МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский
государственный университет аэрокосмического приборостроения

В. П. Заболотский, А. А. Оводенко, А. Г. Степанов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2001

УДК 330.4(075)
ББК 65.290
З12

Заболотский В. П., Оводенко А. А., Степанов А. Г.

З12 Математические модели в управлении: Учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 2001. 196 с.: ил. ISBN 5-8088-0063-3

Рассматриваются теоретические основы применения математических моделей в управлении организационными системами. Изложены главные понятия математического моделирования, приведены методы структурного и функционального моделирования организационных систем.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 0611 "Менеджмент", может быть полезно студентам смежных специальностей, а также аспирантам и специалистам, работа которых связана с математическим моделированием и применением современных математических моделей в управлении организационными системами.

Рецензенты:
кафедра информатики Санкт-Петербургского гуманитарного университета профсоюзов;
доктор технических наук профессор *Б. В. Соколов*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Учебное издание

Заболотский Вадим Петрович
Оводенко Анатолий Аркадьевич
Степанов Александр Георгиевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
В УПРАВЛЕНИИ

Учебное пособие

Редактор *А. Г. Ларионова*
Компьютерная верстка *Н. С. Степановой*

Лицензия ЛР №020341 от 07.05.97. Сдано в набор 08.06.01. Подписано к печати 07.12.01. Формат 60×84 1/16. Бумага тип. №3. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,39. Усл. кр.отт. 11,51. Уч.-изд. л. 11,06. Тираж 150 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Лаборатория компьютерно-издательских технологий
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП

190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67

ISBN 5-8088-0063-3

Предисловие

В настоящее время практически во всех сферах человеческой деятельности все шире ощущается потребность в высококвалифицированных управленческих кадрах. В соответствии с этой потребностью в вузах страны, в том числе Санкт-Петербурга, постоянно увеличивается выпуск специалистов-менеджеров и близких к ним по специальности. Регулярно издаются книги по менеджменту. Одновременно с этим отмечается тенденция резкого сокращения выпуска литературы по теоретическим основам управления, включая фундаментальные основы моделирования и применения математических моделей в управлении. Теория моделирования в современной литературе нередко излагается весьма поверхностно и бессистемно. Используемая терминология страдает нечеткостью и непоследовательностью. Учебное пособие "Математические модели в управлении" позволяет в какой-то мере устранить перечисленные выше недостатки и удовлетворить потребность читателей в литературе такого рода.

Цель учебного пособия – последовательно и постепенно ввести читателя в круг понятий, определений и методов теории моделирования, показать возможности применения современных математических моделей в управлении организационными системами.

Структура учебного пособия способствует усвоению изучаемого материала и формированию у читателя современной системы модельных представлений.

Учебное пособие состоит из четырех разделов.

В первом разделе рассмотрены фундаментальные понятия теории управления и моделирования: система, управление, информация и модель. Особое внимание уделено количественной оценке качества моделей и эффективности моделирования.

Во втором разделе изложены основы структурного моделирования организационных систем. Рассмотрены цели и задачи структурного моделирования, аппарат и методы формализованного описания структур, структурно-топологические характеристики систем.

Третий раздел посвящен основам сетевого моделирования. Сформулировано назначение и указана область применения сетевых моделей. Приведены основные понятия и методы построения и анализа сетевых моделей.

В четвертом разделе описаны математические модели функционирования организационных систем. Приведены общий вид модели функционирования и методы функционального моделирования, включая аналитическое, экспериментальное, имитационное и имитационное динамическое моделирование.

Для усвоения материала пособия достаточно знаний в объеме первых курсов высших учебных заведений с экономическим и организационно-управленческим уклоном.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 521500, специальности 0611 "Менеджмент" и специальности 351400 "Прикладная информатика в экономике" для курсов "Математические модели в управлении", "Информационные технологии", в соответствии с действующими стандартами.

Введение

Человек живет и действует в объективно существующем реальном мире. Но все свои действия он осуществляет в соответствии со своими представлениями об этом мире, о своих действиях и их результатах. Общая схема любого активного действия может быть представлена в следующем виде:

Все представления, исходя из которых действует человек, он формирует на основании личного опыта, опыта предшествующих и современного поколений. Личный опыт приобретается человеком в процессе его деятельности путем воздействия на соответствующие объекты и изучения, исследования результатов воздействия. При этом объектами воздействия служат либо сами объекты, о которых необходимо создать представление, либо объекты, их замещающие, исследование и изучение которых позволяет создать представление о замещаемом объекте. Опыт поколений в сущности является их представлением о реальном мире, хранимым и передаваемым в той или иной форме от поколения к поколению. Сами представления, в свою очередь, являются объектами, которыми человек в процессе своей деятельности замещает окружающий мир.

От того, насколько правильно воспринимает человек реальный мир, зависит результат его действий. Особенно это касается целенаправленных действий, т. е. действий, связанных с получением вполне определенного желаемого результата. В этом случае стараются действовать наиболее рациональным образом, что предъявляет повышенные требования к объектам замещения, на основе которых формируются соответствующие представления. Таким требованиям в наибольшей степени отвечают объекты, создание и выбор которых для замещения производится на научной основе с использованием аппарата соответствующих наук и научных направлений. При выполнении определенных условий эти объекты называют моделями, а процесс создания моделей и замещения ими исследуемых объектов – моделированием.

Бурное развитие модельных методов, протекающее особенно интенсивно в последние десятилетия, повлекло за собой формирование ряда специфических понятий, представлений и приемов, связанных с построением, анализом и использованием моделей различных классов. Сегодня есть все основания говорить о моделировании и модельных методах как о самостоятельной области знаний, сфера приложений которых простирается от теории познания до решения сугубо практических производственных вопросов.

Повышенный интерес к модельной проблематике обусловлен той ролью, которую методы моделирования, особенно математического, приобрели в современных исследованиях. Кроме того, этот интерес стимулируется, с одной стороны, прогрессирующей сложностью задач, которые приходится решать человеку в своей деятельности, а с другой – большими успехами в развитии прикладной математики, вычислительной техники и программирования, исследования операций, научных дисциплин кибернетического цикла. В совокупности с традиционными областями науки они дают возможность – во всяком случае принципиальную – для решения значительной части прикладных задач научными методами с целью получения оптимальных в том или ином смысле результатов.

Первым в истории примером в полной мере научно обоснованного применения метода моделирования, по-видимому, можно считать работы по исследованию гидродинамических характеристик судов в опытовых бассейнах, которые развернулись во второй половине XIX века[1]. Однако даже в первые десятилетия двадцатого столетия наиболее распространенное толкование понятия "модель" по-прежнему было связано не с наукой, а с производством (литейным делом) и архитектурой.

Переломными в развитии моделирования оказались 40–50-е годы XX века, годы становления научных дисциплин кибернетического цикла, методов исследования операций, бурного развития прикладной математики, вычислительной техники и компьютерного программирования. В этот период значительно расширился круг исследовательских и прикладных задач, решаемых научными методами, что повлекло за собой необходимость выявления и описания существенных для каждой задачи свойств и черт множества самых разнообразных объектов, т. е. необходимость вполне осознанного построения их моделей. Непрерывно растущие возможности численных математических методов и реализующих эти методы автоматизированных вычислительных систем не только стимулировали математическую формализацию разнообразных задач и моделей, но и способствовали развитию связанного с моделями концептуального аппарата. Именно в эти годы сложились современные понятия аналоговой и алгоритмической математической модели, получили значительное развитие методы численного, в том числе статистического имитационного моделирования и моделирования на компьютерах, были разработаны специальные приемы для модельного исследования систем сложной структуры, методы идентификации объектов-оригиналов и т. д. По существу, только начиная с 40-х годов двадцатого столетия, можно говорить о моделях и моделировании как о сознательно используемом научном методе, применяемом для решения различных задач, связанных с объектами произвольной природы.

Математические модели стали играть в моделировании решающую роль, что было обусловлено широкими возможностями математики обес-

---

[1] *Неуймин Я. Г.* Модели в науке и технике. История, теория, практика. Л.: Наука, 1984. 189 с.

печивать хотя бы теоретически научно обоснованное моделирование любых объектов, свойствами математических моделей, а также уровнем и темпами развития современных информационных средств и технологий, позволяющих относительно легко осуществлять математическое моделирование.

В первую очередь, такая оценка роли математических моделей справедлива для управления сложными объектами, к которым, несомненно, относятся организационные системы, включая науку и высшую школу со своими подразделениями. Невозможно представить современную и будущую теорию управления организационными системами без применения математического моделирования, и приближение этого будущего зависит от темпов развития математического моделирования и соответствующих информационных средств и технологий. Поэтому в учебном пособии и рассматриваются математические модели и методы математического моделирования.

Основу современной теории управления сложными объектами составляют системный подход и реализующие его системные научные направления, к которым относятся кибернетика, системный анализ, общая теория систем, системотехника, исследование операций, квалиметрия и т. д.

Материал пособия позволяет сформировать у читателя современную систему модельных представлений, овладение которой дает специалисту в управлении не только инструмент для решения конкретных задач, особенно в плохо формализуемых сферах человеческой деятельности, но и аппарат хорошо организованного, а следовательно, наиболее эффективного мышления, способствует ясности в понимании сущности процессов, протекающих в моделируемых объектах, позволяет творчески и методологически правильно оперировать с широким кругом модельных понятий, представлений и методов моделирования. Именно этими качествами и должен обладать специалист в области менеджмента.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. СИСТЕМА

1.1.1. Определения

Одним из основных понятий, играющих важную роль в теории управления и других системных научных направлениях, является понятие "система". В настоящее время существует много определений данного понятия, которые применяются в соответствии с целями и решаемыми задачами. Эти определения различаются, главным образом, степенью общности, обусловленной количеством и детальностью описания свойств объектов, классифицируемых как системы. Достаточно полным и конструктивным, т. е. соответствующим целям и задачам курса, можно считать следующее определение.

Определение 1.1.1. ***Система*** – единое целое, представимое совокупностью взаимосвязанных и взаимодействующих объектов, обладающее свойствами (хотя бы одним), которых не имеет ни одна из частей целого при любом способе его членения, и не выводимыми из свойств частей.

Исходя из данного определения выделим основные свойства системы: целостность, отграниченность, членимость, интегративность, организованность.

Целостность – свойство, характеризующее внутреннее единство, завершенность, законченность системы. Оно обусловлено наличием внутренних связей, т. е. связей между объектами, образующими систему, и взаимодействием этих объектов. Для обеспечения целостности системы внутренние связи и взаимодействия должны быть достаточно сильными.

Отграниченность (обособленность) определяет возможность отграничить (обособить, выделить) систему из окружающего мира. Это свойство обусловлено относительной слабостью связей системы с внешней средой.

Между целостностью и отграниченностью существует довольно тесная связь. Чем более система выделена, отграничена от окружающего мира, тем более она внутренне целостна. Целостность и отграниченность системы свидетельствуют о том, что внутренние связи в системе сильнее, чем внешние.

Членимость характеризует возможность членения (декомпозиции) системы, т. е. представления ее в виде совокупности взаимосвязанных и взаимодействующих объектов. Мысленно можно представить любые членения системы, однако, допустимыми являются только естественные, которые определяются самой сутью системы, ее внутренними свойствами. Такие членения позволяют, изучая их структуру, выявить существенные свойства системы. В то же время членения, не связанные с сущностью и внутренними свойствами системы, не дают возможности увязать свойства системы и ее частей, выявить преемственность этих свойств, а сами свойства в этом случае производят впечатление неустойчивых, случайных.

Интегративность системы обусловлена наличием у нее интегративных (системных) свойств.

Определение 1.1.2. ***Интегративное (системное)*** свойство – свойство системы, которое не имеет ни одна из ее частей при любом способе членения и не выводимое из свойств частей.

Системные свойства формируются путем накопления, усиления и проявления одних свойств частей системы с одновременным нивелированием, ослаблением и сокрытием других при взаимодействии частей. На определенном уровне взаимодействия происходит скачок (переход количества в качество) – появление у совокупности взаимодействующих объектов свойств, не присущих этим объектам.

Наличие у системы интегративных свойств свидетельствует о том, что, во-первых, система не сводится к простой совокупности объектов и, во-вторых, расчленяя систему на отдельные части и изучая их, нельзя познать все свойства системы.

Организованность характеризует внутреннюю упорядоченность системы, согласованность взаимодействия ее частей.

Приведенное выше понятие системы у́же, чем используемое в философии. Философское понятие определяет систему как отграниченную совокупность взаимодействующих объектов. Тем самым в класс систем включается любая совокупность объектов, так как в мире все взаимосвязано, а любая совокупность всегда обладает свойствами, отличными от свойств образующих ее объектов. Это означает, что систему определяют как одну из форм существования материи.

В теории управления организационными системами из класса систем исключают суммативные системы, у которых сила внутренних и внешних связей одного порядка. Это зависит от того, что объектом изучения в теории управления являются особые, так называемые сложные, системы, которые будут рассмотрены далее.

Определение 1.1.3. ***Подсистема*** – часть системы, которая, в свою очередь, является системой.

Определение 1.1.4. ***Надсистема*** – это система, для которой рассматриваемая система является ее частью (подсистемой).

Понятия "подсистема", "система" и "надсистема" устанавливают иерархию систем в окружающем мире. Любая система является надсистемой для своих подсистем и в то же время служит подсистемой для некоторой надсистемы.

Определение 1.1.5. ***Элемент*** – это часть системы, у которой только внешние связи и взаимодействия оказывают существенное влияние на свойства системы.

Из данного определения следует, что внутренние связи и взаимодействия в элементе не оказывают существенного влияния на свойства системы и поэтому при рассмотрении объекта как системы не учитываются.

При членении системы элемент мыслится как неделимое целое, у которого учитываются только внешние связи и взаимодействия. Элементы составляют последний, самый глубокий уровень членения системы. Конечно, в общем случае элемент лишь относительно неделим, однако для данной системы он является абсолютно неделимым, так как дальнейшее его деление в рамках системы приводит к потере необходимых, существенных для системы свойств. Членение системы в общем случае не имеет предела, поэтому элемент может быть также рассмотрен как система, но это будет уже другая система, отличная от той, элементом которой он является.

Определение 1.1.6. ***Окружающая среда*** – это объекты окружающего мира, не вошедшие в систему, но оказывающие на нее влияние либо подверженные влиянию со стороны системы.

Окружающую среду иногда для краткости называют просто *средой*.

Определение 1.1.7. ***Входной полюс (вход)*** системы – это совокупность элементов системы, через которые окружающая среда оказывает воздействие на систему.

Определение 1.1.8. ***Выходной полюс (выход)*** системы – это совокупность элементов системы, через которые система воздействует на окружающую среду.

Определение 1.1.9. ***Входная ситуация*** – это мгновенная обстановка на входном полюсе системы, отражающая воздействие окружающей среды на систему.

Определение 1.1.10. ***Выходная ситуация*** – это мгновенная обстановка на выходном полюсе системы, отражающая воздействие системы на окружающую среду.

Часто входную ситуацию называют *импульсом*, а выходную ситуацию – *реакцией* системы на импульс.

Процессы изменения входной и выходной ситуации во времени называют соответственно *входным* и *выходным процессами*.

На рис. 1.1.1 приведена схема, поясняющая введенные понятия.

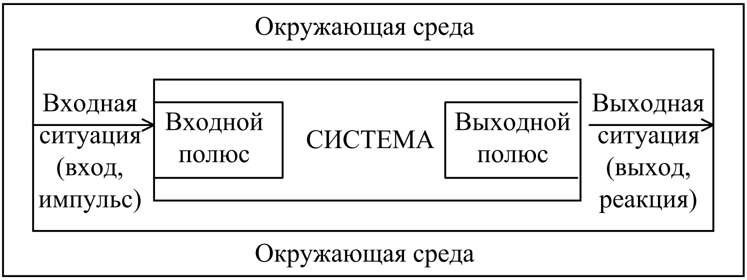

Рис. 1.1.1. Схема взаимодействия системы и окружающей среды

1.1.2. Характеристики системы

Наиболее содержательными характеристиками системы являются строение и поведение. Строение характеризует систему в статике, а исследование поведения дает возможность изучить и описать систему в динамике.

Строение системы определяется составом элементов и организацией системы (рис. 1.1.2).

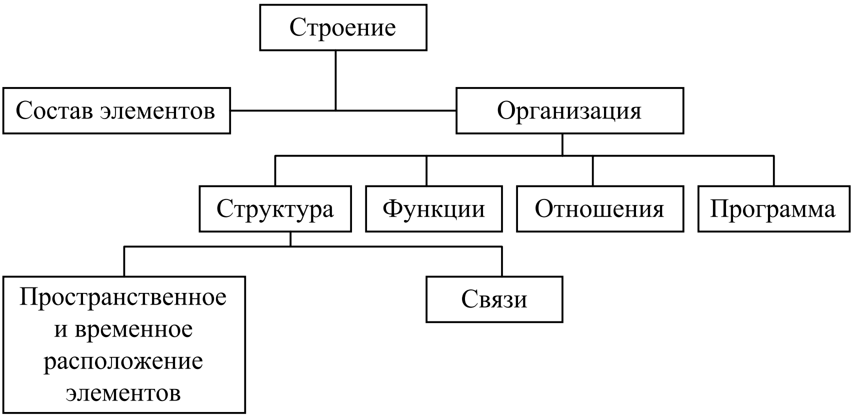

Рис. 1.1.2. Характеристики строения системы

Состав элементов характеризует количество и качественное различие элементов.

В теории управления качественное различие элементов определяется только различием функциональных характеристик, а не их материальной природой. Так, с точки зрения теории управления при исследовании вычислительной системы не важно, из чего сделаны тот или иной элемент или устройство, а важно, какие функции он выполняет, например, триггера, регистра, запоминающего устройства и т. д.

Определение 1.1.11. ***Организацией*** системы будем называть способ взаимосвязи и взаимодействия между ее элементами и подсистемами, который обеспечивает образование и существование системы.

Именно с организацией связано отличие суммы свойств отдельно взятых элементов, частей от свойств системы, в которую они входят.

В организации различают относительно стабильную (инвариантную) и переменную части. Стабильная часть определяет структуру системы, а переменная – ее программу, функции и отношения.

Определение 1.1.12. ***Структура*** – устойчивая упорядоченность в пространстве и времени элементов и связей системы, определяющая ее целостность, строение, основы ее организации.

Благодаря структуре система воспроизводит себя и существует вполне определенное время в целостном виде.

Поскольку элементы, входящие в систему, участвуют во взаимодействии не целиком, а лишь определенными сторонами, свойствами, то структура в определенном смысле независима от элементов. Это означает, что возможна замена элементов системы на качественно иные, другой материальной природы, но обладающие такими же взаимодействующими свойствами элементы. Структура системы от этого не изменится. В этом смысле можно говорить об устойчивости структуры, о ее постоянстве, неизменности.

Рассмотренная независимость структур от физической природы элементов дает возможность распространить закономерности, выявленные при изучении структур систем одной физической природы, на системы другой природы.

Определение 1.1.13. ***Связь*** – физический канал, по которому обеспечивается обмен между элементами системы веществом, энергией и информацией.

Структурные связи могут быть классифицированы по физической природе, направленности, силе (мощности), наличию элементов-посредников (рис. 1.1.3) .

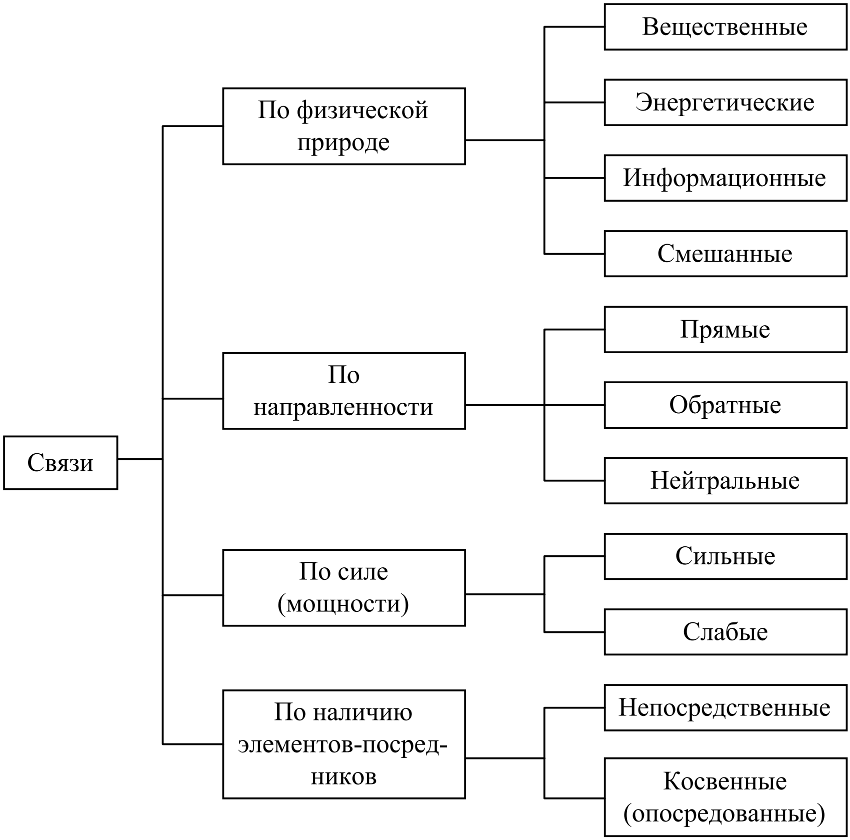

Рис. 1.1.3. Классификация связей в системе

По физической природе различают: вещественные, энергетические, информационные и смешанные связи. Вещественные связи представляют собой каналы, по которым элементы системы, ее части или системы в целом обмениваются между собой веществом. Энергетические связи обеспечивают обмен различными видами энергии, а информационные связи – информацией. Смешанные связи представляют собой каналы, по которым происходит обмен веществом, энергией и информацией. Следует отметить, что реально все связи являются смешанными, так как нельзя передать вещество, не передавая энергии и информации, информацию – без передачи вещества и энергии. Выделение связи по данному признаку означает, что для рассматриваемой связи соответствующий вид обмена является преобладающим.

По направленности различают прямые связи, направленные от входа к выходу системы, обратные, имеющие противоположное направление, и нейтральные (ненаправленные).

По наличию элементов-посредников различают непосредственные связи, связывающие элементы, части систем и системы непосредственно, и косвенные (опосредованные) связи, при которых связь элементов и подсистем происходит через промежуточные элементы-посредники.

Например, на рис. 1.1.4 связь элемента *1* с элементом *2* является прямой непосредственной, с элементом *3* – прямой косвенной, с элементом *6* – обратной непосредственной, с элементом *5* – прямой косвенной (через элементы *2*, *3*, *4* и *2*, *7*, *4*) и обратной косвенной (через элемент *6*). Связь элемента *2* с элементом *7* является нейтральной.

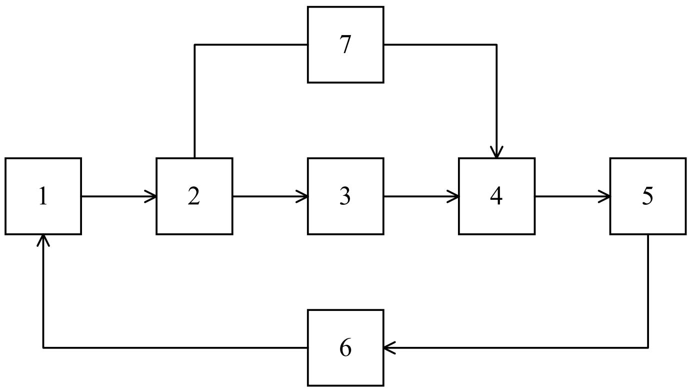

Рис. 1.1.4. Иллюстрация видов связей в системе

Определение 1.1.14. ***Функция*** – действие, выполняемое объектом, назначение объекта.

Любой элемент выполняет вполне определенные функции. Функция элемента возникает как реализация его системоопределенных свойств при формировании элемента и его связей в системе. Функция системы возникает как специфическое для каждой системы порождение всего комплекса функций элементов. Основными системными характеристиками функций являются их *совместимость* с другими функциями, *изменчивость*, *реализуемость*, *интенсивность*.

Любой элемент обладает огромным количеством свойств. Одни из этих свойств при формировании системы подавляются, другие, напротив, усиливаются, становятся четко выраженными. Однако степень подавления свойств, как правило, не бывает полной. Поэтому при образовании системы возникают функции, не только обеспечивающие сохранение системой ее качественной особенности, но и негативно влияющие на образование и существование системы как единого целого.

В процессе взаимодействия элементы системы вступают в определенные *отношения*, характеризующие взаимозависимость элементов системы. Отношения между элементами могут быть весьма разнообразными. Примером отношения является отношение порядка, определяющее взаимоподчиненность, старшинство элементов в системе.

Определение 1.1.15. ***Программой*** системы будем называть закон объединения элементов в единое целое, определяющий порядок и последовательность взаимодействия элементов в системе и реакцию системы на внешние воздействия.

Определение 1.1.16. ***Состояние*** системы – множество существенных свойств, которыми обладает система в конкретный момент времени.

Определение 1.1.17. ***Поведение (функционирование)*** системы – изменение состояния системы во времени.

Форма (линия) поведения системы определяется последовательностью состояний и временными интервалами между ними. Исходное состояние системы в каждой линии поведения называется *начальным состоянием*.

Обычно о поведении системы говорят, когда имеют дело со сложно организованными системами, живыми существами. Для технических систем применяют термины "функционирование" и "выходной процесс".

Определение 1.1.18. ***Развитием*** системы будем называть изменение состояния системы, подчиненное определенным закономерностям, определяющим последовательность изменения строения системы.

1.1.3. Классификация систем

В теории управления организационными системами все рассматриваемые системы могут быть классифицированы (рис. 1.1.5):

– по степени обусловленности строения и поведения системы;

– по степени сложности строения и поведения системы;

– по целенаправленности поведения системы.

