Институт проблем управления РАН

Модели и методы мультипроектного управления

В.Н.Бурков, О.Ф.Квон, Л.А.Цитович

Москва, 1997 г.

Бурков В.Н., Квон О.Ф., Цитович Л.А.
МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МУЛЬТИПРОЕКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ
-М., 1997 (Препринт / Институт проблем управления). – 62 с.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с распределением ресурсов между несколькими независимыми проектами. Задача заключается в минимизации времени завершения всех проектов или взвешенной суммы времен завершения. Описываемый подход основан на представлении каждого проекта в виде отдельной операции (агрегирование). Затем решается задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций. Получив распределение ресурсов на каждом проекте, можно для каждого проекта решить задачу распределения ресурсов по операциям проекта. Дается описание методов распределения ресурсов по множеству независимых операций и методов агрегирования проектов. Рассмотрена также прикладная задача финансирования инвестиционных проектов.

Рецензент: д.т.н. Кульба В.В.

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие общества, экономики, предприятия, да и жизни отдельного человека можно представить себе как совокупность дискретных процессов с заданными конечными целями, протекающими в условиях ограниченного времени и ограниченных ресурсов. Человеку удобно делить процесс своей деятельности на локальные процессы. Проектами называются процессы изменений, то есть неповторяющиеся процессы, требующие для своей реализации специальных методов управления. Так Вы каждое утро делаете зарядку (должны делать). Это отработанный процесс, не требующий от Вас специальных усилий по организации. Это не проект. А вот освоение нового курса упражнений или новой системы занятий - это уже можно отнести к проектам. Ежедневный процесс выпуска продукции на предприятии тоже не называют проектом. А вот освоение новой продукции или технологии - проект. Конечно, не всегда различие столь очевидно. Так, например, строительство дома - это проект, а выпуск на комбинате типовых блочных домиков с установкой на месте не имеет смысла называть проектом.

В бывшем Советском Союзе управление проектами стало широко применяться в шестидесятых годах и называлось сетевым планированием и управлением. Дело в том, что основу методов управления проектами составляет представление проекта в виде сетевого графика, отражающего зависимость между различными работами (операциями) проекта. В семидесятых годах интерес к сетевым методам планирования и управления снизился, поскольку причины низкой эффективности многих проектов лежали глубже - в основах общественно-политического и экономического устройства государства.

В наши дни в России управление проектами переживает второе рождение. Создана Российская ассоциация управления проектами (СОВНЕТ), являющаяся членом Международной ассоциации управления проектами (ИНТЕРНЕТ). Ведется работа по подготовке менеджеров по управлению проектами, готовится к изданию отечественное руководство по управлению проектами.

Важный класс проектов составляют мультипроекты. Мультипроект, это проект, состоящий из нескольких, технологически независимых проектов, объединенных общими ресурсами (финансовыми и материальными). В работе рассматриваются методы и механизмы управления мультипроектами. В основе предлагаемого подхода лежит идея агрегированного описания проекта в виде отдельной операции. Имея агрегированные описания всех проектов, на первом этапе решается задача распределения ограниченного ресурсов в мультипроекте, как задача распределения ресурсов по множеству независимых операций. На втором этапе решаются независимые задачи распределения ресурса по каждому проекту отдельно.

В первой главе рассмотрена задача финансирования инвестиционных проектов, как типичный пример задачи мультипроектного управления. Задача распределения ресурсов по множеству независимых операций рассматривается во второй главе. В третей главе описан алгоритм оптимизации графика финансирования мультипроекта путем сдвига финансирования на более поздние моменты времени. Задача минимизации продолжительности мультипроекта для случая произвольных зависимостей скоростей агрегированных операций от количества ресурсов рассмотрена в четвертой главе. В пятой главе описаны методы оптимального распределения ресурсов по критерию упущенной выгоды, а в шестой рассмотрены методы агрегирования комплекса операций.

1. ЗАДАЧА ФИНАНСИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Инвестиционные проекты (например, проекты капитального строительства), как правило, технологически между собой не связаны. Зависимость между ними проявляется через общие финансовые ресурсы. Существуют различные постановки задач финансирования инвестиционных проектов. Рассмотрим некоторые из них, связанные с выбором портфеля проектов при различных схемах финансирования и учете риска.

Пусть имеются m проектов, удовлетворяющих необходимым условиям эффективности (коммерческой, бюджетной и экономической). Каждый проект представлен в агрегированном виде и описывается тремя показателями - требуемым объемом финансирования S_i, продолжительностью реализации T_i и ожидаемым доходом от проекта F_i.

Возможны различные источники финансирования проектов (собственные средства, кредит, ссуда под залог недвижимости, выпуск акций и т.д.). Мы рассмотрим задачу выбора портфеля проектов при использовании двух схем финансирования - за счет собственных средств и за счет кредитов.

Обозначим A - объем финансирования из собственных средств, S - общий объем финансирования. Если $S > A$, то разность $S - A$ финансируется за счет кредитов, что естественно увеличивает стоимость проекта. Обозначим $Э_i = F_i - S_i$ коммерческую эффективность проекта (приведенную к рассматриваемому периоду). Очевидно, что для всех проектов, удовлетворяющих необходимым условиям эффективности $Э_i > 0$.

Пусть Q - множество финансируемых проектов (портфель проектов),

$$F(Q) = \sum_{i \in Q} F_i \tag{1.1}$$

ожидаемый доход от пакета проектов,

$$L(S) = \begin{cases} S, & \text{если} \quad S \le A, \\ S + \alpha(S - A), & \text{если} \quad S \ge A \end{cases} \tag{1.2}$$

стоимость финансовых ресурсов с учетом процентов за кредит (α - процентная ставка),

$$Э(Q) = F(Q) - L(Q) \tag{1.3}$$

ожидаемая коммерческая эффективность портфеля Q. Задача заключается в выборе портфеля Q_0, имеющего максимальную эффективность - $Э(Q_0) = Э_{max}$.

Обозначим Q_1 оптимальное решение задачи

$$\sum_{i \in Q} (Э_i) \to \max \tag{1.4}$$

$$\sum_{i \in Q} S_i \le A, \tag{1.5}$$

а Q_2 - оптимальное решение задачи

$$\sum_{i \in Q} [Э_i - S_i] \to \max \tag{1.6}$$

$$\sum_{i \in Q} S_i \ge A. \tag{1.7}$$

<u>Теорема 1</u>. Максимальная эффективность

$$Э_{max} = \max [Э(Q_1), Э(Q_2)],$$

а оптимальный пакет

$$Q_0 = \begin{cases} Q_1, & \text{если } Э(Q_1) \ge Э(Q_2) \\ Q_2, & \text{если } Э(Q_2) \ge Э(Q_1) \end{cases}.$$

Доказательство. Очевидно, что решение задачи максимизации (1.3) можно свести к решению двух задач. В одной задаче объем финансирования не более A, а во второй - не менее A. Первая задача, это задача (1.4) - (1.5). Во второй задаче критерий (1.3) принимает вид

$$Э(Q) = F(Q) - S - \alpha(S - A) = \sum_{i \in Q} \left[Э_i - \alpha S_i \right] + \alpha A,$$

и задача его максимизации при условии $S \geq A$ эквивалентна задаче (1.6) - (1.7). Теорема доказана.

Задача (1.4) - (1.5) это известная задача о ранце, эффективно решаемая методом динамического программирования.

Опишем метод решения задачи (1.6) - (1.7).

Предварительно определяем множество D проектов, для которых $Э_i$ - $\alpha S_i \geq 0$. Эти проекты безусловно входят в решение задачи, так как добавление любого такого проекта увеличивает (1.6). Если $\sum_{i \in D} S_i \geq A$, то множество D определяет оптимальное решение задачи (1.6) - (1.7). Действительно, это решение является допустимым, а добавление любого проекта $j \notin D$ уменьшает целевую функцию (1.6). Пусть S(D) = $\sum_{i \in D} S_i < A$. Обозначим через δ разность δ = A - S(D), $\overline{D}$ - дополнение к множеству D, $\Delta i = \alpha Si - Эi$, $i \in \overline{D}$. Рассмотрим следующую задачу: определить множество $D_1 \subset \overline{D}$, такое что

$$\sum_{i \in D_1} \Delta_i \to \min \tag{1.8}$$

$$\sum_{i \in D_1} S_i \geq \delta. \tag{1.9}$$

Если D_1 - оптимальное решение этой задачи, то $D \cup D_1$ оптимальное решение задачи (1.6) - (1.7). Этот факт достаточно очевиден и следует из элементарных преобразований задачи (1.6) - (1.7) и того, что все проекты множества D входят в решение этой задачи.

Задачу (1.8) - (1.9) можно свести также к задаче о ранце, если искать не множество финансируемых проектов D_1, а множество нефинансируемых D_2. Поскольку

$$\sum_{i\in\overline{D}} S_i = \sum_{i\in D_1} S_i + \sum_{i\in D_2} S_i \text{ и}$$

$$\sum_{i\in\overline{D}} \Delta_i = \sum_{i\in D_1} \Delta_i + \sum_{i\in D_2} \Delta_i ,$$

то задача минимизации (1.8) эквивалентна задаче максимизации

$$\sum_{i\in D_2} \Delta_i \tag{1.10}$$

при условии

$$\sum_{i\in D_2} S_i \le \sum_{i\in\overline{D}} S_i - \delta. \tag{1.11}$$

Пример 1.1. Имеются четыре проекта, данные о которых приведены в таблице 1.1 ($\alpha = 1$).

Пусть А = 8.

I шаг. Решаем задачу о ранце. Обозначим $x_i = 1$, если проект i финансируется, и $x_i = 0$ в противном случае. Задача о ранце имеет вид:

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max$$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 8.$$

Ее решение в этом случае очевидно: $x_2 = x_3 = 1$, остальные $x_i = 0$, то есть $Q_1 = \{2, 3\}$, $Э(Q_1) = 8$.

II шаг. Проекты 1, 2 и 3 сразу входят в решение, то есть d = {1, 2, 3}. Так как $S_1 + S_2 + S_3 = 13 > 8$, то получено оптимальное решение, то есть $Q_2 = D$. Имеем

$$Э(Q) = Э_1 + Э_2 + Э_3 - \alpha(S_1 + S_2 + S_3 - 1) = 10$$

$$\max\,[Э(Q_1); Э(Q_2)] = Э(Q_2) = 10,$$

поэтому оптимальный портфель проектов $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, или $Q_0 = \{1, 2\}$, $Э(Q_0) = 10$.

Пусть теперь $\alpha = 1, 2$. В этом случае Δ_i уменьшаются и будут равны следующим величинам:

i	1	2	3	4

Таблица 1.1.

i	1	2	3	4
$Э_i$	7	5	3	5
S_i	6	4	3	7
D_i	1	1	0	-2
D_i	-0,2	0,2	-0,6	-3,4

Множество D содержит всего один проект d = {2}. Так как $S_2 = 4 < 8$, то решаем задачу о ранце (находим множество нефинансируемых проектов):

$$0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 3{,}4x_3 \to \max$$

$$6x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 12.$$

В данном случае решение также очевидно - $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$, или $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{2, 3\}$. Имеем:

$$Q_2 = D \cup D_1 = \{1, 2\}$$

$$Э(Q_2) = 7 + 5 - 1{,}2\cdot(6 + 4 - 8) = 9{,}6.$$

По-прежнему Э(Q2) > Э(Q1) и поэтому оптимальное решение $Q_0 = \{1, 2\}$, $Э(Q_0) = 9{,}6$. В более сложных случаях для решения задачи достаточно эффективным является метод динамического программирования. Для применения метода предварительно на плоскости строим систему координат, одна ось которой соответствует проектам, а вторая - объему финансирования. По оси проектов отмечаем номера проектов 1, 2, 3, 4. Из начала координат проводим две дуги - одна горизонтальная, в точку (1, 0), а другая - в точку $(1, S_1)$. Первая дуга означает, что проект 1 не финансируется, а вторая, - что он финансируется. Из каждой точки также проводим по две дуги, уже для второго проекта. Получаем уже четыре точки - (2, 0), $(2, S_1)$, $(2, S_2)$, $(2, S_1+S_2)$, соответствующие четырем возможным вариантам для двух первых проектов (если S1 = S2, то получаем три точки). Продолжая таким образом, получаем сеть, приведенную на рис. 1.1. Очевидно, что любой путь в сети из начальной вершины (0, 0) в конечные вершины соответствует некоторому портфелю проектов. И наоборот, любому портфелю проектов соответствует путь в сети, соединяющий начальную координату с какой-либо конечной вершиной.

Значение координаты по второй оси равно объему финансирования соответствующих портфелей. Примем длины горизонтальных дуг равными нулю, а длины наклонных дуг - эффективностям $Э_i$ соответствующих проектов. В этом случае длина пути будет равна эффективности F(Q) соответствующего портфеля Q. Следовательно, путь максимальной длины, соединяющий начало координат и точку (4, S) будет соответствовать портфелю максимальной эффективности, среди всех портфелей, требующих объема финансирования S. Таким образом, мы получаем оптимальные портфели при любых объемах финансирования. Если теперь из полученных величин максимальных эффективностей вычесть стоимость требуемых финансовых ресурсов L(S) и выбрать максимум из полученных разностей, то мы получим оптимальное решение задачи (1.3). Заметим, что описанный алгоритм можно применять для любых зависимостей L(S). На рис.1.1 длины дуг указаны в круглых скобках , а в вершинах указаны длины максимальных путей, ведущих в эти вершины. У конечных вершин сети рядом с ними указаны значения L(S) - S (со знаком минус) и разности F(Q) - L(S). Оптимальные варианты выделены. Естественно, мы получили те же портфели $Q_0 = \{1, 2, 3\}$ и $Q_0 = \{1, 2\}$.

