

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. А. Кудрявцев,  
А. В. Радионов

ВВЕДЕНИЕ  
В КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ  
РИСК-МЕНЕДЖМЕНТ

УЧЕБНИК



ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

УДК 338.054.23+519.21

ББК 65.050+22.172

К89

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. *В. П. Чернов* (С.-Петербург. гос. экон. ун-т), д-р физ.-мат. наук, проф. *Н. В. Хованов* (С.-Петербург. гос. ун-т)

*Рекомендовано к печати*

*Учебно-методической комиссией экономического факультета  
С.-Петербургского государственного университета*

Кудрявцев А. А., Радионов А. В.

**К89** **Введение в количественный риск-менеджмент: учебник.** — СПб.:

Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2016. — 192 с.

ISBN 978-5-288-05651-2

Настоящий учебник содержит материал по изучению количественных методов, применяемых в области управления рисками. Основное внимание уделяется вопросам оценки вероятностных распределений ущерба — как индивидуального, так и совокупного, для портфеля рисков в целом. В этом контексте подробно рассматриваются такие аспекты, как анализ стохастических зависимостей и эффекты, вызываемые неоднородностями статистических выборок, а также поведение максимумов и минимумов случайных величин. Необходимость учета подобных аспектов при решении практических проблем экономики и бизнеса часто затрудняют применение стандартных статистических методов. Кроме того, в книге дается введение в теорию количественной оценки риска, являющейся основой экономико-математического моделирования в области управления рисками.

Для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в вопросах управления рисками или в области экономико-математического моделирования, а также для всех интересующихся указанными проблемами.

**ББК 65.050+22.172**

ISBN 978-5-288-05651-2

© Санкт-Петербургский  
государственный  
университет, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Управление рисками — быстро развивающаяся область экономики и менеджмента. Это связано как с осознанием важности учета риска и неопределенности при принятии управленческих решений, так и с быстрым расширением арсенала инструментов, позволяющих обосновывать подобные решения. Методы управления рисками проникают во всё новые и новые области. Более конкурентоспособными и востребованными становятся те нововведения, технологии и продукты, которые обеспечивают меньшую степень риска. В последние годы появляется всё больше и больше методов, приемов и подходов к исследованию в этой сфере.

Центральное место в таком наборе инструментов управления рисками занимает анализ механизма возникновения неблагоприятных событий и порождаемый ими ущерб. Тот факт, что ущерб иногда связан с возможностью получения доходов, не отменяет необходимости анализа финансовых и иных потерь. При этом природа ущерба и отраслевая принадлежность носителя риска (банки, страховые компании, промышленные предприятия и т. д.) часто представляют собой лишь уточняющие факторы. Такая точка зрения позволяет создавать универсальный инструментарий управления рисками.

Особую роль в управлении рисками играют методы экономико-математического моделирования, которые позволяют сопоставлять различные гипотетические ситуации, отражающие последствия реализации различных сочетаний рисков. Практическое применение данных моделей требует развития подходящих (в ряде случаев довольно специальных) статистических методов. Подобное представление служит важной основой для обоснования соответствующих управленческих решений. С учетом этого можно говорить о необходимости разработки специального направления в рамках управления рисками, которое должно заниматься экономико-математическим инструментарием поддержки принятия решений. Такое направление принято называть количественным риск-менеджментом.

Значительное внимание в настоящем учебнике уделяется таким ключевым вопросам, как анализ зависимостей и измерение рисков, а также поведение максимумов и минимумов случайных величин. Эти вопросы в смежных областях экономико-математического моделирования рассматриваются не так подробно и считаются особым предметом количественного риск-менеджмента. За последние 10–15 лет в указанных областях достигнут значительный прогресс, а управление рисками становится всё более математизированной дисциплиной, что обуславливает актуальность появления такого учебника. В его основу положена дисциплина, которая читается авторами магистрантам второго курса программы «Математические и инструментальные методы экономики» в Санкт-Петербургском государственном университе-

те. Хотя представленный материал является введением в данную сферу и отражает основные направления развития количественного риск-менеджмента, авторы постарались включить в него новые научные результаты. Данная дисциплина (и настоящий учебник) в целом соответствует содержанию подобных дисциплин, читаемых в ведущих университетах мира.

На основе учебника можно организовать чтение дисциплин разной длительности за счет изменения состава предлагаемого материала и степени подробности его изложения. Последовательность изложения рекомендуется менять в ограниченных пределах. Каждая глава снабжена разделом, содержащим решения типовых задач, которые можно использовать как для практических занятий по дисциплине, так и для самостоятельной работы по теме. Для закрепления материала следует использовать упражнения, расположенные после каждой главы.

Для полного понимания проблем, изложенных в учебнике, нужно иметь представление об управленческих аспектах риск-менеджмента, а также о теории вероятностей и математической статистики. При этом в качестве желательного, но не обязательного условия освоения материала можно указать опыт применения экономико-математических моделей и статистических методов.

Главы 1, 3, 4, 5 и 6 написаны А. А. Кудрявцевым, главы 2 и 7 — А. В. Радионым.

## Глава 1

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЩЕРБА

Моделирование рискованных ситуаций основано на возможности вероятностного описания процесса возникновения ущерба, это «сердце» любого количественного описания риска. Сложность такого описания может быть разной. Одни модели являются детализированными, формализованно представляющими механизм возникновения ущерба и воспроизводящими структуру такого механизма. Другие модели могут быть достаточно агрегированными, отражающими только функциональную связь между отдельными факторами и размером ущерба. Наиболее распространенный вариант моделей последнего типа — вероятностное распределение ущерба. Популярность таких моделей связана с их относительной простотой и относительной легкостью статистического оценивания.

Цель данной главы состоит в изложении особенностей моделирования индивидуального ущерба с помощью вероятностных распределений. В связи с этим подробно рассмотрены типичные распределения ущерба, а также методы конструирования дополнительных типов распределений. Кроме того, даются статистические основы подгонки распределений ущерба.

После изучения материала вы узнаете:

- в чем сущность количественного риск-менеджмента;
- что такое модель рискованной ситуации;
- какие риски возникают в процессе моделирования;
- каковы особенности построения моделей рискованных ситуаций;
- что такое распределение ущерба;
- чем отличается распределение чистых рисков от распределения спекулятивных рисков;
- какие особенности имеет распределение ущерба;
- как в распределении ущерба учитывается информация об отсутствии ущерба;
- какие типы распределений чаще всего используются для моделирования размера индивидуального ущерба;
- как конструировать дополнительные типы распределения ущерба;
- что такое экспоненциальный класс распределений;
- каковы особенности статистической оценки распределений ущерба;
- какие методы для этого применяются.

**Ключевые слова:** количественный риск-менеджмент, модель рискованной ситуации, распределение ущерба, спекулятивные риски, чистые риски, распределение ущерба, нормальное распределение, логнормальное распределение, экспоненциальное распределение, гамма-распределение, распределение Вейбулла, распределение Парето, бета-распределение, экспоненциальный класс распределений.

## 1.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКОВ

### 1.1.1. Роль и место математических моделей при управлении рисками

При управлении рисками часто необходимо сравнивать реальные ситуации с гипотетическими (что было бы, если бы всё пошло по-другому). Это резко усложняет анализ рискованных ситуаций, так как требует основы для изучения и измерения того, чего не было. В настоящее время для описания таких гипотетических ситуаций нет иного пути, кроме использования математических моделей, называемых *моделями рискованных ситуаций*. Это представляет собой основу для *количественного риск-менеджмента*. Его сущность состоит в применении экономико-математических моделей для прогнозирования ситуаций, характеризующихся риском и неопределенностью, и обоснования соответствующих управленческих решений.

Модель — упрощенное описание реального объекта или процесса, которое сосредоточивается на важных для исследователя свойствах и игнорирует те аспекты, которые представляются исследователю несущественными. Основная сложность моделирования состоит именно в том, чтобы выяснить, какие свойства считать важными, а какие — нет. Верное описание важных свойств обеспечивает адекватность модели, а правильный выбор второстепенных, игнорируемых свойств помогает в достаточной степени упростить подобное представление. Модель должна служить инструментом принятия решений, т. е. должна прояснять для лица, принимающего решения, как может развиваться процесс, какие исходы будут иметь место, и подсказывать различные действия (например, по предотвращению ущерба).

Наиболее важным классом моделей, используемых в управлении риском, являются математические модели. Они позволяют описывать существенные стороны изучаемого процесса или явления в виде математических соотношений, а затем анализировать их с помощью соответствующего математического аппарата. Особенно важно применение математических моделей для прогнозирования альтернатив будущего развития. Именно это позволяет менеджеру численно оценить будущие последствия принимаемых решений.

Математические модели, используемые в управлении риском, отличаются большим разнообразием и различными возможностями. Такого понятия, как универсальная модель, не существует. Множественность типов рисков и разнообразие механизмов их возникновения делает это невозможным. В разных ситуациях мы будем использовать специфические инструменты (в данном случае — модели), ибо каждая модель по-своему уникальна, так как при ее построении следует отталкиваться от свойств самого объекта моделирования. Однако схожие ситуации позволяют нам применять аналогичные (если не одинаковые) инструменты: существуют некоторые общие подходы к моделированию (например, использование стохастических дифференциальных уравнений или другого математического аппарата). Если можно применить более или менее стандартный подход, то процесс моделирования будет проще (известны подходы к построению модели и получению решения).

В области количественного риск-менеджмента наиболее распространены теоретико-вероятностные и статистические модели.

Для некоторых типов рисков широкое использование математических моделей является стандартным, для других — пока еще нет. Тем не менее происходит интенсивная наработка различных приемов моделирования, использующих особенности управления риском. Количественный риск-менеджмент становится отдельной «ветвью» управления рисками.

### 1.1.2. Этапы построения моделей рискованных ситуаций

Сам процесс моделирования часто осуществляется поэтапно. Это означает, что модель в процессе построения постоянно модифицируется в соответствии с требованиями того или иного этапа, среди которых можно назвать:

1. *Построение модели риска или процесса риска.* Данный этап предполагает построение базовой модели, отражающей механизм возникновения неблагоприятных ситуаций и/или прогнозирующей количество неблагоприятных событий и размер убытков, связанных с каждым из них. Это наиболее сложный этап в силу объема работы, которую предстоит проделать. Но подобная модель еще не может быть использована для целей управления риском, так как она дает только общее описание.

2. *Выделение численной оценки риска.* Далее в построенной модели риска следует выделить некоторый показатель, называемый *мерой риска*, который позволит численно оценивать риск в модели. Конкретное содержание этого показателя, правильный выбор которого будет определять эффективность результатов моделирования в целом, зависит от типа модели и особенностей ее построения.

3. *Моделирование инструментов управления риском.* Следующей модификацией модели является введение в нее разных вариантов противодействия неблагоприятным событиям, т. е. методов, или инструментов, управления риском. На основе сравнения мер риска для таких вариантов можно найти наиболее эффективный подход к управлению риском.

Конечно, предложенная схема во многом условна. Например, иногда мера риска и инструменты управления риском изначально встраиваются в исходную модель. Тем не менее выделение этих этапов полезно как логический алгоритм построения модели, пригодной для формирования рекомендаций по управлению риском.

### 1.1.3. Риски моделирования

Математические модели, используемые для целей управления риском, должны удовлетворять ряду требований. Это связано с тем, что модель используется как инструмент принятия решений в сфере бизнеса, т. е. на основе модели принимаются решения относительно финансовых средств, иногда достаточно больших. Естественно ожидать, что ошибочные решения в подобной ситуации должны быть по возможности исключены.

Такие требования, в частности, приводят к особой заботе об адекватности модели, что подразумевает исключение нескольких типов ошибок (рисков принятия решений). К ним можно отнести:

- *модельный риск* (неправильный тип модели, пропуск важных факторов риска и неверная формализация). Этому риска можно избежать за счет большого числа качественных и количественных исследований механизма возникнове-

ния неблагоприятных событий. Такие исследования приводят к пониманию особенностей упомянутого механизма, степени существенности тех или иных его свойств, типа и характера взаимосвязей, а затем к построению моделей, позволяющей получить наиболее точный прогноз возможного будущего развития (иногда в форме возможных альтернатив). Понятно, что модельный риск особенно опасен для относительно новых областей, когда информации, подтверждающей обоснованность применения данного типа модели, еще недостаточно. Тем не менее указанные исследования не снижают данный риск до нуля — возможны математические ошибки при получении решения или игнорирование важных факторов риска. Кроме того, могут иметь место и проблемы с использованием модели, в частности, при расчетах на компьютере (особенно при имитационном моделировании);

- *риск информационного обеспечения* (называемый также *статистическим*). Он включает в себя возникновение проблем информационного обеспечения, в первую очередь недостаточный объем наблюдений и/или низкий уровень доверия к используемым данным. Существенной проблемой может быть изменение экономических тенденций, снижающих ценность прошлой или аналогичной статистики. Данные, на которые опирается модель, являются не менее важным аспектом всего процесса моделирования, чем сама модель. Иногда проблемы информационного обеспечения приводят к изменению дизайна (математической формулировки) модели;
- *риск неправильной оценки параметров*. Какой бы точной и адекватной ни была модель, она даст неверные результаты, если параметры будут оценены неверно. При этом достаточно хорошее информационное обеспечение не дает гарантий того, что параметры будут определены верно, так как возможны ошибки оценивания — это проблемы калибровки модели. Среди примеров такого риска можно назвать: неправильные поправки, учитывающие изменение будущих тенденций (скажем, замедление или ускорение инфляции), неправильная интерпретация статистических выбросов (экстремальных значений), несогласованность оценок разных параметров и т. п.;
- *риск интерпретации результатов*, т. е. неверное понимание лицом, принимающим решения, результатов моделирования. Это связано с тем, что менеджеры часто не искушены в сложном математическом аппарате, используемом при построении моделей, так что они не всегда осознают точность и ограничение применения предлагаемых им рекомендаций. Более того, сам факт использования компьютеров может создавать у них иллюзии гарантированной обоснованности предлагаемого решения. Для исключения такого положения дел результаты моделирования должны быть адаптированы или приведены к единообразной точке зрения на риск, принятой в данной компании.

Возможность перечисленных типов ошибок означает, что построение моделей представляет собой довольно трудную задачу. Особенно много внимания уделяют модельному риску. Однако и другие типы риска не менее важны. Ключевой проблемой моделирования является то, что даже относительно длительный период успешного функционирования модели не гарантирует её адекватности в будущем, когда какой-нибудь вступивший в действие фактор не изменит характера её поведения.

## 1.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УЩЕРБА КАК МОДЕЛЬ

### 1.2.1. Простейшее представление о распределении ущерба

Под *распределением ущерба* понимают вероятностное распределение, увязывающее частоту возникновения и размер ущерба. Это наиболее простая модель, позволяющая количественно исследовать неопределенность величины ущерба в контексте управления рисками.

Анализ распределения ущерба удобно начать с упрощенной ситуации, когда во внимание принимается только та информация, которая касается уже возникшего ущерба. Такая постановка вопроса не учитывает следующее:

- данные по объектам — носителям риска, по которым ущерб не возникал;
- возможности неполноты сведений о возникновении ущерба;
- особенности механизма возникновения неблагоприятных событий, сопровождающихся ущербом;
- специфику изменения размера и структуры портфеля рисков.

По мере включения в анализ перечисленных факторов предлагаемая модель ущерба, представляющая собой случайную величину со специфическим вероятностным распределением, будет усложняться и пересматриваться. Однако для более глубокого понимания сложных моделей и соответственно «продвинутых» методов количественного риск-менеджмента необходимо начать с такой простейшей постановки.

Обсуждение экономико-математических моделей, используемых в контексте управления рисками, удобно начать с представления ущерба по отдельному риску как случайной величины. При этом очевидно, что характеристики ее распределения будут тесно связаны с особенностями механизма возникновения ущерба и исследование данных о размере ущерба будет ключевым фактором анализа рисков на данном этапе. Если имеется достаточно обширная статистика по совокупности однородных независимых рисков, то оценка распределения ущерба не выходит за рамки стандартных задач математической статистики<sup>1</sup>.

Статистические данные о размере ущерба для оценки такого распределения могут быть достаточно легко получены специалистом по количественной оценке риска из соответствующих подразделений компаний — носителей риска. Для простейшего представления о распределении ущерба достаточно воспользоваться рутинными методами статистического оценивания параметров распределения, которые кратко охарактеризованы далее в п. 1.4. Иными словами, специфика процедуры оценивания заключается не в применяемых статистических методах, а в учете особенности данных. Поэтому важным является обсуждение видов распределений ущерба, встречающихся на практике, краткий обзор которых приведен в п. 1.3.

Как и в любой области моделирования, при построении модели ущерба необходимо опираться на особенности объекта моделирования. Соответственно тип распределения выбирается в зависимости от специфики проявления ущерба. Это означает, что для разных ситуаций будут предложены различные распределения ущерба.

---

<sup>1</sup>Под стандартными задачами математической статистики здесь и далее понимается набор математических моделей, обычно излагаемых в университетских курсах статистики. Для моделей рискованных ситуаций часто требуются более продвинутые статистические подходы.

Если рассматриваемые риски — *спекулятивные*, т. е. такие, что могут генерироваться как ущерб, так и дополнительный доход, то распределение, очевидно, должно быть сосредоточено на всей числовой оси, или, по крайней мере, его носитель должен включать в себя положительные и отрицательные значения. При этом дополнительный доход интерпретируется как отрицательный ущерб. Это не означает, что подобное распределение должно быть симметричным, потому что дополнительный доход и ущерб могут вести себя по-разному.

Тем не менее при достаточно массовом процессе и не очень сильных зависимостях можно ожидать выполнения условий закона больших чисел и центральной предельной теоремы, приводящих к нормальному распределению. Иными словами, в количественном риск-менеджменте и финансовом моделировании оно, в большинстве случаев, встречается как предельное.

В частности, соответствующие условия близки тем, что имеют место на финансовых рынках при обеспечении их достаточной открытости, невысоких барьеров для выхода на подобные рынки и малого объема (в идеале — отсутствия) инсайдерской торговли. Именно по этой причине многие теоретические модели для финансовых рынков опираются на нормальное распределение или распределения, основанные на нем.

Если рассматриваемые риски являются *чистыми*, т. е. генерируют только ущерб, а дополнительный доход невозможен, то соответствующие распределения, очевидно, должны быть сосредоточены на положительной полуоси. Требование неотрицательности довольно сильно влияет на выбор распределений (в частности, нормальное распределение не подходит по этой причине для моделирования индивидуального ущерба).

Иногда для некоторых приложений важно подчеркнуть, что ущерб — отрицательная величина, которая «изымается» у носителя риска. В таком случае используют случайную величину  $-Y$ , где  $Y$  — размер ущерба (неотрицательная случайная величина). Соответственно функция распределения  $F_{-Y}(y)$ ,  $y < 0$ , представляет собой зеркально отражённую функцию дожития  $1 - F_Y(-y)$ . Иными словами, распределение, сосредоточенное на положительной полуоси, является базовым и для такого подхода.

Если известна детерминированная величина максимально возможного ущерба<sup>2</sup>  $M$ , например стоимость застрахованного имущества, то распределение будет сосредоточено на отрезке  $[0; M]$ . Тем не менее в ряде случаев на практике все равно используется распределение, сосредоточенное на всей положительной полуоси, что может быть, в частности, связано с особыми преимуществами применения соответствующего распределения. Тогда при оценивании параметров распределения случайной величины ущерба  $Y$  возникает дополнительное требование, связанное с тем, что  $P[Y > M]$  должна быть достаточно мала, чтобы не сильно исказить результаты расчетов.

Для однородных совокупностей распределение ущерба будет унимодальным (одновершинным). Кроме того, на практике оно обычно имеет положительную асимметрию, так что медиана и мода распределения сдвинуты влево относительно мате-

<sup>2</sup>В страховой практике она часто обозначается аббревиатурой MPL.

матического ожидания. Иными словами, плотность  $f(x)$  будет иметь вид, соответствующий одной из форм, которые изображены на рис. 1.1.

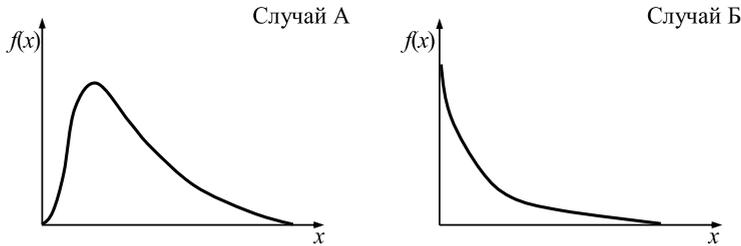


Рис. 1.1. Типичные плотности распределения ущерба.

Примечание: случай А: распределение с ненулевой модой; случай Б: распределение с нулевой модой.

На практике встречается еще одна важная особенность — «тяжелые хвосты». Этим термином обозначается ситуация, когда плотность распределения стремится к оси абсцисс медленнее, чем плотность экспоненциального распределения<sup>3</sup>. Такое поведение случайной величины объясняется возникновением ущерба «большого» размера с относительно высокой вероятностью. Поэтому для «подгонки» используются теоретические распределения специального вида, которые приведены в п. 1.3.

Альтернативным подходом к анализу подобных ситуаций является интерпретация совокупности данных как неоднородной, т. е. состоящей из ущерба «нормальной» величины и из ущерба «большого» размера. Методы учета неоднородности будут рассмотрены в главе 4.

### 1.2.2. Учет информации об отсутствии ущерба

Распределение ущерба, рассмотренное выше, не очень информативно для анализа рисков до возникновения неблагоприятного события, так как с его помощью моделируется размер ущерба при условии, что он заведомо будет иметь место. Поэтому такое распределение часто нельзя считать адекватной моделью ущерба с учетом того, что по значительной доле носителей риска ущерба не будет вовсе.

Риск-менеджеров в первую очередь интересует распределение ущерба и получаемые на его основе оценки до возникновения ущерба. Иными словами, их будет интересовать статистика как по тем объектам, по которым имел место ущерб, так и по тем носителям риска, по которым его не было. Поэтому долю объектов последней категории в портфеле можно рассматривать как вероятность отсутствия ущерба по одному наугад выбранному риску. Учет дополнительной информации о количестве случаев возникновения ущерба позволит использовать иную случайную величину  $X$  в качестве более адекватной модели ущерба. Она будет с ненулевой вероятностью принимать нулевое значение, отражающее событие «отсутствие ущерба».

<sup>3</sup>Иногда тяжелые хвосты определяют по отношению к нормальному распределению. В настоящем учебнике используется слабое определение, соответствующее практике оценки рисков.

Для увязки новой случайной величины с рассмотренной в предыдущем пункте необходимо ввести дополнительную индикаторную случайную величину  $I$ , равную 1, если ущерб возник, или 0 в противном случае. С ее помощью моделируется неопределенность, связанная с возникновением ущерба, которая на уровне портфеля рисков в целом сводится к неопределенности числа неблагоприятных событий. Тогда распределение случайной величины ущерба  $Y$  из п. 1.2.1 можно представить как условное распределение случайной величины  $X$  при условии  $I = 1$ .

Такой подход проясняет смысл новой случайной величины, которая отличается тем, что к носителю ее распределения добавлено еще одно событие. Это требует перенормировки вероятностной меры. Однако с математической точки зрения такое объяснение выглядит слишком громоздким, так как случайные величины  $X$  и  $I$  не являются независимыми: событие  $\{X = 0\}$  эквивалентно событию  $\{I = 0\}$ .

С учетом того, что  $X = 0$  с ненулевой вероятностью, распределение случайной величины ущерба  $X$  будет иметь скачок в точке 0 (рис. 1.2). Иными словами, если распределение ущерба  $Y$  является абсолютно непрерывным, то соответствующее ему «полное» распределение  $X$  будет смешанным.

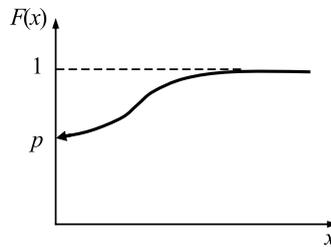


Рис. 1.2. Функция распределения ущерба со скачком в нулевой точке размером  $p$ .

Намного проще рассматривать распределение случайной величины  $Y$  как усеченное слева распределение случайной величины  $X$ , причем усечение состоит в исключении из пространства событий события  $\{X = 0\}$ , которому приписывается ненулевая вероятность. Таким образом,

$$F_Y(x) = \frac{F_X(x) - F_X(0+)}{1 - F_X(0+)}, x > 0,$$

где  $F_X(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} F_X(x)$  — предел функции распределения справа в точке 0, равный ее скачку размером  $P[X = 0] = p$ . Тогда

$$F_Y(x) = \frac{F_X(x) - P[X = 0]}{P[X > 0]} = \frac{F_X(x) - p}{1 - p}, x > 0. \quad (1.1)$$

Тем не менее введение индикаторной случайной величины  $I$  может быть полезно при построении альтернативной модели. В частности, распределение ущерба, отражающее неопределенность факта возникновения и размера ущерба, можно представить как смесь усеченного распределения (ущерб имеет место) и вырожденного

распределения нулевого ущерба (ущерб не появился):

$$X = I \cdot Y + (1 - I) \cdot 0. \quad (1.2)$$

Такое представление также полезно для рассматриваемых в главе 5 моделей распределения совокупного ущерба (для портфеля рисков).

Однако в целях упрощения эту модель можно еще раз переформулировать, воспользовавшись тем, что отсутствие ущерба моделируется вырожденным распределением с нулевым значением:

$$X = I \cdot Y. \quad (1.3)$$

С учетом свойств индикаторной случайной величины  $I$  формулы (1.2) и (1.3) эквивалентны, но в отношении последней следует изменить систему предпосылок, несколько модифицировав модель. Прежде всего, будем рассматривать  $I$  и  $Y$  как независимые случайные величины. Формально говоря, это чуть более общая модель, но она приводит к тем же самым значениям моментов распределений, а проводить расчеты для нее удобнее.

В силу того что  $p = P[X = 0]$ , все три подхода дают одинаковое выражение для функции распределения ущерба:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ p + (1 - p)F_Y(x), & x > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для положительных значений  $x$  можно найти плотность:

$$f_X(x) = (1 - p)f_Y(x), \quad x > 0,$$

так что условие нормировки выполняется:

$$p + (1 - p) \int_0^{\infty} f_Y(x) dx = 1.$$

Оценка величины скачка размером  $p$  в нулевой точке будет базироваться на сопоставлении статистики об общем числе носителей риска и о количестве случаев возникновения ущерба. При отсутствии общей базы данных эффективное совместное использование такой информации может быть затруднено, что делает количественный анализ рисков сложным, замедляет его проведение и резко снижает его точность.

### 1.3. КРАТКИЙ ОБЗОР РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОДХОДЯЩИХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УЩЕРБА

Разнообразие ситуаций, связанных с наличием риска и неопределённости, велико. Механизмы возникновения ущерба также сильно различаются. Всё это приводит к тому, что разным практическим ситуациям адекватны различные типы распределений.

### 1.3.1. Типичные распределения размера ущерба

Как уже говорилось ранее, в финансовых приложениях популярно нормальное распределение, имеющее плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Его применение, как правило, является следствием предположений о массовости финансовых спекуляций, отсутствии инсайдерской торговли и относительно невысокой степени зависимости случайных величин, описывающих различные активы.

Если хочется сохранить симметричность распределения и ряд других важных свойств нормального распределения, но обеспечить более тяжёлые хвосты, то рассматривают один из элементов класса эллиптических распределений, имеющих плотность вида

$$f(x) = a g\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где  $a$  — нормирующая константа, а  $g(\cdot)$  — некоторая функция, интеграл которой конечен. Частными случаями эллиптических распределений являются нормальное распределение, распределение Стьюдента и распределение Коши.

Часто в подобных моделях исследователя интересуют не сами колебания стоимости активов, а характеристики их прироста, т. е. неопределённость выносится в показатель степени экспоненты. Таким образом, появляется необходимость применения логнормального распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0. \end{cases}$$

При нарушении указанных условий и рассмотрении случайных величин, представляющих ситуации с чистым ущербом, нужны другие распределения, например с плотностями типа тех, которые представлены на рис. 1.1. Такие ситуации характерны для страховых приложений, а также для анализа нефинансовых рисков.

Для моделирования случайных величин ущерба  $Y$  с ненулевой модой (см. случай А на рис. 1.1) наиболее часто используются логнормальное и гамма-распределения (с параметром формы  $\alpha > 1$ ). Плотность гамма-распределения определяется формулой

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Возможно применение и других типов распределений, но предпочтение, отдаваемое на практике именно этим распределениям, связано с тем, что они хорошо согласуются с теоретико-вероятностным инструментарием (например, с регрессионными моделями). При этом выбор логнормального распределения осуществляется не из-за его связи с нормальным, а из-за тяжести хвоста. В отличие от него хвост гамма-распределения сопоставим с хвостом экспоненциального распределения, т. е.

является легким. Формы вершины (поведение плотности в окрестности моды) также различны для этих двух распределений.

Для моделирования случайных величин ущерба с нулевой модой (случай В на рис. 1.1) используются гамма-распределение (с параметром формы  $\alpha \leq 1$ ) и связанные с ним распределения, а также распределение Парето. Выбор первой группы распределений также в ряде случаев объясняется более широкими возможностями применения регрессионного анализа<sup>4</sup>. В ряде случаев встречаются и иные типы распределений.

Наиболее важным частным случаем гамма-распределения (при  $\alpha = 1$ ) является экспоненциальное распределение, которое часто рассматривают как отдельный класс. Его плотность имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

а функция распределения —

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Именно это распределение в контексте количественного риск-менеджмента рассматривается как пограничное для определения легкости хвоста: любая плотность, сходящаяся к оси абсцисс медленнее, считается имеющей тяжелый хвост.

Важным распределением, связанным с гамма-распределением, является распределение Вейбулла<sup>5</sup>. Оно имеет функцию распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \exp(-\lambda x^\gamma), & x > 0. \end{cases}$$

Соответственно плотность представляет собой

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda \gamma x^{\gamma-1} \exp(-\lambda x^\gamma), & x > 0, \end{cases}$$

При  $\gamma < 1$  хвост распределения тяжелее экспоненциального, при  $\gamma > 1$  — легче.

В качестве альтернативы гамма-распределению и связанным с ним распределениям применяется распределение Парето, хвост которого всегда тяжелее. Его функция распределения задается формулой

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^\alpha, & x > 0, \end{cases}$$

а плотность —

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{\alpha+1}, & x > 0. \end{cases}$$

<sup>4</sup>Использование распределения Парето в контексте регрессионных моделей связано с техническими и содержательными трудностями, которые частично преодолены только в последнее время. В то же время использование гамма-регрессии — хорошо отработанная методика.

<sup>5</sup>Оно также называется распределением Гнеденко, или распределением Вейбулла—Гнеденко.

Параметр формы  $\alpha$  определяет максимальный порядок моментов, которые существуют у соответствующей случайной величины.

Если размер ущерба ограничен сверху, то на практике обычно хватает использования членов всего одного параметрического семейства — бета-распределения, имеющего плотность

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } x > 1, \\ \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Оно сосредоточено на отрезке  $[0; 1]$ , поэтому на практике его «растягивают» на отрезок  $[0; M]$ . В результате получают так называемое обобщённое бета-распределение с плотностью

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } x > M, \\ \frac{1}{B(p,q)} \frac{x^{p-1} (M-x)^{q-1}}{M^{p+q-1}}, & 0 < x \leq M. \end{cases}$$

### 1.3.2. Преобразование распределений ущерба

В ряде случаев перечисленных в предыдущем пункте параметрических семейств (типов) вероятностных распределений недостаточно для адекватного описания случайного ущерба. Тогда требуется рассматривать альтернативные подходы, которые основаны на идее модификации распределения. Тот факт, что новые распределения базируются на свойствах старых, облегчает их применение в количественном риск-менеджменте.

Если некоторая функция  $h(\cdot)$  однозначна, непрерывна и строго монотонна, то она имеет обратную функцию<sup>6</sup>  $h^{-1}(\cdot)$ . Тогда под функцией  $h(\cdot)$  случайной величины  $Y$  понимают такую случайную величину  $Y_h$ , что между ними имеет место строгая функциональная зависимость  $Y_h = h(Y)$ .

Если функция  $h(\cdot)$  строго возрастающая, то неравенство  $Y < y$  эквивалентно неравенству  $Y_h < h(y)$ . Тогда имеет место соотношение

$$F_Y(y) = F_{Y_h}(h(y))$$

или, что то же самое, при  $x = h(y)$

$$F_{Y_h}(x) = F_Y(h^{-1}(x)).$$

Если функция  $h(\cdot)$  строго убывает, то неравенство  $Y \geq y$  эквивалентно неравенству  $Y_h \leq h(y)$ . Тогда

$$S_Y(y) = 1 - F_Y(y) = F_{Y_h}(h(y)) + P[Y_h = h(y)],$$

<sup>6</sup>Строго говоря, обратную функцию можно определить при более слабых условиях, допуская скачки и/или интервалы постоянства исходной функции. Тогда первые переходят в интервалы постоянства обратной функции, а вторые — в скачки последней. Это требует включения в определение специальных оговорок для обеспечения однозначности перевода обратной функции в исходную для достижения свойства  $h^{-1}(h(x)) = x$ .

где  $S_Y(\cdot)$  — функция дожития случайной величины  $Y$ . Последнее равенство эквивалентно выражению

$$F_{Y_h}(x) = S_Y(h^{-1}(x)) - P[Y_h = x].$$

Если  $P[Y_h = h(y)] = P[Y = h^{-1}(x)] = 0$  (в частности, это имеет место для абсолютно непрерывных случайных величин), то последние соотношения упрощаются.