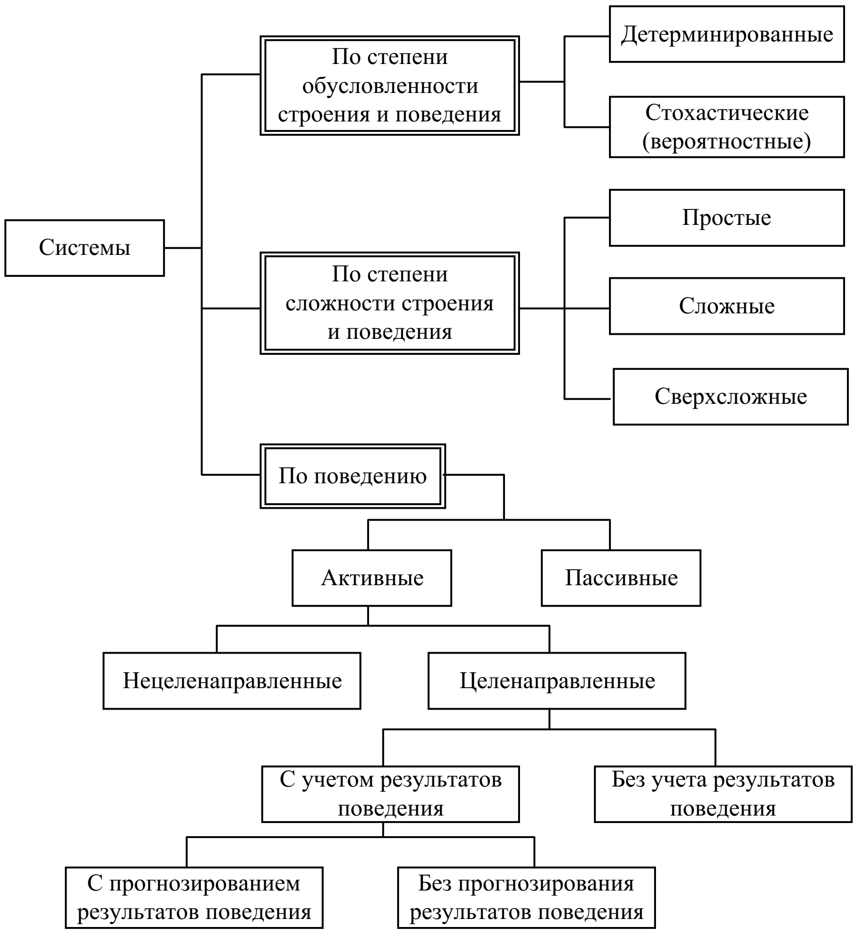

Рис. 1.1.5. Классификация систем

По степени обусловленности строения и поведения системы различают детерминированные и стохастические (вероятностные) системы.

Детерминированные системы обладают вполне определенным строением и поведением. Такие системы однозначно реагируют на внешние воздействия. Полное описание этих систем возможно даже в случае большого количества элементов и связей в системе.

Если известны, например, состояние системы и программа перехода ее в другие состояния, то всегда можно точно описать состояние, в которое перейдет система под влиянием различных воздействий.

В вероятностных системах элементы взаимодействуют между собой, а также с внешней средой случайным образом. Такая система всегда остается неопределенной в той или иной степени, и описание ее будущего поведения никогда не выходит за рамки вероятностных категорий, с помощью которых это поведение описывается. Полное описание вероятностных систем возможно только в этих рамках на уровне количественных характеристик и законов распределения вероятностей состояний систем.

По степени сложности строения и поведения различают простые, сложные и очень сложные (сверхсложные) системы.

Простыми принято считать системы, имеющие малое количество элементов и связей между ними; элементы таких систем также являются простыми. Простота элементов означает, что с достаточной степенью точности свойства и закономерности изменения состояния элементов могут быть описаны известными математическими соотношениями.

Сложные системы имеют большое количество элементов и связей между ними. Они обладают разветвленной структурой, а их элементы выполняют сложные функции и сами являются сложными системами. Однако эти системы при введении гипотез о простоте свойств элементов могут быть сведены к простым, что позволяет составить математическое описание таких систем с достаточной точностью.

Очень сложные (сверхсложные) системы имеют исключительно большое число и многообразие элементов и связей между ними. Никакое сколь угодно подробное знание строения и поведения элементов таких систем не позволяет определить полностью поведение систем, никакое сколь угодно точное знание поведения сверхсложной системы на любом конечном интервале в настоящем не позволяет точно предсказать ее поведение на любом конечном интервале в будущем.

По целенаправленности поведения системы подразделяются на целенаправленные и нецеленаправленные (казуальные).

Определение 1.1.19. ***Целенаправленными (целеустремленными)*** называются системы, поведение которых направлено на достижение цели.

Системы, поведение которых не обусловлено наличием цели, называются *нецеленаправленными.*

Определение 1.1.20. ***Цель*** – желаемый результат деятельности, который может быть достигнут в пределах некоторого интервала времени.

Такое понятие цели присуще весьма высокоорганизованным системам, к которым относятся живые существа, обладающие сознанием. Для технических систем под целью понимается состояние, к которому стремится система. На достижение этого состояния направлены организация и поведение системы.

Другие аспекты классификации систем по поведению представлены на рис. 1.1.5.

Организационные системы по рассмотренной классификации относятся к стохастическим сложным и очень сложным системам, обладающим активным целенаправленным поведением с учетом и прогнозированием результатов этого поведения. Такое сложное целенаправленное поведение системы возможно только при наличии у нее способности изменять свое поведение в нужном направлении. Свойство, характеризующее эту способность системы, называется управляемостью, воздействие на систему с целью изменения ее поведения в нужном направлении – управлением, а системы, в которых реализуется процесс управления – системами управления.

1.2. УПРАВЛЕНИЕ

1.2.1. Система управления

Любое управление подразумевает оказание воздействия на объекты с целью изменения их поведения в желаемом направлении. Следовательно, для осуществления управления в некоторой системе необходимо наличие объектов, вырабатывающих такие воздействия, а также объектов, на которые эти воздействия оказываются. Поэтому в любой системе управления можно выделить в качестве подсистем две системы – управляемую и управляющую.

Определение 1.2.1. ***Система управления*** – это система, целесообразное (целенаправленное) поведение которой обеспечивается путем выработки соответствующих воздействий и оказания этих воздействий на элементы системы.

Определение 1.2.2. ***Управляемая система*** – это подсистема системы управления, состоящая из объектов, на которые оказывается воздействие для обеспечения целесообразного поведения системы управления.

Определение 1.2.3. ***Управляющая система*** – это подсистема системы управления, вырабатывающая и оказывающая воздействия на управляемую подсистему для обеспечения целесообразного поведения системы управления.

Структурная схема системы управления, представленной в виде взаимодействующих управляющей и управляемой систем, приведена на рис. 1.2.1.

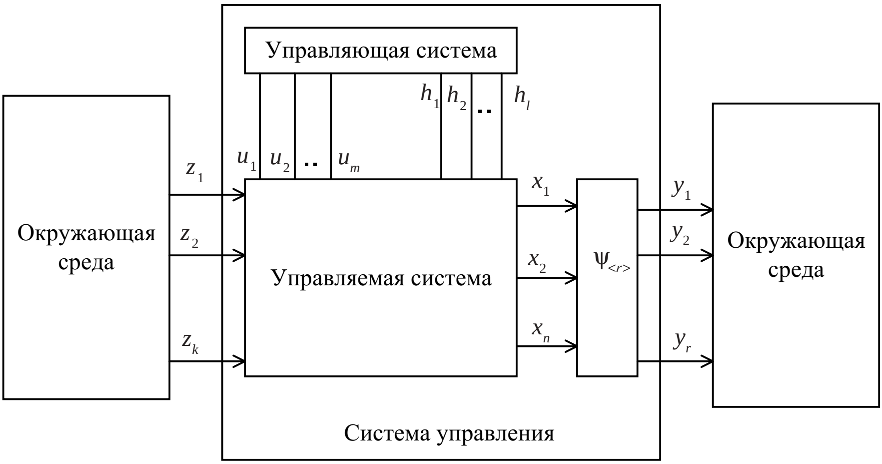

Рис. 1.2.1. Структурная схема системы управления

На схеме приняты следующие обозначения:

$Z_{<k>}(t) = <z_1(t), z_2(t), ..., z_k(t)>$ – *возмущающие переменные*, характеризующие воздействия окружающей среды на систему управления в момент времени t;

$U_{<m>}(t) = <u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)>$ – *управляющие переменные*, характеризующие целенаправленные воздействия управляющей системы на управляемую систему в момент времени t;

$X_{<n>}(t) = <x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)>$ – *переменные состояния*, характеризующие состояние управляемой системы в момент времени t;

$Y_{<r>}(t) = <y_1(t), y_2(t), ..., y_r(t)>$ – *выходные переменные*, характеризующие выходную ситуацию или воздействие системы управления на окружающую среду в момент времени t;

$H_{<l>}(t) = <h_1(t), h_2(t), ..., h_l(t)>$ – *наблюдаемые переменные* – это те переменные состояния и выходные переменные, которые наблюдаются управляющей системой в момент времени t.

Введенные переменные часто называют *параметрами*. Аргументы у всех переменных на схеме для краткости опущены.

Выходные переменные в общем случае связаны с переменными состояния функциональной зависимостью

$$Y_{<r>}(t) = \psi_{<r>}\left(X_{<n>}(t)\right), \qquad (1.2.1)$$

где $\psi_{<r>}$ – символ вектор-функции.

Используя введенные переменные, можно составить следующую математическую модель системы управления:

$$\left.\begin{array}{lr}
X_{<n>}(t) = \Phi_{<n>}\left(X_{<n>}(t_0), U_{<m>}(t), Z_{<k>}(t), H_{<l>}(t)t\right), & (1)\\
X_{<n>}(t) \in A(t), & (2)\\
U_{<m>}(t) \in B(t), & (3)\\
H_{<l>}(t) \in C(t), & (4)\\
t \in [t_0, T], &
\end{array}\right\} \quad (1.2.2)$$

где

$X_{<n>}(t_0)$ – начальное состояние управляемой системы;

$A(t)$ – область допустимых значений векторов переменных состояния управляемой системы;

$B(t)$ – область допустимых значений векторов управляющих переменных;

$C(t)$ – область допустимых значений векторов наблюдаемых переменных.

Выражения (1.2.2) описывают состояние системы в любой момент времени на интервале $[t_0,T]$, а совместно с выражением (1.2.1) – выходную ситуацию в том же интервале времени.

Уравнение (1) в модели (1.2.2) представляет собой функциональную зависимость вектора состояний системы от начального состояния управления, возмущений, наблюдаемости системы, времени. Выражения (2)–(4) в этой модели являются математической формулировкой ограничений на состояния системы, управление и наблюдаемость переменных.

Все учитываемые ограничения можно разделить на два рода:

– *ограничения первого рода*, обусловленные действием законов и закономерностей природы;

– *ограничения второго рода*, обусловленные конечной величиной ресурсов, а также различных величин, которые не могут или не должны превосходить определенных пределов.

Теория управления организационными системами изучает не любые системы, а только определенный класс систем, в состав которых входят коллективы людей. Эти системы часто называют просто организациями. Наличие коллективов людей приводит к тому, что организационные системы как системы управления обладают следующими особенностями:

– сложной организацией, т. е. сложной структурой с большим количеством связей и сложной программой;

– сложным поведением в меняющейся среде;

– адаптивной устойчивостью поведения, т. е. одна и та же линия поведения системы может быть реализована при различном состоянии окружающей среды;

– наличием информационных процессов с обязательным включением стадий преобразования циркулирующей в системе информации.

1.2.2. Понятие о процессах управления

Требуемое поведение управляемой системы обеспечивается воздействиями на нее со стороны управляющей системы с целью перевода системы в состояние, в определенном смысле лучшее по сравнению с тем, которое она приняла бы без этих воздействий.

Рис. 1.2.2. Структурная схема процесса управления

При этом необходимо выполнить ряд операций, которые и составляют процесс управления. На рис. 1.2.2 представлена последовательность этапов управления с указанием выполняемых операций. Последний этап (коррекция решения) выполняется в том случае, если цель управления в результате не достигнута.

Таким образом, понятие управления может быть конкретизировано следующим образом.

Определение 1.2.4. ***Управление*** – это воздействие на управляемую систему, выбранное на основании информации о поведении системы и состоянии окружающей среды из множества допустимых воздействий для достижения поставленной цели.

Сущность управления состоит в изменении организации системы (структуры, функции, отношения и программы) для обеспечения ее требуемого поведения.

Чтобы управление было реально осуществимо, необходимо выполнение следующих условий:

– *наблюдаемости*, т. е. управляющая система должна знать текущее состояние управляемой системы;

– *управляемости*, т. е. система должна располагать всеми ресурсами, необходимыми для реализации управления. Кроме того, управление должно оказывать соответствующее влияние на управляемую систему;

– *полноты учета воздействий окружающей среды*, т. е. все существенные для поведения системы воздействия должны быть учтены при управлении;

– *осуществимости закона необходимого разнообразия*, т. е. должно существовать достаточное количество линий поведения системы, обеспечивающих достижение цели;

– наличия четко сформулированной цели управления и *критерия оценивания качества* управления.

Задачи, решаемые при управлении, можно разделить на три класса: планирования; координации; оперативного управления.

Планирование является начальным этапом управления. При планировании осуществляется выбор целей системы, определяются средства и способы достижения цели с учетом достаточно стабильных факторов, требуемые ресурсы, их источники и способ распределения ресурсов между элементами системы.

Целью планирования является составление плана на достаточно продолжительный интервал времени. Длительность интервала планирования ограничивается наличием некоторого постоянства в организационной системе. Это постоянство, стабильность может определяться, например, стабильностью параметров системы, постоянством законов изменения параметров, законов распределения случайных параметров, стабильностью числовых характеристик параметров системы.

Составленный план определяет конечное состояние, в которое должна перейти система, и распределение ресурсов, обеспечивающее этот переход.

Координация состоит в установлении постоянных и временных взаимоотношений между элементами системы, в определении порядка и условий их функционирования, обеспечивающих наилучшее в определенном смысле достижение поставленных целей.

Координация включает в себя решение задач двух классов:

– установления операционных правил, предписывающих порядок действия подсистемам и элементам системы;

– практического обеспечения выполнения этих правил.

Решение задач первого класса фактически связано с изменением организации системы и состава элементов в подсистемах, так как установление новых операционных правил приводит к изменению функций подсистем и взаимосвязей между ними. Способы решения этих задач обычно называют способами координирования, среди которых можно выделить следующие:

– прогнозирования взаимодействий;

– оценки взаимодействий;

– "развязывания" взаимодействий;

– способ наделения ответственностью;

– способ создания коалиций.

В рамках каждого из способов изменение организации системы происходит в результате изменения целей либо ресурсов. Следует отметить, что решение задач первого класса составляет существо самоорганизации организационных систем.

Решение задач второго класса (практического обеспечения выполнения операционных правил) связано непосредственно с управлением подсистемами и элементами системы и состоит в выборе величины и формы координирующего воздействия на них при фиксированной организации системы.

В общем случае координирование подсистем и элементов означает такое воздействие на них, которое заставляет их действовать согласованно. Оценка результатов координации осуществляется по отношению к общей глобальной цели, поставленной перед всей системой.

Оперативное управление состоит в обеспечении функционирования системы в соответствии с намеченным планом и условиями, определенными на этапе координации. Оно заключается в периодическом или непрерывном сравнении поведения системы с требуемым и соответствующем изменении его с помощью управляющих воздействий.

Целью оперативного управления является реализация во времени составленного плана, поэтому оно всегда должно рассматриваться как функция времени. Отсюда вытекает такая особенность оперативного управления, как осуществление его в темпе, соответствующем динамике поведения системы и изменения состояния окружающей среды. Это накладывает некоторые ограничения на процессы оперативного управления, что необходимо учитывать при выборе способов определения наилучшего в том или ином смысле оперативного управления.

1.2.3. Методы управления и структуры системы управления

Процесс управления обязательно включает в себя этап принятия решения. Поэтому в системе управления, а именно в управляющей системе, должен быть элемент, осуществляющий реализацию данного этапа и уполномоченный на принятие решения.

В зависимости от распределения полномочий на принятие решения между элементами системы методы управления и системы, реализующие эти методы, подразделяются на централизованные, децентрализованные и смешанные.

В *централизованной* системе все решения на управление принимает один орган, в *децентрализованной* системе все решения принимаются отдельными элементами системы независимо и не корректируются другими элементами. В *смешанных* системах полномочия на принятие решений на управление распределяются между элементами системы различным образом.

Наибольшее распространение получили смешанные системы управления с *иерархической*, или многоуровневой, структурой. Такие системы называются иерархическими. В них функции управления распределены между несколькими органами управления различного уровня (ранга). При этом орган управления любого уровня, за исключением самого высокого и самого низкого уровней, управляет органами более низкого уровня, которые находятся в его подчинении, и сам, в свою очередь, управляется органом более высокого уровня.

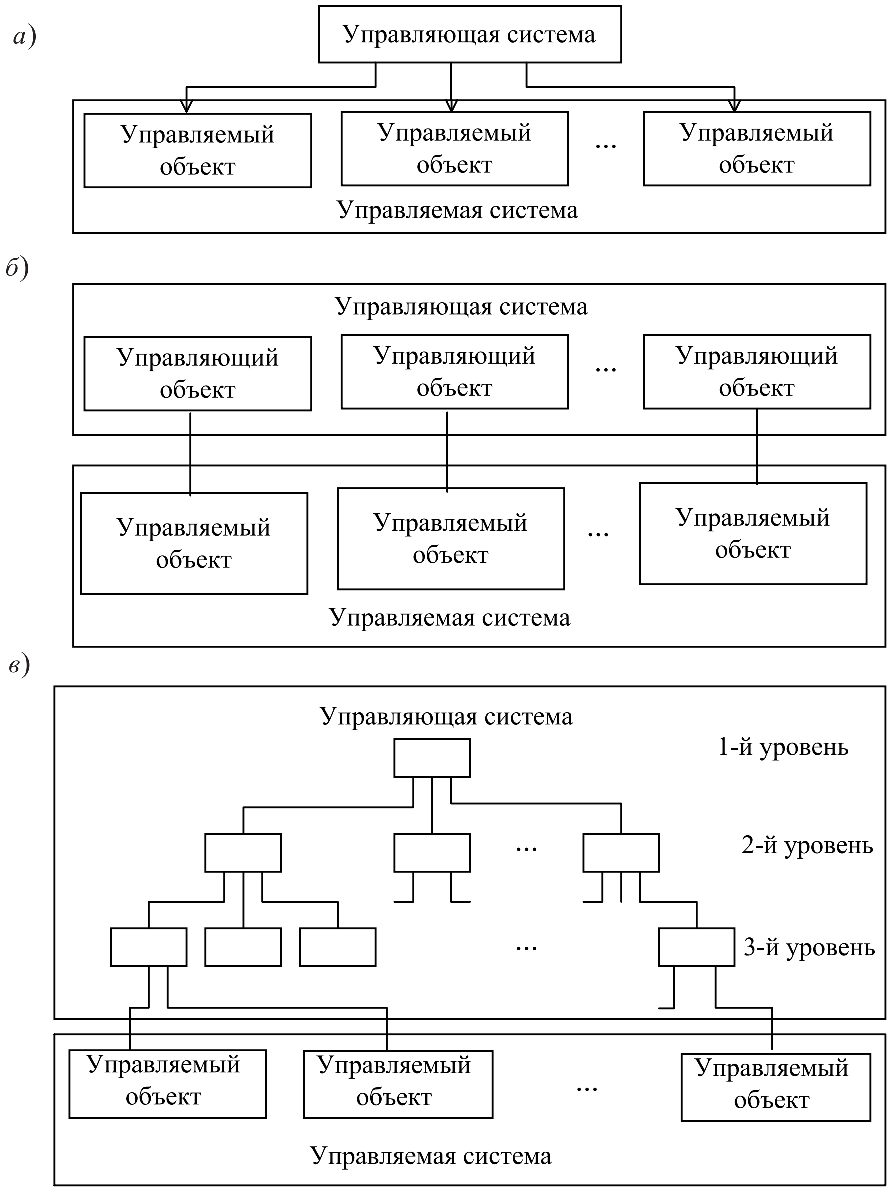

Рис. 1.2.3. Структурные схемы систем управления: *а* – централизованной; *б* – децентрализованной; *в* – иерархической

Структурные схемы централизованной, децентрализованной и иерархической систем управления представлены на рис. 1.2.3. Наиболее часто в иерархических системах управления встречаются двух- и трехуровневые управляющие системы.

В централизованных системах управляющему органу в принципе доступна вся получаемая об управляемых объектах информация. Если образуемые этой информацией информационные потоки малы, а требования к оперативности управления невысоки, то централизованная структура системы управления обладает определенными преимуществами при управлении по сравнению с децентрализованной. Если же интенсивность информационных потоков в системе велика, то при жестких требованиях к оперативности управления централизованная система не справится с обработкой получаемой информации, что приведет к снижению качества управления. В этом случае предпочтительней является децентрализованная структура системы управления, так как каждому управляющему органу оказывается доступной только часть всей получаемой об управляемых объектах информации, а именно информация только о своем объекте. Поэтому в децентрализованных системах легче обеспечить обработку всей поступающей информации, что является достоинством таких систем при наличии в них мощных информационных потоков. В то же время в системах с децентрализованной структурой управление каждым управляемым объектом осуществляется без учета состояния и поведения других управляемых объектов, что является существенным недостатком таких систем.

В иерархических системах каждый вышестоящий уровень управления получает от нижестоящего уровня только прошедшую специальную обработку информацию, позволяющую сжать исходную информацию, доведя ее объем до приемлемого с сохранением существенных для управления сведений о системе. Поэтому в иерархических системах управляющий орган самого высокого уровня получает всю необходимую для управления системой информацию, но в таком обобщенном и сжатом виде, в каком обеспечивается возможность ее оперативной обработки. Это означает, что системы управления с иерархической структурой обладают всеми достоинствами централизованных и децентрализованных систем, в то же время они практически избавлены от их недостатков.

Методы управления подразделяются также по способу реализации тех или иных этапов информационных процессов, протекающих в системах управления, на методы управления: в разомкнутых и замкнутых системах.

Система управления называется *разомкнутой*, если на управление не оказывает влияния фактический ход управляемого процесса. В разомкнутых системах используется два метода управления: по жесткой программе и с компенсацией возмущающих воздействий.

Система управления называется *замкнутой*, если при управлении учитывается фактический ход управляемого процесса. В замкнутых системах управления применяются следующие методы управления: стабилизация, программное управление, отслеживание.

В организационных системах применяются все указанные методы управления, а также их всевозможные комбинации.

Так как на выбор методов управления большое влияние оказывают условия получения информации, используемой при управлении, а также ее объем и достоверность, то по объему этой информации различают управление при *полной* и *неполной* информации.

Наличие полной информации об управляемом объекте и окружающей среде позволяет хотя бы в принципе определить и реализовать наилучшее в том или ином смысле управление. Отсутствие хотя бы части необходимой для управления информации резко ухудшает условия определения такого управления. Поэтому в условиях неполной информации используются методы, позволяющие наилучшим образом применять имеющуюся информацию, а также производить сбор ее в процессе управления. К таким методам относятся, например, методы адаптивного управления.

Достоверность используемой информации в значительной степени определяется характером воздействия окружающей среды. В этом случае различают управление в *конфликтной* и *неконфликтной* ситуации.

В неконфликтных ситуациях окружающая среда нейтральна по отношению к результатам управления. В конфликтных ситуациях окружающая среда активно реагирует на результаты управления и противодействует ему. Поэтому используемая информация в этих ситуациях может не только иметь малую степень достоверности, но и содержать дезинформацию, выдаваемую элементами окружающей среды для затруднения и даже срыва управления организационной системой.

Следует отметить особенности процессов управления в организационных системах в условиях рыночной экономики. Они обусловлены различием целей и несовпадением, а часто и противоположностью интересов таких систем, являющимися субъектами рынка. Поэтому они функционируют в особых условиях – условиях активного противодействия конкурента, цели которого прямо противоположны целям рассматриваемой системы.

В зависимости от того, какой способ воздействия на конкурента использует каждая из сторон, степень достижения цели противоборствующими сторонами будет различна. Поэтому при выработке управлений каждая из сторон должна учитывать не только свои возможности, но и поведение конкурента. Подобные ситуации относятся к конфликтным, а исследованием и разработкой методов управления в таких ситуациях занимается специальный раздел теории управления, называемый управлением в конфликтных ситуациях, а также теория игр.

1.3. ИНФОРМАЦИЯ

1.3.1. Основные понятия

Информация и информационный процесс

Информация в последнее время стала одной из самых широко употребляемых категорий современной науки. Слово "информация" в переводе с латинского означает сообщение, осведомление о чем-либо. Существующие сегодня научные направления и школы используют различные определения понятия информации. В теории управления наиболее конструктивным является подход к формированию данного понятия с позиций теории отражения, которая рассматривает информацию как одну из сторон процесса отражения в живой природе, обществе и технике, как некоторое свойство материи. Это свойство заключается в том, что любое тело (объект) способно воспроизводить (отражать) некоторые особенности воздействующих на него других объектов.

Отражение есть свойство всей материи, любой материальной системы. Оно проявляется в различных формах в зависимости от сложности и уровня развития материальной системы. С развитием самой материи развивается и совершенствуется свойство отражения, начиная от простейших форм – элементарного отражения, и кончая высшими – ощущением и сознанием. Процесс отражения и все формы отражения возникают при взаимодействии объектов материального мира. Вне этого взаимодействия процесс отражения не существует и отражение не возникает.

До определенного уровня развития материальных систем отражение имеет относительно пассивный характер, так как результаты отражения не используются отражающей системой для активного изменения своего существования. Начиная с некоторого уровня, а именно с возникновения целенаправленных и целеустремленных систем, использование результатов отражения становится необходимым условием обеспечения существования таких систем, их развития, совершенствования и воспроизводства. Поэтому процесс отражения становится активным, обеспечивая адекватное поведение целенаправленных систем. Для этого отражающая система должна воспроизводить существенные для обеспечения своего поведения свойства отражаемых объектов в такой форме, которая обеспечивала бы сохранение, передачу, преобразование и воспроизведение результатов отражения. Такие результаты отражения называют информацией.

Таким образом, *информация* – это отраженные в форме, пригодной для сохранения, передачи, преобразования, воспроизведения и использования, свойства объекта.

Объект, от которого поступает информация, называют *источником информации*. Это может быть либо сам объект, свойства которого отражены в информации, либо объект, способный хранить и передавать информацию.

Процессы получения, хранения, передачи, преобразования и воспроизведения информации, взятые в отдельности или в совокупности, называют *информационными процессами*.

В информационных процессах принято выделять следующие фазы преобразования (обращения) информации: восприятие, передача, сбор и хранение, обработка, представление, использование.

Восприятие информации состоит в том, что при отражении в отражающем объекте формируется и регистрируется след источника информации, представляющий собой его образ, по которому можно провести опознание и оценку источника.

Передача информации состоит в переносе ее тем или иным способом на расстояние.

Сбор и хранение информации заключаются в накоплении и запоминании информации (переносе информации во времени).

Обработка информации заключается в ее преобразовании к виду, позволяющему представить и использовать информацию для обеспечения целенаправленных действий.

Представление (воспроизведение) информации необходимо в случае, когда информация предназначена для использования. При этом информация должна представляться в том виде, который удобен для ее восприятия человеком.

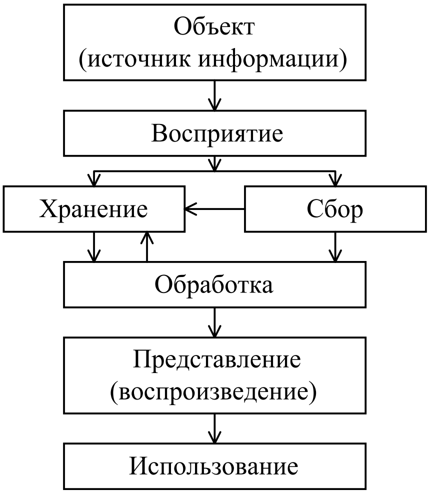

Рис. 1.3.1. Структурная схема преобразования информации в информационном процессе

Использование информации заключается в выработке и принятии на основе информации информационного решения с последующим использованием в процессе управления.

