Рациональное поведение участника ОС заключается в максимизации (выбором собственной стратегии) его целевой функции с учетом всей имеющейся у него информации.

Определим *информированность игроков* и *порядок функционирования*. Будем считать, что на момент принятия решения (выбора стратегии) участникам ОС известны все целевые функции и все допустимые множества. Специфика теоретико-игровой задачи стимулирования заключается в том, что в ней фиксирован порядок ходов (игра Γ_2 с побочными платежами в терминологии теории иерархических игр

[1] В экономике предельными затратами принято называть производную функции затрат.

[9]). Центр – *метаигрок* – обладает правом первого хода, сообщая агенту выбранную им стратегию – функцию стимулирования, после чего при известной стратегии центра агент выбирает свое действие, максимизирующее его целевую функцию.

Итак, мы описали все основные параметры модели любой ОС (состав, структура, допустимые множества, целевые функции, информированность и порядок функционирования), что дает возможность сформулировать собственно задачу управления – задачу синтеза оптимального механизма стимулирования.

Так как значение целевой функции агента зависит как от его собственной стратегии – действия, так и от функции стимулирования, то в рамках принятой гипотезы рационального поведения агент будет выбирать действия, которые при заданной системе стимулирования максимизируют его целевую функцию. Понятно, что множество таких действий, называемое множеством *реализуемых действий*, зависит от используемой центром системы стимулирования. **Основная идея стимулирования** заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия.

Так как целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом, то *эффективностью системы стимулирования* называется значение целевой функции центра на множестве действий агента, реализуемых данной системой стимулирования (то есть тех действий, которые агент выбирает при данной системе стимулирования). Следовательно, задача стимулирования заключается в том, чтобы найти оптимальную систему стимулирования, то есть допустимую систему стимулирования, имеющую максимальную эффективность. Приведем формальные определения.

Множество действий агента, доставляющих максимум его целевой функции (и, естественно, зависящее от функции стимулирования), называется *множеством решений игры,* или *множеством действий, реализуемых данной системой стимулирования*:

$$P(\sigma) = \operatorname{Arg} \max_{y \in A} \{\sigma(y) - c(y)\}. \qquad (3)$$

Зная, что агент выбирает действия из множества (3), центр должен найти систему стимулирования, которая максимизировала бы его собственную целевую функцию. Так как множество $P(\sigma)$ может содержать более одной точки, необходимо доопределить (с точки зрения предположений центра о поведении агента) выбор агента. Если выполнена *гипотеза благожелательности*[1] (ГБ), которую будем считать имеющей место, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения, то агент выбирает из множества (3) наиболее благоприятное для центра действие. Альтернативой для центра является расчет на наихудший для него выбор агента из множества решений игры.

Следовательно, эффективность системы стимулирования $\sigma \in M$ равна:

$$K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} \Phi(y), \qquad (4)$$

где $\Phi(y)$ определяется (2).

Задача синтеза оптимальной системы стимулирования заключается в выборе допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность:

$$K(\sigma) \to \max_{\sigma \in M}. \qquad (5)$$

Следует отметить, что введенные выше предположения согласованы в следующем смысле. Агент всегда может вы-

---

[1] Напомним, что гипотеза благожелательности заключается в следующем: если агент безразличен между выбором нескольких действий (например, действий, на которых достигается глобальный максимум его целевой функции), то он выбирает из этих действий то, которое наиболее благоприятно для центра, то есть действие, доставляющее максимум целевой функции центра.

брать нулевое действие, не требующее от него затрат (второе предположение). В то же время центр имеет возможность ничего не платить ему за выбор этого действия.

Во всех содержательных интерпретациях теоретико-игровых моделей стимулирования предполагается, что у агента имеется альтернатива – сохранить статус-кво, то есть не вступать во взаимоотношения с центром (не заключать трудового контракта). Отказываясь от участия в данной ОС, агент не получает вознаграждения от центра и всегда имеет возможность выбрать нулевое действие, обеспечив себе неотрицательное (точнее – нулевое) значение целевой функции.

Сделав маленькое отступление, обсудим более подробно модель процесса принятия решений агентом. Предположим, что некоторый агент предполагает устроиться на работу на некоторое предприятие. Ему предлагается контракт $\{\sigma(y), x^*\}$, в котором оговаривается зависимость $\sigma(\cdot)$ вознаграждения от результатов y его деятельности, а также то, какие конкретные результаты x^* от него ожидаются. При каких условиях агент подпишет контракт, если обе стороны – и агент, и предприятие (центр) принимают решение о подписании контракта самостоятельно и добровольно? Рассмотрим сначала принципы, которыми может руководствоваться агент.

Первое условие – *условие согласованности стимулирования* (*incentive compatibility constraint*), которое заключается в том, что при участии в контракте выбор именно действия y^* (а не какого-либо другого допустимого действия) доставляет максимум его целевой функции. Другими словами, это условие того, что система стимулирования согласована с интересами и предпочтениями агента.

Второе условие – *условие участия* в контракте (иногда его называют *условием индивидуальной рациональности* – *individual rationality constraint*), которое заключается в том, что, заключая данный контракт, агент ожидает получить полезность, бóльшую, чем он мог бы получить, заключив другой контракт с другой организацией (с другим центром). Представления агента о своих возможных доходах на рынке труда отражает такая величина, как *резервная заработная плата*, то есть частным случаем условия индивидуальной рациональности является ограничение резервной заработной платы.

Аналогичные приведенным выше для агента условия согласованности и индивидуальной рациональности можно сформулировать и для центра. Если имеется единственный агент – претендент на заключение контракта, то контракт будет выгоден для центра при выполнении двух условий.

Первое условие (аналогичное условию согласованности стимулирования) отражает согласованность системы стимулирования с интересами и предпочтениями центра, то есть применение именно фигурирующей в контракте системы стимулирования должно доставлять максимум целевой функции (функции полезности) центра (по сравнению с использованием любой другой допустимой системы стимулирования) (см. (4)).

Второе условие для центра аналогично условию участия для агента, а именно – заключение контракта с данным агентом выгодно для центра по сравнению с сохранением статус-кво, то есть отказом от заключения контракта вообще. Например, если считать, что прибыль предприятия (значение целевой функции центра) без заключения контракта равна нулю, то при заключении контракта прибыль должна быть неотрицательна.

Качественно обсудив условия заключения взаимовыгодного трудового контракта, вернемся к формальному анализу, то есть решению задачи стимулирования (5). Отметим, что решение данной задачи «в лоб» достаточно трудоемко. Но, к счастью, можно угадать оптимальную систему стимулирования исходя из содержательных соображений, а затем корректно обосновать ее оптимальность.

Предположим, что использовалась некоторая система стимулирования $\sigma(\cdot)$, при которой агент выбирал действие $x \in P(\sigma(\cdot))$. Утверждается, что если взять другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки x, и будет равна старой системе стимулирования в точке x:

$$\tilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$$

то и при новой системе стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$ это же действие агента $y = x$ будет доставлять максимум его целевой функции.

Приведем формальное доказательство этого утверждения. Условие того, что выбор действия x доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $\sigma(\cdot)$, можно записать в следующем виде: разность между стимулированием и затратами будет не меньше, чем при выборе любого другого действия:

$$\forall y \in A \quad \sigma(x) - c(x) \geq \sigma(y) - c(y).$$

Заменим систему стимулирования $\sigma(\cdot)$ на систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке x система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $\sigma(\cdot)$. В правой части будет тогда записана система стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$:

$$\forall y \in A \quad \sigma(x) - c(x) \geq \tilde{\sigma}(y) - c(y).$$

Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств. Следовательно, $x \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))$.

На рис. 2.1 изображены графики функций: $H(y)$ и $c(y)$. С точки зрения центра стимулирование не может превышать доход, получаемый им от деятельности агента (так как, отказавшись от взаимодействия с агентом, центр всегда может получить нулевую полезность). Следовательно, допустимое решение лежит ниже функции $H(y)$. С точки зрения агента стимулирование не может быть меньше, чем сумма затрат и резервная полезность (которую агент всегда может получить, выбирая нулевое действие). Следовательно, допустимое решение лежит выше функции $c(y)$.

Множество действий агента и соответствующих значений целевых функций, удовлетворяющих одновременно всем перечисленным выше ограничениям (согласования и индивидуальной рациональности, как для центра, так и для агента), – «*область компромисса*» заштрихована на рис. 2.1. Множество действий агента, при которых область компромисса не пуста, называется *множеством согласованных планов*:

$$S = \{x \in A \mid H(x) \geq c(x) \geq 0\}. \qquad (9)$$

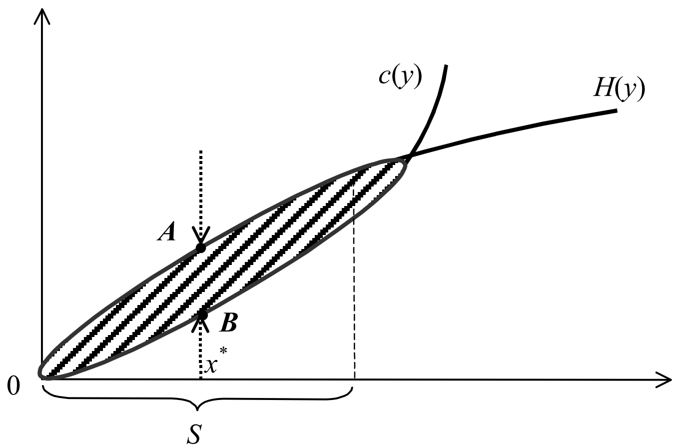


Рис. 2.1. *Оптимальное решение задачи стимулирования*

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту при условии, что последний выбирает требуемое действие, то оптимальная точка в рамках гипотезы благожелательности должна лежать на нижней границе области компромисса, то есть ***стимулирование в точности должно равняться затратам агента.*** Этот важный вывод получил название «*принцип компенсации затрат*». В соответствии с этим принципом, для того чтобы побудить агента выбрать определенное действие, центру достаточно компенсировать затраты агента.

Кроме компенсации затрат, центр может устанавливать также *мотивирующую надбавку*[1] $\delta \geq 0$. Следовательно, для того чтобы агент выбрал действие $x \in A$, стимулирование со стороны центра за выбор этого действия должно быть не меньше

$$\sigma(x) = c(x) + \delta. \qquad (6)$$

Легко видеть, что если в случае выбора агентом других действий (отличных от x) вознаграждение равно нулю, то выполнены как условия согласованности стимулирования, так и условие индивидуальной рациональности агента. При этом стимулирование (10) со стороны центра является минимально возможным. Следовательно, мы доказали, что параметрическим (с параметром $x \in S$) решением задачи (5) является следующая система стимулирования:

$$\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}, \qquad (7)$$

которая называется *компенсаторной* (K-*типа*).

Параметр $x \in A$, фигурирующий в компенсаторной системе стимулирования, в теории управления называется *пла-*

---

[1] Если гипотеза благожелательности (ГБ) не выполнена, и при определении эффективности стимулирования центр использует максимальный гарантированный результат (МГР) по множеству максимумов целевой функции агента, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка должна быть строго положительна (но может быть выбрана сколь угодно малой). Если гипотеза благожелательности выполнена, то с формальной точки зрения мотивирующая надбавка может быть выбрана равной нулю. С неформальной точки зрения мотивирующая надбавка отражает аспект нематериального стимулирования.

ном – желательным с точки зрения центра действием агента. План является *согласованным*, если его выполнение (выбор действия, совпадающего с планом) выгодно агенту, то есть принадлежит множеству реализуемых действий (тех действий, на которых достигается максимум целевой функции агента). Принцип компенсации затрат является достаточным условием реализации требуемого действия.

Рассмотрим теперь, какое действие следует реализовывать центру, то есть каково оптимальное значение согласованного плана $x \in S$.

Так как в силу (6)–(7) стимулирование равно затратам агента, то оптимальным реализуемым действием x^* является действие, максимизирующее на множестве S разность между доходом центра и затратами агента. Следовательно, *оптимальный согласованный план* может быть найден из решения следующей стандартной оптимизационной задачи:

$$x^* = \arg \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}, \qquad (8)$$

которая получила название *задачи оптимального согласованного планирования* [3]. Действительно, то действие, которое центр собирается побуждать выбирать агента, может интерпретироваться как *план* – желательное с точки зрения центра действие агента. В силу принципа компенсации затрат план является *согласованным* (напомним, что согласованным называется план, выполнение которого выгодно агенту), значит центру в силу (8) остается найти оптимальный согласованный план.

Значение целевой функции центра при использовании оптимальной компенсаторной системы стимулирования в рамках гипотезы благожелательности равно:

$$\Delta = \max_{x \in S} \{H(x) - c(x)\}.$$

Условие оптимальности плана x^* в рассматриваемой модели (в предположении дифференцируемости функций дохода и затрат, а также вогнутости функции дохода центра и выпуклости функции затрат агента) имеет вид: $\frac{dH(x^*)}{dy} = \frac{dc(x^*)}{dy}$. Величина $\frac{dH(y)}{dy}$ в экономике называется предельной производительностью (*MRP – marginal rate of production*), а величина $\frac{dc(y)}{dy}$ – предельными затратами (*MC – marginal costs*). Условие оптимума (*MRP* = *MC*) определяет действие x^* и так называемую *эффективную заработную плату* $c(x^*)$.

Отметим еще одну важную содержательную интерпретацию условия (9). Оптимальный согласованный план x^* максимизирует разность между доходом центра и затратами агента, то есть доставляет максимум суммы целевых функций (1) и (2) участников ОС, и, следовательно, является эффективным по Парето[1].

Подчеркнем, что компенсаторная система стимулирования (7) не является единственной оптимальной системой стимулирования – легко показать, что в рамках гипотезы благожелательности решением задачи (5) является любая система стимулирования $\breve{\sigma}(\cdot)$, удовлетворяющая следующему условию: $\breve{\sigma}(x^*) = c(x^*),\ \forall\, y \neq y^*\ \ \breve{\sigma}(y) \leq c(y)$ (см. рис. 2.2, на котором приведены эскизы двух оптимальных систем стимулирования – σ_1^* и σ_2^*).