В случае выполнения указанных выше свойств функции  $h(\cdot)$  из того, что  $Y$  — абсолютно непрерывна, следует, что  $Y_h$  — также абсолютно непрерывна. Далее будем рассматривать только такую ситуацию.

Если функция  $h(\cdot)$  дифференцируема, то можно найти функции плотности модифицированной случайной величины:

$$f_{Y_h}(x) = \frac{dF_{Y_h}(x)}{dx} = f_Y(h^{-1}(x)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(x)}{dx} \right|.$$

Модуль возникает из-за того, что для убывающей функции  $h(\cdot)$  одновременно выполняются следующие свойства:

$$\frac{dh^{-1}(x)}{dx} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF_{Y_h}(x)}{dx} = \frac{dS_Y(h^{-1}(x))}{dx} = -f_Y(h^{-1}(x)) \cdot \frac{dh^{-1}(x)}{dx}.$$

Для получения новых типов распределений на практике чаще всего используют преобразования:

- линейная функция  $h(y) = ay + b$ ;
- степенная функция  $h(y) = ay^b$  (при  $b = -1$  возникает важный частный случай обратной функции  $h(y) = a/y$ );
- показательная функция  $h(y) = a^y$  (чаще всего в форме экспоненциальной функции  $h(y) = \exp(by)$ ).

Иногда применяются сочетания (комбинации) перечисленных функций, например:

$$h(y) = \frac{a}{y+b} \quad \text{или} \quad h(y) = e^{ay+b}.$$

Свойства перечисленных преобразований обобщены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Свойства преобразований распределений

Исходная функция, $h(y)$	Функция		Производная исходной функции, $h'(y)$	Обратная функция, $h^{-1}(x)$	Производная обратной функции, $[h^{-1}]'(x)$
	возрастает	убывает			
Линейная: $h(y) = ay + b$	$a > 0$	$a < 0$	$a$	$\frac{x-b}{a}$	$\frac{1}{a}$
Степенная: $h(y) = ay^b, a > 0$	$b > 0$	$b < 0$	$aby^{b-1}$	$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$	$\frac{1}{ab} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1-b}{b}}$
Показательная: $h(y) = a^y, a > 0$	$a > 1$	$a < 1$	$a^y \cdot \ln a$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
Экспоненциальная:* $h(y) = e^{by}$	$b > 0$	$b < 0$	$be^{by}$	$\frac{\ln x}{b}$	$\frac{1}{bx}$
Обратная: $h(y) = \frac{a}{y}, a > 0$	—	всегда	$-\frac{a}{y^2}$	$\frac{a}{x}$	$-\frac{a}{x^2}$

Примечание: \* То же самое, что и показательная функция при  $b = \ln a$ .

Таблица 1.2. Формирование новых типов распределений

Исходное распределение	Линейное преобразование	Степенное преобразование	Показательное преобразование	Обратное преобразование
1	2	3	4	5
Экспоненциальное распределение	Смещенное экспоненциальное распределение: $F(y) = 1 - e^{-\lambda(y-b)}$ , $y > b$ , $f(y) = \lambda e^{-\lambda(y-b)}$ , $y > b$	Распределение Вейбулла: $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y^b)$ , $y > 0$ $f(y) = \lambda b y^{b-1} \exp(-\lambda y^b)$ , $y > 0$	Однопараметрическое распределение Парето: $F(y) = 1 - y^{-a}$ , $y > 1$ , $f(y) = \frac{a}{y^{a+1}}$ , $y > 1$	Обратное экспоненциальное распределение: $F(y) = e^{-a/y}$ , $y > 0$ , $f(y) = \frac{ae^{-a/y}}{y^2}$ , $y > 0$ .
Гамма-распределение	Смещенное гамма-распределение: $F(y) = \Gamma(\alpha; \lambda(y-b))$ , $y > b$ $f(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (y-b)^{\alpha-1} e^{-\lambda(y-b)}$ , $y > b$ .	Трансформированное гамма-распределение: $F(y) = \Gamma(\alpha; (\lambda y)^b)$ , $y > 0$ $f(y) = \frac{\lambda^{b\alpha} b y^{b\alpha-1} \exp(-(\lambda y)^b)}{\Gamma(\alpha)}$ , $y > 0$	Логгамма-распределение: $F(y) = \Gamma(\alpha; \lambda \ln y)$ , $y > 1$ , $f(y) = \frac{\lambda^\alpha (\ln y)^{\alpha-1}}{y^{\lambda+1} \Gamma(\alpha)}$ , $y > 1$	Обратное гамма-распределение: $F(y) = 1 - \Gamma(\alpha; b/y)$ , $y > 0$ , $f(y) = \frac{(b/y)^{\alpha-1} e^{-b/y}}{y \Gamma(\alpha)}$ , $y > 0$ .
Бета-распределение (первого рода)	Обобщенное бета-распределение: $F(y) = B_{\frac{a}{a+b}}(p, q)$ , $b < y < a + b$ , $f(y) = \frac{1}{B(p, q)} \times \frac{a^{p-1} (a+b-y)^{q-1}}{(y-b)^{p-1}}$ , $b < y < a + b$ .	Трансформированное бета-распределение*: $F(y) = B_u(p, q)$ , $f(y) = \frac{1}{B(p, q)} u^p (1-u)^{q-1} \frac{1}{by}$ , где $u = (\frac{y}{a})^{\frac{1}{b}}$ , $0 < y < a$ .	—	Обобщенное распределение Парето**: $F(y) = B_{\frac{a}{y}}(p, q) = 1 - B_{\frac{y-a}{y}}(q, p)$ , $y \geq a$ $f(y) = \frac{1}{B(p, q)} \cdot \frac{a^p (y-a)^{q-1}}{y^{p+q}}$ , $y \geq a$

Окончание табл. 1.2

1	2	3	4	5
Распределение Парето*** $F(y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{y-b}\right)^\alpha$ , $y > b + \lambda$ , $f(y) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(y-b)^{\alpha+1}}$ , $y > b + \lambda$	Распределение Парето: $F(y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{y-b}\right)^\alpha$ , $y > b + \lambda$ , $f(y) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(y-b)^{\alpha+1}}$ , $y > b + \lambda$	Распределение Бёрра [Вурт]: $F(y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\frac{1}{y} + \lambda}\right)^\alpha$ , $y > 0$ , $f(y) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{b} \cdot \frac{y^{\frac{1-b}{b}}}{\left(\frac{1}{y} + \lambda\right)^{\alpha+1}}$ , $y > 0$	—	Обратное распределение Парето: $F(y) = \left(\frac{y}{y+\lambda}\right)^\alpha$ , $y > 0$ , $f(y) = \alpha\lambda \frac{y^{\alpha-1}}{(y+\lambda)^{\alpha+1}}$ , $y > 0$ .
Нормальное (Гауссовское) распределение	Нормальное распределение	—	Логарифмически нормальное распределение: $F(y) = \Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$ , $f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ , $y > 0$ .	Обратное Гауссовское распределение****: $F(y) = \Phi\left(\left(\frac{y}{\mu} - 1\right)\sqrt{\frac{\alpha\mu}{y}}\right) + e^{2a} \cdot \Phi\left(-\left(\frac{y}{\mu} + 1\right)\sqrt{\frac{\alpha\mu}{y}}\right)$ , $f(y) = \sqrt{\frac{\alpha\mu}{2\pi y^3}} \times \exp\left(-\frac{\alpha\mu}{2y}\left(\frac{y}{\mu} - 1\right)^2\right)$ , $y > 0$ .

Примечания: \* Это распределение также часто называют обобщенным бета-распределением.

\*\* Стандартная формулировка обобщенного распределения Парето предполагает отсутствие сдвига. Она получится, если сделать замену переменных  $t = y - a$ , т.е.  $x = a/(t - a)$ . Тогда  $F(t) = B_{\frac{t}{t-a}}(p, q)$ . При  $a = 1$  распределение называется бета-распределением второго рода.

\*\*\* См. также преобразования экспоненциального распределения и бета-распределения.

\*\*\*\* При  $\mu = 1$  имеет место распределение Вальда.

В ряде случаев класс распределений замкнут по отношению к тому или иному преобразованию. В частности, если функция распределения содержит параметры положения и рассеяния, то применение линейного преобразования изменяет только значение этих параметров, но не тип распределения. Примером может служить нормальное распределение. Аналогичным свойством относительно линейного преобразования  $y = ax$  обладает и распределение Парето.

Самым простым преобразованием является использование линейной функции при единичном угловом коэффициенте  $a$  и ненулевом свободном члене  $b$  — это будет сдвиг случайной величины, т. е. изменение области определения функции плотности распределения, порождающее смещенное распределение, если только распределение не замкнуто по отношению к такой операции. Все остальные преобразования приводят к «сжатию» или «растягиванию» функции распределения вдоль оси абсцисс, приводя к новым типам распределений, часто с более тяжелыми хвостами, чем исходное, например при использовании степенного преобразования для  $a > 0$  и  $b > 1$ .

Новое распределение, как правило, имеет больше параметров, чем исходное. Но в ряде случаев они будут «съедены» старыми параметрами. Например, применение преобразования  $h(x) = ax$  для экспоненциального распределения приведет к изменению параметра распределения, но не к новому типу распределений.

В табл. 1.2 показаны примеры новых распределений, которые получены из распределений, приведенных выше.

Если к распределениям из табл. 1.2, в свою очередь, применить преобразования, т. е. использовать сочетание (комбинацию) преобразований, то получатся иные распределения. Так, при использовании обратного преобразования к распределению Вейбулла получим обратное распределение Вейбулла

$$F(x) = \exp\left(-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha\right), \quad x > 0, \quad f(x) = \frac{\alpha}{x} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha \exp\left(-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha\right), \quad x > 0.$$

Таким способом можно получить и другие распределения, полезные для количественного риск-менеджмента.

### 1.3.3. Экспоненциальный класс распределений

Класс параметрических семейств называется *экспоненциальным*, если его параметрическую функцию плотности можно представить в виде<sup>7</sup>

$$f(y; \theta, \varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} - c(y, \varphi)\right). \quad (1.5)$$

Параметр  $\theta$  называют *естественным*: как правило, при использовании таких семейств в регрессионном анализе именно он увязывается с независимыми переменными. Иными словами,

$$\theta = g\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i\right).$$

<sup>7</sup> Иногда такие семейства называются *линейными экспоненциальными*, а собственно экспоненциальными тогда называют более общие, когда в показателе экспоненты компонента, линейная по  $y$ , заменяется на нелинейную.

Параметр  $\varphi$  является *техническим* (обычно это параметр масштаба соответствующего распределения).

С учетом важных общих свойств

$$E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(Y; \theta, \varphi) \right] = 0 \quad \text{и} \quad E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(Y; \theta, \varphi) \right] = -E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(Y; \theta, \varphi) \right)^2 \right]$$

для распределений, относящихся к экспоненциальным семействам, в частности, выполняются следующие свойства:

$$1. \quad E[Y] = \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta}; \quad (1.6)$$

$$2. \quad D[Y] = a(\varphi) \frac{\partial^2 b(\theta)}{\partial \theta^2}. \quad (1.7)$$

Этот класс широко используется в количественном риск-менеджменте из-за включения в него важных параметрических семейств. Значения указанных параметров и вид вспомогательных функций для некоторых членов экспоненциальных семейств распределений представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Характеристики некоторых экспоненциальных семейств распределений

Вид распределения	$\theta$	$\varphi$	$a(\varphi)$	$b(\theta)$	$c(y, \varphi)$
Нормальное распределение	$\mu$	$\sigma^2$	$\varphi$	$\frac{\theta^2}{2}$	$-\frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{\varphi} + \ln(2\pi\varphi) \right)$
Гамма-распределение	$-\frac{1}{\mu}$	$\alpha$	$\frac{1}{\varphi}$	$-\ln(-\varphi)$	$(\varphi - 1) \ln y + \varphi \ln \varphi - \ln(\Gamma(\varphi))$
Биномиальное распределение	$\ln \left( \frac{\mu}{1-\mu} \right)$	$n$	$\frac{1}{\varphi}$	$\ln(1 + e^\theta)$	$\ln C_n^{ny} = \ln \left( \frac{n!}{(ny)!(n(1-y))!} \right)$
Распределение Пуассона	$\ln \mu$	1	$\varphi$	$\exp(\theta)$	$-\ln(y!)$

В ряде случаев удобно вводить экспоненциальные семейства несколько иным образом. Чаще всего подобная модификация связана с игнорированием технического параметра  $\varphi$ , так что формула определяется только естественным параметром. В частности, такое происходит, когда значение технического параметра известно и не влияет на методику анализа. Поэтому такие семейства называются *однопараметрическими экспоненциальными*. Плотность для них определяется формулой

$$f(y; \theta) = \frac{p(y)e^{-\theta y}}{q(\theta)}. \quad (1.8)$$

Переход от экспоненциальных семейств вида (1.5) к однопараметрическим можно осуществлять путем репараметризации

$$\theta^* = -\frac{\theta}{a(\varphi)},$$

тогда

$$\beta(\theta^*) = -\frac{b(\theta)}{a(\varphi)}$$

и  $\gamma(y) = -c(y, \varphi)$ , так что (1.5) примет вид

$$f(y; \theta) = \exp(-y\theta^* - \beta(\theta^*) + \gamma(y)) = \frac{e^{\gamma(y)} e^{-y\theta^*}}{e^{\beta(\theta^*)}}.$$

Положив  $p(y) = e^{\gamma(y)}$  и  $q(\theta^*) = e^{\beta(\theta^*)}$ , получим (1.8). Такая репараметризация будет формальной, если  $a(\varphi) = 1$ , как для распределения Пуассона.

В общем случае представление экспоненциальных семейств распределений в однопараметрической форме хотя и имеет более простой вид, может усложнить интерпретацию естественного параметра  $\theta$ .

На основании свойств (1.6) и (1.7) экспоненциальных семейств распределений можно показать, что

$$\mu(\theta) = E[X | \Theta = \theta] = -\frac{d \ln q(\theta)}{d\theta} = -\frac{q'(\theta)}{q(\theta)}, \quad (1.9)$$

$$v(\theta) = D[X | \Theta = \theta] = -\mu'(\theta). \quad (1.10)$$

## 1.4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЩЕРБА

### 1.4.1. Общая характеристика процедур статистического оценивания параметров распределения

Статистическое оценивание параметров распределения подробно описано в учебниках по математической статистике.

Процедура состоит из следующих этапов:

1. Выбор типа распределения.
2. Оценка параметров распределения.
3. Проверка статистических гипотез о качестве модели.

Выбор типа распределения включает в себя в первую очередь изучение формы гистограмм, построенных на основе имеющихся данных при различных разбиениях интервалов, а также анализ выборочных характеристик (моды, коэффициентов асимметрии и эксцесса, а также некоторых других). Это позволяет отобрать те типы распределений, которые в принципе могли бы быть использованы в качестве модельных, генерирующих исследуемую выборку. Список таких модельных распределений может быть сокращен за счет некоторых дополнительных соображений, среди которых можно назвать, например, следующие:

— особенности процесса возникновения ущерба (объем изучаемых портфелей рисков, наличие зависимости в наблюдаемой выборке и т. д.);

— предшествующие результаты «подгонки» распределений по прошлой и/или аналогичной статистике;

— удобство дальнейшего использования модельного распределения и т. п.

Оценка параметров распределения часто осуществляется путем оптимизации специально сконструированной функции, выбор которой определяет метод оценивания. Поиск решения соответствующей оптимизационной задачи может осуществляться как с помощью специальных методов математического программирования, так и путем решения уравнений и систем уравнений, отражающих необходимые условия в точке максимума (минимума). Некоторые методы статистического оценивания включены в пакеты прикладных статистических программ. Характеристика наиболее распространенных подходов дана далее в настоящей главе.

Анализ адекватности статистического оценивания параметров распределения является важным элементом процедуры подобного оценивания в целом, так как позволяет уточнить возможности использования построенного распределения для дальнейшего актуарного анализа. Скачок в нулевой точке и усеченное распределение ущерба рекомендуется тестировать отдельно. Для оценки качества подгонки усеченного распределения к теоретическому следует использовать обычные процедуры проверки на основе критериев  $\chi^2$  и Колмогорова, которые подробно излагаются в курсах математической статистики.

Вне зависимости от оценки адекватности статистического оценивания параметров распределения для каждого типа на этапе 3 рекомендуется провести расчеты для нескольких типов теоретических распределений, чтобы в результате выбрать наиболее подходящее из них.

#### 1.4.2. Метод наименьших квадратов

Этот метод основан на минимизации суммы (возможно, взвешенной) квадратов отклонений фактических значений от предсказанных моделью. Самым простым вариантом является оценка Крамера — фон Мизеса, предполагающая выбор таких параметров распределения, при которых достигает минимума функция

$$\sum_j w_j (F(x_j, \theta) - F_n(x_j))^2, \quad (1.11)$$

где  $F(x_j, \theta)$  — значение в точке  $x_j$  функции теоретического распределения с параметром (параметрами)  $\theta$ ;  $F_n(x_j)$  — значение функции эмпирического распределения в точке  $x_j$ . При этом точки  $x_j$  соответствуют наблюдениям (выборке). Величина  $w_j$  задает вес квадрата отклонений. Если «вклады» всех наблюдений можно считать равноценными, то  $w_j = 1 \quad \forall j$ .

Как правило, применение значений вероятности для дискретных распределений или функции плотности для непрерывных распределений делает критерий суммы квадратов отклонений более чувствительным. К сожалению, в большинстве случаев невозможно построить выборочную функцию плотности в каждой точке. Выход состоит в том, чтобы рассматривать изменение функции распределения на интервалах

$[a_{k-1}, a_k)$ ,  $k \in 1 \div m$ , т. е. для интервала с номером  $k$

$$\Delta F_k(\theta) = F(a_k, \theta) - F(a_{k-1}, \theta),$$

$$\Delta F_{n,k} = F_n(a_k) - F_n(a_{k-1}).$$

Тогда параметры распределения выбираются таким образом, чтобы минимизировать функцию

$$\sum_{k=1}^m (\Delta F_k(\theta) - \Delta F_{n,k})^2. \quad (1.12)$$

Иногда дается иное определение критерия качества подгонки. Например, вместо квадратов отклонений берутся их абсолютные значения. В подобных ситуациях говорят уже не о методе наименьших квадратов, а об *оценке минимального расстояния*, которое может задаваться по-разному.

### 1.4.3. Метод максимального правдоподобия

Идея данного подхода состоит в том, что появление наблюдаемых выборочных значений предполагается наиболее вероятным. Это приводит к выбору таких параметров, при которых максимизируется вероятность совместного осуществления события  $\{X_j = x_j \ \forall j\}$  для дискретного распределения или события  $\{x_j \leq X_j < x_j + dx_j \ \forall j\}$  для непрерывного распределения. В качестве упрощающей предпосылки предполагается независимость наблюдений. Тогда для дискретных распределений максимизируется функция правдоподобия

$$L(\theta) = \prod_j p(x_j, \theta), \quad (1.13)$$

где  $p(x_j, \theta)$  — значение в точке  $x_j$  функции вероятности с параметром (параметрами)  $\theta$ . Для непрерывных функций распределения имеет место

$$P[x_j \leq X_j < x_j + dx_j] = f(x_j, \theta) dx_j,$$

где  $f(x_j, \theta)$  — значение в точке  $x_j$  функции плотности распределения с параметром (параметрами)  $\theta$ . Игнорируя бесконечно малые, получим критерий максимизации

$$L(\theta) = \prod_j f(x_j, \theta). \quad (1.14)$$

Если данные сгруппированы по интервалам, то каждому наблюдению, попадающему в соответствующий интервал, приписывается вероятность, относящаяся к этому интервалу. Иными словами, функция правдоподобия принимает вид

$$L(\theta) = \prod_{k=1}^m [\Delta F_k(\theta)]^{n_k},$$

где  $n_k$  — объем наблюдений, попадающий в интервал  $[a_{k-1}, a_k)$ .

В ряде случаев для упрощения проблемы поиска максимума берется логарифм функции правдоподобия<sup>8</sup>

$$l(\theta) = \ln L(\theta).$$

Это, в частности, позволяет перейти от мультипликативной функции к аддитивной, легко избавляться от степенных выражений и игнорировать постоянные сомножители (превращающиеся в слагаемые-константы).

#### 1.4.4. Методы, основанные на численных характеристиках распределений

Эти методы не предполагают решения оптимизационной задачи. Их идея состоит в том, чтобы выразить характеристики распределения в терминах его параметров, а затем, приравняв их к выборочным значениям соответствующих характеристик, рассчитанных на основе наблюдений, оценить эти параметры. Естественно, число таких уравнений должно быть по меньшей мере равно числу оцениваемых параметров. Иногда для обеспечения разрешимости системы уравнений или для повышения точности оценок количество уравнений может увеличиваться по сравнению с числом параметров.

Кроме простоты расчетов преимуществом таких методов является то, что они часто дают асимптотически несмещенные оценки, хотя последние не являются наилучшими с точки зрения асимптотической эффективности и других критериев, а их точность нельзя увеличить.

Чаще всего в качестве характеристик распределения используют моменты, так что соответствующий метод называют *методом моментов*. Популярность этого подхода состоит в том, что моменты теоретического распределения относительно легко выразить через параметры функции распределения, а для оценки выборочных моментов имеются простые и эффективные формулы.

Альтернативным подходом является *метод квантилей*, в рамках которого приравниваются теоретические и выборочные квантили. Он применяется на практике реже, так как в ряде случаев квантили нельзя выразить простым соотношением в терминах параметров теоретического распределения, да и точность статистического оценивания выборочных квантилей ниже, чем для моментов. На практике в рамках данного подхода часто используют медиану и квартили распределения, т. е. квантили для вероятностей 50, 25 и 75% соответственно.

#### 1.4.5. Особенности статистического оценивания скачка в нулевой точке

Размер скачка в нулевой точке, связанной с отсутствием ущерба, рекомендуется оценивать отдельно от усеченного распределения ущерба (при условии  $X > 0$ ), если последнее является абсолютно непрерывным. Это объясняется не только проблемой системности данных, но и упрощением используемых статистических методов.

---

<sup>8</sup>Логарифмирование является монотонным преобразованием, поэтому точка, в которой достигается максимум функции правдоподобия, не меняется.

В этом случае статистика редуцируется до числа  $n_0$  событий  $\{X = 0\}$  и  $(n - n_0)$  событий  $\{X > 0\}$ . Для анализа подобных ситуаций эффективным инструментом моделирования является биномиальное распределение, где «удача» интерпретируется как возникновение события  $\{X = 0\}$ . Оценкой максимального правдоподобия для вероятности успеха будет

$$\hat{p} = \frac{n_0}{n}. \quad (1.15)$$

При отсутствии какой бы то ни было дополнительной информации о размере скачка в нулевой точке никаких гипотез об адекватности оценки не тестируется. Если же имеется «желательная» вероятность отсутствия ущерба  $p$ , то величину

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n_0}}$$

можно сравнивать с квантилью стандартного нормального распределения  $z_\alpha$  в качестве табличного значения. Нулевая гипотеза  $H_0 : \hat{p} = p$  отвергается с уровнем значимости  $2\alpha$ , если  $|z| > z_\alpha$ .

## 1.5. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ УЩЕРБА

**Задача 1.1.** Рассчитать моменты нормального распределения.

*Решение.* Для оценки математического ожидания

$$E[Y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} y \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

сделаем замену переменной  $t = (y - \mu)/\sigma\sqrt{2}$ :

$$E[Y] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma\sqrt{2} + \mu) e^{-t^2} dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Первый интеграл равен нулю в силу нечетности функции в подынтегральном выражении, а второй интеграл представляет собой известный интеграл Эйлера–Пуассона, который равен  $\sqrt{\pi}$ . Таким образом,  $E[Y] = \mu$ .

Для оценки дисперсии сделаем подобную замену переменных и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} D[Y] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (y-\mu)^2 \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left( -te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в скобках равно нулю, так как экспонента убывает быстрее любой степени  $t$ , а второе слагаемое равно интегралу Эйлера–Пуассона. В результате получим  $D[Y] = \sigma^2$ .

Аналогично ищем произвольный центральный момент  $k$ -го порядка — делаем замену переменной  $t = (y - \mu)/\sigma\sqrt{2}$  и интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} E[(Y - \mu)^k] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^k \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \left( -\frac{1}{2} t^{k-1} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{k-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{k-2} e^{-t^2} dt \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в скобках равно нулю по тем же причинам, так что

$$E[(Y - \mu)^k] = \frac{(k-1)(\sigma\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{k-2} e^{-t^2} dt = (k-1)\sigma^2 E[(Y - \mu)^{k-2}].$$

В силу того что  $E[(Y - \mu)^1] = E[Y - \mu] = 0$ , все центральные моменты с нечетными степенями равны нулю. Очевидно,  $E[(Y - \mu)^4] = 3\sigma^2$ ;  $E[(Y - \mu)^6] = 15\sigma^6$  и т. д.

Отсюда автоматически следуют значения коэффициента асимметрии

$$\nu_{\text{асим}} = \frac{E[(Y - \mu)^3]}{D[Y]^{3/2}} = 0$$

и коэффициента эксцесса

$$\nu_{\text{эксц}} = \frac{E[(Y - \mu)^4]}{D[Y]^2} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

**Задача 1.2.** Рассчитать моменты логнормального распределения.

*Решение.* Логнормальное распределение получается из нормального путем преобразования  $y = h(x) = e^x$ . Иными словами, если случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение, то случайная величина  $Y = e^X$  подчиняется логнормальному распределению.

Параметры будут теми же, что и для нормального распределения:  $\mu$  — параметр масштаба (с учетом преобразования  $h(\cdot)$  он не будет равен математическому ожиданию случайной величины  $Y$ ),  $-\infty < \mu < +\infty$ , и  $\sigma$  — параметр формы (не совпадает со среднеквадратическим отклонением новой случайной величины),  $\sigma > 0$ .

Оценим математическое ожидание случайной величины

$$E[Y] = \int_0^{\infty} \frac{y}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

Для вычисления интеграла проведем следующую замену переменных:

$$y = e^x, \quad x = \ln y, \quad dx = \frac{dy}{y}.$$

Тогда

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты:

$$\begin{aligned} (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x &= x^2 - 2x(\mu + \sigma^2) + \mu^2 = x^2 + 2x(\mu + \sigma^2) + (\mu + \sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4 = \\ &= (x^2 - (\mu + \sigma^2))^2 - 2\sigma^2\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \end{aligned}$$

откуда

$$E[Y] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Интеграл равен единице, так как подынтегральное выражение представляет собой плотность нормального распределения, так что

$$E[Y] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

С помощью аналогичных рассуждений получаем формулу для начального момента  $k$ -го порядка:

$$E[Y^k] = \exp\left(k\mu + \frac{k^2}{2}\sigma^2\right), \quad k \geq 1.$$

Тогда дисперсию можно определить как

$$D[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1].$$

Коэффициент асимметрии получаем из формулы для начального момента третьего порядка и дисперсии:

$$\begin{aligned} E[(Y - E[Y])^3] &= E[Y^3] - 3E[Y^2] \cdot E[Y] + 2(E[Y])^3 = \\ &= \exp\left(3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2\right) - 3\exp(2\mu + 2\sigma^2) \cdot \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) + 2\exp\left(3\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right) = \\ &= \exp\left(3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2\right) - 3\exp\left(3\mu + \frac{5}{2}\sigma^2\right) + 2\exp\left(3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2\right) [\exp(3\sigma^2) - 3\exp(\sigma^2) + 2] = \\
&= \exp\left(3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2\right) [\exp(\sigma^2) - 1]^2 [\exp(\sigma^2) + 2] \\
(D[Y])^{3/2} &= \exp\left(3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2\right) [\exp(\sigma^2) - 1]^{3/2}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\nu_{\text{асим}} = [\exp(\sigma^2) + 2] \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} > 0 \quad \text{для любого } \sigma^2 > 0.$$

Для вычисления коэффициента эксцесса сначала найдем центральный момент четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
E[(Y - E[Y])^4] &= E[Y^4] - 4E[Y^3] \cdot E[Y] + 6E[Y^2] \cdot (E[Y])^2 - 3(E[Y])^4 = \\
&= \exp(4\mu + 8\sigma^2) - 4\exp(4\mu + 5\sigma^2) + 6\exp(4\mu + 3\sigma^2) - 3\exp(4\mu + 2\sigma^2) = \\
&= \exp(4\mu + 2\sigma^2) [\exp(6\sigma^2) - 4\exp(3\sigma^2) + 6\exp(\sigma^2) - 3] = \\
&= \exp(4\mu + 2\sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]^2 [\exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) - 3].
\end{aligned}$$

Квадрат дисперсии

$$D[Y]^2 = \exp(4\mu + 2\sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1]^2,$$

тогда

$$\nu_{\text{эксц}} = \exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) - 6.$$

**Задача 1.3.** Оценить поведение хвоста

- 1) гамма-распределения,
- 2) распределения Парето

по сравнению с хвостом экспоненциального распределения, используя предельный переход.

*Решение.* Для решения данной задачи найдем следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)}.$$

1) Для первой части задачи случайная величина  $X$  имеет гамма-распределение с параметрами  $\alpha$  и  $\lambda$  ( $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ ), а случайная величина  $Y$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\theta$  ( $Y \sim \text{Exp}(\theta)$ ). Иными словами, оцениваем предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\theta e^{-\theta x}} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\lambda-\theta)}.$$

Если  $\lambda > \theta$ , то предел стремится к нулю, т. е. хвост гамма-распределения убывает быстрее. Если  $\lambda \leq \theta$ , то предел стремится к бесконечности, так что экспоненциальное распределение имеет «более легкий» хвост. Таким образом, поведение хвоста гамма-распределения определяется значением параметра масштаба.

Для второй части задачи случайная величина  $X$  имеет распределение Парето с параметрами  $\alpha$  и  $\lambda$  ( $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$ ). Случайная величина  $Y$ , как и ранее, распределена экспоненциально. Тогда оцениваем предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \frac{\alpha \lambda^\alpha}{e^{-\theta x} (x + \lambda)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{\theta} \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\theta x - (\alpha + 1) \ln(x + \lambda)) = \infty,$$

так как  $x$  растет быстрее, чем  $\ln x$ . Это означает, что скорость убывания числителя намного меньше скорости убывания знаменателя, так что распределение Парето имеет более «тяжелый хвост», чем экспоненциальное распределение.

**Задача 1.4.** Оценить асимптотическое поведение хвоста распределения Парето по сравнению с хвостом экспоненциального распределения с таким же математическим ожиданием и сравнить квантили распределения.

*Решение.* Если имеет место неравенство

$$F_X(x) \leq F_Y(x) \quad \forall x > x_0, \quad (1.16)$$

то это можно интерпретировать следующим образом: любая точка  $x$  из соответствующего интервала является для распределения случайной величины  $Y$  квантилью большего порядка, чем для случайной величины  $X$ . Поэтому хвост распределения случайной величины  $Y$  «легче», чем хвост случайной величины  $X$ .

Доказать данное неравенство можно двумя путями.

Во-первых, можно рассмотреть предельный переход вида

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_X(x)}{F_Y(x)},$$

но согласно правилу Лопиталья нахождение этого предела сводится к соответствующему пределу из предыдущей задачи. Этот метод относительно прост и эффективен, если только не нужно определить нижнюю границу  $x_0$  интервала.

Во-вторых, можно попытаться прямо доказать указанное неравенство. Если ( $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$ ) и ( $Y \sim \text{Exp}(\theta)$ ), то неравенство (1.16) сводится к неравенству

$$e^{-\theta x} \leq \left( \frac{\lambda}{x + \lambda} \right)^\alpha.$$

С учетом равенства математических ожиданий имеем дополнительное соотношение

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1.$$

Нужно найти такие значения  $x$ , что

$$\exp\left(\frac{\lambda}{\alpha - 1} x\right) \geq \left(\frac{x}{\lambda} + 1\right)^\alpha. \quad (1.17)$$

Или, что то же самое,

$$\exp\left(\frac{\lambda}{\alpha(\alpha - 1)} x\right) \geq \frac{x}{\lambda} + 1.$$

При  $x = 0$  обе стороны неравенства равны 1. При  $x > 0$  возможны два случая (рис. 1.3).

Если для производных в нулевой точке имеет место

$$\frac{\lambda}{\alpha(\alpha - 1)} \geq \frac{1}{\lambda},$$

то  $x_0 = 0$ , и неравенство (1.17) выполняется для всех  $x > 0$ . В противном случае графики пересекаются в ненулевой точке  $x_0$ . Аналитически найти эту точку сложно, но ее можно получить численно.

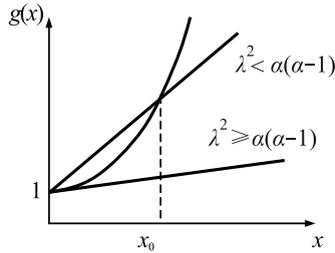


Рис. 1.3. Влияние соотношения параметров на решение задачи.

**Задача 1.5.** Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X = I \cdot Y$ , если  $P[I = 1] = p$ ,  $E[Y] = \mu$  и  $D[Y] = \sigma^2$ .

*Решение.* Рассмотрим два способа оценки.

*Способ 1. Прямые расчеты*

$$E[X] = 0 \cdot p + (1 - p) \int_0^{\infty} x f_Y(x) dx = (1 - p)\mu, \quad (1.18)$$

$$E[X^2] = 0 \cdot p + (1 - p) \int_0^{\infty} x^2 f_Y(x) dx = (1 - p)(\sigma^2 + \mu^2),$$

$$\begin{aligned} D[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = (1 - p)(\sigma^2 + \mu^2) - (1 - p)^2 \mu^2 = \\ &= (1 - p)\sigma^2 + p(1 - p)\mu^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

*Способ 2. Условные математические ожидания*

$$\begin{aligned} E[X] &= E[IY] = E[E[Y|I]] = E[\mu I] = (1 - p)\mu, \\ D[X] &= D[IY] = E[D[Y|I]] + D[E[Y|I]] = E[\sigma^2 I] + D[\mu I] = \\ &= (1 - p)\sigma^2 + p(1 - p)\mu^2, \end{aligned}$$

что полностью соответствует формулам (1.18) и (1.19).