Анализируя приведенные решения (рис 1.1) можно заметить любопытный парадокс. При финансировании проектов в объеме 11 мы получаем максимальную эффективность портфеля 10, что меньше, чем при меньшем финансировании в объеме 10. Парадокс в том, что если задать вопрос, в каком случае будет бóльшая эффективность оптимальных портфелей, - при финансировании в объеме 10 или в объеме 11 единиц, то любой здравомыслящий человек ответит, что чем больше объем

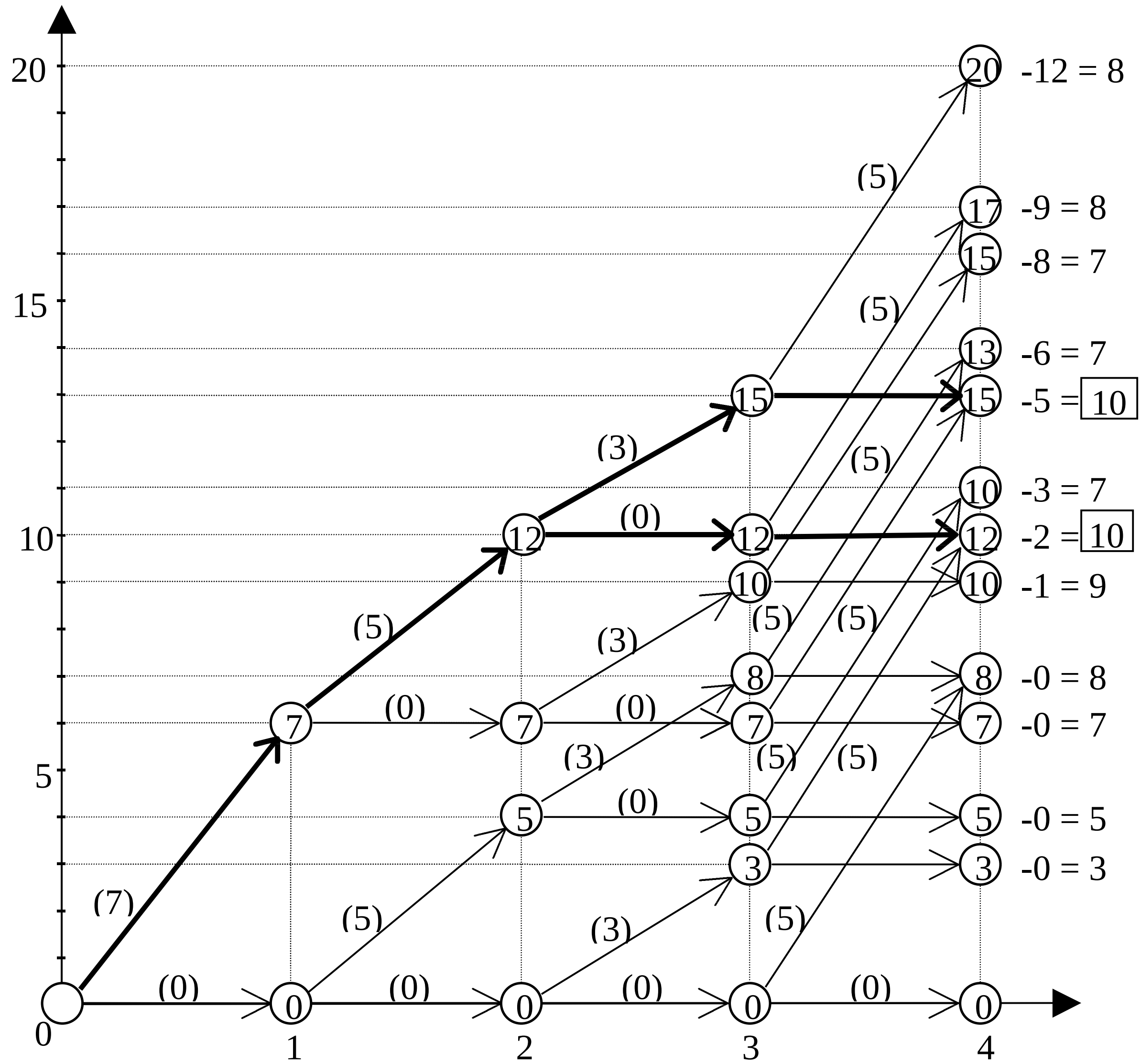

Рис. 1.1.

финансирования, тем больше эффективность оптимального при этом объеме портфеля!

Полученные значения Э(Q) при различных объемах финансирования выпишем в таблицу:

Таблица 1.2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Объем финансирования	3	4	6	7	9	10	13	17	20
Эффективность портфеля	3	5	7	8	10	12	15	17	20

Варианты, нарушающие монотонность (парадоксальные варианты) мы, естественно, не выписываем. Имея такую таблицу можно решать задачи выбора оптимального портфеля проектов при различных зависимостях стоимости финансовых ресурсов от объема финансирования, определяемых используемыми схемами финансирования.

Помимо затрат на реализацию проекта и его эффективности, важной характеристикой является надежность проекта или уровень риска. Под надежностью проекта будем понимать вероятность его реализации в требуемые сроки при выделенных ресурсах. При таком определении предполагается, что затраты на реализацию проекта в заданные сроки являются случайной величиной, имеющей функцию распределения P(S). Смысл этой величины в том, что она равна вероятности реализации проекта при объеме финансирования S.

Как правило, надежность проекта оценивается экспертами при нескольких значениях затрат с последующей аппроксимацией. Зная характеристики надежности проектов $P_i(S_i)$ (или риски $R_i (S_i) = 1 - P_i(S_i)$), можно оценить ожидаемый доход как произведение $F_i \cdot Pi(S_i)$. Поставим задачу определить объем финансирования проектов так, чтобы суммарный ожидаемый доход

$$F = \sum_{i=1}^{m} F_i P_i(S_i) \qquad (1.12)$$

был максимален при заданном объеме финансирования S. Сложность решения этой задачи связана с тем, что функции $P_i(S_i)$ не являются вогнутыми, а следовательно задача является многоэкстремальной.

Примем, что эксперты дают дискретные оценки надежности для любого проекта.

Задача достаточно эффективно решается методом динамического программирования. Для этого достаточно внести небольшие изменения при построении сети рисунка 1.1. А именно, вместо двух дуг (проект финансируется или не финансируется) необходимо ввести столько дуг, сколько вариантов финансирования данного проекта имеется. Соответственно, для каждой дуги следует задать длину, соответствующую ожидаемой эффективности при данном финансировании.

Пример 1.2. Рассмотрим этот метод решения на задаче 1.1, ограничившись тремя первыми проектами. Примем, что для каждого проекта имеются два варианта финансирования, один - с высоким риском, но с малым объемом финансирования, а другой - с низким риском, но, соответственно, с бóльшим объемом финансирования. Данные о проектах приведены в таблице 1.3.

Сеть возможных вариантов выбора портфеля приведена на рис . 1.2.

Таблица 1.3.

i	**1**		**2**		**3**	
	1	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
$\mathbf{F_i P_i}$	4	7	3	5	2	3
$\mathbf{S_i}$	3	6	2	4	1	3

В данном случае при $\alpha = 1$ получаем три оптимальных варианта, причем во всех вариантах финансируются все проекты, но по разному. В первом варианте проекты 1 и 2 получают максимальное финансирование, во втором максимальное финансирование получает только первый проект, а в третьем только второй. Таким образом рассмотренная задача позволяет выбрать максимальный диверсифицированный портфель проектов при различных схемах финансирования.

До сих пор мы предполагали, что риск проекта не зависит от выбранной схемы финансирования. Однако, во многих случаях выбор схемы финансирования существенно влияет на проектный риск. Особенно такая зависимость имеет место в случаях, когда финансирование осуществляется за счет выпуска ценных бумаг (например, организация

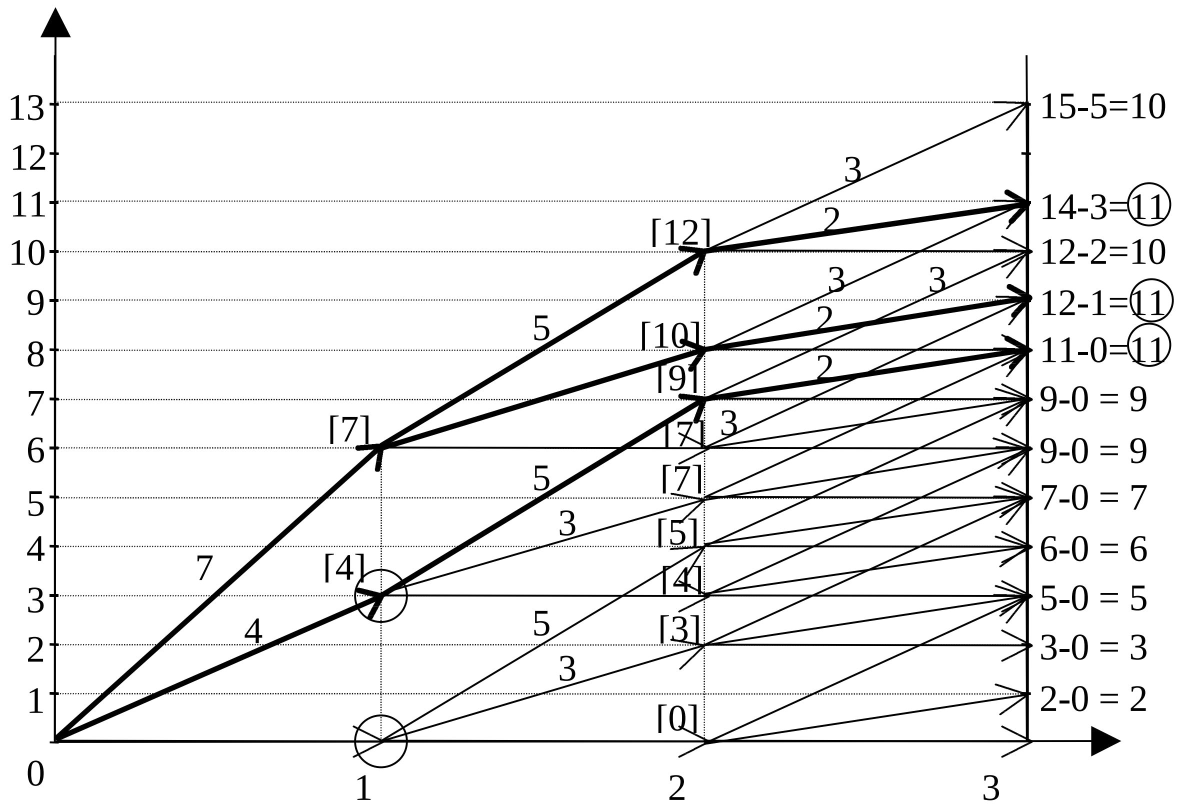

Рис. 1.2.

акционерного общества). В таких случаях кроме выбора пакета проектов и определения объема финансирования каждого проекта, необходимо определить схему его финансирования. Заметим, что под схемой финансирования мы понимаем не только способы получения средств на реализацию проекта (собственные средства, кредиты, выпуск ценных бумаг и т.д.) но и приоритетность финансирования объектов по этим способам. Рассмотрим простейшую задачу, когда имеется только один способ финансирования и определен портфель финансируемых проектов. Требуется определить приоритетность финансирования проектов в случае нехватки средств. Обозначим Φ(S) - функцию распределения объема финансовых ресурсов который можно использовать для финансирования проектов, S_i, как и ранее, объем финансирования i-го проекта. Если задана приоритетность проектов $(i_1,\ i_2,\ \ldots\ ,\ i_m)$, то вероятность полного финансирования проекта i_k определяется выражением

$$P_{i_k} = 1 - \Phi\left(\sum_{q=1}^{k} S_{i_q}\right). \qquad (1.13)$$

Ожидаемый доход при этом равен

$$\sum_{q=1}^{m} F_{i_q} P_{i_q} = \sum_{k=1}^{m} F_{i_k}\left[1 - \Phi\left(\sum_{q=1}^{k} S_{i_q}\right)\right].$$

Задача заключается в определении перестановки $\pi = (i_1,\ i_2,\ \ldots\ ,\ i_m)$, такой что величина

$$\sum_{k=1}^{m} F_{i_k} \cdot \Phi\left(\sum_{q=1}^{k} S_{i_q}\right)$$

минимальна. Эта задача аналогична задаче минимизации упущенной выгоды. В линейном случае, когда Φ = a + bS, оптимальная перестановка соответствует упорядочению по убыванию F_i / S_i (удельный доход).

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ ПО НЕЗАВИСИМЫМ ОПЕРАЦИЯМ

Рассмотрим мультипроект из n независимых проектов. Каждый проект в агрегированном виде описывается как операция двумя характеристиками - объем проекта W_i и зависимость скорости реализации проекта $w_i(t) = f_i(u_i(t))$ от количества ресурсов $u_i(t)$ в момент t. Объем проекта, скорость и момент его завершения T_i связаны соотношением:

$$\int_0^{T_i} f_i\left[u_i(t)\right]dt = W_i \tag{2.1}$$

Пусть задана величина ресурсов N(t) на реализацию мультипроекта. Задача заключается в распределении этих ресурсов по отдельным операциям так, чтобы мультипроект был реализован за минимальное время $T = \max_i T_i$. В случае, если N(t)=N в любой момент времени (равномерное поступление ресурсов во времени) и $f_i(u_i)$ - вогнутые функции u_i, задача распределения ресурсов детально исследована [1, 2, 3]. Показано, что оптимальное распределение ресурса имеет следующие свойства:

а) каждая операция выполняется при постоянном уровне ресурсов $u_i(t) = u_i$, $i = 1 \div n$, $t \in [0, T]$, а значит с постоянной скоростью;

б) все операции заканчиваются одновременно.