Последовательность фаз преобразования информации представлена на рис. 1.3.1.

Виды информации

При использовании информации и исследовании информационных процессов классификацию видов информации осуществляют по различным признакам, в том числе по областям знаний, к которым относится информация (военная, техническая, экономическая и др.), по физической природе восприятия информации (зрительная, слуховая, вкусовая, тактильная и др.), а также по структурно-метрическим свойствам. В последнем случае информацию классифицируют по форме представления, степени динамизма, структуре и метрическим свойствам.

По форме представления информацию принято делить на параметрическую, топологическую, абстрактную.

К *параметрической* относят информацию в виде числовых величин, которые характеризуют результаты количественных исследований явлений и объектов (результаты измерений и т. д.).

К информации в *топологической* форме (топологической информации) относят информацию в виде всевозможных точечных, линейных, плоских и пространственных фигур и изображений (карты, чертежи, снимки и т. д.).

К *абстрактной* форме относят информацию в виде обобщенных образов и понятий, представляемых обычно в виде символов (букв, знаков и т. д.) и математических соотношений.

Следует отметить, что между формами представления информации нет четкого разграничения, и всегда возможно преобразование одной формы представления информации в другую.

По динамизму информацию принято делить на связанную и свободную.

Связанной называют информацию, записанную (зафиксированную, зарегистрированную) на каком-либо носителе.

Свободной называют информацию, циркулирующую внутри системы или между системами в форме различного рода сигналов.

Классификация информации по структуре приведена в табл. 1.3.1[1].

Натуральная информация отражает реальное существование объектов. Она имеет аналоговую форму, засорена шумами, не оптимальна по диапазонам и началам отсчетов значений параметров. Все эти особенности обусловлены физическими свойствами отражаемого объекта или явления. Натуральную информацию можно представить как совокупность величин $\{x\}$, моментов времени $\{t\}$ и точек пространства $\{n\}$.

Нормализованная информация отличается от натуральной тем, что в ней каждое множество $\{x\},\{t\},\{n\}$ уже приведено к одному масштабу, диапазону, началу отсчета и другим общим унифицированным характеристикам. Нормализованную информацию можно трактовать как результат воздействия на натуральную информацию операторов: масштабного M, диапазонного D и локализованного L.

---

[1] *Темников Р. Е.* и др. Теоретические основы информационной техники: Учеб. пособие для вузов. М.: Энергия, 1979. 512 с.

Таблица 1.3.1

Классификация информации по структуре

Вид информации	Условное обозначение	Характеристика структуры
Натуральная	$\{x\}, \{t\}, \{n\}$	Первоначальная структура информации
Нормализованная	$M, D, L,$ $\{x\}, \{t\}\ \{n\}$	Приведена к единому масштабу M, диапазону D и началу отсчета L
Комплексированная	$\{y, t, h\}$	Приведена к комплексу с обобщенными координатами y, t, h
Декомпонированная	$\{x, t, n\} \begin{array}{l} \to xt \to x \\ \to xn \to t \\ \to tn \to n \end{array}$	Преобразованы число измерений, структура и расположение
Генерализованная	$G_A\ \{x, t, n\}$	Устранена избыточность, выделена существенная часть по условию A
Дискретная (квантованная)	$\{x^*\}, \{t^*\}, \{n^*\}$	Выделены отсчеты в дискретные моменты времени
Безразмерная	$\{q_x\}, \{q_t\}, \{q_n\}$	Дискретные отсчеты приведены к безразмерной форме
Кодированная	–	Информация представлена в цифровом коде или в каком-либо другом алфавите

Комплексированная информация образуется в результате приведения всей информации к полному комплексу, т. е. к трехмерной системе y, t, h, где y – обобщенная координата значений параметров или унифицированная шкала каких-либо оценок; t – обобщенная координата времени; h – обобщенная координата пространства источников информации.

Комплексированная информация представляет собой связанное и координированное множество $\{y, t, h\}$.

Изменение количества измерений структуры и расположения элементов в информационных комплексах преобразует информацию в *де-*

компонированную. Особенно часто применяют следующие два вида декомпозиции:

– приведение физического пространства трех измерений, физических полей, многомерных систем датчиков, векторных и комплексных величин к пространствам двух и одного измерений;

– приведение полного комплекса информации *y, t, h* к любой из плоскостей *yt*, *yh*, *th* или осей *y*, *t*, *h* координат измерений.

В декомпонированной информации изменены связи между элементами информации.

В *генерализованной* информации исключены второстепенные ее части, данные обобщены и укрупнены. Генерализация может охватывать как номенклатуру параметров, так и моменты времени, диапазоны измерения и степень подробности отображения параметров.

Дискретная (квантованная) информация совпадает с исходной непрерывной информацией по физической размерности, отличаясь от нее лишь прерывным характером. Дискретизация может быть осуществлена по осям *y*, *t*, *h* параметрического комплекса.

Безразмерная информация имеет безразмерную числовую форму. Число, отображающее безразмерную информацию, соответствует количеству информационных элементов (квантов) и равно отношению любой координаты к ее интервалу дискретности:

$$q_x = \frac{x}{\Delta x},\ q_t = \frac{t}{\Delta t},\ q_n = \frac{n}{\Delta n}.$$

Кодированная информация имеет форму совокупности знаков, принадлежащих алфавиту, который лежит в основе выбранной системы кодирования.

Деление информации по метрическим свойствам основано на способе ее измерения. В настоящее время для измерения информации применяются структурные, вероятностные (статистические), и семантические меры.

При применении *структурных* мер за единицу количества информации принимаются некоторые элементарные структурные единицы – кванты, и количество информации оценивается подсчетом числа квантов в информационном массиве. Структурные меры применяются для оценки количества связанной (хранящейся) информации.

При измерении количества информации с помощью *статистических* мер оценивают степень неопределенности, которую снимают при получении информации. В этом случае обычно не затрагивается смысл передаваемой информации. Данные меры широко применяются для оценки количества свободной информации (передаваемой по каналам связи).

Семантические меры позволяют оценить важность, полезность информации. Они учитывают смысл, содержание информации, давая возможность связать количество информации с эффективностью ее использования.

Так как измерение количества информации является одной из важнейших проблем, то необходимо рассмотреть указанные меры более подробно.

1.3.2. Количественные меры информации

Структурные меры информации

Структурные меры применяются для измерения только дискретной информации. Основой используемых структурных мер служат информационные элементы (кванты), под которыми понимают неделимые части информации.

Структурные меры подразделяются на геометрические, комбинаторные и аддитивные меры информации.

Геометрическая мера определяет количество информации как значение длины, площади или объема геометрической модели сообщения, отнесенное к количеству содержащихся в нем квантов.

Геометрическим методом определяют потенциальное, т. е. максимально возможное, количество информации в заданных структурных габаритах. Это количество называют *информационной емкостью*.

Количество информации при использовании *комбинаторной* меры вычисляется как количество комбинаций, которое можно составить из информационных элементов. Данной мерой измеряется потенциальное структурное разнообразие информационных комплексов. Комбинаторную меру целесообразно использовать тогда, когда требуется оценить возможности передачи различной информации при помощи алфавитно-цифровых элементов.

Прежде чем говорить об аддитивной мере информации, введем понятия глубины h и длины l слова.

Глубиной h слова называют количество различных элементов (знаков), содержащихся в принятом алфавите.

Длиной l слова называют количество знаков, необходимых и достаточных для представления заданного набора слов элементами данного алфавита.

Глубина слова соответствует основанию, а длина слова – разрядности системы счисления или кодирования.

Общее количество слов, которое может быть представлено кодами длиной l и глубиной h, определяется выражением

$$q = h^l.$$

Это означает, что информационная емкость q при таком способе оценивания экспоненциально зависит от длины слова l. Поэтому применение данной меры на практике представляет большое неудобство.

Для обеспечения возможности сложения количества информации при сложении слов и пропорциональности количества информации длине слова Хартли ввел аддитивную логарифмическую меру информации

$$I = \log_2 h^l = l \log_2 h.$$

Единицей измерения информации при применении аддитивной меры служит бит, т. е. количество информации, содержащееся в слове глубиной $h = 2$ и длиной $l = 1$.

Если информация поступает от различных источников, то при оценивании количества информации аддитивной мерой справедливо

$$I\left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} I\left(A_i\right),$$

где

$I(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ – общее количество информации от источников A_1, $A_2, \ldots, A_n$;

$I(A_i)$, $i = 1(1)n$ – количество информации от источника A_i, измеренное аддитивной мерой.

Статистические меры информации

Определение количества информации с помощью статистических мер требует привлечения вероятностного подхода. При таком подходе информация рассматривается как сообщение об исходе случайных событий, реализации случайных величин и функций, а количество информации ставится в зависимость от априорных вероятностей этих событий, величин, функций.

Исходная постановка задачи определения количества информации в данном случае может быть сформулирована следующим образом. Пусть существует некоторое конечное множество независимых событий

$$X = \{x_i\}_1^N ,$$

которые могут наступать с вероятностями P_i; $i = 1(1)N$ соответственно, причем множество вероятностей удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1.$$

Такое множество событий удобно отождествлять со множеством состояний физической системы, в каждом из которых она может оказаться с определенной вероятностью.

Априорно исходное множество событий X можно характеризовать присущей ему степенью неопределенности или энтропией, которая определяется выражением (по Шеннону)

$$H[X] = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log_a P_i .$$

В зависимости от выбора основания логарифма при вычислении энтропии получают различные единицы ее измерения. В дальнейшем будет использоваться только основание, равное двум, поэтому символ основания в выражениях для энтропии указываться не будет. Единицей измерения энтропии в этом случае служит бит, т. е. степень неопределенности системы, имеющей два равновероятных состояния.

О состоянии одной системы можно судить, наблюдая состояния другой системы.

Пусть имеются две системы X и Y. О состоянии системы X будем судить, наблюдая систему Y.

Тогда степень неопределенности X определяется условными энтропиями

$$H\left[X/y_j\right]=-\sum_{i=1}^{n}P_{X/Y}\left(x_i;y_j\right)\log P_{X/Y}\left(x_i;y_j\right);$$

$$H\left[X/Y\right]=-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}P_X\left(x_i\right)P_{X/Y}\left(x_i;y_j\right)\log P_{X/Y}\left(x_i;y_j\right);$$

$$H\left[X/Y\right]=\sum_{j=1}^{m}P_X\left(x_i\right)H\left[X/y_j\right],$$

где

$H[X/y_j]$; $j = 1(1)m$ – условная энтропия системы X относительно состояния y_j системы Y;

$H[X/Y]$ – полная условная энтропия системы X относительно системы Y;

$P_{X/Y}(x_i; y_j)$, $i = 1(1)n$, $j = 1(1)m$ – вероятность состояния x_i системы X при условии, что система Y находится в состоянии y_i;

n, m – число состояний системы X и Y соответственно;

$P_X(x_i)$, $i = 1(1)n$ – вероятность состояния x_i системы X.

Последняя формула связывает между собой условные энтропии.

Для двух систем рассматривают также совместную энтропию, определяемую выражениями

$$H[X,Y] = H[X] + H[Y/X];\quad H[X,Y] = H[Y] + H[X/Y].$$

Если до получения сообщения о состоянии системы степень неопределенности ее состояния, т. е. энтропия, была равна $H^0[X]$, а после получения сообщения стала равна $H^1[X]$, то количество информации I_X в сообщении при измерении статистическими мерами определяют как разность энтропий системы до и после получения сообщения:

$$I_X = H^0[X]–H^1[X].$$

Единицы измерения количества информации совпадают с единицами измерения энтропии.

Если наблюдение ведется за системой Y, то количество информации $I_X(Y)$, получаемое о системе X при наблюдении за системой Y, определяется выражением

$$I_X(Y) = H[X] - H[X/Y].$$

Можно показать, что количество информации $I_X(Y)$, получаемое о системе X при наблюдении за системой Y, равно количеству информации $I_Y(X)$, получаемой о системе Y при наблюдении за системой X:

$$I_X(Y) = I_Y(X),$$

где

$$I_Y(X) = H[Y] - H[Y/X].$$

Поэтому данную величину называют полной взаимной информацией и обозначают $I(X, Y)$.

Полная взаимная информация, содержащаяся в двух системах, может быть определена по формуле

$$I(X, Y) = H[X] + H[Y] - H[X, Y].$$

Семантические меры информации

Статистические и структурные меры информации не позволяют оценить содержательность информации, так как они не учитывают смысла сообщения и ценности его для адресата. Семантические меры дают возможность избежать этого недостатка. Среди семантических мер рассмотрим меры содержательности и меру целесообразности информации.

Мера содержательности в сообщении A обозначается cont (contents – содержание) и определяется в виде

$$\mathrm{cont}(A) = \mu(\rceil A) = 1 - \mu(A),$$

где μ – аддитивная функция; $\rceil$ – знак логического отрицания.

Функция μ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\mu(A) + \mu(\rceil A) = 1;\ \ 0 \le \mu(A) \le 1.$$

Значение функции $\mu(A)$ отражает истинность высказывания A, а значение $\mu(\rceil A)$ – ложность этого высказывания.

Помимо этой меры используется также аддитивная мера содержательности информации в сообщении A, которая обозначается символом inf и определяется выражением

$$\inf A = -\log \mu(A) = -\log(1 - \mathrm{cont}(A)).$$

К мерам целесообразности (ценности) информации относятся меры, которые позволяют оценить изменение эффекта какого-либо действия в результате использования информации.

Такой мерой является мера Харкевича, который предложил оценивать целесообразность информации по формуле

$$X = \log \frac{P_1}{P_0},$$

где P_0 – вероятность достижения цели до получения информации; P_1 – вероятность достижения цели после получения и использования информации.

Если $X > 0$, то информация обеспечивает приращение эффекта. Если $X = 0$, то использование информации бесполезно. Если $X < 0$, то использование информации уменьшает конечный эффект, а, следовательно, она не только бесполезна, но и вредна. В частности, это возможно, когда используют ложную информацию либо дезинформацию. Еще один подход к измерению ценности информации связан с учетом способности адресата к восприятию информации. Чтобы иметь возможность воспринимать информацию, адресат должен обладать вполне определенной системой знаний. В этом случае ценность информации можно определять по степени изменения системы знаний после получения и переработки информации.

Пусть система знаний адресата оценивается величиной T, которую будем называть тезаурусом. Ценность $s(I, T)$ информации I, воспринимаемой адресатом с тезаурусом T, соответствует величине изменения тезауруса адресата.

График, качественно отражающий зависимость ценности $s(I, T)$ информации $I = I_1$ от тезауруса T адресата, приведен на рис. 1.3.2.

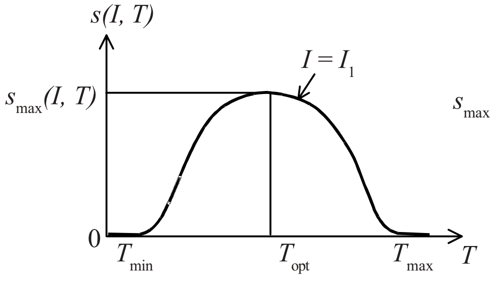

Рис. 1.3.2. Зависимость ценности $s(I, T)$ информации $I = I_1$ от тезауруса T

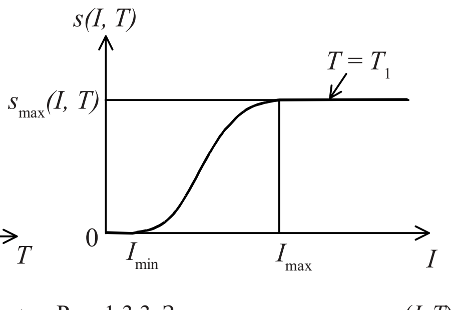

Рис. 1.3.3. Зависимость ценности $s(I, T)$ информации I для адресата, обладающего тезаурусом T_1

Если тезаурус $T < T_{min}$, то информация I_1 адресатом просто не воспринимается, поэтому ценность такой информации для адресата равна нулю. Если $T_{min} \le T < T_{max}$, то адресат воспринимает информацию I_1, и под действием этой информации увеличивает свой тезаурус. Следовательно, в этом интервале изменения тезауруса информация имеет для адресата определенную ценность. При этом наибольшее изменение тезауруса соответствует $T = T_{opt}$, и соответственно в этой точке информация I_1 имеет наибольшую ценность для адресата. При $T > T_{opt}$ тезаурус является достаточно большим, поэтому информация I_1 мало влияет на него. Наконец, при $T \leq T_{max}$ тезаурус оказывается настолько большим, что информация I_1 не может оказать на него какого-либо воздействия.

График, качественно отражающий зависимость ценности $s(I, t)$ информации для адресата, обладающего тезаурусом $T = T_1$, от количества информации I, представлен на рис. 1.3.3.

Если $I < I_{min}$, то для адресата, обладающего тезаурусом $T = T_1$, эта информация ценности не имеет, так как не оказывает влияния на тезаурус. При $I_{min} \leq I < I_{max}$ информация I является ценной, так как позволяет увеличить тезаурус. При $I \geq I_{max}$ ценность информации I не возрастает, так как количество информации стало столь большим, что адресатом воспринимается только часть этого количества, соответствующая максимально возможному изменению тезауруса. Поэтому ценность информации при $I \geq I_{max}$ равна $s_{max}(I, T)$.

В заключение следует отметить следующее. Никакое преобразование сообщений не позволяет увеличить количество содержащейся в них информации. Однако ценность информации в процессе преобразований может увеличиться, если информация после преобразования станет более доступной адресату.

1.4. МОДЕЛЬ

1.4.1. Определения

Исследование организационных систем и протекающих в них процессов путем наблюдения за ними или проведения на системах эксперимента для выявления интересующих исследователя свойств и характеристик систем, а также закономерностей протекающих в них процессов сопряжено со значительными трудностями. Это обусловлено сложностью исследуемых объектов, большими материальными и временными затратами на наблюдение и проведение эксперимента, ненаблюдаемостью многих параметров и характеристик систем и процессов. Кроме того, проведение эксперимента на системах в отдельных случаях оказывается невозможным, так как связано с разрушением и уничтожением исследуемой системы либо с нанесением невосполнимого ущерба отдельным личностям и коллективам людей. Поэтому основным методом изучения организационных систем и протекающих в них процессов, в том числе процессов управления, является моделирование.

Определение 1.4.1. ***Моделирование*** – это метод изучения сложного объекта путем его замены более удобным для исследования объектом, сохраняющим существенные черты изучаемого объекта, а также процесс построения замещающего объекта.

Определение 1.4.2. ***Модель*** – это объект любой природы, который, отображая или воспроизводя исследуемый объект, способен замещать его так, что изучение замещающего объекта позволяет получить новую информацию о замещаемом объекте.

Замещаемый при моделировании объект называют *оригиналом*. Сущность моделирования состоит в замещении оригинала моделью, исследовании модели и переносе полученных при исследовании результатов на оригинал. Такой перенос становится правомерным только при соблюдении определенных условий, к которым относится наличие у оригинала и модели сходства, подобия или аналогии.

Говорят, что объекты сходны между собой, если у них существует хотя бы один общий признак. При сходстве объектов одной физической природы говорят о подобии, а при сходстве объектов различной физической природы – об аналогии этих объектов. Моделирование можно рассматривать как разновидность и дальнейшее развитие метода аналогии.

При установлении между оригиналом и моделью аналогии, т. е. сходства данных объектов по каким-либо свойствам, признакам, объективным основанием для логического переноса признаков с одного объекта на другой служит то, что свойства любого объекта тесно взаимосвязаны между собой, причем изменение любого существенного признака, как правило, сказывается и на других признаках. Поэтому можно предполагать, что если два объекта обладают одинаковой совокупностью определенных свойств, а у одного из объектов выявлены дополнительные свойства, то и другой объект обладает этими же свойствами.

Общим для всех выводов по аналогии является то, что в каждом случае непосредственному исследованию подвергается один объект, а вывод делается для другого, что определяется в самом общем смысле как перенос информации с одного объекта на другой.

Следует отметить, что, как бы ни было велико сходство между оригиналом и моделью, всегда между ними имеется более или менее существенное различие. Поэтому выводы по аналогии носят не абсолютно достоверный, а более или менее приблизительный, вероятностный характер и всегда нуждаются в дополнительной проверке. Степень достоверности этих выводов зависит от уровня сходства, подобия или аналогии между оригиналом и моделью. Различие в уровне сходства может быть отражено с помощью логико-математических понятий изоморфизма и гомоморфизма, определяющих степень одинаковости, подобия объектов.

Определение 1.4.3. Системы называются ***изоморфными***, если между их элементами, а также функциями, свойствами и отношениями, осмысленными для этих систем, существует или может быть установлено взаимно-однозначное соответствие.

Каждая из изоморфных систем называется *изоморфным* образом другой, а отношение между ними – *изоморфизмом*.

Условия, которым должны отвечать изоморфные системы A и B, могут быть сформулированы следующим образом.

1. Каждому элементу a системы A соответствует один и только один элемент b системы B и наоборот.

2. Каждой функции φ, определенной для системы A, соответствует одна и только одна функция Ψ, определенная для системы B, и наоборот.

3. Каждому свойству P, определенному для системы A, соответствует одно и только одно свойство Q, определенное для системы B, и наоборот.

4. Каждому отношению R, определенному для системы A, соответствует одно и только одно отношение S, определенное для системы B, и наоборот.

Изоморфизм, как и отношение типа равенства, обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Рефлексивность изоморфизма означает, что система всегда изоморфна самой себе. Симметричность изоморфизма свидетельствует, что, если система A изоморфна системе B, то и система B изоморфна системе A. Из транзитивности изоморфизма следует, что, если система A изоморфна системе B, а система B изоморфна системе C, то и система A изоморфна системе C.

Изоморфные системы эквивалентны друг другу в той мере, в какой они являются изоморфными. Поэтому изоморфизм систем служит основанием для правомерного переноса знаний, полученных при изучении одной изоморфной системы, на другую, обеспечивая тем самым высокую достоверность результатов моделирования.

Существенным недостатком изоморфного моделирования является сложность изоморфной модели, сравнимая со сложностью оригинала. Это приводит практически к тем же трудностям, с какими приходится сталкиваться при непосредственном исследовании оригинала.

Определение 1.4.4. Системы называются ***гомоморфными,*** если элементам, функциям, свойствам и отношениям, определенным для одной системы, могут быть поставлены в однозначное соответствие элементы, функции, свойства и отношения, определенные для другой системы.

Для гомоморфных систем A и B выполняются следующие условия.

1. Каждому элементу a системы A соответствует один и только один элемент b системы B.

2. Каждой функции φ, определенной для системы A, соответствует одна и только одна функция Ψ, определенная для системы B.

3. Каждому свойству P, определенному для системы A, соответствует одно и только одно свойство Q, определенное для системы B.

4. Каждому отношению R, определенному для системы A, соответствует одно и только одно отношение S, определенное для системы B.

При выполнении указанных условий система A называется *гомоморфным прообразом* системы B, система B – *гомоморфным образом* системы A, а отношение между системами A и B – *гомоморфизмом*.

Сравнение условий, которым удовлетворяют изоморфные и гомоморфные системы, показывает, что изоморфизм есть частный случай гомоморфизма, т. е. изоморфизм всегда является гомоморфизмом, обратное же будет неверно.

Гомоморфизм, в отличие от изоморфизма, не обладает свойством симметричности. Если для изоморфных систем каждая система служит изоморфным образом другой и может быть выбрана в качестве модели, то при гомоморфизме лишь одна система будет образом другой, причем гомоморфным образом, который как бы упрощает гомоморфный прообраз, допуская соответствие множества элементов, функций, свойств, отношений, определенных для прообраза, одному элементу, функции, свойству, отношению, определенному для образа. Будучи несимметричным отношением, гомоморфизм допускает лишь односторонний перенос информации, а именно с гомоморфного образа на прообраз, но не наоборот. Поэтому при гомоморфизме в качестве модели, как правило, выбирают гомоморфный образ, а в качестве оригинала – гомоморфный прообраз.

В настоящее время используют два подхода к построению гомоморфных моделей.

Первый подход состоит в исключении из рассмотрения несущественных элементов, функций, свойств и отношений исследуемой системы (оригинала). В результате получают более простую систему (модель), пространство состояний которой имеет размерность меньшую, чем пространство состояний исходной системы. При этом каждому состоянию исходной системы будет соответствовать только одно состояние упрощенной системы, обратное будет неверно.

Второй подход состоит в объединении некоторого множества состояний исследуемой системы в одно, например, путем перехода от рассмотрения всех состояний из данного множества к рассмотрению только принадлежности состояния к множеству. В результате также получают более простую систему с пространством состояний, меньшей размерности, чем у исходной, и однозначным соответствием состояний исходной системы состояниям упрощенной. Обратное соответствие будет неоднозначным.

Введенные понятия гомоморфизма и изоморфизма позволяют дать более строгое определение модели. Пусть A, B, A^1, B^1 – системы.

Определение 1.4.5. Система A есть ***модель*** системы B, если существуют изоморфные между собой гомоморфные образы A^1 и B^1 этих систем.

Отношение между системами A и B, вводимое данным определением, будем называть модельным отношением. Оно является общим случаем отношений изоморфизма и гомоморфизма. Изоморфизм из модельного отношения получается при отождествлении систем A с A^1 и B с B^1, а гомоморфизм – при отождествлении либо A с A^1, либо B с B^1.

Модельное отношение является отношением типа равенства. Оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Поэтому любая из систем *A* и *B* с одинаковым правом может служить моделью другой. Решение о том, какую систему считать моделью, а какую – оригиналом при наличии между рассматриваемыми системами модельного отношения, определяется целями моделирования.

Основными целями моделирования являются:

– описание строения и поведения системы;

– построение теорий и гипотез, объясняющих наблюдаемое строение и поведение системы;

– прогнозирование будущего строения и поведения системы.

К основным принципам моделирования относятся:

– целенаправленность моделирования;

– "удобство" модели для проведения исследований;

– соответствие степени адекватности модели целям моделирования.

Принцип целенаправленности моделирования означает, что модель должна быть средством достижения целей, ради которых осуществляется моделирование.

Принцип "удобства" модели говорит о том, что проведение исследований на модели должно быть проще и удобнее, чем на оригинале, а получаемые результаты исследований – допускать достаточно простую интерпретацию.

Принцип соответствия степени адекватности модели целям моделирования предполагает, что требуемая адекватность модели оригиналу определяется целями исследования. Если адекватность модели будет ниже требуемой, то результаты моделирования будут недостаточно достоверными, чтобы обеспечить достижение цели моделирования. Если же адекватность модели оригиналу будет выше требуемой, то сложность модели может не обеспечить выполнения принципа "удобства" модели, т. е. модель может оказаться сравнимой по сложности с оригиналом, либо результаты моделирования могут не поддаваться интерпретации. В этом случае цели моделирования также не будут достигнуты.

Перечисленные выше цели и принципы моделирования позволяют сформулировать следующие требования к модели, которая должна:

– объективно соответствовать моделируемому объекту;

– позволять замещать изучаемый объект на определенных этапах исследования;

– давать в ходе исследования новую информацию, допускающую опытную проверку;

– содержать совокупность достаточно четких правил перехода от модельной информации к информации о моделируемом объекте.