Область компромисса является чрезвычайно важным с методологической точки зрения понятием. Ее непустота отражает наличие возможности согласования интересов центра и агента в существующих условиях. Поясним последнее утверждение.

---

[1] То есть, таким, что не существует другого плана, при выполнении агентом которого, все участники ОС (и центр, и агент) получат не меньший выигрыш, а кто-то из них – строго больший.

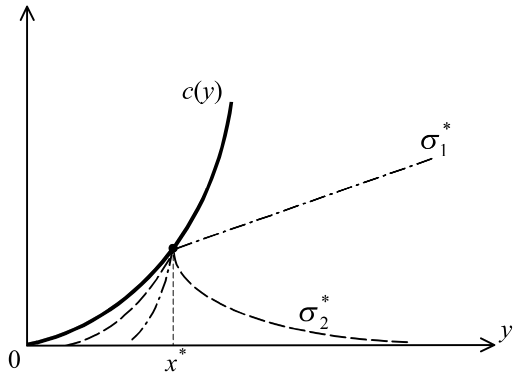


Рис. 2.2. *Оптимальные системы стимулирования*

В формальной модели стратегии участников ограничены соответствующими допустимыми множествами. Учет ограничений индивидуальной рациональности агента и центра (условно можно считать, что неотрицательность целевой функции центра отражает ограничения финансовой эффективности деятельности центра – затраты на стимулирование агента не должны превышать доход от результатов его деятельности), а также условий согласования приводит к тому, что множество «рациональных» стратегий – область компромисса – оказывается достаточно узкой.

Фактически компромисс между центром и агентом заключается в дележе полезности Δ, равной разности полезностей в точках A и B на рис. 2.1. Делая первый ход (предлагая контракт), центр «забирает» эту разность себе, вынуждая агента согласиться с резервным значением полезности. Легко проверить, что в противоположной ситуации, когда первый ход делает агент, предлагая контракт центру, нулевую полезность получает центр, а агент «забирает» разность Δ между полезностями в точках A и B себе. Возможны и промежуточные варианты, когда принцип дележа прибыли Δ между центром и агентом оговаривается заранее в соответствии с некоторым *механизмом компромисса* [16].

Из проведенного выше анализа следует, что решение задачи стимулирования может быть разделено на два этапа. На *первом этапе* решается *задача согласования* – определяется множество реализуемых при заданных ограничениях действий – множество согласованных планов. На *втором этапе* решается *задача оптимального согласованного планирования* – ищется реализуемое действие, которое наиболее предпочтительно с точки зрения центра. Подобная идеология разбиения решения задачи управления ОС на два этапа широко используется в теории управления и при решении более сложных задач – см. [24, 28].

В рамках полученного выше оптимального решения задачи стимулирования (то есть при использовании центром компенсаторной системы стимулирования) значение целевой функции агента в случае выполнения плана равно нулю (или резервной полезности плюс мотивирующая надбавка). Поэтому особого внимания, в силу широкой распространенности на практике, заслуживает случай, когда в условиях трудового контракта (или договора между заказчиком-центром и исполнителем-агентом) производится фиксация норматива рентабельности $\rho \geq 0$ агента, то есть ситуация, когда размер вознаграждения агента зависит от его действия следующим образом:

$$\sigma_\rho(x, y) = \begin{cases} (1+\rho)\, c(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Данная система стимулирования называется *системой стимулирования с нормативом рентабельности* [16].

Предполагая, что резервная полезность исполнителя равна нулю, получаем, что задача оптимального согласованного планирования при этом имеет вид (ср. с (8)):

$$x^*(\rho) = \arg \max_{y \in A} \{H(y) - (1 + \rho)\, c(y)\}.$$

Следовательно, максимальное значение целевой функции центра равно:

$$\Delta(\rho) = H(y^*(\rho)) - (1 + \rho)\, c\,(y^*(\rho)).$$

Легко видеть, что $\forall\ \rho \geq 0\ \ \Delta(\rho) \leq \Delta$.

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть $H(y) = y$, $c(y) = y^2/2\,r$, где r – *тип* агента (параметр, отражающий эффективность его деятельности. Тогда $x^*(\rho) = r/(1 + \rho)$, $\Delta(\rho) = r/[2\,(1 + \rho)]$. Из условий индивидуальной рациональности следует, что $\rho \geq 0$. В рассматриваемом примере прибыль агента $\rho\, c\,(x^*(\rho))$ достигает максимума при $\rho = 1$, то есть агенту выгодно вдвое завысить стоимость выполняемых работ. С точки зрения центра наиболее предпочтителен нулевой норматив рентабельности.

Завершив рассмотрение примера, отметим, что, как следует из сказанного выше, в рамках введенных предположений система стимулирования K-типа является оптимальным решением задач стимулирования. Казалось бы, что можно еще «вытянуть» из этой модели? Все дело в том, что ранее считалось, что компенсаторная система является допустимой. Однако на практике это не всегда так – центр может быть жестко ограничен некоторым фиксированным классом систем стимулирования, причем эти ограничения могут быть как экзогенными – например, определяться правовыми нормами, регулирующими оплату труда, так и эндогенными – по тем или иным причинам центр может быть склонен к использованию, например, сдельной или повременной оплаты, а не к простой компенсации затрат [23] (см. следующий раздел и [29]).

2.2. Базовые механизмы стимулирования

Перечислим *базовые системы* (*механизмы*) *стимулирования* в одноэлементных детерминированных, то есть функционирующих в условиях полной информированности обо всех существенных внешних и внутренних параметрах, организационных системах (оптимальная базовая система стимулирования – компенсаторная (К-типа) – подробно описана и исследована в разделе 2.1).

Скачкообразные системы стимулирования (С-типа) характеризуются тем, что агент получает постоянное вознаграждение (как правило, равное максимально возможному или заранее установленному значению) при условии, что выбранное им действие не меньше заданного, и нулевое вознаграждение при выборе меньших действий (рис. 2.3):

$$\sigma_C(x, y) = \begin{cases} C, y \geq x \\ 0, y < x \end{cases}. \qquad (1)$$

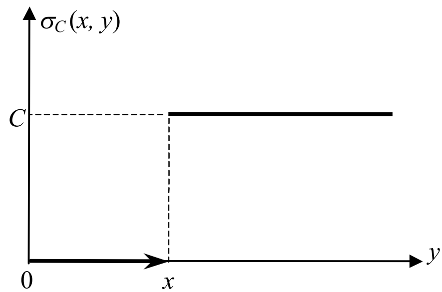


Рис. 2.3. *Скачкообразная система стимулирования*

Системы стимулирования С-типа содержательно могут интерпретироваться как *аккордные*, соответствующие фиксированному вознаграждению C при заданном результате (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т. д.). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть вознаграждение соответствует, например, фиксированному окладу.

Пропорциональные (линейные) системы стимулирования (*L*-типа). На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование *ставки оплаты* единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т. д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т. д.), а ставка оплаты $\lambda \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности (рис. 2.4):

$$\sigma_L(y) = \lambda\, y. \qquad (2)$$

При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(\lambda)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента. При этом затраты центра на стимулирование превышают минимально необходимые (равные компенсируемым затратам агента) на следующую величину: $y^* c'(y^*) - c(y^*)$. Например, если центр имеет функцию дохода $H(y) = b\, y$, $b > 0$, а функция затрат агента выпукла и равна: $c(y) = a\, y^2$, $a > 0$, то при любом реализуемом действии агента центр при использовании пропорциональной системы стимулирования переплачивает ему ровно в два раза.

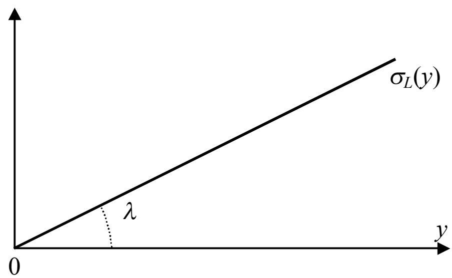


Рис. 2.4. *Пропорциональная система стимулирования*

Таким образом, при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональных систем стимулирования не выше, чем компенсаторных. График целевой функции агента при использовании центром пропорциональной системы стимулирования приведен на рис. 2.5.

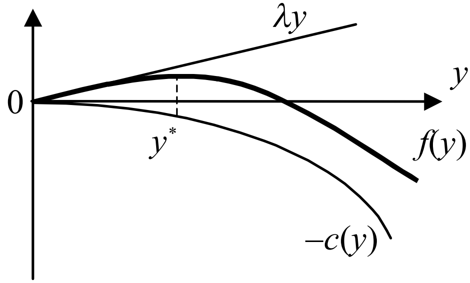


Рис. 2.5. *Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования L-типа*

Неэффективность пропорциональных систем стимулирования вида $\sigma_L(y) = \lambda\, y$ обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений. Если допустить, что вознаграждение может быть отрицательным (при этом «отрицательный» участок функции стимулирования может не использоваться – см. рис. 2.6): $\sigma_{LK}(y) = \sigma_0 + \lambda\, y$, где $\sigma_0 \leq 0$, то при выпуклых функциях затрат агента эффективность пропорциональной системы стимулирования $\sigma_{LK}(\cdot)$ может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования.

Для обоснования этого утверждения достаточно воспользоваться следующими соотношениями (см. рис. 2.7):

$$x^*(\lambda) = c'^{-1}(\lambda),\ \sigma_0(\lambda) = c(c'^{-1}(\lambda)) - \lambda\, c'^{-1}(\lambda).$$

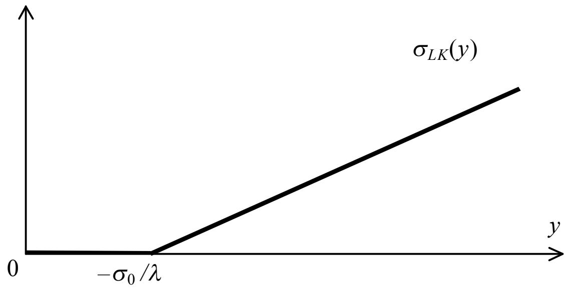


Рис. 2.6. *«Линейная» функция стимулирования*

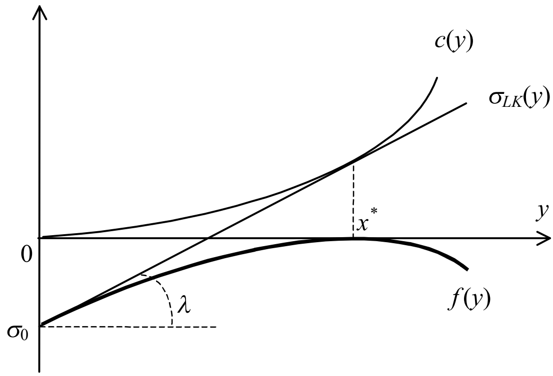


Рис. 2.7. *Целевая функция агента при использовании центром системы стимулирования* $\sigma_{LK}(\cdot)$

Оптимальное значение λ^* ставки оплаты при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра:

$$\lambda^* = \arg\max_{\lambda \geq 0} \; [H(x^*(\lambda)) - \sigma_{LK}(x^*(\lambda))].$$

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода (*D*-типа) используют следующую идею.

Так как центр выражает интересы системы в целом, то можно условно идентифицировать его доход и доход от деятельности всей организационной системы. Поэтому возможно основывать стимулирование агента на величине дохода центра – положить вознаграждение агента равным определенной (например, постоянной) доле $\gamma \in [0; 1]$ дохода центра:

$$\sigma_D(y) = \gamma\, H(y). \tag{3}$$

Отметим, что системы стимулирования C, L и D-типа являются параметрическими: для определения скачкообразной системы стимулирования достаточно задать пару (x, C); для определения пропорциональной системы стимулирования достаточно задать ставку оплаты λ; для определения системы стимулирования, основанной на перераспределении дохода, достаточно задать норматив γ.

Перечисленные выше системы стимулирования являются простейшими, представляя собой элементы «конструктора», используя которые можно построить другие более сложные системы стимулирования – *производные* от базовых. Для возможности такого «конструирования» необходимо определить операции над базовыми системами стимулирования. Для одноэлементных детерминированных ОС достаточно ограничиться операциями следующих трех типов [14].

Первый тип операции – переход к соответствующей *«квази»-системе стимулирования* – вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом. В детерминированных организационных системах «обнуление» стимулирования во всех точках, кроме плана, в рамках гипотезы благожелательности практически не изменяет свойств системы стимулирования, поэтому в ходе дальнейшего изложения мы не будем акцентировать внимание на различии некоторой системы стимулирования и системы стимулирования, получающейся из исходной применением операции первого типа.

Второй тип операции – разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах. Получающиеся в результате применения операции второго типа системы стимулирования называют *составными*. Примером составной системы стимулирования является система LL-типа, в которой при действиях агента, меньших некоторого норматива, используется одна ставка оплаты, а результаты, превосходящие норматив, оплачиваются по более высокой ставке.

Третий тип операции – алгебраическое суммирование двух систем стимулирования (что допустимо, так как стимулирование входит в целевые функции участников системы аддитивно). Результат применения операции третьего типа называют *суммарной системой стимулирования*.

Например, на рис. 2.8 приведен эскиз системы стимулирования $C+L$-типа (сдельно-премиальная система оплаты труда [14]), получающейся суммированием скачкообразной и пропорциональной систем стимулирования.

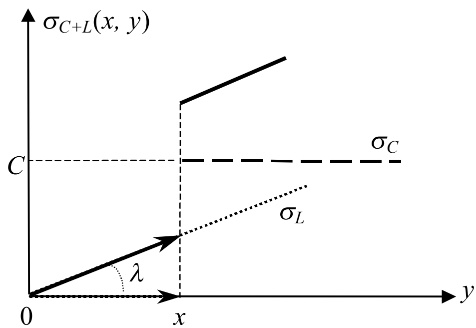


Рис. 2.8. *Система стимулирования C+L-типа* (*суммарная*)

Таким образом, ***базовыми системами стимулирования*** называют системы C-типа, K-типа, L-типа и D-типа, а также все производные от них (то есть получающиеся в результате применения операций перечисленных выше трех типов) системы стимулирования.