Если T - момент завершения всех операций, то $w_i = W_i/T$ постоянная скорость i-ой операции. Если обозначить через $\varphi_i(w_i)$ - функцию, обратную функции $f_i(u_i)$, то $u_i = \varphi_i(W_i/T)$ определяет количество ресурсов, требуемое для завершения операции i за время T. Минимальное время T определяется теперь из уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i\left(\frac{W_i}{T}\right) = N . \tag{2.2}$$

<u>Пример 1.1.</u> Пусть $f_i(u_i) = u_i^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $i = 1 \div n$. Тогда $\varphi_i(w_i) = w_i^{1/\alpha}$. Уравнение (1.2) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{W_i}{T}\right)^{1/\alpha} = N .$$

Решая это уравнение, получим:

$$T_{min} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} W_i^{1/\alpha}\right)^{\alpha}}{N^{\alpha}} .$$

Величина $W_э = \left(\sum_{i=1}^{n} W_i^{1/\alpha}\right)^{\alpha}$ называется эквивалентным объемом мультипроекта. Действительно, мультипроект можно представить в виде одной операции объема $W_э$ с такой же зависимостью $f(u) = u^{1/\alpha}$.

<u>Пример 1.2.</u> Пусть $f_i(u_i) = u_i/(u_i + a)$, $i = 1 \div n$. Уравнение (1.2) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{W_i a}{T - W_i} = N .$$

В данном случае для определения T_{min} применяются численные методы. Для случая двух операций решение можно получить в аналитическом виде, решая уравнение

$$\frac{W_1}{T - W_1} + \frac{W_2}{T - W_2} = \frac{N}{a}$$

Пусть N(t) - кусочно-постоянная функция времени, $N(t) = N_k$, $t \in [\tilde{T}_{k-1}, \tilde{T}_k)$, $k = \overline{1, p}$, $\tilde{T}_0 = 0$. Зафиксируем некоторые k и рассмотрим задачу о возможности реализации мультипроекта за время, не большее $\tilde{T}_k$. Обозначим x_{iq} объем i-ой операции, выполняемой в интервале q. Очевидно, что

$$\sum_{q=1}^{k} x_{iq} = W_i . \tag{2.3}$$

Поскольку в интервале $[T_{q-1}, T_q)$ ресурсы поступают равномерно, то величины $\{x_{iq}\}$ в оптимальном решении связаны соотношением:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(\frac{x_{iq}}{T_q} \right) = N_q , \quad q = \overline{1, k-1} , \quad T_q = \tilde{T}_q - \tilde{T}_{q-1}$$

а для последнего интервала имеет место следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(\frac{x_{ik}}{T} \right) = N_k , \; T = \tilde{T} - \tilde{T}_{k-1}$$

где T - время завершения всех операций.

Для получения необходимых условий оптимальности, применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеют вид:

$$L = \tilde{T} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{q=1}^{k} x_{iq} - W_i \right) + \sum_{q=1}^{k-1} \mu_q \left(\sum_{ii=1}^{n} \varphi_i \left(\frac{x_{iq}}{T_q} \right) - N_q \right) + \mu_k \left(\sum_{ii=1}^{n} \varphi_i \left(\frac{x_{ik}}{T} \right) - N_k \right)$$

,

где λ_i, μ_q - множители Лагранжа. Дифференцируя по x_{iq}, получим

$$\frac{\mu_q}{T_q} \varphi_i' \left(\frac{x_{iq}}{T_q} \right) = \lambda_i , \; q = \overline{1, k} , \tag{2.4}$$

при $q = k$, $T_q = T$.

Обозначим h_q вектор, с компонентами $h_{iq} = \varphi_i'(w_{iq})$, $i = \overline{1, n}$. Из (2.4) следует, что

$$h_q = \gamma_q h_1 , \quad q = \overline{2, k} \; , \; h_1 = \{h_i\} , \; \gamma_1 = 1$$

то есть вектор h является в определенном смысле инвариантным во времени (его направление не меняется от интервала к интервалу, а меняется только его длина).

Разрешая уравнение $h_{iq} = \varphi_i'(w_{iq})$ относительно w_{iq}, получим

$$w_{iq} = \xi_i (h_{iq}) = \xi_i (\gamma_q \cdot h_i)$$

$$u_{ik} = \varphi_i (w_{ik}) = \varphi_i \left[\xi_i (\gamma_k \cdot h_i) \right] .$$

Полученное свойство оптимального решения позволяет свести задачу распределения ресурсов к решению системы нелинейных уравнений с (n + k) неизвестными $\{h_i\}$, $i=\overline{1,n}$, $\{\gamma_q\}$, и T:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\left[\xi_i\left(\gamma_q\cdot h_i\right)\right]=N_q\ ,\ \ q=\overline{1,k} \tag{2.5}$$

$$\sum_{q=1}^{k-1}\xi_i\left(\gamma_q\cdot h_i\right)\cdot T_q+\xi_i\left(\gamma_k\cdot h_i\right)\cdot T=W_i\ ,\ \ i=\overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Операции мультипроекта будем называть однотипными, если w_i = $f(u_i)$, то есть если все операции имеют одинаковые зависимости скорости от ресурса.

Пример1.1. Пусть $w_i=\dfrac{u_i}{u_i+5}$, $i=\overline{1,n}$, T_1 = 10, N_1 = 25, N_2 = 60, w_1 = 20, w_2 = 26. Находим:

$$u_i=\varphi_i(w_i)=\frac{5w_i}{1-w_i}\ ,\quad i=\overline{1,n}$$

$$h_i(w_i)=\frac{5}{\left(1-w_i\right)^2}\ ,\quad i=\overline{1,n}\ .$$

Заметим, что инвариантность по направлению вектора h эквивалентна в данном случае инвариантности по направлению вектора (1-w). Поэтому

$$\left(1-w^2\right)=\gamma\cdot\left(1-w\right),$$

где через w обозначен вектор скоростей в первом интервале, а через γ - значение γ_q во втором интервале.

Выпишем систему уравнений:

$$\frac{5w_1}{1-w_1}+\frac{5w_2}{1-w_2}=25$$

$$\frac{5(1-\gamma(1-w_1))}{\gamma(1-w_1)} + \frac{5(1-\gamma(1-w_2))}{\gamma(1-w_2)} = 60$$

$$10w_1 + T[1-\gamma(1-w_1)] = 20$$

$$10w_2 + T[1-\gamma(1-w_2)] = 26.$$

Первые два уравнения после несложных преобразований приводятся к виду:

$$\frac{1}{1-w_1} + \frac{1}{1-w_2} = 7$$

$$\frac{1}{\gamma(1-w_1)} + \frac{1}{\gamma(1-w_2)} = 14 \qquad (2.7)$$

Сразу получаем, что $\gamma = ½$.

Решая два последних уравнения относительно w_1 и w_2 получаем:

$$w_1 = \frac{40-T}{20+T}; \quad w_2 = \frac{52-T}{20+T}.$$

Наконец, подставляя эти решения в уравнение (2.7), получаем квадратное уравнение относительно T:

$$2T^2 - 63T + 460 = 0,$$

корни которого - T = 20 и T = 11,5. Второй корень не подходит, поскольку w_2 не может быть больше 1. Окончательно получаем, что обе операции будут завершены за время

$$T_{min} = T_1 + T = 30 ,$$

причем скорости операций

$$w_{11} = 0,5 ; \qquad w_{21} = 0,8 ;$$

$$w_{12} = ½(1 + w_{11}) = 0,75 ; \quad w_{22} = ½(1 + w_{21}) = 0,9 .$$

Соответственно, оптимальное распределение ресурсов имеет вид:

$$u_{11} = \frac{5w_{11}}{1-w_{11}} = 5 ; \quad u_{21} = \frac{5w_{21}}{1-w_{21}} = 20;$$

$$u_{12} = \frac{5w_{12}}{1 - w_{12}} = 15\ ;\quad u_{22} = \frac{5w_{22}}{1 - w_{22}} = 45.$$

Предположим теперь, что функция $\xi(\gamma{\cdot}h)$ является мультипликативной, то есть

$$\xi(\gamma \cdot h) = \xi_1(\gamma) \cdot \xi_2(h).$$

В этом случае из инвариантности по направлению векторов h_q следует инвариантность по направлению векторов скоростей w_q. Это позволяет упростить систему уравнений (2.5), (2.6), записав ее в переменных $\{w_i\}$, $\{\gamma_q\}$ и T:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left[\gamma_q \cdot w_i\right] = N_q\ ,\quad q = \overline{1, k} \tag{2.8}$$

$$\sum_{q=1}^{k} \gamma_q w_i \cdot T_q = W_i\ ,\qquad i = \overline{1, n}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим два важных частных случая, когда зависимости скоростей от количества ресурсов описываются степенными или линейными функциями.

<u>Степенные зависимости скоростей от количества ресурсов</u>

Пусть $f_i(u_i) = u_i^{\alpha}$, $i = \overline{1, n}$, $0<\alpha<1$. Имеем $u_i = \varphi_i(w_i) = w_i^{1/\alpha}$, $h_i(w_i) = \varphi_i'(w_i) = 1/\alpha\ w_i^{1-\alpha/\alpha}$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае вектор h коллинеарен вектору w и поэтому инвариантность вектора скоростей по направлению очевидна.

Заметим, что $\{x_{iq}\}$, N_q и T_q связаны соотношением:

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{iq}^{1/\alpha}\right)^{\alpha}}{N_q^{\alpha}} = T_q,\quad q = \overline{1, k}.$$

Назовем величину $X_q = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{iq}^{1/\alpha} \right)^{\alpha}$ эквивалентным объемом работ в q-ом интервале, N_q^{α} - эквивалентной скоростью выполнения этих работ. Если изобразить фазовое пространство состояний в q-ом интервале (рис. 2.1), то любому процессу выполнения работ в q-ом интервале соответствует некоторая траектория, соединяющая начало координат с точкой $X_q = \{x_{iq}\}$, соответствующей окончанию всех работ в q-ом интервале.

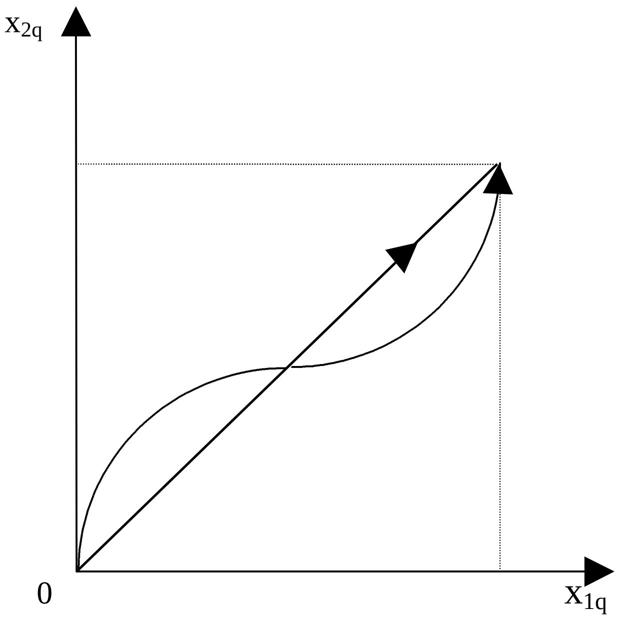

Рис. 2.1

Движение по этой траектории происходит со скоростью N_q^{α}, а расстояние между двумя точками x_q^1 и x_q^2 равно:

$$\rho\left(x_q^1, x_q^2\right) = \left[\sum_i \left| x_{iq}^1 - x_{iq}^2 \right|^{1/\alpha} \right]^{\alpha}.$$

Как известно, кратчайшей траекторией, соединяющей любые две точки, является прямая, поэтому оптимальному распределению ресурсов соответствует прямая, соединяющая точку 0 с точкой x_q.

Рассмотрим теперь фазовое пространство состояний всего комплекса операций. Аналогично случаю одного интервала, любому процессу выполнения операций соответствует кривая, соединяющая точку 0 с точкой W, движение по которой происходит со скоростью N_q^{α}, $q = \overline{1,k}$. Поэтому оптимальному распределению ресурса соответствует прямая, соединяющая точку 0 с точкой W. Длина этой прямой называется эквивалентным объемом мультипроекта $W_э$. Это и есть свойство инвариантности вектора скоростей по направлению для рассматриваемого случая. Чтобы определить минимальное время завершения всех операций, необходимо сначала найти минимальное k, такое, что

$$\sum_{q=1}^{k} N_q^{\alpha} \cdot T_q < W_э$$

$$\sum_{q=1}^{k+1} N_q^{\alpha} \cdot T_q \geq W_э.$$

Величина минимального времени реализации проекта определяется выражением:

$$T_{min} = \sum_{q=1}^{k} T_q + \frac{W_э - \sum_{q=1}^{k} N_q^{\alpha} \cdot T_q}{N_{k+1}^{\alpha}}.$$

Так как $x_{iq} = \gamma_q W_i$, то $x_q^э = \gamma_q W_э$. Величина γ_q (это доля эквивалентного объема, выполняемая в q-ом интервале) определяется выражением:

$$T_{min} = \sum_{q=1}^{k} T_q + \frac{W_э - \sum_{q=1}^{k} N_q^{\alpha} \cdot T_q}{N_{k+1}^{\alpha}}.$$

Пример 1.2. Мультипроект состоит из трех проектов, объемы которых - $W_1 = 3$, $W_2 = 4$, $W_3 = 10$. Зависимости скоростей соответствующих операций от количества ресурсов имеют вид $f_i(u_i) = \sqrt{u_i}$, i = 1, 2, 3. Поквартальное финансирование планируется в следующих объемах - $N_1 = 1$ ($T_1 = 3$ мес.), $N_2 = 4$ ($T_2 = 3$ мес.), $N_3 = 9$ ($T_3 = 3$ мес.), $N_4 = 1$ ($T_4 = 3$ мес.). Удастся ли завершить все проекты в третьем квартале? Определим эквивалентный объем мультипроекта:

$$W_э = \sqrt{3^2 + 4^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}.$$

Эквивалентная скорость $w_э = \sqrt{N_q}$ и равна $w_{э1} = 1$ в первом квартале, $w_{э2} = 2$ - во втором, $w_{э3} = 3$ - в третьем. Проверим возможность реализации проекта в третьем квартале.

$$w_{э1} \cdot T_1 + w_{э2} \cdot T_2 + w_{э3} \cdot T_3 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18 > W_э,$$

поэтому реализация проекта в третьем квартале возможна. Для более точной оценки определим

$$T_{min} = 6 + \frac{W_э - 9}{3} = 6 + \frac{5\sqrt{5} - 9}{3} \approx 6\frac{5}{6}.$$

Таким образом, мультипроект будет завершен в конце июля.