Кроме того, модель должна быть:

– простой и понятной пользователю;

– целенаправленной;

– надежной в смысле гарантии от получения абсурдных результатов;

– удобной в обращении;

– полной с точки зрения достижения основных целей;

– адаптивной, т. е. допускающей изменение и развитие модели по мере получения дополнительной информации;

– повторяемой.

В настоящее время модели широко примененяются как средства отражения и осмысления реального мира, общения, обучения и тренажа, прогнозирования и экспериментирования. Одним из наиболее важных применений моделей является прогнозирование поведения моделируемых объектов.

1.4.2. Классификация моделей и методов моделирования

Одним из основных признаков, по которым проводится классификация моделей и методов моделирования, являются средства моделирования или способ реализации модели. По этому признаку моделирование подразделяется на материальное и идеальное (рис. 1.4.1).

При *материальном моделировании* моделями служат материальные объекты, отражающие в той или иной степени свойства объектов моделирования. Модели в этом случае либо строятся исследователем, либо отбираются им в окружающем мире. В зависимости от степени сходства модели и оригинала различают три основных вида материального моделирования: геометрическое, физическое и аналоговое.

При *геометрическом моделировании* в качестве модели используются материальные объекты, геометрически подобные оригиналу (макеты, муляжи, копии и т. д.), воспроизводящие пространственно-геометрические характеристики оригинала безотносительно к его физической природе. В основу построения геометрических моделей положено определение подобия в геометрии, согласно которому два объекта считаются геометрически подобными, если можно добиться их совмещения

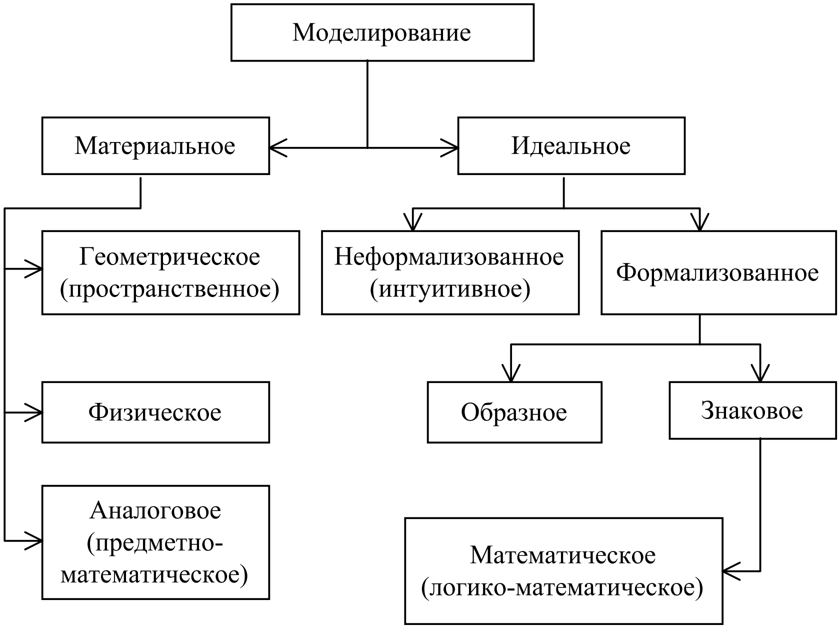

Рис. 1.4.1. Классификация моделей и методов моделирования по средствам моделирования

с помощью линейных преобразований. В управлении геометрические модели находят незначительное применение.

При *физическом моделировании* моделями служат материальные объекты, подобные оригиналу и имеющие с ним одинаковую физическую природу. Основу физического моделирования составляют теория подобия и теория размерностей. Физические модели широко применяются в технике при разработке и проектировании технических систем. В первую очередь это относится к таким областям техники, как гидротехника, самолето- и кораблестроение.

Аналоговое моделирование основывается на наличии сходства между объектами различной физической природы, т. е. аналогии между моделью и оригиналом. Чаще всего при аналоговом моделировании используют тождественность математического описания процессов в оригинале и модели. При такой трактовке аналоговая модель представляет материальную систему, в которой происходят физические процессы, отличные от процессов в оригинале, но те и другие могут быть описаны одинаковыми или подобными математическими выражениями. Аналоговые модели относятся к моделям п р я м о й аналогии, если моделирование осуществляется с помощью реальных материальных объектов, и к моделям н е п р я м о й аналогии, если для моделирования используются аналоговые ЭВМ.

Во всех случаях материального моделирования модель – это материальное отражение исходного объекта. Исследование состоит в материальном воздействии на нее, т. е. в экспериментировании с моделью. Поэтому материальное моделирование по своей природе является экспериментальным методом.

Идеальное моделирование основывается не на материальной, а на идеальной, мыслимой связи между объектами. В этом его принципиальное отличие от материального моделирования. В идеальном моделировании различают формализованное и неформализованное (интуитивное).

При *неформализованном моделировании* моделью является не зафиксированное точно мысленное отражение моделируемого объекта, служащее основой для рассуждений и принятия решений. Эффективность такого моделирования в значительной степени зависит от опыта и интуиции лица, его осуществляющего. Другим недостатком неформализованных моделей является их плохая повторяемость при воспроизведении таких моделей разными лицами, так как один и тот же объект может восприниматься разными исследователями по-разному, что может привести не только к несовпадающим, но и прямо противоположным выводам.

При *формализованном моделировании* моделями служат системы знаков или образов, вместе с которыми задаются правила их преобразования и интерпретации.

Образное моделирование использует в качестве моделей идеальные образы исследуемых объектов, причем эти образы воспринимаются всеми исследователями одинаково, а правила взаимодействия образов, используемых в модели, четко фиксированы. Примером таких моделей являются идеальный газ, идеальная жидкость – в физике, точка, линия – в геометрии и т. д. Исследования на таких моделях принято называть мысленным экспериментом.

Знаковое моделирование использует в качестве моделей системы знаков в совокупности с правилами их преобразования и интерпретации. Знаки могут быть различными. Примерами знаковых моделей могут служить карты местности, химические формулы, описания объектов на любом из языков. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, а знаковой модели – математическая модель.

Определение 1.4.6. ***Математическая модель*** – это знаковая модель исследуемой системы, составленная на языке математики.

Математическая модель представляет собой совокупность математических выражений, отражающих существенные для исследования свойства моделируемого объекта.

Определение 1.4.7. ***Математическое моделирование*** – это процесс построения и оперирования математической моделью с целью получения информации о моделируемом объекте.

Формализованное моделирование можно подразделить также на частично формализованное, допускающее в известных пределах неоднозначность и вариабельность описаний свойств и характеристик моделируемого объекта в семантическом и синтаксическом отношениях, и вполне формализованное. Основными признаками подкласса вполне формализованных моделей являются, во-первых, абстрактный характер всех структурных компонент модели, которые должны представлять собой формально описанные элементы некоторого жесткого языка с его семантикой, и, во-вторых, вполне однозначный синтаксис, определяющий операции, которые допустимы над этими элементами, а также порядок выполнения допустимых операций.

Математические модели относятся к классу вполне формализованных моделей.

По сравнению с другими видами моделирования математическое моделирование как метод исследования обладает следующими преимуществами:

– *универсальностью*, обусловленной универсальностью математики как языка описания и метода исследования объектов окружающего мира;

– *практическим отсутствием ограничений на применение*, так как математическое моделирование пригодно для исследования любых объектов;

– *высокой адаптивностью*, т. е. возможностью внесения требуемых изменений в модель при необходимости;

– *меньшими материальными и временными затратами на моделирование*;

– *возможностью проведения исследований на критических режимах*, которые приводят к разрушению материальных моделей.

Особенно ярко преимущества математического моделирования проявились с появлением ЭВМ. Моделирование с помощью ЭВМ позволило решать многие задачи исследования, которые по уровню сложности и затратам на их решение не могли быть решены другими методами. К таким задачам относятся задачи управления сложными организационными системами и исследования в них информационных процессов. Поэтому математическое моделирование является важнейшим методом исследования в теории управления и кибернетике.

Модели и методы моделирования кроме рассмотренного аспекта классификации, а именно по средствам моделирования, могут быть классифицированы по характеристикам моделируемого объекта, которые отражаются в модели. Так как основными характеристиками систем являются их структура и поведение (функционирование), то по данному признаку различают следующие виды моделирования: структурное, структурно-функциональное, функционально-структурное, функциональное.

При структурном моделировании оригинал и модель отождествляются на основе сходства, подобия, аналогии их структур.

При функциональном моделировании оригинал и модель отождествляются на основе сходства, подобия, аналогии их функционирования.

Структурно-функциональное и функционально-структурное моделирование являются промежуточными случаями структурного и функционального моделирования, различающимися степенью учета структуры и функционирования оригинала при моделировании.

1.5. КВАЛИМЕТРИЯ МОДЕЛЕЙ

1.5.1. Определения

Квалиметрия (теория количественного оценивания качества) – научная дисциплина, изучающая методологию и проблематику комплексного количественного оценивания качества объектов.

Как и любая теория, квалиметрия имеет свои объекты и свой предмет изучения. Для выявления этих объектов, а также предмета изучения квалиметрии введем следующие определения.

Определение 1.5.1. ***Свойство*** – характерная черта, отличие, своеобразие, особенность объекта, внутренне присущая ему.

Определение 1.5.2. ***Простое свойство*** – свойство, которое нельзя представить в виде какой-либо совокупности других свойств объекта.

Определение 1.5.3. ***Сложное свойство*** – свойство, которое представимо в виде некоторой совокупности свойств объекта.

Таким образом, каждый объект обладает свойствами, определяющими его индивидуальность, выделяющими его из множества других объектов и позволяющими отличать один объект от другого. Этих свойств у объекта бесконечно много, и все они могут быть подразделены на простые и сложные. Простые свойства при конкретном исследовании нельзя разложить на составляющие, сложные могут быть разложены на составляющие свойства. Следует отметить, что такое деление имеет относительный характер, так как одно и то же свойство при одном рассмотрении может быть простым, а при другом – сложным.

Определение 1.5.4. ***Группа свойств*** – любая совокупность свойств объекта.

Определение 1.5.5. ***Признак*** объекта – устойчивая совокупность свойств объекта, используемая для различения объектов или их классификации.

Определение 1.5.6. ***Характеристика*** свойства – описание свойства объекта.

Характеристика имеет наименование и значение. Наименование характеристики совпадает с названием свойства. Характеристики свойств могут быть качественные и количественные.

Количественная характеристика – описание свойства с помощью некоторой переменной, значения которой характеризуют уровень или интенсивность этого свойства.

Такую переменную обычно называют *величиной*.

Определение 1.5.7. ***Показатель свойства*** – количественная характеристика свойства.

Различают частные, групповые и обобщенные показатели свойств объекта.

Определение 1.5.8. ***Частным показателем*** свойства назовем показатель простого свойства.

Определение 1.5.9. ***Групповым показателем*** свойства назовем показатель группы свойств.

Определение 1.5.10. ***Обобщенным показателем*** свойства будем называть показатель сложного свойства.

Введенные определения позволяют дать следующее определение основного понятия квалиметрии, а именно качества.

Определение 1.5.11. ***Качество*** – сложное свойство объекта, обусловливающее его пригодность для использования по назначению.

Исходя из определения качества *объектами изучения* квалиметрии являются все объекты, обладающие качеством, т. е. те объекты, которые предназначены для использования с какой-либо целью, для удовлетворения определенной потребности.

Такими объектами могут быть как различные предметы, так и различные процессы. Несомненно, что в их круг, в первую очередь, входят целенаправленные (целеустремленные) системы и процессы.

Предметом изучения квалиметрии является качество объектов, т. е. совокупность свойств, обусловливающих пригодность применения объектов по назначению.

Модели и процессы моделирования в соответствии с приведенными выше определениями обладают качеством и, следовательно, являются объектами изучения квалиметрии, а так как качество моделей и моделирования как предмет изучения имеет свои особенности, то вполне оправдано выделение в квалиметрии такого научного направления, как квалиметрия моделей.

Определение 1.5.12. ***Показатель качества*** – количественная характеристика качества объекта.

Определение 1.5.13. ***Частный показатель качества*** – показатель свойства, входящего в состав группы свойств, характеризующих качество.

Частные показатели качества составляют векторный показатель качества

$$K^{\text{об}}_{\langle m \rangle} = \left\langle k_1^{\text{об}}, k_2^{\text{об}}, \ldots, k_m^{\text{об}} \right\rangle,$$

где $k_i^{\text{об}}$, $i = 1(1)m$ – частные показатели качества объекта.

Требуемое качество объекта задается условиями или требованиями, которым должны удовлетворять возможные значения показателя его качества. Эти условия называются *критериями оценивания* качества объекта, а проверка их выполнимости – *оцениванием*.

Критерии оценивания качества объектов могут быть разбиты на три группы: пригодности G, оптимальности O, превосходства S. Дадим их математические формулировки.

Пусть:

n – количество оцениваемых объектов;

m – число частных показателей качества объектов;

k_{ij}, $i = 1(1)m$, $j = 1(1)n$ – показатель i-го свойства j-го объекта;

$K_{\langle m \rangle}^{(j)} = \left\langle k_{ij},\ \ldots,\ k_{mj} \right\rangle$ – векторный показатель качества j-го объекта, $j = 1(1)n$;

$\left\{k_i^{д}\right\},\ i = 1(1)m$ – множество допустимых значений показателя k_{ij}, $j = 1(1)n$.

Тогда критерии перечисленных выше классов можно сформулировать следующим образом.

Критерий пригодности

$$G : \bigcap_{i=1}^{m} \left(k_{ij} \in \left\{ k_i^{д} \right\} \right) \approx U,\ \ j \in \left[1(1)n \right], \tag{1.5.1}$$

где U – достоверное событие.

По определению, объекты, для которых выполняется условие (1.5.1), пригодны для использования по назначению и при этом обладают одинаковым качеством.

Критерий оптимальности

$$O : \bigcap_{i=1}^{m} \left(k_{ij} \in \left\{ k_i^{д} \right\} \right) \cup \bigcup_{\forall l \in \{l\}_{m_0}} \left(k_{lj} = k_l^{\mathrm{opt}} \right) \approx U,$$

$$j \in \left[1(1)n \right],\ \ m_0 \in \left[1(1)m \right], \tag{1.5.2}$$

где l – номер оптимизируемого свойства; m_0 – число оптимизируемых свойств; $\{l\}_{m_0}$ – множество оптимизируемых свойств; k_l^{opt} – оптимальное значение показателя l-го свойства, $l \in \{l\}_{m_0}$.

По определению, объекты, удовлетворяющие критерию (1.5.2), являются оптимальными по совокупности m_0 свойств.

Критерий превосходства

$$S : \bigcap_{i=1}^{m} \left(k_{il} \in \left\{ k_i^{д} \right\} \right) \bigcap_{j=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{m} \left(k_{il} \geq k_{ij} \right) \approx U,\ \ l \in \left[1(1)n \right]. \tag{1.5.3}$$

По определению, l-й объект, для которого выполняется условие (1.5.3), превосходит по качеству все остальные объекты.

Приведенные классы критериев находятся в следующем соотношении:

$$S \subset O \subset G.$$

Критерии всех трех рассматриваемых классов представляют собой высказывательные формы, которые становятся высказываниями после присвоения переменным некоторых значений. Если полученное высказывание является истинным, то считают, что объект по качеству удовлетворяет данному критерию; если высказывание будет ложным, то объект не удовлетворяет по качеству выбранному критерию.

Процесс оценивания качества объектов включает в себя следующие этапы.

1-й этап. Выбор совокупности свойств. В совокупность свойств, учитываемых при оценивании качества, должны быть включены все свойства, существенные для использования объекта по своему назначению, и только они.

2-й этап. Измерение качества осуществляется путем сравнения свойств, включенных в совокупность, с эталонами и вычислением значений частных показателей качеств и обобщенного показателя качества, если таковой имеется.

3-й этап. Собственно оценивание состоит в подстановке в выбранный критерий измеренных значений показателей качества и проверке истинности соответствующих высказываний.

1.5.2. Качество моделей

Определение 1.5.14. ***Качество модели*** – сложное свойство модели, характеризующее ее способность замещать исследуемый объект (оригинал) для получения новой информации о замещаемом объекте.

К основным свойствам, определяющим качество модели, относятся адекватность, сложность, информативность, интерпретируемость.

Определение 1.5.15. ***Адекватность модели*** – свойство модели, характеризующее ее соответствие оригиналу, ее способность отражать или воспроизводить оригинал.

В качестве количественной характеристики адекватности модели можно выбрать меру близости модели оригиналу, определяя ее как расстояние между моделью и оригиналом в некотором метрическом пространстве.

Пусть:

O – оригинал; M – модель; A – некоторое множество, которому принадлежат модель и оригинал, т. е. $O, M \in A$;

$r(a, b)$ – расстояние, заданное на множестве A, т. е. для $\forall\, a, b, c \in A$ справедливо:

1) $r(a, b) \geq 0$ и $r(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$, или короче $r(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (аксиома тождества);

2) $r(a, b) = r(b, a)$ (аксиома симметрии);

3) $r(a, b) + r(b, c) \geq r(a, c)$ (аксиома треугольника).

Тогда множество A есть метрическое пространство с заданной в нем метрикой $r(a, b)$, которая определяет степень близости объектов этого множества и, следовательно, может служить количественной характеристикой, т. е. показателем $r(M, O)$ адекватности модели M оригиналу O.

В зависимости от природы оригинала, совокупности моделируемых свойств и вида модели могут быть выбраны различные метрики, а следовательно, и показатели адекватности модели.

Так, в n-мерном эвклидовом пространстве E^n могут быть выбраны в качестве показателей адекватности следующие метрики.

$$\forall X_{\langle n\rangle}, Y_{\langle n\rangle} \in X^n \subset E^n:$$

$$r\left(X_{\langle n\rangle}, Y_{\langle n\rangle}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2};$$

$$r\left(X_{\langle n\rangle}, Y_{\langle n\rangle}\right) = \max_{\forall i \in [1(1)n]} |x_i - y_i|;$$

$$r\left(X_{\langle n\rangle}, Y_{\langle n\rangle}\right) = \sup_{\forall i \in [1(1)n]} |x_i - y_i|;$$

$$r\left(X_{\langle n\rangle}, Y_{\langle n\rangle}\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

В функциональных пространствах показателями адекватности могут служить метрики

$$r\left(f(x), g(y)\right) = \sup_{x \in X} \left| f(x) - g(x) \right|;$$

$$r\left(f(x), g(y)\right) = \int_X \left| f(x) - g(x) \right| \mathrm{d}x;$$

$$r\left(f(x), g(y)\right) = \left\{ \int_X \left| f(x) - g(x) \right|^p \mathrm{d}x \right\}^{1/p},$$

где

X – метризуемое бикомпактное пространство (например, замкнутое ограниченное подпространство эвклидова пространства);

$p \in \{1(1)\infty\}$ – целое натуральное число.

Требуемая адекватность моделей определяется с помощью соответствующих критериев.

Так, критерий пригодности может быть сформулирован в виде

$$r(O, M) \le \varepsilon \ge 0,$$

где ε характеризует минимальную допустимую степень близости модели к оригиналам.

В общем случае значения $r(O, M)$ являются случайными, поэтому в качестве показателя следует выбрать вероятность выполнения данного неравенства либо соответствующие числовые характеристики случайной величины $\hat{r}(O, M)$, а критерий пригодности формулировать в виде

$$P\left(\hat{r}(O, M) \le \varepsilon \ge 0\right) \ge \delta \ge 0; \quad \overline{r}(O, M) \le \varepsilon_1 \ge 0;$$

$$r(O, M) = \sup_{\forall O,\, M \in A} \rho(O, M) \le \varepsilon_2 \ge 0,$$

где

$\overline{r}(O, M)$ – математическое ожидание случайной величины $\hat{r}(O, M)$;

$\rho(O, M)$ – расстояние между элементами множества A, которому принадлежат модель M и оригинал O.

Сложность модели определяется строением модели и характеризует возможность ее использования при моделировании. Чем сложнее модель, тем больше трудностей возникает при ее использовании. Для оценивания сложности задают соответствующие показатели и критерии сложности, формирование и использование которых рассматривается в разделах системных направлений, относящихся к структурному анализу систем. Возможность применения данных показателей обусловлена тем, что модель всегда можно рассматривать, как систему.

Информативность – свойство модели, характеризующее ее способность в процессе моделирования отображать или воспроизводить информацию об оригинале. Показателями информативности могут служить различные меры информации, используемые при измерении ее количества и качества и рассматриваемые в теории информации.

Интерпретируемость модели – свойство модели, которое характеризует возможность переноса новой информации, получаемой с помощью модели, на оригинал. Количественные характеристики данного свойства модели пока практически не разработаны.

Следует сказать, что рассмотренные составляющие качества модели достаточно тесно связаны между собой. Так, повышение степени адекватности модели чаще всего ведет к ее усложнению и уменьшению возможности интерпретации. Поэтому качество модели с повышением ее адекватности может не только увеличиваться, но и уменьшаться, что требует компромиссного подхода к заданию требований к адекватности, сложности, информативности и интерпретируемости моделей.

1.5.3. Эффективность моделирования

Моделирование, как и любой целенаправленный процесс, имеет вполне определенное назначение и, следовательно, обладает качеством и является объектом изучения квалиметрии.

Однако исторически сложилось так, что целенаправленные процессы и их качество стали объектом и предметом изучения теории эффективности, которую можно рассматривать как одно из направлений квалиметрии.

Теория эффективности – научная дисциплина, в которой разрабатываются методологические основы, методы и методики анализа и количественного оценивания качества целенаправленных процессов.

Объектом изучения в теории эффективности являются *целенаправленные процессы*, или *операции*, а *предметом изучения* – *эффективность,* или *качество,* таких процессов.

Операция – это упорядоченная совокупность взаимосвязанных действий, направленных на достижение некоторой цели.

В соответствии с данным определением моделирование представляет собой операцию.

Формально операция может быть описана в виде следующего выражения:

$$O = < R_1, R_2, F, Q, T >,$$

где R_1 – ресурсы, затрачиваемые в процессе выполнения операции; R_2 – результат операции; $F \subset R_1 \times R_2$ – отношение, задаваемое на множестве $R_1 \times R_2$; Q – условие проведения операции; T – время, затрачиваемое на выполнение операции.

Схема взаимодействия всех элементов, оказывающих влияние на результат операции, имеет следующий вид (рис. 1.5.1).

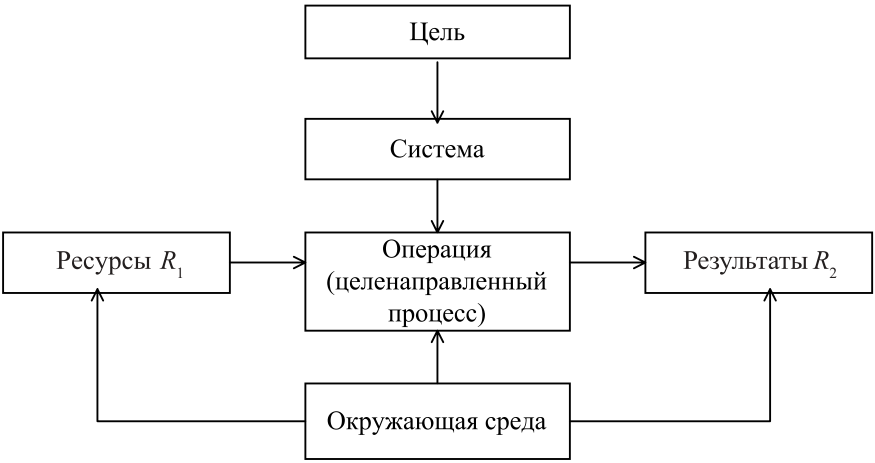

Рис. 1.5.1. Схема взаимодействия всех элементов, оказывающих влияние на результат операции

Таким образом, в рамках теории эффективности операция представляется как процесс преобразования ресурсов в результаты. При этом желаемые результаты (цель операции) называют *целевым эффектом*. Прочие результаты подразделяют на *побочные положительные* и *отрицательные эффекты*, а также *расходы* ресурсов.

Классификация результатов операции приведена на рис. 1.5.2.

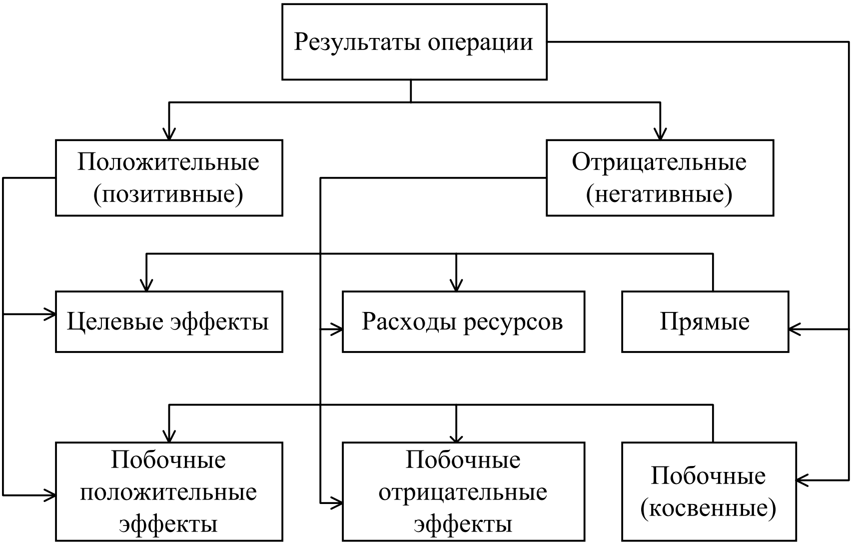

Рис. 1.5.2. Классификация результатов операции

Эффективность операции характеризует способность (точнее, приспособленность) операции преобразовывать расходуемые ресурсы в выходные эффекты и является основным свойством, характеризующим качество операции.

С позиций теории эффективности, моделирование представляет собой типичную операцию, а эффективность моделирования – основное свойство, определяющее качество этой операции.

Определение 1.5.16. ***Эффективность моделирования*** – сложное свойство этой операции, характеризующее ее приспособленность для достижения целей моделирования.

Как сложное свойство, эффективность порождается совокупностью свойств, к которым относятся результативность, ресурсоемкость, оперативность.

Результативность моделирования – свойство, характеризующее способность моделирования давать целевой эффект, т. е. новую информацию об оригинале. Результативность моделирования определяется объемом и качеством информации об оригинале, получаемой в результате моделирования.

Ресурсоемкость моделирования – свойство, характеризующее расход всех видов ресурсов при моделировании на получение целевого эффекта. Такими ресурсами являются материальные, энергетические, информационные, трудовые, финансовые, временные (за исключением времени на проведение моделирования).

Оперативность моделирования – свойство, характеризующее расход времени на проведение моделирования для достижения целевого эффекта.

Обозначим:

$Y^{(1)}_{\langle n_1 \rangle}$ – векторный показатель результативности моделирования;

$Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}$ – векторный показатель ресурсоемкости моделирования;

$Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle}$ – векторный показатель оперативности моделирования.