В [14], во-первых, показано, что введенные базовые системы стимулирования достаточно полно охватывают используемые на практике формы индивидуальной заработной платы. Во-вторых, в указанной работе приведены оценки сравнительной эффективности различных базовых систем стимулирования – см. таблицу 2.1, в которой сравнительная эффективность семи базовых систем стимулирования, описанных в настоящем разделе (в предположении выпуклости и монотонности функции затрат агента), отражена следующим образом: если в ячейке стоит символ «≥», то эффективность системы стимулирования, соответствующей строке, не ниже эффективности системы стимулирования, соответствующей столбцу (аналогичный смысл имеют и другие неравенства; символ «?» означает, что сравнительная эффективность систем стимулирования L-типа и D-типа зависит в каждом конкретном случае зависит от функции затрат агента и функции дохода центра).

Таблица 2.1

Сравнительная эффективность базовых систем стимулирования

	K	**C**	**L**	**LK**	**D**	**L+C**	**LL**
K	=	=	≥	=	≥	=	=
C	=	=	≥	=	≥	=	=
L	≤	≤	=	≤	?	≤	≤
LK	=	=	≥	=	≥	=	=
D	≤	≤	?	≤	=	≤	≤
L+C	=	=	≥	=	≥	=	=
LL	=	=	≥	=	≥	=	=

2.3. Механизмы стимулирования за индивидуальные результаты

В предыдущих разделах рассматривались системы индивидуального стимулирования. Настоящий и последующие разделы данной главы посвящены описанию моделей *коллективного стимулирования*, то есть стимулирования коллектива агентов.

Простейшим обобщением базовой одноэлементной модели является *многоэлементная ОС* с независимыми (невзаимодействующими) агентами. В этом случае задача стимулирования распадается на набор одноэлементных задач.

Если ввести общие для всех или ряда агентов ограничения на механизм стимулирования, то получается задача стимулирования в ОС со слабо связанными агентами (см. ниже), представляющая собой набор параметрических одноэлементных задач, для которого проблема поиска оптимальных значений параметров решается стандартными методами условной оптимизации.

Если агенты взаимосвязаны (в настоящей работе не рассматривается ситуация, когда существуют общие ограничения на множества допустимых состояний, планов, действий агентов – этот случай подробно описан в [29]), то есть затраты или/и стимулирование агента зависят, помимо его собственных действий, от действий других агентов, то получается «полноценная» многоэлементная модель стимулирования, описываемая в настоящем разделе.

Последовательность решения многоэлементных и одноэлементных задач имеет много общего. Сначала необходимо построить компенсаторную систему стимулирования, реализующую некоторое (произвольное или допустимое при заданных ограничениях) действие (первый этап – этап анализа согласованности стимулирования). В одноэлементных ОС в рамках гипотезы благожелательности для этого достаточно проверить, что при этом максимум целевой функции агента будет достигаться, в том числе и на реализуемом действии. В многоэлементных ОС достаточно показать, что выбор соответствующего действия является равновесной стратегией в игре агентов. Если равновесий несколько, то необходимо проверить выполнение для рассматриваемого действия дополнительной гипотезы о рациональном выборе агентов. В большинстве случаев достаточным оказывается введение аксиомы единогласия (агенты не будут выбирать равновесия, доминируемые по Парето другими равновесиями), иногда центру приходится вычислять гарантированный результат по множеству равновесных стратегий агентов и т. д. Далее следует приравнять стимулирование затратам и решить стандартную оптимизационную задачу – какое из реализуемых действий следует реализовывать центру (второй этап – этап согласованного планирования – см. также раздел 2.1). Конкретизируем этот общий подход.

Стимулирование в ОС со слабо связанными агентами. Описанные в разделе 2.1 результаты решения задачи стимулирования могут быть непосредственно обобщены на случай, когда имеются $n \geq 2$ агентов, функции затрат которых зависят только от их собственных действий (так называемые *сепарабельные затраты*), стимулирование каждого агента зависит только от его собственных действий, но существуют ограничения на суммарное стимулирование агентов. Такая модель называется *ОС со слабо связанными агентами* и является промежуточной между системами индивидуального и коллективного стимулирования.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов, $y_i \in A_i$ – действие i-го агента, $c_i(y_i)$ – затраты i-го агента, $\sigma_i(y_i)$ – стимулирование его со стороны центра, $i \in N$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор действий агентов, $y \in A' = \prod_{i \in N} A_i$. Предположим, что центр получает доход $H(y)$ от деятельности агентов.

Пусть размеры индивидуальных вознаграждений агентов ограничены величинами $\{R_i\}_{i \in N}$, то есть $\forall\, y_i \in A_i$ $\sigma_i(y_i) \le R_i,\ i \in N$. Если фонд заработной платы (ФЗП) ограничен величиной R, то есть $\sum_{i \in N} R_i \le R$, то получаем (см. раздел 2.1), что максимальное множество реализуемых действий для i-го агента зависит от соответствующего ограничения механизма стимулирования и в рамках предположений раздела 2.1 равно $P_i(R_i) = [0, y_i^+(R_i)]$, где

$$y_i^+(R_i) = \max \{y_i \in A_i \mid c_i(y_i) \le R_i\},\ i \in N.$$

Тогда оптимальное решение задачи стимулирования в ОС со слабо связанными агентами определяется следующим образом: максимизировать выбором индивидуальных ограничений $\{R_i\}_{i \in N}$, удовлетворяющих *бюджетному ограничению* $\sum_{i \in N} R_i \le R$, следующее выражение:

$$\Phi(R) = \max_{\{y_i \in P_i(R_i)\}_{i \in N}} H(y_1, \ldots, y_n),$$

что является стандартной задачей условной оптимизации.

Отметим, что когда ФЗП фиксирован, затраты центра на стимулирование не вычитаются из его дохода. Если ФЗП является переменной величиной, то его оптимальное значение R^* может быть найдено как решение следующей задачи:

$$R^* = \arg \max_{R \ge 0} [\Phi(R) - R].$$

Отметим, что во многих важных с практической точки зрения случаях величина ФЗП (или фонда материального поощрения, премиального фонда и т.п.) зависит от действий агентов, то есть достигнутых ими результатов – см. главы 4-8 настоящей работы. При этом можно либо в явном виде учитывать зависимость $R = R(y)$, что приведет к существенному усложнению соответствующих оптимизационных задач, либо применять подход, описанный выше – искать оптимальное решение в параметрическом виде (где ФЗП является параметром), а потом определять оптимальное значение ФЗП.

Пример 2.1. Пусть функции затрат агентов – $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, $i \in N$, а функция дохода центра – $H(y) = \sum_{i \in N} \alpha_i y_i$, где $\{\alpha_i\}_{i \in N}$ – положительные константы.

При заданных ограничениях $\{R_i\}_{i \in N}$ максимальное реализуемое действие каждого агента: $y_i^+(R_i) = \sqrt{2r_i R_i}$, $i \in N$. Задача свелась к определению оптимального набора ограничений $\{R_i^*\}_{i \in N}$, удовлетворяющего бюджетному ограничению и максимизирующего целевую функцию центра:

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} \alpha_i \sqrt{2r_i R_i} \to \max\limits_{\{R_i \geq 0\}_{i \in N}} \\ \sum_{i \in N} R_i \leq R \end{cases}.$$

Решение этой задачи, полученное с применением метода множителей Лагранжа, имеет вид:

$$R_i^* = \frac{r_i \alpha_i^2}{\sum_{j \in N} r_j \alpha_j^2} R, \; i \in N.$$

Оптимальный размер ФЗП равен: $R^* = \sum_{i \in N} r_i \alpha_i^2 / 2$. •

Стимулирование в ОС с сильно связанными агентами. Обозначим обстановку игры для i-го агента

$$y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = = \prod_{j \neq i} A_j .$$

Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $\Phi(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y)$, выплачиваемым агентам, где $\sigma_i(y)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(y) = (\sigma_1(y), \sigma_2(y), \dots, \sigma_n(y))$:

$$\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y), \qquad (1)$$

Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y),\ i \in N. \qquad (2)$$

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го агента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех агентов (*случай сильно связанных агентов* с *несепарабельными затратами*).

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования одновременно и независимо выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Относительно параметров ОС введем следующие предположения:

1) множество допустимых действий каждого агента совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел;

2) функции затрат агентов непрерывны, неотрицательны и

$\forall\ y_i \in A_i\ c_i(y)$ не убывает по y_i, $i \in N$; $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}\ c_i(0, y_{-i}) = 0$;

3) функция дохода центра непрерывна и достигает максимума при ненулевых действиях агентов.

Второе предположение означает, что независимо от действий других агентов любой агент может минимизировать свои затраты выбором нулевого действия. Остальные предположения – такие же, как и в одноэлементной модели (см. раздел 2.1).

Так как и затраты, и стимулирование каждого агента в рассматриваемой модели зависят в общем случае от действий всех агентов, то **агенты оказываются вовлеченными в игру, в которой выигрыш каждого зависит от действий всех**. Обозначим $P(\sigma)$ – множество равновесных при системе стимулирования σ стратегий агентов – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что агенты выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной ОС, рассмотренной в разделе 2.1, в рамках гипотезы благожелательности эффективностью стимулирования является максимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y). \qquad (3)$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске такой допустимой системы стимулирования σ^*, которая имеет максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg \max_{\sigma \in M} K(\sigma). \qquad (4)$$

Из результатов раздела 2.1 следует, что в частном случае, когда агенты независимы (вознаграждение и затраты каждого из них зависят только от его собственных действий), то оптимальной (точнее – δ-оптимальной, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$) является компенсаторная система стимулирования:

$$\sigma_{iK}(x_i, y_i) = \begin{cases} c_i(x_i) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, \ i \in N, \qquad (5)$$

где $\{\delta_i\}_{i \in N}$ – сколь угодно малые строго положительные константы (мотивирующие надбавки), а оптимальное действие x^*, реализуемое системой стимулирования (5) как равновесие в доминантных стратегиях[1] (РДС), является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i)\}.$$

Если стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов (рассматриваемый в настоящем разделе случай коллективного стимулирования) и *затраты несепарабельны* (то есть затраты каждого агента зависят в общем случае от действий всех агентов, что отражает взаимосвязь и взаимозависимость агентов), то множества *равновесий Нэша*[2] $E_N(\sigma) \subseteq A'$ и РДС $y_d \in A'$ имеют вид:

$$E_N(\sigma) = \{y^N \in A' \mid \forall\, i \in N\ \forall\, y_i \in A_i \qquad (6)$$
$$\sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i,\ y_{-i}^N) - c_i(y_i,\ y_{-i}^N)\};$$

$y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента, тогда и только тогда, когда

$$\forall\, y_i \in A_i,\ \forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех агентов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

---

[1] Напомним, что РДС называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия независимо от того, какие действия выбирают остальные агенты.

[2] Напомним, что равновесием Нэша называется такой вектор действий агентов, что каждому агенту выгодно выбирать соответствующую компоненту этого равновесия при условии, что все остальные агенты выбирают равновесные действия.

Фиксируем произвольный вектор $x \in A'$ действий агентов и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, \ \delta_i \geq 0,\ i \in N. \qquad (7)$$

В [29] доказано, что при использовании центром системы стимулирования (7) x – РДС. Более того, если $\delta_i > 0$, $i \in N$, то x – единственное РДС.

Содержательно при использовании системы стимулирования (7) центр использует следующий **принцип декомпозиции**. Он предлагает i-му агенту: «выбирай действие x_i, а я компенсирую тебе затраты независимо от того, какие действия выбрали остальные агенты, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр декомпозирует игру агентов.

Если стимулирование каждого агента должно зависеть только от его собственного действия, то, фиксировав для каждого агента обстановку игры, перейдем от (7) к системе индивидуального стимулирования следующим образом: фиксируем произвольный вектор действий агентов $x \in A'$ и определим систему стимулирования:

$$\sigma_i(x, y_i) = \begin{cases} c_i(x_i, x_{-i}) + \delta_i, & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases}, \ \delta_i \geq 0,\ i \in N. \qquad (8)$$

Содержательно при использовании системы стимулирования (8) центр предлагает i-му агенту: «выбирай действие x_i, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные агенты также выбрали соответствующие компоненты – x_{-i}, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр также декомпозирует игру агентов, то есть реализует вектор x как равновесие Нэша игры агентов.

Отметим, что функция стимулирования (8) зависит только от действия i-го агента, а величина x_{-i} входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (8), в отличие от (7), каждый из агентов имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того чтобы система стимулирования (8) реализовывала вектор x как РДС, необходимо введение дополнительных (по сравнению со случаем использования (7)) предположений относительно функций затрат агентов – (см. [29]).

Здесь же уместно качественно пояснить необходимость введения неотрицательных констант $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8). Если требуется реализовать некоторое действие как одно из равновесий Нэша, то эти константы могут быть выбраны равными нулю. Если требуется, чтобы равновесие было единственным (в частности, чтобы агенты не выбирали нулевые действия), то агентам следует доплатить сколь угодно малую, но строго положительную величину за выбор именно того действия, которое предлагается центром. Более того, величины $\{\delta_i\}_{i \in N}$ в выражениях (5), (7) и (8) играют важную роль и с точки зрения устойчивости компенсаторной системы стимулирования по параметрам модели. Например, если функция затрат i-го агента известна с точностью до $\delta_i / 2$, то компенсаторная система стимулирования (7) все равно реализует действие x (см. [6, 22]).

Вектор оптимальных реализуемых действий агентов x^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (7) или (8), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y)\}, \qquad (9)$$

а эффективность системы стимулирования (7), (9) равна следующей величине:

$$\Delta = H(x^*) - \sum_{i \in N} c_i(x^*) - \delta.$$

В [29] доказано, что система стимулирования (7), (9) является оптимальной, то есть обладает максимальной эффективностью, среди всех систем стимулирования в многоэлементных ОС.

Рассмотрим несколько примеров решения задач синтеза оптимальных систем коллективного стимулирования в многоэлементных ОС.