Линейные зависимости скоростей от количества ресурсов

Случай линейных зависимостей скоростей операций от количества ресурсов широко распространен, поскольку пропорциональность объема выполненных работ количеству ресурсов довольно часто имеет место с достаточной для практики точностью. Пусть

$$w_i = f_i(u_i) = \begin{cases} u_i, & \text{если } u_i \le a_i \\ a_i, & \text{если } u_i \ge a_i \end{cases}.$$

Обозначим, как и ранее, x_{iq} - объем работ i-го проекта, выполняемых в q-ом интервале. Рассмотрим задачу о возможности реализации проекта в первых k интервалах. Эта задача сводится к проверке существования решений следующей системы линейных неравенств:

$$\sum_i x_{iq} \le N_q T_q, \quad q = \overline{1, k}$$

$$\sum_q x_{iq} \ge W_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$x_{iq} \le a_i \cdot T_q, \; i = \overline{1, n}, \; q = \overline{1, k}.$$

Необходимым условием существования решения этой системы является, очевидно, следующее:

$$\sum_q N_q T_q \geq \sum_i W_i = W.$$

Покажем, что если $w_i = \gamma a_i$, $i = \overline{1,n}$, то это условие является достаточным. Действительно, возьмем решение $x_{iq} = a_i \cdot T_q \dfrac{N_q}{A}$, $i = \overline{1,n}$, $q = \overline{1,k}$. Покажем, что это решение является допустимым. Имеем:

$$\sum_i x_{iq} = N_q T_q$$

$$\sum_q x_{iq} = \frac{a_i}{A} \sum_q N_q T_q = \frac{W_i}{W} \sum_q N_q T_q \geq W_i,$$

так как $\sum_q N_q T_q \geq W$.

Доказанное свойство позволяет предложить эффективный алгоритм решения задачи. Сначала упорядочим все операции по убыванию величин $\rho_i = W_i / a_i$. Все операции с одинаковыми ρ_i объединим в одну операцию с объемом, равным сумме объемов, и с величиной a, равной сумме соответствующих a_i. Пусть после такого преобразования осталось m операций с различными значениями ρ_i, пронумерованными по убыванию ρ_i, то есть $\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_m$.

<u>1 шаг</u>. Рассматриваем первый интервал и распределяем ресурс в объеме N_1T_1 так, чтобы максимально выровнять числа $\{\rho_i\}$. Для этого определяем $\mathbf{l}$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{l}-1} a_i < N_1$$

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{l}} a_i \geq N_1$$

Определяем $u_c = N_1 - \sum_{i=1}^{\mathbf{l}-1} a_i$, $t_i = \min_{i<\mathbf{l}}(\rho_i - \rho_{\mathbf{l}+1})$

$$\rho = \min\left(T_1; t_1; (\rho_{\mathbf{l}} - \rho_{\mathbf{l}+1})\frac{a_{\mathbf{l}}}{u_{\mathbf{l}}}\right),$$

и полагаем

$$x_{i1} = \begin{cases} W_i - \rho a_i,\ i = \overline{1, \mathbf{l}-1} \\ W_{\mathbf{l}} - \rho u_{\mathbf{l}},\ i = \mathbf{l} \\ 0, \quad i = \overline{\mathbf{l}+1,\ m} \end{cases}.$$

Все операции с одинаковыми r_i снова объединяем в одну и рассматриваем второй интервал аналогичным образом, и т.д.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАФИКА ФИНАНСИРОВАНИЯ МУЛЬТИПРОЕКТА

Пусть зависимости $f_i(u_i)$ являются вогнутыми функциями количества ресурсов u_i. В этом случае при заданном общем объеме финансирования на отрезке [0, T] максимум объема выполненных работ достигается при равномерном поступлении средств. Чтобы доказать этот факт, рассмотрим два периода длительности T_1 и T_2 с уровнями финансирования в них, соответственно, N_1 и N_2. Пусть $u^1 = \{u_i^1\}$ и $u^2 = \{u_i^2\}$ - распределение ресурсов в этих периодах. Соответственно по i-ому проекту будет выполнен объем работ

$$f_i(u_i^1) \cdot T_1 + f_i(u_i^2) \cdot T_2.$$

Пусть теперь финансирование в объеме $N_1T_1 + N_2T_2$ осуществляется равномерно на отрезке $[0; T_1+T_2]$ с уровнем финансирования в единицу времени

$$N = \frac{N_1T_1 + N_2T_2}{T_1 + N_2}.$$

Рассмотрим следующее распределение ресурсов N по проектам

$$u_i = \frac{T_1}{T_1 + T_2} u_i^1 + \frac{T_2}{T_1 + T_2} u_i^2,$$

то есть, распределение ресурсов *u* есть выпуклая линейная комбинация распределений u^1 и u^2. В силу вогнутости функций $f_i(u_i)$ имеем:

$$f_i\left(u_i\right) = f_i\left(\frac{T_1}{T_1 + T_2} u_i^1 + \frac{T_2}{T_1 + T_2} u_i^2\right) \geq \frac{T_1}{T_1 + T_2} f_i\left(u_i^1\right) + \frac{T_2}{T_1 + T_2} f_i\left(u_i^2\right).$$

Таким образом, объем работ, выполненных в двух периодах при равномерном поступлении средств $f_i(u_i)(T_1 + T_2)$ не меньше (строго больше при строго вогнутых зависимостях) объема работ при неравномерном поступлении средств. Доказанный факт позволяет оптимизировать график поступления ресурсов, делая поступления ресурсов более равномерными. Это достигается за счет сдвига финансирования на более поздние периоды.

Так, если $N_1 > N_2$, то ресурс в количестве

$$\Delta N = N_1 - \frac{T_1 N_1 + T N_2}{T_1 + T} = \frac{T}{T_1 + T}\left(N_1 - N_2\right)$$

целесообразно перенести из первого периода во второй. Здесь T - неизвестная продолжительность мультипроекта во втором периоде. Опишем алгоритм выравнивания графика поступления ресурсов в k периодах при заданных величинах $\left\{T_q\right\}$, $q = \overline{1, k}$.

<u>1 шаг</u>. Находим период p, начиная с которого количество ресурса уменьшается от периода к периоду до некоторого периода **l**, то есть

$$N_{p-1} < N_p > N_{p+1} > \ldots > N_{\mathbf{l}} < N_{\mathbf{l}+1}.$$

Определяем

$$N\left(p_1 \mathbf{l}\right) = \frac{\sum\limits_{q=p}^{\mathbf{l}} N_q \cdot T_q}{\sum\limits_{q=p}^{\mathbf{l}} T_q}$$

и полагаем $\tilde{N}_q = N\left(p_1 \mathbf{l}\right)$ для всех $q = \overline{p, \mathbf{l}}$. Все периоды с равными $\tilde{N}_q$ объединяем в один. Для нового графика процедуру повторяем, если найдется участок с уменьшающимися уровнями N_q.

<u>Пример</u>. Пусть k = 5. Значения N_q, $q = \overline{1, 5}$, приведены ниже:

q	1	2	3	4	5
N_q	15	10	7	9	12
T_q	2	3	4	3	2

1 шаг. Участок с уменьшающимися уровнями N_q включает периоды с 1 по 3. Вычисляем:

$$N(1,3) = \frac{30+30+28}{9} = 9\frac{7}{9}.$$

Получаем следующий график поступления ресурсов (после объединения периодов с 1 по 3 в один):

q	1	2	3
N_q	$9\frac{7}{9}$	9	12
T_q	9	3	2

2 шаг. Находим новый участок с уменьшающимися уровнями N_q. Это участок из двух периодов 1 и 2. Вычисляем:

$$N(1,2) = \frac{88+27}{12} = 9\frac{7}{12}.$$

Окончательно оптимизированный график расхода средств имеет вид:

q	1	2
N_q	$9\frac{7}{12}$	12
T_q	12	2

Рассмотрим задачу оптимального распределения ресурсов с учетом выравнивания графика их расхода. Сначала решаем задачу для исходного графика поступления ресурса. Определяем минимальное время Δ_0 завершения мультипроекта. Производим оптимизацию графика поступления ресурса и с новым графиком снова решаем задачу оптимального распределения ресурса. Пусть Δ_1 минимальная продолжительность мультипроекта в этой задаче. Если $\Delta_1 < \Delta_0$, то процедуру повторяем.

Пример (случай степенных зависимостей). Как было показано ранее, в случае степенных зависимостей можно определить эквивалентный объем мультипроекта

$$W_э = \left(\sum_{i=1}^{n} W_i^{1/\alpha} \right)^{\alpha}.$$

Пусть число периодов равно 2, причем $T_1 = 7$, $T_2 = 9$, $N_1 = 25$, $N_2 = 9$. Возьмем $\alpha = 1/2$ и $W_э = 62$. Продолжительность мультипроекта, как нетрудно проверить, $\Delta_0 = T_1 + T_2 = 16$.

Определяем график с равномерным поступлением ресурса на отрезке $[0, \Delta_0]$. Уровень ресурса равен:

$$N(0, \Delta_0) = \frac{T_1 N_1 + T_2 N_2}{T_1 + T_2} = 16.$$

Определяем новую продолжительность проекта:

$$\Delta_1 = \frac{W_э}{\sqrt{N(0, \Delta_0)}} = \frac{62}{4} = 15{,}5.$$

Строим график с равномерным поступлением ресурса на отрезке $[0, \Delta_1]$:

$$N(0, \Delta_0) = \frac{T_1 N_1 + (\Delta_1 - T_1) N_2}{\Delta_1} = \frac{175 + 8{,}5 \cdot 9}{15{,}5} = 16\frac{7}{31}.$$

Новая продолжительность мультипроекта :

$$\Delta_2 = \frac{W_э}{\sqrt{N(0, \Delta_0)}} = \frac{62\sqrt{31}}{\sqrt{503}}.$$

Описанный алгоритм можно представить графически (рис. 3.1).

На рисунке 3.1 изображены два графика. Один дает зависимость продолжительности мультипроекта Δ от уровня ресурса N (при его равномерном использовании):

$$\Delta = \frac{W_э}{\sqrt{N}} = \frac{62}{\sqrt{N}},$$

а второй - уровень равномерного поступления ресурса на отрезке $[0, \Delta]$:

$$N = \frac{25 \cdot T_1 + 9\left(\Delta - T_1\right)}{\Delta} = 9 + \frac{112}{\Delta}.$$

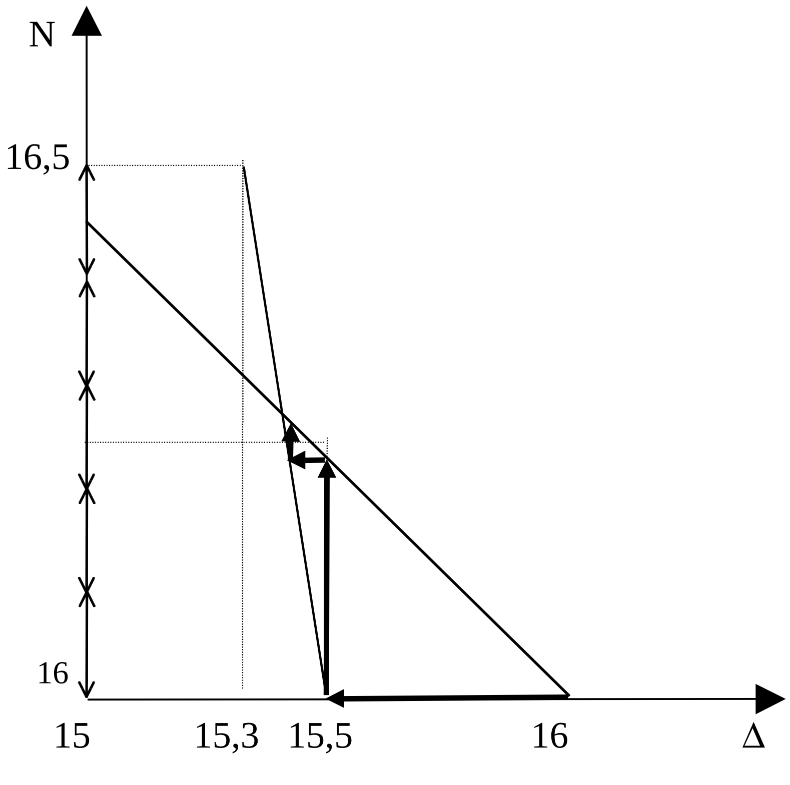

Рис. 3.1.

Пересечение этих графиков определяет минимальную продолжительность проекта и уровень равномерного использования ресурса при этой продолжительности. Толстыми линиями показаны шаги приведенного алгоритма. Как видно на рисунке 3.1, процесс сходится к оптимальному решению с достаточной для практики скоростью.

Пример (линейный случай).