**Задача 1.6.** Обосновать оценки параметра экспоненциального распределения по методам максимального правдоподобия, моментов и квантилей.

*Решение*

1. *Оценка максимального правдоподобия*

Функция правдоподобия для экспоненциального распределения примет вид

$$L(\lambda) = \prod_{j=1}^n \lambda e^{-\lambda x_j} = \lambda^n \exp \left( -\lambda \sum_{j=1}^n x_j \right).$$

Логарифмируем ее:

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{j=1}^n x_j.$$

Используя необходимое условие экстремума, берем производную по  $\lambda$  и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{dl(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n x_j = 0,$$

откуда

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

2. *Метод моментов*

Приравниваем выборочное среднее к математическому ожиданию

$$\bar{x} = E[X] = \frac{1}{\lambda},$$

откуда снова получаем

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

3. *Метод квантилей*

Приравниваем выборочную квантиль  $x_{(r)}$ , где  $r = [\beta n]$ , к квантили распределения:

$$x_{(r)} = x_\beta = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \beta),$$

откуда

$$\hat{\lambda} = -\frac{\ln(1 - \beta)}{x_{(r)}}.$$

## 1.6. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

1.1. Дать характеристику основных свойств остальных распределений, приведенных в п. 1.3.

1.2. Парно сравнить поведение хвостов распределений, приведенных в п. 1.3, на основе предельных переходов.

1.3. Парно сравнить поведение хвостов распределений, приведенных в п. 1.3, на основе сопоставления функций распределения.

1.4. Оценить, как повлияет изменение вероятности отсутствия ущерба на их математическое ожидание и дисперсию.

[*Подсказка:* представить указанные характеристики как функции  $p$  в соответствии с (1.18) и (1.19), а затем определить знак их производных.]

1.5. Показать, что отрицательное биномиальное распределение является членом экспоненциального семейства. Проверить, выполняются ли свойства (1.6) и (1.7).

[*Подсказка:* предварительно провести замену переменных  $x = k/r$ . Нужно помнить, что соответственно изменяются математическое ожидание и дисперсия.]

1.6. Обосновать оценки параметров распределений, приведенных в п. 1.3, по методу максимального правдоподобия и методу моментов.

1.7. Обосновать оценку максимального правдоподобия (1.15) вероятности отсутствия ущерба.

## Глава 2

# МЕРЫ РИСКА

Вопрос численного измерения риска — один из ключевых в процессе количественного риск-менеджмента. Именно некоторое детерминированное число, сопоставляемое рисковому ситуации, часто является основой для дальнейшего принятия решений. Поэтому правило выбора этого числа должно быть таким, чтобы результат максимально отражал представления аналитика или менеджера о степени неопределенности и «рисковости», присущей изучаемой ситуации.

Проблема выбора правила определения числовой характеристики риска осложняется тем, что различные участники процесса могут по-разному формулировать свои пожелания к её свойствам. При этом в различных приложениях на первый план могут выходить неодинаковые требования к характеристикам риска.

Ситуация усугубляется наличием у каждого индивида своих субъективных представлений о риске и неопределенности. Поэтому грамотный способ измерения риска должен не просто соответствовать некоторым заранее выбранным свойствам, но и не противоречить естественным представлениям о риске.

Цель данной главы — ознакомить читателя с различными подходами к построению меры риска, с учетом их особенностей и применимости в разных приложениях процессов риск-менеджмента.

После изучения материала вы узнаете:

- почему необходимо численно оценивать риск;
- каким образом можно учитывать субъективные представления индивида о риске;
- что такое теория ожидаемой полезности;
- каким образом индивидуальные предпочтения могут влиять на инвестиционные решения;
- как может измеряться риск в отдельных финансовых приложениях;
- что такое мера риска;
- какие меры риска называют когерентными;
- почему изучение когерентных мер риска так важно;
- каким образом можно строить строгую формальную математическую теорию рисков;
- какие меры риска часто применяются на практике;
- какие меры риска наиболее актуальны с точки зрения современного риск-менеджмента;
- каким образом можно оценивать меры риска на основе выборочных данных.

**Ключевые слова:** теория ожидаемой полезности, мера риска, приемлемое множество, когерентная мера риска, выпуклая мера риска, рисковый капитал, условный рисковый капитал.

## 2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИЗМЕРЕНИЯ РИСКА

### 2.1.1. Необходимость использования численных характеристик риска

Выше, в главе 1 (п. 1.1.2), уже упоминалось понятие «мера риска» как элемента системы риск-менеджмента.

На самом деле управление рисками не ограничивается процедурой анализа распределения ущерба. Знание распределения ущерба является лишь информационной базой, необходимой для контроля ситуации и, в случае необходимости, принятия различных управленческих решений. При этом список вопросов, требующих изучения соответствующих распределений, может быть достаточно широк. В качестве примера приведем следующие вопросы:

- Стоит ли страховать риск или потенциальные ущербы по нему достаточно незначительны?
- Каким образом нужно формировать инвестиционный портфель, чтобы потенциальные ущербы были не слишком большими?
- Является ли деятельность некоторой компании достаточно осмотрительной или правильно было бы признать её излишне рискованной?

Подобные вопросы требуют не только знания распределений, но и умения сравнивать их между собой, т. е., например, решать, какой инвестиционный портфель «лучше» (какая случайная величина «лучше»), а какой «хуже»; что более привлекательно: случайная величина, допускающая различные значения ущерба, или детерминированный ущерб, определяемый страховой премией<sup>1</sup>.

### 2.1.2. Субъективный и объективный подходы к измерению риска

К задаче подобного выбора можно подходить по-разному. С одной стороны, можно построить формальный критерий, на основании которого в дальнейшем будет осуществляться управление рисками. Примером такого критерия может быть, например, значение максимально возможного ущерба или математическое ожидание возможного ущерба. В этом случае менеджер будет стремиться минимизировать значение соответствующего критерия или же действовать так, чтобы значение критерия не выходило за пределы заранее установленных границ. Важно отметить, что различные критерии выбора могут приводить к различным упорядочиваниям рискованных ситуаций и соответственно различным решениям. При этом каждый критерий будет учитывать определенные особенности рискованных ситуаций. Так, если руководствоваться максимально возможным значением ущерба, предпочтение будет отдано рискованной ситуации, которая гарантирует отсутствие больших убытков. Если же в качестве критерия взять математическое ожидание, выбор будет сделан в пользу той рискованной ситуации, которая гарантирует меньшее среднее значение убытка, но при этом возможно будет допускать достаточно большие убытки в отдельные периоды.

---

<sup>1</sup>В теории принятия решений эти вопросы обычно обсуждаются в контексте принятия решений в условиях риска.

Вопрос выбора подходящего критерия (меры риска) является одним из важнейших вопросов в современном риск-менеджменте. Некоторые меры риска, их особенности, недостатки и принципы построения будут обсуждаться в п. 2.3–2.7.

Разумеется, формально менеджер не ограничен числом критериев. Для сравнения можно применять сразу несколько различных числовых характеристик одновременно. Однако в этом случае не все рискованные ситуации удастся упорядочить однозначно. Так, используя для принятия решений и математическое ожидание, и дисперсию, не удастся сделать выбор из случайных величин с плотностями, изображенными на рис 2.1, так как математическое ожидание одной будет больше математического ожидания второй, но дисперсия первой также будет больше.

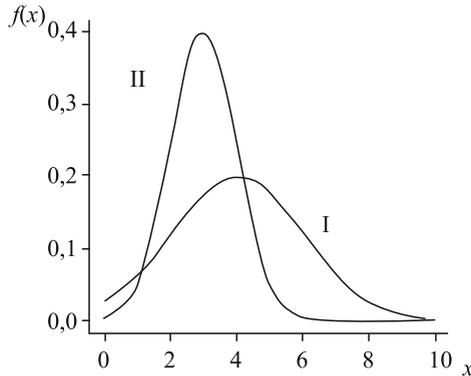


Рис. 2.1. Плотности случайных величин, по-разному упорядочиваемых в зависимости от выбора критерия.

Принцип принятия решений с использованием формального критерия можно условно назвать «объективным», так как менеджер сначала формулирует принцип принятия решения и лишь потом действует в соответствии с ним. Такой подход особенно удобен, когда необходимо, чтобы принципы решений, используемые разными индивидуумами, соответствовали единым нормам и правилам утвержденным, например, в некоторой компании. Также формальные «объективные» критерии естественным образом внедряются в рамках контроля, осуществляемого надзорными органами за банками или страховыми компаниями: устанавливая правила вычисления предельных уровней риска, регулятор ограничивает возможные решения рыночных агентов, тем самым охраняя рынок от серьезных потрясений.

Противоположным «объективному» принципу принятия решений является «субъективный» принцип, в соответствии с которым менеджер принимает решения, руководствуясь своим опытом, интуицией и личными неформализованными предпочтениями. Подобный порядок принятия решений изучается в первую очередь в микроэкономике для анализа поведения людей в бытовых ситуациях, не подразумевающих необходимости использования сложных строгих расчётов. Более подробно эти вопросы рассматриваются далее в п. 2.2.

Важно отметить, что «субъективный» и «объективный» подходы не исключают друг друга. Так, даже если надзорный орган установил предельно допустимый

уровень риска (например, максимально возможного ущерба), у менеджера остается некоторое пространство решений, каждое из которых будет характеризоваться распределением ущерба, удовлетворяющим этому уровню. Более того, кажется естественным, чтобы индивидуальные предпочтения лица, принимающего решения, не вступали в противоречие с выбором, осуществляющимся с помощью формального критерия. Следовательно, задача выбора принципа принятия решения и поведения в условиях риска должна не только решать проблему контроля риска, но и каким-то образом учитывать индивидуальные особенности субъектов.

## 2.2. СУБЪЕКТИВНЫЙ ПОДХОД К ИЗМЕРЕНИЮ РИСКА

### 2.2.1. Общая характеристика субъективного подхода к измерению риска

Субъективный подход к принятию решений, упомянутый выше, обладает рядом недостатков. Так, разные экономические агенты могут руководствоваться несовпадающими личными предпочтениями, и соответственно одна и та же рискованная ситуация может интерпретироваться ими различным образом. В результате, в частности, значительно усложняется контроль поведения агентов. Тем не менее изучение и моделирование поведения отдельных агентов актуально в некоторых актуарных приложениях<sup>2</sup>. Кроме того, с помощью общих принципов подобных моделей в дальнейшем можно построить подходы к изучению риска, основанные на абстрактных, персонифицированных, необязательно упорядоченных предпочтениях.

История анализа принципов принятия решений в условиях риска восходит к Санкт-Петербургскому парадоксу, сформулированному Даниэлем Бернулли в XVIII в.<sup>3</sup> Бернулли рассматривал следующую азартную игру: монета подбрасывается до тех пор, пока в первый раз не выпадет орел. При этом если орел выпадает с первого раза, игрок получает выигрыш размером  $2^1$ , если со второго раза — выигрыш  $2^2$ , с третьего —  $2^3$  и т. д. Несмотря на то что математическое ожидание выигрыша в такой игре бесконечно, игроки были готовы реально заплатить за участие в такой игре сравнительно небольшую сумму. Бернулли предположил, что потенциальные участники, принимая решение об участии в игре, ориентируются не на непосредственно математическое ожидание выигрыша, но на математическое ожидание некоторой функции от выигрыша. В качестве такой функции Бернулли предложил использовать логарифм, посчитав, что привлекательность («полезность») выигрыша растёт не абсолютно, но относительно капитала игрока, т. е. привлекательность выигрыша будет тем меньше, чем большими средствами игрок обладает. Тогда именно логарифм является решением дифференциального уравнения  $du = dw/w$ , где  $u$  — «полезность» выигрыша,  $w$  — капитал игрока,  $du$  — приращение полезности, а  $dw/w$  — относительное приращение капитала. Тогда игрок сравнивает для себя ожидаемую полезность выигрыша в случае участия в игре:  $E[\ln(w - a + X)]$ , где  $a$  —

<sup>2</sup>Так, решение о приемлемости величины страховой премии принимается зачастую именно на субъективном уровне.

<sup>3</sup>Более подробно об истории Санкт-Петербургского парадокса можно прочитать в статье [Кудрявцев, 2013].

размер платы за участие,  $X$  — выигрыш, и полезность своего капитала  $\ln w$  (или, в общем случае,  $E[u(w - a + X)]$  и  $u(w)$ ).

Из похожих соображений можно определять размер страховой премии, за которую страхователь согласится передать свой риск страховщику. Так, до заключения договора страхования потенциальный клиент с капиталом  $w$  является носителем риска  $X$  — случайной величины, определяющей значения возможных потерь. После уплаты страховой премии капитал клиента уменьшается на величину  $a$ , но и носителем риска теперь выступает страховая организация<sup>4</sup>. Таким образом, принимая решение о страховании, потенциальный клиент как бы сравнивает две величины:  $E[u(w - X)]$  и  $u(w - a)$ .

Подобный подход позволяет моделировать поведение экономического агента: чтобы понять, как поступит агент, выбирающий из двух альтернатив  $X_1$  и  $X_2$ , достаточно сравнить  $E[u(X_1)]$  и  $E[u(X_2)]$ . Строго говоря, если предположение о существовании подобной функции  $u(x)$  верно, то можно утверждать следующее: если из двух альтернатив  $X_1$  и  $X_2$  агент выбирает первую, то должно выполняться неравенство

$$E[u(X_1)] > E[u(X_2)]. \quad (2.1)$$

### 2.2.2. Теория ожидаемой полезности

Формальное доказательство существования функций полезности требует выполнения ряда предпосылок:

1. Предпочтения на множестве альтернатив полны и транзитивны<sup>5</sup>, т. е. из любых двух альтернатив агент способен определить, какая из них интереснее.

2. Обозначим  $(X_1 X_2)_p$  следующую альтернативу: сначала бросается монетка, решка на которой выпадает с вероятностью  $p$ . В случае если выпала решка, реализуется альтернатива  $X_1$ , в противном случае реализуется альтернатива  $X_2$ . Тогда если для трех альтернатив  $X_1, X_2$  и  $X_3$  выполняется  $X_1 \prec X_2 \prec X_3$  (т. е. первая альтернатива наименее интересна агенту, а третья — наиболее интересна), то найдется такое число  $p$  из отрезка  $[0, 1]$ , что альтернативы  $X_2$  и  $(X_1 X_3)_p$  для агента будут безразличны.

3. Если для агента нет разницы между альтернативами  $X_1$  и  $X_2$ , то и альтернативы  $(X_2 X_3)_p$  и  $(X_1 X_3)_p$  ему также будут одинаково интересны для любой  $X_3$  и для любой вероятности  $p$ .

4. Пусть  $X_1 \succ X_2$ . Тогда  $(X_1 X_2)_p \succ (X_1 X_2)_q$  в том и только в том случае, когда  $p > q$ .

В 1947 г. Оскар Моргенштерн и Джон фон Нейман показали, что из вышеперечисленных аксиом следует существование единственной (с точностью до положительного линейного преобразования) функции  $u(x)$ , для которой выполняется соотношение (2.1). В случае же, если удастся найти функцию полезности агента,

<sup>4</sup>Для простоты здесь рассмотрен случай полного страхования.

<sup>5</sup>Полнота предпочтений предполагает, что агент способен сравнить любые две альтернативы. Транзитивность предпочтений состоит в том, что если альтернатива  $X_1$  для агента не менее привлекательна, чем альтернатива  $X_2$ , а альтернатива  $X_2$  не менее привлекательна, чем  $X_3$ , то и  $X_1$  будет не менее привлекательна, чем  $X_3$ .

то в дальнейшем её можно использовать для моделирования его поведения. Данная теория известна в литературе под названием «Теория ожидаемой полезности».

Важным частным случаем являются вогнутые функции полезности: так, если выполняются неравенства  $u'(x) > 0$ ;  $u''(x) < 0$ , то из неравенства Йенсена следует соотношение  $E[u(X)] \leq u(E[X])$ . Данное неравенство допускает следующую простую интерпретацию: альтернатива  $X$  менее предпочтительна, чем детерминированная альтернатива  $E[X]$ . Так, именно подобный вид функции полезности делает возможным страхование: носитель риска  $X$  предпочтет заплатить страховую премию равную или большую, чем математическое ожидание  $E[X]$ . В частности из этих соображений агентов с вогнутой функцией полезности называют *не склонными к риску* (risk aversion).

Ещё одним важным объектом является понятие достоверного эквивалента альтернативы. Под ним понимают такое число  $a$ , полезность которого равна полезности альтернативы:

$$E[u(X)] = u(a). \quad (2.2)$$

Достоверный эквивалент альтернативы можно трактовать как «субъективную справедливую цену за участие в азартной игре» или как «справедливую стоимость страхового полиса».

Несмотря на кажущуюся естественность условий существования функций полезности, ряду исследователей удалось построить эксперименты, демонстрирующие, что поведение агентов часто противоречит предпосылкам (1)–(4). Таким образом, теория ожидаемой полезности остается лишь теорией, не очень хорошо подтверждающейся на практике<sup>6</sup>. Несмотря на это, идеи, лежащие в её основе, важны и актуальны как для понимания субъективных процессов принятия решения экономическими агентами, так и для дальнейшего конструирования мер риска<sup>7</sup>.

### 2.2.3. Теория ожидаемой полезности и портфельная теория Марковица

Одним из примеров использования теории ожидаемой полезности на практике стала портфельная теория Марковица, предлагающая алгоритм определения наилучшего инвестиционного портфеля. В неформальном виде основные предпосылки можно сформулировать следующим образом:

1. Чем больше математическое ожидание доходности портфеля, тем портфель интереснее инвестору.
2. Чем меньше дисперсия доходности портфеля, тем портфель интереснее инвестору.
3. Инвестор не склонен к риску (risk aversion).

Первым шагом алгоритма является определение множества всех возможных портфелей (все возможные комбинации  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ , где  $x_1, \dots, x_n$  —

<sup>6</sup>На протяжении XX в. был сформулирован целый ряд развитий данной теории, которые с разным успехом обходят возникающие противоречия с практикой.

<sup>7</sup>Более подробно о парадоксе Алле и развитиях теории ожидаемой полезности можно прочитать в статье [Schoemaker, 1982].

доходности элементов портфеля, а  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — доли капитала, вложенного в соответствующий элемент). Далее формируется так называемое эффективное множество портфелей или эффективная граница (рис. 2.2).

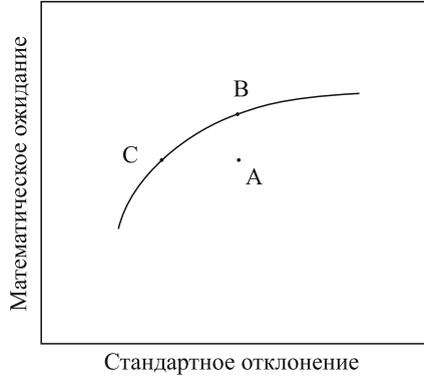


Рис. 2.2. Эффективное множество портфелей.

Очевидно, что и портфель В более интересен инвестору, чем портфель А, так как обладает большим математическим ожиданием доходности, и портфель С более интересен, чем портфель А, так как обладает меньшей дисперсией доходности. Более того, из свойств математического ожидания и дисперсии очевидным является и факт вогнутости эффективного множества.

Введем также понятие кривой безразличия: будем говорить, что два портфеля  $X_1$  и  $X_2$  принадлежат одной и той же кривой безразличия, если для инвестора с функцией полезности  $u(x)$  выполняется равенство  $E[u(X_1)] = E[u(X_2)]$ .

Легко проверяется, что кривые безразличия для вогнутых возрастающих функций полезности являются выпуклыми и параллельными (рис. 2.3). Кроме того, чем «выше» находится кривая безразличия, тем выше полезность этого портфеля.

Наконец, на последнем этапе определяется точка на эффективной границе, в которой граница касается одной из кривых безразличия.

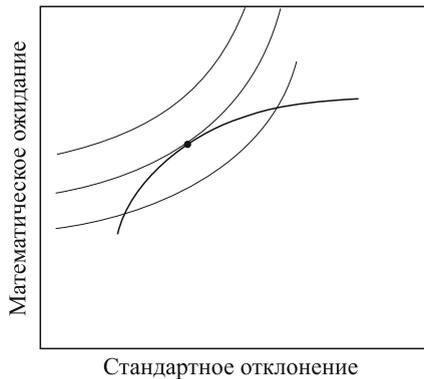


Рис. 2.3. Эффективное множество портфелей, кривые безразличия и оптимальный портфель.

## 2.3. ОБЪЕКТИВНЫЙ ПОДХОД К ИЗМЕРЕНИЮ РИСКА

### 2.3.1. Общая характеристика объективного подхода к измерению риска

Технически к вопросу измерения риска можно подходить с разных сторон, в зависимости от целей и уровня проводимого анализа [Chernobai, Rachev, Fabozzi, 2007; Grouhy, Galai, Mark, 2001; Denuit et al., 2005; Duffie, Singleton, 2003; Jorion, 2007]. Отдельные продукты могут изучаться и анализироваться с помощью своих показателей и метрик. Как уже было упомянуто выше (п. 2.2.3), измерять риск по портфелю ценных бумаг можно с помощью дисперсии доходности. Для других инструментов можно рассматривать иные показатели, более тонко учитывающие их индивидуальные особенности. Так, неопределенность, связанная с производными ценными бумагами, часто изучается с помощью анализа чувствительности стоимости дериватива по отношению к изменению различных параметров базовых активов.

Более того, показатель, отвечающий за риск, сам может быть элементом другого, вторичного показателя, который в результате будет описывать объект уже с учетом риска, как, например, коэффициент Шарпа, характеризующий эффективность инвестиционного портфеля. Примеры некоторых подобных подходов будут рассмотрены далее (см. п. 2.3.2).

Однако многообразие различных финансовых инструментов и соответственно необходимость учета их индивидуальных особенностей затрудняют экстраполяцию отдельных индикаторов риска на портфель рисков компании в целом или даже на деятельность всей компании. Ситуацию усложняет и потенциально громоздкая схема зависимости инструментов друг от друга, для характеристики которой не подходят простые объекты типа коэффициентов корреляции. В частности, именно недооценку влияния различных источников риска друг на друга называют одной из причин мирового финансового кризиса 2008 г.

Решением подобной проблемы может быть использование показателя, базирующегося на распределении потенциального ущерба для компании в целом. Важно отметить, что данный подход требует не только внимательного выбора способа описания риска, но и корректного оценивания распределения ущерба с учетом всех аспектов деятельности компании.

При этом выбор инструмента для анализа зависит и от механизма, в соответствии с которым инструмент будет применяться в дальнейшем. Можно выделить два основных подхода к использованию инструмента.

С одной стороны, показатель риска может рассматриваться как величина, которую компания стремится минимизировать. Так, в рамках портфельной теории Марковица более интересными являются портфели с меньшей дисперсией.

С другой стороны, показатель риска может использоваться как величина, определяющая размер необходимого собственного капитала компании. Наиболее популярным инструментом подобного рода является *рисковый капитал* (капитал под риском, стоимостная мера риска<sup>8</sup>, англ. Value-at-Risk — стандартные обозначения

---

<sup>8</sup>Такой термин используется в некоторых документах российских надзорных органов. Очевидно, он крайне неудачен, так как концентрируется на единицах измерения.

VaR или  $V@R$ ), более подробно обсуждаемый в п. 2.5. В терминах теории вероятностей рисковый капитал это квантиль определенного уровня, т. е. величина, определяющая такую величину ущерба, которая «скорее всего» (т. е. с заданной достаточно высокой вероятностью) не будет превышена.

Важную роль в признании рискового капитала сыграло его удобство с точки зрения организации процессов надзора: сейчас именно VaR является одним из основных показателей, на основе которого надзорные органы оценивают потребности банков в собственном капитале, резервируемом для покрытия возможных ущербов.

### 2.3.2. Измерение риска в портфельных теориях

Измерение риска с помощью дисперсии, как это сделано в портфельной теории Марковица, обладает рядом недостатков. Во-первых, дисперсия хорошо работает только в том случае, если элементы портфеля имеют нормальное распределение (или распределение, близкое к нормальному). Асимметрия распределения ущерба нарушит базовые предпосылки модели и сделает её приложение к измерению риска менее корректным. Во-вторых, дисперсия в силу своего определения учитывает колебания доходности в обе стороны от математического ожидания, что тоже может быть объектом критики, так как отклонение доходностей в большую сторону относительно математического ожидания, вообще говоря, не является проблемой. Решением может быть использование более сложных характеристик риска. Так, вместо дисперсии можно применить полудисперсию, учитывающую колебания только в одну сторону. Она определяется с помощью выражения

$$\sigma_-^2(X) = E[X - E[X]]^2.$$

Кроме того, можно вводить и другие меры, менее подверженные влиянию вида распределений. Примером может служить уже упоминавшийся выше рисковый капитал. Разумеется, новая характеристика риска потребует вычисления новой эффективной границы допустимого множества портфелей.

Важно отметить, что дисперсия может служить и показателем эффективности портфеля по отношению к некоторому альтернативному вложению, в роли которого чаще всего выступает некоторый безрисковый инструмент (американские государственные долговые обязательства). Примером может быть коэффициент Шарпа, рассчитываемый по формуле

$$K_S = \frac{E[R - R_f]}{\sigma(R)},$$

где  $R, R_f$  — доходности портфеля и безрискового инструмента соответственно,  $\sigma(R)$  — стандартное отклонение доходности портфеля.

Другой пример — информационный критерий, сравнивающий инвестиционный портфель с некоторым эталонным портфелем:

$$K_{\text{inf}} = \frac{E[R - R_B]}{\sigma(R - R_B)},$$

где  $R_B$  — доходность эталонного портфеля.

В однофакторной модели ценообразования активов (Capital Asset Pricing Model, CAPM) в качестве характеристики риска используется так называемый коэффициент бета, т. е. показатель чувствительности доходности  $i$ -го актива к изменению рыночной доходности  $\beta_i$ :

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i(R_M - R_f) + \varepsilon_i,$$

где  $R_i, R_M$  — доходность  $i$ -го актива и рынка соответственно,  $\alpha_i$  — так называемый коэффициент альфа, отражающий величину систематической (недиверсифицируемой) ошибки, и  $\varepsilon_i$  — случайная ошибка измерения для  $i$ -го актива. Здесь  $\beta_i$  выступает в качестве регрессионного коэффициента наклона и определяется отношением ковариации  $R_i$  (доходности инструмента) и рыночной доходности к дисперсии рыночной доходности. Более подробно о различных портфельных теориях можно прочитать, например, в [Elton, 2013]. Отметим лишь, что различные подходы к понятию риска не противоречат друг другу и сохраняют актуальность в зависимости от используемых моделей.

С точки зрения анализа процентного риска долгового обязательства с фиксированной доходностью, т. е. риска ущерба, вызванного изменением процентных ставок, критерием риска может выступать *модифицированная дюрация* (или *дюрация Макколея*), которая характеризует чувствительность денежного потока к изменениям процентной ставки. Величина  $-\frac{D\Delta y}{(1+y)}$  примерно равна изменению стоимости обязательства (в процентах), где  $y$  — процентная ставка,  $D = \frac{\sum t \times PV_t}{\sum PV_t}$ , а  $PV_t$  — дисконтированная стоимость  $t$ -й выплаты.

Риски, связанные с ущербами при работе с деривативами (например, опционами), часто измеряют с помощью так называемых *греческих мер* (Greeks), т. е. коэффициентов, отражающих чувствительность цены опциона по отношению к изменению базовых показателей: коэффициент «дельта», измеряющий чувствительность по отношению к стоимости базового актива ( $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ ); коэффициент вега, измеряющий чувствительность по отношению к волатильности (стандартному отклонению) базового актива ( $v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ ); коэффициент тета, измеряющий чувствительность стоимости опциона по отношению к приближению времени погашения опциона ( $\theta = \frac{\partial V}{\partial \tau}$ ), и т. д.

Риски, связанные с возникновением дефолта заёмщика, при анализе кредитных процессов иногда удобно оценивать с помощью вероятности дефолта. Подобный же подход удобен и для рисков, характеризующихся очень редкими, но при этом очень большими ущербами, к которым можно отнести, например, космические или ядерные риски. В этом случае оценивается (и минимизируется) в первую очередь вероятность наступления некоторого события.

В разных приложениях можно встретить и другие показатели, тем или иным способом измеряющие риск.

Несмотря на то что современный риск-менеджмент предполагает знание деталей и особенностей всех вышеперечисленных (и многих других) объектов, более подробное их описание выходит за границы данного учебника. Эти методы достаточно хорошо описаны в разнообразной литературе, посвященной соответствующим финансовым приложениям.

### 2.3.3. Подходы к измерению риска по портфелю рисков в целом

Одной из основных проблем современного риск-менеджмента является прежде всего определение принципов агрегации рисков компании воедино и разработка показателей, позволяющих анализировать риски всей компании в целом, а не только её отдельных элементов. К сожалению, показатели, хорошо описывающие риски отдельных инструментов, зачастую плохо распространяются друг на друга. При этом на современном этапе развития экономики деятельность многих компаний затрагивает самые разные области и рынки, в результате чего ей приходится сталкиваться с совершенно разноплановыми инструментами и объектами (в том числе и из п. 2.3.2). Всё это лишь повышает актуальность вышеуказанной проблемы.

Как уже отмечалось ранее, удобным способом агрегации рисков является анализ случайной величины, определяющей потенциальный ущерб по всей компании в целом. Таким образом, задача измерения риска оказывается связана с выбором той характеристики случайной величины, которая, по мнению риск-менеджера, будет наилучшим образом характеризовать неопределенность портфеля рисков компании. Современные надзорные требования в различных областях достаточно подробно регламентируют меры риска, с помощью которых компания должна контролировать потенциальные убытки. Кроме того, именно мера риска часто определяет уровень достаточности собственного капитала компании, зарезервированного для покрытия убытков. При этом для различных внутренних целей может использоваться самый широкий круг способов анализа риска.

Одной из простейших мер риска является *математическое ожидание* случайной величины, определяющей ущерб. Математическое ожидание выделяется прежде всего своей простотой и понятностью. Информация о потенциальном среднем ущербе важна и в любом случае так или иначе может учитываться при анализе, однако эта характеристика не очень удобна с точки зрения риск-менеджмента: игнорируются такие свойства случайной величины, как разброс возможных значений ущерба, интенсивность возможных флуктуаций и т. д. Кроме того, математическое ожидание ущерба плохо подходит для проверки достаточности собственного капитала, так как фактический ущерб будет превышать математическое ожидание с высокой вероятностью. Так, для симметричных распределений ущерб будет превышать собственный капитал в среднем в 50% случаев.

Наравне с математическим ожиданием часто упоминается *медиана* случайной величины, также характеризующая ущерб в среднем, но несколько иным образом. И медиана, и математическое ожидание важны для понимания структуры возможного ущерба, однако как характеристики непосредственно риска они используются редко.

Другой простой показатель размера риска — *максимальное значение* ущерба. Данная характеристика исчерпывающим образом определяет границу, превзойти которую ущерб уже не может. Однако максимальному значению присущ ряд серьезных недостатков: так, ущербы, близкие к максимальному, реализуются крайне редко, однако под них придется «замораживать» большой собственный капитал. Кроме того, статистическая оценка данного показателя достаточно трудна. Наконец, модельные распределения ущерба зачастую имеют бесконечный носитель, т. е. предполагается, что ущерб может принимать значения на всей положительной полуоси

(если трактовать величины ущерба как положительные числа), что делает невозможным определение максимального значения. В результате на практике за исключением отдельных приложений данная характеристика не применяется. Впрочем, стоит отметить, что идея максимального ущерба отчасти схожа с идеей рискованного капитала.

Несколько более сложной мерой риска является *дисперсия* (и ряд показателей, строящихся на похожих принципах: стандартное отклонение, полудисперсия, среднее отклонение). Дисперсия также легко оценивается и в общем достаточно понятна на интуитивном уровне. В отличие от математического ожидания дисперсия учитывает разброс случайной величины, однако она оценивается в целом по всей случайной величине, в то время как для целей риск-менеджмента часто наибольший интерес представляет поведение на хвосте, т. е., с одной стороны — редко возникающих событий, а с другой — приводящих к серьезным убыткам. Кроме того, дисперсия не подходит для определения величины собственного капитала, так как учитывает лишь разброс случайной величины вокруг математического ожидания, игнорируя значение этого математического ожидания. При этом вполне возможна ситуация необходимости выбора из двух случайных величин, первая из которых приносит ущербы всегда большие, чем вторая, но дисперсия ее будет меньше. Таким образом, с точки зрения дисперсии первая случайная величина будет более рискованной, хотя представляется естественным, что случайная величина, приводящая к меньшим убыткам, должна быть более предпочтительной (рис. 2.4).

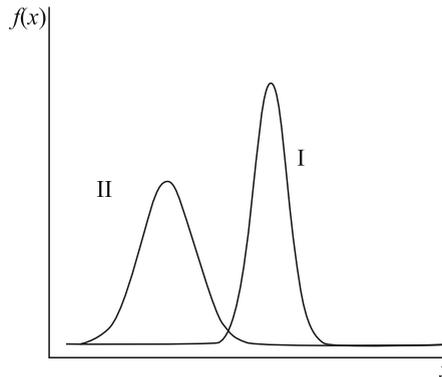


Рис. 2.4. Неудобство дисперсии как меры риска.