Пример 2.2. Решим задачу стимулирования в ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат: $c_i(y) = \dfrac{(y_i + l\, y_{3-i})^2}{2r_i}$, $i = 1, 2$, где l – параметр, отражающий степень взаимозависимости агентов. Пусть функция дохода центра $H(y) = y_1 + y_2$, а фонд заработной платы ограничен величиной R. Если центр использует систему стимулирования (7), то задача стимулирования сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} H(y) \to \max\limits_{y \geq 0} \\ c_1(y) + c_2(y) \leq R \end{cases}.$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что решение имеет вид:

$$y_1^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{l\, r_2 - r_1}{l^2 - 1},\ y_2^* = \sqrt{\frac{2R}{r_1 + r_2}}\ \frac{l\, r_1 - r_2}{l^2 - 1}.$$

Подставляя равновесные действия агентов в целевую функцию центра, получаем, что оптимальный размер ФЗП равен:

$$R^* = \arg\max_{R \geq 0}\ [\sqrt{2R(r_1 + r_2)}\ /(1 - l) - R] = \frac{r_1 + r_2}{2(l - 1)^2}. \bullet$$

Пример 2.3. Вторым примером является *модель совместного производства*. Рассмотрим многоэлементную двухуровневую ОС, состоящую из центра и n агентов.

Пусть целевая функция i-го агента $f_i(y, r_i)$ представляет собой разность между доходом $h_i(y)$ от совместной деятельности и затратами $c_i(y, r_i)$, где r_i – *тип* агента (параметр эффективности его деятельности), то есть

$$f_i(y, r_i) = h_i(y) - c_i(y, r_i),\ i \in N.$$

Выберем следующий вид функций дохода и затрат:

$$h_i(y) = p_i\ \theta\ Y,\ i \in N,\ c_i(y, r_i) = \frac{y_i^2}{2(r_i \pm l_i \sum_{j \neq i} y_j)},\ i \in N,$$

где $Y = \sum_{i \in N} y_i$, $\sum_{i \in N} p_i = 1$.

Для случая, когда в знаменателе стоит знак «–», предполагается, что $\sum_{j \neq i} y_j < \frac{r_i}{l_i}$.

Содержательно набор агентов может интерпретироваться как фирма, подразделения которой (агенты) производят однородную продукцию, реализуемую на рынке по цене θ. Суммарный доход θY распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями $\{p_i\}_{i \in N}$. Затраты агента возрастают по его действиям, а эффективность деятельности определяется типом агента r_i.

Взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат (эффективности деятельности) каждого из них от действий всех (других) агентов.

Знак «+» в знаменателе соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем меньше затраты (выше эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т. д.

Знак «–» в знаменателе соответствует неэффективному взаимодействию агентов (возрастанию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем больше затраты (ниже эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать нехватке основных фондов, ограничениям на побочные показатели (например, загрязнение окружающей среды) и т. д.

Коэффициенты $\{l_i \geq 0\}_{i \in N}$ отражают степень взаимозависимости агентов.

Пусть рыночная цена θ известна всем участникам ОС. Тогда, дифференцируя целевые функции агентов, приравнивая производные нулю и складывая получившиеся при этом выражения

$$y_i = p\ \theta\,(r_i \pm l_i \sum_{j \neq i} y_j\ ),\ i \in N,$$

получим следующую зависимость суммарных действий Y^+ от параметра θ:

$$Y^+(\theta) = \frac{\sum_{i \in N} \frac{p_i\ \theta\ r_i}{1 \pm p_i \theta l_i}}{1 \mp \sum_{i \in N} \frac{p_i\ \theta\ l_i}{1 \pm p_i \theta l_i}}. \bullet$$

Пример 2.4. Третьим примером является *аккордная система оплаты труда*. Рассмотрим ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат $c_i\,(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, где r_i – тип i-го агента, $y_i \in A_i = \Re_1^+$, $i = 1, 2$. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием $\sigma_i\,(y_1, y_2)$, получаемым от центра, и затратами, то есть:

$$f_i\,(y) = \sigma_i\,(y) - c_i\,(y_i),\ i = 1, 2.$$

Пусть центр использует систему стимулирования

$$\sigma_i\,(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, & y_1 + y_2 \geq w \\ 0, & y_1 + y_2 < w \end{cases},\ i = 1, 2. \qquad (10)$$

Содержательно центр выплачивает каждому агенту фиксированное вознаграждение при условии, что сумма их действий оказывается не меньше, чем некоторое плановое значение $w > 0$. Обозначим:

$$y_i^+ = \sqrt{2r_iC_i}\ ,\ i = 1, 2,\ Y = \{(y_1, y_2) \mid y_i \leq\ y_i^+\ ,\ i = 1, 2,\ y_1 + y_2 \leq w\}$$

– множество индивидуально-рациональных действий агентов. Рассмотрим четыре возможных комбинации переменных (см. рис. 2.9–2.12).

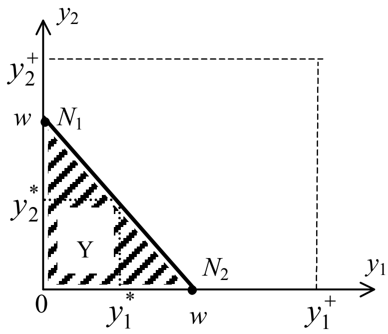


Рис. 2.9

В первом случае (рис. 2.9) множество равновесий Нэша составляет отрезок: $E_N(\sigma) = [N_1; N_2]$. Фиксируем произвольное равновесие $y^* = (y_1^*,\ y_2^*) \in E_N(\sigma)$. Наличие «большого» равновесия Нэша (отрезка, содержащего континуум точек) имеет несколько минусов с точки зрения эффективности стимулирования. Поясним это утверждение.

Так как все точки отрезка $[N_1; N_2]$ эффективны по Парето с точки зрения агентов, то целесообразно доплачивать агентам за выбор конкретных действий из этого отрезка малую, но строго положительную величину.

Построим систему индивидуального стимулирования в соответствии с результатами, приведенными выше (см. (8) и (9)):

$$\tilde{\sigma}_1^*(y_1) = \sigma_1(y_1,\ y_2^*) = \begin{cases} C_1, & y_1 \geq y_1^* \\ 0, & y_1 < y_1^* \end{cases}, \tag{11}$$

$$\tilde{\sigma}_2^*(y_2) = \sigma_2(y_1^*, y_2) = \begin{cases} C_2, & y_2 \geq y_2^* \\ 0, & y_2 < y_2^* \end{cases}.$$

При использовании этой системы стимулирования точка $y^* = (y_1^*,\ y_2^*)$ оказывается единственным равновесием Нэша, то есть, переходя от системы стимулирования (10) каждого агента, зависящей от действий всех агентов, к системе стимулирования (11), зависящей только от действий данного агента, центр декомпозирует игру агентов, реализуя при этом единственное действие. При этом эффективность стимулирования, очевидно, не только не понижается, а может оказаться более высокой, чем при использовании исходной системы стимулирования.

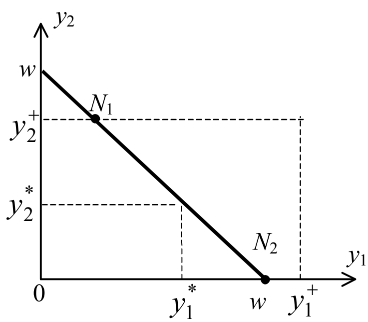


Рис. 2.10

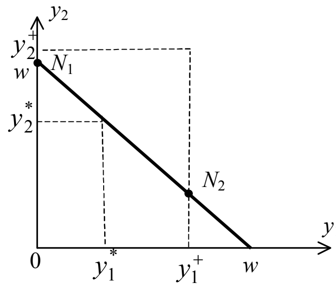


Рис. 2.11

Во втором и третьем случаях равновесием Нэша являются отрезки $[N_1; N_2]$, изображенные на рис. 2.10 и 2.11 соответственно.

И наконец, в четвертом случае (рис. 2.12) множество равновесий Нэша состоит из точки (0; 0) и отрезка $[N_1; N_2]$, то есть $E_N(\sigma) = (0; 0) \cup [N_1; N_2]$, причем точки интервала $(N_1; N_2)$ недоминируемы по Парето другими равновесиями.

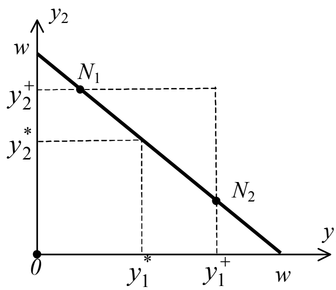


Рис. 2.12

Пусть в условиях рассматриваемого примера функции затрат агентов несепарабельны и имеют вид:

$$c_i(y) = \frac{(y_i + l\, y_{3-i})^2}{2r_i}.$$

Определим множество Y индивидуально-рациональных действий агентов: $Y = \{(y_1, y_2) \mid c_i(y) \le C_i,\ i = 1, 2\}$. Для того чтобы не рассматривать все возможные комбинации значений параметров $\{r_1, r_2, C_1, C_2, w\}$, возьмем случай, представленный на рис. 2.13.

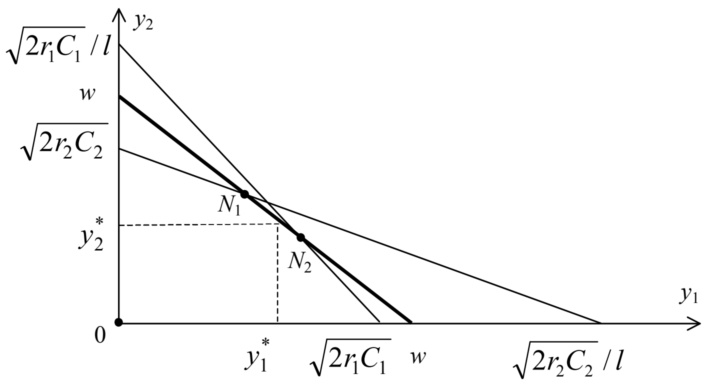


Рис. 2.13. *Множество равновесий Нэша* $[N_1; N_2]$ *в случае несепарабельных затрат*

В рассматриваемом случае множество равновесий Нэша включает отрезок $[N_1; N_2]$. Система стимулирования

$$\tilde{\sigma}_1^*(y) = \begin{cases} c_1(y_1^*, y_2), & y_1 = y_1^* \\ 0, & y_1 \ne y_1^* \end{cases} \qquad (12)$$

$$\tilde{\sigma}_2^*(y) = \begin{cases} c_2(y_1, y_2^*), & y_2 = y_2^* \\ 0, & y_2 \ne y_2^* \end{cases}$$

реализует действие $y^* \in [N_1; N_2]$ как равновесие в доминантных стратегиях. •

Завершив рассмотрение механизмов стимулирования за индивидуальные результаты деятельности агентов, перейдем к описанию механизмов стимулирования за результаты совместной деятельности.

2.4. Механизмы стимулирования нескольких агентов

В большинстве известных моделей стимулирования рассматриваются либо ОС, в которых управляющий орган – центр – наблюдает результат деятельности каждого из управляемых субъектов – агентов, находящийся в известном взаимно однозначном соответствии с выбранной последним стратегией (действием), либо ОС с неопределенностью, в которых наблюдаемый результат деятельности агентов зависит не только от его собственных действий, но и от неопределенных и/или случайных факторов [24].

Настоящий раздел содержит формулировку и решение задачи коллективного стимулирования в многоэлементной детерминированной ОС, в которой центр имеет агрегированную информацию о результатах деятельности агентов.

Пусть в рамках модели, рассмотренной в предыдущем разделе, *результат деятельности* $z \in A_0 = Q(A')$ ОС, состоящей из n агентов, является функцией (называемой *функцией агрегирования*) их действий: $z = Q(y)$, где $Q(\cdot)$ – *оператор агрегирования*, отображающий вектор $y \in A'$ действий агентов в результат их деятельности $z \in A_0$. Интересы и предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением $\sum_{i \in N} \sigma_i(z)$, выплачиваемым агентам, где $\sigma_i(z)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots, \sigma_n(z))$, то есть

$$\Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z). \qquad (1)$$

Целевая функция i-го агента представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z) - c_i(y),\ i \in N. \qquad (2)$$

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решений о выбираемых стратегиях (соответственно – функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС, а также функция агрегирования. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

В случае, когда индивидуальные действия агентов наблюдаемы для центра (или когда центр может однозначно восстановить их по наблюдаемому результату деятельности), последний может использовать систему стимулирования, зависящую непосредственно от действий агентов: $\forall\ i \in N$ $\tilde{\sigma}_i(y) = \sigma_i(Q(y))$. Методы решения задачи стимулирования для этого случая описаны в предыдущем разделе. Поэтому рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результат деятельности ОС, от которого зависит его доход, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий агентов, то есть имеет место *агрегирование информации* – центр имеет не всю информацию о векторе $y \in A'$ действий агентов, а ему известен лишь некоторый их агрегат $z \in A_0$ – параметр, характеризующий результаты совместных действий агентов.

Будем считать, что относительно параметров ОС выполнены предположения, введенные в предыдущем разделе и, кроме того, предположим, что функция агрегирования однозначна и непрерывна.

Как и выше, эффективностью стимулирования является максимальное (в рамках гипотезы благожелательности) значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma(\cdot)) = \max_{y \in P(\sigma(\cdot))} \Phi(\sigma(\cdot), Q(y)). \qquad (3)$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске такой допустимой системы стимулирования σ^*, которая имеет максимальную эффективность:

$$\sigma^* = \arg \max_{\sigma(\cdot)} K(\sigma(\cdot)). \qquad (4)$$

Отметим, что в рассмотренных в разделе 2.3 задачах стимулирования декомпозиция игры агентов основывалась на возможности центра поощрять агентов за выбор определенного (и наблюдаемого центром) действия. Если действия агентов не наблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение агентов зависит от агрегированного результата деятельности ОС, следует использовать следующий подход: найти множество действий, приводящих к заданному результату деятельности, выделить среди них подмножество, характеризуемое минимальными суммарными затратами агентов (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования, которые оптимальны – см. разделы 2.1 и 2.3), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить, реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для центра.

Перейдем к формальному описанию решения задачи стимулирования в ОС с агрегированием информации.