Для линейного случая выравнивание использования ресурса целесообразно, если имеются периоды его неполного использования, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < N_k .$$

Очевидно, что этот неиспользуемый ресурс необходимо перенести на более поздние периоды, в которых ресурса не достаточно. Пусть, например, графики поступления ресурса имеют вид:

k	1	2	3	4	5
T_k	2	3	3	2	4
N_k	2	18	5	4	6
$T_k N_k$	4	54	15	8	24

Данные о проектах приведены ниже:

i	1	2	3	4	5	6
W_i	10	15	8	7	12	18
a_i	2	3	1	1	3	2
t_i	5	5	8	7	4	9

Видно, что во втором периоде имеется избыток ресурса в объеме (18 - 12)·3 = 18. Переносим его в третий период, добавляя к уровню N_3 величину 18/3 = 6. В процессе распределения ресурса, когда некоторые операции уже выполнены, ситуация избытка ресурса может возникнуть снова. Этот избыток также переносится на более поздние периоды, в которых имеется дефицит ресурса.

1 шаг. Начинаем операцию 6, имеющую максимальную степень критичности. Однако, через Δ = 1 степени критичности операций 3 и 6 сравниваются, поэтому распределяем ресурс по операциям 3 и 6:

$$u_3 = \frac{2}{3}; \quad u_6 = \frac{4}{3}.$$

Имеем:

$$x_{31} = \frac{2}{3}, \quad x_{61} = 2 + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

2 шаг. Выполняем все проекты с максимальной скоростью. Имеем:

$$x_{12} = 6, \quad x_{22} = 9, \quad x_{32} = 3, \quad x_{42} = 3, \quad x_{52} = 9, \quad x_{62} = 6.$$

3 шаг. Поскольку $\tilde{N}_3 = 11$, то все проекты выполняются с максимальной скоростью $w_i = a_i$, кроме проекта 5, для которого $u_5 = 2$. Полностью завершаются проекты 1, 2 и 5. Поэтому образуется избыток ресурса в объеме 8 ед., который переносим в четвертый период, увеличив N_4 до $\tilde{N}_4 = 8$.

4 шаг. В четвертом периоде также избыток ресурсов, поскольку не выполнены только проекты 3, 4 и 6. Время завершения комплекса равно

$$T_{зав} = \sum_{k=1}^{3} T_k + 1\frac{1}{3} = 9\frac{1}{3}$$

и определяется моментами окончания 3-го и 6-го проектов.

4. МИНИМИЗАЦИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ МУЛЬТИПРОЕКТА. Общий случай

В предыдущих разделах мы рассмотрели задачу минимизации продолжительности мультипроекта для случая вогнутых зависимостей скорости проекта от количества ресурсов. Рассмотрим теперь общий случай.

Пусть $f_i(u_i)$ - произвольные, ограниченные, непрерывные справа функции, такие что $f_i(0) = 0$. Определим множество Y - пар (u, w) - следующим образом:

$$Y_i = \{(u_i, w_i) > 0: \quad w_i \le f_i(u_i)\}. \tag{4.1}$$

Заметим, что если $f_i(u_i)$ - вогнутая функция, то Y_i - выпуклое множество. В общем случае множество Y_i не является выпуклым. Построим выпуклую оболочку этого множества, то есть выпуклое множество $\tilde{Y}_i$ такое, что любая его точка представима в виде выпуклой линейной комбинации точек множества Y_i. Граница $\tilde{f}_i(u_i)$ этого множества, очевидно, является вогнутой функцией. Рассмотрим задачу минимизации продолжительности мультипроекта, в котором скорости проектов определяются зависимостями $\{\tilde{f}_i(u_i)\}$. Поскольку это вогнутые функции, то применяя методы, описанные в разделах 2 и 3, можно определить оптимальное распределение ресурсов $\{u_i^0\}$ и минимальную продолжительность T_m мультипроекта.

Теорема 2. Минимальная продолжительность мультипроекта равна T_m.

Доказательство. Ранее было показано, что в случае вогнутых зависимостей $\{f_i(u_i)\}$ в каждом интервале постоянства уровня ресурсов, все проекты выполняются с постоянной скоростью. Обозначим w_{ik}^{0} - скорость, u_{ik}^{0} - количество ресурсов на i-ом проекте в k-ом интервале. Поскольку точка $\{u_{ik}^{0},\ w_{ik}^{0}\} \in Y_i$, то найдутся точки $\{u_{ik}^{1},\ w_{ik}^{1}\}$, $\{u_{ik}^{2},\ w_{ik}^{2}\}$ и $0 \le \alpha \le 1$, $u_{ik}^{1} \le u_{ik}^{2}$, такие что

$$u_{ik}^{0} = \alpha u_{ik}^{1} + (1-\alpha)u_{ik}^{2}$$

$$w_{ik}^{0} = \alpha w_{ik}^{1} + (1-\alpha)w_{ik}^{2}.$$

Построим следующее распределение ресурса на проекте i в интервале k:

$$u_{ik}(t) = \begin{cases} u_{ik}^{1}, & \Delta_{k-1} \le t < \Delta_{k-1} + \alpha T_k \\ u_{ik}^{2}, & \Delta_{k-1} + \alpha T_k \le t < \Delta_k \end{cases}. \qquad (4.2)$$

Содержательно это означает, что часть αT_k интервала k проект выполняется с количеством ресурса u_{ik}^{1}, меньшим оптимального, а часть $(1-\alpha)T_k$ - с бо́льшим оптимального. При этом, не израсходованный в интервале $[\Delta_{k-1}, \Delta_{k-1}+\alpha T_k)$ ресурс переносится в интервал $[\Delta_{k-1}+\alpha T_k, \Delta_k)$, так что общий объем используемого ресурса не меняется. Действительно,

$$u_{ik}^{1} \cdot \alpha T_k + u_{ik}^{2} \cdot (1-\alpha)T_k = u_{ik}^{0} \cdot T_k.$$

Таким образом, распределение ресурса $u_{ik}(t)$ является допустимым.

Покажем, что при новом распределении ресурсов в интервале k будет выполнен тот же самый объем работ по проекту i. Действительно:

$$w_{ik}^{1} \cdot \alpha T_k + w_{ik}^{2} \cdot (1-\alpha)T_k = w_{ik}^{0} \cdot T_k.$$

Выполняя описанное преобразование всякий раз, когда точка $(u_{ik}^{0},\ w_{ik}^{0})$ не принадлежит множеству Y_i, мы получили допустимое распределение ресурсов с тем же сроком завершения мультипроекта. Поскольку T_m

является оценкой снизу продолжительности мультипроекта, то T_m - минимальная продолжительность мультипроекта. Теорема доказана.

Пример 4.1. Пусть зависимости скорости проекта от количества ресурсов являются выпуклыми функциями при $u_i \le a_i$ и равны $f_i(a_i)$ при $u_i \ge a_i$ (рис. 4.1).

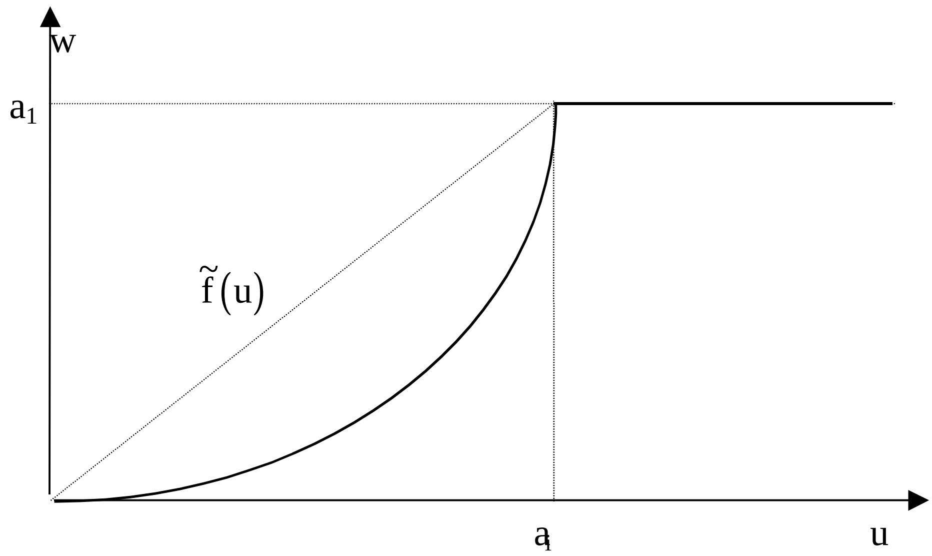

Рис. 4.1.

В этом случае зависимость $\tilde{f}_i(u_i)$ всегда будет иметь вид:

$$\tilde{f}_i(u_i) = \begin{cases} u_i, & u_i \le a_i \\ a_i, & u_i \ge a_i \end{cases}, \text{ при объеме } \tilde{w}_i = \frac{w_i a_i}{f_i(a_i)}.$$

Мы получили задачу распределения ресурсов для случая линейной зависимости скорости от количества ресурсов, рассмотренную в разделе 1.

Таким образом, в этом случае всегда существует план реализации мультипроекта, в котором каждый проект выполняется за время $\tau_i = \tilde{W}_i / a_i$ при уровне ресурсов на нем $u_i = a_i$. Продолжительность мультипроекта в случае, если уровень ресурсов постоянен и равен N определяется выражением:

$$T_m = \max\left\{\frac{W_э}{N};\ \max_i \tau_i\right\},$$

где $W_э = \sum_{i=1}^{n} \tilde{W}_i$. При этом, всегда существует план, в котором все проекты выполняются без перерывов. Чтобы получить такой план, достаточно определить моменты начала проектов следующим образом:

$$t_i^{H} = T_m - \tau_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если теперь сдвигать проекты максимально влево в очередности убывания степеней критичности $\{\tau_i\}$, то получим левосдвинутый оптимальный план реализации мультипроекта.

Пример 3.1. Данные о проектах приведены в таблице:

Таблица 3.1.

i	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{W_i}$	12	15	18	12	9
$\boldsymbol{a_i}$	2	3	4	3	6
$\boldsymbol{t_i}$	6	5	4,5	4	1,5

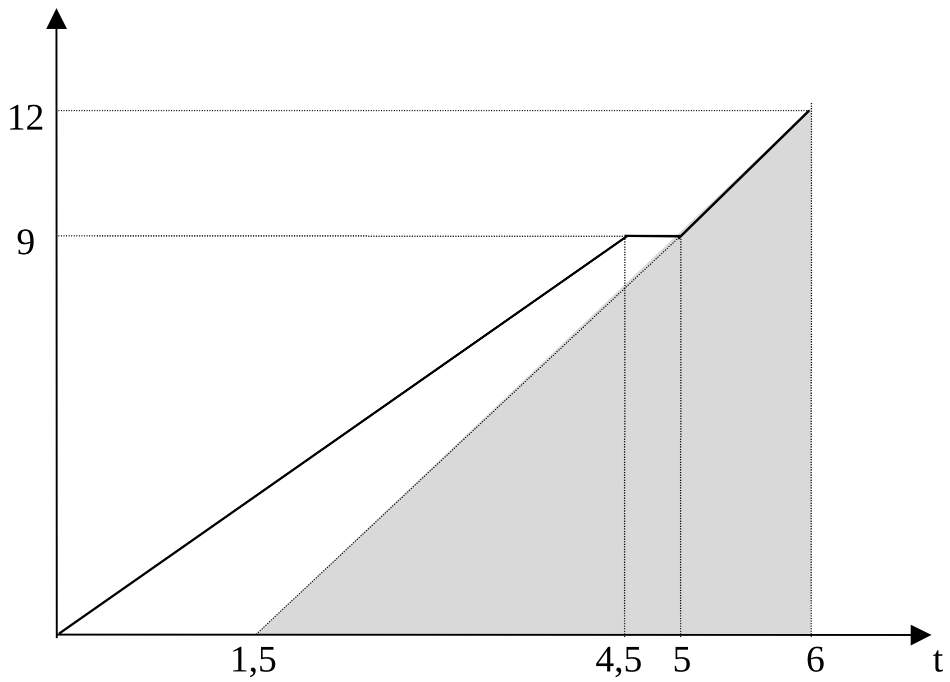

Рис. 4.2.

Пусть N = 11. Тогда

$$T_m = \frac{W_э}{N} = \frac{66}{11} = 6.$$

Мы можем начать проекты 1, 2 и 3 сразу, в момент t = 0. Определим самый ранний момент начала проекта 4. Для этого построим интегральный график наличия свободного ресурса при условии, что проекты 1, 2 и 3 начинаются в момент t_0, а проект 5 в момент t = 4,5 (рис. 4.2). Этот ресурс можно использовать для проекта 4.

Закрашенный треугольник это график использования ресурса на проекте 4. Легко видеть, что сдвиг влево этого треугольника невозможен. Аналогично пятый проект также не может быть начат раньше момента $t_5^н = 4,5$.

5. МИНИМИЗАЦИЯ УПУЩЕННОЙ ВЫГОДЫ

До сих пор мы рассматривали задачу минимизации продолжительности мультипроекта, то есть завершения всех проектов за минимальное время. Однако, не менее важна другая задача. Дело в том, что каждый проект после его завершения дает фирме определенный доход. Задержка в сроках реализации проектов ведет к уменьшению дохода (Упущенной выгоде). Пусть i-ый проект дает после завершения доход c_i в единицу времени. Тогда упущенная выгода при завершении i-го проекта в момент t_i составит $c_i t_i$, а суммарная упущенная выгода равна

$$C = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \,. \qquad (5.1)$$

Рассмотрим задачу распределения ресурсов по проектам таким образом, чтобы минимизировать (5.1), то есть упущенную выгоду.