Тогда показатель $Y_{<n>}$ качества результатов моделирования имеет вид

$$Y_{\langle n \rangle} = \left\langle Y^{(1)}_{\langle n_1 \rangle}, Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}, Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle} \right\rangle, \tag{1.5.4}$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Критерий пригодности качества результатов моделирования имеет вид

$$G : Y_{\langle n \rangle} \in \left\{ Y^{\text{д}}_{\langle n \rangle} \right\}, \tag{1.5.5}$$

где $\left\{ Y^{\text{д}}_{\langle n \rangle} \right\}$ – область допустимых значений показателя $Y_{<n>}$ качества результатов моделирования.

Выражение (1.5.5) представляет собой формализованное описание цели моделирования.

В общем случае каждая из компонент вектора $Y_{<n>}$ зависит от выбора модели, организации и условий проведения моделирования. Все эти факторы априори, т. е. до осуществления процесса моделирования, являются большей частью неизвестными, а следовательно, случайными. Более того, априори являются случайными и *требования* $Y^{\text{д}}_{\langle n \rangle}$ к результатам моделирования.

В результате учета реальных условий выражение (1.5.5) принимает вид

$$\hat{Y}_{\langle n\rangle} \in \left\{\hat{Y}^{\text{д}}_{\langle n\rangle}\right\}, \tag{1.5.6}$$

где $\hat{Y}_{\langle n\rangle}, \hat{Y}^{\text{д}}_{\langle n\rangle}$ – случайные векторы; $\left\{\hat{Y}^{\text{д}}_{\langle n\rangle}\right\}$ – случайная область.

Выражение (1.5.6) описывает случайное событие, поэтому оно не может быть непосредственно использовано для оценивания эффективности моделирования. В этом случае в качестве показателя эффективности может быть выбрана вероятность наступления данного события, которая характеризует степень его объективной возможности при заданном комплексе условий:

$$P_{\text{м}} = P\left(\hat{Y}_{\langle n\rangle} \in \left\{\hat{Y}^{\text{д}}_{\langle n\rangle}\right\}\right), \tag{1.5.7}$$

где $P_{\text{м}}$ – вероятность достижения целей моделирования.

Выбор вероятности достижения цели моделирования в качестве показателя эффективности позволяет сформулировать критерии эффективности моделирования в следующей форме.

1. Критерий пригодности

$$P_{\text{м}} \geq P_{\text{м}}^{\text{тр}}. \tag{1.5.8}$$

2. Критерий оптимальности

$$P_{\text{м}} = P^{\text{opt}} \geq P_{\text{м}}^{\text{тр}}. \tag{1.5.9}$$

При исследовании эффективности широко применяются и другие показатели, однако, пользоваться ими надо с особой осторожностью, так как в большинстве случаев применение их недостаточно обосновано, а сама область применения может быть настолько мала, что любая попытка применения такого показателя на практике влечет выход за пределы этой области.

Как следует из выражения (1.5.7), для вычисления показателя эффективности моделирования должны быть заданы многомерные законы распределения случайного вектора $\hat{Y}_{\langle n\rangle}$ в случайной области $\left\{\hat{Y}^{\text{д}}_{\langle n\rangle}\right\}$.

Если требования, предъявляемые к результатам моделирования, независимы, а $n = 3$, то область $\left\{\hat{Y}^{\text{д}}_{\langle n\rangle}\right\}$ представляет собой октант с вершиной в случайной точке

$$\hat{Z}_{\langle 3\rangle} = \left\langle \hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3 \right\rangle.$$

Выражение (1.5.7) в данном случае принимает вид

$$P\left(\hat{Y}_3 \leqslant \hat{Z}_3\right) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right) \mathrm{d}\, F_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right), \tag{1.5.10}$$

где

$\Phi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{3}\left(\hat{Y}_i \leqslant Z_i\right)\right)$ – одна из форм интегрального закона распределения случайного вектора $\hat{Y}_{\langle 3\rangle}$;

$F_{\hat{Z}_3}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{3}\left(\hat{Z}_i < Z_i\right)\right)$ – функция распределения случайного вектора $\hat{Z}_{\langle 3\rangle}$.

Выражение (1.5.10) представляет собой формулу полной вероятности в интегральной форме. Это следует из сравнения выражения (1.5.10) с приведенными ниже формами формулы полной вероятности:

$P\left(\hat{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(\hat{H}_i\right) P\left(\hat{A}/H_i\right)$ – каноническая форма;

$P_m = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} P\left(\left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle} \geq \hat{Z}_{\langle 3\rangle}\right) / \left(\hat{Z}_{\langle 3\rangle} = Z_{\langle 3\rangle}\right)\right) P\left(\hat{Z}_{\langle 3\rangle} = Z_{\langle 3\rangle}\right)$ – интегральная форма.

Вычисление показателя эффективности по формуле (1.5.10) представляет определенные трудности, которые могут быть преодолены при использовании современной вычислительной техники.

2. СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

2.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ СТРУКТУРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ. АППАРАТ ФОРМАЛИЗОВАННОГО ОПИСАНИЯ СТРУКТУР

Одной из важнейших характеристик системы является ее структура, т. е. устойчивая упорядоченность в пространстве и времени элементов и связей, определяющая целостность, строение и основы организации системы.

Целью структурного моделирования является построение структурной модели, т. е. объекта, структура которого в требуемой мере сходна со структурой оригинала, и исследование этой модели для определения характеристик структуры оригинала, влияния структуры на функционирование оригинала и выявления наилучших с заданной точки зрения структур.

В основе структурного моделирования лежит сходство, подобие структур модели и исследуемой системы.

К основным задачам структурного моделирования относятся:

– установление структуры исследуемой системы;

– определение степени влияния структуры и параметров исследуемой системы на ее поведение (функционирование);

– оценивание качества структуры;

– определение наилучшей по заданному критерию структуры и совокупности параметров системы.

При структурном моделировании систем обычно используют три уровня описания связей между элементами.

На первом уровне, когда исходят лишь из наличия или отсутствия связей между элементами, моделями структур систем обычно служат неориентированные графы. На втором уровне, когда дополнительно учитывается направление связей, в качестве структурных моделей применяют ориентированные графы и структурные схемы. На третьем уровне, когда, кроме того, учитывается вид и направление сигналов, в качестве моделей чаще всего используют структурные схемы и ориентированные взвешенные графы.

Построение структурных схем сложных систем осуществляется с использованием графов, поэтому графы составляют основу аппарата формализованного описания структур систем. Так как графы нашли широкое применение в структурном моделировании, то рассмотрим основные положения теории графов, необходимые при решении задач структурного анализа и синтеза систем.

Определение 2.1.1. ***Граф G*** – пара множеств $< X, U >$, состоящая из множества X и подмножества U прямого произведения множества X самого на себя, т. е. $G = < X, U >$, где $U \subset X \times X$.

Граф называется *конечным*, если множества X и U конечны, и *бесконечным* в противном случае.

Элементы x множества X называются *вершинами* графа, а само множество X – *множеством* вершин графа.

Элементы $< x, y >$ множества U, где $x \in X$, $y \in X$, называются *дугами*, а само множество U – *множеством* дуг графа.

Говорят, что дуга $< x, y >$ *исходит* из вершины x и *заходит* в вершину y.

Вершины x и y дуги $< x, y >$ называются *концевыми* вершинами этой дуги, при этом вершина x называется *начальной*, а вершина y – *конечной* вершиной этой же дуги.

Определение 2.1.2. Дуга и вершина графа называются ***инцидентными***, если вершина является концевой для данной дуги.

Это означает, что дуга $< x, y >$ инцидентна вершинам x и y, а вершины x и y инциденты дуге $< x, y >$.

Определение 2.1.3. Вершина графа, не инцидентная никакой дуге, называется ***изолированной***.

Определение 2.1.4. Дуги графа, имеющие общую начальную и общую конечную вершины, называются ***кратными*** дугами.

Определение 2.1.5. Дуга графа, у которой начальная и конечная вершины совпадают, называется ***петлей***.

Определение 2.1.6. Две вершины графа называются ***смежными***, если существует хотя бы одна дуга, инцидентная им обеим.

В графе две вершины смежные, если для какой-либо из дуг графа они являются концевыми.

Определение 2.1.7. Две дуги графа называются ***смежными***, если существует хотя бы одна вершина, инцидентная им обеим.

В графе дуги будут смежными, если существует общая концевая вершина для этих дуг.

Граф может быть задан следующими тремя способами: аналитическим, геометрическим и матричным.

Аналитический способ задания графов

Говорят, что граф $G = < X, U >$ задан аналитически, если задано множество X и соответствие $\Gamma = < X, X, U >$, для которого множество U является графиком, т. е. $U \subset X \times X$.

Соответствие, определяющее граф, может быть задано различным образом, что обусловливает разные формы аналитического задания графа. Так, например, соответствие Г может задаваться множеством $\Gamma(x)$ образов для каждого элемента x множества X. Тогда граф будет задан в виде, приведенном в примере 2.1.1.

Пример 2.1.1

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.
$\Gamma(x_1) = \{x_1, x_3, x_5\}$, $\Gamma(x_2) = \varnothing$, $\Gamma(x_3) = \{x_1, x_2, x_5\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_1\}$,
$\Gamma(x_5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Граф может быть задан также путем перечисления всех элементов множества X и множества U так, как приведено в примере 2.1.2.

Пример 2.1.2

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.
$U = \{< x_1, x_1 >, < x_1, x_3 >, < x_1, x_5 >, < x_3, x_1 >, < x_3, x_2 >, < x_3, x_5 >,$
$< x_4, x_1 >, < x_5, x_1 >, < x_5, x_2 >, < x_5, x_3 >, < x_5, x_4 >, < x_5, x_5 >\}$.

В примерах 2.1.1 и 2.1.2 задан один и тот же граф.

Геометрический способ задания графов

При геометрическом способе задания графа множеству X ставится в соответствие множество точек некоторого подпространства (чаще плоскости). Эти точки являются вершинами графа. Каждую вершину $x_i \in X$ соединяют линиями со стрелками на конце с вершинами $x_j \in X$, которые являются образами вершины x_i, т. е. для которых выполнено условие $x_j \in \Gamma(x_i)$. Стрелки на концах линий направляют от вершины x_i к вершинам $x_j \in \Gamma(x_i)$. В результате получают геометрическое представление графа, называемое *диаграммой графа*.

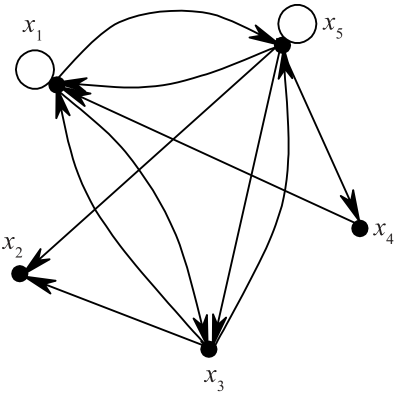

Рис. 2.1.1. Диаграмма графа, приведенного в примерах 2.1.1 и 2.1.2

Диаграмма графа, приведенного в примерах 2.1.1 и 2.1.2, представлена на рис. 2.1.1.

Матричный способ задания графов

Рассмотрим конечный граф $G = < X, U >$, число вершин которого равно n, а число дуг – m.

Определение 2.1.8. Квадратная матрица $\mathbf{R} = \left\| r_{ij} \right\|_n^n$ размерности $n \times n$, каждой строке и каждому столбцу которой сопоставлены вершины x_i, $i = 1(1)n$ графа G, а элементы r_{ij} которой равны 1, если граф имеет дугу, исходящую из вершины x_i и заходящую в вершину x_j, и 0, если такой дуги в графе нет, т. е.

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle x_i, x_j \rangle \in U; \\ 0, & \text{если } \langle x_i, x_j \rangle \notin U, \end{cases}$$

называется ***матрицей смежности*** вершин этого графа.

Если граф имеет кратные дуги, то элемент r_{ij} матрицы смежности равен числу дуг, исходящих из вершины x_i и заходящих в вершину x_j.

Для рассмотренного в примерах 2.1.1 и 2.1.2 графа матрица смежности имеет вид

$$\mathbf{R} = \left\| r_{ij} \right\|_5^5 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$

Обозначим каждую дугу $< x_i, x_j >$ графа символом u_k, $k = 1(1)m$.

Определение 2.1.9. Матрица $\mathbf{S} = \left\| s_{ij} \right\|_n^m$ размерности $n \times m$, каждой строке которой сопоставлена вершина x_i, $i = 1(1)n$, а каждому столбцу – дуга u_j, $j = 1(1)m$ графа G, и элементы s_{ij} которой равны 1, если дуга u_j исходит из вершины x_i; –1, если дуга u_j заходит в вершину x_i, и 0, если дуга u_j не инцидентна вершине x_i или является петлей, т. е.

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } x_i; \\ 0, \text{ если дуга } u_j \text{ не инцидентна вершине } x_i \text{ или является петлей;} \\ -1, \text{ если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } x_i, \end{cases}$$

называется ***матрицей инцидентности (инциденций)*** графа ***G***.

Для рассмотренного в примерах 2.1.1 и 2.1.2 графа матрица инцидентности имеет вид

$$\mathbf{S} = \left\| s_{ij} \right\|_5^{12} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$

При составлении матрицы инцидентности были использованы следующие обозначения:

$$u_1 = < x_1, x_1 >, \quad u_2 = < x_1, x_3 >, \quad u_3 = < x_1, x_5 >, \quad u_4 = < x_3, x_1 >,$$
$$u_5 = < x_3, x_2 >, \quad u_6 = < x_3, x_5 >, \quad u_7 = < x_4, x_1 >, \quad u_8 = < x_5, x_1 >,$$
$$u_9 = < x_5, x_2 >, \quad u_{10} = < x_5, x_3 >, \quad u_{11} = < x_5, x_4 >, \quad u_{12} = < x_5, x_5 >.$$

Матрица инцидентности, как и матрица смежности, полностью определяет соответствующий граф. Все три рассмотренных способа задания графов являются эквивалентными. Геометрический способ обладает наибольшей наглядностью, матричный способ широко применяется при компьютерной обработке графов.

Приведем еще несколько понятий и определений, которые потребуются в дальнейшем.

Две дуги графа называются *противоположно ориентированными*, если для каждой из них начальная вершина одной дуги является конечной вершиной другой дуги, а сами дуги считаются эквивалентными (с точностью до ориентации дуг).

Каждой паре противоположно ориентированных дуг $\{ < x_i, x_j >, < x_j, x_i >\}$ графа $G = < X, U >$ можно сопоставить неупорядоченный элемент (x_i, x_j), составленный из концевых вершин сопоставляемой пары дуг и называемый *ребром* графа. Неупорядоченность ребра означает, что любая его концевая вершина может быть принята за начальную, тогда другая концевая вершина будет конечной и наоборот. Поэтому понятия начальной и конечной вершин для ребра не определяются, а само ребро рассматривается как неориентированная дуга. С другой стороны, возможен подход, при котором дугу рассматривают как ориентированное ребро, для которого определены начальная и конечная вершины.

Каждому ребру графа, в свою очередь, можно сопоставить пару противоположно ориентированных дуг. Следовательно, между такими парами дуг и сопоставляемыми ребрами существует взаимно однозначное соответствие, и поэтому любую пару противоположно ориентированных дуг в графе можно заменить соответствующим ребром и наоборот. Петли в графе всегда считаются ребрами.

Геометрически ребро графа изображается ненаправленным (неориентированным) отрезком, соединяющим две вершины. Диаграмма графа, рассмотренного в примерах 2.1.1 и 2.1.2, после замены соответствующих пар дуг эквивалентными им ребрами приведена на рис. 2.1.2.

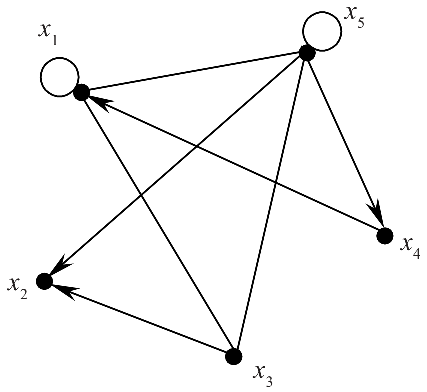

Рис. 2.1.2. Диаграмма графа, приведенного в примерах 2.1.1 и 2.1.2, после замены пар дуг ребрами

Определение 2.1.10. Граф $G = <X, U>$, множество U которого содержит только дуги, называется ***ориентированным*** графом (***орграфом***).

Определение 2.1.11. Граф $G = <X, U>$, множество U которого содержит только ребра, называется ***неориентированным*** графом.

Определение 2.1.12. Граф $G = <X, U>$, множество U которого содержит как ребра, так и дуги, называется ***смешанным*** графом.

Матричное представление неориентированных графов имеет свои особенности. Элемент матрицы смежности неориентированного графа равен 1, если в графе существует ребро, соединяющее вершины, соответствующие строке и столбцу, и 0, если такого ребра не существует. Элементы матрицы инцидентности такого графа равны 1, если вершина, соответствующая строке, инцидентна ребру, соответствующему столбцу, и 0, если соответствующие вершина и ребро не инцидентны. Поэтому матрицы смежности ориентированных и неориентированных графов совпадают по внешнему виду, так как содержат только нули и единицы, а матрицы инцидентности оказываются различными, так как элементами такой матрицы ориентированного графа являются элементы множества $\{-1, 0, +1\}$, а неориентированного графа – элементы множества $\{0,1\}$.

Для неориентированного графа с кратными дугами элемент матрицы смежности равен числу ребер, соединяющих соответствующие вершины.

Определение 2.1.13. Граф называется ***полным***, если для любой пары его вершин существует дуга, соединяющая их.

На рис. 2.1.3, *а* изображен полный орграф, а на рис. 2.1.3, *б* – полный неориентированный граф; рис. 2.1.2 соответствует смешанному графу.

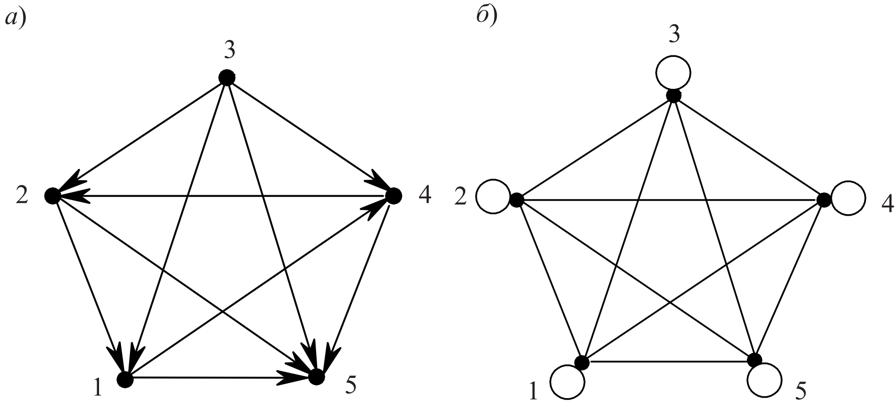

Рис. 2.1.3. Диаграммы графов: *а* – полный орграф; *б* – полный неориентированный граф

Определение 2.1.14. Граф $G_1 = <X_1, U_1>$ называется ***частью*** графа $G = <X, U>$, если $X_1 \subset X$, а $U_1 \subset U$.

Часть графа получают из графа путем исключения вершин и дуг.

Определение 2.1.15. Граф $G_1 = <X_1, U_1>$ называется ***подграфом*** графа $G = <X, U>$, если $X_1 \subset X$, а $U_1 = U \cap (X_1 \times X_1)$.

Подграф получают из графа путем исключения вершин и дуг, инцидентных исключенным вершинам.

Определение 2.1.16. Граф $G_1 = <X_1, U_1>$ называется ***суграфом*** (***остовным графом***) графа $G_1 = <X_1U>$, если $X_1 = X$, а $U_1 \subset U$.

Суграф получают из графа путем удаления части дуг (рис. 2.1.4).

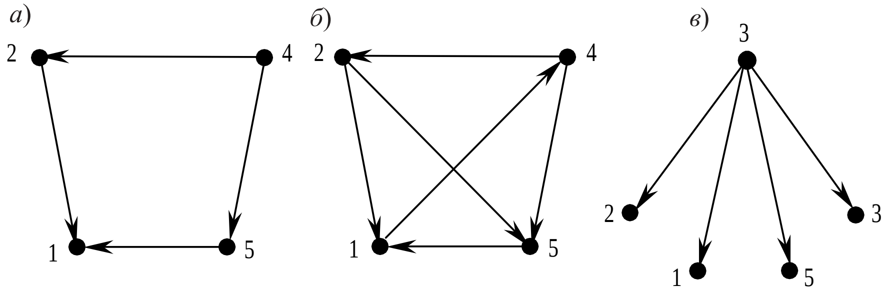

Рис. 2.1.4. Виды графа, приведенного на рис. 2.1.3, *а*: *а* – часть графа; *б* – подграф; *в* – суграф

Определение 2.1.17. Граф называется ***планарным***, если можно построить такую его диаграмму в двухмерном пространстве (на плоскости, сфере), что любая точка, принадлежащая двум и более дугам графа, не является внутренней точкой никакой дуги этого графа.

Такая диаграмма называется *геометрической реализацией графа*.

На геометрической реализации графа общими точками дуг могут быть только вершины, т. е. дуги графа при таком геометрическом представлении не пересекаются.

Не всякий граф является планарным. Советский математик академик Л. С. Понтрягин и польский ученый К. Куратовский независимо друг от друга показали, что для того, чтобы конечный граф имел геометрическую реализацию (был планарным), необходимо и достаточно, чтобы он не имел частей вида, приведенных на рис. 2.1.5.

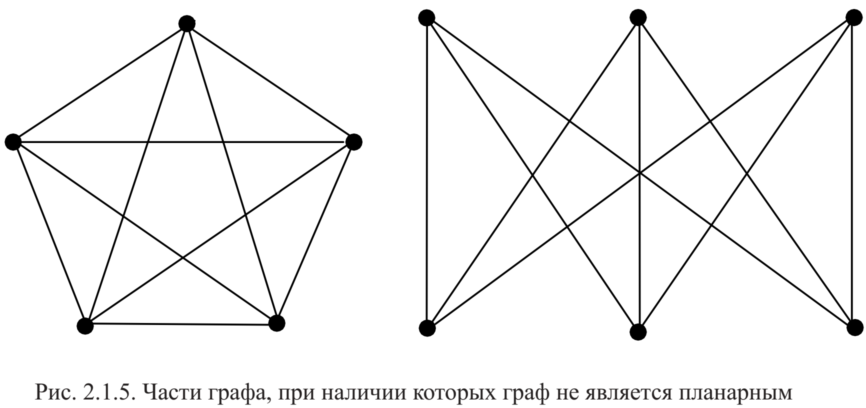

Рис. 2.1.5. Части графа, при наличии которых граф не является планарным

Определение 2.1.18. ***Графом со взвешенными дугами*** называется граф, дугам которого сопоставлены числа.

Определение 2.1.19. ***Графом со взвешенными вершинами*** называется граф, вершинам которого сопоставлены числа.

Определение 2.1.20. ***Взвешенным графом*** называется граф со взвешенными вершинами и дугами.

Определение 2.1.21. ***Путем*** в графе называется такая последовательность дуг, в которой каждая последующая дуга исходит из вершины, в которую заходит предыдущая.

Определение 2.1.22. Путь называется ***простым***, если в нем никакая дуга не встречается более одного раза.

Определение 2.1.23. Путь называется ***элементарным***, если в нем никакая вершина не встречается более одного раза.

Определение 2.1.24. Путь называется ***контуром***, если начальная вершина первой дуги пути является конечной вершиной последней дуги пути.

Определение 2.1.25. ***Полустепенью исхода вершины*** графа называется число исходящих из нее дуг.

Определение 2.1.26. ***Полустепенью захода вершины*** графа называется число заходящих в нее дуг.

Определение 2.1.27. ***Степенью вершины графа*** называется число дуг, инцидентных этой вершине (число исходящих из нее и заходящих в нее дуг).

Определение 2.1.28. ***Маршрутом*** в неориентированном графе называется последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую концевую точку (являются смежными два соседних ребра).

Определение 2.1.29. Маршрут называется ***циклом***, если первое и последнее ребро маршрута имеют общую концевую точку.

Понятия простого и элементарного маршрутов вводятся аналогично понятиям простого и элементарного путей. Путь можно рассматривать как маршрут, если не учитывать ориентацию дуг пути.

Определение 2.1.30. ***Длиной*** пути (маршрута) называется число дуг (ребер), входящих в него.

Определение 2.1.31. Две вершины графа называются ***связанными***, если существует путь между ними.

Определение 2.1.32. Граф называется ***связным***, если любые две его вершины связаны.

В приведенных выше определениях формулируются основные понятия теории графов, используемые при структурном моделировании. По мере необходимости эти определения будут пополняться в процессе дальнейшего изложения материала.

2.2. МЕТОДЫ ФОРМАЛИЗОВАННОГО ОПИСАНИЯ СТРУКТУР

Среди существующих методов описания структур кибернетических систем можно выделить две группы методов, широко применяемых в настоящее время: основанные на использовании структурных схем и на теории графов.

Структурная схема системы определяет основные функциональные части системы, их назначение и взаимосвязи. Выделяемые в системе функциональные части называются блоками. Под блоком обычно понимают устройство, функционально законченное и оформленное в виде отдельного целого. Однако, исходя из требуемой степени детализации описания структуры, наглядности отображения в ней особенностей процессов функционирования, обусловленных структурой системы, в качестве блоков могут выделяться части устройств, входящих в систему, либо совокупность устройств, которые не представляют в системе отдельного целого устройства или узла.

Основными принципами выделения блоков при составлении структурных схем являются возможность функционального описания блока и однонаправленность его действия. Однонаправленность блока означает, что он осуществляет преобразование входа в выход и, следовательно, оказывает воздействие на блоки, подключенные к его выходу своими входами, и не влияет на блоки, подключенные ко входу.

Методика описания системы с помощью структурных схем состоит в следующем.

1. Система разбивается на блоки, которые изображаются в виде условных символов (прямоугольников или других графических изображений) с обозначением роли элемента в системе.

2. Информационные, материальные, энергетические связи, учет которых необходим при исследовании системы, изображаются в виде линий между элементами, для которых эти связи существуют.

3. Отношения между блоками определяются:

– обозначением направленности процессов в системе с помощью стрелок на линиях связи;

– описанием правил функционирования каждого блока;

– описанием правил функционирования подсистем и системы в целом.

На рис. 2.2.1 приведены структурные схемы основных типовых структур.

Структурные схемы наглядны и дают возможность судить о структурных свойствах системы. Кроме того, структурные схемы легко поддаются уточнению и конкретизации, в ходе которой не надо изменять всю схему, а достаточно заменить отдельные ее элементы структурными схемами, включающими не один, как раньше, а несколько взаимодействующих блоков. Поэтому структурные схемы находят широкое применение, особенно при описании структур технических систем.

Однако структурная схема – это еще не математическая модель структуры. Она с трудом поддается формализации и является скорее естественным промежуточным звеном между содержательным описанием структуры системы и ее математической моделью. Поэтому структурные схемы не позволяют широко применять математические методы для исследования структур. От этого недостатка свободна вторая группа методов, в основе которых лежит описание структур с помощью теории графов.