Несложно заметить, что многие из вышеперечисленных мер риска основаны на первом и втором моментах распределения случайной величины. Подобным образом для анализа риска можно использовать и моменты более высоких порядков, в частности эксцесс и асимметрию распределения.

Кроме того, избегать недостатков, присущих тем или иным мерам, можно с помощью комбинирования нескольких мер риска. Так, в страховании используется мера риска вида  $E[X] + \lambda D[X]$ . Иногда в качестве меры риска может применяться коэффициент вариации  $\frac{\sigma(X)}{E[X]}$ . Безразмерность последнего позволяет в случае необходимости сравнивать между собой риски разной природы.

Важнейшей для современного риск-менеджмента группой мер риска являются меры, так или иначе связанные с *квантилью распределения* ущерба. Строго определить квантиль можно следующим образом:

$$x_\alpha = \inf \{x : F_X(x) \geq \alpha\}. \quad (2.3)$$

При этом в случае строго возрастающей на своем носителе функции распределения определение упрощается до

$$x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha). \quad (2.4)$$

Простейшая квантильная мера — *рисковый капитал*  $VaR_\alpha(X)$ , который по сути и является квантилью заданного уровня  $\alpha$ . Интерпретация *рискового капитала* достаточно проста<sup>9</sup>: *рисковый капитал* определяет ущерб, который не будет превышен с вероятностью  $\alpha$ . Если в качестве значения параметра  $\alpha$  выбрать 95%, то *рисковый капитал* будет показывать величину ущерба, который не будет превышен в среднем в 95 случаях из 100.

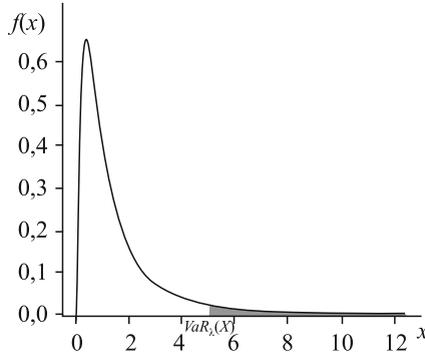


Рис. 2.5. 95%-ный *рисковый капитал* стандартного логнормального распределения.

Примечание: площадь правого хвоста равна 0,05.

На основе *рискового капитала* можно построить более сложную меру риска, учитывающую не только границу «хвоста» распределения, но и его вес. Подобный показатель называется «*условный рисковый капитал*» (Conditional Value-at-Risk, сокращенно CVaR, или Tail Value-at-Risk, сокращенно TVaR) и определяется как

$$CVaR_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)]. \quad (2.5)$$

Графически такой показатель изображен на рис. 2.5.

Более подробно *рисковый капитал* и *условный рисковый капитал*, их свойства и методики оценки будут обсуждаться далее в п. 2.5–2.7.

<sup>9</sup>В различной литературе можно встретить разные определения *рискового капитала* в зависимости от того, какой величиной описывается ущерб — положительной или отрицательной.

### 2.3.4. Построение меры риска в зависимости от требуемых свойств

Большинство из приведенных мер риска должны быть хорошо знакомы читателю по разным математическим приложениям. Упоминание их в контексте риск-менеджмента лишь обращает внимание на особенности этих характеристик в контексте задач, стоящих перед исследователем. При этом важно отметить, что список возможных мер риска ими не ограничивается. Более того, упомянутые ранее меры свидетельствуют о том, что в зависимости от того, на какие особенности риска следует в первую очередь обратить внимание, риск-менеджер может использовать любую из них или даже строить новую меру самостоятельно. Так, если риск-менеджера интересуют прежде всего небольшие отклонения от математического ожидания, в то время как серьезные отклонения он предпочтет игнорировать, можно применить меру риска  $E[R(X)]$ , где

$$R(x) = \begin{cases} (x - a)^2, & a - \sqrt{c} < x < a + \sqrt{c}, \\ c, & x < a - \sqrt{c}, x \geq a + \sqrt{c}. \end{cases}$$

В этом случае большие отклонения будут подменяться некоторой заранее выбранной величиной  $c$  и соответственно не окажут серьезного влияния на характеристику риска.

Подобным образом можно рассматривать только отклонения лишь в одну сторону или с разными весами учитывать отклонения ущерба от некоторой величины  $a$  в большую и меньшую стороны. При этом в качестве величины  $a$  необязательно использовать математическое ожидание. Читателю предлагается самостоятельно построить подходящие для этих случаев функции  $R(X)$ .

В результате, несмотря на то что в ряде сфер (например, банковской и страховой) надзорные органы часто достаточно тщательно регламентируют процедуру контроля риска, для внутренних целей допустимо использование многих других мер риска, при условии, конечно, что риск-менеджер способен мотивировать свой выбор.

## 2.4. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЫБОРУ МЕРЫ РИСКА

### 2.4.1. Общий обзор возможных свойств меры риска

Обобщая результаты предыдущих глав, можно еще раз выделить два принципиально разных подхода к анализу риска.

Первый подход, обсуждавшийся в п. 2.2 и базирующийся на теориях ожидаемой полезности, основан на том, что риск измеряется в соответствии с субъективными представлениями аналитика о рискованной ситуации. Важным следствием подобного подхода является сохранение порядка: чем менее привлекательна рискованная ситуация, тем больше будет значение соответствующего детерминированного показате-

ля<sup>10</sup>. Кроме того, понятие достоверного эквивалента хорошо согласуется с понятием справедливой премии за риск, используемой в актуарном анализе. Данный подход является в некотором смысле «первичным», так как отталкивается от собственных субъективных представлений аналитика о неопределенности. К сожалению, применение теории полезности требует выполнения ряда предположений о предпочтениях агента, которые зачастую не соответствуют действительности. Более того, можно привести примеры, которые в принципе ставят под сомнение корректность предположения о существовании строгого порядка предпочтений на множестве случайных величин [Schoemaker, 1982].

Второй подход, обсуждавшийся в п. 2.3, напротив, является «вторичным», так как здесь сначала формулируются пожелания к мере риска, а уже затем подбирается характеристика, соответствующая выбранным пожеланиям.

При этом результат обоих подходов один и тот же: каждой случайной величине сопоставляется всего одно число (очень редко — несколько чисел), квантифицирующее ее риск. Отметим снова, что подмена случайной величины всего одним числом приводит к потере информации о структуре случайной величины и ее индивидуальных особенностях. Тем важнее становится грамотный выбор способа измерения риска.

Прежде чем обсуждать возможные пожелания относительно способа измерения риска, дадим строгое определение меры риска.

Пусть задано пространство элементарных событий  $\Omega$  и множество случайных величин (возможных сценариев, решений, позиций, портфелей)  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , принадлежащих некоторому классу ограниченных случайных величин  $\mathfrak{X}$ . Предположим, что случайные величины определяют возможные ущербы и доходы, при этом для удобства будем считать ущербы положительными числами, а доходы — отрицательными. В таком случае мерой риска будем называть отображение

$$\rho : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Таким образом, мера риска есть функционал из множества случайных величин на числовую ось. В рамках теории ожидаемой полезности мера риска может выглядеть как  $\rho(X) = -E[u(X)]$ .

Приведем пример ряда свойств, которые в силу тех или иных причин могут быть важны при выборе меры риска. При этом будем исходить из предположения, что мера риска используется, в частности, для анализа достаточности собственного капитала компании.

Предположим, что мера риска обладает свойством *инвариантности константе* (constancy), если для любой константы  $c$  выполняется соотношение  $\rho(c) = c$ .

В самом деле, информация о детерминированном ущербе величиной  $c$  должна приводить к необходимости резервировать для покрытия возможных ущербов как раз величину  $c$ . Верно и противоположное: если предполагается получение детерминированного дохода величиной  $c$ , то компания обладает свободными средствами такой же величины.

<sup>10</sup>В случае, если ущерб воспринимается как отрицательная величина, то значение детерминированного эквивалента менее привлекательной рискованной ситуации будет меньше (т. е. «более отрицательным»).

Мера риска обладает свойством *ограниченности сверху* (non-negative loading) в случае, если выполняется соотношение

$$\rho(X) \leq \max(X).$$

Действительно, представляется странным резервировать капитал, превосходящий значение максимального ущерба.

Мера риска обладает свойством *инвариантности к сдвигу* (translation equivalence), если для любой константы  $c$  выполняется соотношение

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c. \quad (2.7)$$

Свойство инвариантности к сдвигу естественным образом обобщает свойство инвариантности константе: изменение потенциального ущерба на фиксированную величину должно приводить к изменению зарезервированного капитала на ту же величину.

Мера риска обладает свойством *монотонности* (monotonicity), если для любых  $X$  и  $Y$ , таких что  $P[X \leq Y] = 1$  верно соотношение

$$\rho(X) \leq \rho(Y). \quad (2.8)$$

Очевидно, что если размеры ущерба в результате реализации одной случайной величины всегда меньше, чем в результате реализации другой, то рисковая характеристика первой случайной величины будет меньше, и соответственно первая случайная величина будет предпочтительнее.

Мера риска обладает свойством *положительной однородности* (positive homogeneity), если для любой положительной константы  $\lambda$  выполняется соотношение

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X). \quad (2.9)$$

Выполнение данного свойства приводит к двум важным следствиям. Во-первых, положительно однородная мера риска не зависит от используемой валюты. Во-вторых, индивидуальные риски легко агрегируются, для целого значения константы  $\lambda$  соотношение (2.9) можно переписать в виде

$$\rho(X + X + \dots + X) = \rho(X) + \rho(X) + \dots + \rho(X). \quad (2.10)$$

Таким образом, например, удваивание позиции (портфеля) приводит к удваиванию рискованной характеристики и соответственно к удваиванию необходимого резерва капитала.

Мера риска обладает свойством *субаддитивности* (subadditivity), если для любых  $X$  и  $Y$  выполняется соотношение

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y). \quad (2.11)$$

Свойство субаддитивности представляется одним из наиболее важных. Наличие у меры риска этого свойства отражает следующий принцип: агрегация рисков воедино не должна увеличивать общий риск; объединенных резервных капиталов для двух

различных рисков должно быть достаточно для работы с рисками совместно. В выполнении подобного свойства заинтересованы, в частности, регуляторы в банковской сфере. В случае, если мера не субаддитивна, то иногда банку может быть интереснее создать два отдельных юридических лица и резервировать капитал под каждое из них отдельно. Кроме того, выполнение субаддитивности упрощает построение консервативной оценки риска. Когда анализ общего распределения ущерба представляется сложной задачей, аналитик может просто сложить меры риска отдельных элементов портфеля. Итоговая характеристика риска (и соответственно требование к собственному капиталу) будет больше, чем могла бы была быть, однако с точки зрения регулятора такой результат более приемлем, чем обратный.

Важно отметить, что некоторые из вышеперечисленных свойств не так однозначны, как может показаться. Так, например, риски, связанные с малоликвидным активом, скорее всего, не будут положительно однородными, так как в случае падения его цены избавиться от больших объемов может быть сложнее, чем от небольших.

#### 2.4.2. Формальное обоснование использования когерентных мер риска

Несмотря на то что все потенциальные свойства мер риска, упомянутые в предыдущей части, выглядят в той или иной степени правдоподобно, строгого обоснования необходимости их использования дано не было. Естественность мер подтверждается лишь рядом неформальных комментариев.

Первая формальная, математически обоснованная строгая теория финансового риска была сформулирована Артцнером и Дельбаеном [Artzner, Delbaen, 1995].

В основе теории лежит простой, но важный принцип: мера риска показывает, принадлежит ли случайная величина (портфель, позиция) некоторому подмножеству приемлемых рисков, где подмножество приемлемых рисков определяется регулятором. Государственный регулятор является важным элементом финансовой системы, так как в чрезвычайных случаях государству, возможно, придется вмешиваться в финансовые процессы и оказывать банкам помощь. При этом именно регулятор регламентирует взаимоотношения между государством и финансовыми институтами.

Опишем основные объекты, позволяющие приблизиться к пониманию строгой теории.

Назовем *приемлемым множеством*  $\mathcal{A}$  (acceptance set) некоторое подмножество множества ограниченных случайных величин  $\mathfrak{X}$ . Кроме того, обозначим все неположительнозначные элементы  $\mathfrak{X}$  как  $L_-$ , а все положительнозначные элементы как  $L_{++}$ . Потребуем также, чтобы приемлемое множество удовлетворяла ряду предпосылок:

1.  $\mathcal{A}$  содержит  $L_-$ .
2.  $\mathcal{A}$  не пересекается с  $L_{++}$ .
3.  $\mathcal{A}$  выпукло.
4.  $\mathcal{A}$  положительно однородный конус<sup>11</sup>.

<sup>11</sup>Подразумевается, что если  $X \in \mathcal{A}$ , то и  $\lambda X \in \mathcal{A}$  для любого положительного  $\lambda$ .

Разумность первых двух предпосылок сложно подвергнуть сомнению: неположительнозначные случайные величины не приводят к убыткам и, следовательно, приемлемы, положительнозначные случайные величины приводят только к убыткам и соответственно неприемлемы (или требуют резервирования капитала). Третья предпосылка возвращает нас к понятию несклонности к риску, упоминавшемуся в п. 2.2.2: если две случайные величины попадают в приемлемое множество, то и их линейная комбинация тоже попадает в приемлемое множество. Четвертая предпосылка менее очевидна, однако её выполнение гарантирует независимость приемлемого множества от используемой валюты.

Приемлемое множество, в свою очередь, естественным образом порождает меру риска; будем называть *мерой риска, порожденной множеством  $\mathcal{A}$* , меру, задаваемую следующим образом:

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \sup\{m \mid X - m \in \mathcal{A}\}.$$

Отметим, что ограниченность случайных величин, заявленная выше, гарантирует конечность подобной меры.

Таким образом, мера риска определяет, сколько средств нужно добавить к финансовой позиции, чтобы удовлетворить требованиям регулятора. Иначе: на какое фиксированное число нужно изменить случайную величину (позицию, портфель), чтобы она стала приемлемой. В некотором смысле можно сказать, что подобным образом построенная мера риска определяет, на каком «расстоянии» от приемлемого множества находится случайная величина. Верно и обратное: если некоторая случайная величина и так входит в множество  $\mathcal{A}$ , мера риска определяет, каким количеством капитала компания может свободно распоряжаться.

В результате мера зависит не от заранее выбранных свойств, а от абстрактных представлений о свойствах некоторой группы таких случайных величин, которые признаются «не слишком рискованными», т. е. приемлемыми или допустимыми.

Более того, верным является утверждение о том, что если некоторое множество  $\mathcal{A}$  удовлетворяет предпосылкам (1)–(4), то мера, порожденная множеством  $\mathcal{A}$ , будет обладать свойствами (2.7)–(2.11). Доказательство этого и последующих утверждений можно найти в [Föllmer, Schied, 2004].

Для мер, удовлетворяющих свойствам (2.7)–(2.11), есть специальное название: их называют *когерентными мерами риска*.

Связь меры и приемлемых множеств можно рассмотреть и с обратной стороны: назовем множество  $\mathcal{A}_{\rho} = \{X \in \mathcal{X} : \rho(X) \leq 0\}$  *приемлемым множеством, порожденным мерой  $\rho$* . Здесь приемлемое множество состоит из тех случайных величин, мера риска по которым отрицательна, т. е. дополнительное резервирование капитала не требуется.

Оказывается, что приемлемое множество, порожденное когерентной мерой риска, удовлетворяет предпосылкам (1)–(4).

Таким образом, когерентные меры риска и приемлемые множества, удовлетворяющие предпосылкам (1)–(4), определяют друг друга. С учетом этого кажется естественным, что  $\rho = \rho_{\mathcal{A}_{\rho}}$ ,  $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$ , где  $\overline{\mathcal{A}}$  — замыкание множества  $\mathcal{A}$ .

Требования (1)–(4) к приемлемым множествам не являются жестким постулатом. Выше уже упоминалось, что положительная однородность не всегда является

корректным требованием при анализе малоликвидных активов. Соответственно в некоторых приложениях может быть актуально использование меньшего количества предпосылок.

Так, если приемлемое множество удовлетворяет только предпосылкам (1)–(3), то подобное множество порождает меру, удовлетворяющую свойствам (2.7), (2.8) и свойству выпуклости:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Для подобных мер также существует отдельное название: такие меры называют *выпуклыми мерами риска*. Аналогично когерентным мерам выпуклые меры, в свою очередь, порождают приемлемые множества, удовлетворяющие предпосылкам (1)–(3).

Подобный аксиоматический подход к построению мер риска сочетает в себе идеи обоих подходов, упомянутых в начале главы: с одной стороны, мера порождается не априори выбранными свойствами, но общими абстрактными представлениями о приемлемости тех или иных рискованных ситуаций. С другой стороны, мера не требует введения отношения порядка на множестве случайных величин, т. е. не зависит от сравнительных предпочтений субъекта. Более того, когерентные меры риска не просто квантифицируют риск, но и естественным образом порождают порядок на множестве случайных величин.

### 2.4.3. Примеры когерентных мер риска

К сожалению, многие популярные меры риска не удовлетворяют свойствам когерентности. Так, в общем случае дисперсия не удовлетворяет ни одному из свойств (2.7)–(2.11). Стандартное отклонение удовлетворяет свойству субаддитивности и положительной однородности, однако не удовлетворяет свойству инвариантности к сдвигу, что также не позволяет использовать его для определения достаточности резервов.

Простейшими примерами когерентных мер являются максимальное значение и математическое ожидание. Минимальную сложность в формальной проверке их когерентности представляет разве что проверка монотонности для математического ожидания: пусть для двух случайных величин верно

$$P[X \leq Y] = 1 \quad (\Rightarrow P[X - Y \leq 0] = 1).$$

Обозначим  $Z = X - Y$ . Тогда с вероятностью 1 случайная величина  $Z$  принимает только отрицательные значения или ноль. Следовательно,

$$E[Z] \leq 0 \Rightarrow E[X - Y] \leq 0; \quad E[X] \leq E[Y].$$

Большой интерес представляет анализ когерентности квантильных мер риска. В общем случае рискованный капитал, вообще говоря, не удовлетворяет свойству субаддитивности. Напротив, условный рискованный капитал удовлетворяет всем требуемым свойствам.

#### 2.4.4. Когерентные меры риска как супремум математических ожиданий

Когерентные меры риска допускают следующее важное представление. Обозначим  $\mathcal{P}$  — множество конечноаддитивных мер на пространстве с сигма-алгеброй  $(\Omega, \mathcal{F})$ , кроме того, обозначим  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{X : E_{\mathcal{Q}}(|X|) < \infty \text{ для всех } \mathcal{Q} \in \mathcal{P}\}$ . Наконец, обозначим  $\rho_{\mathcal{P}}(X) = \sup \{E_{\mathcal{Q}}(X) : \mathcal{Q} \in \mathcal{P}\}$ . Тогда для любого семейства  $\mathcal{P}$   $\rho_{\mathcal{P}}$  будет когерентной мерой на  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ .

Сильно упрощая, можно предложить следующую интерпретацию данного свойства. Пусть исследователю неизвестна истинная вероятностная мера на пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$ , а известно лишь их семейство  $\mathcal{P}$ . В таком случае мера риска, построенная с помощью наихудшего математического ожидания,  $(\sup \{E_{\mathcal{Q}}(X) : \mathcal{Q} \in \mathcal{P}\})$ , будет когерентной. Верно и обратное. Для конечного пространства элементарных событий  $\Omega$  и семейства случайных величин  $\mathcal{M}$  существует набор вероятностных мер  $\mathcal{P}$  таких, что  $\rho = \rho_{\mathcal{P}}$ . Более подробно о подобных представлениях можно прочитать, например, в [Föllmer, Schied, 2004].

### 2.5. РИСКОВЫЙ КАПИТАЛ

#### 2.5.1. Место рискового капитала в современном риск-менеджменте

Повышенное внимание к рисковому капиталу связано прежде всего с важной ролью, которую *VaR* играет в современном банковском регулировании и риск-менеджменте вообще. Регламентация взаимоотношений банков и государства во многом определяется рекомендациями Базельского комитета по банковскому надзору. Базельские соглашения, описывающие требования к регулированию банковской сферы, стали по существу отраслевыми стандартами, несмотря на то что Базельский комитет — негосударственный орган и его предложения формально не являются обязательными к исполнению. Тем не менее многие страны присоединяются к соглашению, так как несоблюдение Базельских рекомендаций может помешать полноценному функционированию банков на международных рынках. Первые редакции Базельских соглашений акцентировали внимание в первую очередь на анализе рыночных рисков, т. е. рисков потерь, вызванных колебаниями рыночной стоимости активов. В следующих редакциях содержатся правила контроля кредитного и операционного риска. Более того, некоторые Базельские принципы в дальнейшем были распространены и на некоторые небанковские финансовые институты. Так, принципы контроля достаточности капитала нашли отражение в организации страхового надзора.

В 1993 г. Базельский комитет предложил стандартизированный подход к моделированию риска. Позже, в 1995 г., банкам было предложено при желании создавать свои собственные, внутренние модели рыночного риска, однако эти модели должны были удовлетворять ряду требований. Одним из них было использование рискового капитала, что, в частности, и сделало *VaR* одним из важнейших показателей, применяемых в современном риск-менеджменте.

### 2.5.2. Рисковый капитал для нормально распределенных случайных величин

Ранее в п. 2.3.3 было дано нестрогое определение понятия квантили распределения. Дадим строгое определение рискового капитала: *рисковым капиталом* (Value-at-risk, сокращенно VaR) порядка  $\alpha$  случайной величины  $X$ , определяющей ущерб (на конец некоторого периода), назовем квантиль порядка  $\alpha$  случайной величины  $X$ . Из данного определения в том числе следует, что в случае известного строго возрастающего распределения  $X$  для вычисления квантили достаточно найти  $F_X^{-1}(\alpha)$ .

Интерпретация определения также очень проста. Если 99%-ный рисковый капитал по некоторому портфелю рисков равен 1 млн ден. ед., то вероятность того, что ущерб превысит 1 млн ден. ед., равна 1%. Так, для нормально распределенного ущерба рисковый капитал легко выражается через математическое ожидание ( $\mu$ ) и стандартное отклонение ( $\sigma$ ) случайной величины. Обозначим  $z_\alpha$  квантиль порядка  $\alpha$  стандартного нормального распределения. Тогда  $P[(X - \mu)/\sigma < z_\alpha] = \alpha$  или, что то же самое,  $P[X < \mu + z_\alpha\sigma] = \alpha$ .

Таким образом, для нормально распределенного ущерба имеет место  $VaR_\alpha(X) = \mu + z_\alpha\sigma$ .

Подобным образом можно вычислять рисковый капитал и для других распределений (с учетом их свойств).

### 2.5.3. Параметры рискового капитала

Из определения рискового капитала следует, что прежде чем приступить к его вычислению, требуется установить его порядок  $\alpha$ . Однако важно отметить, что на самом деле рисковый капитал определяется не только величиной  $\alpha$ , но и временным горизонтом  $t$ , по отношению к которому рассматривается ущерб. В зависимости от целей можно рассчитывать  $VaR$  для одного дня (т.е. оценивать, в каких пределах «скорее всего» будет находиться ущерб по истечении дня), недели, двух недель и т.д. При этом выбор значений  $\alpha$  и  $t$  осложняется особенностями поведения рискового капитала в разных ситуациях.

С одной стороны, использование больших значений  $\alpha$  приведет к тому, что уровень защищенности компании от ущербов будет крайне высоким. С другой стороны, подобный выбор может вызвать необходимость замораживания излишне больших средств для защиты от рисков, что осложнит деятельность компании. Кроме того, квантили высокого порядка труднее оценивать статистически, так как чем большим будет выбрано значение  $\alpha$ , тем сложнее получить надежную оценку. В самом деле, если использовать 99,99% рисковый капитал, то по итогам 10 000 наблюдений выход за пределы рискового капитала в среднем наблюдается лишь раз. И именно это превышение ущерба будет во многом определять оценку рискового капитала. Наконец, незначительные изменения  $\alpha$  могут приводить к серьезным изменениям рискового капитала. Так, для нормального распределения значения квантилей высокого порядка выглядят следующим образом:  $z_{95\%} = 1,64$ ;  $z_{99\%} = 2,33$ ;  $z_{99,5\%} = 2,58$ ;  $z_{99,9\%} = 3,09$ ;  $z_{99,99\%} = 3,72$ . Таким образом, увеличение  $\alpha$  с 99,5 до 99,9% приведет к увеличению рискового капитала на 20%. В результате при использовании 99,5%

рискового капитала за 1000 периодов будет наблюдаться в среднем пять превышений порога, а при использовании 99,9% рисккового капитала — одно превышение. Даже если рассматриваются периоды продолжительностью всего 1 день, то 1000 рабочих дней составят почти 5 лет, что является, возможно, слишком большим сроком, чтобы с уверенностью говорить о постоянстве макроэкономических условий и законодательной базы.

Выбор временного горизонта  $t$  также неоднозначен, так как предполагается, что в течение периода  $t$  структура портфеля рисков статична и не меняется. При этом увеличение горизонта часто приводит к росту рисккового капитала. Короткие горизонты удобно применять для контроля отдельных сотрудников (трейдеров). Для компании в целом логичнее использовать более длительные временные горизонты, чтобы учесть, например, потенциально большой промежуток времени, требуемый для закрытия малоликвидных позиций.

В соответствии с рекомендациями Базельского комитета предлагается использование десятидневного горизонта и 99%-ного уровня доверия, но для своих внутренних целей банки могут применять и другие значения параметров.

#### 2.5.4. Свойства рисккового капитала

Несложно проверить, что рискковый капитал удовлетворяет свойствам положительной однородности, инвариантности к сдвигу и монотонности, т. е. для  $VaR_\alpha(X)$  верно:

1.  $VaR_\alpha(X + c) = VaR_\alpha(X) + c$ .
2.  $VaR_\alpha(\lambda X) = \lambda VaR_\alpha(X)$ .
3.  $P[X \leq Y] = 1 \Rightarrow VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$ .

Первое свойство доказывается очевидно:

$$P[X < VaR_\alpha(X)] = \alpha = P[X + c < VaR_\alpha(X) + c].$$

Иными словами,  $VaR_\alpha(X) + c$  является квантилью порядка  $\alpha$  для случайной величины  $X + c$ .

Второе свойство доказывается аналогично.

Третье свойство вытекает из следующего соотношения:

$$P[X \leq Y] = 1 \Rightarrow F_X(x) \geq F_Y(x) \Rightarrow VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y),$$

так как функция распределения возрастает.

#### 2.5.5. Рискковый капитал и субаддитивность

Одним из главных недостатков рисккового капитала является невыполнение для него свойства субаддитивности в общем случае. Приведем пример, демонстрирующий, что использование рисккового капитала может привести к неоднозначным последствиям.

Рассмотрим инвестора с капиталом 300 ден. ед., имеющего возможность инвестировать в три разных долговых обязательства, каждое из которых стоит

100 ден. ед. Каждое долговое обязательство допускает дефолт с вероятностью 2%, обязательства допускают дефолт независимо друг от друга. Если дефолта не произошло, то на каждом обязательстве инвестор зарабатывает 10 ден. ед. Пусть инвестор для принятия решения использует 95%-ный рисковый капитал. Здравый смысл подсказывает, что инвестор, желающий диверсифицировать риски, должен приобрести по одному обязательству каждого вида. Подобный портфель из трех разных обязательств может приводить к следующим результатам: с вероятностью 94,1% инвестор заработает 30 ден. ед.; с вероятностью 5,8% — 20 ден. ед., но потеряет 100 ден. ед., т. е. баланс будет  $-80$  ден. ед. и т. д. С учетом того, что ущербы принимаются как положительные значения, а доходы — как отрицательные, 95%-ный рисковый капитал будет равен 80 у. е., так как с вероятностью 95% (и даже больше) ущерб не превысит 80. В то же время если инвестор купит три долговых обязательства одного вида, то с вероятностью 98% он заработает 30 ден. ед., а с вероятностью 2% — потеряет 300 ден. ед. При этом 95%-ный рисковый капитал будет равен 30. Таким образом, с точки зрения рискового капитала портфель из трех одинаковых долговых обязательств будет менее рисковым, чем из трех разных, и инвестор будет концентрироваться всего на одном продукте.

Формально этот результат выглядит следующим образом:

$$80 = VaR_{95\%}(X + Y + Z) \geq VaR_{95\%}(X) + VaR_{95\%}(Y) + VaR_{95\%}(Z) = -30.$$

Отчасти этот недостаток рискового капитала нивелируется тем, что на некотором достаточно широком множестве случайных величин свойство субаддитивности всё-таки выполняется. Так, если  $X, Y$  — нормально распределенные случайные величины с математическими ожиданиями  $\mu_1, \mu_2$  и стандартными отклонениями  $\sigma_1, \sigma_2$ , при этом коэффициент корреляции случайных величин равен  $\rho$ , то свойство (2.11) будет выполняться. Тогда  $VaR_\alpha(X + Y) \leq VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$ , если  $\alpha > 0.5$ .

Доказательство этого факта достаточно элементарно. Если

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2), \quad \rho(X, Y) = \rho,$$

то

$$X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X + Y) &= \mu_1 + \mu_2 + z_\alpha \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2} \leq \\ &\leq \mu_1 + \mu_2 + z_\alpha \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2} = \mu_1 + \mu_2 + z_\alpha \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \\ &= \mu_1 + z_\alpha \sigma_1 + \mu_2 + z_\alpha \sigma_2 = VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y). \end{aligned}$$

Конечно, класс нормальных распределений недостаточен для описания распределений ущербов, встречающихся при анализе риска, однако теорема верна и для более широкого класса распределений. Так, рисковый капитал будет субаддитивен и на классе эллиптически распределенных случайных величин. Несмотря на то что

распределения, актуальные в рамках современного риск-менеджмента, не исчерпываются эллиптическими, этот класс достаточно широк.

### 2.5.6. Рискковый капитал в актуарных приложениях

Рискковый капитал находит серьезное применение и с точки зрения страховых организаций. Клиент страховой организации никогда не купит полис, стоимость которого превышает или равна максимально возможному ущербу. В результате всегда остается вероятность, что страховой организации не хватит средств для покрытия всех страховых выплат. Законы больших чисел вместе с инвестиционной деятельностью страховых организаций снижают эту вероятность, однако в любом случае возможность негативного сценария сохраняется. Страховой регулятор определяет требования к капиталу, обеспечивающему платежеспособность компании, с помощью характеристики  $\rho(X)$ , смысл которой очень близок к смыслу меры риска. При этом регулятор заинтересован в том, чтобы потенциальный ущерб, превышающий  $\rho(X)$ , был как можно меньше. Измерить этот ущерб можно с помощью величины  $E[(X - \rho(X))_+]$  (по смыслу она похожа на среднюю разницу между условным рискковым капиталом и рискковым капиталом). Ясно, что чем больше  $\rho(X)$ , тем меньше  $E[(X - \rho(X))_+]$ . Тем не менее резервирование большого капитала для покрытия возможных ущербов сильно сковывает деятельность страховой организации. Чтобы сбалансировать эти соображения, регулятор может определять меру  $\rho(X)$  так, чтобы минимизировать значение выражения

$$E[(X - \rho(X))_+] + (1 - \alpha)\rho(X), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Параметр  $\alpha$  здесь определяет, насколько сильно регулятор учитывает желания участников рынка не связывать слишком много средств. Так, если  $\alpha=1$ , то интересы страховой компании не будут учитываться вообще и будет выполняться соотношение  $\rho(X) = \max(X)$ .

Оказывается, что именно рискковый капитал является решением данной задачи, т. е.

$$VaR_\alpha(X) = \min_{\rho(X)} (E[(X - \rho(X))_+] + (1 - \alpha)\rho(X)).$$

Данная теорема обосновывает корректность использования рисккового капитала для контроля платежеспособности страховой организации.

### 2.5.7. Недостатки рисккового капитала

Рискковый капитал как мера риска обладает рядом недостатков. Некоторые из них уже отчасти упоминались в предыдущих частях.

1. Использование рисккового капитала предполагает статичность портфеля рисков в течение некоторого фиксированного периода, соответственно информация об изменениях внутри периодов игнорируется.

2. Рискковый капитал не субаддитивен в общем случае, что может приводить к неоднозначным на первый взгляд решениям (см. пример из п. 2.4.4).

3. Рискový капитал не дает никакой информации об особенностях случайной величины справа от него (на хвосте распределения). Между тем именно ущербы, превосходящие рискový капитал, приводят к наиболее серьезным проблемам. Поэтому полностью игнорировать правый хвост распределения представляется не очень разумным (рис. 2.6).

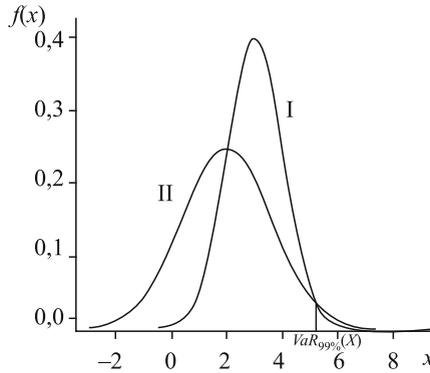


Рис. 2.6. Плотности случайных величин с одинаковым 95%-ным рискovým капиталом, но с разным поведением хвоста.

4. Рискový капитал приводит к возникновению модельного риска, т.е. риска возникновения ошибок из-за неправильного выбора модели. Впрочем, подобная проблема возникает при применении практически любой меры риска.

Некоторые из этих недостатков можно устранить, используя другие, более сложные меры риска. К таким относится, например, условный рискový капитал, который более подробно обсуждается в п. 2.7.