Определим множество векторов действий агентов, приводящих к заданному результату деятельности ОС:

$$Y(z) = \{y \in A' \mid Q(y) = z\} \subseteq A',\ z \in A_0.$$

Выше показано, что в случае наблюдаемых действий агентов минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий $y \in A'$ равны суммарным затратам агентов $\sum_{i \in N} c_i(y)$. По аналогии вычислим минимальные суммарные затраты агентов по достижению результата деятельности $z \in A_0$ $\tilde{\vartheta}(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, а также множество действий $Y^*(z) = \mathrm{Arg} \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, на котором этот минимум достигается.

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in A_0$ и произвольный вектор $y^*(x) \in Y^*(x) \subseteq Y(x)$.

В [29] (при следующем дополнительном предположении «технического» характера: $\forall\ x \in A_0$, $\forall\ y' \in Y(x)$, $\forall\ i \in N$, $\forall\ y_i \in Proj_i\ Y(x)$ $c_j\,(y_i, y'_{-i})$ не убывает по y_i, $j \in N$) доказано, что:

1) при использовании центром системы стимулирования

$$\sigma^*_{ix}(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + \delta_i, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i \in N, \qquad (5)$$

вектор действий агентов $y^*(x)$ реализуется как единственное равновесие с минимальными затратами центра на стимулирование, равными: $\tilde{\vartheta}(x) + \delta$, где $\delta = \sum_{i \in N} \delta_i$;

2) система стимулирования (5) является δ-оптимальной.

Итак, первый шаг решения задачи стимулирования (4) заключается в поиске минимальной системы стимулирования (5), характеризуемой затратами центра на стимулирование $\tilde{\vartheta}(x)$ и реализующей вектор действий агентов, приводящий к заданному результату деятельности $x \in A_0$. Поэтому на втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС $x^* \in A_0$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \arg\max_{x \in A_0} \, [H(x) - \tilde{\vartheta}(x)]. \qquad (6)$$

Таким образом, выражения (5)–(6) дают решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования результатов совместной деятельности.

Исследуем, как незнание (невозможность наблюдения) центром индивидуальных действий агентов влияет на эффективность стимулирования. Пусть, как и выше, функция дохода центра зависит от результата деятельности ОС. Рассмотрим два случая. Первый – когда действия агентов наблюдаемы, и центр может основывать стимулирование как на действиях агентов, так и на результате деятельности ОС. Второй случай, когда действия агентов не наблюдаемы, и стимулирование может зависеть только от наблюдаемого результата деятельности ОС. Сравним эффективности стимулирования для этих двух случаев.

При наблюдаемых действиях агентов затраты центра на стимулирование $\vartheta_1(y)$ по реализации вектора $y \in A'$ действий агентов равны $\vartheta_1(y) = \sum_{i \in N} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_1 равна: $K_1 = \max_{y \in A'} \{H(Q(y)) - \vartheta_1(y)\}$ (см. также предыдущий раздел).

При ненаблюдаемых действиях агентов минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_2(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ определяются следующим образом (см. (5) и (6)): $\vartheta_2(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i \in N} c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_2 равна: $K_2 = \max_{z \in A_0} \{H(z) - \vartheta_2(z)\}$.

В [29] доказано, что эффективности K_1 и K_2 равны. Данный факт, который условно можно назвать «теоремой об идеальном агрегировании в моделях стимулирования», помимо оценок сравнительной эффективности имеет важное методологическое значение. Оказывается, что в случае, когда функция дохода центра зависит только от результата совместной деятельности агентов, эффективности стимулирования одинаковы как при использовании стимулирования агентов за наблюдаемые действия, так и при стимулировании за агрегированный результат деятельности, несущий меньшую информацию, чем вектор действий агентов.

Другими словами, **наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы**. Это достаточно парадоксально, так как известно, что наличие неопределенности и агрегирования в задачах стимулирования не повышает эффективности. В рассматриваемой модели присутствует *идеальное агрегирование*, возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру не важно, какие действия выбирают агенты, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату деятельности. При этом уменьшается информационная нагрузка на центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из проведенного анализа следующий: если доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности агентов, то целесообразно основывать стимулирование агентов на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия агентов наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях агентов, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на центр.

Напомним, что в разделе 2.1 был сформулирован принцип компенсации затрат. На модели с агрегированием информации этот принцип обобщается следующим образом: минимальные затраты центра на стимулирование по реализации заданного результата деятельности ОС определяются как минимум компенсируемых центром суммарных затрат агентов, при условии, что последние выбирают вектор действий, приводящий к заданному результату деятельности. Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример 2.5. Пусть (см. также примеры в разделе 2.3)

$$z = \sum_{i \in N} y_i \,,\ H(z) = z,\ c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i,\ i \in N.$$

Вычисляем $Y(z) = \{y \in A' \mid \sum_{i \in N} y_i = z\}$.

Решение задачи

$$\sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \min_{y \in A'} \text{ при условии } \sum_{i \in N} y_i = x$$

имеет вид: $y_i^*(x) = \dfrac{r_i}{W}\, x$, где $W = \sum_{i \in N} r_i$, $i \in N$. Минимальные затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $x \in A_0$ равны: $\vartheta(x) = x^2 / 2\, W$.

Вычисляя максимум целевой функции центра $\max_{x \geq 0}\ [H(x) - \vartheta(x)]$, находим оптимальный план: $x^* = W$ и оптимальную систему стимулирования:

$$\sigma_i^*(W, z) = \begin{cases} r_i \dfrac{x^2}{2W^2}, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},\ i \in N.$$

При этом эффективность стимулирования (значение целевой функции центра) равна: $K = W/2$. •

Выше рассмотрены системы коллективного стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от действий или результатов у каждого агента была индивидуальной. На практике во многих ситуациях центр вынужден использовать одинаковую для всех агентов зависимость вознаграждения от действия или результата совместной деятельности. Рассмотрим соответствующие модели.

2.5. Механизмы унифицированного стимулирования

До сих пор рассматривались *персонифицированные* системы индивидуального и коллективного стимулирования, в которых центр устанавливал для каждого агента свою зависимость вознаграждения от его действий (раздел 2.1), или действий других агентов (раздел 2.3), или результатов их совместной деятельности (раздел 2.4). Кроме персонифицированных, существуют *унифицированные* системы стимулирования, в которых зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов. Необходимость использования унифицированного стимулирования может быть следствием институциональных ограничений, а может возникать в результате стремления центра к «демократическому» управлению, созданию для агентов равных возможностей и т. д.

Так как унифицированное управление является частным случаем персонифицированного, то эффективность первого не превышает эффективности второго. Следовательно, возникает вопрос, к каким потерям в эффективности приводит использование унифицированного стимулирования, и в каких случаях потери отсутствуют?

Рассмотрим две модели коллективного унифицированного стимулирования (используемая техника анализа может быть применена к любой системе стимулирования) – унифицированные пропорциональные системы стимулирования и унифицированные системы коллективного стимулирования за результаты совместной деятельности. В первой модели унификация не приводит к потерям эффективности (оказывается, что именно унифицированные системы стимулирования оказываются оптимальными в классе пропорциональных), а во второй снижение эффективности значительно.

Унифицированные пропорциональные системы стимулирования. Введем следующее предположение относительно функций затрат агентов:

$$c_i(y_i, r_i) = r_i\,\varphi(y_i / r_i),\ i \in N, \qquad (1)$$

где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0) = 0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = t^\alpha / \alpha,\ \alpha \geq 1$), $r_i > 0$ – параметр эффективности агента.

Если центр использует пропорциональные (L-типа) индивидуальные системы стимулирования: $\sigma_i(y_i) = \lambda_i\,y_i$, то целевая функция агента имеет вид: $f_i(y_i) = \lambda_i\,y_i - c_i(y_i)$. Дифференцируя целевую функцию, вычислим действие, выбираемое агентом при использовании центром некоторой фиксированной системы стимулирования:

$$y_i^*(\gamma_i) = r_i\,\varphi'^{-1}(\lambda_i),\ i \in N, \qquad (2)$$

где $\varphi'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции $\varphi(\cdot)$.

Минимальные суммарные затраты центра на стимулирование равны:

$$\vartheta_L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, r_i\, \varphi'^{-1}(\lambda_i), \qquad (3)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Суммарные затраты агентов равны:

$$c(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(\varphi'^{-1}(\lambda_i)). \qquad (4)$$

В рамках приведенной выше общей формулировки модели пропорционального стимулирования возможны различные постановки частных задач. Рассмотрим некоторые из них, интерпретируя действия агентов как объемы выпускаемой ими продукции.

Задача 1. Пусть центр заинтересован в выполнении агентами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами агентов (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат агентов и суммарных затрат центра на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{\lambda_i\}_{i \in N}$ в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} c(\lambda) \to \min\limits_{\lambda} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases}, \tag{5}$$

решение которой имеет вид:

$$\lambda_i^* = \varphi'(w / W);\; y_i^* = r_i\,(w / W);\; i \in N,$$
$$c^* = W\,\varphi\,(w / W);\; \vartheta_L^* = R\,\varphi'(w / W). \tag{6}$$

где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$.

Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех агентов, то оптимальна именно унифицированная система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты агентов:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) \to \max\limits_{\lambda} \\ c(\lambda) \le v \end{cases}. \tag{7}$$

Решение задачи (7) имеет вид:

$$\lambda_i^* = \varphi'(\varphi^{-1}(v / W));\; y_i^* = r_i\,\varphi^{-1}(v / W);\; i \in N,$$
$$c^* = R;\; \vartheta_L^* = \varphi^{-1}(v / W)\;W\,\varphi'(\varphi^{-1}(v / W)), \tag{8}$$

то есть в двойственной задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат агентов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару содержательно двойственных задач.

Задача 3. Если центр заинтересован в выполнении агентами плана w по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \vartheta_L(\lambda) \to \min\limits_{\lambda} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) = w \end{cases}, \qquad (9)$$

решение которой совпадает с (6), что представляется достаточно интересным фактом, так как суммарные затраты агентов отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование – интересы управляющего органа. Естественно, отмеченное совпадение является следствием сделанных предположений.

Задача 4 заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\lambda_i) \to \max\limits_{\lambda} \\ \vartheta_L(\lambda) \le v \end{cases}. \qquad (10)$$

Применяя метод множителей Лагранжа, получаем условие оптимальности (λ_0 – множитель Лагранжа):

$$\lambda_0 \, \varphi'^{-1}(\lambda_i) \, \varphi''(\lambda_i) + \lambda_i = 1, \, i \in N,$$

из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению

$$\lambda \, \varphi'^{-1}(\lambda) = v \, / \, W. \qquad (11)$$

Таким образом, мы доказали следующий результат: в организационных системах со слабо связанными агентами, функции затрат которых имеют вид (1), унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

Отметим, что выше установлено, что унифицированные пропорциональные системы стимулирования (*системы стимулирования UL-типа*) оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования в ОС со слабо связанными агентами, имеющими функции затрат вида (1). Поэтому исследуем их сравнительную эффективность на множестве всевозможных (не только пропорциональных) систем стимулирования. Как было показано выше (в разделах 2.1 и 2.3), для этого достаточно сравнить минимальные затраты на стимулирование, например, в задаче 2, с затратами на стимулирование в случае использования центром оптимальных компенсаторных систем стимулирования (которые равны $\vartheta_K(y^*) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \varphi(y_i / r_i)$).

Решая задачу выбора вектора $y^* \in A'$, минимизирующего $\vartheta_K(y^*)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = w$, получаем, что $\vartheta_K^* = W\, \varphi(w / W)$. Подставляя из выражения (6) $\vartheta_{UL}^* = R\, \varphi'(w / W)$, вычислим отношение минимальных затрат на стимулирование:

$$\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* = w / W\ \ \varphi'(w / W) / \varphi(w / W). \qquad (12)$$

Из выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $\vartheta_{UL}^* / \vartheta_K^* \geq 1$. Так как суммарные затраты на стимулирование при использовании унифицированных пропорциональных систем стимулирования выше, чем при использовании «абсолютно оптимальных» компенсаторных систем стимулирования, следовательно, первые не оптимальны в классе всевозможных систем стимулирования. Полученный для многоэлементных организационных систем результат вполне согласован со сделанным в разделе 2.2 выводом, что в одноэлементных системах эффективность пропорционального стимулирования не выше, чем компенсаторного.

Унифицированные системы стимулирования результатов совместной деятельности. В разделе 2.3 исследовались персонифицированные системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Рассмотрим, что произойдет, если в этой модели потребовать, чтобы система стимулирования была унифицированной.

Рассмотрим класс унифицированных систем стимулирования за результаты совместной деятельности (см. также раздел 2.3), то есть систем стимулирования, в которых центр использует для всех агентов одну и ту же зависимость индивидуального вознаграждения от результата деятельности $z \in A_0$. Введем следующую функцию:

$$c(y) = \max_{i \in N} \{c_i(y)\}. \tag{13}$$

На первом шаге вычислим минимальные затраты центра на стимулирование $\vartheta_U(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ унифицированной системой стимулирования:

$$\vartheta_U(z) = \min_{y \in Y(z)} c(y).$$

Множество векторов действий, минимизирующих затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$, имеет вид: $Y^*(z) = \mathrm{Arg} \min_{y \in Y(z)} c(y)$.

По аналогии с тем, как это делалось в разделе 2.3, можно показать, что унифицированная система стимулирования:

$$\sigma_{ix}(z) = \begin{cases} c(y^*(x)) + \delta / n, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, \; i \in N, \tag{14}$$

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности $x \in A_0$ с минимальными в классе унифицированных систем стимулирования затратами на стимулирование.

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности ОС x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x_U^* = \arg \max_{z \in A_0} [H(z) - n\, \vartheta_U(z)]. \tag{15}$$

Выражения (14)–(15) дают решение задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования агентов за результаты их совместной деятельности. Легко видеть, что эффективность унифицированного стимулирования (14)–(15) не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования (5)–(6).

Пример 2.6. Пусть в условиях первого примера из раздела 2.3 центр должен использовать унифицированную систему стимулирования. Определим $c(y) = y_j^2/2r_j$, где $j = \arg\min_{i \in N} \{r_i\}$. Тогда минимальные затраты на стимулирование равны: $\vartheta_U(z) = z^2/2\, n\, r_j$. Оптимальный план $x_U^* = n\, r_j$ дает значение эффективности $n\, r_j/2$, которая меньше эффективности $\sum_{i \in N} r_i/2$ персонифицированного стимулирования, а равенство имеет место в случае одинаковых агентов.