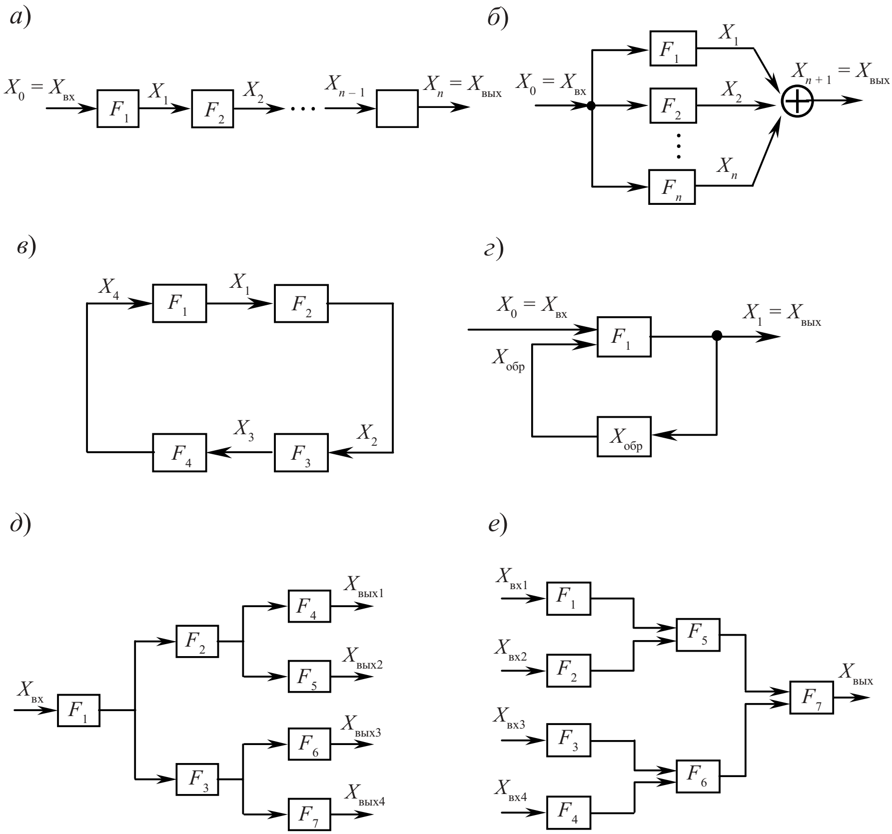

Рис. 2.2.1. Структурные схемы типовых структур: *а* – линейная (последовательная) структура; *б* – параллельная структура; *в* – кольцевая структура; *г* – структура с обратной связью; *д* – расходящаяся структура; *е* – сходящаяся структура

Методика построения модели структуры системы в виде графа достаточно проста и состоит в следующем.

1. Элементам системы ставят в соответствие вершины графа

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}.$$

2. Связям между элементами ставят в соответствие дуги графа

$$U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}.$$

В результате получают граф, отражающий структуру системы и называемый *вершинным* графом.

В другом случае элементам системы сопоставляются дуги, а связям между элементами – вершины графа. Получаемый граф называется *реберным* графом.

Построение вершинного графа, особенно при наличии структурной схемы системы, довольно просто, так как для этого достаточно установить перечень элементов системы, связи между ними и составить матрицу смежности вершин. Построение реберного графа, эквивалентного вершинному, значительно сложнее. В то же время модели систем, представленные в виде вершинных графов, обладают тем недостатком, что физическое содержание отдельных элементов и логические условия их реализации объединены в одних и тех же элементах графа – его вершинах. Это чрезвычайно затрудняет исследование, делая его индивидуальным для каждой структуры, представленной вершинным графом.

Реберные графы дают возможность сопоставить физические свойства элементов дугам графа, а логические условия их осуществления – вершинам. Это позволяет разработать полностью формализованные методы исследования структур, описания которых могут включать любые логические функции.

В теории графов известны две классические задачи: задача Эйлера, состоящая в отыскании простых маршрутов, проходящих через все ребра графа, и задача Гамильтона, состоящая в отыскании элементарных маршрутов, проходящих через все вершины графа. Маршруты, удовлетворяющие условиям задачи Эйлера, называются эйлеровыми маршрутами (путями), а условиям задачи Гамильтона – гамильтоновыми маршрутами (путями).

Задачу Эйлера можно рассматривать как задачу упорядочения ребер, а задачу Гамильтона – как задачу упорядочения вершин графа. Несмотря на сходство формулировок, эти задачи имеют различную степень сложности. Доказанные Эйлером теоремы позволяют однозначно по виду графа решать вопрос о существовании эйлеровых путей. Для гамильтоновых путей такого критерия не существует.

Поэтому, с одной стороны, для сложных систем относительно просто можно построить вершинный граф, задав, например, матрицу смежности вершин. С другой стороны, проще исследуется реберный граф. Возникшее противоречие может быть разрешено путем эквивалентного преобразования вершинного графа в реберный. Основанием такого преобразования служит теорема об условиях эквивалентности матриц смежности вершинного и реберного графов[1].

Методика, обеспечивающая выполнение условий эквивалентности при преобразовании вершинного ориентированного графа без кратных дуг в реберный граф, включает в себя три этапа.

1-й этап. Построение квазиканонической матрицы смежности реберного графа

На данном этапе матрица смежности вершинного графа путем расширения и преобразования элементов матрицы с помощью построения двух вспомогательных матриц на каждой из последовательно проводимых итераций постепенно преобразуется в квазиканоническую матрицу смежности реберного графа, эквивалентного исходному вершинному.

Пусть $\mathbf{R}_{[n]} = \left\| r_{ij} \right\|_n^n$ – матрица смежности вершин ориентированного вершинного графа без кратных дуг.

Введем обозначение

$$\mathbf{R}_{[n]} = \mathbf{R}_{[n]}^{(0)}.$$

1-я итерация.

1-й шаг. По матрице $\mathbf{R}_{[n]}^{(0)}$ строят матрицу $\mathbf{S}_{[n]}^{(1)}$, элементы которой определяются по формуле

$$s_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{(0)} \left(\sum_{k=1}^{n} r_{kj}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} r_{ik}^{(0)} \right), \quad i = 1(1)n, \; j = 1(1)n. \qquad (2.2.1)$$

2-й шаг. По матрице $\mathbf{S}_{[n]}^{(1)}$ строят матрицу $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$, элементы которой вычисляются по формуле

[1] *Нечипоренко В. И.* Структурный анализ систем (эффективность и надежность). М.: Сов. радио, 1977. 216 с.

$$c_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{(0)}\left[\left(s_{ij}^{(1)} - \min_{\substack{\forall k\in[1(1)n]\\ s_{ik}^{(1)}>0}} s_{ik}^{(1)}\right) + \left(s_{ij}^{(1)} - \min_{\substack{\forall k\in[1(1)n]\\ s_{kj}^{(1)}>0}} s_{kj}^{(1)}\right)\right],$$

$$i = 1(1)n,\ j = 1(1)n. \qquad (2.2.2)$$

Если все элементы $c_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$ равны нулю, то матрица $\mathbf{R}_{[n]}$ является квазиканонической матрицей смежности. Поэтому принимают $R_q = R_{[n]}$, и на этом выполнение первого этапа заканчивают. Если хотя бы один элемент матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$ не равен нулю, то переходят к следующему шагу. Из выражения (2.2.2) следует, что для любого элемента $c_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$, не равного нулю, соответствующий элемент r_{ij} матрицы $\mathbf{R}_{[n]}$ также не равен нулю.

3-й шаг. Определяют число элементов матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$, не равных нулю. Пусть оно равно l_1. Расширяют матрицу $\mathbf{R}_{[n]}^{(0)}$ путем добавления к ней справа и снизу по l_1 столбцов и строк соответственно. Элементы $r_{ij}^{(1)}$ расширяемой матрицы $\mathbf{R}_{[n+l_1]}^{(1)}$ вычисляют следующим образом.

Каждый элемент $r_{ij}^{(1)},\ i\in[1(1)n],\ j\in[1(1)n]$ матрицы $\mathbf{R}_{[n+l_1]}^{(1)}$, для которого существует не равный нулю элемент $c_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$, приравнивают нулю, а соответствующие элементы $r_{ik}^{(1)}$ и $r_{kj}^{(1)},\ k\in[n+1(1)n+l_1]$ столбца и строки из числа дополненных к матрице $\mathbf{R}_{[n]}^{(0)}$ приравнивают единице. При этом для каждого приравненного нулю элемента $r_{ij}^{(1)}$ выбирают разные *k,* а следовательно, и разные столбцы и строки из числа дополнительных. Так как число не равных нулю элементов $c_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$ совпадает с числом дополнительных строк и столбцов матрицы $\mathbf{R}_{[n+l_1]}^{(1)}$, то в результате в каждом дополнительном столбце и в каждой дополнительной строке оказывается ровно по одному единичному элементу.

Все остальные элементы дополнительных строк и столбцов приравниваем к нулю.

Все оставшиеся после выполнения указанных выше операций элементы $r_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{R}_{[n+l_1]}^{(1)}$ принимают равными соответствующим элементам $r_{ij}^{(0)}$ матрицы $\mathbf{R}_{[n]}^{(0)}$.

2-я итерация.

Для матрицы $\mathbf{R}_{[n+l_1]}^{(1)}$ способом, описанным выше, строят матрицы $\mathbf{S}_{[n+l_1]}^{(2)}, \mathbf{C}_{[n+l_1]}^{(2)}$, и в случае, если не все элементы $c_{ij}^{(2)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n+l_1]}^{(2)}$ равны нулю, – матрицу $\mathbf{R}_{[n+l_1+l_2]}^{(2)}$, где l_2 – число элементов матрицы $\mathbf{C}_{[n+l_1]}^{(2)}$, не равных нулю.

Если все элементы матрицы $\mathbf{C}_{[n+l_1]}^{(2)}$ равны нулю, то выбирают матрицу $\mathbf{R}_{[n+l_1]}^{(1)}$ в качестве квазиканонической матрицы смежности и, обозначив ее $\mathbf{R}_q$, на этом выполнение первого этапа заканчивают. В противном случае переходят к следующей итерации.

Последовательность операций m-й итерации (m = 1, 2, 3...) этапа построения квазиканонической матрицы смежности в общем виде можно представить следующим образом.

Обозначим

$$L_m = \sum_{i=0}^{m} l_i,$$

где $l_0 = 0$ по определению.

m-я итерация.

3(m – 1) + 1-й шаг. По матрице $\mathbf{R}_{[n+L_{m-1}]}^{(m-1)}$ строят матрицу $\mathbf{S}_{[n+L_{m-1}]}^{(m)}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$s_{ij}^{(m)} = r_{ij}^{(m-1)} \left(\sum_{k=1}^{n+L_{m-1}} r_{kj}^{(m-1)} + \sum_{k=1}^{n+L_{m-1}} r_{ij}^{(m-1)} \right),$$
$$i = 1(1)n + L_{m-1},$$
$$j = 1(1)n + L_{m-1}. \qquad (2.2.3)$$

3(m – 1) + 2-й шаг. По матрице $\mathbf{S}_{[n+L_{m-1}]}^{(m)}$ строят матрицу $\mathbf{C}_{[n+L_{m-1}]}^{(m)}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}^{(m)} = r_{ij}^{(m-1)} \left[\left(s_{ij}^{(m)} - \min_{\substack{\forall k \in [1(1)n+L_{m-1}] \\ s_{ik}^{(m)} > 0}} s_{ik}^{(m)} \right) + \left(s_{ij}^{(m)} - \min_{\substack{\forall k \in [1(1)n+L_{m-1}] \\ s_{kj}^{(m)} > 0}} s_{kj}^{(m)} \right) \right],$$
$$i = 1(1)n + L_{m-1}, \quad j = 1(1)n + L_{m-1}. \qquad (2.2.4)$$

3(m – 1) + 3-й шаг. Если все элементы c_{ij}^{m} матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_{m-1}]}^{(m)}$ равны нулю, то выполнение первого этапа заканчивают. Полученной на предыдущей m – 1-й итерации матрице $\mathbf{R}_{[n+L_{m-1}]}^{(m-1)}$ присваивают обозначение

$$\mathbf{R}_q = \mathbf{R}_{[n+L_{m-1}]}^{(m-1)},$$

так как она является искомой квазиканонической матрицей смежности.

Если не все элементы матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_{m-1}]}^{(m)}$ равны нулю, то определяют число l_m таких элементов и строят матрицу $\mathbf{R}_{[n+L_m]}^{(m)}$ способом, рассмотренным на третьем шаге первой итерации. Затем переходят к следующей $m+1$-й итерации.

Рассматриваемый процесс построения матрицы $\mathbf{R}_q$ является итерационным и продолжается до тех пор, пока все элементы матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_{n-1}]}^{(m)}$ не станут равными нулю на некоторой m-й итерации. Число итераций данного процесса конечно. Размерность получаемой матрицы $\mathbf{R}_q$, равная $n + L_q$, где L_q – число добавленных столбцов (строк), может быть оценена неравенством

$$n + L_q \le n^2 + n - 1.$$

Основная идея доказательства сходимости процесса заключается в следующем.

Пусть число не равных нулю элементов $c_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$ равно L. Тогда справедливо неравенство

$$L \le n^2 - 1,$$

так как число элементов матрицы $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$ равно n^2, а среди элементов матрицы $\mathbf{S}_{[n]}^{(1)}$ есть хотя бы один не равный нулю наименьший элемент. Следовательно, в матрице $\mathbf{C}_{[n]}^{(1)}$ будет хотя бы один нулевой элемент, соответствующий этому наименьшему элементу матрицы $\mathbf{S}_{[n]}^{(1)}$.

Для каждого из вновь введенных в матрицу $\mathbf{R}_{[n+L_m]}^{(m)}$ элементов $r_{ik}^{(m)}$, $r_{kj}^{(m)}$, $m = 1, 2, 3 \ldots$, соответствующие элементы $c_{ik}^{(m+1)}$ и $c_{kj}^{(m+1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_m]}^{(m+1)}$ всегда равны нулю, так как элементы $s_{ik}^{(m+1)}$, $s_{kj}^{(m+1)}$ матрицы $\mathbf{S}_{[n+L_m]}^{(m+1)}$ равны наименьшему положительному числу в i-й строке и k-м столбце, либо в k-й строке и j-м столбце матрицы $\mathbf{S}_{[n+L_m]}^{(m+1)}$, что обусловлено соответствующим построением матрицы $\mathbf{R}_{[n+L_m]}^{(m)}$ (хотя бы один столбец или одна строка матрицы $\mathbf{R}_{[n+L_m]}^{(m)}$, используемые для вычисления элементов $c_{ik}^{(m+1)}$, $c_{kj}^{(m+1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_m]}^{(m+1)}$, соответствующих вновь введенным элементам $r_{ik}^{(m)}$, $r_{kj}^{(m)}$, содержат только одну единицу).

Поскольку элемент $r_{ij}^{(m)}$ в матрице $\mathbf{R}_{[n+L_m]}^{(m)}$, для которого введены элементы $r_{ik}^{(m)}$, $r_{kj}^{(m)}$, на m-й итерации становится равным нулю и остается таковым на всех последующих итерациях, то соответствующий элемент $c_{ij}^{(m+1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_m]}^{(m+1)}$ также оказывается равным нулю и остается таковым до конца выполнения первого этапа. Следовательно, на каждой итерации хотя бы один элемент $c_{ij}^{(m+1)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_m]}^{(m+1)}$, для которого соответствующий элемент r_{ij} матрицы смежности $\mathbf{R}_{[n]}$ не равен нулю, становится равным нулю. При этом количество ненулевых элементов в матрице $\mathbf{C}_{[n+L_{m-1}]}^{(m)}$ за счет введения в матрицу смежности $\mathbf{R}_{[\mathrm{n}]}$ дополнительных элементов в процессе выполнения итераций не увеличивается.

Число элементов $r_{ij} \neq 0$ в матрице $\mathbf{R}_{[n]}$ конечно и равно L, а за каждую итерацию размерность матрицы $\mathbf{R}_{[n+L_m]}^{(m)}$ увеличивается на конечное число, равное числу элементов $r_{ij}^{(m-1)} \neq 0$ в матрице $\mathbf{R}_{[n+L_{m-1}]}^{(m-1)}$, для которых соответствующие элементы $c_{ij}^{(m)}$ матрицы $\mathbf{C}_{[n+L_{m-1}]}^{(m)}$ не равны нулю, поэтому, во-первых, число итераций в процессе построения матрицы $\mathbf{R}_q$ будет конечным, и, во-вторых, число добавленных столбцов, а следовательно, и строк в матрице удовлетворяет неравенству

$$L_q \leq L.$$

Это означает, что

$$n + L_q \le n^2 + n - 1.$$

Таким образом, в результате выполнения первого этапа получают квазиканоническую матрицу смежности $\mathbf{R}_q$ размерности $n + L_q$.

2-й этап. Нумерация вершин реберного графа

На этом этапе нумеруются вершины реберного графа и между ними распределяются дуги, соответствующие вершинам исходного графа.

1-й шаг. Просматривают матрицу $\mathbf{R}_q$ либо $\mathbf{R}_{[n]}$. Если в матрице имеется более одного пустого столбца, то к матрице $\mathbf{R}_q$ добавляют слева один столбец, а сверху – одну строку. В новую строку на местах, соответствующих пустым столбцам матрицы $\mathbf{R}_q$, проставляют единицы.

Добавленным столбцу и строке присваивают одинаковый номер. При ручном счете этот номер может быть очередным. При реализации методики на ЭВМ столбцы и строки следует перенумеровать в соответствии с их расположением в матрице, сохраняя возможность последующего восстановления исходной нумерации.

Замечание. Данный шаг соответствует преобразованию графа к виду, в котором только одна вершина не имеет входящих в нее дуг.

2-й шаг. Если в матрице $\mathbf{R}_q$ либо $\mathbf{R}_{[n]}$ имеется более одной пустой строки, то к матрице $\mathbf{R}_q$ добавляют справа один столбец, а снизу – одну строку. В добавленный столбец на местах, соответствующих пустым строкам матрицы $\mathbf{R}_q$, проставляют единицы. Добавленным столбцу и строке присваивают одинаковый очередной номер.

Замечание. Второй шаг соответствует преобразованию графа к виду, в котором только одна вершина не имеет исходящих из нее дуг.

3-й шаг. Справа от матрицы $\mathbf{R}_q$ строят таблицу дуг реберного графа. Таблица имеет три столбца $\mathrm{N_в}$, $\mathrm{N_{нач}}$, $\mathrm{N_{кон}}$ и число строк, соответствующее числу строк матрицы $\mathbf{R}_q$. В столбец $\mathrm{N_в}$ проставляются номера строк матрицы $\mathbf{R}_q$. Столбцы $\mathrm{N_{нач}}$ и $\mathrm{N_{кон}}$ заполняются в процессе выполнения дальнейших шагов второго этапа.

4-й шаг. Пустому столбцу матрицы $\mathbf{R}_q$ присваивают некоторый номер (индекс). Этот номер присваивают соответствующей строке матрицы $\mathbf{R}_q$, т. е. строке, номер которой соответствовал номеру столбца до присваивания ему индекса. Присвоенный индекс проставляется также в столбце $\mathrm{N_{нач}}$ таблицы дуг реберного графа в соответствующей строке.

Если в матрице $\mathbf{R}_q$ нет пустых столбцов, то первоначальный номер (индекс) может быть присвоен любому столбцу матрицы $\mathbf{R}_q$. Столбец, которому присвоен индекс, будем называть отмеченным.

5-й шаг. Просматривают отмеченный столбец матрицы $\mathbf{R}_q$ сверху вниз. Встретив элемент столбца, не равный нулю, вычеркивают все не равные нулю элементы строки, на пересечении с которой находится встреченный элемент, в том числе и сам элемент. Просматривают столбцы, в которых находились вычеркнутые элементы. Если эти столбцы оказались пустыми (не осталось ни одного не равного нулю элемента), то этому столбцу и соответствующей ему строке присваивают тот же индекс (номер), что и отмеченному столбцу. Этот индекс проставляется на соответствующих местах в столбце $N_{нач}$ таблицы дуг реберного графа. Данный шаг выполняют до тех пор, пока отмеченный столбец не станет пустым.

6-й шаг. Присваивают очередной номер (индекс) следующему неотмеченному столбцу и соответствующей строке, заносят этот номер (индекс) в соответствующее место столбца $N_{нач}$ таблицы дуг реберного графа и для рассматриваемого столбца матрицы $\mathbf{R}_q$ выполняют операции пятого шага.

Пятый и шестой шаги повторяют до тех пор, пока в матрице не останется ни одного не вычеркнутого элемента.

7-й шаг. Заполняют столбец $N_{кон}$ таблицы дуг реберного графа. Это можно выполнить следующим образом. Просматривают последовательно все столбцы матрицы $\mathbf{R}_q$. Для тех строк, для которых в просматриваемом столбце имеются ненулевые элементы, проставляют в столбце $N_{кон}$ таблицы новый, присвоенный в процессе выполнения четвертого, пятого, шестого шагов, номер (индекс) просматриваемого столбца.

После выполнения седьмого шага таблица дуг реберного графа оказывается заполненной полностью. При этом в столбце $N_{нач}$ указаны номера (индексы) начальных вершин, из которых исходят дуги реберного графа, в столбце $N_{кон}$ – номера (индексы) конечных вершин, в которые заходят дуги реберного графа, а в столбце $N_в$ – номера вершин исходного графа, эквивалентные соответствующим дугам реберного графа. Если для какого-либо номера из столбца $N_в$ таблицы в исходном графе нет соответствующей вершины, то дуги реберного графа, сопоставляемые данному номеру, считаются фиктивными.

3-й этап. Построение диаграмм реберного графа

По заполненной таблице дуг строят диаграмму реберного графа, эквивалентного исходному вершинному. Дуги, соответствующие вершинам исходного графа, изображают сплошными линиями, исходящими из начальных вершин и заходящими в конечные вершины, а фиктивные дуги – штриховыми линиями. Направленность дуги отображается стрелками у конечных вершин. Если есть необходимость, то проводят эквивалентные преобразования построенного графа к более наглядному и удобному для последующего использования виду. На этом построение реберного графа, эквивалентного исходному вершинному графу, заканчивается.

Рассмотрим применение изложенной методики на примерах.

Пример 2.2.1

Пусть диаграмма исходного вершинного графа имеет вид, представленный на рис. 2.2.2. Требуется построить эквивалентный ему реберный граф.

Решение. Матрица смежности $\mathbf{R}_{[5]}$ исходного графа имеет вид

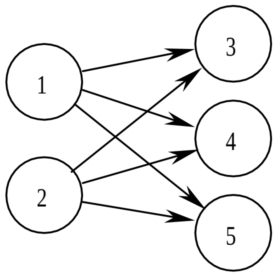

Рис. 2.2.2.Диаграмма вершинного графа в примере 2.2.1

$$\mathbf{R}_{[5]} = \left\| r_{ij} \right\|_5^5 \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Здесь и в дальнейшем пустые клетки матрицы соответствуют нулевым элементам.

При ручном счете предварительно для каждой строки вычислим $\sum_{j=1}^{5} r_{ij}$, а для каждого столбца $\sum_{i=1}^{5} r_{ij}$. Вычисленные значения справа и внизу матрицы смежности можно записать против соответствующих строк и столбцов.

1-й этап. Построение квазиканонической матрицы смежности

1-й шаг. По матрице $\mathbf{R}_{[5]}$ строим матрицу $\mathbf{S}_{[5]}$, элементы которой определяются по формуле

$$s_{ij}^{(1)} = r_{ij}\left[\sum_{i=1}^{5} r_{ij} + \sum_{j=1}^{5} r_{ij}\right], \quad i = 1(1)5,\ j = 1(1)5.$$

Ненулевые элементы данной матрицы практически могут быть определены путем суммирования для ненулевых элементов матрицы $\mathbf{R}_{[5]}$ содержимого соответствующей строки столбца $\sum_{j=1}^{5} r_{ij}$ и содержимого соответствующего столбца строки $\sum_{i=1}^{5} r_{ij}$.

$$\mathbf{S}_{[5]} = \left\| s_{ij} \right\|_5^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При ручном счете для каждой строки матрицы $\mathbf{S}_{[5]}$ справа записываем наименьший не равный нулю элемент строки либо нуль, если все элементы строки равны нулю. Для каждого столбца снизу записываем наименьший не равный нулю элемент столбца либо нуль, если все элементы столбца равны нулю.

2-й шаг. По матрице $\mathbf{S}_{[5]}$ строим матрицу $\mathbf{C}_{[5]}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = r_{ij}\left[\left(s_{ij} - \min_{\substack{\forall k \in [1(1)5] \\ s_{ik} > 0}} s_{ik}\right) + \left(s_{ij} - \min_{\substack{\forall k \in [1(1)5] \\ s_{kj} > 0}} s_{kj}\right)\right], \quad i = 1(1)5, \quad j = 1(1)5.$$

При вычислении элементов матрицы можно использовать строку и столбец минимумов при матрице $\mathbf{S}_{[5]}$.

В данном случае минимумы по строкам и столбцам одинаковы и совпадают со значениями элементов матрицы $\mathbf{S}_{[5]}$, поэтому сразу получаем нулевую матрицу $\mathbf{C}_{[5]}$

$$\mathbf{C}_5 = \left\| c_{ij} \right\|_5^5 = \left\| 0 \right\|_5^5,$$

а, следовательно, и квазиканоническую матрицу смежности $\mathbf{R}_q$, совпадающую с матрицей смежности $\mathbf{R}_{[5]}$ исходного графа.

2-й этап. Нумерация вершин реберного графа

1-й шаг. В матрице $\mathbf{R}_q$ имеется более одного (два) пустого столбца, следовательно, дополняем матрицу столбцом слева и строкой сверху. Присваиваем дополнительным столбцу и строке номер 6 и в дополнительной строке в столбцах 1 и 2 проставляем единицы.

$$\mathbf{R}_q = \begin{array}{c|ccccccc|c}
 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & \\
\hline
6 & & 1 & 1 & & & & & a \\
1 & & & & 1 & 1 & 1 & & b \\
2 & & & & 1 & 1 & 1 & & b \\
3 & & & & & & & 1 & c \\
4 & & & & & & & 1 & c \\
5 & & & & & & & 1 & c \\
7 & & & & & & & & d \\
\hline
 & a & b & b & c & c & c & d &
\end{array}$$

$N_в$	$N_{нач}$	$N_{кон}$
6	*a*	*b*
1	*b*	*c*
2	*b*	*c*
3	*c*	*d*
4	*c*	*d*
5	*c*	*d*
7	*d*	–

2-й шаг. В матрице $\mathbf{R}_q$ имеется более одной (три) пустой строки. Поэтому дополняем матрицу справа и снизу столбцом и строкой, присваиваем им 7, а в дополнительном столбце в строках 3, 4, 5 проставляем единицы.

Справа от матрицы $\mathbf{R}_q$ строим таблицу начальных и конечных вершин дуг реберного графа, заполняя сразу столбец $N_в$ каждой строки.

3-й шаг. Пустому столбцу 6 матрицы $\mathbf{R}_q$ присваиваем индекс "a". Этот же индекс присваиваем строке 6 и проставляем в столбце $N_{нач}$ в строке, соответствующей строке 6 матрицы $\mathbf{R}_q$. Следующему столбцу 1 присваиваем индекс "b", который проставляется против строки 1 и в соответствующую строку столбца $N_{нач}$ таблицы.