Пример 5.1. Пусть мультипроект состоит из двух проектов, объемы которых W_1 и W_2, а скорости - $w_1 = \sqrt{u_1}$ и $w_2 = \sqrt{u_2}$. Если первый проект завершается в момент t_1, то $u_1 = (W_1/t_1)^2$, $u_2 = N - (W_1/t_1)^2$. За время t_1 будет выполнен объем работ

$$t_1\sqrt{u_2} = t_1\sqrt{N - \left(\frac{W_1}{t_1}\right)^2}$$

второго проекта, а в целом второй проект будет завершен в момент

$$t_2 = t_1 + \frac{W_2 - t_1\sqrt{N - \left(\frac{W_1}{t_1}\right)^2}}{\sqrt{N}} = t_1 + \tau_2 - \sqrt{t_1^2 - \tau_1^2}\,,$$

где $\tau_1 = W_1/\sqrt{N}$, $\tau_2 = W_2/\sqrt{N}$ - минимальные продолжительности проектов. Упущенная выгода составит

$$c_1t_1 + c_2t_2 = (c_1 + c_2)t_1 + c_2\tau_2 - c_2\sqrt{t_1^2 - \tau_1^2}\ . \qquad (5.2)$$

Найдем t_1, минимизирующее (5.2)

$$t_1 = \frac{1+\beta}{\sqrt{\beta(2+\beta)}}\tau_1,\ \text{где}\ \beta = \frac{c_1}{c_2}.$$

При этой величине t_1 упущенная выгода равна

$$c_2\tau_2\left[\gamma\sqrt{\beta(2+\beta)} + 1\right],\quad \beta = \frac{c_1}{c_2},\quad \gamma = \frac{\tau_1}{\tau_2}\ . \qquad (5.3)$$

Если первым заканчивается второй проект, то оптимальный момент его завершения

$$t_2 = \frac{1+\beta}{\sqrt{1+2\beta}}\tau_2,$$

а упущенная выгода:

$$c_2\tau_2\left[\sqrt{1+2\beta} + \gamma\beta\right]\ . \qquad (5.4)$$

Сравнивая (5.3) и (5.4) определяем

$$\gamma^* = \frac{\sqrt{2\beta+1} - 1}{\sqrt{\beta(2+\beta)} - \beta}. \qquad (5.5)$$

Окончательно получаем, что при $\gamma < \gamma^*$ в оптимальном решении сначала завершится первый проект, а затем второй, а в случае $\gamma > \gamma^*$ наоборот, сначала завершится второй проект, а затем первый. Если проекты равноценны с точки зрения упущенной выгоды (β=1), то $\gamma^* = 1$, и первым завершится проект с меньшим объемом работ. Если проекты одинаковы по объему ($\gamma = 1$), то первым завершается более важный проект (то есть с большей величиной c_i).

<u>Пример 5.2</u>. Мультипроект состоит из двух проектов, объемы которых W_1 и W_2, а скорости линейно зависят от количества ресурсов:

$$w_i = \begin{cases} u_i, & u_i \le a_i \\ a_i, & u_i \le a_i \end{cases}.$$

Примем, что $a_1 + a_2 > N$, $a_1 \le N$, $a_2 \le N$, так что одновременно проекты нельзя выполнить с максимальными скоростями. Пусть первым завершается первый проект за минимальное время $\tau_1 = W_1/a_1$. За время τ_1 будет выполнен объем работ $(N - a_1)\tau_1$ второго проекта. Оставшийся объем работ $W_2 - (N - a_1)\tau_1$ будет выполнен за время

$$\frac{W_2 - (N - a_1)\tau_1}{a_2}.$$

Упущенная выгода составит

$$c_1\tau_1 + c_2\left(\tau_1 + \frac{W_2 - (N - a_1)\tau_1}{a_2}\right) = c_2\left(\beta\tau_1 + \tau_2 + \frac{\Delta\tau_1}{a_2}\right), \tag{5.6}$$

где $\tau_1 = W_1/a_1$, $\tau_2 = W_2/a_2$, $\Delta = a_1 + a_2 - N$, $\beta = c_1/c_2$.

Если первым завершается второй проект, то упущенная выгода составит

$$c_2\left(\beta\tau_1 + \tau_2 + \beta\frac{\Delta}{a_1}\tau_2\right). \tag{5.7}$$

Сравнивая (5.6) и (5.7) получаем следующее решающее правило. Если

$$\frac{c_1}{W_1} > \frac{c_2}{W_2},$$

то первым завершается первый проект, в противном случае - второй. Заметим, что если $a_1 = a_2 = N$, то проекты выполняются последовательно за минимальные времена $\tau_i = W_i/N$. В этом случае получаем известную в теории расписаний задачу определения оптимальной очередности выполнения операций на одном рабочем месте. Решающее правило в этом случае естественно совпадает с известным решающим правилом - упорядочение по убыванию отношения c_i/τ_i.

Обобщим рассмотренную в примере 5.2. линейную модель на случай мультипроекта из n проектов. Пусть для любых двух проектов i, j имеет место a_i+a_j >N. В этом случае одновременно с максимальной скоростью может выполняться только один проект. Таким образом задача заключается в выборе очередности проектов, которые будут выполняться с максимальной скоростью. В примере 5.2. мы показали, что оптимальное упорядочение для случая двух проектов - это упорядочение по убыванию величин $q_i = c_i/W_i$. В данном случае упорядочивание проектов по убыванию q_i является эвристическим решающим правилом, во многих случаях (как показывают численные примеры) дающем оптимальное решение. Однако не всегда, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 5.3. Мультипроект состоит из трех проектов, данные о которых приведены в таблице 5.1

Пусть количество ресурса N = 6. Упорядочим проект по убыванию q_i следующим образом: 1→2→3. Первый и второй проекты завершаются в срок $t_1 = t_2 = 5$, а третий - в срок $t_3 = 15$. Упущенная выгода $\Phi = 100 \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 20 \cdot 15 = 875$. В то же время, если сначала выполнять проекты 1 и 3, а после завершения проекта 1 начать проект 2, то моменты завершения проектов

$$t_1 = 5,\ t_2 = 6,\ t_3 = 10,$$

Таблица 5.1.

i	1	2	3
c_i	100	15	20
W_i	25	5	10
q_i	4	3	2
a_i	5	5	1
t_i	5	1	10

а упущенная выгода

$$\Phi = 100 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 20 \cdot 10 = 790,$$

что меньше, чем в предыдущем случае.

6. МЕТОДЫ АГРЕГИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСА ОПЕРАЦИЙ

Рассмотрим методы описания комплекса операций в виде одной агрегированной операции. Для агрегированной операции необходимо определить ее объем Wэ, который называется эквивалентным объемом комплекса, и зависимость скорости агрегированной операции от количества ресурсов на комплексе:

$$W_э(t) = F_э(N(t)) \tag{6.1}$$

Определение. Агрегирование называется идеальным, если для любой функции N(t) существует оптимальное распределение ресурсов $\{u_i(t)\}$ по операциям комплекса, такое что

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t) \le N(t),$$

а минимальная продолжительность комплекса удовлетворяет условию:

$$\int_0^{T_{min}} F_э\left(N(t)\right)dt = W_э.$$

Классическим примером идеального агрегирования является случай степенных зависимостей скоростей операций от количества ресурсов:

$$f_i\left(u_i\right) = u_i^{\alpha}, \quad \alpha \le 1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.2}$$

Действительно, в этом случае доказано ([3]), что существует эквивалентный объем комплекса Wэ и зависимость

$$F_э(N) = N^{\alpha},$$

такие, что для любого уровня ресурсов N(t) имеет место

$$\int_0^{T_{min}} F\left[N(t)\right]dt = W_э.$$

При этом, существует оптимальное распределение ресурсов $\{u_i^0(t)\}$, такое что

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^0(t) = N(t),$$

а время выполнения комплекса равно T_{min}.

Пусть $N(t) = N$ при любом t. В этом случае распределение ресурсов $\{u_i^0(t)\}$ имеет следующие интересные свойства:

1. Каждая операция выполняется без перерывов постоянным количеством ресурсов, то есть

$$u_i^0(t) = u_i, \quad t \in \left[t_i^H, t_i^0\right],$$

где t_i^H, t_i^0 - моменты начала и окончания i-ой операции.

2. Ресурсы $\{u_i\}$ образуют поток по сетевому графику.

Существует интересная геометрическая интерпретация этого результата.

Поставим в соответствие комплексу операций некоторую область m-мерного фазового пространства. Эта область строится следующим образом. Сначала находим минимальное множество путей, покрывающих сетевой график, то есть таких, что кажая операция комплекса принадлежит хотя бы одному пути. Для построения такого множества путей необходимо определить минимальный поток в сети при условии, что поток в каждой дуге (исключая фиктивные дуги, соответствующие зависимостям)не меньше 1, применяя известные алгоритмы.

Пример 6.1. Пусть сеть имеет вид рис. 6.1 (зависимости показаны пунктирными дугами)

Минимальный поток в данном случае, очевидно, равен 3.Соответствующие пути, покрывающие сеть:

$$\mu_1 = (0, 1, 3), \ \mu_2 = (0, 2, 3), \ \mu_3 = (0, 3).$$

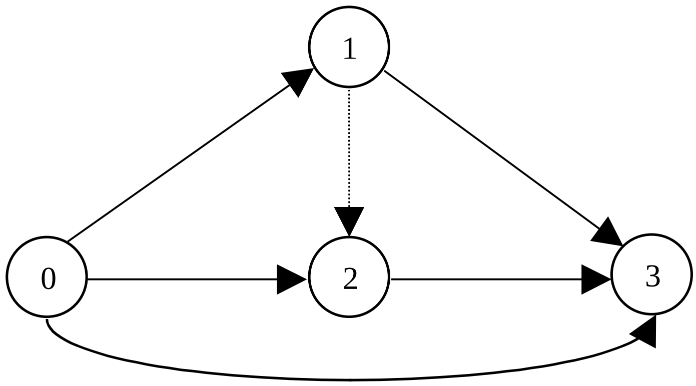

Рис. 6.1.

Минимальное число r путей, покрывающее сеть, называется размерностью комплекса операций. Поставим в соответствие каждому пути координатную ось r-мерного фазового пространства. Построим в этом пространстве область возможных состояний комплекса. Способ построения показан на примере 6.1. На первой координатной оси откладываем два отрезка, длины которых равны w_{01} и w_{12}, то есть объемам соответствующих операций, на второй координатной оси откладываем, соответственно, отрезки длины w_{02} и w_{23}, а на третьей - w_{03} (рис 6.2). Теперь необходимо изобразить зависимость (1, 2), отражающую тот факт, что операцию (2, 3) нельзя начинать, пока не закончена операция (0, 1). Это значит, что запрещено находиться в параллелограмме, верхняя и нижняя грани которого на рис. 6.2 закрашены. Область допустимых состояний комплекса представляет собой параллелограмм 0ABC0’A’B’C’, у которого вырезан параллелограмм DEFBD’E’F’B’. Точка 0 соответствует начальному состоянию комплекса, точка C’ - конечному (все операции выполнены). Любая монотонная траектория (соединяющая начало координат с точкой C’), проходящая в допустимой области, соответствует некоторому процессу выполнения операций комплекса.

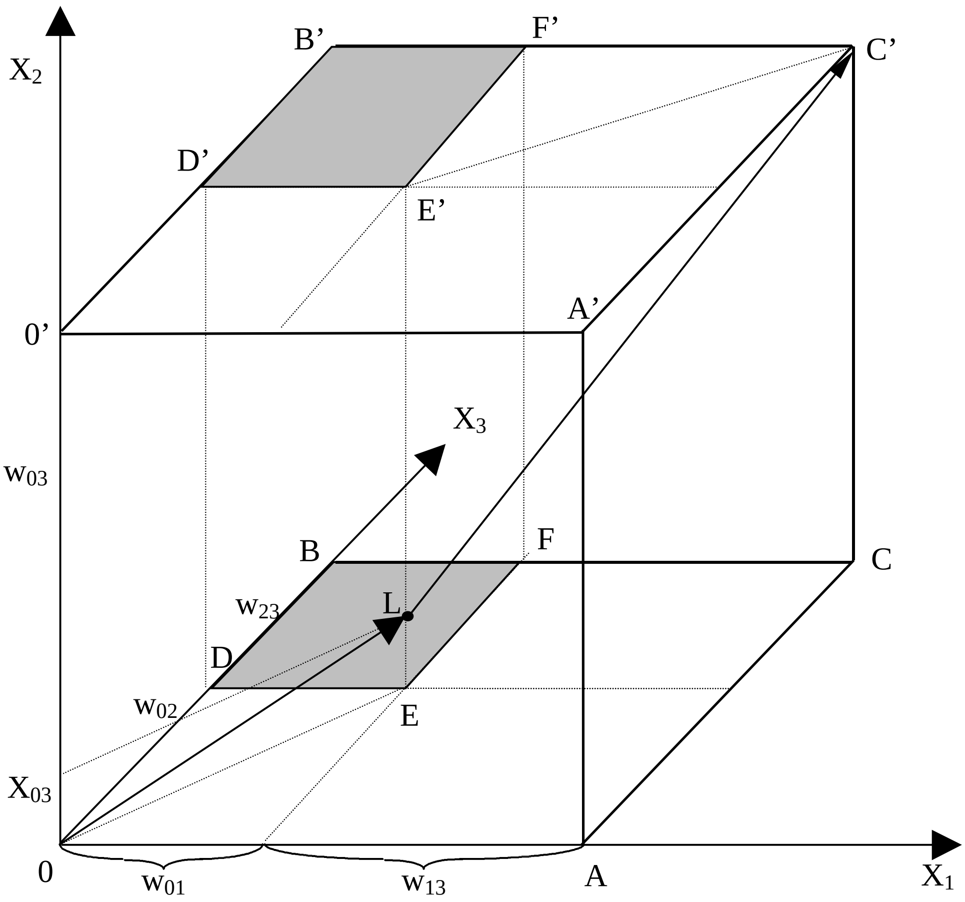

Рис. 6.2.