### 2.5.8. Использование рискového капитала для определения требований к капиталу

Правило определения величины необходимого собственного капитала, используемое Базельским комитетом выглядит следующим образом:

$$RC = \max \left( VaR_{99\%}^{t,10}; \frac{k}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{99\%}^{t-i+1,10} \right) + C_{SR},$$

где  $VaR_{99\%}^{j,10}$  — десятидневный рискový капитал 99%-ного уровня, посчитанный в день  $j$ ;  $t$  — сегодняшний день;  $k$  — стрессовый фактор, принимающий значения от 3 до 4 и зависящий от качества внутренней модели банка, которая используется для оценки риска. Значение фактора будет большим, если фактические убытки компании превышают рискový капитал чаще, чем должно было быть исходя из 99%-ного

уровня, т. е. могут быть подозрения в некорректности математической модели, используемой компанией.  $C_{SR}$  определяет специфический риск, связанный с движением рыночных цен, вызванным изменением глобальных рыночных факторов.

Как видно из формулы, расчеты практически целиком связаны со значениями рискованного капитала.

## 2.6. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РИСКОВОГО КАПИТАЛА

### 2.6.1. Метод исторической имитации

Простейшим способом оценки рискованного капитала является использование исторической имитации. Этот метод не основан на каких-либо предположениях ни относительно распределения изучаемой случайной величины, ни относительно каких-то её отдельных свойств. Оценка происходит на базе эмпирического распределения, т. е., по сути, на основе упорядоченных наблюдений за портфелем в предыдущие периоды.

Пусть есть 1000 наблюдений за поведением портфеля на протяжении некоторого времени. Для оценки 99%-ного рискованного капитала достаточно упорядочить имеющиеся наблюдения по порядку и выбрать 991-е. Оно и будет оценкой 99%  $VaR$ . Более строго: пусть есть выборка  $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n$ . Эмпирической функцией распределения будем называть  $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{\hat{X}_i < x\}}$ , где  $I_{\{\hat{X}_i < x\}}$  — индикатор события  $\{\hat{X}_i < x\}$ . Далее для оценки рискованного капитала достаточно вычислить квантиль соответствующего порядка для построенного эмпирического распределения. Подобная оценка эмпирического распределения обладает рядом важных свойств: в частности, данная оценка будет состоятельной, то есть эмпирическая функция распределения будет сходиться к истинной функции распределения с ростом числа наблюдений.

На практике для оценки квантили достаточно упорядочить имеющуюся выборку по возрастанию  $\hat{X}_{(1)}, \hat{X}_{(2)}, \dots, \hat{X}_{(n)}$ , где  $\hat{X}_{(i)}$  —  $i$ -е по порядку наблюдение и выбрать элемент с номером  $\hat{X}_{(n\alpha)}$ , где  $[z]$  — целая часть числа.

При всей простоте используемого метода для получения надежной оценки у аналитика должна быть возможность набрать достаточное количество релевантных данных. Очевидно, что подобная оценка при анализе 99%-ного  $VaR$  при наличии лишь 100 наблюдений вряд ли будет качественной, так как она зависит всего лишь от одного, наибольшего значения из выборки. Соответственно для хорошей оценки хвоста распределения требуется достаточно много данных. При этом для корректности выводов требуется, чтобы в течение периода наблюдений комплекс внешних условий, влияющих на процессы риска, должен оставаться более или менее постоянным. Данное предположение может быть очень сильным, так как, например, 1000 наблюдений с горизонтом 1 день будут охватывать почти 5 лет, что является достаточно большим сроком.

Дополнительную сложность создает и постоянное изменение портфеля рисков. Впрочем, эта проблема обходится с помощью использования гипотетического портфеля и анализа предыдущих значений ущерба на основе не фактических значений

ущерба за прошлые периоды, но значений ущерба для портфеля, совпадающего с текущим.

Возможным решением ряда вышеперечисленных проблем является использование специфических техник, объединяемых под названием «теория экстремальных значений» (Extreme Value Theory), описание которой можно найти в главе 7.

### 2.6.2. Метод оценки рискового капитала на основе априорных распределений

Оценка рискового капитала на основе априорных распределений достаточно часто встречается в теоретической литературе, где нет необходимости обосновывать тип используемого распределения. Так, центральные предельные теоремы при анализе массовых рисков позволяют использовать нормальное распределение (возможно, как аппроксимацию), для которого рисковый капитал вычисляется сравнительно легко. Достаточно лишь оценить математическое ожидание и стандартное отклонение нормального распределения и применить формулу

$$VaR_\alpha(X) = \bar{X} + z_\alpha S,$$

где  $z_\alpha$  — квантиль стандартного нормального распределения,  $\bar{X}$  — оценка математического ожидания, а  $S$  — оценка стандартного отклонения. Конечно, статистический характер данного подхода требует контроля надежности результата, что можно осуществить с использованием, например, доверительных интервалов для квантилей.

К сожалению, информация о типе распределений, как правило, отсутствует на практике, что сильно ограничивает применимость подобного метода.

### 2.6.3. Метод параметрического оценивания рискового капитала

Проблема незнания априорного распределения решается с помощью предварительной подгонки некоторого подходящего теоретического распределения на основе статистических данных. Такой метод предполагает сначала выбор наиболее подходящего класса распределений, соответствующего выборочным наблюдениям, затем оценку параметров выбранного распределения и уже затем вычисление рискового капитала на основе полученного распределения. Метод параметрического оценивания стоит признать наиболее правильным с теоретической точки зрения, однако, как и для метода исторической имитации, корректность зависит от объема доступной выборки. Важно отметить, что при выборе метода подгонки теоретического распределения особое внимание стоит обратить на качество оценки хвоста распределения, так как именно правый хвост распределения ущерба является определяющим для анализа рискового капитала.

### 2.6.4. Оценка рискового капитала с помощью метода Монте-Карло

Под методами Монте-Карло обычно подразумевают класс методов получения оценок распределения с помощью имитации анализируемой случайной величины. На первом этапе на основе имеющихся наблюдений аналитик предполагает вид тео-

ретического распределения, затем оцениваются параметры теоретического распределения. На третьем этапе аналитик «разыгрывает» случайную величину с данной функцией распределения, причем как правило число сгенерированных наблюдений сильно превосходит число выборочных наблюдений. Большое число таких наблюдений позволяет достаточно хорошо оценить рисковый капитал с помощью анализа выборочных квантилей и избавляет от необходимости проведения теоретических расчетов для его вычисления. К сожалению, из описания алгоритма следует, что метод Монте-Карло не избавляет исследователя от необходимости подбирать теоретическое распределение.

## 2.7. УСЛОВНЫЙ РИСКОВЫЙ КАПИТАЛ

### 2.7.1. Понятие рискового капитала

Выше уже отмечалось, что рисковый капитал лишь указывает на такую границу ущерба, что «хуже этой границы с высокой вероятностью не будет». При этом рисковый капитал не дает ответа на вопрос: если будет хуже, то насколько хуже? Ранее на рис. 2.6 были изображены две случайные величины с одинаковым значением 95%-ного рискового капитала, но с разными хвостами. Рисковый капитал сочтет эти случайные величины одинаково опасными. Для решения этой проблемы вместо рискового капитала (или в дополнение к нему) можно использовать условный рисковый капитал (Conditional Value at Risk, CVaR), также базирующийся на понятии «квантиль». Определяется  $CVaR$  с помощью выражения

$$CVaR_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_p(X) dp. \quad (2.12)$$

Путем несложных преобразований можно получить другое представление для рискового капитала, значительно более удобное для интуитивного восприятия:

$$CVaR_{\alpha}(X) = E[X|X \geq VaR_{\alpha}(X)]. \quad (2.13)$$

Упрощая, можно сказать, что условный рисковый капитал показывает средний размер больших убытков. Графически это показано на рис. 2.7.

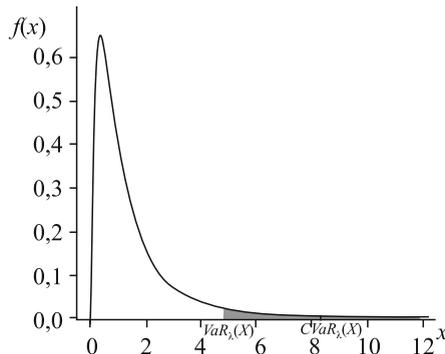


Рис. 2.7. 95%-ный рисковый и 95%-ный условный рисковый капиталы.

Так же как и обычный рисковый капитал, условный рисковый капитал зависит от двух параметров: уровня доверительной вероятности и временного горизонта. Принципы выбора параметров при этом сохраняются.

### 2.7.2. Когерентность рискового капитала

Важным преимуществом условного рискового капитала является выполнение для него не только положительной однородности, инвариантности к сдвигу и монотонности, но и субаддитивности. Доказательство инвариантности к сдвигу очевидным образом следует из (2.13) и инвариантности к сдвигу обычного рискового капитала:

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X + c) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_p(X + c) dp = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 (VaR_p(X) + c) dp = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_p(X) dp + \frac{c(1 - \alpha)}{1 - \alpha} = CVaR_\alpha(X) + c. \end{aligned}$$

Положительная однородность и монотонность доказываются полностью аналогично.

Субаддитивность условного рискового капитала доказывается несколько сложнее. Приведем основную идею возможного доказательства. Для упрощения воспользуемся аналогом формулы (2.13) для дискретных случайных величин:

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{i=1}^k x_i p_i,$$

где  $x_i$  — наблюдения (элементы носителя  $X$ ), превышающие рисковый капитал, а  $p_i$  — их вероятности. Предположим, что  $X$  и  $Y$  — дискретные случайные величины, каждая из которых может принимать  $N$  возможных значений (возможно разных) с равными вероятностями. В таком случае  $CVaR_\alpha(X) + CVaR_\alpha(Y)$  есть сумма среднего значения  $[N(1 - \alpha)]$  «старших» ущербов для  $X$  и среднего значения  $[N(1 - \alpha)]$  «старших» ущербов для  $Y$ . Очевидно, что эта сумма больше либо равна среднему значению  $[N(1 - \alpha)]$  «старших» ущербов для  $X + Y$ , так как одновременное наступление «старших» ущербов для  $X$  и  $Y$  приведет к старшему ущербу и для  $X + Y$ , а обратное, вообще говоря, не верно. Так, «старший» ущерб  $X + Y$  можно получить и как результат реализации максимального ущерба по  $X$  и не самого большого ущерба для  $Y$ . В результате в формуле среднего значения  $[N(1 - \alpha)]$  «старших» ущербов для  $X + Y$  могут присутствовать сравнительно небольшие величины. Доказательство непрерывного случая можно получить с помощью предельного перехода из дискретного. Данное доказательство не является строгим, однако в общих чертах поясняет естественность субаддитивности условного рискового капитала.

С учетом вышесказанного условный рисковый капитал является когерентной мерой риска. Использование  $CVaR$  в примере из п. 2.5.5 устраняет противоречие между интуитивными представлениями о диверсификации риска и решением на основе рискового капитала.

Дополнительно стоит отметить, что такие когерентные меры, как максимальный ущерб и математическое ожидание, упоминавшиеся в п. 2.4.3, являются граничными случаями условного рискового капитала. Так, если в формуле (2.13) выбрать  $\alpha = 1$ , то, очевидно, событие  $\{X \geq VaR_1(X)\}$  реализуется только в случае, если случайная величина  $X$  достигает своего максимального значения. Таким образом,  $CVaR_1(X) = X_{\max}$ .

Но если в формуле (2.13) выбрать  $\alpha = 0$ , то событие  $\{X \geq VaR_0(X)\}$  будет достоверным и условный рисковый капитал совпадет с математическим ожиданием:

$$CVaR_0(X) = E[X|X \geq VaR_0(X)] = E[X].$$

### 2.7.3. Условный рисковый капитал для нормального распределения

В некоторых случаях использование условного рискового капитала представляется избыточным. Так, если априори предполагается, что распределение ущерба подчиняется нормальному распределению, рисковый капитал и условный рисковый капитал будут информативны в равной степени. Тем не менее класс нормальных распределений удобен для иллюстрации свойств рискового капитала.

Рисковый капитал для нормального распределения с параметрами  $\mu, \sigma$  определяется из соотношения

$$CVaR_\alpha(X) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}, \quad (2.14)$$

где  $\phi(x)$ ,  $\Phi(x)$  — плотность и функция распределения стандартного нормального распределения. Соотношение между рисковым капиталом и условным рисковым капиталом для нормально распределенной случайной величины графически показано на рис. 2.8.

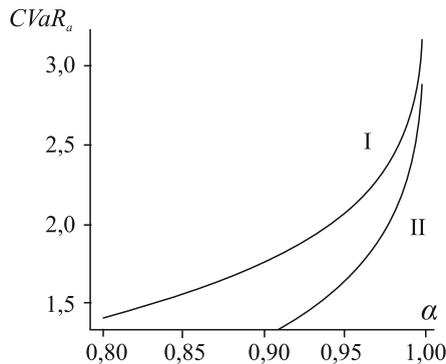


Рис. 2.8. Условный рисковый капитал (I) и рисковый капитал (II) для стандартного нормального распределения в зависимости от выбранного уровня.

В силу неограниченности нормальных случайных величин естественность использования когерентных мер риска (как в п. 2.4) может быть не столь очевидной. Впрочем, при определении когерентной меры риска не использовалось понятие приемлемых множеств, но требовало лишь выполнения ряда свойств выбранной меры. Более того, хотя на практике риски чаще всего описываются неограниченными случайными величинами, можно предположить, что подобные случайные величины все-таки являются модельными, так как для возможных значений должны существовать естественные границы, хотя при этом и крайне большие. О подходах к анализу когерентных мер риска для неограниченных случайных величин можно прочесть, например, в [Bäuerle, Müller, 2006].

Несмотря на неограниченность нормальных случайных величин, можно попытаться понять, как бы выглядел аналог приемлемого множества, порожденного условным рискованым капиталом. (Данная задача корректна, так как множество нормальных случайных величин замкнуто относительно сложения и умножения на число, т. е. линейная комбинация нормальных случайных величин также является нормальной случайной величиной.)

Так, в соответствии с принципами п. 2.4.2, на границу приемлемого множества попадут случайные величины, условный рискованый капитал которых равен нулю. Тогда из соотношения (2.14) следует, что для них должно выполняться

$$-\frac{\mu}{\sigma} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}.$$

Таким образом, граница приемлемого множества будет задаваться нормальными случайными величинами с фиксированным коэффициентом вариации. Очевидно, проверяется, что заданное подобным образом приемлемое множество является выпуклым конусом. Так, коэффициенты вариации для  $X$  и  $\lambda X$  совпадают в силу линейности математического ожидания и стандартного отклонения.

Рассмотрим для примера 95%-ный рискованый капитал: тогда отношение  $\frac{\mu}{\sigma}$  должно быть приблизительно равно 2. В таком случае на границу попадут случайные величины вида  $X \sim \mathcal{N}(-2\lambda; \lambda)$ . Некоторые из этих величин представлены на рис. 2.9.

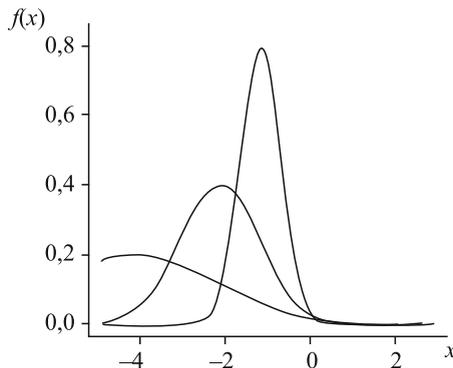


Рис. 2.9. Плотности нормальных случайных величин с нулевым 95%-ным рискованым капиталом.

Кроме того, из формулы (2.14), в частности, следует, что как увеличение математического ожидания, так и увеличение стандартного отклонения приводят к выходу случайной величины за пределы приемлемого множества.

#### 2.7.4. Другие примеры условного рискового капитала

Несмотря на то что на практике равномерное распределение крайне редко подходит для моделирования ущербов в финансовых приложениях, равномерные случайные величины очень удобны для понимания природы условного рискового капитала. Причина состоит в том, что условная случайная величина (при условии  $X > d$ ) также является равномерной. Таким образом, условный рисковый капитал представляет собой просто середину хвоста распределения. Так, для равномерной случайной величины на отрезке  $[0; 100]$  90%-ным рисковым капиталом будет 90, соответственно, условным 90%-ным рисковым капиталом будет 95.

С ростом  $\alpha$  условный рисковый капитал (как и рисковый капитал) будут расти линейно, так как  $VaR_\alpha(X) = a + \alpha(b - a)$ , где  $X \sim U[a, b]$ ,

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{(b - a)}{2}\alpha + \frac{b + a}{2}.$$

В соответствии с п. 2.4.2 на границу приемлемого множества попадут случайные величины с нулевым 90%-ным рисковым капиталом. Таковыми будут, например, равномерные случайные величины на отрезках  $[-95; 5]$ ,  $[-950; 50]$ ,  $[-180; 10]$ . При этом 90%-ные рисковые капиталы у этих случайных величин будут равны соответственно  $-5$ ;  $-50$  и  $-10$  (см. рис. 2.10).

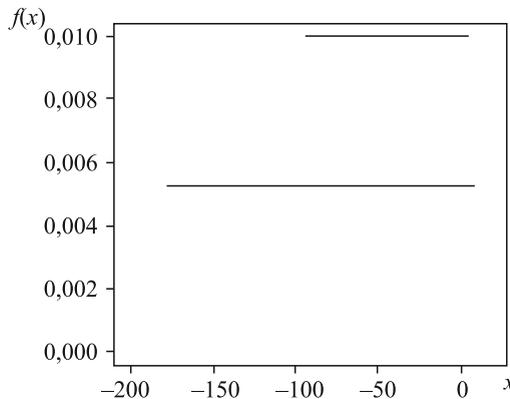


Рис. 2.10. Равномерные случайные величины с нулевым 90%-ным рисковым капиталом.

Следует отметить, что в отличие от класса нормальных случайных величин класс равномерных случайных величин не замкнут относительно сложения и умножения на число.

## 2.8. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ИЗМЕРЕНИЮ РИСКА

**Задача 2.1.** Вычислить максимальный размер страховой премии с индивида с функцией полезности  $u(x) = \sqrt{x}$  и капиталом 900 ден. ед. за риск, допускающий ущерба 0, 500, 675, 900 ден. ед. с равными вероятностями при предположении о полном страховании.

*Решение.* С учетом п. 2.2.1 максимальная страховая премия рассчитывается из соотношения  $E[\sqrt{(900 - X)}] = \sqrt{(900 - a)}$ .

Случайная величина  $w - X$  принимает значения 900, 400, 225, 0 с равными вероятностями, а случайная величина  $\sqrt{(900 - X)}$  — значения 30, 20, 15, 0 также с равными вероятностями. Математическое ожидание такой случайной величины определяется так:  $\frac{30+20+15+0}{4} = 16,25$ .

Далее необходимо решить уравнение  $\sqrt{900 - a} = 16,25$ . Решением уравнения будет  $a = 635,94$  (с учетом округления).

Следует обратить внимание на то, что данная премия превышает размер математического ожидания ущерба (518,75). В этом нет противоречия, так как функция полезности индивида вогнута, т. е. индивид демонстрирует неприятие риска. Более того, если бы размер максимальной страховой премии был ниже математического ожидания, подобный страховой контракт вряд ли представлял бы интерес для страховой организации.

**Задача 2.2.** Вывести аналитически формулу для вычисления рискового капитала и условного рискового капитала экспоненциально-распределенной случайной величины.

*Решение.* В соответствии с п. 1.3.1 экспоненциальное распределение определяется функцией распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Экспоненциальное распределение относится к классу абсолютно непрерывных распределений, поэтому для нахождения рискового капитала достаточно вычислить

$$F_X^{-1}(\alpha) : \alpha = 1 - e^{-\lambda x}; e^{-\lambda x} = 1 - \alpha; -\lambda x = \ln(1 - \alpha); x = -\frac{\ln(1 - \alpha)}{\lambda}.$$

Таким образом,  $Var_\alpha(X) = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}$ .

Для вычисления условного рискового капитала можно воспользоваться представлением (2.13)

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X) &= E[X|X > Var_\alpha(X)] = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_{Var_\alpha(X)}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{Var_\alpha(X)}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой разложения интеграла по частям:

$$\int x e^{-ax} dx = -\frac{x e^{-ax}}{a} + \int \frac{e^{-ax}}{a} dx = -\frac{x e^{-ax}}{a} - \frac{e^{-ax}}{a^2} + c.$$

Таблица 2.1. Выборка из нормально распределенной случайной величины

1047	1051	979	1132	1025	963	1014	1073	858	1074
1120	926	873	1083	1054	1023	1098	940	1037	1084
965	874	858	1050	1009	1004	963	1010	1069	994
1067	958	1065	1047	1012	974	927	1053	1110	979
1102	1009	1000	1000	833	999	923	1037	986	1034
1039	1004	1002	935	924	974	1112	966	941	998
1072	1006	1052	956	1145	903	956	941	951	956
999	1012	1068	1108	1171	879	1015	1049	1095	1033
1188	1125	865	915	1055	1055	1122	1098	973	889
1101	948	895	963	1105	944	1126	815	856	977

Тогда верно

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left( -\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right) \Big|_{VaR_\alpha(X)}^{\infty} = \\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left( \frac{VaR_\alpha(X) e^{-\lambda VaR_\alpha(X)}}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda VaR_\alpha(X)}}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Далее, с учётом  $e^{-\lambda VaR_\alpha(X)} = e^{\frac{\lambda \ln(1-\alpha)}{\lambda}} = (1-\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{1-\alpha} \left( \frac{VaR_\alpha(X) e^{-\lambda VaR_\alpha(X)}}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda VaR_\alpha(X)}}{\lambda^2} \right) &= \\ &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \left( -\frac{(1-\alpha) \ln(1-\alpha)}{\lambda^2} + \frac{(1-\alpha)}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что  $CVaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(X) = \frac{1}{\lambda}$ , т.е. данная разность, не зависит от уровня доверия. Этот эффект для экспоненциального распределения часто называют эффектом отсутствия памяти.

**Задача 2.3.** Оценить 95%-ный и 99%-ный рисковый капитал по выборке с помощью исторической симуляции и параметрически (в предположении о нормальности изучаемого распределения).

**Решение.** Оценка методом исторической симуляции дает следующие результаты:

$$\hat{Va}R_{95\%}(X) = 1125, \hat{Va}R_{99\%}(X) = 1171.$$

Для оценки параметрическим методом следует для начала оценить математическое ожидание и стандартное отклонение выборки:  $\bar{X} = 1006, S = 79,8$ . Тогда с учетом формулы  $\hat{Va}R_{95\%}(X) = \mu + z_{95\%}S$ ,  $\hat{Va}R_{99\%}(X) = \mu + z_{99\%}S$  получаются оценки

$$\hat{Va}R_{95\%}(X) = 1138, \hat{Va}R_{99\%}(X) = 1192.$$

Как и упоминалось выше (п. 2.6), оценки квантилей высокого порядка могут получаться сильно отличающимися в зависимости от используемого метода.

### 2.9. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

2.1. Вычислить максимально приемлемую страховую премию для индивида из задачи 2.1, если риск равномерно распределен на промежутке  $[0; 900]$ .

2.2. Вывести аналитическую формулу для вычисления рискового капитала и условного рискового капитала для логнормального распределения.

2.3. Проверить, является ли медиана распределения когерентной мерой риска.

2.4. Объяснить, может ли рисковый капитал совпадать с условным рисковым капиталом.

2.5. Проверить, обязательно ли условный рисковый капитал является монотонным по  $\alpha$ .

2.6. Объяснить, следует ли пересмотреть математическую модель, если в течение года теоретически рассчитанный 95%-ный рисковый капитал был превышен 10 раз.

2.7. Доказать субаддитивность стандартного отклонения.

2.8. Проверить, позволяет ли условный рисковый капитал принимать решения с учетом принципа диверсификации на примере из п. 2.5.5.

## Глава 3

# ПОРТФЕЛЬ РИСКОВ

Практика управления рисками часто требует комплексного рассмотрения нескольких рисков. При этом особый упор делают на анализе зависимости между рисками. Более того, анализ различных форм зависимости представляет собой одну из наиболее важных проблем количественного риск-менеджмента. Проблема усугубляется тем, что зависимость в теории вероятностей вводится на основе негативного определения (всё, что не является независимым). Это означает наличие довольно большого числа разных форм зависимости. Тем не менее все они могут быть важны для приложений в области управления рисками. К сожалению, не все возможные подходы пока находят свое применение на практике. Именно поэтому данная область количественного риск-менеджмента быстро развивается. В силу того, что для введения некоторых форм зависимостей нужно иметь представление о многомерных распределениях, настоящая глава начинается с этого материала.

Цель данной главы состоит в характеристике взаимодействия различных источников ущерба и/или возникновения ущерба во времени, что приводит к многомерному распределению нескольких видов ущерба как модели портфеля рисков. На этой основе дано введение в проблему измерения зависимостей. В главе приведены лишь некоторые подходы и не предпринималась попытка дать всеобъемлющий обзор измерения зависимостей.

После изучения материала вы узнаете:

- что такое портфель рисков;
- почему риски нужно изучать в динамике;
- каковы свойства многомерных случайных величин;
- каковы основные свойства многомерных распределений;
- какие моменты многомерных распределений наиболее важны для анализа рисков;
- каковы свойства ковариационной матрицы;
- какие основные подходы существуют для выражения зависимостей;
- что такое положительная зависимость на квадранте;
- что такое стохастическое возрастание (убывание);
- что такое возрастание (убывание) на хвостах условного распределения;
- какой тип зависимости измеряет коэффициент корреляции Пирсона;
- как использовать корреляционные отношения для анализа зависимостей;
- что такое коэффициент ранговой корреляции Спирмена;
- что такое коэффициент ранговой корреляции Кендалла;
- какие коэффициенты используются для оценки зависимости на хвостах распределения.

**Ключевые слова:** многомерное распределение ущерба, моменты многомерных распределений, ковариационная матрица, стохастическое возрастание (убывание), возрастание (убывание) на хвостах условного распределения, коэффициент корреляции Пирсона, корреляционное отношение, коэффициент ранговой корреляции Спирмена, коэффициент ранговой корреляции Кендалла, коэффициенты зависимости на хвостах распределения.

### 3.1. ПОРТФЕЛЬ РИСКОВ КАК ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ

#### 3.1.1. Необходимость управления портфелем рисков

На практике рассмотрение рисков по отдельности, самих по себе, часто представляется недостаточным. Как правило, хозяйствующий субъект имеет дело не с единственным риском, а с достаточно широкой совокупностью подобных рисков. Это означает, что управление риском должно обеспечивать единую систему эффективных мер по преодолению негативных последствий каждого элемента указанной совокупности, т. е. комплексно управлять всей совокупностью, или *портфелем рисков*<sup>1</sup>.

Необходимость управления таким портфелем приводит к тому, что они исследуются на двух уровнях:

- *анализ рисков по отдельности*, что создает условия для понимания менеджером по управлению риском особенностей той или иной рискованной ситуации либо специфики неблагоприятных последствий ее реализации. Подобный анализ дает возможность выбрать наиболее подходящие инструменты управления для каждого конкретного риска;
- *изучение рискованного портфеля в целом*, что позволяет установить общее влияние рисков на рассматриваемую фирму. Это обеспечивает единую точку зрения на риски соответствующей фирмы, а значит и определение особенностей ее политики по управлению риском.

Очевидно, что система управления риском должна опираться на оба этих уровня и сочетать в себе инструменты и методы, характерные для каждого из них. Несоблюдение этого условия приведет к потере адекватности проводимой политики и, как следствие, к уменьшению финансовой устойчивости фирмы.

Если подходящей моделью отдельного риска является одномерная случайная величина, то моделью группы, состоящей из  $n$  рисков, может служить случайный вектор  $(X_1, \dots, X_n)$ . Иными словами, размерность вектора определяется числом рассматриваемых носителей риска или типами рисков.

Изучение портфеля рисков в целом означает, что в исследование рискованной ситуации наряду с источниками неопределенности, связанными с поведением отдельных рисков, включается еще один аспект — степень взаимосвязи между рисками. В большинстве случаев полная информация о нем отсутствует (например, известно, что риски в портфеле коррелированы, но не ясно, каким образом или какова природа взаимосвязи). Поэтому данный аспект также может быть мощным источником неопределенности, с которой имеет дело система управления риском.

Помимо указанных преимуществ единой точки зрения на совокупность рисков можно назвать следующие:

— эффективная организация информационных потоков, позволяющая комплексно решать проблемы наиболее подходящему для этого менеджеру;

---

<sup>1</sup> Использование термина «портфель» связано с тем, что раньше документы хранили в кожаных портфелях, поэтому набор однотипных объектов, которые отражались в соответствующих документах, до сих пор принято обозначать этим словом. Отсюда пошли такие устойчивые выражения, как «портфель ценных бумаг», «портфель рисков», и т. д. Если из контекста ясно, о чем идет речь, то уточняющие слова часто опускают и говорят просто о «портфеле».

— обеспечение безопасности принимаемых решений (включая отсутствие утечек информации, своевременность принятия решений, преодоление административных барьеров и т. д.);

— всесторонний учет различных ограничений для принятия решений (прежде всего ресурсных и временных) для портфеля рисков в целом позволяет более эффективно управлять ресурсами.

Сочетание всех этих преимуществ с учетом специфики конкретных рисков на уровне их индивидуального анализа делает систему управления риском более адекватной и гибкой.

### 3.1.2. Изменение рисков во времени

Анализ ущерба часто предполагает статическую модель (например, размер финансовых потерь за фиксированный промежуток времени). Тем не менее иногда риск проявляется именно в динамике (скажем, необычно сильные отклонения от среднего потока). Это делает необходимым применение модели риска в виде случайного процесса. Если процесс рассматривается в дискретном времени и с фиксированным горизонтом планирования, то мы вновь приходим к многомерной случайной величине.

Иными словами,  $n$ -мерный вектор  $(X_1, \dots, X_n)$  описывает изменения во времени некоторой случайной характеристики в течение  $n$  единичных шагов. Размерность задает число рассматриваемых периодов времени. Это достаточно распространенная на практике модель, так как в ряде случаев удобно отслеживать хозяйственный процесс с учетом типа переменной<sup>2</sup> через определенные промежутки времени или на одинаковых временных интервалах.

Учет зависимости между компонентами случайного вектора, описывающего значения в разные моменты времени, ещё важнее, чем анализ подобной зависимости в случайном векторе, характеризующем «пространственную» структуру. Временной ряд отражает определенный тип динамики, который может быть описан разностными схемами, так что зависимость представляет собой важный элемент подобного динамического представления.

При этом следует подчеркнуть, что такая зависимость определяется не влиянием внешних факторов типа инфляции<sup>3</sup>, а отражает воздействие общих особенностей возникновения ущерба, например, ненаблюдаемой характеристики риска  $\theta$  на все случайные величины  $X_1, \dots, X_n$ . Иными словами, делается попытка «вытащить» из наблюдений  $x_1, \dots, x_n$  информацию об особенностях проявления риска в форме значения  $\theta$ , которое напрямую не наблюдается.

---

<sup>2</sup>В экономических науках четко разделяют «переменные запаса», которые измеряются на определенную дату (на момент времени), и «переменные потока», которые всегда относятся к периоду времени (к отрезку между моментами).

<sup>3</sup>Предполагается, что данные «очищены» от подобных эффектов, в первую очередь от инфляции, а иногда и от тренда. Это означает, что рассматриваемый подход является, по существу, частью методики практической оценки среднего ущерба: сначала следует выделить «остатки», которые не могут быть объяснены трендом, сезонными колебаниями и влиянием общих факторов, затем использовать предлагаемые методы анализа и на полученный результат «наложить» исключенные ранее «регулярные» элементы. Впрочем, такая последовательность действий характерна для исследования временных рядов.

Такая модель проясняет смысл подхода к прогнозированию рисков ситуаций, основанного на информации о прошлых неблагоприятных событиях, но ее практическое использование ограничено проблемами информационного обеспечения. Действительно, на практике такой подход приводит к удовлетворительным результатам только тогда, когда можно получить ряды статистических данных достаточной длины для построения вероятностных моделей с приемлемой степенью достоверности оценок параметров.

## 3.2. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

### 3.2.1. Понятие многомерной случайной величины

*Многомерная случайная величина*, называемая также *случайным вектором*<sup>4</sup> — это упорядоченная совокупность фиксированного числа  $n$  ( $n$  — целое, превосходящее единицу) одномерных (скалярных) случайных величин. Данное понятие обобщает идею одномерной случайной величины и часто используется при исследовании взаимодействия между одномерными случайными величинами и/или анализе неоднократных наблюдений.

Многомерная случайная величина является единой математической структурой. Для практических приложений ее часто описывают совместным распределением составляющих ее компонент. Как правило, эта интерпретация очень удобна, но она имеет ряд недостатков, среди которых можно назвать:

- *психологические аспекты*. Такое понимание часто затемняет характер взаимодействия (зависимости) между случайными величинами, так что его анализ выпадает из сферы внимания исследователя. Неявная предпосылка о независимости в условиях, когда зависимость существенна, может сильно исказить результаты моделирования;
- *формальные особенности определения*. Выборочное пространство многомерной случайной величины удобно представлять в виде декартова произведения выборочных пространств ее компонент. Однако при наличии зависимости соответствующая вероятностная мера часто сконцентрирована на более узком множестве. Кроме того, в ряде случаев требуются специальные дополнительные оговорки, которые придают смысл такому декартову произведению, например о соответствии вероятностной меры, заданной на случайных векторах, вероятностным мерам, заданным на их компонентах.

Тем не менее с указанными сложностями легко справиться при аккуратной формализации и интерпретации вероятностной модели.