4-й шаг. Просматривая столбец 1, находим единицу в строке 6 и вычеркиваем ее, а также единицу на пересечении этой строки и столбца 2. Столбец 2 оказывается после этого пустым, поэтому присваиваем ему, а также строке 2 индекс "b". Этот же индекс заносим в соответствующую строку столбца $N_{нач}$ таблицы дуг.

5-й шаг. Присваиваем индекс "c" столбцу 3 и строке с тем же номером. Заносим индекс "c" в соответствующую строку столбца $N_{нач}$ таблицы. Просматриваем столбец с индексом "c" матрицы $\mathbf{R}_q$. Первый единичный элемент находится на пересечении этого столбца со строкой 1. Вычеркиваем все единицы в строке 1. Второй единичный элемент находится на пересечении столбца со строкой 2. Вычеркиваем все единицы этой строки. Столбцы 4 и 5 после этого оказываются пустыми. Поэтому присваиваем им, а также строкам 4 и 5 индекс "c", помещая его на соответствующие места в столбце $N_{нач}$ таблицы.

6-й шаг. Присваиваем индекс "d" последнему составляющему столбцу 7, строке 7 и заносим его в столбец $N_{нач}$ таблицы.

На этом нумерация столбцов, а следовательно, и вершин реберного графа заканчивается.

7-й шаг. Заполняем столбец $N_{кон}$ таблицы следующим образом. В столбцах "b" матрицы $\mathbf{R}_q$ единицы находятся только в строке "a", поэтому в столбец $N_{кон}$ заносим индекс "b" в строку, которая содержит индекс "a" в столбце $N_{нач}$. Столбцы "c" матрицы содержат единицы только в строках "b", поэтому заносим индекс "c" в соответствующие строки столбца $N_{кон}$ таблицы. Столбец "d" содержит единицы в строках "c", поэтому индекс "d" проставляется в соответствующих строках столбца $N_{кон}$ таблицы, а в пустой строке столбца $N_{кон}$ ставим прочерк.

На этом заполнение таблицы заканчивается. В результате имеем таблицу дуг реберного графа, заданных своими начальными и конечными вершинами. Первоначальные номера строк матрицы $\mathbf{R}_q$, занесенные в столбец $N_в$ таблицы, позволяют сопоставить дуги реберного графа вершинам исходного графа. В нашем случае первоначальный номер строки соответствует номеру вершины исходного графа.

3-й этап. Построение диаграммы реберного графа

По таблице дуг реберного графа строим диаграмму этого графа (рис. 2.2.3).

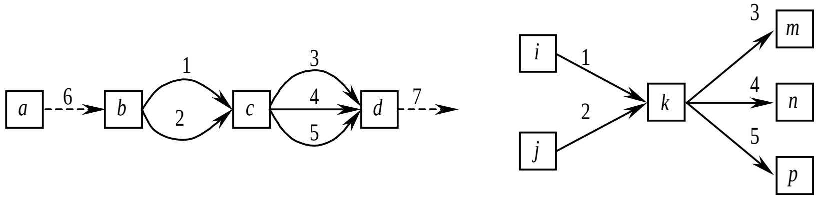

Рис. 2.2.3. Эквивалентные диаграммы реберного графа

Пример 2.2.2

Пусть диаграмма исходного графа имеет вид, приведенный на рис. 2.2.4. Требуется построить реберный граф, эквивалентный исходному.

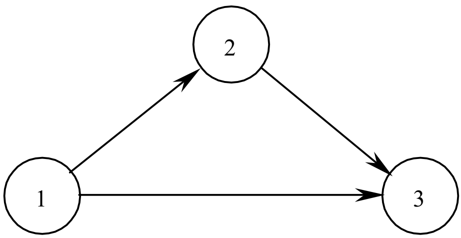

Рис. 2.2.4. Диаграмма вершинного графа в примере 2.2.2

Решение. Матрица смежности исходного графа имеет вид

$$\mathbf{R}_{[3]} = \left\| r_{ij} \right\|_3^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Обозначим

$$\mathbf{R}_{[3]}^{(0)} = \mathbf{R}_{[3]}.$$

1-й этап. Построение квазиканонической эквивалентной матрицы смежности

1-я итерация.

1-й шаг. По матрице $\mathbf{R}_{[3]}$ строим матрицу $\mathbf{S}_{[3]}$, элементы которой вычисляются по формуле (2.2.1):

$$\mathbf{S}_{[3]}^{(1)} = \left\| s_{ij}^{(1)} \right\|_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2-й шаг. По матрице $\mathbf{S}_{[3]}^{(1)}$ строим матрицу $\mathbf{C}_{[3]}^{(1)}$, элементы которой вычисляются по формуле (2.2.2):

$$\mathbf{C}_{[3]}^{(1)} = \left\| c_{ij}^{(1)} \right\|_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3-й шаг. В матрице $\mathbf{C}_{[3]}^{(1)}$ только один элемент $c_{13}^{(1)}$ не равен нулю. Расширим матрицу $\mathbf{R}_{[3]}^{0}$ путем добавления к ней четвертого столбца и четвертой строки. В расширенной матрице $\mathbf{R}_{[4]}^{(1)}$ элемент $r_{[13]}^{(1)}$ приравняем к нулю, а элементы $r_{14}^{(1)}$ и $r_{43}^{(1)}$ – единице.

$$\mathbf{R}_{[4]}^{(1)} = \left\| r_{ij}^{(1)} \right\|_4^4 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2-я итерация.

По матрице $\mathbf{R}_{[4]}^{(1)}$ строим матрицу $\mathbf{S}_{[4]}^{(2)}$, элементы которой вычисляются по формуле (2.2.3):

$$\mathbf{S}_{[4]}^{(2)} = \left\| s_{ij}^{(2)} \right\|_4^4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

2-й шаг. По матрице $\mathbf{S}_{[4]}^{(2)}$ строим матрицу $\mathbf{C}_{[4]}^{(2)}$, элементы которой вычисляются по формуле (2.2.4):

$$\mathbf{C}_{[4]}^{(2)} = \left\| c_{ij}^{(2)} \right\|_4^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все элементы матрицы $\mathbf{C}_{[4]}^{(2)}$ равны нулю, поэтому матрица $\mathbf{R}_{[4]}^{(1)}$ является квазиканонической эквивалентной матрицей смежности.

2-й этап. Нумерация вершин реберного графа

1-й шаг. В матрице $\mathbf{R}_q = \mathbf{R}_{[4]}^{(1)}$ есть только один пустой столбец 1. Присвоим ему, а также строке 1 индекс "a". Этот же индекс занесем в первую строку столбца $N_{нач}$ таблицы дуг реберного графа.

$$\mathbf{R}_q = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & & 1 & & 1 & a \\ 2 & & & 1 & & b \\ 3 & & & & & c \\ 4 & & & 1 & & d \\ \hline & a & b & c & d & \end{array}$$

$N_в$	$N_{нач}$	$N_{кон}$
1	a	b
2	b	c
3	c	–
4	b	c

2-й шаг. Столбцу 2 матрицы $\mathbf{R}_q$ присваиваем индекс "b". Этот же индекс присваиваем строке 2 и проставляем во вторую строку столбца $N_{нач}$ таблицы дуг реберного графа. В столбце 2 единица стоит только на пересечении со строкой 1. Вычеркиваем все единицы строки 1. В матрице $\mathbf{R}_q$ после этой операции оказывается свободным столбец 4. Присваиваем ему и строке 4 индекс "b". Этот же индекс проставляем в строке столбца $N_{нач}$ таблицы дуг.

3-й шаг. Столбцу 3 матрицы $\mathbf{R}_q$ присваиваем индекс "c". Этот же индекс присваиваем строке 3 матрицы $\mathbf{R}_q$ и проставляем в третьей строке столбца $N_{нач}$ таблицы. На этом нумерация столбцов, а следовательно, и вершин реберного графа заканчивается.

4-й шаг. Заполняем столбец $N_{кон}$ таблицы дуг реберного графа. В столбцах "b" матрицы $\mathbf{R}_q$ единицы находятся только в строке "a". Поэтому в соответствующую строку столбца $N_{кон}$ таблицы заносим индекс "b". В столбце "c" единицы находятся в строках "b" матрицы $\mathbf{R}_q$. Заносим индекс "c" в соответствующие строки столбца $N_{кон}$ таблицы. В пустой строке столбца $N_{кон}$ делаем прочерк. На этом заполнение таблицы заканчивается.

3-й этап. Построение диаграммы реберного графа

По таблице дуг реберного графа строим диаграмму графа, эквивалентного исходному. Столбец $N_{нач}$ таблицы содержит начальные вершины дуг, столбец $N_{кон}$ – конечные вершины дуг, а столбец $N_{в}$ – номер вершин исходного графа, эквивалентных соответствующим дугам. Вершины, номеров которых нет у вершин исходного графа, считаются фиктивными. Такой вершиной является вершина 4. Соответствующая ей дуга изображается на графе штриховой линией. Диаграмма реберного графа представлена на рис. 2.2.5.

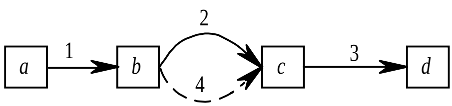

Рис. 2.2.5. Диаграмма эквивалентного реберного графа

В литературе по теории графов можно встретить следующее определение понятия реберного графа, которое применяется к неориентированному графу.

Реберным (смежностным) графом или *графом смежности ребер* для исходного графа называется граф, вершины которого взаимно однозначно сопоставлены ребрам исходного графа, причем две вершины реберного графа имеют общие ребра в том и только в том случае, если соответствующие им ребра исходного графа имеют общую вершину.

Матрица смежности вершин такого графа совпадает с матрицей смежности ребер исходного графа. В дальнейшем, чтобы не возникало путаницы и разночтения, для рассмотренного в замечании графа оставим только название смежностный, а понятие реберный будем использовать только в соответствии с определением, данным ранее.

Построение диаграммы смежностного графа по диаграмме исходного достаточно просто. На каждом ребре исходного графа выбирают фиксированную точку, например, середину. Фиксированные точки соединяют линиями в том и только в том случае, если соответствующие им ребра имеют общую вершину. В результате получают диаграмму смежностного графа, вершины которого изображены фиксированными точками, а ребра – соединяющими их линиями.

На рис. 2.2.6 приведены диаграммы исходного построенного указанным способом смежностного графа.

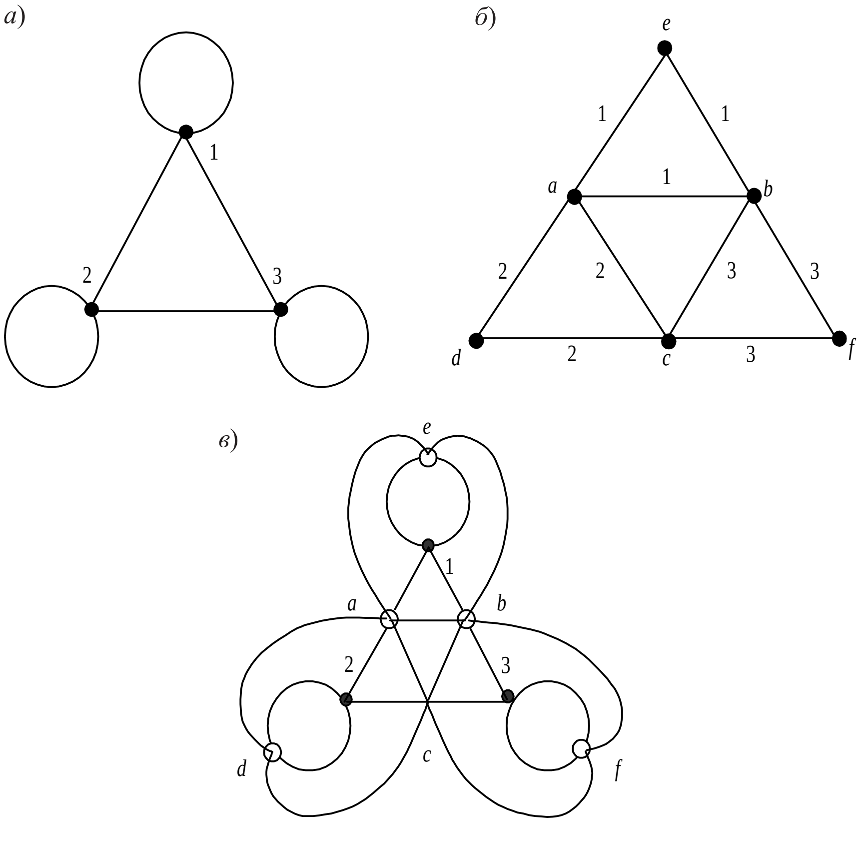

Рис. 2.2.6. Диаграммы графов: *а* – исходного; *б* – смежностного; *в* – иллюстрация метода преобразования

Графы являются математическими объектами, поэтому применение графов при моделировании структур систем позволяет широко привлекать математические методы для исследования структур и их свойств, в том числе с помощью ЭВМ. Построение графа требует минимальной информации о моделируемой структуре, что особенно ценно на начальных этапах разработки и исследования систем. Однако при этом следует иметь в виду, что анализ структурных свойств системы по графу неизбежно приобретает топологический характер, так как при этом выявляются и исследуются, в основном, наиболее общие топологические свойства и характеристики структуры.

2.3. СТРУКТУРНО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ

При исследовании структуры системы наибольший интерес представляют те свойства структуры, которые оказывают существенное влияние на эффективность функционирования и качество системы. Эти свойства описываются структурно-топологическими характеристиками системы, среди которых основными являются:

– наличие изолированных, висячих и тупиковых вершин;
– наличие петель и контуров;
– количество и состав связей между элементами;
– связность структуры;
– значимость элементов в структуре.

Перечисленные характеристики позволяют количественно оценить свойства структуры, выявить наличие непредусмотренных обрывов и тупиков, нежелательных связей в системе, распределение элементов в структуре, их значимость, а также ответить на вопрос, как удаление тех или иных элементов нарушает структуру системы.

Чаще всего в основе вычисления указанных характеристик лежит матричное представление графа структуры в виде матрицы смежности вершин. Рассмотрим данные структурно-топологические характеристики и некоторые способы их определения.

2.3.1. Изолированные, висячие и тупиковые вершины

При проведении структурно-топологического анализа в первую очередь определяют наличие в структуре изолированных, висячих и тупиковых вершин.

Определение 2.3.1. Вершина графа называется ***изолированной***, если в графе не существует дуг, инцидентных этой вершине.

Определение 2.3.2. Вершина графа называется ***висячей***, если для всех дуг графа, инцидентных данной вершине, она является начальной.

Определение 2.3.3. Вершина графа называется ***тупиковой***, если для всех дуг графа, инцидентных данной вершине, она является конечной.

Введенные понятия иллюстрирует рис. 2.3.1. Граф, диаграмма которого представлена на рисунке, имеет изолированную вершину *7*, висячую вершину *1* и тупиковую вершину *6*.

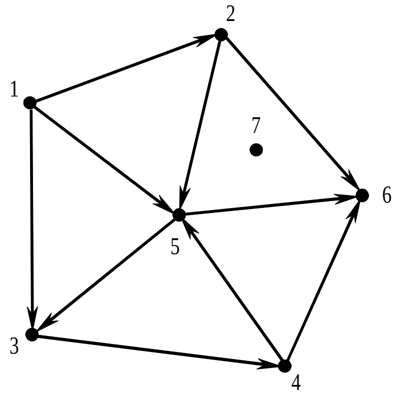

Рис. 2.3.1. Типы вершин графа

Наличие в графе изолированных вершин чаще всего свидетельствует об ошибках, допущенных при описании структуры системы или построении графа структуры. Такое заключение следует из определения системы как целого, состоящего из взаимосвязанных элементов.

Висячие вершины соответствуют входам системы, а тупиковые – ее выходам. Наличие лишних висячих или тупиковых вершин, как и их недостаток, по сравнению с количеством входов и выходов системы также говорит об ошибках в описании или моделировании структуры.

Выявить все изолированные, висячие и тупиковые вершины достаточно просто по матрице смежности вершин графа.

Пусть $\mathbf{R}_{[n]}$ – матрица смежности вершин графа. Суммируя элементы r_{ij} матрицы по строкам, получают величины

$$r^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}, \quad j = 1(1)n. \qquad (2.3.1)$$

После суммирования элементов r_{ij} матрицы по столбцам получают величины

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \quad i = 1(1)n. \qquad (2.3.2)$$

Если для некоторой k-й вершины графа обе величины $r^{(k)}$ и r_k, $k \in \left[1(1)n\right]$, определяемые выражениями (2.3.1), (2.3.2), равны нулю, то эта вершина будет изолированной. Если только одна величина $r^{(k)} = 0$, то вершина будет висячей. Если только $r_k = 0$, то вершина будет тупиковой.

Поэтому, просматривая матрицу смежности вершин графа, выявляют изолированные вершины, для которых соответствующие им строки и столбцы матрицы содержат только нулевые элементы, висячие вершины, для которых только соответствующие им столбцы не содержат ненулевых элементов, и тупиковые вершины, для которых только соответствующие им строки не содержат ненулевых элементов.

Матрица смежности графа, диаграмма которого приведена на рис. 2.3.1, имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \mathbf{R}_{[7]} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4. \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \end{array}$$

Анализ матрицы показывает, что в графе вершина 1 является висячей, вершина 6 – тупиковой, а вершина 7 – изолированной.

Используя выражения (2.3.1), (2.3.2), данный анализ можно легко провести на компьютере.

2.3.2. Петли и контуры

Петля в графе свидетельствует о наличии связи между входом и выходом одного и того же элемента системы, а контур – о наличии связи между входом и выходом некоторой совокупности последовательно связанных элементов. Существуют системы, в которых такие связи не допускаются. В таком случае наличие петель и контуров свидетельствует об ошибках в описании системы или построении графа ее структуры. В то же время некоторые системы по своей сути должны иметь петли или контуры, поэтому их отсутствие или невозможность правильной их интерпретации говорит о допущенных ошибках при моделировании.

Наличие петель и контуров можно выявить с помощью матрицы смежности. Если матрица $\mathbf{R}_{[n]}$ смежности вершин графа содержит ненулевые элементы, расположенные на главной диагонали, т. е. существуют $r_{ii} \neq 0$ при $i \in \left[1(1)n\right]$, то вершины графа, соответствующие этим элементам, имеют петли. Равенство нулю всех элементов матрицы смежности, расположенных на главной диагонали, свидетельствует об отсутствии петель в графе.

Наличие контуров в графе определяется следующим образом.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{R}_{[n]}$ смежности вершин графа. Если в ней имеются не равные нулю элементы главной диагонали, то приравняем их нулю. Полученную матрицу обозначим $\mathbf{Q}_{[n]}$ и возведем в квадрат. При отсутствии ненулевых элементов главной диагонали в матрице смежности в качестве матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}$ выбираем ее саму.

Элементы матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}^{(2)} = \mathbf{Q}_{[n]}^{2}$ определяются по формуле

$$q_{ij}^{(2)} = \sum_{p=1}^{n} q_{ip}\, q_{pj}\,, \quad i = 1(1)n,\; j = 1(1)n. \tag{2.3.3}$$

Каждое слагаемое в выражении (2.3.3) не равно нулю в том и только том случае, когда оба сомножителя q_{ip} и q_{pj} не равны нулю. А это возможно только тогда, когда существует путь из вершины i в вершину j, состоящий из двух дуг и проходящий через вершину p. Таким образом, значение элемента $q_{ij}^{(2)}$ матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}^{(2)}$ равно числу путей длины 2 (двухзвенных путей), ведущих из вершины i в вершину j. Следовательно, матрица $\mathbf{Q}_{[n]}^{(2)}$ определяет число всех путей длины 2 в рассматриваемом графе.

Не равные нулю элементы главной диагонали матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}^{(2)}$, если они имеются, свидетельствуют о наличии двухзвенных контуров в графе.

Для выявления контуров длины 3 в матрице $\mathbf{Q}_{[n]}^{(2)}$ приравнивают нулю ненулевые элементы главной диагонали, если они есть, и умножают полученную матрицу на матрицу $\mathbf{Q}_n$:

$$\mathbf{Q}_{[n]}^{(3)} = \mathbf{Q}_{[n]}^{(2)'}\,\mathbf{Q}_{[n]},$$

где $\mathbf{Q}_{[n]}^{(2)'}$ – матрица, полученная из матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}^{(2)}$ после приравнивания нулю ненулевых элементов главной диагонали.

Не равные нулю элементы главной диагонали матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}^{(3)}$ свидетельствуют о наличии контуров длины 3 в графе. Если все элементы главной диагонали матрицы равны нулю, то контуров длины 3 в графе нет.

В общем случае для выявления наличия контуров длины k необходимо вычислять матрицу

$$\mathbf{Q}_{[n]}^{(k)} = \mathbf{Q}_{[n]}^{(k-1)'}\,\mathbf{Q}_{[n]}, \quad k = 2(1)n, \tag{2.3.4}$$

где

$\mathbf{Q}_{[n]}^{(1)'} = \mathbf{Q}_{[n]}$ – матрица, полученная из матрицы $\mathbf{R}_{[n]}$ смежности путем приравнивания нулю ненулевых элементов ее главной диагонали;

$\mathbf{Q}_{[n]}^{(k-1)'}$, $k \in [3(1)n]$ – матрица, полученная из матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}^{(k-1)}$ путем приравнивания нулю ненулевых элементов ее главной диагонали.

Не равные нулю элементы главной диагонали матрицы $\mathbf{Q}_{[n]}^{(k)}$ свидетельствуют о наличии контуров длины k в графе. При отсутствии таких элементов контуров длины k в графе нет.

Матрица $\mathbf{Q}_{[n]}^{(k)}$ определяет число всех путей длины k в графе. Так как в графе с n вершинами самый длинный элементарный контур не может иметь длину больше n, то и количество операций вида (2.3.4) не превышает n.

Следует отметить, что, если в графе с n вершинами отсутствуют петли и контуры, то максимальная длина элементарного пути в таком графе не превышает $n - 1$. Поэтому, начиная с некоторого $k \in [2(1)n]$, степени матрицы смежности будут представлять собой нулевые матрицы, т. е.

$$\mathbf{R}_{[n]}^{(l)} = 0, \quad l = k(1)\infty, k \in [2(1)n]. \tag{2.3.5}$$

Следовательно, выполнение соотношения (2.3.5) свидетельствует об отсутствии петель и контуров в графе. Если же при последовательном возведении матрицы смежности в степень появляются ненулевые элементы на ее главной диагонали, то это говорит о наличии контуров в графе.

Рассмотрим применение указанных выше правил анализа структур систем по графу на примерах.

Пример 2.3.1

Пусть диаграмма графа имеет вид, приведенный на рис. 2.3.2, *а*. Определить наличие изолированных, висячих, тупиковых вершин, а также петель и контуров в графе.

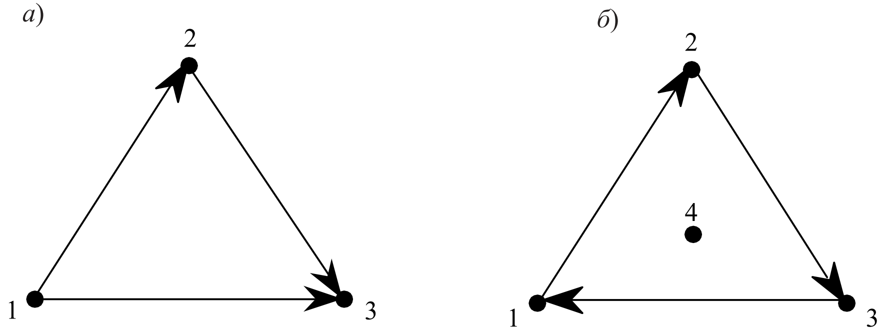

Рис. 2.3.2. Диаграммы графов для примеров: *а* – 2.3.1; *б* – 2.3.2

Решение. Матрица смежности вершин графа имеет вид

$$\mathbf{R}_{[3]} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}.$$

В матрице первый столбец и третья строка содержат только нули, следовательно, первая вершина в графе – висячая, а третья – тупиковая. Изолированных вершин нет. Так как главная диагональ матрицы содержит только нули, то петель в графе нет.

Возведем матрицу смежности в квадрат.

$$\mathbf{R}_{[3]}^{(2)} = \mathbf{R}_{[3]}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица содержит только нули на главной диагонали, поэтому двухзвенных контуров в графе нет.

Возведем матрицу смежности в куб.

$$\mathbf{R}_{[3]}^{(3)} = \mathbf{R}_{[3]}^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в результате возведения матрицы смежности в куб получили нулевую матрицу, то контуров в графе нет. Полученные выводы легко проверяются по диаграмме графа.

Пример 2.3.2

Задан граф, диаграмма которого представлена на рис. 2.3.2, *б*. Определить наличие изолированных, висячих, тупиковых вершин, а также петель и контуров в графе.

Решение. Матрица смежности вершин графа имеет вид

$$\mathbf{R}_{[4]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}.$$

В матрице только четвертый столбец и четвертая строка содержат одни нули, поэтому четвертая вершина в графе – изолированная, а висячих и тупиковых вершин нет.

На главной диагонали матрицы расположены только нулевые элементы, поэтому петель в графе нет.

Возведем матрицу смежности в квадрат.

$$\mathbf{R}_{[4]}^{(2)}=\mathbf{R}_{[4]}^{2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы расположены только нулевые элементы, поэтому двухзвенных контуров в графе нет.

Возведем матрицу смежности в куб.

$$\mathbf{R}_{[4]}^{(3)}=\mathbf{R}_{[4]}^{3}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы стоят ненулевые элементы, поэтому в графе имеется трехзвенный контур, проходящий через первую, вторую и третью вершины графа. Других контуров в графе нет, так как четвертая вершина – изолированная.

Пример 2.3.3

Задан граф, диаграмма которого представлена на рис. 2.3.3. Определить наличие изолированных, висячих, тупиковых вершин, а также петель и контуров в графе.

Решение. Матрица смежности вершин графа имеет вид

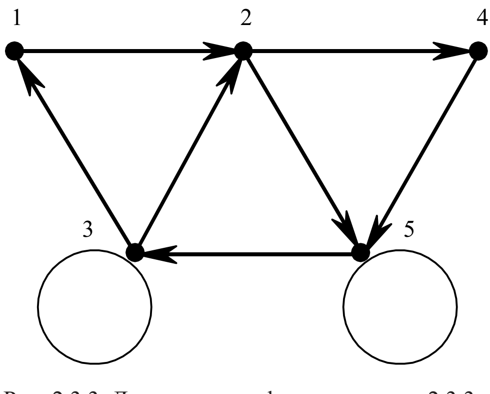

Рис. 2.3.3. Диаграмма графа для примера 2.3.3

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \mathbf{R}_{[5]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}.$$

На главной диагонали матрицы смежности расположены два ненулевых элемента: $r_{33} = 1$, $r_{55} = 1$. Следовательно, третья и пятая вершины графа имеют петли. Нулевых столбцов и строк в матрице нет, следовательно, граф не имеет висячих, тупиковых и изолированных вершин.