2.6. Механизмы «бригадной» оплаты труда

Настоящий раздел посвящен описанию моделей коллективного стимулирования, а именно – «бригадных» форм оплаты труда[1], в рамках которых вознаграждение агента – члена бригады – определяется *коэффициентом его трудового участия* (КТУ) и зависит от его действия в сравнении с действиями других агентов (в частном случае – при фиксированном премиальном фонде, в общем случае – когда премиальный фонд определяется агрегированным результатом деятельности всей бригады в целом) [33].

[1] Термин «бригадные формы оплаты труда» является устойчивым словосочетанием, возникшим еще в бывшем СССР. Тем не менее системы оплаты труда, основывающиеся на оценке индивидуального вклада в результат деятельности коллектива (с этой точки зрения бригадные формы оплаты труда близки к механизмам стимулирования за результаты коллективной деятельности, рассмотренным в разделе 2.4), широко используются до сих пор.

Процедура определения КТУ может быть различной, а именно возможно:

- формирование КТУ пропорционально тарифному разряду (квалификации) работника;
- формирование КТУ пропорционально *коэффициенту трудового вклада* (КТВ) работника.

При формировании КТУ пропорционально тарифным разрядам имеется в виду следующее. Считается, что тарифный разряд характеризует деятельность каждого работника – агента. При этом полагается, что чем больше тарифный разряд, тем выше квалификация агента. Поэтому тарифный разряд, отражая эффективность работы каждого агента, может быть использован для оценки его деятельности.

При формировании КТВ учитывается фактический вклад каждого агента в зависимости от индивидуальной производительности труда и качества работы в общую работу всего трудового коллектива.

Итак, в трудовом коллективе руководство имеет свои цели и формирует условия функционирования, чтобы достичь эти цели. Соответственно, агенты тоже имеют свои цели и, выбирая соответствующие действия, стремятся их достичь.

Предполагается, что по результатам своей деятельности коллектив получает премиальный фонд R, который распределяется между агентами полностью в зависимости от выбранной системы стимулирования.

Будем считать, что i-й агент характеризуется показателем r_i, отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), то есть индивидуальные затраты i-го агента $c_i = c_i(y_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i, $i \in N$. Коллектив, в котором квалификация всех агентов одинаковая, будем называть *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Эффективность системы стимулирования будем оценивать суммой действий агентов: $\Phi(y) = \sum_{i \in N} y_i$.

Процедуры, основанные на КТУ. Рассмотрим сначала случай использования КТУ. Фонд R распределяется между агентами на основе коэффициентов трудового участия $\{\kappa_i\}_{i \in N}$, $\sum_{j \in N} \kappa_j = 1$. Таким образом, премия i-го агента определяется выражением $\sigma_i = \kappa_i R$.

Целевые функции агентов имеют вид:

$$f_i(y_i) = \sigma_i - c_i(y_i, r_i),\ i \in N. \tag{1}$$

Достаточно распространенная из-за своей простоты процедура определения КТУ основывается только на учете показателя квалификации i-го агента, то есть $\kappa_i = \dfrac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j}$.

Подставляя в (1), получим, что использование КТУ, основанных на квалификации агентов и не зависящих от их реальных действий, не оказывает никакого воздействия на агентов, то есть, не побуждает их выбирать, например, бóльшие действия. Поэтому перейдем к рассмотрению КТВ.

Процедуры, основанные на КТВ. Естественный и простейший способ определения КТВ агента – пропорционально действию последнего, то есть

$$\kappa_i = \frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j},\ i \in N. \tag{2}$$

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$. Тогда из (1) и (2) получаем следующее выражение для целевой функции i-го агента, зависящей уже от действий всех агентов:

$$f_i(y) = R\,\frac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j} - y_i / r_i,\ \ i \in N. \tag{3}$$

Следовательно, исследуемую ситуацию можно рассматривать как игру n лиц с функциями выигрыша вида (3).

Однородный коллектив. Рассмотрим сначала случай однородного коллектива. Равновесные по Нэшу действия можно найти, дифференцируя каждое из n выражений (3), приравнивая производную нулю и выражая сумму равновесных действий агентов. В итоге получим, что равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

$$y_i^* = \frac{Rr(n-1)}{n^2},\ i \in N, \tag{4}$$

что приводит к следующему значению *эффективности*:

$$K_1(R, r, n) = \frac{Rr(n-1)}{n}. \tag{5}$$

Из (4) видно, что чем больше премиальный фонд, тем бóльшие действия выбирают агенты. Из (5) следует, что эффективность линейно растет при увеличении как премиального фонда (то есть не существует оптимального размера премиального фонда, максимизирующего эффект K_1/R его использования), так и квалификации агентов. Если действия агентов ограничены сверху, то существует оптимальный размер премиального фонда, который при известном ограничении может быть вычислен из выражения (4). Кроме того, легко показать (см. подробности в [33]), что разбиение однородного коллектива на более мелкие коллективы и соответствующее дробление премиального фонда не приводит к росту эффективности его использования. Можно также показать, что при постоянном размере фонда сокращение однородного коллектива приводит к уменьшению эффективности и увеличению действий, выбираемых агентами.

Рассмотрим следующую задачу: возможно ли повысить суммарный показатель эффективности однородного коллектива, не увеличивая фонд премирования R, но по-другому формируя КТВ агентов?

Для этого рассмотрим следующую процедуру формирования КТВ, которая более чувствительна к различию агентов, чем (2):

$$\kappa_i = \frac{y_i^{\varepsilon}}{\sum_{j \in N} y_j^{\varepsilon}},\ i \in N,\ 1 \le \varepsilon \le \frac{n}{n-1}. \qquad (6)$$

Тогда равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

$$y_i^* = \varepsilon \frac{Rr(n-1)}{n^2},\ i \in N, \qquad (7)$$

что превышает (4).

Ограничение $1 \le \varepsilon \le \dfrac{n}{n-1}$ позволяет констатировать, что использование процедуры (6) формирования КТВ дает возможность увеличить эффективность по сравнению с процедурой (2) на $1/(n-1)$ процентов. Например, если коллектив состоит из 11 человек, показатель эффективности можно увеличить максимум на 10 %.

Неоднородный коллектив. Из (2) и (3) следует, что в неоднородном коллективе ситуации равновесия Нэша соответствуют следующие действия агентов (которые можно вычислить по аналогии с тем как это описано выше для случая однородного коллектива) и эффективность[1]:

$$y_i^* = \frac{\sum_{j \in N} 1/r_j - (n-1)/r_i}{\left(\sum_{j \in N} 1/r_j\right)^2} R(n-1),\ i \in N, \qquad (8)$$

$$K_2(R, \vec{r}, n) = \sum_{j \in N} y_j^* = \frac{R(n-1)}{\sum_{j \in N} 1/r_j}. \qquad (9)$$

Предположим, что коллектив состоит из агентов двух типов – m агентов-лидеров, имеющих эффективность r^+, и

---

[1] Отметим, что в случае однородных агентов (8) переходит в (4), а (9) – в (5).

$(n - m)$ «рядовых» агентов, то есть агентов, имеющих эффективность r^-, причем $r^+ > r^-$.

Тогда $\sum_{i \in N} 1/r_i = m / r^+ + (n - m) / r^-$.

Используя выражение (8), найдем действия, выбираемые в равновесии лидерами:

$$y^+ = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-} [1 - \frac{1}{r^+} \frac{(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}], \quad (10)$$

и рядовыми агентами:

$$y^- = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-} [1 - \frac{1}{r^-} \frac{(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}]. \quad (11)$$

Используя выражение (9), найдем значение эффективности

$$K_2(R, m, n) = \frac{R(n-1)}{m/r^+ + (n-m)/r^-}. \quad (12)$$

Из выражений (8), (10), (11) видно, что появление в коллективе лидеров (более квалифицированных агентов) вынуждает рядовых (менее квалифицированных) агентов выбирать меньшие действия. Понятно, что это влечет за собой уменьшение значений их целевых функций.

Из (11) получаем, что если количество лидеров в коллективе таково, что $m \geq \frac{1/r^-}{1/r^- - 1/r^+}$, то рядовым агентам вообще не выгодно увеличивать выбираемые ими действия. Однако при $m = 1$, то есть если в коллективе есть только один лидер, рядовым агентам всегда выгодно увеличивать действия. В то же время легко показать [33], что появление в коллективе лидеров приводит к повышению эффективности всего коллектива, несмотря на выбор меньших действий рядовыми агентами.

Исследуем, возможно ли дальнейшее увеличение показателей эффективности работ в коллективе в рамках того же премиального фонда R. Для этого разобьем неоднородный коллектив на два однородных подколлектива. Пусть первый состоит из m лидеров, а второй – из $(n - m)$ рядовых агентов. Соответственно разобьем премиальный фонд R всего коллектива, а именно: $R = R^+ + R^-$. Тогда в равновесии Нэша эффективность первого подколлектива равна $\frac{R^+ r^+ (m-1)}{m}$, а второго – $\frac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m}$.

Соответственно, общий показатель эффективности всего коллектива из n агентов равен:

$$K_3(R, m, n) = \frac{R^+ r^+ (m-1)}{m} + \frac{R^- r^- (n-m-1)}{n-m}. \qquad (13)$$

Выше отмечалось, что разбиение однородного коллектива на несколько подколлективов не приводит к увеличению суммарного показателя эффективности. Для неоднородного коллектива это не всегда так. Например, из сравнения (12) и (13) следует, что если в коллективе имеется половина лидеров, эффективность деятельности которых в два раза выше эффективности рядовых агентов, то выделение лидеров в отдельный подколлектив повысит суммарную эффективность, только если в исходном коллективе было не более шести агентов. В противном случае возможно снижение суммарной эффективности в результате разбиения неоднородного коллектива на два однородных подколлектива, даже при оптимальном распределении премиального фонда между подколлективами.

Индивидуальное и коллективное стимулирование. В заключение настоящего раздела сравним эффективности индивидуального и коллективного стимулирования для ряда практически важных частных случаев (см. также [33]).

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$, $i \in N$, и пусть существует одинаковое для всех агентов ограничение y^{max} на максимальную величину выбираемого действия: $A_i = [0; y^{max}]$, $i \in N$.

Перенумеруем агентов в порядке убывания эффективностей деятельности:

$$r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n. \qquad (14)$$

Предположим, что ограничение y^{max} таково, что действие y_1^*, определяемое (8) при $i = 1$, является допустимым. Тогда допустимыми являются и действия всех остальных агентов при использовании системы коллективного стимулирования (2), основанной на КТВ. Эффективность коллективного стимулирования $K_2(R, \vec{r}, n)$ при этом определяется выражением (9).

Вычислим эффективность индивидуального стимулирования, при котором центр может стимулировать агентов независимо за индивидуальные результаты деятельности при условии, что сумма вознаграждений не превышает фонд R. Для этого воспользуемся принципом компенсации затрат (см. раздел 2.1) и результатами решения задачи стимулирования слабо связанных агентов (см. раздел 2.3).

Получим, что при использовании центром компенсаторных систем стимулирования оптимальной является компенсация затрат первым в упорядочении (14) k агентам (или $(k + 1)$ агенту – в зависимости от соотношения параметров), где

$$k = \min \{j \in N \mid y^{max} \sum_{i=1}^{j} 1/r_i \leq R, y^{max} \sum_{i=1}^{j+1} 1/r_i > R\}. \qquad (15)$$

Содержательно выражение (15) означает, что центру следует в первую очередь задействовать агентов, эффективность деятельности которых максимальна. Другими словами, отличное от нуля стимулирование получат первые k или $(k + 1)$ агентов, а остальным следует назначить нулевое вознаграждение (их использование нецелесообразно). Таким образом, эффективность индивидуального стимулирования равна:

$$K_4(R,\ \vec{r}\ , n) = k\, y^{max} + r^{k+1}\,(R - y^{max} \sum_{i=1}^{k} 1 / r_i\ ). \qquad (16)$$

Выражения (9) и (16) позволяют проводить сравнительный анализ эффективностей коллективного и индивидуального стимулирования.

Как правило, индивидуальное стимулирование оказывается более эффективным. Например, в случае однородных коллективов справедлива следующая оценка:

$$K_4(R, r, n) / K_1(R, r, n) \approx n / (n - 1) \geq 1.$$

Близкими к бригадным формам оплаты труда являются так называемые ранговые системы стимулирования, в которых для коллективного стимулирования используются процедуры соревнования, установления системы нормативов и т. д. Этот класс коллективных систем стимулирования подробно рассматривается в [29] и в следующем разделе.

2.7. Ранговые системы стимулирования

Во многих моделях стимулирования вознаграждение агентов зависит от абсолютных значений их действий и/или результата деятельности (см. разделы 2.3, 2.5 и 2.6). В то же время на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС), в которых величина вознаграждения агента определяется либо принадлежностью показателя его деятельности некоторому наперед заданному множеству – так называемые *нормативные* РСС, либо местом, занимаемым агентом в упорядочении показателей деятельности всех агентов – так называемые *соревновательные* РСС.

Преимуществом ранговых систем стимулирования является в основном то, что при их использовании центру иногда не обязательно знать достоверно значения всех действий, выбранных агентами, а достаточна информация о диапазонах, которым они принадлежат, или об упорядочении действий.

Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов агентам в зависимости от показателей их деятельности (выбираемых действий и т. д.). Введем следующие предположения, которые будем считать выполненными на протяжении настоящего раздела.

Во-первых, будем считать, что множества возможных действий агентов одинаковы и составляют множество A неотрицательных действительных чисел. Во-вторых (как и в разделах 2.1 и 2.3), предположим, что функции затрат агентов монотонны и затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов; $\mathfrak{I} = \{1, 2, ..., m\}$ – множество возможных рангов, где m – размерность НРСС (число рангов); $\{q_j\}$, $j = \overline{1,m}$ – совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за «попадание» в различные ранги.