---

<sup>4</sup>Формально векторное пространство и евклидово пространство являются разными математическими структурами. Однако между ними может быть установлено изоморфное соответствие, так что для практических приложений различия между этими ассоциированными пространствами можно не принимать во внимание.

### 3.2.2. Характеризация многомерной случайной величины

Если многомерную случайную величину представить как  $n$ -мерный вектор, компонентами которого являются одномерные случайные величины, т. е.  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , то ее *функцией распределения*, обозначаемой  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — некий  $n$ -мерный вектор, или  $F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ , является

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 < x_1; \dots; X_n < x_n].$$

О такой функции распределения также говорят как о функции совместного распределения случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ .

Важными классами многомерных случайных величин являются дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины. Для дискретных случайных величин пространство значений случайной величины (носитель распределения) не более чем счётно, так что каждой ее компоненте присваивается ненулевая вероятность

$$p_{ij\dots k} = P[X_1 = x_i; X_2 = x_j; \dots; X_n = x_k],$$

причем выполняется условие нормировки

$$\sum_{i,j,\dots,k} p_{ij\dots k} = 1.$$

У дискретной многомерной случайной величины каждый ее компонент — дискретная случайная величина.

Для абсолютно непрерывных случайных величин носитель распределения является множеством мощности континуума. Такие случайные величины удобно задавать с помощью *функции плотности распределения*  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  многомерной случайной величины (или совместного распределения одномерных случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ ), т. е. такой функции, что функцию распределения  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  можно представить в виде

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathfrak{R}^n} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Далее будут рассматриваться только абсолютно непрерывные многомерные случайные величины. Для многомерных дискретных и смешанных случайных величин соотношения будут аналогичны.

Проекция многомерного распределения на одну из координатных осей или на подпространство, заданное несколькими координатными осями, задает *маргинальное*, или *частное*, *распределение*. Так, если  $\{i(1), \dots, i(k)\}$  есть некоторое подмножество множества  $\{1, \dots, n\}$ , а  $\{i(k+1), \dots, i(n)\}$  — дополнительное подмножество к первому подмножеству, то  $k$ -мерное частное распределение задается соотношениями

$$f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}) = \iint_{\mathfrak{R}^{n-k}} \dots \int f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_{i(k+1)} \dots dx_{i(n)},$$

$$F_{X_{i(1)}, \dots, X_{i(k)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}) = \lim_{\substack{x_{i(k+1)} \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_{i(n)} \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n).$$

Если существуют однократные интегралы функции  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  по всем ее переменным (что часто встречается на практике), то многократный интеграл в первом равенстве можно заменить повторными однократными интегралами, т. е.

$$f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-k \text{ раз}} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_{i(k+1)} \dots dx_{i(n)}. \quad (3.1)$$

Наиболее часто используются одномерные маргинальные распределения

$$f_{X_k}(x_k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1 \text{ раз}} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$$

или

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{\substack{x_j \rightarrow \infty \\ j \in 1 \div n, j \neq k}} F(x_1, \dots, x_n).$$

Они характеризуют отдельные компоненты случайного вектора, так как влияние остальных компонент «усредняется» за счет интегрирования.

*Условное распределение* случайных величин  $X_{i(1)}, \dots, X_{i(k)}$  представляет собой соответствующее  $k$ -мерное, подходящим образом нормированное сечение многомерного распределения вектора  $(X_1, \dots, X_n)$  в  $n$ -мерном пространстве. В первом приближении можно представить себе, что остальные одномерные случайные величины принимают определенные значения, например:

$$x_{i(k+1)} \leq X_{i(k+1)} < x_{i(k+1)} + dx_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)} \leq X_{i(n)} < x_{i(n)} + dx_{i(n)}.$$

При предельном переходе, когда объем этого множества стремится к нулю, получается сечение, по соответствующим компонентам не имеющее «толщины». Это символически записывается равенствами вида  $X_{i(k+1)} = x_{i(k+1)}, \dots, X_{i(n)} = x_{i(n)}$ , что и задает характеристики рассматриваемого сечения.

*Плотность условного распределения* случайных величин  $X_{i(1)}, \dots, X_{i(k)}$  задается соотношением

$$\begin{aligned} f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)} | X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)} | x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}) &= \\ &= \frac{f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)}{f_{X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)})} = \\ &= \frac{f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)}{\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{k \text{ раз}} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_{i(1)} \dots dx_{i(k)}}. \quad (3.2) \end{aligned}$$

При этом функция условного распределения определяется как

$$F_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)} | X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)} | x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}) = \frac{1}{f_{X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)})} \cdot \frac{\partial^{n-k} F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i(k+1)} \dots \partial x_{i(n)}}.$$

### 3.2.3. Моменты многомерного распределения

*Начальным моментом* многомерного распределения называют величину

$$E[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}] = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ раз}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n,$$

а его *порядком* — сумму

$$\sum_{j=1}^n k_j.$$

Иногда слово «начальный» не используется, если при этом не возникает недоразумений. В случае если по меньшей мере два слагаемых в указанной сумме являются ненулевыми, момент называют *смешанным*. *Центральные моменты*, т. е. моменты относительно математических ожиданий одномерных маргинальных распределений

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{+\infty} x_j f_{X_j}(x_j) dx_j, j \in 1 \div n,$$

выражаются как

$$E[(X_1 - \mu_1)^{k_1} \dots (X_n - \mu_n)^{k_n}] = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ раз}} (x_1 - \mu_1)^{k_1} \dots (x_n - \mu_n)^{k_n} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Чаще всего используются следующие наборы моментов:

- вектор начальных моментов

$$E[X_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1 \text{ раз}} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x_j f_{X_j}(x_j) dx_j = \mu_j, j \in 1 \div n,$$

который играет роль математического ожидания и

- матрица центральных смешанных моментов второго порядка, состоящая из элементов

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-2 \text{ раз}} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) f_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i \dots dx_j, \\
 & \qquad \qquad \qquad i \in 1 \div n, \quad j \in 1 \div n, \quad i \neq j,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[(X_j - \mu_j)^2] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu_j)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1 \text{ раз}} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu_j)^2 f_{X_j}(x_j) dx_j, \quad j \in 1 \div n, \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

которая является многомерным аналогом дисперсии. Эта матрица называется *ковариационной*, а ее элементы — *ковариациями*, обозначаемыми  $\text{Cov}[X_i, X_j]$ . Элементы главной диагонали ( $i = j$ ) являются дисперсиями компонент случайного вектора, построенных на основе маргинального распределения.

Если ранг ковариационной матрицы, называемый также рангом многомерного распределения, меньше  $n$ , то распределение сосредоточено на подпространстве соответствующей размерности  $n$ -мерного пространства.

Можно показать, что

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_{X_i, X_j}(x_1, x_2) - F_{X_i}(x_i)F_{X_j}(x_j)) dx_i dx_j. \quad (3.4)$$

### 3.3. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

#### 3.3.1. Понятия независимости и зависимости

Если для любого  $k$  условная плотность равна соответствующей  $(n - k)$ -мерной маргинальной плотности

$$\begin{aligned}
 & f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)} | X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)} | x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}) = \\
 &= f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}), \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

то говорят о *независимости в совокупности* (или просто о *независимости*) случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ .

Равенство (3.5), а следовательно, и понятие независимости в совокупности можно интерпретировать иначе: условная плотность не зависит от значений  $x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}$ , которые принимают случайные величины  $X_{i(k+1)}, \dots, X_{i(n)}$ . С учетом свойств условного распределения и произвольности выбора  $k$  можно показать, что независимость эквивалентна выполнению условий

$$\prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n), \quad \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x_j) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.6)$$

От независимости в совокупности следует отличать *попарную независимость*. Это более слабое условие требует, чтобы любые два компонента многомерной случайной величины были независимы, например, в смысле равенств (3.6) при  $n = 2$ . Независимость в совокупности влечет попарную, но не наоборот.

Если случайные величины не являются независимыми, то говорят, что они *зависимы*. Такое «негативное» определение приводит к неоднозначности понятия: существует много различных типов зависимости. Дать полный обзор таких типов не представляется возможным, в данном пособии приведены подходы, наиболее популярные в количественном риск-менеджменте.

На практике тот или иной тип зависимости почти всегда имеет место, так что модели, основанные на предположении независимости, часто приводят к ошибочным выводам. При моделировании рискованных ситуаций нужно быть осторожными, чтобы не заменить форму зависимости, адекватную пониманию риска, более простой для оценки, но менее подходящей. Подобная замена приведет к искажению прогнозов и оценок вследствие высокого модельного риска. Более того, выбор типа зависимости может влиять на выбор математического аппарата или вида экономико-математических моделей, так как последние часто предполагают определённый подход к измерению зависимости.

Для упрощения изложения основные сведения о концепциях и измерении зависимости будут даны для двумерных случайных величин. При необходимости даются замечания об особенностях того или иного подхода для более высокой размерности.

### 3.3.2. Положительная зависимость на квадранте и её обобщения

Наиболее очевидным подходом к определению того или иного типа зависимости будет прямое противопоставление равенствам (3.6). В частности, довольно популярным представляется так называемая *положительная зависимость на квадранте*, для которой

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2). \quad (3.7)$$

Для двумерного случая данное неравенство эквивалентно

$$\bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq \bar{F}_{X_1}(x_1)\bar{F}_{X_2}(x_2), \quad (3.8)$$

где  $\bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P[X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2]$  — функция дожития двумерного распределения случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , а  $\bar{F}_{X_i}(x_i) = P[X_i \geq x_i]$  — функция дожития случайной величины  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Интерпретация этих неравенств следующая: вероятность того, что случайные величины вместе принимают большие (или маленькие) значения, выше, чем если бы они принимали соответствующие значения по отдельности в условиях независимости. При этом слово «положительная» указывает на тип неравенства.

В силу (3.4) зависимость в положительном квадранте означает неотрицательность ковариации, но обратное утверждение неверно. Используя (3.4), можно также показать, что зависимость в положительном квадранте эквивалентна условию

$$\text{Cov}[g_1(X_1), g_2(X_2)] \geq 0$$

для любых неубывающих вещественных функций  $g_1(\cdot)$  и  $g_2(\cdot)$ .

В случае, когда требуется четкое аналитическое выражение разности между сторонами неравенства (3.7), используют представление функции двумерного распределения вида

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) + \Psi(x_1, x_2), \quad (3.9)$$

где  $\Psi(\cdot, \cdot) \geq 0$  для всех значений аргументов, или вида

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2), \quad (3.10)$$

где  $A(\cdot, \cdot) \geq 1$  для всех значений аргументов. Применение подобных равенств определяет один из подходов к конструированию двумерных распределений за счет задания подходящих параметрических семейств функций  $\Psi(\cdot, \cdot)$  и  $A(\cdot, \cdot)$ .

Если размерность больше двух, то зависимость на положительном квадранте можно обобщить. Если выполняется неравенство

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i),$$

то такую зависимость называют *положительной зависимостью на нижнем ортанте*. Это в общем случае не эквивалентно неравенству

$$\bar{F}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq \prod_{i=1}^n \bar{F}_{X_i}(x_i),$$

выполнение которого задает *положительную зависимость на верхнем ортанте*. Тем не менее в некоторых случаях такая эквивалентность может иметь место, тогда тип ортанта не уточняют, так что зависимость называется *положительной зависимостью на ортанте*.

Положительная зависимость на квадранте или (верхнем/нижнем) ортанте часто представляет собой некий базовый тип, с которым удобно сравнивать иные типы зависимости. В силу её связи с ковариацией, которая, в свою очередь, является основой для некоторых распространённых мер измерения зависимости, это создает условия для численного анализа многих подходов.

### 3.3.3. Зависимости в терминах поведения условных распределений

Данный подход демонстрирует зависимость иного типа, привязанную к поведению условного распределения. Фактически такая зависимость сводится к модификации равенств типа (3.5), а не условий (3.6), как это было сделано в п. 3.3.2.

Если при независимости условное распределение не зависит от условия (т. е. совпадает с маргинальным), то здесь явным образом задается возрастание или убывание значений соответствующих условных вероятностей при изменении поведения условия.

Начнем с поведения функции условного распределения или функции условного дожития. О наличии *стохастического возрастания* говорят, если функция дожития условного распределения  $\bar{F}_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = 1 - F_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$  возрастает по значению условия  $x_1$  для каждого значения  $x_2$ , или, что то же самое, функция условного распределения  $F_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$  убывает по  $x_1$ . Если такое свойство отражает возрастание условного математического ожидания по условию, то это соответствующим образом характеризует поведение регрессии. Поэтому такую зависимость иногда называют *положительной регрессионной*. При сохранении математического ожидания это означает утяжеление хвоста.

В случае обратных зависимостей (функция дожития убывает, функция распределения возрастает) говорят о *стохастическом убывании*. Можно сконструировать подходящие многомерные аналоги.

Иногда удобно работать с условными вероятностями, в которых условие представляет собой неравенство, т. е.

$$P[X_2 < x_2 | X_1 < x_1] = \frac{F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{F_{X_1}(x_1)} \quad (3.11)$$

или

$$P[X_2 \geq x_2 | X_1 \geq x_1] = \frac{\bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\bar{F}_{X_1}(x_1)}. \quad (3.12)$$

Фактически речь идет об интегралах функции условного распределения или функции условного дожития по подходящим интервалам условия. Иными словами, это частный случай стохастического возрастания или убывания. Тогда говорят о зависимости типа *возрастания или убывания по условию на хвосте условного распределения*. В зависимости от знака неравенства случайной величины  $X_2$  анализируется правый или левый хвост. Знаки неравенства случайной величины  $X_1$  будут одноименными.

*Возрастание по условию на левом хвосте условного распределения* означает, что вероятность вида (3.11) представляет собой возрастающую функцию  $x_1$  для каждого значения  $x_2$ . *Убывание по условию на левом хвосте* означает, что эта условная вероятность будет убывающей функцией. Аналогичная картина с возрастанием или убыванием на правом хвосте: только тогда берется вероятность вида (3.12).

Изменения по условию на хвосте представляют собой необходимые условия положительной или отрицательной зависимости на квадранте. В частности, возрастание на правом хвосте условного распределения  $X_2$  по условию на  $X_1$  или убывание

на левом хвосте условного распределения  $X_2$  по условию на  $X_1$  приводит к положительной зависимости на квадранте. Действительно, возрастание на правом хвосте условного распределения  $X_2$  по условию на  $X_1$  означает, что вероятность большого значения случайной величины  $X_2$  тем выше, чем больше значение случайной величины  $X_1$ , т. е. шансы на совместное получение больших значений растут. Аналогичное объяснение для второго варианта с убыванием на левом хвосте, но в отношении маленьких значений. В силу того, что положительная зависимость на квадранте симметрична, случайные величины в указанных формулировках можно менять местами.

### 3.4. ИЗМЕРЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ

#### 3.4.1. Общая характеристика измерения зависимости

Идея измерения зависимости состоит в том, чтобы описать общие свойства случайных величин, интерпретируемых как наличие разных типов зависимости, в форме числа или набора чисел. Соответствующие числа могут быть не только индикатором наличия определенного типа зависимости, но и указывать на её интенсивность или степень. Это удобно с практической точки зрения, так как позволяет легко сравнивать ситуации с разной зависимостью и встраивать соответствующие показатели в практически ориентированные методики.

Тем не менее сведение достаточно сложного свойства к одному числу часто означает уменьшение доступной информации. Кроме того, разные типы зависимостей, очевидно, должны описываться различными показателями. Таким образом, при измерении зависимостей нужно быть осторожным в выборе показателя и интерпретации его численного значения. При необходимости следует использовать несколько различных подходов к измерению зависимости.

Методы измерения зависимости можно классифицировать по нескольким критериям. Прежде всего, следует разделять глобальные и локальные меры. Глобальная мера позволяет оценить степень зависимости на всём носителе случайной величины, тогда как локальная — сосредоточиться на некоторой области и даже «в точке». Примером практической полезности последней может служить так называемая «зависимость на хвостах» (рис. 3.1).

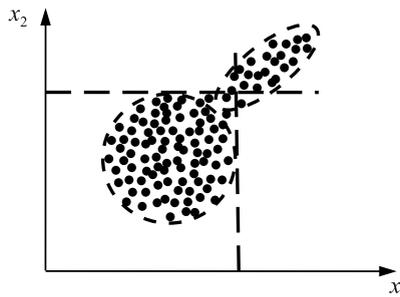


Рис. 3.1. Наблюдения двумерной случайной величины с зависимостью на верхнем хвосте.

Ещё одним важным критерием классификации является тип показателя, который используют для измерения зависимости.

### 3.4.2. Измерение зависимости на основе ковариации

Как указывалось ранее, ковариацией называют смешанный центральный момент второго порядка для двумерной случайной величины, для которой имеем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_1, X_2] &= E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - E[X_1])(x_2 - E[X_2]) dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 x_2 - E[X_1]E[X_2]) dF_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]. \end{aligned}$$

Очевидно, если случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы, то их ковариация равна нулю. К сожалению, обратное в общем случае неверно: можно подобрать контрпример, когда зависимость имеет место, но  $E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$ . Чем сильнее зависимость, тем больше абсолютное значение ковариации. Ещё одним крупным недостатком ковариации как основы для измерения зависимости является то, что она хорошо отражает линейную зависимость, но может занижать степень нелинейной зависимости.

Тем не менее ковариация имеет и преимущества для измерения зависимости. Прежде всего, она хорошо согласуется с некоторыми многомерными распределениями, популярными в практических приложениях. Некоторые типы зависимости также удобно выражать через ковариации. В частности, зависимость в положительном квадранте эквивалентна условию  $\text{Cov}[g_1(X_1), g_2(X_2)] \geq 0$  для любых неубывающих вещественных функций  $g_1(\cdot)$  и  $g_2(\cdot)$ . Кроме того, измерение зависимостей на основе связанных с ковариацией показателей было одним из первых и поэтому играло важную роль на протяжении десятилетий. В результате подходы, основанные на идее ковариации, широко используются до настоящего времени.

Популярности ковариации также способствует относительно простой способ статистической оценки по наблюдениям случайной величины  $(x_{k1}, x_{k2})$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . В частности, используются формулы

$$m_{X_1, X_2} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (x_{1k} - \bar{x}_1)(x_{2k} - \bar{x}_2) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{1k} x_{2k} - \bar{x}_1 \bar{x}_2,$$

где  $x_{1k}$  — выборочные (наблюдаемые) значения случайной величины  $X_1$ ,  $x_{2k}$  — выборочные (наблюдаемые) значения случайной величины  $X_2$ ,  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  — выборочные средние случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  соответственно.

К сожалению, ковариация позволяет отследить только попарную зависимость. Если речь идет о размерности, большей двух, то используют ковариационную матрицу. Она является симметричной и неотрицательно определенной. Диагональная ковариационная матрица представляет собой необходимое (но не достаточное!) условие попарной независимости всех компонентов многомерной случайной величины.

Самая простая мера зависимости строится на основе необходимого условия попарной независимости:  $\text{Cov}[X_i, X_j] = 0, i \neq j$ . Ее идея состоит в том, что чем больше значение  $\text{Cov}[X_i, X_j]$ , тем сильнее зависимость. Для исключения влияния единиц измерения ( $\text{Cov}[aX_i, bX_j] = ab\text{Cov}[X_i, X_j]$ ) ковариацию нормируют так, чтобы в соответствующей матрице по главной диагонали стояли единицы:

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\text{Cov}[X_i, X_j]}{\sqrt{D[X_i] \cdot D[X_j]}}. \quad (3.13)$$

Такая нормированная ковариационная матрица называется *корреляционной*, а ее элементы  $\rho(X_i, X_j)$  — *коэффициентами корреляции*<sup>5</sup>. Коэффициенты корреляции часто используются как мера (линейной) зависимости: для независимых случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  ( $i \neq j$ ) имеет место  $\rho(X_i, X_j) = 0$ , а для линейно зависимых  $\rho(X_i, X_j) = \pm 1$ .

Формулу (3.13) можно представить в векторно-матричной форме как

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Sigma}_{\text{diag}}^{-1/2} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Sigma}_{\text{diag}}^{-1/2}, \quad (3.14)$$

где  $\mathbf{P} = \|\rho(X_i, X_j)\|$  — корреляционная матрица,  $\mathbf{\Sigma}_{\text{diag}}^{-1/2} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1})$  — матрица, обратная состоящей из квадратных корней диагональных элементов ковариационной матрицы, т. е. диагональной матрицы  $\mathbf{\Sigma}_{\text{diag}}^{1/2} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , содержащей стандартные отклонения соответствующих случайных величин.

На практике широко применяют *выборочный коэффициент корреляции*

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_k x_{ik}x_{jk} - \bar{x}_i\bar{x}_j}{\sqrt{(\sum_k x_{ik}^2 - \bar{x}_i^2)(\sum_k x_{jk}^2 - \bar{x}_j^2)}}. \quad (3.15)$$

Основными проблемами использования коэффициента корреляции как меры зависимости являются следующие:

- он отражает только попарную независимость;
- позволяет выявить только линейную зависимость,
- базируется на необходимом условии, так что легко сделать ошибку, приняв некоррелированные случайные величины за независимые<sup>6</sup>.

Для измерения (линейной) зависимости между одномерной случайной величиной и набором (вектором) случайных величин используется множественный коэффициент корреляции, который является обобщением коэффициента корреляции:

$$\rho(X_1; (X_2, \dots, X_n)) = \sqrt{1 - \frac{\det \mathbf{P}}{\mathbf{P}_{11}}}, \quad (3.16)$$

<sup>5</sup>Для того чтобы отличать их от других типов коэффициентов корреляции, рассматриваемые здесь коэффициенты иногда называются также коэффициентами корреляции Пирсона, в честь известного британского математика К. Пирсона, предложившего их использовать.

<sup>6</sup>Условие можно считать достаточным только для нормально распределенных случайных векторов.

где  $\det \mathbf{P}$  — определитель корреляционной матрицы  $\mathbf{P}$ , а  $\mathbf{P}_{11}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\rho(X_1, X_1)$ . Можно показать, что эта формула эквивалентна выражению

$$\rho(X_1; (X_2, \dots, X_n)) = \sqrt{1 - \frac{\mathbb{E} \left[ (X_1 - BP_L [X_1 | X_2, \dots, X_n])^2 \right]}{D[X_1]}}$$

где  $BP_L [X_1 | X_2, \dots, X_n]$  — наилучший линейный прогноз случайной величины  $X_1$  по наблюдениям случайных величин  $X_2, \dots, X_n$ , или, что то же самое, линейная аппроксимация функции регрессии  $\mathbb{E} [X_1 | X_2, \dots, X_n]$ .

Последнее выражение можно обобщить естественным образом, заменяя  $BP_L [X_1 | X_2, \dots, X_n]$  исходной зависимостью  $\mathbb{E} [X_1 | X_2, \dots, X_n]$ :

$$\begin{aligned} \eta(X_1 | X_2, \dots, X_n) &= \sqrt{1 - \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1 | X_2, \dots, X_n])^2]}{D[X_1]}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{\mathbb{E}[D[X_1 | X_2, \dots, X_n]]}{D[X_1]}} = \sqrt{\frac{D[\mathbb{E}[X_1 | X_2, \dots, X_n]]}{D[X_1]}}. \end{aligned}$$

Показатель  $\eta(X_1 | X_2, \dots, X_n)$  называют *корреляционным отношением*. Если выполняется равенство  $\mathbb{E} [X_1 | X_2, \dots, X_n] = BP_L [X_1 | X_2, \dots, X_n]$ , то оно совпадает с множественным коэффициентом корреляции. Для корреляционного отношения выполняется свойство  $0 \leq \eta(X_1 | X_2, \dots, X_n) \leq 1$ . Случай  $\eta(X_1 | X_2, \dots, X_n) = 0$  отвечает отсутствию корреляции случайной величины  $X_1$  с набором  $(X_2, \dots, X_n)$ . При  $\eta(X_1 | X_2, \dots, X_n) = 1$  имеется точная функциональная зависимость между  $X_1$  и набором  $(X_2, \dots, X_n)$ , которая является не обязательно линейной.

Выборочное корреляционное отношение определяется или на основе предположений о характере зависимости  $\mathbb{E} [X_1 | X_2, \dots, X_n]$ , или на основе наблюдений. В последнем случае используют формулу

$$\hat{\eta} = \frac{\sum_j n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_j \sum_k (x_{jk} - \bar{x})^2} = \frac{\sum_j n_j \bar{x}_j^2 - n \bar{x}^2}{\sum_j \sum_k x_{jk}^2 - n \bar{x}^2}, \quad (3.17)$$

где  $x_{jk}$  — выборочные значения случайной величины  $X_j$  (наблюдения  $j$ -й группы),  $n_j$  — соответствующий объем наблюдений,  $\bar{x}_j$  — выборочное среднее случайной величины  $X_j$ ,  $n$  — совокупный объем наблюдений,  $n = \sum_j n_j$ .

Если  $\eta(X_i | X_j) = 1$ ,  $i \neq j$ ;  $i \in 1 \div n$ ;  $j \in 1 \div n$ , то многомерная случайная величина  $(X_1, \dots, X_n)$  имеет то же распределение<sup>7</sup>, что и  $(F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))$ , где  $U$  — одномерная случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $(0,1)$ . Такой идеальный тип зависимости называется *комонотонностью*. Его часто используют при анализе сумм зависимых случайных величин в качестве наилучшего случая зависимости.

<sup>7</sup>Случайные величины  $X_j$  и  $F_{X_j}^{-1}(U_j)$  имеют одинаковое распределение для каждого  $j \in 1 \div n$  без дополнительных условий, связанных с корреляционным отношением. Последнее нужно для того, чтобы определить характер зависимости в совокупности. Предполагается, что функция  $F_{X_j}^{-1}(U_j)$ , обратная функции распределения, определена корректно, так что не возникает проблем на интервалах, где функция распределения постоянна.

### 3.4.3. Ранговая корреляция

Комонотонность означает согласованное изменение значений случайных величин. Это приводит к идее измерения тесноты связи между упорядоченными значениями (ранжировками) случайных величин, т. е. *ранговой корреляции*. Соответствующие меры зависимости нечувствительны к монотонным преобразованиям случайных величин и их наблюдениям, а следовательно, не привязаны к типу распределения и в этом смысле являются непараметрическими.

Наиболее популярными мерами парной ранговой корреляции являются коэффициент Спирмена

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3 \iint_{\mathbb{R}^2} (2F_{X_1}(x_1) - 1) (2F_{X_2}(x_2) - 1) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.18)$$

и коэффициент Кендалла

$$\begin{aligned} \tau_K(X_1, X_2) &= 2P[(X_1 - F_{X_1}(U)) (X_2 - F_{X_2}(U)) \geq 0] - 1 = \\ &= P[(X_1 - F_{X_1}(U)) (X_2 - F_{X_2}(U)) \geq 0] - P[(X_1 - F_{X_1}(U)) (X_2 - F_{X_2}(U)) < 0]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Их выборочные оценки базируются на понятии вектора рангов с компонентами

$$r_i = \sum_{j=1}^n 1_{[0; \infty)}(x_i - x_j),$$

где  $1_A(x)$  — индикатор множества  $A$ , т. е.

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Фактически ранг равен номеру наблюдения в соответствующем вариационном ряде.

Если ранги наблюдений случайной величины  $X_1$  упорядочить по возрастанию, а соответствующие им ранги наблюдений случайной величины  $X_2$  обозначить  $r_j$ ,  $j \in 1 \div n$ , то выборочный коэффициент парной ранговой корреляции Спирмена можно определить по формулам

$$\hat{\rho}_S(X_1, X_2) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{j=1}^n \left( j - \frac{n+1}{2} \right) \left( r_j - \frac{n+1}{2} \right)$$

или

$$\hat{\rho}_S(X_1, X_2) = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{j=1}^n (j - r_j)^2. \quad (3.20)$$

Выборочный коэффициент парной ранговой корреляции Кендалла рассчитывается по формулам

$$\hat{\tau}_K(X_1, X_2) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{sign}(i-j) \text{sign}(r_i - r_j), \quad (3.21)$$

где функция  $\text{sign}(\cdot)$  задает знак аргумента.

Для измерения ранговой корреляции для случайных векторов с большей размерностью используются обобщения указанных коэффициентов. В частности, для  $k$ -мерного вектора при  $n$  наблюдениях используется *коэффициент конкордации* (согласованности) Кендалла

$$\hat{T} = \frac{12}{k^2(n^3 - k)} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^k \left( r_i^{(j)} - \frac{k(n+1)}{2} \right)^2 \right), \quad (3.22)$$

где  $r_i^{(j)}$  ранг  $i$ -го наблюдения случайной величины  $X_j$ .

### 3.4.4. Оценка зависимости на хвосте

Зависимости на хвосте оцениваются с помощью специальных коэффициентов. Они также определяют попарную зависимость, т. е. оценка ориентирована на двумерные распределения. Если размерность выше, то пользуются соответствующими проекциями. Идея коэффициента построена на предельном поведении условных вероятностей, так что речь идет об асимптотическом поведении в соответствующем квадранте.

*Коэффициент зависимости на верхнем хвосте* определяется как

$$\lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1-0} P [X_2 \geq F_{X_2}^{-1}(u) \mid X_1 \geq F_{X_1}^{-1}(u)].$$

Иными словами, оценивается предельное поведение условной вероятности превышения случайной величиной  $X_2$  квантили при условии, что случайная величина  $X_1$  соответствующую квантиль превосходит. Если не возникает технических сложностей при оценке обратных функций к функциям распределений (в частности, для абсолютно непрерывных распределений), то это определение можно представить в виде

$$\lambda_u(X_1, X_2) = 2 - \lim_{u \rightarrow 1-0} \frac{1 - F_{X_1, X_2}(F_{X_1}^{-1}(u), F_{X_2}^{-1}(u))}{1 - u}. \quad (3.23)$$

*Коэффициент зависимости на нижнем хвосте* задается формулой

$$\lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0+} P [X_2 < F_{X_2}^{-1}(u) \mid X_1 < F_{X_1}^{-1}(u)],$$

т. е. оценивается предельное поведение условной вероятности того, что случайная величина  $X_2$  не превзойдет квантили (при условии, что случайная величина  $X_1$  соответствующей квантили не превзойдет). В терминах обратных функций к функциям распределений (если для их определения не возникает сложностей) данная формула представима в виде

$$\lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{F_{X_1, X_2}(F_{X_1}^{-1}(u), F_{X_2}^{-1}(u))}{u}. \quad (3.24)$$

Если  $\lambda_u = 0$  или  $\lambda_l = 0$ , то говорят об асимптотической независимости на верхнем или нижнем хвосте соответственно. Если коэффициенты больше нуля, то имеется (асимптотическая) зависимость на хвостах.

### 3.5. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОЦЕНКЕ ЗАВИСИМОСТИ

**Задача 3.1.** Случайные величины  $X$  и  $Y = X^2$  комонотонны, т. е. находятся в полной функциональной зависимости. Показать, что коэффициент корреляции не равен единице в общем случае, а корреляционное отношение равно единице.

*Решение.* Сначала рассмотрим ситуацию с коэффициентом корреляции. Дисперсия случайной величины  $Y$

$$D[Y] = E[X^4] - (E[X^2])^2,$$

а ковариация между случайными величинами  $X$  и  $Y$  задается формулой

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X^3] - E[X]E[X^2].$$

Очевидно, что коэффициент корреляции может быть равен единице только при некоторых специальных соотношениях моментов распределения случайной величины  $X$ :

$$\rho(X, Y) = \rho(X, X^2) = \frac{E[X^3] - E[X]E[X^2]}{\sqrt{(E[X^2] - (E[X])^2)(E[X^4] - (E[X^2])^2)}}.$$

Для проверки ситуации с корреляционным отношением рассмотрим только

$$\eta(Y|X) = \eta(X^2|X) = \sqrt{1 - \frac{E[D[X^2|X]]}{D[X^2]}}.$$

При этом, очевидно, имеет место  $D[X^2|X] = 0$ , так что числитель дроби в выражении под знаком корня равен нулю и корреляционное отношение равно единице. Из аналогичных соображений получаем  $\eta(X|Y) = \eta(\sqrt{Y}|Y) = 1$ .

**Задача 3.2.** Показать, что неравенства (3.7) и (3.8) эквивалентны.

*Решение.* Начнем с неравенства (3.7)

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2).$$

Перепишем его в терминах вероятностей:

$$P[X_1 < x_1, X_2 < x_2] \geq P[X_1 < x_1]P[X_2 < x_2].$$

Теперь перейдем к вероятностям событий, выраженных в терминах неравенств типа «больше или равно»:

$$1 - P[X_1 \geq x_1] - P[X_2 \geq x_2] + P[X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2] \geq (1 - P[X_1 \geq x_1])(1 - P[X_2 \geq x_2]).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим неравенство

$$P[X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2] \geq P[X_1 \geq x_1]P[X_2 \geq x_2],$$

которое эквивалентно (3.8).

**3.6. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ**

3.1. Придумать пример зависимых случайных величин, для которых имеет место

$$E[X_1 X_2] = E[X_1] E[X_2].$$

3.2. Доказать, что

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_1, X_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

[Подсказка: использовать интегрирование по частям.]

3.3. Показать, что необходимым и достаточным условием зависимости в положительном квадранте является неравенство  $\text{Cov}[g_1(X_1), g_2(X_2)] \geq 0$  для любых неубывающих вещественных функций  $g_1(\cdot)$  и  $g_2(\cdot)$ .

3.4. Показать, что возрастание на правом хвосте условного распределения  $X_2$  по условию на  $X_1$  приводит к положительной зависимости на квадранте.