Получив матрицу $\mathbf{Q}_{[5]}$ путем приравнивания нулю элементов r_{33} и r_{55}, возведем ее в квадрат.

$$\mathbf{Q}_{[5]}^{(2)} = \mathbf{Q}_{[5]}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали полученной матрицы отсутствуют ненулевые элементы. Следовательно, двухзвенных контуров в графе нет.

В соответствии с выражением (2.3.4) вычисляем матрицу $\mathbf{Q}_{[5]}^{(3)}$.

$$\mathbf{Q}_{[5]}^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку на главной диагонали полученной матрицы стоят ненулевые элементы $q_{22}^{(3)} = 1$, $q_{33}^{(3)} = 1$ и $q_{55}^{(3)} = 1$, то в графе имеется трехзвенный контур, проходящий через вторую, третью и пятую вершины графа.

С помощью выражения (2.3.4) при $k = 4$ вычисляем матрицу $\mathbf{Q}_{[5]}^{(4)}$.

$$\mathbf{Q}_{[5]}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Анализ элементов полученной матрицы, расположенных на главной диагонали, показывает, что в графе имеются два четырехзвенных контура, проходящих через первую, вторую, третью, пятую вершины и вторую, третью, четвертую и пятую вершины.

Используя выражение (2.3.4) при $k = 5$, вычисляем матрицу $\mathbf{Q}_{[5]}^{(5)}$.

$$\mathbf{Q}_{[5]}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Анализ элементов главной диагонали полученной матрицы показывает, что в графе имеется один пятизвенный контур, проходящий через все вершины. Других контуров, кроме выявленных, в графе нет, так как максимальная длина элементарного контура в графе с пятью вершинами не может быть более пяти.

2.3.3. Количество и состав связей между элементами системы

Определение числа и состава связей между элементами системы является одной из основных задач структурного анализа. При описании структуры системы в виде графа решение этой задачи сводится к определению числа и состава элементарных путей в графе, что, в свою очередь, предполагает умение находить все элементарные пути, идущие из любой вершины исследуемого графа в любую другую его вершину.

Существует несколько способов решения данной задачи. Рассмотрим один из них, основанный на использовании алгебры квазиминоров и применимый к ориентированным графам без петель и кратных дуг[1].

Определение 2.3.4. ***Квазиминором элемента*** a_{kl}, $k \neq l$ матрицы $\mathbf{A}_{[n]} = \left\| a_{ij} \right\|_n^n$ называют определитель особого рода (беззнаковый определитель) матрицы, получаемой из матрицы $\mathbf{A}_{[n]}$ путем вычеркивания k-го столбца и l-й строки.

Квазиминор элемента a_{kl} обозначают символом

$$\left| a_{ij-lk} \right|_{kl}.$$

При этом знак $|\ |_{kl}$ является символом квазиминора, а знак $a_{ij\,-\,lk}$ обозначает матрицу, полученную из матрицы $\left\| a_{ij} \right\|_n^n$ путем вычеркивания l-й строки и k-го столбца, которая вписывается в символ квазиминора подобно матрице, вписываемой в символ обычного минора.

Квазиминор $|a_{ij\,-\,lk}|_{kl}$ при $k \neq l$ может быть вычислен с помощью выражения

$$\left| a_{\,ij-lk} \right|_{kl} = \sum_{q} a_{pq} A_{pq}^{(l)}, \tag{2.3.6}$$

где

a_{pq}, $q = 1(1)n$, $q \neq k$ – элементы p-й строки матрицы $\left\| a_{ij} \right\|_n^n$ за исключением элемента a_{pk}, $p[1(1)n]$, $p \neq l$;

$$\mathbf{A}_{pq}^{(l)} = \begin{cases} 1, \text{ при } q = l; \\ \left| a_{ij-lk-pq} \right|_{ql}, \text{ при } q \neq l; \end{cases}$$

$a_{ij\,-\,lk\,-\,pq}$ – символ матрицы, вписываемой в символ квазиминора $|\ \ |_{ql}$ и получаемой из матрицы квазиминора $|a_{ij\,-\,lk}|_{kl}$ путем вычеркивания p-й строки и q-го столбца.

Формула (2.3.6) сводит вычисление исходного квазиминора $|a_{ij\,-\,lk}|_{kl}$ к вычислению квазиминоров меньшего порядка путем разложения его на эти

[1] *Нечипоренко В. И.* Указ. соч.

квазиминоры. Процесс вычисления во многом сходен с процессом вычисления обычных определителей и после приобретения практических навыков оказывается достаточно простым. Кроме того, данный процесс легко поддается алгоритмизации, а следовательно, и выполнению на ЭВМ.

Сущность рассматриваемого способа определения всех элементарных путей в графе состоит в том, что на основе матрицы смежности вершин графа строится матрица непосредственных путей, а по ней с помощью алгебры квазиминоров находится полная матрица путей.

Определение 2.3.5. ***Матрицей непосредственных путей*** графа G с n вершинами будем называть квадратную матрицу $\mathbf{U}_{[n]}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а элементы определяются по формуле

$$u_{ij} = \begin{cases} u_{ij} \text{ – если данная дуга существует;} \\ 0 \text{ – в противном случае, } i=1(1)n,\ j=1(1)n. \end{cases}$$

Матрица непосредственных путей легко получается из матрицы смежности вершин, если в ней все элементы, не равные нулю, заменить соответствующими символами дуг.

Определение 2.3.6. ***Полной матрицей путей*** графа G с n вершинами будем называть квадратную матрицу $\mathbf{A}_{[n]}$, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, а значение элементов a_{ij}, $i = 1(1)n$, $j = 1(1)n$ равно числу всех элементарных путей из вершины x_i графа в вершину x_j.

Доказано, что число всех элементарных путей, ведущих из k-й вершины в l-ю, т. е. значение элемента a_{kl} полной матрицы путей $\mathbf{A}_{[n]}$, равно значению квазиминора элемента u_{kl} матрицы непосредственных путей $\mathbf{U}_{[n]}$:

$$a_{kl} = \left| u_{ij-lk} \right|_{kl}, \text{ если } k \neq l. \qquad (2.3.7)$$

Элементы a_{kk}, $k = 1(1)n$ полной матрицы путей можно вычислить с помощью выражения

$$a_{kk} = |u_{ij}|_{kk}, \quad k = 1(1)n. \qquad (2.3.8)$$

При этом в квазиминор вписывается вся матрица без вычеркивания столбцов и строк.

Следует помнить, что для графа без петель и контуров элементы $a_{kk} = 0$, $k = 1(1)n$.

Порядок вычисления элементов a_{kl} полной матрицы путей $\mathbf{A}_{[n]}$ следующий.

Пусть граф задан матрицей $\mathbf{R}_{[n]}$ смежности вершин графа.

1-й этап. По матрице $\mathbf{R}_{[n]}$ путем замены всех элементов, не равных нулю, на символы u_{ij}, $i = 1(1)n$, $j = 1(1)n$ получают матрицу непосредственных путей $\mathbf{U}_{[n]}$.

2-й этап. Применяя алгебру квазиминоров, вычисляют элемент a_{kl} матрицы полных путей по формуле (2.3.7) либо (2.3.8) путем последовательного разложения исходного квазиминора на квазиминоры меньшего порядка по формуле (2.3.6) до тех пор, пока не получат обыкновенного алгебраического выражения, значение которого вычисляется стандартным способом. При этом индексацию столбцов и строк квазиминоров в процессе вычисления не изменяют.

Вычисление квазиминора (2.3.7) или (2.3.8) начинают с разложения его с помощью выражения (2.3.6) по элементам строки, которая соответствует исходной вершине искомых элементарных путей. Для элемента a_{kl} полной матрицы путей исходной вершиной будет вершина с индексом k. Следовательно, для $k \neq l$ имеем

$$a_{kl} = \left|u_{ij-lk}\right|_{kl} = \sum_{q=1}^{n} \left|u_{kq}\right| U_{kq}^{(l)}, \qquad (2.3.9)$$

где

$\left|u_{kq}\right|,\ q = 1(1)n$ – длина дуги u_{kq};

$$\mathbf{U}_{kq}^{(l)} = \begin{cases} 1, \text{ при } q = l, \\ \left|u_{ij-lk-kq}\right|_{ql}, \text{ при } q \neq l,\ q = 1(1)n. \end{cases}$$

Если $k = l$, то

$$a_{ll} = \left|u_{ij}\right|_{ll} = \sum_{q=1}^{n} \left|u_{lq}\right| \mathbf{U}_{lq}^{(l)}. \qquad (2.3.10)$$

Последующие разложения квазиминоров меньших порядков проводятся по элементам строк, соответствующих вершинам, в которые заходят дуги, по которым производилось предыдущее разложение, т. е. по элементам q-х строк.

При определении всех элементов полной матрицы путей второй этап выполняется для каждого элемента этой матрицы. Если же необходимо определить все элементарные пути только между некоторыми вершинами, то второй этап выполняется только для соответствующих элементов полной матрицы путей.

Пример 2.3.4

Задан граф, диаграмма которого представлена на рис. 2.3.4. Требуется построить полную матрицу путей графа.

Решение. По диаграмме графа составляем матрицу смежности вершин $\mathbf{R}_{[5]}$, а затем и матрицу непосредственных путей $\mathbf{U}_{[5]}$ графа

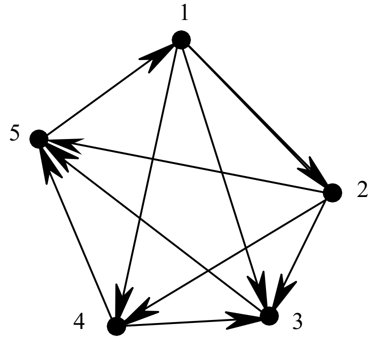

Рис. 2.3.4. Диаграмма графа для примера 2.3.4

$$\mathbf{R}_{[5]} = \left\| r_{ij} \right\|_5^5 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}.$$

$$\mathbf{U}_{[5]} = \left\| u_{ij} \right\|_5^5 \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & 0 \\ 0 & 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{43} & 0 & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (2.3.11)$$

Определение элементов полной матрицы путей начнем с элемента a_{11}. Так как элемент a_{11} расположен на главной диагонали матрицы непосредственных путей, то для его вычисления используем формулу (2.3.10):

$$a_{11} = \left|u_{ij}\right|_{11} = \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{35} & 3 \\ 0 & 0 & u_{43} & 0 & u_{45} & 4 \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}. \qquad (2.3.12)$$

Исходной вершиной является вершина с индексом 1, поэтому разложение квазиминора (2.3.12) будем вести по элементам первой строки в соответствии с выражением (2.3.6):

$$a_{11} = \left|u_{ij}\right|_{11} = \left|u_{12}\right|\left|u_{ij-12}\right|_{21} + \left|u_{13}\right|\left|u_{ij-13}\right|_{31} + \left|u_{14}\right|\left|u_{ij-14}\right|_{41} =$$

$$= \left|u_{12}\right| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} & 3 \\ 0 & u_{43} & 0 & u_{45} & 4 \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} + \left|u_{13}\right| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & 0 & u_{24} & u_{25} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & u_{45} & 4 \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} +$$

$$+ \left|u_{14}\right| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & \\ \hline 0 & 0 & u_{23} & u_{25} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} & 3 \\ 0 & 0 & u_{43} & u_{45} & 4 \\ u_{51} & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}.$$

Первый этап разложения соответствует выявлению всех путей единичной длины, исходящих из вершины 1.

Дальнейшее разложение полученных квазиминоров выполняем по элементам строк, индексы которых совпадают с индексами вершин, в которые заходят выделенные дуги. Опуская общие выражения, получаемые при разложении квазиминоров, запишем

$$a_{11} = \left|u_{12}\,u_{23}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} + \left|u_{12}\,u_{24}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & u_{43} & u_{45} \\ u_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} +$$

$$+ \left|u_{12}\,u_{25}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{43} & 0 \\ u_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} + \left|u_{13}\,u_{35}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ u_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} +$$

$$+ \left|u_{14}\,u_{43}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ u_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} + \left|u_{14}\,u_{45}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ u_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} =$$

$$= \left|u_{12}\,u_{23}\,u_{35}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ u_{51} & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} + \left|u_{12}\,u_{24}\,u_{43}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 5 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & u_{35} \\ u_{51} & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} +$$

$$+ \left|u_{12}\,u_{24}\,u_{45}\right| \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ u_{51} & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} + \left|u_{12}\,u_{25}\,u_{51}\right| 1 + \left|u_{13}\,u_{35}\,u_{51}\right| 1 +$$

$$+\left|u_{14}\,u_{43}\,u_{35}\right|\begin{array}{cc} \begin{matrix}\;1 & \;\;2\end{matrix} & \\ \begin{vmatrix}0 & 0\\ u_{51} & 0\end{vmatrix} & \begin{matrix}2\\ 5\end{matrix}\end{array}+\left|u_{14}\,u_{45}\,u_{51}\right|1=$$

$$=\left|u_{12}\,u_{23}\,u_{35}\,u_{51}\right|1+\left|u_{12}\,u_{24}\,u_{43}\,u_{35}\,u_{51}\right|1+$$

$$+\left|u_{12}\,u_{24}\,u_{45}\,u_{51}\right|1+\left|u_{12}\,u_{25}\,u_{51}\right|+\left|u_{13}\,u_{35}\,u_{51}\right|+$$

$$+\left|u_{14}\,u_{43}\,u_{35}\,u_{51}\right|1+\left|u_{14}\,u_{45}\,u_{51}\right|.$$

Последовательность этапов определения элемента a_{11} иллюстрируется рис. 2.3.5. На каждом этапе процесса последовательного разложения исходного квазиминора (2.3.12) в искомых путях выделяют очередные дуги, а в результате получают выражение (2.3.13), определяющее количество и состав всех элементарных путей, ведущих из первой в первую вершину:

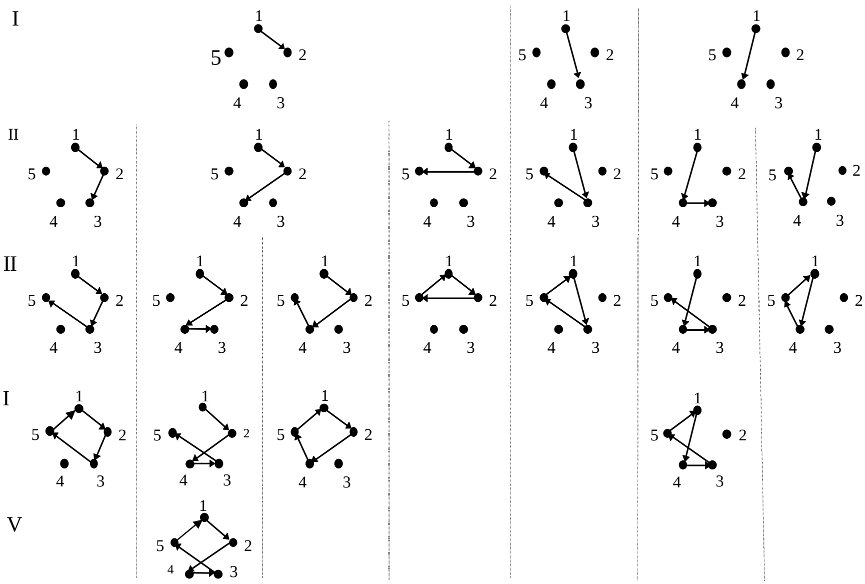

Рис. 2.3.5. Последовательность этапов определения состава и количества элементарных путей, ведущих из первой в первую вершину

$$a_{11} = |u_{12}\,u_{23}\,u_{35}\,u_{51}| + |u_{12}\,u_{24}\,u_{43}\,u_{35}\,u_{51}| +$$
$$+ |u_{12}\,u_{24}\,u_{45}\,u_{51}| + |u_{12}\,u_{25}\,u_{51}| + |u_{13}\,u_{35}\,u_{51}| +$$
$$+ |u_{14}\,u_{43}\,u_{35}\,u_{51}| + |u_{14}\,u_{45}\,u_{51}|. \qquad (2.3.13)$$

Подсчитывая количество путей в выражении (2.3.13), получаем $a_{11} = 7$.

Далее производят вычисление остальных элементов полной матрицы путей.

Вычисление элементов матрицы, расположенных вне главной диагонали, рассмотрим на примере элемента a_{15}.

$$a_{15} = |u_{ij-51}|_{15} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} & 0 \\ 0 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & u_{43} & 0 & u_{45} \end{vmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}. \qquad (2.3.14)$$

Выражение (2.3.14) получено из (2.3.11) после вычеркивания в матрице непосредственных путей пятой строки и первого столбца. В соответствии с выражением (2.3.6) производим последовательное разложение квазиминора (2.3.14), постепенно уменьшая порядок составляющих квазиминоров до тех пор, пока не получим выражение вида (2.3.13), в явном виде определяющее количество и состав всех элементарных путей, ведущих из первой в пятую вершину:

$$a_{15} = |u_{ij-51}|_{15} = |u_{12}| \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ u_{43} & 0 & u_{45} \end{vmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} + |u_{13}| \begin{array}{cc} \begin{matrix} 2 & 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 0 & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & 0 & u_{45} \end{vmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} +$$

$$+ |u_{14}| \begin{array}{cc} \begin{matrix} 2 & 3 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 0 & u_{23} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{35} \\ 0 & u_{43} & u_{45} \end{vmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} = |u_{12}\,u_{23}| \begin{array}{cc} \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 0 & u_{35} \\ 0 & u_{45} \end{vmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} + |u_{12}\,u_{24}| \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 0 & u_{35} \\ u_{43} & u_{45} \end{vmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array} +$$

$$+\left|u_{12}\ u_{25}\right|1+\left|u_{13}\ u_{35}\right|1+\left|u_{14}\ u_{43}\right|\begin{array}{cc} \begin{matrix} \ \ 3 & \ \ 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 0 & u_{25} \\ 0 & u_{35} \end{vmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}+\left|u_{14}\ u_{45}\right|1=$$

$$=\left|u_{12}\ u_{23}\ u_{35}\right|1+\left|u_{12}\ u_{24}\ u_{43}\ u_{35}\right|1+\left|u_{12}\ u_{24}\ u_{45}\right|1+$$

$$+\left|u_{12}\ u_{25}\right|+\left|u_{13}\ u_{35}\right|+\left|u_{14}\ u_{43}\ u_{35}\right|+\left|u_{14}\ u_{45}\right|. \qquad (2.3.15)$$

В результате получаем $a_{15} = 7$.

После проведения всех вычислений получаем матрицу полных путей графа, диаграмма которого изображена на рис. 2.3.4:

$$\mathbf{A}_{[5]}=\left\|a_{ij}\right\|_5^5=\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3. \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array} \qquad (2.3.16)$$

При анализе путей в графе чаще всего определяются:

– вершины, входящие в путь;

– пути, длина которых удовлетворяет определенному требованию.

Первая задача может быть решена как задача перечисления совпадающих символов дуг, входящих в путь, а также символов начала и конца пути. Для путей, ведущих из первой в пятую вершину в рассмотренном ранее примере 2.3.4, из выражения (2.3.15) можно получить следующие перечисления:

$$\left\langle x_1, x_2, x_3, x_5\right\rangle,\ \left\langle x_1, x_2, x_4, x_3\ x_5\right\rangle,\ \left\langle x_1, x_2, x_4, x_5\right\rangle,\ \left\langle x_1, x_2, x_5\right\rangle,$$

$$\left\langle x_1, x_3, x_5\right\rangle,\ \left\langle x_1, x_4, x_3, x_5\right\rangle,\ \left\langle x_1, x_4, x_5\right\rangle.$$

Вторая задача решается как задача определения длин путей и выбора из них таких, которые удовлетворяют заданному критерию.

Так, например, если надо выбрать максимальный путь из первой в пятую вершину, то таким будет путь $<u_{12}, u_{24}, u_{43}, u_{35}>$, содержащий четыре дуги. Минимальных путей будет три, причем каждый из них содержит по две дуги: $<u_{12}, u_{25}>$, $<u_{13}, u_{35}>$, $<u_{14}, u_{45}>$.

2.3.4. Связность структуры

Связность структуры при описании ее в виде графа характеризуется связностью графа. Ориентированный граф будет *связным (слабо связным)*, если между двумя любыми его вершинами существует хотя бы один путь, и *сильно связным (бисвязным)*, если из любой вершины графа существует путь в любую вершину графа. Таким образом, связность графа определяет возможность связи между его вершинами.

Связность графа достаточно хорошо может быть описана с помощью полной матрицы связей.

Определение 2.3.7. ***Полной матрицей связи*** графа G с n вершинами будем называть квадратную матрицу вида

$$\mathbf{\Gamma}_n = \left\|\gamma_{ij}\right\|_n^n, \tag{2.3.17}$$

где $\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в графе существует хотя бы один путь} \\ \text{из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j; \\ 0 \text{ – в противном случае}, \quad i=1(1)n, \;\; j=1(1)n. \end{cases}$

Полная матрица связи может быть легко определена по полной матрице путей на основе соотношения

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_{ij} > 0; \\ 0, \text{ если } a_{ij} = 0, \quad i=1(1)n, \;\; j=1(1)n. \end{cases} \tag{2.3.18}$$

Для графа, рассмотренного в примере 2.3.4, полная матрица связи, полученная из полной матрицы путей (2.3.16) с использованием выражения (2.3.18), имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}_{[5]} = \left\|\gamma_{ij}\right\|_5^5 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}. \tag{2.3.19}$$

Анализ полной матрицы связей показывает, что в графе существуют пути из любой вершины в любую вершину, следовательно, данный граф является сильно связным.

Элементы полной матрицы связи могут быть определены также с помощью квазиминоров

$$\gamma_{kl=\left|u_{ij-lk}\right|_{kl}}, \quad k=1(1)n, \;\; l=1(1)n,$$

если при их вычислении сложение понимать в булевом смысле (как логическое), т. е. предполагать, что

$$0 + 0 = 0,\;\; 0 + 1 = 1,\;\; 1 + 0 = 1,\;\; 1+ 1 = 1,$$

а длины дуг принимать равными единице.

Для вычисления полной матрицы связей ориентированного графа без петель и контуров можно использовать еще один достаточно простой способ, в основе которого положено определение матрицы $\mathbf{R}^s_{|n|}$ по формуле

$$\mathbf{R}^s_{|n|} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}^k_{[n]}, \tag{2.3.20}$$

где $\mathbf{R}_{[n]}$ – матрица смежности вершин графа.

После вычисления матрицы $\mathbf{R}^s_{|n|}$ полную матрицу связей получают на основе соотношения

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } r^s_{ij} > 0; \\ 0, \text{ если } r^s_{ij} = 0, \quad i=1(1)n, \;\; j=1(1)n. \end{cases} \tag{2.3.21}$$

Анализ связности графа позволяет выявить наличие обрывов или отсутствие необходимых связей в системе, а также наиболее уязвимые связи и элементы, удаление которых может привести к распаду системы на отдельные, не связанные между собой, подсистемы.

2.3.5. Значимость элементов в структуре системы

Методы теории графов позволяют определять и такую структурную характеристику системы, как значимость элемента в ее структуре. Естественно предположить, что, чем больше связей имеет элемент с другими элементами системы, тем большую роль при прочих равных условиях он может играть в системе.

Количественно значимость элемента в структуре оценивают с помощью ранга или веса элемента. Как ранг, так и вес элемента определяется количеством связей элемента в графе. При этом, чем больше связей имеет элемент, тем выше его ранг и вес.

Ранги и веса элементов вычисляются различными способами.

Если ранг и вес элемента оцениваются по числу элементарных путей, ведущих из соответствующей этому элементу вершины графа к другим вершинам, то для вычисления значений этих характеристик можно использовать полную матрицу путей.

При определении ранга элемента по полной матрице путей $\mathbf{A}_{[n]}$ для каждой строки производят суммирование элементов этой строки по столбцам, получая величины

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1(1)n. \qquad (2.3.22)$$

Затем производят ранжирование величин s_i, $i = 1(1)n$ и присвоение рангов элементов в порядке убывания ранжированных величин. При этом наивысший ранг присваивается элементу с наибольшим значением s_i, $i \in [1(1)n]$.

Вес элемента по полной матрице путей вычисляется по формуле

$$\nu_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}, \quad i = 1(1)n, \qquad (2.3.23)$$

где

ν_i, $i = 1(1)n$ – вес i-го элемента системы, определяемый по полной матрице путей;

a_{ij}, $i = 1(1)n$, $j = 1(1)n$ – элементы полной матрицы путей.

Аналогичным образом могут быть определены ранги и веса элементов с помощью полной матрицы связей. При этом используются формулы

$$s_i' = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}, \quad i = 1(1)n; \tag{2.3.24}$$

$$\nu_i' = \frac{\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}}, \quad i = 1(1)n, \tag{2.3.25}$$

где

ν_i', $i = 1(1)n$ – вес i-го элемента системы, определяемый по полной матрице связей;

γ_{ij}, $i = 1(1)n$, $j = 1(1)n$ – элементы полной матрицы связей.

В случае ориентированного графа без петель и контуров при вычислении рангов и весов можно использовать матрицу, вычисляемую по формуле (2.3.20), при этом достаточно ограничиться вычислением первых трех-четырех членов суммы в выражении (2.3.20).

Пример 2.3.5

Задан граф, диаграмма которого приведена на рис. 2.3.4. Требуется определить ранги элементов системы, которым сопоставлены вершины графа.

Решение.

Вариант 1. Для определения ранга элементов используем полную матрицу путей (2.3.16). С помощью выражения (2.3.22) получаем

$$s_1 = 21,\ s_2 = 19,\ s_3 = 7,\ s_4 = 12,\ s_5 = 15.$$

Ранжируя данные величины в порядке убывания, имеем ряд элементов в порядке убывания рангов

$$x_1,\ x_2,\ x_5,\ x_4,\ x_3.$$

Если за наибольший ранг принять единицу, а последовательному уменьшению ранга сопоставить увеличение его значения на единицу, то в результате получим следующее распределение рангов по элементам:

Элемент	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ранг	1	2	5	4	3

Вариант 2. Для определения ранга элементов используем полную матрицу связи (2.3.19).

В этом случае все суммы по строкам равны, следовательно, с помощью полной матрицы связи все элементы анализируемой системы по значимости в структуре не различимы, так как имеют одинаковые ранги.

Поскольку в рассматриваемом графе имеются контуры, то формула (2.3.20) для вычисления рангов элементов не применима.

При определении всех рассмотренных выше структурно-топологических характеристик учитывались только структурные свойства системы и совсем не использовались функциональные свойства всей системы и ее элементов. Однако этого оказалось достаточно для выработки определенных суждений о структуре и ее влиянии на функционирование системы. Поэтому структурный анализ оказывается особенно полезным на тех этапах жизненного цикла систем, когда отсутствует необходимая информация об их функционировании, например, на этапах разработки и проектирования.

Кроме того, структурное моделирование, а точнее моделирование структур в виде графов, оказалось весьма полезным при исследовании целенаправленных процессов, представляющих собой совокупность взаимосвязанных операций. Это привело к возникновению целого направления в структурном моделировании, а именно сетевого моделирования.