При использовании унифицированных (с одинаковыми нормативами для всех агентов) *нормативных ранговых систем стимулирования* (УНРСС) агенты, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения. Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$, такой, что $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_m < +\infty$, который определяет некоторое разбиение множества A. Унифицированная НРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го агента σ_i определяется следующим образом: если его действие принадлежит «диапазону» $[Y_j, Y_{j+1})$, то вознаграждение равно q_j, причем $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$.

Унифицированная НРСС называется *прогрессивной*, если вознаграждения возрастают с ростом действий:

$q_0 \le q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_m$. Эскиз графика прогрессивной УНРСС приведен на рис. 2.14.

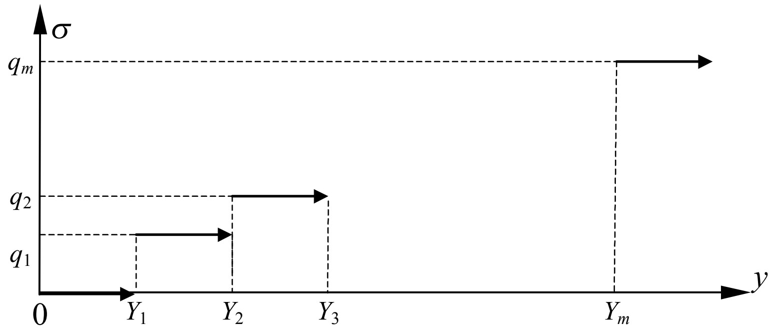


Рис. 2.14. *Пример прогрессивной УНРСС*

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то в силу монотонности функций затрат очевидно, что агенты будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной УНРСС множество допустимых действий равно: $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$, причем так как $c_i(0) = 0$, то $q_0 = 0$. Действие y_i^*, выбираемое i-м агентом, определяется парой векторов (Y, q), то есть имеет место $y_i^*(Y, q) = Y_{k_i}$, где

$$k_i = \arg \max_{k=\overline{0,m}} \{q_k - c_i(Y_k)\},\ i \in N. \qquad (1)$$

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q), y_2^*(Y, q), \ldots, y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС m и векторов q и Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

$$\Phi(y^*(Y, q)) \to \max_{Y,q}. \qquad (2)$$

Фиксируем некоторый вектор действий $x \in \Re_n^+$, который мы хотели бы реализовать с помощью УНРСС.

Из того, что при использовании УНРСС агенты выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонентов вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу агентов, то есть положим $m = n$.

Для фиксированного вектора действий $y^* \in \Re_n^+$ положим $Y_i = x_i,\ i \in N,$ и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j),\ i, j \in N$. Из определения реализуемого действия (см. (1)) следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $x \in \Re_n^+$ (то есть побуждала агентов выбирать соответствующие действия), необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

$$q_i - c_{ii} \geq q_j - c_{ij},\ i \in N, j = \overline{0, n}. \quad (3)$$

Обозначим суммарные затраты на стимулирование по реализации действия x УНРСС

$$\vartheta(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x), \quad (4)$$

где $q(x)$ удовлетворяет (3).

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (4) при условии (3).

Предположим, что агентов можно упорядочить в порядке убывания затрат и предельных затрат:

$$\forall\ y \in A \quad c_1'(y) \geq c_2'(y) \geq \ldots \geq c_n'(y),$$

и фиксируем некоторый вектор $x \in \Re_n^+$, удовлетворяющий следующему условию:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n, \quad (5)$$

то есть чем выше затраты агента, тем меньшие действия он выбирает.

В [29] доказано, что:

1) унифицированными нормативными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (5);

2) оптимальная УНРСС является прогрессивной;

3) для определения оптимальных размеров вознаграждений может быть использована следующая рекуррентная процедура: $q_1 = c_{11}$, $q_i = c_{ii} + \max\limits_{j<i} \{q_j - c_{ij}\}$, $i = \overline{2, n}$;

4) индивидуальные вознаграждения в УНРСС, реализующей вектор $x \in \Re_n^+$, удовлетворяют:

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} (c_j(x_j) - c_j(x_{j-1})). \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет исследовать свойства УНРСС: вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность УНРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и так далее (см. свойства ранговых систем стимулирования ниже).

Соревновательные системы стимулирования. Рассмотрим кратко известные свойства соревновательных ранговых систем стимулирования (СРСС), в которых центр задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений агентов, попавших в тот или иной класс. То есть в СРСС индивидуальное поощрение агента не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех агентов. В [29] доказано, что:

1) необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий агентов $x \in \Re_n^+$ в классе СРСС является выполнение (5);

2) данный вектор реализуем следующей системой стимулирования, обеспечивающей минимальность затрат центра на стимулирование:

$$q_i(x) = \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(x_j) - c_{j-1}(x_{j-1})\},\ i = \overline{1,n}. \qquad (7)$$

Выражение (7) позволяет исследовать свойства СРСС: вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность СРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и с эффективностью УНРСС и т. д.

2.8. Механизмы экономической мотивации

Механизмы стимулирования (мотивации) побуждают управляемых агентов предпринимать определенные действия в интересах управляющего органа – центра. Если в механизмах, рассматриваемых выше, стимулирование заключалось в непосредственном вознаграждении агентов со стороны центра, то в настоящем разделе описаны *механизмы экономической мотивации*, в которых центр управляет агентами путем установления тех или иных нормативов – ставок налога с дохода, прибыли и т. д. Примерами являются: нормативы внутрифирменного налогообложения, определяющие распределение дохода или прибыли между подразделениями и организацией в целом (корпоративным центром или образовательным холдингом [19]); тарифы, определяющие выплаты предприятий в региональные или муниципальные фонды, и т. д.

Рассмотрим следующую модель. Пусть в организационной системе (корпорации, фирме) помимо одного центра имеются n агентов, и известны затраты $c_i(y_i)$ i-го агента, зависящие от его действия $y_i \in \Re^1_+$ (например, от объема выпускаемой агентом продукции), $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множеству агентов. Будем считать функцию затрат непрерывной, возрастающей, выпуклой и равной нулю при выборе агентом нулевого действия. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между его доходом $H_i(y_i)$ и затратами $c_i(y_i)$:

$$f_i(y_i) = H_i(y_i) - c_i(y_i),\ i \in N.$$

Пусть функции затрат агентов имеют вид:

$$c_i(y_i) = r_i\ \varphi(y_i / r_i),\ i \in N,$$

где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая гладкая выпуклая функция, такая, что $\varphi(0) = 0$.

Обозначим $\xi(\cdot) = \varphi'^{-1}(\cdot)$ – функцию, обратную производной функции $\varphi(\cdot)$.

Рассмотрим пять механизмов экономической мотивации агентов, а именно:

1) механизм отчислений (налога с дохода);
2) централизованный механизм;
3) механизм с нормативом рентабельности;
4) механизм налога на прибыль;
5) механизм участия в прибыли.

Механизм отчислений. Пусть задана внутрифирменная (трансфертная) цена λ единицы продукции, производимой агентами, и центр использует *норматив*[1] $\gamma \in [0; 1]$ *отчислений* от дохода агентов. Тогда доход агента $H_i(y_i) = \lambda\, y_i$ и целевая функция i-го агента с учетом отчислений центру имеет вид:

$$f_i(y_i) = (1 - \gamma)\ \lambda\, y_i - c_i(y_i),\ i \in N. \qquad (1)$$

[1] Легко проверить, что в рамках введенных предположений оптимально использование единого норматива для всех агентов – см. раздел 2.5.

Величина γ – норматив отчислений – может интерпретироваться как ставка налога на доход (выручку). Каждый агент выберет действие, максимизирующее его целевую функцию:

$$y_i(\gamma) = r_i\, \xi((1-\gamma)\,\lambda),\ i \in N. \qquad (2)$$

Целевая функция центра, равная сумме отчислений агентов, будет иметь вид:

$$\Phi(\gamma) = \gamma\, \lambda\, W\, \xi((1-\gamma)\,\lambda), \qquad (3)$$

где $W = \sum_{i \in N} r_i$.

Задача центра, стремящегося максимизировать свою целевую функцию, заключается в выборе норматива отчислений:

$$\Phi(\gamma) \to \max_{\gamma \in [0;1]}. \qquad (4)$$

Если функции затрат агентов являются функциями типа Кобба-Дугласа, то есть $c_i(y_i) = \dfrac{1}{\alpha}\,(y_i)^{\alpha}\,(r_i)^{1-\alpha},\ \alpha \geq 1,\ i \in N$, то решение задачи (4) имеет вид:

$$\gamma^*(\alpha) = 1 - 1/\alpha, \qquad (5)$$

то есть оптимальное значение норматива отчислений $\gamma^*(\alpha)$ возрастает с ростом показателя степени α. Оптимальное значение целевой функции центра при этом равно:

$$\Phi_\gamma = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,\lambda\, W\, \xi(\lambda/\alpha),$$

то есть $\Phi_\gamma = (\alpha - 1)\, W\, (\dfrac{\lambda}{\alpha})^{\alpha/(\alpha-1)}$, а сумма действий агентов –

$$Y_\gamma = W\, \xi(\lambda/\alpha) = W\,(\lambda/\alpha)^{1/(\alpha-1)}.$$

Выигрыш i-го агента:

$$f_{i\gamma} = r_i\,(1 - 1/\alpha)\,(\lambda/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)},\ i \in N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна: $\Sigma_\gamma = (\alpha^2 - 1)\, W\,(\lambda/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}/\alpha$.

Централизованный механизм. Сравним найденные показатели со значениями, соответствующими другой схеме экономической мотивации агентов, а именно предположим, что центр использует *централизованную схему* – «забирает» себе весь доход от деятельности агентов, а затем компенсирует им затраты от выбираемых ими действий y_i в случае выполнения плановых заданий x_i (компенсаторная система стимулирования).

В этом случае целевая функция центра равна:

$$\Phi(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N} c_i(x_i) . \qquad (6)$$

Решая задачу $\Phi(x) \to \max\limits_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов:

$$x_i = r_i \, \xi(\lambda), \; i \in N. \qquad (7)$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_x = \lambda^{\alpha/(\alpha-1)} \, W (1 - 1/\alpha),$$

а сумма действий агентов равна $Y_x = W \, \xi(\lambda) = W \lambda^{1/(\alpha-1)}$.

Выигрыш i-го агента тождественно равен нулю, так как центр в точности компенсирует его затраты, а сумма целевых функций всех участников системы Σ_x (центра и всех агентов) равна Φ_x.

Сравним полученные значения:

- $\Phi_x / \Phi_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и убывает с ростом α;
- $Y_x / Y_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и убывает с ростом α;
- $\Sigma_x / \Sigma_\gamma = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} / (\alpha + 1) \geq 1$ и убывает с ростом α.

Таким образом, если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то централизованный механизм экономической мотивации (с точки зрения организационной системы в целом) выгоднее, чем механизм отчислений, так как обеспечивает больший суммарный выпуск продукции и большее значение суммарной полезности всех элементов системы.

Фраза «с точки зрения организационной системы в целом» существенна, так как при использовании централизованного механизма прибыль (значение целевой функции) агентов равна нулю – весь ресурс изымает «метасистема». Такая схема взаимодействия центра с агентами может не устраивать агентов, поэтому исследуем обобщение централизованной схемы, а именно *механизм с нормативом рентабельности*, при котором вознаграждение агента центром не только компенсирует его затраты в случае выполнения плана, но и оставляет в его распоряжении полезность, пропорциональную затратам. Коэффициент этой пропорциональности называется *нормативом рентабельности*. Рассмотренной выше централизованной схеме соответствует нулевое значение норматива рентабельности.

Механизм с нормативом рентабельности. В случае использования норматива рентабельности $\rho \geq 0$ целевая функция центра равна:

$$\Phi_\rho(x) = \lambda \sum_{i \in N} x_i - (1 + \rho) \sum_{i \in N} c_i(x_i)\,. \qquad (8)$$

Решая задачу $\Phi_\rho(x) \to \max\limits_{\{x_i \geq 0\}}$, центр находит оптимальные значения планов[1]:

$$x_{i\rho} = r_i\, \xi(\lambda / (1 + \rho)),\ i \in N. \qquad (9)$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_\rho = \lambda\, (\lambda / (1 + \rho))^{1/(\alpha - 1)}\, W (1 - 1/\alpha),$$

а сумма действий агентов равна:

$$Y_\rho = W\, \xi(\lambda / (1 + \rho)) = W (\lambda / (1 + \rho))^{1/(\alpha - 1)}.$$

[1] Оптимальное с точки зрения центра значение норматива рентабельности, очевидно, равно нулю.

Выигрыш i-го агента равен: $f_{i\rho} = \rho r_i (\lambda/(1+\rho))^{\alpha/(\alpha-1)}/\alpha$, а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна: $\Sigma_\rho = \lambda W(\lambda/(1+\rho))^{1/(\alpha-1)} (\alpha - 1/(1+\rho))/\alpha$.

Сравним полученные значения (отметим, что при $\rho = 0$ все выражения для механизма с нормативом рентабельности переходят в соответствующие выражения для централизованного механизма):

- $\Phi_x/\Phi_\rho = (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ;
- $Y_x/Y_\rho = (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ;
- $\Sigma_x/\Sigma_\rho = \dfrac{(1-\frac{1}{\alpha})(1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1-\frac{1}{(1+\rho)\alpha}} \geq 1$ и возрастает с ростом ρ.

Интересно, что максимум Σ – суммы целевых функций участников организационной системы (центра и агентов) – достигается при нулевом нормативе рентабельности, то есть в условиях полной централизации!

Сравним теперь механизм с нормативом рентабельности с механизмом отчислений:

- $\Phi_\gamma/\Phi_\rho = (\dfrac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ;
- $Y_\gamma/Y_\rho = (\dfrac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ;
- $\Sigma_\gamma/\Sigma_\rho = \dfrac{(\alpha^2-1)}{\alpha^2 - \frac{\alpha}{(1+\rho)}} (\dfrac{1+\rho}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ и возрастает с ростом ρ.

Итак, приходим к выводу, что если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм с нормативом рентабельности $\rho = \alpha - 1$ эквивалентен механизму отчислений.