В [3] показано, что для случая степенных зависимостей вида (6.2) движение по траектории происходит со скоростью $N^{\alpha}(t)$. Отсюда следует, что минимальному времени выполнения комплекса соответствует движение по кратчайшей траектории, соединяющей точку 0 с точкой C'. Длина этой кратчайшей траектории равна эквивалентному объему комплекса, если расстояние между любыми двумя точками y_1 и y_2 определяется по формуле:

$$\rho(y_1, y_2) = \left[\sum_{i=1}^{r} |y_{i1} - y_{i2}|^{1/\alpha}\right]^{\alpha}. \tag{6.3}$$

Описанная аналогия позволяет свести задачу определения эквивалентного объема к задаче определения кратчайшей траектории в допустимой области состояний комплекса.

Пример 6.2. Пусть $f_{ij}\left(u_{ij}\right) = \sqrt{u_{ij}}$, $W_{01} = 4$, $W_{02} = 3$, $W_{13} = 3$, $W_{23} = 4$, $W_{03} = 6$.

Сначала пробуем провести прямую, соединяющую т. 0 с т. C’. Поскольку $W_{01} + W_{13} = W_{02} + W_{23} = 7$, то в момент завершения операции (0, 2) будет выполнено всего 3 единицы объема операции (0, 1). Следовательно, прямая не проходит в допустимой области. Очевидно, что кратчайшая траектория должна проходить через отрезок EE’. Из геометрии известно, что треугольники 0EL и LE’C’ должны быть подобными, если 0LC’ - кратчайшая траектория. Имеем:

$$\frac{x_{03}}{w_{03} - x_{03}} = \frac{\sqrt{w_{01}^2 + w_{02}^2}}{\sqrt{w_{13}^2 + w_{23}^2}} = 1.$$

Поэтому $x_{03} = {}^1/_2 w_{03} = 3$. Эквивалентный объем (или длина кратчайшей траектории) равен

$$W_э = |0L| + |LC'| = 2\sqrt{5^2 + 3^2} = 2\sqrt{34} \; .$$

Пусть количество ресурсов N = 8,5, тогда минимальная продолжительность комплекса

$$T_{min} = \frac{W_э}{\sqrt{N}} = 4,$$

при этом операции (0; 1), (0; 2) и половина операции (0; 3) завершаются одновременно за время $t_{01} = t_{02} = 2$. Отсюда сразу определяем оптимальное распределение ресурсов

$$u_{01} = \left(\frac{w_{01}}{t_{01}}\right)^2 = 4; \quad u_{02} = \left(\frac{w_{02}}{t_{02}}\right)^2 = 2{,}25; \quad u_{03} = \left(\frac{w_{03}}{t_{03}}\right)^2 = 2{,}25;$$

$$u_{13} = \left(\frac{w_{13}}{t_{13}}\right)^2 = 2{,}25; \quad u_{23} = \left(\frac{w_{23}}{t_{23}}\right)^2 = 4.$$

Легко убедиться, что распределение ресурсов $\{u_{ij}\}$ образует поток по сетевому графику.

Рассмотрим еще одну аналогию задачи распределения ресурсов с задачей определения токов и напряжений в электрической цепи из нелинейных сопротивлений. Аналогия достаточно очевидна, поскольку поток ресурсов естественно интерпретировать как ток в цепи, а моментам свершения событий поставить в соответствие потенциалы вершин. Однако, чтобы получить возрастающие вольтамперные характеристики, необходимо перейти к новым переменным:

$$v_{ij} = \lambda_j - \lambda_i - \tau_{ij} = \Delta_{ij} - \tau_{ij},$$

где $\{\lambda i\}$ выбираются таким образом, что $\lambda_j - \lambda_i > \tau_{ij}$ для всех (i, j), где τ_{ij} - предполагаемое время выполнения операции (i, j). Поставим теперь в соответствие сетевому графику двухполюсник с нелинейными сопротивлениями, имеющими вольтамперные характеристики

$$v_{ij}(u_{ij}) = \Delta_{ij} - \frac{w_{ij}}{u_{ij}^{\alpha}}.$$

Если теперь подать на вход двухполюсника напряжение $V = \Delta_{on} - T$, где T - заданное время выполнения комплекса, то распределение токов по ветвям будет определять оптимальное распределение ресурсов по комплексу операций.

Эта аналогия позволила получить новый результат в электротехнике, а именно, опираясь на то, что для степенных зависимостей оптимальное распределение ресурсов образует поток в сети, было показано, что для степенных вольтамперных характеристик эквивалентное сопротивление цепи уменьшается при уменьшении любого сопротивления цепи (ранее этот факт был известен для цепей с постоянными сопротивлениями). Заметим, что для произвольных цепей с нелинейными пассивными сопротивлениями этот факт, вообще говоря, не верен. Таким образом, идеальное агрегирование комплекса со степенными зависимостями скоростей операций от количества ресурсов сводится к определению его эквивалентного объема.

Опишем алгоритм определения эквивалентного объема комплекса. Сначала определяем зависимость затрат $S_{ij} = u_{ij} \cdot \tau_{ij}$ от времени выполнения операции:

$$S_{ij} = \tau_{ij} \cdot \left(\frac{w_{ij}}{\tau_{ij}} \right)^{1/\alpha} = \frac{w_{ij}^{1/\alpha}}{\tau_{ij}^{1-\alpha/\alpha}} \tag{6.4}$$

Рассмотрим задачу оптимизации комплекса по стоимости. Задача заключается в определении продолжительностей операций так, чтобы комплекс был выполнен за время T, а затраты на его выполнение

$$S = \sum_{(i,j)} S_{ij}\left(\tau_{ij}\right) \tag{6.5}$$

были минимальными.

Как известно, необходимым и достаточным для оптимальности является выполнение для любого события i сети (за исключением начального и конечного) следующих условий:

$$\sum_j \frac{dS_{ij}\left(\tau_{ij}\right)}{d\tau_{ij}} = \sum_k \frac{dS_{ki}\left(\tau_{ki}\right)}{d\tau_{ki}}. \tag{6.6}$$

Однако, поскольку

$$\frac{dS_{ij}\left(\tau_{ij}\right)}{d\tau_{ij}} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} u_{ij},$$

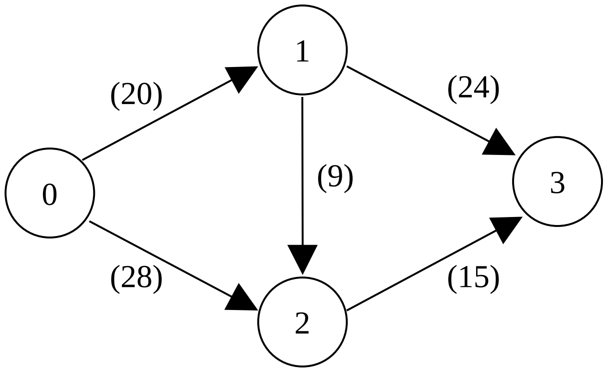

Рис. 6.3.

то условие (6.6) эквивалентно условию потоковости ресурсов в каждом событии. А минимум стоимости при условии, что ресурсы образуют поток в сети, эквивалентен минимуму ресурсов N.

Для решения задачи минимизации сети по стоимости известен эффективный алгоритм Кэлли. На каждом шаге алгоритма проверяется условие (6.6) в вершинах сети, и время свершения соответствующего события корректируется так, чтобы эти условия выполнялись. На каждом шаге происходит уменьшение величины (6.5). Когда в сети получено решение, для которого (6.6) выполняется во всех вершинах, величина стоимости (6.5) минимальна и, следовательно, минимальным является и уровень ресурсов N_{min}. Эквивалентный объем комплекса определяется выражением

$$W_э = TN^{\alpha} = S^{\alpha}{}_{min} \cdot T^{1-\alpha} \qquad (6.7)$$

<u>Пример 6.3</u>. Рассмотрим сетевой график, приведенный на рисунке 6.3.

Пусть $f_{ij}\left(u_{ij}\right) = \sqrt{u_{ij}}$ для всех (i, j). Объемы операций указаны в скобках у соответствующих дуг. Пусть T = 10. Возьмем начальное решение t_1 = 5, t_2 = 8. Получим общую формулу для корректировки моментов t_i. Пусть

$$\sum_j u_{ij} > \sum_k u_{ki} .$$

В этом случае ti следует увеличить на некоторую величину δ, определяемую из уравнения

$$\sum_j \left(\frac{w_{ij}}{\tau_{ij} + \delta} \right)^2 = \sum_k \left(\frac{w_{ki}}{\tau_{ki} - \delta} \right)^2 . \qquad (6.8)$$

<u>I шаг</u>. Рассматриваем событие 1. Имеем

$$u_{01} = \left(\frac{w_{01}}{t_{01}} \right)^2 = 16; \quad u_{13} = \left(\frac{24}{5} \right)^2 \approx 2{,}3; \quad u_{12} = \left(\frac{9}{3} \right)^2 = 9.$$

$$u_{01} = 16 < u_{13} + u_{12} \approx 32.$$

Решаем уравнение

$$\left(\frac{20}{5-\delta} \right)^2 = \left(\frac{24}{5+\delta} \right)^2 + \left(\frac{9}{3+\delta} \right)^2 .$$

Получаем δ = 0,8, t_1 = 5 - 0,8 = 4,2.

Рассмотрим событие 2. Имеем

$$u_{02} = 12{,}25; \; u_{12} = (9/3{,}8)^2 \approx 5{,}7; \; u_{23} = 56{,}25.$$

Момент t_2 следует уменьшить. Определяем величину уменьшения из уравнения

$$\left(\frac{28}{8-\delta} \right)^2 + \left(\frac{9}{3{,}8-\delta} \right)^2 = \left(\frac{15}{2+\delta} \right)^2 .$$

Возьмем δ = 0,6. Имеем t_2 = 7,4. С новыми значениями t_1 и t_2 процедура повторяется. После нескольких итераций процесс сходится к решению t_1^0 = 4, t_2^0 = 7, которое является оптимальным. Действительно, для этого решения имеем

$$u_{01} = \left(\frac{20}{4} \right)^2 = 25; \quad u_{02} = \left(\frac{28}{7} \right)^2 = 16; \quad u_{12} = \left(\frac{9}{3} \right)^2 = 9;$$

$$u_{13} = \left(\frac{24}{6} \right)^2 = 16; \quad u_{23} = \left(\frac{15}{3} \right)^2 = 25.$$

Как легко видеть, ресурсы образуют поток в сети величины N = 41. Следовательно, эквивалентный объем комплекса равен

$$W_э = T\sqrt{N} = 10\sqrt{41} \approx 64.$$

Опишем еще один метод оценки эквивалентного объема комплекса. В основе его лежит следующая теорема:

Теорема 3. Эквивалентный объем комплекса является выпуклой однородной функцией объемов операций $\overline{W}$.

Доказательство. В [3] доказано, что при N(t) = N $T_{min}\left(\overline{W}\right)$ является выпуклой функцией своих аргументов. Так как $T_{min}\left(\overline{W}\right) = W_э\left(\overline{W}\right)/N^{\alpha}$, то из условия выпуклости $T_{min}\left(\overline{W}\right)$ получаем для $\overline{W} = \alpha\overline{W}^1 + (1-\alpha)\overline{W}^2, \quad 0 \le \alpha < 1,$

$$W_э\left(\alpha\overline{W}^1 + (1-\alpha)\overline{W}^2\right) \le \alpha W_э\left(W^1\right) + (1-\alpha)W_э\left(\overline{W}^2\right).$$

Для доказательства однородности $W_э\left(\overline{W}\right)$ увеличим объем всех операций в q раз и одновременно увеличим продолжительности всех операций в q раз. При этом количество ресурсов, выполняющих каждую операцию, не изменится, а минимальная продолжительность комплекса увеличится в q раз. Так как $W_э = T_{min} \cdot N^{\alpha}$, то эквивалентный объем также увеличится в q раз.

Теорема позволяет получать оценки сверху эквивалентного объема комплекса, представляя его как выпуклую линейную комбинацию комплексов, эквивалентные объемы которых известны.

Пример 6.4. Рассмотрим комплекс операций, приведенный на рисунке 6.4. Точное значение эквивалентного объема комплекса равно $W_э$ = $3\sqrt{41} \approx 19{,}2$.

Рассмотрим два комплекса операций, показанных на рисунке 6.5 а, б.

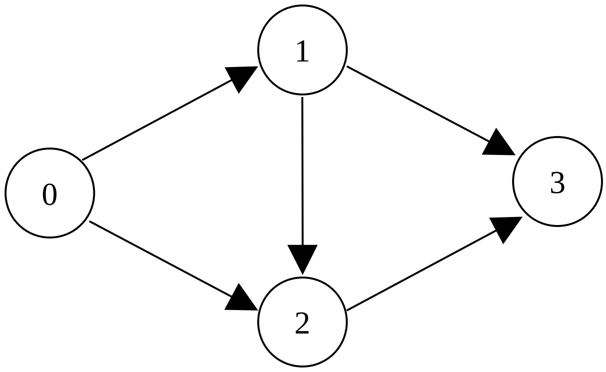

Рис. 6.4.

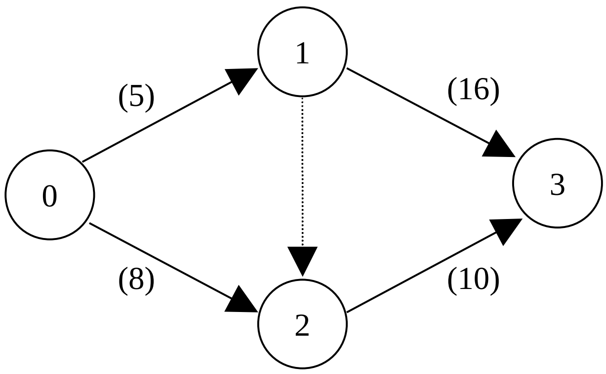

Рис. 6.5.а

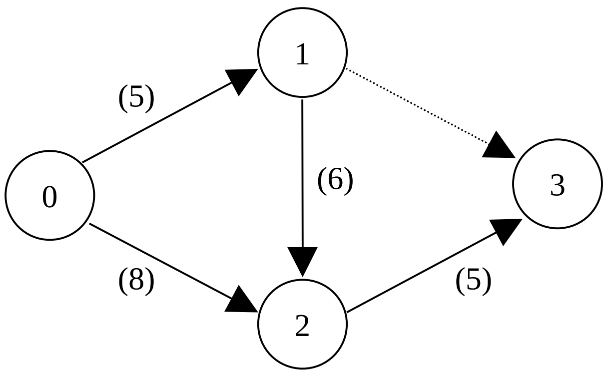

Рис. 6.5.б

Нетрудно убедиться, что полусумма объемов операций этих комплексов дает комплекс 6.4. Для комплекса 6.5.а имеем

$$W_э^1 = \sqrt{21^2 + 13^2} \approx 24{,}7,$$

а для комплекса на рисунке 6.5.б:

$$W_э^2 = \sqrt{11^2 + 8^2} + 5 \approx 18{,}6.$$

Таким образом для исходного комплекса

$$W_э \le \frac{1}{2}\left(W_э^1 + W_э^2\right) = 21{,}6.$$

Отклонение от точной оценки составляет 2,4 или примерно 12,5%.