## Глава 4

# НЕОДНОРОДНОСТЬ РИСКОВ И ФАКТОРЫ РИСКА

В хозяйственной практике не встречается абсолютно одинаковых рисков. Различия между ними часто таковы, что приводят к изменению механизма возникновения ущерба или разбросу параметров, определяющих размер ущерба. Поэтому подобную неоднородность следует правильно формализовать при постановке экономико-математических моделей и по возможности выявить причины подобной неоднородности. Иными словами, данное свойство является ключевым для обеспечения адекватности моделей, а следовательно, и точности прогнозов на их основе в рамках количественного риск-менеджмента.

Один из способов учета и содержательного объяснения указанной неоднородности состоит в выделении факторов риска, которые связаны с размером ущерба и/или вероятностью его отсутствия. Введение подобных факторов в модель помогает снизить необъясненные флуктуации размера ущерба и, следовательно, повысить уровень понимания процесса возникновения ущерба. Это дает в руки риск-менеджера набор инструментов частичного управления указанным процессом.

Цель данной главы состоит в изложении основных подходов к моделированию неоднородности рисков и методов выявления факторов, позволяющих частично объяснить различия между рисками. В ней также представлены базовые статистические подходы к проведению такого анализа.

После изучения материала вы узнаете:

- что представляет собой неоднородность рисков;
- как связаны с неоднородностью перекрестное субсидирование и неблагоприятный отбор рисков;
- что такое смесь распределений;
- как использовать условные распределения для анализа смесей;
- почему байесовские схемы важны для моделирования неоднородных портфелей;
- что такое фактор риска;
- каковы основные этапы анализа факторов риска;
- какая статистическая информация нужна для анализа факторов риска;
- как отбирать важные факторы риска;
- какие статистические процедуры используются для анализа факторов риска;
- каковы особенности применения многомерной классификации для анализа факторов риска;
- каковы особенности применения регрессионных методов для анализа факторов риска;
- как применять гамма-регрессию для анализа рисков.

**Ключевые слова:** неоднородность рисков, перекрестное субсидирование, неблагоприятный отбор, смесь распределений, байесовские схемы, априорное распределение, апостериорное распределение, фактор риска, подверженность риску, отбор факторов риска.

## 4.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕОДНОРОДНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ РИСКОВ

### 4.1.1. Неоднородность портфеля рисков

Ситуация, когда риски абсолютно одинаковы или различия между ними не существенны для механизма возникновения ущерба, встречается на практике, но происходит это довольно редко. Чаще всего риск-менеджер сталкивается с неоднородностью рисков, т. е. с существенными различиями в характеристике интенсивности возникновения и/или размера ущерба.

При этом речь идет как об особенностях разных типов риска, так и о несхожести носителей одного и того же типа риска. Хотя к обоим случаям можно применить методы, разрабатываемые для неоднородных совокупностей рисков, в первом это может быть излишним, так как проблема идентификации риска решается намного проще. Действительно, уже информация о том, что сопоставляются разные типы рисков, позволяет провести подходящую классификацию. Поэтому при анализе портфеля рисков, состоящего из достаточно однородных подпортфелей, можно обойтись простыми подходами, анализируя такие подпортфели по отдельности. Во втором случае ситуация иная, так как у риск-менеджера может не быть возможностей для выявления степени различия, например, вследствие дефицита или даже полного отсутствия данных, которые можно было бы использовать для этого.

Неоднородность, очевидно, в значительной степени будет сильно проявляться в тех ситуациях, где риски уникальны, скажем, в случае космических запусков. Однако для массовых рисков (в частности, риска заболеваемости для населения, проживающего на определенной территории) неоднородность также может быть достаточно заметной. Такой эффект связан с тем, что носители риска не абсолютно идентичны, существенное влияние на вероятностные свойства оказывает их поведение, а также политика в области управления рисками.

Это означает, что риск-менеджеру придется иметь дело с выборками, в которых наблюдения принципиально отличаются друг от друга, но неизвестно, какие и насколько сильно. Проблема здесь заключается в том, что при оценке параметров (характеристик) риска в условиях неоднородности совокупности рисков легко сделать ошибку, которая может отрицательно сказаться на финансовом результате деятельности соответствующей компании. Если ответственность за возмещение ущерба может быть продана на рынке (например, путем заключения договора страхования или вывода на финансовый рынок экзотических опционов), то тяжесть такой ошибки будет усугубляться сопоставлением с действиями конкурентов, которые проводят более взвешенную и гибкую политику в области учета неоднородности рисков.

Упомянутая ошибка оценивания будет связана как со значительным нарушением предпосылок простых статистических моделей, так и с тем, что в подавляющем большинстве ситуаций оценка, полученная для неоднородной совокупности в целом, не будет соответствовать индивидуальному риску. Поэтому кроме методов повышения однородности рассматриваемых групп (например, за счет расщепления исходных неоднородных совокупностей) среди основных подходов можно назвать:

— разработку и применение более сложных методик статистического анализа, позволяющих учитывать и выявлять неоднородность статистических данных;

— формирование такой системы анализа рисков, которая обеспечивала бы учет индивидуальных особенностей этих рисков.

Цель всех мероприятий подобного рода состоит в более адекватной и точной оценке рисков.

#### **4.1.2. Перекрестное субсидирование и неблагоприятный отбор рисков**

Если бы совокупная оценка по группе неоднородных рисков устойчиво соответствовала среднему индивидуальному ущербу, то неоднородность не была бы особенной проблемой: повышенные потребности в компенсации ущерба (по сравнению со средним уровнем) по одним объектам компенсируются пониженной потребностью по другим, так что в целом результат получается вполне сбалансированным. Такое явление называется *перекрестным субсидированием*.

На практике все риск-менеджеры в той или иной мере сталкиваются с перекрестным субсидированием, так как оно является естественным следствием невозможности перейти к полностью однородным группам рисков. Этот эффект довольно безобиден, если только осуществим контроль структуры рисков. В том случае, когда доля «плохих» рисков может неожиданно увеличиться, перекрестное субсидирование чревато ростом убытков и ухудшением финансовой устойчивости. Поэтому перекрестного субсидирования рекомендуется избегать, что, в свою очередь, вновь ставит вопрос о точности оценивания рисков.

Механизм неблагоприятного отбора рисков может быть различным. Он определяется, например, такими факторами, как:

- недоучет опасности при низкой интенсивности возникновения ущерба (особенно при возможном возникновении высокого ущерба);
- различия в институциональных ограничениях (разные формы регулирования могут ослаблять или усиливать величину компенсации ущерба, например, размер косвенных последствий на практике часто привязан к судебным прецедентам);
- консервативность компании в области оценки рисков;
- макроэкономические условия (при экономическом спаде или стагнации отношение к риску становится менее толерантным) и т. д.

На часть этих факторов вполне можно влиять, что делает перекрестное субсидирование вполне допустимым (в определенных рамках). Тем не менее управление перечисленными факторами не приводит к радикальному решению проблемы, а позволяет лишь ослабить ее негативные последствия. Единственным исчерпывающим решением будет адекватная оценка на основе выявления и существенного снижения степени неоднородности. Разумеется, подобное решение может быть слишком дорогим для практической реализации, что, в свою очередь, потребует нахождения компромисса между затратами на снижение неоднородности данных при оценке и потерями от снижения точности оценок. Однако даже в такой ситуации менеджеры должны четко представлять, какое влияние на финансовые результаты будут оказывать перекрестное субсидирование и неблагоприятный отбор рисков.

## 4.2. СМЕСЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КАК МОДЕЛЬ УЩЕРБА ПО НЕОДНОРОДНОЙ ГРУППЕ РИСКОВ

### 4.2.1. Понятие смеси распределений

Из равенств (3.1) и (3.2) следует важное свойство

$$\begin{aligned}
 f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)}) = \\
 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-k \text{ раз}} f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)} | X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)} | x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}) \times \\
 \times f_{X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}) dx_{i(k+1)} \dots dx_{i(n)}.
 \end{aligned}$$

Оно позволяет переходить от условных распределений набора случайных величин  $X_{i(1)}, \dots, X_{i(k)}$  к безусловному. Важность этого свойства заключается в том, что такого рода задачи часто встречаются на практике, если случайные величины  $X_{i(k+1)}, \dots, X_{i(n)}$  интерпретировать как случайные значения параметров или объясняющих переменных. В этом качестве их часто обозначают  $\Theta = (\Theta_{k+1}, \dots, \Theta_n)$ .

Дальнейшее изложение в данном пункте проведем в упрощенной форме при  $k = 1$ ,  $n = 2$ . Тогда предыдущее равенство можно переписать в виде

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X|\Theta}(x|\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \quad (4.1)$$

в случае абсолютно непрерывного распределения или

$$F_X(x) = \sum_{\theta} F_{X|\Theta}(x|\theta) P[\Theta = \theta] \quad (4.2)$$

в случае дискретного распределения.

Подобные выражения можно интерпретировать различными способами.

С одной стороны, условное распределение можно рассматривать как представителя некоторого семейства, зависящего от значений параметра  $\theta$ . Если значение данного параметра неизвестно, но есть информация о его распределении, то соотношения (4.1) и (4.2) — это *смесь* компонентов данного семейства, т. е. усреднение

$$F_X(x) = E[F_{X|\Theta}(x|\Theta)],$$

отражающее неопределенность выбора  $\theta$ . Это математическое ожидание ни в коем случае не совпадает (в силу нелинейности функции  $F_X(\cdot)$ ) с функцией условного распределения при средней характеристике риска  $F_{X|\Theta}(x|E[\Theta])$ . В данном случае важно, что изначально речь идет о двумерном распределении  $(X, \Theta)$ , а условные и маргинальные распределения представляют собой его сечения и проекции соответственно. При этом условное распределение отражает характер зависимости, а усреднение с учетом смешивающего распределения, т. е. построение маргинального распределения, элиминирует влияние неизвестного параметра  $\theta$ .

С другой стороны, про распределение  $F_{X|\Theta}(x|\theta)$  можно думать как про распределение с параметром  $\theta$ . Если оно неизвестно, то  $F_{X|\Theta}(x|\theta)$  можно рандомизировать по  $\theta$ , моделируя отсутствие (дефицит) информации о величине  $\theta$  с помощью введения соответствующей случайной величины. Эта интерпретация близка к предыдущей, но различие состоит в том, что анализ начинается с одномерных распределений  $X$  и  $\Theta$ , а затем с учетом зависимости между ними конструируется их совместное распределение, отражающие разные типы неопределенности. Иными словами, случайная величина  $(X, \Theta)$  конструируется из соотношения ее компонент и описывает как неопределенность, связанную с наблюдаемым явлением, так и степень субъективной неуверенности вследствие недостатка сведений.

### 4.2.2. Формула Байеса

Из (3.2) также следует важное свойство

$$\begin{aligned} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= f_{X_{i(1)} \dots X_{i(k)} | X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(1)}, \dots, x_{i(k)} | x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}) \times \\ &\quad \times f_{X_{i(k+1)} \dots X_{i(n)}}(x_{i(k+1)}, \dots, x_{i(n)}), \end{aligned}$$

которое позволяет сформулировать ряд важных результатов в терминах условных распределений.

В частности, постановки моделей на основе распределения наблюдений с неопределенными параметрами требуют высказывания суждений о том, что представляют собой распределения самих параметров. Сложности возникают, когда эти параметры ненаблюдаемы, так как в этом случае невозможно прямо построить функцию распределения многомерной случайной величины  $(X, \Theta)$ . Выше (п. 4.2.1) предполагалось, что информация о распределении параметров известна или в форме функции совместного распределения, или в форме маргинального распределения. Иными словами, утверждалось наличие некоторых исходных сведений о распределении, которое в этой связи называется *априорным*.

Однако на практике часто возникают проблемы с обоснованностью представлений об априорном распределении. Поэтому появляется необходимость уточнения этого распределения по имеющимся наблюдениям. Такое уточнение связывают с понятием *апостериорного распределения*, т. е. условного распределения при условии наличия наблюдений  $X_{i(k+1)} = x_{i(k+1)}, \dots, X_{i(n)} = x_{i(n)}$ , которое задается формулой Байеса<sup>1</sup>:

$$f_{\Theta | X_1, \dots, X_n}(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f_{X_1 \dots X_n | \Theta}(x_1, \dots, x_n | \theta) f_{\Theta}(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 \dots X_n | \Theta}(x_1, \dots, x_n | \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta}. \quad (4.3)$$

При росте объема выборки  $n$  влияние априорного распределения, т. е. первоначальных предположений о характере распределения параметров, уменьшается.

<sup>1</sup>Для простоты изложения и интерпретаций будем предполагать в рамках настоящей главы, что случайная величина  $\Theta$  является одномерной.

В силу того, что знаменатель в предыдущей формуле равен плотности совместного распределения  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ , т. е. не зависит от  $\theta$ , его можно рассматривать как нормирующую константу для распределений, связанных со случайной величиной  $\Theta$ . Иными словами, функция плотности апостериорного распределения пропорциональна произведению условной функции правдоподобия (при условии на значение соответствующего параметра) и функции плотности априорного распределения:

$$f_{\Theta|X_1, \dots, X_n}(\theta|x_1, \dots, x_n) \propto f_{X_1, \dots, X_n|\Theta}(x_1, \dots, x_n|\theta)f_{\Theta}(\theta). \quad (4.4)$$

Некоторые соотношения между априорными и апостериорными распределениями приведены в табл. 4.1.

#### 4.2.3. Смеси распределений для моделирования неоднородности

Для моделирования неоднородности удобно ввести вспомогательную случайную величину, традиционно обозначаемую  $\Theta$ . Она обычно интерпретируется как некая характеристика риска, если речь идет об одномерной случайной величине, или как набор характеристик в случае многомерной случайной величины. Это могут быть параметры функции распределения ущерба, моменты или иные специально сконструированные меры риска. Главное при выборе  $\Theta$  состоит в том, что эта величина объясняет (прямо или косвенно) различия в статистике ущерба. Иными словами, выбранная характеристика так или иначе отражает механизм проявления и источник неоднородности рисков.

В рамках такой модели считается, что из общей неоднородности совокупности можно выделить однородную подгруппу, зафиксировав значение характеристики риска<sup>2</sup>  $\Theta = \theta$ . Если оно не является легко идентифицируемым или вообще неизвестно (не наблюдаемо), то распределение ущерба удобно моделировать с помощью смеси распределений. Для этого важно задать (исследовать) смешивающее распределение  $f_{\Theta}(\theta)$ . С точки зрения принятой нами интерпретации оно определяет структуру портфеля рисков (по значениям характеристики риска  $\theta$ ), так что в специальной литературе его иногда называют структурным распределением.

При такой постановке случайная величина ущерба  $X$  по наугад выбранному риску описывается функцией распределения (4.1) или (4.2). Следует заметить, что  $F_{X|\Theta}(x|\theta)$  — функция распределения случайной величины ущерба из подгруппы, определенной условием  $\Theta = \theta$ . С математической точки зрения это условное распределение.

Усреднение по возможным значениям характеристики риска, в частности, означает, что математическое ожидание случайной величины ущерба  $X$ , имеющей безусловное распределение, можно представить как усреднение условных математических ожиданий:

$$E[X] = E[E[X|\Theta]] = E[\mu(\Theta)], \quad (4.5)$$

<sup>2</sup>Хотя для абсолютно непрерывных распределений случайной величины  $\Theta$  выражение  $\Theta = \theta$  задает множество меры 0 и должно заменяться неравенством  $\theta \leq \Theta < \theta + d\theta$ , в контексте условных распределений используют именно  $\Theta = \theta$  как символическую запись, подчеркивающую получение условного распределения путем сечения.

Таблица 4.1. Соотношения между распределениями в формуле Байеса

Условное распределение наблюдений (при условии на параметр $\theta$ )	Распределение возможных значений параметра $\theta$	
	априорное	апостериорное
Гамма-распределение с параметрами $\alpha$ и $\theta$	Гамма-распределение с параметрами $\beta$ и $\lambda$	Гамма-распределение с параметрами $\alpha n + \beta$ и $\lambda + \sum_{i=1}^n x_i$
Гамма-распределение с параметрами $\alpha$ и $\theta$	Экспоненциальное распределение с параметром $\lambda$	Гамма-распределение с параметрами $\alpha n + 1$ и $\lambda + \sum_{i=1}^n x_i$
Экспоненциальное распределение с параметром $\theta$	Гамма-распределение с параметрами $\beta$ и $\lambda$	Гамма-распределение с параметрами $n + \beta$ и $\lambda + \sum_{i=1}^n x_i$
Экспоненциальное распределение с параметром $\theta$	Экспоненциальное распределение с параметром $\lambda$	Гамма-распределение с параметрами $n + 1$ и $\lambda + \sum_{i=1}^n x_i$
Распределение Пуассона с параметром $\theta$	Гамма-распределение с параметрами $\beta$ и $\lambda$	Гамма-распределение с параметрами $\beta + \sum_{i=1}^n x_i$ и $\lambda + n$
Распределение Пуассона с параметром $\theta$	Экспоненциальное распределение с параметром $\lambda$	Гамма-распределение с параметрами $1 + \sum_{i=1}^n x_i$ и $\lambda + n$
Биномиальное распределение с параметрами $m$ и $\theta$	Бета-распределение с параметрами $p$ и $q$	Бета-распределение с параметрами $p + \sum_{i=1}^n x_i$ и $n m + q - \sum_{i=1}^n x_i$
Биномиальное распределение с параметрами $m$ и $\theta$	Равномерное распределение на отрезке $(0; 1)$	Бета-распределение с параметрами $1 + \sum_{i=1}^n x_i$ и $n m + 1 - \sum_{i=1}^n x_i$
Отрицательное биномиальное распределение с параметрами $m$ и $\theta$	Бета-распределение с параметрами $p$ и $q$	Бета-распределение с параметрами $m n + p$ и $q + \sum_{i=1}^n x_i$
Геометрическое распределение с параметром $\theta$	Бета-распределение с параметрами $p$ и $q$	Бета-распределение с параметрами $n + p$ и $q + \sum_{i=1}^n x_i$
Отрицательное биномиальное распределение с параметрами $m$ и $\theta$	Равномерное распределение на отрезке $(0; 1)$	Бета-распределение с параметрами $m n + 1$ и $1 + \sum_{i=1}^n x_i$
Геометрическое распределение с параметром $\theta$	Равномерное распределение на отрезке $(0; 1)$	Бета-распределение с параметрами $n + 1$ и $1 + \sum_{i=1}^n x_i$
Нормальное распределение с параметрами $\theta$ и $\sigma^2$	Нормальное распределение с параметрами $\mu$ и $v^2$	Нормальное распределение с параметрами $\frac{v^2 \sum_{i=1}^n x_i + \sigma^2 \mu}{n v^2 + \sigma^2}$ и $\frac{\sigma^2 v^2}{n v^2 + \sigma^2}$

где  $\mu(\theta)$  — математическое ожидание случайной величины, имеющей условное распределение при условии  $\Theta = \theta$ . Аналогично для дисперсии имеем

$$D[X] = E[D[X|\Theta]] + D[E[X|\Theta]] = E[\sigma^2(\Theta)] + D[\mu(\Theta)], \quad (4.6)$$

где  $\sigma^2(\theta)$  — дисперсия случайной величины, имеющей условное распределение при  $\Theta = \theta$ . Дисперсия  $D[X]$  имеет два компонента, первый из которых отражает коле-

бания ущерба относительно условного математического ожидания и характеризует «истинную» неопределенность, порождаемую индивидуальным риском, а второй — вариацию характеристики риска, описываемую случайной величиной  $\Theta$ , т. е. неопределенностью типа риска.

Таким образом, отклонение  $\mu(\theta)$  от  $E[\mu(\Theta)]$  и необходимость введения дополнительного компонента  $D[\mu(\Theta)]$  в формулу дисперсии являются «платой» за невозможность априорной идентификации типа риска. Перекрестное субсидирование возникает в связи с тем, что разность  $\mu(\theta) - E[\mu(\Theta)]$  может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от значения  $\theta$ , и при этом, очевидно, выполняется равенство  $E[\mu(\Theta) - E[\mu(\Theta)]] = 0$ .

В случае неблагоприятного отбора происходит такое изменение распределения случайной величины  $\Theta$ , что масса вероятности сдвигается вправо (распределение характеристик риска по договорам в портфеле «ухудшается»), так что имеет место соотношение

$$E[\mu(\Theta_{t+1}) - E[\mu(\Theta_t)]] > 0, \quad (4.7)$$

где  $\Theta_{t+1}$  и  $\Theta_t$  — случайные величины, описывающие распределение характеристик риска в моменты времени  $t+1$  и  $t$ . Это выражение, очевидно, эквивалентно неравенству  $E[\mu(\Theta_{t+1})] > E[\mu(\Theta_t)]$ . Неравенство (4.7) демонстрирует возможность ухудшения финансового положения компании из-за ухудшения качества рисков.

Альтернативная интерпретация смеси распределений предполагает иной механизм возникновения неопределенности: само распределение ущерба (или его «базовая» модель) остается неизменным, но для повышения адекватности моделирования и точности прогноза учитывается ряд дополнительных факторов, изменение которых носит случайный характер. Иными словами, неоднородность рисков здесь связана не с особенностями самих рисков, а с различиями их реализации в разные периоды времени. Очевидно, такая интерпретация в большей мере касается прогнозирования, а не проблемы неоднородности, так как в контексте последней она возможна при использовании данных, дифференцированных во времени, в пространстве и по иным критериям.

Приведем пример подобной интерпретации. Распределение ущерба  $X$  в базовом периоде характеризуется фиксированной характеристикой  $\theta_0$ , так что соответствующую функцию распределения можно записать в виде  $F_X(x|\theta_0)$ . Если бы не было влияния инфляции, это распределение вполне адекватно описывало бы случайную величину ущерба в прогнозируемый период, т. е.  $X$  — подходящая модель ущерба в «реальном» выражении. Влияние инфляции можно смоделировать с помощью случайной величины  $\Xi$  с функцией распределения  $F_{\Xi}(\xi)$ , которую для определенности в нашем примере будем считать абсолютно непрерывной, хотя на практике могут встретиться и другие варианты. Тогда размер ущерба в номинальном выражении  $X_{nom}$  можно представить как произведение  $X_{nom} = \Xi \cdot X$ , функция распределения которого записывается следующим образом:

$$F_{X_{nom}}(x) = P[X_{nom} < x] = \int_0^{\infty} P[\Xi X < x | \Xi = \xi] f_{\Xi}(\xi) d\xi.$$

Если для простоты предположить, что условную вероятность  $P[\Xi X < x | \Xi = \xi]$  можно описать функцией распределения  $F_X(x|\xi\theta_0)$ , т. е.  $\theta_0$  — параметр масштаба

соответствующего распределения, то искомое распределение случайной величины  $X_{nom}$  представляет собой смесь

$$F_{X_{nom}}(x) = \int_0^\infty F_X(x|\xi\theta_0) f_\Xi(\xi) d\xi,$$

что аналогично (4.1). Эту аналогию можно усилить с учетом замены переменной  $\theta = \xi\theta_0$  при  $\theta_0 > 0$ :

$$F_{X_{nom}}(x) = \int_0^\infty F_X(x|\theta) \frac{1}{\theta_0} f_\Xi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) d\theta.$$

Если случайная величина  $\Xi$  заменяется на

$$\Xi = \frac{1}{\theta_0} \Theta,$$

где случайная величина  $\Theta$  имеет функцию распределения

$$F_\Theta(\theta) = F_\Xi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$$

и функцию плотности распределения

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\theta_0} f_\Xi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right),$$

а функция распределения  $F_X(x|\theta)$  рассматривается как функция условного распределения  $F_{X|\Theta}(x|\theta)$ , то получим формулу смеси распределений в классическом виде (4.1).

Иногда случайная величина  $\Theta$  является не показателем, характеризующим распределение, а искусственной конструкцией, отражающей степень нашего незнания или то, как нам удобно думать о неоднородности. Тогда выражения (4.1) или (4.2) следует интерпретировать не как смеси распределений, отражающие реальную структуру портфеля рисков или влияние дополнительных факторов, а как рандомизированное описание функции распределения, когда точное значение его параметров неизвестно. Иными словами, такая интерпретация связана, скорее, с ошибками наблюдения и оценивания, т. е. с дефицитом информации. Аналогично меняется и представление о выражениях (4.5) и (4.6): искажение оценки математического ожидания и дополнительный компонент в формуле дисперсии являются мерой незнания (дефицита информации).

При такой интерпретации неоднородность портфеля рисков может быть только одним компонентом неопределенности — хотя весьма вероятным, но вовсе не обязательным. Поэтому, несмотря на то, что формулы для всех интерпретаций будут тождественными, их приложения и истолкование результатов будут различными. В частности, подобная модель может и не приводить к ситуации перекрестного субсидирования, а только отражать ухудшение финансового состояния.

Таким образом, на практике возможно сочетание различных интерпретаций, так как риск-менеджер сталкивается, как правило, со всеми типами факторов, а именно со следующими:

- различиями в рисках, на которых базируется «реальная» неоднородность портфеля, выражающаяся в модели смеси распределений,
- «внешними» воздействиями на механизм возникновения рисков, которые также удобно моделировать с помощью смеси распределений,
- недостатком данных, приводящим к «воображаемой» неоднородности портфеля, что связано с моделью рандомизации.

Часто у риск-менеджера мало информации для того, чтобы предпочесть одну из интерпретаций. Однако влияние дефицита статистики можно учесть более простыми методами, упомянутыми в предыдущих главах. Поэтому предпочтение отдается представлению (4.1) или (4.2) как смеси распределений, а оценке точности в рамках рандомизации распределений ущерба уделяется роль вспомогательного инструмента.

Модель смеси распределений может использоваться и косвенным образом. В частности, случайная величина ущерба  $X$  была представлена в равенстве (1.2) как смесь случайной величины  $Y$  и вырожденной случайной величины, тождественно равной нулю с вероятностью 1, причем распределение случайного индикатора  $I$  являлось смешивающим. В этом смысле выражение (1.4) является частным случаем соотношения (4.2), если учесть, что функция распределения упомянутой вырожденной случайной величины имеет вид

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Анализ ущерба «большого» размера или даже катастрофического ущерба может включать более содержательное применение смесей распределений. В данном случае удобно рассматривать смесь распределений с компонентом, моделирующим ущерб «нормальной» величины, и компонентом, задающим распределение «большого» ущерба. Использование такого представления может быть

- *прямым*, т. е. отражающим реальную неоднородность, так что модель будет учитывать различия в рисках или в особенностях реализации неблагоприятных событий, что полностью соответствует данной ранее интерпретации соотношений (4.1) и (4.2);
- *косвенным*, являющимся всего лишь удобным приемом (инструментом) анализа. Тогда оно носит «искусственный» характер, так как осуществляется не для повышения однородности, а для удобства последующего анализа. В частности, для целей изучения финансовых последствий может быть полезно отделить «обычные» неблагоприятные события, предполагающие «нормальный» ущерб, от «экстраординарных», т. е. тех, которые происходят редко (раз в несколько лет), но вызывают «большой» ущерб.

### 4.3. ФАКТОРЫ РИСКА

#### 4.3.1. Понятие факторов риска

Факторы риска — показатели и признаки, которые кажутся связанными с характеристикой риска  $\theta$ . Их учет позволяет уточнить оценку  $\theta$  и тем самым обеспечивает разбиение неоднородной совокупности на более однородные группы. Использование слов «кажутся связанными» вместо прямого утверждения о непосредственной зависимости не случайно. Дело в том, что факторы риска необязательно объективно обусловлены, а могут отражать субъективные представления (в том числе и ошибочные) риск-менеджеров о характере возникновения ущерба.

Как правило, необходимость выявления факторов риска возникает при невозможности идентифицировать или, по крайней мере, численно оценить исходную характеристику риска, так что приходится искать косвенные пути для поведения количественного анализа. Поэтому еще одним важным свойством факторов риска является относительная легкость получения статистических данных (по сравнению с прямым наблюдением значений  $\theta$ ).

Однако по своей природе и взаимосвязи с характеристикой  $\theta$  факторы риска могут принципиально различаться.

Природа факторов риска определяется особенностями носителей риска. Прежде всего, большое значение имеют тип неопределенности и особенности механизма возникновения неблагоприятного события, так как частота возникновения и размер ущерба будут характеризоваться разными наборами факторов риска. Как правило, такие наборы включают следующие подгруппы:

- *факторы риска, характеризующие поведение носителя риска.* Так, в автостраховании к подобным общим факторам риска следует отнести пол, возраст и семейное положение, а к специфическим — водительский стаж и наличие дорожно-транспортных происшествий;
- *факторы риска, отражающие специфику механизма возникновения убытков.* Например, в случае страхования автомобилей к ним можно отнести тип и марку автомобиля, объем двигателя, характер его использования (личный или служебный) и т. д., которые влияют на шансы возникновения и размер ущерба;
- *факторы риска, связанные с институциональными условиями* (в страховании — особенности покрытия, уплаты премий, список исключений и т. п.).

По характеру связи с риском факторы риска могут быть совершенно различными. Естественно, важную роль будут играть те факторы, которые хорошо вписываются в механизм возникновения: они могут увязываться со спецификой тех или иных элементов такого механизма или с особенностями распределения убытков. Иными словами, корреляция наблюдаемых значений таких факторов риска в портфеле рисков со случайной величиной  $\Theta$  отражает реальные зависимости в процессе реализации риска.

Тем не менее в ряде случаев в качестве факторов риска иногда удобно использовать показатели и признаки, напрямую не связанные с механизмом возникновения ущерба. Хотя имеет место косвенная зависимость между значением такого фактора

риска и возможностью возникновения или размером ущерба, она опосредуется иными обстоятельствами, которые теснее взаимодействуют с характеристикой риска  $\theta$ . Единственная причина использования подобных факторов — простота их идентификации. Иными словами, они являются своего рода «маркерами», позволяющими легко определить особенности реализации риска.

В качестве примера можно привести данные о месте жительства (адрес) для медицинского страхования. Действительно, различные районы одного города вряд ли будут принципиально различаться по экологическим и географическим условиям, но информация о том, что застрахованный проживает в престижном районе или доме, косвенно свидетельствует о его доходах, а следовательно, об особенностях поведения и возможной структуре заболеваемости.

В ряде случаев косвенный тип взаимодействия реального риска с «маркерами» такого рода делает разбиение совокупности недостаточно точным. В этой ситуации риск-менеджер должен стремиться к их замене факторами риска «прямого действия», если выявление последних возможно.

#### 4.3.2. Основные этапы анализа факторов риска

Эмпирический подход к анализу факторов риска предполагает выделение такого показателя, который был бы подходящей мерой «объема» риска. Он выбирается таким образом, чтобы отражать различия в характеристиках. При этом некоторые факторы риска нередко обуславливают выбор единиц измерения, что позволяет привести риски к более сопоставимому виду. Примерами могут служить пробег легкой автомашины, число тонно-километров при использовании грузового транспорта, время работы оборудования (особенно при внесении поправок, связанных с интенсивностью его использования) и т. п. Этот показатель часто называют *подверженностью риску*<sup>3</sup>.

С технической точки зрения использование такого подхода означает введение весов, отражающих «вклад» каждого отдельного риска в портфель в целом. Величины ущерба с поправкой на эти веса будут более однородны. Например, эти веса можно моделировать одним распределением. Таким образом, использование подверженности риску позволяет снижать неоднородность портфеля.

Подобные эмпирические методы не противоречат применению формальных методик, так что они могут использоваться как отдельно, так и в сочетании с методиками математической статистики. В целом процедура может быть достаточно сложной и многоэтапной, при этом не любой фактор риска находит свое применение для выделения относительно однородных тарифных классов. Анализ факторов риска имеет смысл разделить на следующие основные этапы:

1. Подготовительный этап (качественный анализ и сбор информации).
2. Отбор ковариат в ходе предварительного статистического анализа.
3. Согласование результатов статистического анализа с политикой в области управления рисками.
4. Использование полученных оценок для принятия управленческих решений.

<sup>3</sup>Словосочетание «подверженность риску» является дословным переводом английского термина «Exposure-to-Risk», поэтому не совсем точно передает смысл понятия. Очень важно, что подверженность риску выражается в абсолютных единицах, а не в относительных.

В ряде случаев применение тех или иных методов многомерного статистического анализа позволяет одновременно решать задачи, отнесенные к разным этапам. Например, применение регрессионного анализа приводит к формуле для оценки математических ожиданий, так что большая часть задач четвертого этапа решается уже на втором, хотя это не отменяет необходимости уточняющих расчетов на последнем этапе. Рассмотрим эти этапы подробнее.

### 4.3.3. Подготовительный этап

Первый этап представляет собой, по существу, процесс идентификации факторов риска и их предварительного обсуждения, включая сбор необходимой статистики, что создает условия для последующего анализа.

Качественный анализ возможности использования тех или иных факторов риска является важным шагом при подготовке к исследованию факторов, влияющих на размер ущерба. Как правило, именно он определяет специфику всех дальнейших действий. Однако на практике выбор тех или иных величин часто осуществляется не в ходе формальных изысканий, а следует из особенностей бизнеса и текущей конъюнктуры.

Влияние некоторых факторов на размер ущерба считается очевидным (скажем, влияние строительных материалов на риск возникновения пожара). Применение других объясняется традицией принятия управленческих решений в конкретной области. Примером может служить поло-возрастная дифференциация страховых тарифов. Однако ряд факторов требует специального статистического обоснования на основе информации по портфелю рисков.

Подобные обоснования часто требуют организации сбора необходимых данных, так как маловероятно найти в регулярно обрабатываемой статистике сведения о влиянии совершенно нового фактора риска, потому что ранее никому в компании, скорее всего, не приходило в голову накапливать подобный статистический материал. Использование внешних источников возможно, но соответствующий эффект все равно желательно подтвердить на основе анализа внутренней информации. Для получения последней риск-менеджер может использовать два подхода:

- накопление собственных данных компании, что может занять несколько лет, в течение которых эффективная защита от соответствующих рисков отсутствует;
- организация так называемого «информационного пула», предполагающего объединение статистики нескольких компаний, что убыстряет сбор данных, но приводит к риску утечки информации конкурентам.