Справедливость данного утверждения следует из того, что при $\rho = \alpha - 1$ все (!) показатели механизма с нормативом рентабельности совпадают с соответствующими показателями механизма отчислений, то есть выполняется $y_i(\gamma) = x_{i\rho}$, $i \in N$, $\Phi_\gamma = \Phi_\rho$, $Y_\gamma = Y_\rho$, $f_{i\gamma} = f_{i\rho}$, $i \in N$, $\Sigma_\gamma = \Sigma_\rho$.

Теперь рассмотрим четвертый механизм экономической мотивации – механизм налога на прибыль.

Механизм налога на прибыль. Если в качестве прибыли агента интерпретировать его целевую функцию – разность между доходом и затратами, то при ставке налога $\beta \in [0; 1]$ на эту прибыль целевая функция i-го агента примет вид:

$$f_{i\beta}(y_i) = (1 - \beta)\,[\lambda\, y_i - c_i(y_i)],\ i \in N, \tag{10}$$

а целевая функция центра:

$$\Phi_\beta(y) = \beta\,[\lambda \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} c_i(y_i)\,]. \tag{11}$$

Действия, выбираемые агентами при использовании налога на прибыль, совпадают с действиями, выбираемыми ими при централизованной схеме, следовательно:

$$y_{i\beta} = r_i\,\xi(\lambda),\ i \in N. \tag{12}$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно[1]:

$$\Phi_\beta = \beta\,\lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\,W(1 - 1/\alpha),$$

а сумма действий агентов:

$$Y_\beta = W\,\xi(\lambda) = W\,\lambda^{1/(\alpha-1)}.$$

Выигрыш i-го агента равен:

$$f_{i\beta} = (1 - \beta)\,\lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\,r_i\,(1 - 1/\alpha),$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов):

$$\Sigma_\beta = \lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\,W(1 - 1/\alpha).$$

---

[1] Очевидно, что оптимальное с точки зрения центра значение ставки налога на прибыль β равно единице. При этом механизм налога на прибыль превращается в централизованный механизм.

Сравним полученные значения:

- $\Phi_x / \Phi_\beta = 1 / \beta \geq 1$ и возрастает с ростом β;
- $Y_x / Y_\beta = 1$;
- $\Sigma_x / \Sigma_\beta = 1$.

Таким образом, механизм налога на прибыль приводит к той же сумме полезностей и к тому же значению суммы равновесных действий агентов, что и централизованный механизм, но в первом случае полезность центра в β раз ниже, чем во втором. Поэтому механизм налога на прибыль может интерпретироваться как механизм компромисса [16], в котором *точка компромисса* внутри *области компромисса* определяется ставкой налога на прибыль, задающей пропорцию, в которой делится прибыль системы в целом между центром и агентами.

Сравним теперь механизм налога на прибыль с механизмом с нормативом рентабельности:

- $\Phi_\beta / \Phi_\rho = \beta\ (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $Y_\beta / Y_\rho = (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}} \geq 1$;
- $\Sigma_\beta / \Sigma_\rho = \dfrac{(1-\frac{1}{\alpha})(1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{1-\frac{1}{(1+\rho)\alpha}} \geq 1.$

И наконец, сравним механизм налога на прибыль с механизмом отчислений (механизмом налога с дохода):

- $\Phi_\beta / \Phi_\gamma = \beta\ \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $Y_\beta / Y_\gamma = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$;
- $W_\beta / W_\gamma = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} / (\alpha + 1)$.

Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод: если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм налога на прибыль:

при $\beta = 1 / \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен оптимальному механизму отчислений;

при $\beta = 1 - 1 / \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен оптимальному механизму отчислений;

при $\beta = 1 / (1+\rho)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ с точки зрения центра эквивалентен механизму с нормативом рентабельности;

при $\beta = 1 - \rho / (\alpha - 1)\ (1+\rho)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ с точки зрения агентов эквивалентен механизму с нормативом рентабельности.

Механизм участия в прибыли. Рассмотрим механизм участия в прибыли, в рамках которого центр получает прибыль $H(y)$ от деятельности агентов, а затем выплачивает каждому агенту фиксированную (и одинаковую для всех агентов, то есть механизм является унифицированным) долю $\Psi \in [0; 1]$ этой прибыли. Целевая функция i-го агента примет вид:

$$f_{i\Psi}(y) = \Psi\, H(y) - c_i\,(y_i),\ i \in N, \qquad (13)$$

а целевая функция центра:

$$\Phi_{\Psi}(y) = (1 - n\ \Psi)\ H(y). \qquad (14)$$

Действия, выбираемые агентами при механизме участия в прибыли, равны:

$$y_{i\Psi} = r_i\ \xi(\lambda \Psi),\ i \in N. \qquad (15)$$

Пусть прибыль центра линейна по действиям агентов: $H(y) = \lambda \sum_{i \in N} y_i$. Тогда значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$\Phi_{\Psi} = (1 - n\ \Psi)\ W \lambda\ \xi(\lambda \Psi),$$

а сумма действий агентов равна: $Y_\Psi = W\,\xi(\lambda\Psi)$.

Выигрыш i-го агента равен:

$$f_{i\Psi} = W\,[n\ \Psi\,\lambda\ \xi(\lambda\Psi) - \varphi(\lambda\Psi)],\ i \in N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна:

$$\Sigma_\Psi = W\,[\lambda\ \xi(\lambda\Psi) - \varphi(\lambda\Psi)].$$

При квадратичных функциях затрат агентов оптимальная с точки зрения центра ставка равна: $\Psi^* = 1/2\ n$.

Сравнительный анализ. Таким образом, рассмотрены пять механизмов экономической мотивации. С точки зрения суммы полезностей всех участников системы и суммы действий агентов максимальной эффективностью обладают централизованный механизм и механизм налога на прибыль (с любой ставкой). Использование механизма отчислений или механизма с нормативом рентабельности приводит к меньшей эффективности.

При использовании механизма отчислений, механизма с нормативом рентабельности или механизма налога на прибыль в зависимости от параметров (соответственно – норматива отчислений, норматива рентабельности и ставки налога на прибыль) полезности центра и агентов перераспределяются по-разному по сравнению с централизованным механизмом (см. приведенные выше оценки).

Использование полученных результатов позволяет в каждом конкретном случае получать оценки параметров, при которых различные механизмы эквивалентны. Так, например, при квадратичных функциях затрат ($\alpha = 2$) оптимально следующее значение норматива отчислений (ставки налога с дохода): $\gamma^* = 0{,}5$. При $\rho^* = 1$ механизм с нормативом рентабельности полностью эквивалентен механизму отчислений, а при $\beta^* = 0{,}5$ механизм налога на прибыль эквивалентен им обоим с точки зрения центра, а при $\beta^* = 0{,}75$ – с точки зрения агентов (табл. 2.1).

Таблица 2.2

Параметры механизмов экономической мотивации при квадратичных затратах агентов

Механизм	Параметры			
	Φ / W	Y / W	Σ / W	$\sum_{i \in N} f_i / W$
Налог с дохода	$\lambda^2 / 4$	$\lambda / 2$	$3\lambda^2 / 8$	$\lambda^2 / 8$
Централизованный	$\lambda^2 / 2$	λ	$\lambda^2 / 2$	0
Норматив рентабельности	$\lambda^2 / (2(1+\rho))$	$\lambda / (1+\rho)$	$\lambda^2(1+2\rho) / (2\,(1+\rho)^2)$	$\lambda^2\rho / (2\,(1+\rho)^2)$
Налог на прибыль	$\beta\lambda^2 / 2$	λ	$\lambda^2 / 2$	$(1-\beta)\lambda^2 / 2$
Участие в прибыли	$\lambda^2 / (4n)$	$\lambda / (2n)$	$\lambda^2(2n-1) / (4n^2)$	$\lambda^2(n-1) / (4n^2)$

Таким образом, в настоящей главе приведены основные результаты исследования базовых математических моделей стимулирования (описание не вошедших в настоящую работу моделей стимулирования можно найти в: [24] – ОС с неопределенностью, [7, 17, 21, 26] – многоуровневые ОС, [10, 13, 30] – ОС с матричной структурой, [10] – ОС с коалиционным взаимодействием участников, [27] – динамические ОС).

ЛИТЕРАТУРА[1] К ГЛАВЕ 2

1 Бурков В. Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 255 с.

2 *Бурков В. Н., Заложнев А. Ю., Новиков Д. А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001. – 124 с.

[1] Работы, отмеченные звездочкой, можно найти в электронной библиотеке на сайте www.mtas.ru.

3 Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

4 *Бурков В. Н., Новиков Д. А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997. – 188 с.

5 *Бурков В. Н., Новиков Д. А. Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.

6 *Васильев Д. К., Заложнев А. Ю., Новиков Д. А., Цветков А. В. Типовые решения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 74 с.

7 *Воронин А. А., Мишин С. П. Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 210 с.

8 *Галинская Е.В., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели и механизмы управления развитием персонала. – М.: ИПУ РАН, 2005. – 68 с.

9 Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.

10 *Губко М. В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 118 с.

11 *Губко М. В., Новиков Д. А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.

12 *Заложнев А. Ю. Модели и методы внутрифирменного управления. – М.: Сторм-Медиа, 2004. – 320 с.

13 *Караваев А. П. Модели и методы управления составом активных систем. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 151 с.

14 *Кочиева Т. Б., Новиков Д. А. Базовые системы стимулирования. – М.: Апостроф, 2000. – 108 с.

15 Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. – М.: МГУ, 1984. – 104 с.

16 *Лысаков А. В., Новиков Д. А. Договорные отношения в управлении проектами. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 101 с.

17 *Мишин С. П. Оптимальные иерархии управления в социально-экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004. – 207 с.

18 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

19 *Новиков Д. А., Глотова Н. П. Модели и механизмы управления образовательными сетями и комплексами. – М.: ИУО РАО, 2004. – 142 с.

20 *Новиков Д. А. Институциональное управление организационными системами. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 68 с.

21 *Новиков Д. А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. – М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.

22 Новиков Д. А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. – М.: ИПУ РАН, 1998. – 68 с.

23 Новиков Д. А. Стимулирование в организационных системах. – М.: Синтег, 2003. – 312 с.

24 *Новиков Д. А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). – М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

25 *Новиков Д. А., Петраков С. Н. Курс теории активных систем. – М.: Синтег, 1999. – 108 с.

26 *Новиков Д. А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.

27 *Новиков Д. А., Смирнов И. М., Шохина Т. Е. Механизмы управления динамическими активными системами. – М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

28 Новиков Д. А. Теория управления организационными системами. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.

29 *Новиков Д. А., Цветков А. В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. – М.: Апостроф, 2000. – 184 с.

30 *Новиков Д. А., Цветков А. В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.

31 [*]Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Прикладные модели информационного управления. – М.: ИПУ РАН, 2004. – 130 с.

32 Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры. – М.: Синтег, 2003. – 160 с.

33 [*]Щепкин А. В. Механизмы внутрифирменного управления. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 80 с.

34 Mas-Collel A., Whinston M. D., Green J. R. Microeconomic theory. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

35 Myerson R. B. Game theory: analysis of conflict. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ: ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Обозначения:

A – множество допустимых действий агента;

A' – множество допустимых векторов действий агентов;

A_0 – множество допустимых результатов деятельности агентов;

$A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_i$ – множество допустимых обстановок игры для i-го агента;

$c(\cdot)$ – функция затрат агента;

δ – мотивирующая надбавка;

$f(\cdot)$ – целевая функция агента;

$\Phi(\cdot)$ – целевая функция центра;

i – номер агента (используется в качестве нижнего индекса у соответствующей переменной, например, y_i – действие i-го агента);

$H(\cdot)$ – функция дохода центра;

$K(\sigma)$ – эффективность системы стимулирования $\sigma(\cdot)$;

λ – ставка оплаты;

n – число агентов;

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов;

$P(\sigma)$ – множество решений игры (действий агента(ов), реализуемых системой стимулирования $\sigma(\cdot)$);

$Q(\cdot)$ – оператор агрегирования;

r – тип агента;

R – ограничение фонда заработной платы;

ρ – норматив рентабельности;

S – множество согласованных планов;

$\sigma(\cdot)$ – функция стимулирования;

Σ – значение суммы целевых функций всех участников организационной системы;

x – план или вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ планов;

x^* – оптимальный согласованный план;

y – действие агента или вектор $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ действий агентов;

y^* – действие агента, на котором достигается максимум его целевой функции;

$y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ – обстановка игры для i-го агента;

z – результат деятельности агента(ов).

Определения

$\mathrm{Arg}\max\limits_{x \in X} f(x) = \{x \in X \mid \forall x' \in X\ f(x') \le f(x)\}$ – множество максимумов функции $f(\cdot)$ на множестве X;

$\arg\max\limits_{x \in X} f(x)$ – значение аргумента, при котором достигается максимум функции $f(\cdot)$ на множестве X;

$g: X \to Y$ – функция $g(\cdot)$, отображающая множество X во множество Y;

$\max\limits_{x \in X} f(x)$ – максимальное значение функции $f(\cdot)$ на множестве X;

$\prod\limits_{i \in N} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – декартово произведение множеств;

$\Re_1$ – множество действительных чисел;

$\Re_1^+$ – множество неотрицательных действительных чисел.

Сокращения:

ГБ – гипотеза благожелательности;

КТВ – коэффициент трудового вклада;

КТУ – коэффициент трудового участия;

МГР – максимальный гарантированный результат;

ОС – организационная система;

РДС – равновесие в доминантных стратегиях;

ФЗП – фонд заработной платы;

ФОТ – фонд оплаты труда.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Васильева Оксана Николаевна – кандидат экономических наук, ассистент кафедры экономики Самарского государственного аэрокосмического университета.

E-mail: Ovasilyeva@mail.ru.

Иванов Дмитрий Юрьевич – кандидат экономических наук, доцент кафедры организации производства Самарского государственного аэрокосмического университета, заведующий лабораторией.

E-mail: ssau_ivanov@mail.ru.

Засканов Виктор Викторович – аспирант, врач-нейрохирург Самарской областной клинической больницы.

E-mail: zaskanov@yandex.ru.

Новиков Дмитрий Александрович – доктор технических наук, профессор, заместитель директора Института проблем управления Российской академии наук, профессор Московского физико-технического института.

E-mail: *novikov@ipu.ru, www.mtas.ru.*