Точность оценки можно улучшить, подбирая различные наборы W^1, W^2 и α такие, что

$$W = \alpha W^1 + (1 - \alpha)W^2.$$

Так, например, если α взять близким к 1, то получаем:

$$W_э{}^1 \approx 18,\ \ W_э{}^2 \approx 3/(1-\alpha),\quad W_э \le 18 + 3 = 21,$$

что дает ошибку примерно 9%, то есть в два раза меньше.

Линейный случай

Рассмотрим линейную зависимость скоростей операций от количества ресурсов:

$$f_i(u_i) = \begin{cases} u_i, & u_i \le a_i \\ a_i, & u_i \ge a_i \end{cases}.$$

Обозначим $\tau_i = w_i/u_i$ - минимальную продолжительность i-ой операции. Построим интегральный график использования ресурсов на комплексе операций, полагая, что все операции начинаются в поздние моменты времени. Для определения поздних моментов начала операций применим известный алгоритм расчета сетей. Полагаем момент свершения последнего события t_m = T. Если определены поздние моменты начала всех событий Q_i, непосредственно следующих за i-ым, то поздний момент свершения i-го события определяется по формуле

$$t_i^n = \min_{j \in Q_i}\left(t_j^n - \tau_{ij}\right).$$

Зная поздние моменты свершения всех событий, легко определить поздний момент начала всех операций:

$$t_{ij}^n = t_j^n - \tau_{ij}.$$

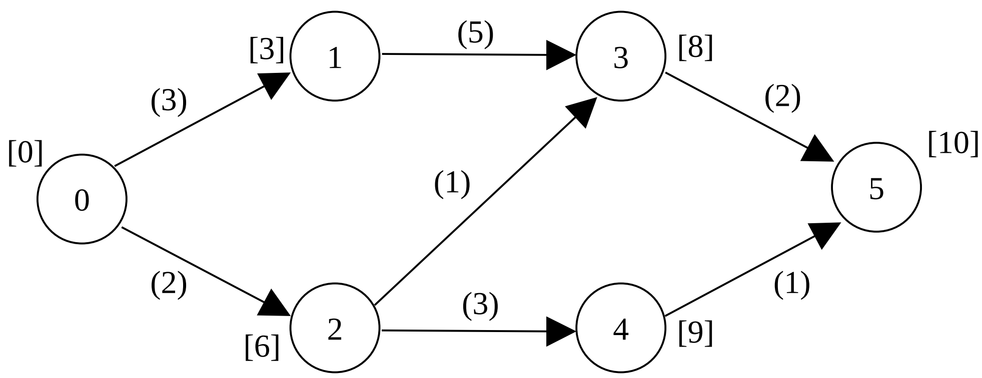

Рис. 6.6.

Пример 6.5. Рассмотрим сеть рис.6.6. Длительности операций указаны в скобках у соответствующих дуг. Длина критического пути T = 10. Поздние моменты свершения событий указаны в скобках у соответствующих вершин.

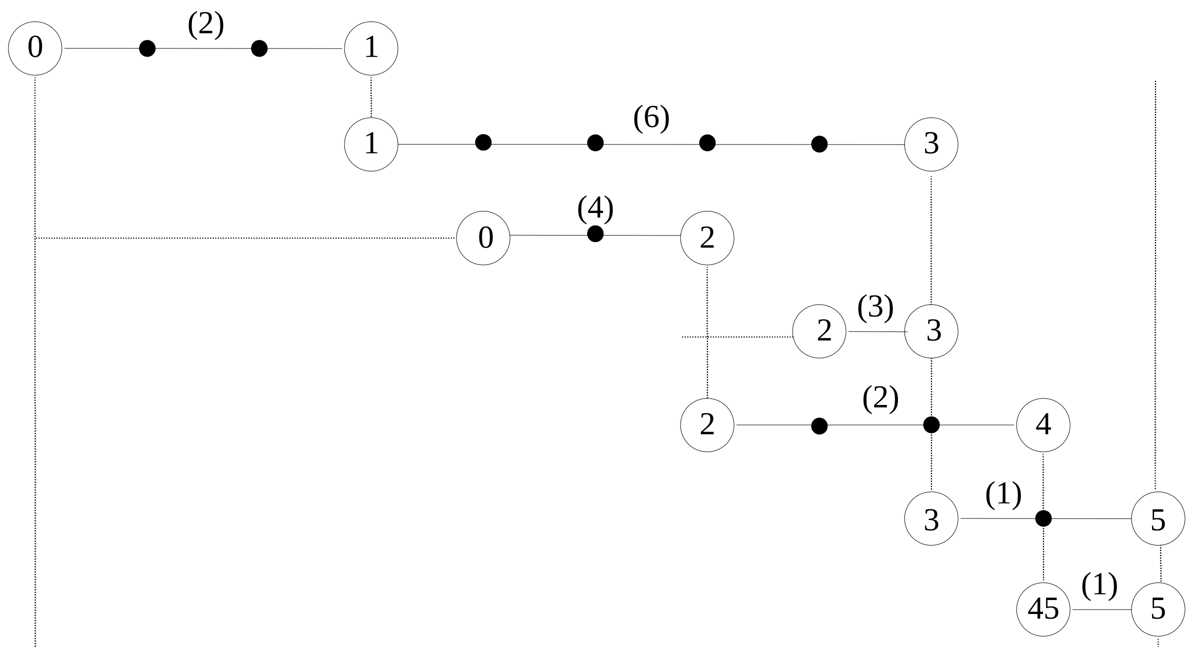

Рис. 6.7.а.

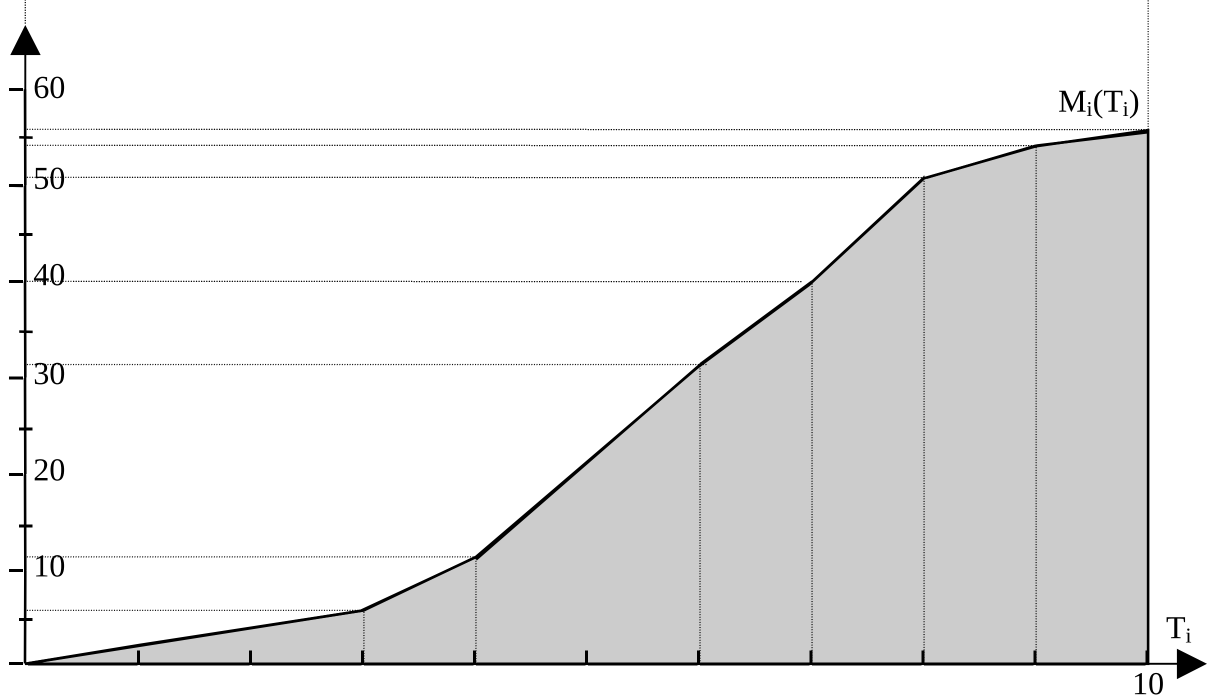

Рис. 6.7.б.

На рис. 6.7.а приведен календарный график реализации комплекса, при условии, что все операции начинаются в поздние моменты. Числа у операций равны количеству ресурсов, занятых на операциях.

На рис. 6.7.б приведен интегральный график использования ресурсов. График использования ресурсов и представляет собой агрегированное описание проекта. Действительно, имея агрегированные описания всех проектов, то есть графики использования ресурсов на них при условии, что все операции начинаются в наиболее поздние моменты (такие графики называются правосдвинутыми), мы можем решить задачу оптимального распределения ресурсов по мультипроекту как по критерию минимума времени реализации мультипроекта, так и по критерию упущенной выгоды.

Задача минимизации времени реализации мультипроекта решается достаточно просто. Пусть $S_i(t,T)$ - интегральный график использования ресурсов i-го проекта при его завершении в момент T, $S(t,T) = \sum_{i=1}^{n} S_i(t,T)$ - интегральный график использования ресурса для мультипроекта, M(t) - интегральный график имеющегося количества ресурса (рис. 6.8).

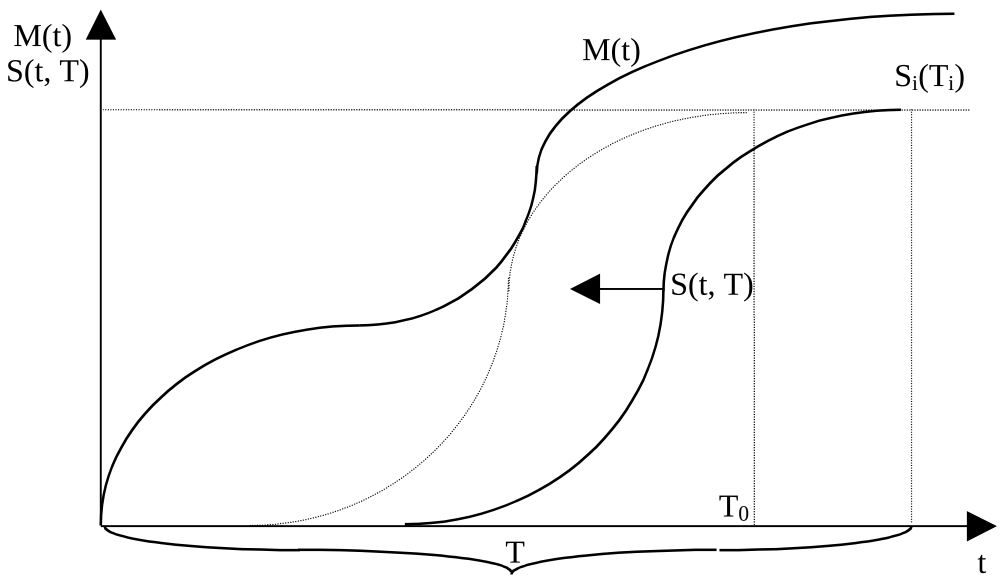

Рис. 7.3.

Для определения минимального времени T_0 окончания мультипроекта необходимо сдвигать график S(t, T) влево (см. рис. 6.8) до тех пор, пока он не коснется графика M(t). Получив таким образом интегральный допустимый график распределения ресурса по мультипроекту, мы можем декомпозировать его на графики распределения ресурса для каждого проекта. Задача минимизации упущенной выгоды не имеет такого простого метода решения. При небольшом числе проектов проще всего ее решать методом перебора всевозможных упорядочений проектов. Заметим, что если приоритетность реализации проектов выбрана, то распределение ресурсов получается сдвигом интегральных графиков $S_i(t, T)$ максимально влево до касания с графиком M(t) в заданной очередности. При большом числе проектов можно воспользоваться эвристическим правилом, обоснование которого дано в параграфе 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описаны методы оптимального распределения ресурсов по мультипроекту.

Идея декомпозиции, в основе которой лежит агрегирование проектов и последующее решение задачи распределения ресурсов по множеству независимых операций оказалась весьма плодотворной. Важно, что для наиболее применяемых на практике зависимостей скоростей операций от количества ресурсов (степенных и линейных) возможно идеальное агрегирование.

Задача агрегирования проектов с более сложными зависимостями скоростей операций от количества ресурсов требуют дальнейших исследований. Представляет также большой интерес решение прикладных задач финансирования проектов с учетом различных схем финансирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н. Распределение ресурсов как задача оптимального быстродействия. Автоматика и телемеханика, №7, 1966.

2. Бурков В.Н. Применение теории оптимального управления к задачам распределения ресурсов. Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (Одесса), т. «Управление производством», «Наука», 1967

3.Оптимальное управление комплексами операций. Труды IV международного конгресса ИФАК, Варшава, 1969.