При выборе второго подхода очевидно, что необходимо предпринимать определенные усилия для того, чтобы подробная статистика не попала к конкурентам. В частности, это предполагает проведение исследования не представителями самих конкурирующих компаний, а независимыми экспертами. Кроме того, в отчетах о результатах анализа содержатся только усредненные данные по всему пулу, которые могут быть использованы для уточнения оценок по своему портфелю рисков.

Дизайн представления статистических данных достаточно сложен: вместо скалярных наблюдений ущерба  $x_j$  риск-менеджер будет иметь дело с наборами величин

$(x_j, w_{1j}, \dots, w_{mj})$ ,  $j \in 1 \div n$ , где  $w_{ij}$  — значение  $i$ -й ковариаты (фактора риска) в  $j$ -м наблюдении. Это требует более комплексной процедуры сбора информации, так как использование  $x_j$  и  $w_{ij}$  из различных источников наблюдений проблематично.

Анализ факторов риска предполагает отбор таких факторов, которые будут использоваться (возможно, с учетом подходящих преобразований, например дискретизации) для принятия решений. Часто на практике речь идет об оценке  $E[X | w_1, \dots, w_{\hat{m}}]$ , где  $\hat{m}$  — число используемых факторов.

Если объем данных достаточно велик, то рекомендуется разделить выборку на две части — обучающую и контрольную. Статистическое оценивание осуществляется на основе первой, а вторая используется для проверки качества оценивания.

В ряде случаев значения ковариат должны быть предварительно модифицированы в связи с особенностями интерпретации и/или удобства статистической обработки. В частности, речь может идти об изменении единиц измерения либо о замене количественной переменной (принимаяющей вещественные или целочисленные значения) порядковыми или индикаторными.

Последнее хорошо согласуется с использованием априорно определенных интервалов значений, например, на основе требований надзорных органов или принятой ранее политики управления рисками. Поэтому такой прием хорошо срабатывает, когда нужно увязать новые данные с классификацией прошлых периодов, а также при согласовании типов данных (например, индикатор пола с целочисленной переменной возраста или вещественной переменной дохода).

Рассмотрим пример с дискретизацией возраста, обусловленной выбором возрастных интервалов. Подобная процедура предполагает замену одной «обычной» переменной  $w_i$  набором  $k$  индикаторов  $w_i^{(1)}, \dots, w_i^{(k)}$ , задающим  $k + 1$  интервал значений. В табл. 4.2 представлен вариант замены такой замены для шести возрастных групп.

Таблица 4.2. Определение значений индикаторов для возрастных интервалов

Индикатор	Возрастной интервал					
	до 20 лет	20–29 лет	30–39 лет	40–49 лет	50–59 лет	более 60 лет
$w_i^{(1)}$	0	1	0	0	0	0
$w_i^{(2)}$	0	0	1	0	0	0
$w_i^{(3)}$	0	0	0	1	0	0
$w_i^{(4)}$	0	0	0	0	1	0
$w_i^{(5)}$	0	0	0	0	0	1

Естественно, индикаторы  $w_i^{(1)}, \dots, w_i^{(k)}$  теперь следует рассматривать совместно. Очевидно, что подобное «разбиение» переменной не единственно, и большую роль при этом играют субъективные факторы и априорные ограничения (скажем, существующая группировка по возрастам).

Ещё одним преимуществом подобной дискретизации является возможность уменьшения зависимости между значениями ковариат, что, однако, не гарантировано и требует специальной статистической проверки в каждом конкретном случае. Это полезно, когда соответствующие ковариаты необходимо включить в анализ из-за особенностей их интерпретации (например, возраст и состояние здоровья).

#### 4.3.4. Отбор ковариат

После сбора статистических данных следует начинать процесс их формального анализа. В первую очередь нужно организовать статистическую проверку выдвинутых ранее гипотез о возможном влиянии тех или иных факторов риска на частоту и размер ущерба. Однако отбор переменных не только важен с содержательной точки зрения, но и в ряде случаев необходим для более эффективной организации статистических процедур. В частности, при большом числе малоинформативных ковариат вклад их случайной составляющей в общие колебания будет больше, чем добавление регулярных компонент в объяснение поведения размера ущерба.

Проверка тесноты связи может осуществляться в качестве отдельной фазы исследования или встраиваться в процедуру оценки среднего ущерба. Иногда полезно проверить специальные статистические гипотезы о наличии зависимости и ее форме. Так, при исследовании зависимости между двумя случайными величинами статистика

$$\frac{\hat{\rho}^2(n-2)}{1-\hat{\rho}^2}$$

имеет  $F$ -распределение Фишера со степенями свободы 1 и  $n-2$  ( $n$  — объем выборки), что позволяет проверить гипотезу об отсутствии линейной зависимости (если фактическое значение больше табличного, то гипотеза отвергается)<sup>4</sup>. Для проверки гипотезы об отсутствии нелинейной связи используется критерий, основанный на величине

$$\frac{(\hat{\eta}^2 - \hat{\rho}^2)(n-k)}{(1-\hat{\rho}^2)(k-2)},$$

который сопоставляется с табличным значением  $F$ -распределения с параметрами  $(k-2)$  и  $(n-k)$ . Если первое больше второго, то выбирается нелинейная зависимость, в противном случае — линейная.

В ряде случаев процедура выделения тарифных классов и/или оценка среднего ущерба предусматривает возможность отбора существенных переменных. Кроме того, эту процедуру можно построить таким образом, чтобы из некоторого набора вариантов можно было выбрать наилучший. Последнее предполагает:

- выбор подходящего критерия оптимальности (например, коэффициент множественной корреляции или отношение правдоподобия),
- организацию перебора различных сочетаний факторов риска в рамках итеративной процедуры выборочной оценки меры риска.

Такая итеративная процедура может быть организована по-разному. При небольшом числе вариантов имеет смысл провести полный перебор. Однако следует помнить, что число всевозможных сочетаний быстро возрастает при увеличении количества анализируемых факторов: при  $k$  факторах оно будет равно  $2^k$ . Поэтому имеет смысл ограничивать перебор, например, на основе подходящим образом адаптированного метода ветвей и границ. Другая возможность ограничения перебора —

<sup>4</sup>В связи с тем, что случайная величина, подчиненная  $F$ -распределению Фишера со степенями свободы 1 и  $k$ , совпадает с квадратом случайной величины, имеющей  $t$ -распределение Стьюдента со степенью свободы  $k$ , на практике чаще берут квадратный корень из приведенной статистики и проверяют нулевую гипотезу о наличии зависимости с помощью  $t$ -критерия.

использование пошаговых процедур, когда на каждом шаге алгоритма происходит присоединение и/или удаление ковариаты.

Частным случаем пошаговой процедуры является процедура последовательного удаления, когда расчеты начинаются с так называемой полной модели, включающей в себя все возможные факторы риска, а затем происходит постепенное уменьшение их числа до тех пор, пока критерий оптимальности улучшается. Альтернативой служит процедура последовательного присоединения, когда анализ начинается с нулевой модели, не включающей ковариат, а затем происходит их добавление. Иногда используют промежуточный алгоритм, позволяющий как включать, так и исключать переменные на каждом шаге. Более подробно процедуры статистической обработки данных охарактеризованы далее, в п. 4.4 настоящей главы.

На практике полезно учитывать качественную информацию при организации отбора факторов риска. В частности, это подразумевает априорное включение некоторых ковариат и/или экспертное упорядочение последних. Хотя такие действия упрощают расчеты и повышают содержательную ценность их результатов, они, к сожалению, увеличивают субъективность анализа, так что разные риск-менеджеры могут давать различающиеся рекомендации.

#### 4.3.5. Согласование результатов анализа с политикой управления рисками

Если статистические гипотезы о существенности влияния тех или иных факторов риска подтверждаются, то встает вопрос об учете соответствующей информации при принятии управленческих решений. Сначала проводится отбор факторов риска, которые будут использованы при конструировании или совершенствовании методики измерения рисков. Тот факт, что часть факторов риска исключается из рассмотрения, делает создаваемое измерение рисков более грубым, так как степень неоднородности возрастает. Но в ряде случаев это выгодно с иных точек зрения.

Для того чтобы лучше понять такое положение дел, приведем критерии отбора<sup>5</sup>. Прежде всего должны учитываться критерии, связанные с бизнесом. Они включают в себя:

- *традиции, которых придерживаются на соответствующем рынке, и особенности политики данной компании в прошлом.* Так, принципиальные отличия структуры мер риска от того, что предполагают конкуренты, или ее частные изменения могут ухудшать условия работы компании. В этом случае отрицательный эффект будет больше положительного (от более адекватных мер риска);
- *относительная простота и дешевизна использования соответствующих классификаторов.* Это означает, что затраты на получение необходимой информации должны быть невелики. Кроме того, не должно возникать проблем при выделении соответствующих групп: их следует конструировать так, чтобы они были дополняющими друг друга, но не пересекающимися. Наконец,

<sup>5</sup>Напомним, что речь идет о факторах риска, влияние которых на частоту и размер ущерба считается статистически доказанным. Это позволяет временно опустить изложение соответствующих критериев (они анализируются далее, в п. 4.3.6).

необходимо уменьшить возможности совершения ошибок при принятии решений;

- *незначительная возможность проявления оппортунистического поведения*, т. е. сознательного или бессознательного обмана контрагентов. Для этого нужно обеспечить возможность проверки предоставленной контрагентами информации, доступность для понимания клиентом данного признака выделения тарифного класса и ряд других свойств.

Однако использование только таких критериев, при всей их важности, будет недостаточным. Следует принять во внимание критерии отбора, обеспечивающие социальную приемлемость выделения тех или иных групп рисков. К ним можно отнести:

- *ограничения использования личной информации*. Ее применение может весьма болезненно восприниматься потенциальными клиентами, не говоря уже о прямом запрете в законах и нормативных актах. На этом фоне может даже возникнуть неблагоприятный для фирмы общественный резонанс.
- *объективность оценки фактора риска*, связанную со значительным ограничением или даже полным запретом использования субъективных критериев при количественной оценке риска. В частности, хотя поведение застрахованных можно охарактеризовать с психологической точки зрения, ее недостаточная объективность препятствует применению такой информации при ценообразовании. Примером другого рода является установка противопожарной сигнализации, что рассматривается страховщиками как признак стремления избежать потерь, т. е. в качестве объективной характеристики поведения страхователя;
- *гуманитарные ценности*, т. е. отказ от использования таких факторов риска (скажем, расовой или национальной принадлежности), применение которых могло бы нарушить права человека<sup>6</sup>;
- *юридические ограничения*, определяемые законодательством. Сюда следует отнести любые запреты и требования, не включенные в предыдущий раздел. Например, нормативный акт может определять конкретную методику оценки риска.

Далее выделяют подходящие значения или интервалы значений факторов риска, отобранных в результате формальных и неформальных процедур. Таким образом происходит процесс образования подходящего классификатора, в котором классы представляют собой сочетание выделенных интервалов разных факторов риска.

Построенные таким образом классы должны быть однородными или, по крайней мере, следует добиться как можно более существенного уменьшения неоднородности. Вместе с тем в рамках каждого класса необходимо обеспечить достаточно большой объем наблюдений для достоверной статистической оценки риска. Эти требования частично противоречат друг другу, так что на практике приходится искать компромисс.

---

<sup>6</sup>Это тем более важно, потому что подобные факторы риска, если и демонстрируют влияние на размер ущерба, то являются «маркерами», т. е. такая зависимость не отражает реального механизма, а обусловлена общими причинами, например условиями жизни. Поэтому анализ факторов риска, выделенных при исследовании прямой взаимосвязи, будет более эффективным.

### 4.3.6. Использование полученных оценок для принятия управленческих решений

В целом окончательное формирование классификатора и оценка мер риска могут представлять собой последовательные шаги. Тогда обоснование тарифа происходит для каждого класса отдельно. Если эти процессы неразрывно связаны, то анализ осуществляется в рамках единой процедуры статистического анализа.

На практике нельзя ожидать идеального разбиения неоднородных совокупностей на однородные подгруппы. Поэтому при любой классификации неоднородность сохранится в той или иной степени. Для эффективного управления портфелем рисков важно понимать, как такая остаточная неоднородность будет влиять на финансовые результаты.

## 4.4. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕДУР АНАЛИЗА ФАКТОРОВ РИСКА

### 4.4.1. Многомерная классификация при исследовании факторов риска

Наиболее очевидным подходом к статистическому анализу данных, собранных для исследования влияния факторов риска на размер ущерба, являются методы многомерной классификации. Действительно, близкие (в некотором смысле) наблюдения  $(x_j, w_{1j}, \dots, w_{mj})$  можно считать принадлежащими однородной группе риска, так что формальные процедуры группировки, основанные на мерах близости или различия, могут быть весьма полезны.

Самым простым методом является комбинационная группировка, предполагающая разбиение значений факторов риска на подходящие интервалы и исследование распределений наблюдений по полученным сочетаниям интервалов. Графическая иллюстрация группировки представлена на рис. 4.1, где рассмотрены два фактора:  $w_1$  и  $w_2$ .

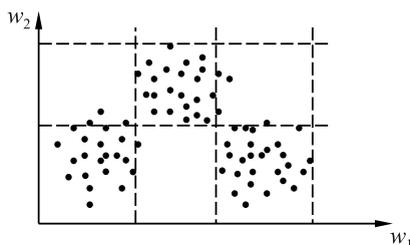


Рис. 4.1. Пример результатов комбинационной группировки.

Достоинствами этого метода является простота алгоритма разбиения и отсутствие сложностей интерпретации. Последнее особенно важно, так как на практике

предпочтительнее создавать классификаторы, являющиеся «пересечением» интервалов значений отдельных ковариат. Однако к недостаткам следует отнести высокую степень субъективности группировки, отражающую низкий уровень формализации процедуры, а также возможность получения пустых классов, для которых нельзя оценить меры риска.

Альтернативой является внедрение сложных статистических методов. В практике количественного риск-менеджмента может использоваться классификация как с обучением, так и без обучения.

Первый подход применяется, в частности, тогда, когда нужно согласовать группировки прошлых периодов с новыми данными текущего года. В этом случае реализуется один из алгоритмов дискриминантного анализа. Его суть состоит в выведении правил распределения наблюдений по классам, априорно заданным на основе обучающих выборок, чтобы минимизировать функцию качества классификации. Обычно такая функция в той или иной степени базируется на отношении правдоподобия.

Однако сформировать обучающую выборку на практике возможно далеко не всегда, так что второй подход также популярен. Классификация без обучения может осуществляться следующим образом:

- *иерархическая классификация*, которая реализуется путем последовательного разбиения всей совокупности многомерных наблюдений на группы, характеризующиеся максимизацией меры различий между этими группами (дивизимные, или нисходящие, алгоритмы) либо путем последовательного объединения отдельных наблюдений в кластеры, максимизирующие меры близости (агломеративные, или восходящие, алгоритмы);
- *автоматическая классификация*, которая позволяет разбить наблюдения по априорно заданному числу групп на основе меры внутригрупповой близости и межгруппового расстояния.

Основная проблема иерархической классификации заключается в том, на каком уровне иерархии остановиться, а автоматической — как выбрать число кластеров.

Получение подходящей классификации при использовании формальных статистических методов не гарантировано, так как соответствующие критерии и ограничения для этих методов задаются априорно и могут быть не согласованы с истинной структурой данных, выявляемой в ходе исследования. В такой ситуации полезно использовать разведочный анализ и проводить альтернативные расчеты, основанные на разных алгоритмах и мерах близости, с последующим сопоставлением результатов.

Важной проблемой практического использования многомерной классификации является вопрос, применять ли при статистической обработке все данные, т. е. в форме  $(x_j, w_{1j}, \dots, w_{mj})$ , или только значения ковариат  $(w_{1j}, \dots, w_{mj})$ . В первом случае влияние статистики ущерба может быть слишком велико из-за единиц измерения, так что в один кластер могут попасть наблюдения со сходным уровнем ущерба, но довольно различными значениями факторов риска. Иными словами, велики шансы неправильной группировки. Однако при втором варианте остаточная неоднородность, связанная с разбросом значений  $x_j$ , может быть слишком велика, чтобы оценки среднего ущерба считались удовлетворительными. Поэтому универсального однозначного ответа на поставленный вопрос нет — каждая практическая ситуация требует отдельного решения.

Даже при идеальной классификации ее согласование с требованиями, предъявляемыми на практике к тарифным классам, может быть проблематично. В качестве соответствующего примера рассмотрим упрощенную ситуацию с двумя факторами риска, представленную на рис. 4.2.

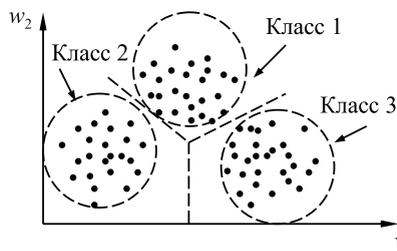


Рис. 4.2. Пример результатов автоматической классификации.

Окружности на рисунке обозначают выделенные в результате статистической процедуры классы, а штриховые линии — границы критических областей, определяющие правила разбиения. Если различия между классами 2 и 3 хорошо увязываются с интервалами значений фактора риска  $w_1$ , то определение класса 1 требует сочетания информации об обоих факторах риска, что может быть неудобно для практического использования.

#### 4.4.2. Анализ зависимости при исследовании факторов риска

Для того чтобы избежать проблем с образованием «пустых» классов или классов с недостаточным объемом наблюдений, а также повысить практическую применимость результатов, полученных в ходе статистического исследования, на практике широко используются методы регрессионного анализа. Его популярности также способствуют всесторонняя разработка математического аппарата, простота интерпретации и широкое распространение программного обеспечения, реализующего соответствующие алгоритмы.

Как известно, математически регрессионный анализ сводится к построению оценки (прогноза) зависимой переменной, которую в нашем случае естественно интерпретировать как ущерб размера  $x$ , представимый функцией  $g(w_1, \dots, w_m)$  независимых переменных  $w_1, \dots, w_m$  (рассматриваемых ковариат). Качество подбора оценки функции регрессии  $g(\cdot, \dots, \cdot)$  определяется на основе априорного критерия. На практике таким критерием чаще всего служит минимум квадратов отклонений (метод наименьших квадратов) или максимум функции правдоподобия<sup>7</sup> (метод максимального правдоподобия).

<sup>7</sup>Для упрощения расчетов на практике, как правило, максимизируется логарифм функции правдоподобия, что не изменяет точку, в которой достигается экстремум.

Наиболее простой подход состоит в построении линейной регрессии, т. е. выборе линейной функции

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i.$$

Популярность линейной регрессии определяется целым комплексом причин. Во-первых, для нее ряд технических процедур упрощается. В частности, минимизация квадратов отклонений сводится к решению системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными<sup>8</sup>. Во-вторых, линейную функцию легко интерпретировать: значение  $\beta_i$  представляет собой «вклад» каждой дополнительной единицы значения фактора риска в ожидаемый ущерб. Если используются индикаторные переменные (типа 0–1), связанные с тем или иным интервалом величин, который соответствует определенному тарифному классу, то коэффициент регрессии в зависимости от его знака будет означать увеличение или уменьшение среднего ущерба при переходе в данный класс по сравнению с «базовой» ситуацией.

К сожалению, линейная оценка не всегда адекватна структуре зависимости исследуемых статистических данных. Тогда перед специалистом по оценке риска встает дилемма:

- 1) использовать нелинейную регрессию, которая будет лучше описывать зависимость, но более сложна с точки зрения техники расчетов и интерпретации;
- 2) согласиться с применением более простого подхода на основе линейной регрессии несмотря на ее неадекватность и, следовательно, меньшую точность.

Во втором случае речь может идти как о получении наилучшего линейного прогноза (единственная регрессия на основе всех данных), так и об использовании кусочно-линейных аппроксимаций (несколько линейных регрессионных зависимостей на разных интервалах значений). Выбор, как правило, определяется особенностями практической ситуации и видом подходящей нелинейной функции.

Если все ковариаты представлены индикаторными переменными, то построение регрессии по существу сводится к схеме дисперсионного анализа. Особенно эффективно его применение при использовании комбинационной группировки и отсутствии пустых классов, так как в противном случае исходные данные нужно перегруппировать. При этом можно выявить как влияние отдельных факторов на средний ущерб по соответствующему классу, так и их совместное воздействие, отражающее системный (синергетический) эффект. Однако следует иметь в виду, что результаты дисперсионного анализа существенно зависят от качества разбиения на классы, так как если проверяемая в рамках данного метода гипотеза  $H_0 : \beta_i = 0, i \in 1 \div m$ , отвергается, то это вовсе не означает, что для любого  $i \in 1 \div m$  имеет место  $\beta_i > 0$ .

Альтернативой выбора между линейной и нелинейной регрессией может служить использование обобщенных линейных моделей, которые в настоящее время очень популярны в прикладных исследованиях. Они позволяют сохранять линейную форму, но при этом оценки строятся на основе нелинейных функций. Кроме того, такой подход дает возможность рассматривать ситуации с остатками, не подчиняющимися нормальному распределению.

<sup>8</sup>Строго говоря, это выполняется для любой аддитивной функции регрессии, линейной по  $\beta_i$ , но не обязательно линейной по  $w_i$ .

Так, для оценки распределения ущерба часто применяют гамма-регрессию, при использовании которой для упрощения интерпретации можно осуществить изменение параметров распределения, сделав замену  $\mu = \alpha/\lambda$ . При этом новый параметр  $\mu$  будет характеризовать математическое ожидание, которое удобно выразить в линейной форме. Другим параметром следует взять  $\alpha$ , так как он будет характеризовать постоянные коэффициенты вариации, асимметрии и эксцесса, хотя вид функции плотности распределения будет сложнее (см. задачу 4.7). Тогда с учетом подобной репараметризации размер ущерба можно считать случайной величиной, подчиненной гамма-распределению с математическим ожиданием  $\beta_0 + \sum \beta_j w_j$ .

Еще одним преимуществом обобщенных линейных моделей является возможность моделирования числа неблагоприятных событий в зависимости от факторов риска. Примером может служить пуассоновская регрессия, когда число событий рассматривается как случайная величина, имеющая распределение пуассона с параметром  $\beta_0^N + \sum \beta_j^N w_j$ .

Если ковариаты представляют собой индикаторные переменные, то обобщенные линейные модели хорошо согласуются с идеями дисперсионного анализа, позволяя учитывать влияние номинальных переменных как по отдельности, так и при сочетаниях. Кроме того, не возникает принципиальных трудностей при одновременном использовании номинальных и количественных переменных.

Более того, можно использовать более сложные (нелинейные) зависимости среднего ущерба от сочетаний ковариат. Для сохранения перечисленных выше преимуществ линейной формы ее часто «встраивают» в нелинейную функцию  $g(\cdot)$ , так что прогноз размера ущерба осуществляется по формуле вида  $\mu = g(\beta_0 + \sum \beta_j w_j)$ .

К основным недостаткам такого подхода следует отнести невозможность использования метода наименьших квадратов, качество которого тем хуже, чем сильнее распределение остатков отличается от нормального распределения. Поэтому на практике применяют более громоздкий метод максимального правдоподобия. Правда, указанный метод можно несколько упростить за счет сужения множества допустимых распределений остатков до класса экспоненциальных семейств (см. главу 1).

При организации расчетов необходимо решить три основных вопроса:

1. *Установление типа распределения остатков.* С точки зрения практических приложений это принципиальный вопрос, так как он определяет дизайн модели. Как правило, имеются априорные предположения о характере ущерба и возможном разбросе количества случаев возникновения ущерба, которые уменьшают число альтернатив.

2. *Отбор ковариат,* которые определяют специфику линейной формы. Данный вопрос решается в ходе последовательных расчетов, как это описано выше (п. 4.3.4).

3. *Выбор функции связи  $g(\cdot)$ .* Он может осуществляться на основе различных принципов. Так, одним из возможных вариантов, популярным на практике, является экспоненциальная функция  $g(\theta) = \exp(\theta)$ . Иными словами, функция регрессии имеет вид

$$x = g\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i\right) = \exp\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i\right).$$

Ее преимущество состоит в том, что она переводит аддитивные поправки в мульт-

типликативные коэффициенты. Другой вариант состоит в использовании вспомогательной функции  $b(\theta)$ , присутствующей в формуле (1.5):

$$b(\theta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i,$$

так что  $g(\cdot) = b^{-1}(\cdot)$ . Такая функция связи называется *канонической*, поскольку хорошо согласуется с видом распределения.

Качество регрессии проверяется с помощью критерия отклонений [deviance test], основанного на отношении правдоподобия. Тот факт, что при изменении количества ковариат тип модели не меняется, позволяет эффективно использовать данный критерий для сравнения разных вариантов модели.

## 4.5. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

### 4.5.1. Типовые задачи по неоднородности рисков

**Задача 4.1.** Некоторый портфель включает риски, ущерб по которым описывается случайной величиной

$$X_k = \begin{cases} 100, & \text{с вероятностью } p_k, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p_k, \end{cases}$$

где  $k$  обозначает тип риска, причем  $p_1 = 0,1$  (стандартные риски) и  $p_2 = 0,2$  (повышенные риски). В портфеле содержится 750 рисков первого типа и 250 рисков второго типа.

1. Определить средний ущерб на один риск, если:

а) тип риска идентифицируем;

б) тип риска не идентифицируем, но известны доли обоих классов в рассматриваемом портфеле.

*Решение.* Выполнение этого задания предполагает оценивание математического ожидания.

а) В силу того, что тип риска известен, средний ущерб (математическое ожидание) следует оценивать раздельно по обоим классам. В обоих случаях речь идет о распределении Бернулли, так что

$$\mu_k = E[X_k] = 100p_k,$$

откуда  $\mu_1 = 10$  и  $\mu_2 = 20$ .

б) При отсутствии возможности идентификации типа риска его следует моделировать с помощью смеси распределений. Возможны два способа расчетов.

*Первый способ* основан на прямых расчетах. Пусть  $X$  — случайная величина ущерба по наугад выбранному риску

$$X = (1 - I)X_1 + IX_2,$$

где  $I$  — случайная индикаторная величина, равная единице, если риск относится ко второму классу, или нулю, если к первому. Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  теперь рассматриваются как имеющие условное распределение, причем условие можно формулировать в терминах как случайной величины  $\Theta$ , принимающей значения  $p_1$  и  $p_2$ , так и случайной величины  $I$  со значениями 0 и 1, причем событие  $\{\Theta = p_1\}$  эквивалентно событию  $\{I = 0\}$ . Случайная величина  $I$  имеет распределение Бернулли с параметром  $q = 0,25$ .

Найдем распределение случайной величины  $X$ :

$$P[X = 0] = \sum_{j=0}^1 P[X_{j+1} = 0 | I = j] \cdot P[I = j] = 0,9 \cdot 0,75 + 0,8 \cdot 0,25 = 0,875.$$

Тогда  $\mu = E[X] = 100 \cdot 0,125 = 12,5$ .

*Второй способ* предполагает использование соотношения (4.5):

$$\mu = E[\mu(\Theta)] = 10 \cdot 0,75 + 20 \cdot 0,25 = 12,5.$$

**Задача 4.2.** Распределение двумерной случайной величины  $(X, \Theta)$  таково, что условное распределение случайной величины  $X$  при условии  $\Theta = \theta$  является нормальным с математическим ожиданием  $\theta$  и дисперсией  $\sigma^2$ , а маргинальное распределение случайной величины  $\Theta$  также является нормальным с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $v^2$ . Показать, что маргинальное распределение случайной величины  $X$  является нормальным распределением с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2 + v^2$ .

*Решение.* Воспользуемся формулой типа (4.1) и явным видом плотности нормального распределения:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|\Theta}(x|\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\theta-\mu)^2}{2v^2}\right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma v} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-\mu)^2}{2v^2}\right] d\theta. \end{aligned}$$

Проведем преобразование показателя экспоненты отдельно:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left( \frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta-\mu)^2}{v^2} \right) &= -\frac{1}{2} \left[ \theta^2 \left( \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{v^2} \right) - 2\theta \left( \frac{x}{\sigma^2} + \frac{\mu}{v^2} \right) + \left( \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{v^2} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \theta^2 \frac{\sigma^2 + v^2}{\sigma^2 v^2} - 2\theta \frac{\sigma^2 \mu + v^2 x}{\sigma^2 v^2} + \frac{\sigma^2 \mu^2 + v^2 x^2}{\sigma^2 v^2} \right] = \\ &= -\frac{\sigma^2 + v^2}{2\sigma^2 v^2} \left[ \theta^2 - 2\theta \frac{\sigma^2 \mu + v^2 x}{\sigma^2 + v^2} + \frac{\sigma^2 \mu^2 + v^2 x^2}{\sigma^2 + v^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sigma^2 + v^2}{2\sigma^2 v^2} \left[ \theta^2 - 2\theta \frac{\sigma^2 \mu + v^2 x}{\sigma^2 + v^2} + \left( \frac{\sigma^2 \mu + v^2 x}{\sigma^2 + v^2} \right)^2 + \frac{\sigma^2 \mu^2 + v^2 x^2}{\sigma^2 + v^2} - \left( \frac{\sigma^2 \mu + v^2 x}{\sigma^2 + v^2} \right) \right] = \\
&= -\frac{\sigma^2 + v^2}{2\sigma^2 v^2} \left( \theta - \frac{\sigma^2 \mu + v^2 x}{\sigma^2 + v^2} \right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2 v^2} \times \\
&\times \frac{v^4 x^2 + v^2 \sigma^2 (x^2 + \mu^2) + \sigma^4 \mu^2 - v^4 x^2 - 2\sigma^2 v^2 x \mu - \sigma^4 \mu^2}{\sigma^2 + v^2} = -\left[ \frac{(\theta - m)^2}{2s^2} \right] - \frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma^2 + v^2)},
\end{aligned}$$

где  $m = \frac{\sigma^2 \mu + v^2 x}{\sigma^2 + v^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + v^2} \mu + \frac{v^2}{\sigma^2 + v^2} x$  и  $s^2 = \frac{\sigma^2 v^2}{\sigma^2 + v^2}$ .

Таким образом, доказано тождество

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma v} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(\theta - m)^2}{2s^2} - \frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma^2 + v^2)} \right] d\theta = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2 + v^2}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma^2 + v^2)} \right] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} \exp \left[ -\frac{(\theta - m)^2}{2s^2} \right] d\theta.
\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение представляет собой плотность нормального распределения, так что значение интеграла равно единице. Поэтому получим

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2 + v^2}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2(\sigma^2 + v^2)} \right],$$

что и требовалось показать.

**Задача 4.3.** Из качественных соображений актуарий решил использовать для моделирования некоторого ущерба распределение Вейбулла с параметрами  $\theta$  и  $b$ . Однако возникли проблемы с получением точечной оценки параметра масштаба  $\theta$ . Вместо этого было сделано предположение о том, что этот параметр может иметь случайное значение, подчиняющееся гамма-распределению с параметрами  $\alpha$  и  $\lambda$ . Оценить безусловное распределение ущерба с учетом дополнительной неопределенности, связанной с рандомизацией параметра масштаба.

*Решение.* Условное распределение ущерба (при условии, что значение параметра  $\theta$  известно) задается формулой

$$f_{X|\Theta}(x|\theta) = \theta \beta x^{\beta-1} \exp(-\theta x^\beta).$$

Смешивающее распределение случайной величины  $\Theta$ , описывающей значение параметра масштаба, имеет следующий вид:

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}.$$

Тогда безусловное распределение определяется на основе (6.1) следующим образом:

$$f_X(x) = \int_0^\infty \theta \beta x^{\beta-1} \exp(-\theta x^\beta) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} d\theta = \beta x^{\beta-1} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^\alpha \exp(-\theta(x^\beta + \lambda)) d\theta.$$

Домножим и разделим подынтегральное выражение на величину, не зависящую от  $\theta$ :

$$f_X(x) = \beta x^{\beta-1} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(x^\beta + \lambda)^{\alpha+1}} \int_0^\infty \frac{(x^\beta + \lambda)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \theta^\alpha \exp(-\theta(x^\beta + \lambda)) d\theta.$$

Подынтегральное выражение в последнем равенстве представляет собой плотность гамма-распределения, так что интеграл равен единице. После приведения подобных членов получим

$$f_X(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} \frac{\lambda^\alpha}{(x^\beta + \lambda)^{\alpha+1}}.$$

Это выражение представляет собой функцию плотности распределения Бёрра.

Следует заметить, что полученный результат (ущерб подчинен распределению Бёрра) учитывает два типа неопределенности: незнание (дефицит информации) параметра масштаба  $\theta$  и случайность размера ущерба. Если бы актуарий точно знал, чему равен параметр масштаба, то адекватной моделью распределения ущерба было бы априорно признанное распределение Вейбулла, которое отражает «объективный» механизм возникновения ущерба. Однако из-за дополнительной неопределенности процедуры оценивания для прогноза будет использовано первое распределение, учитывающее разные виды неопределенности.

**Задача 4.4.** Распределение ущерба по отдельному риску определенного типа подчинено закону Парето с параметрами  $\theta$  и  $\alpha$ . Риски, относящиеся к разным договорам, различаются значением параметра  $\theta$ . Эти значения в генеральной совокупности имеют смещенное распределение Парето с параметрами  $\lambda_0$  и  $\alpha - 2$  ( $\alpha > 3$ ), причем величина смещения также равна  $\lambda_0$ .

1. Определить вид безусловного распределения ущерба, если структура рисков в портфеле первоначально аналогична структуре генеральной совокупности.

2. Представить полученный результат как смесь конечного числа распределений. Дать интерпретацию полученной формуле и охарактеризовать проблему идентифицируемости (различения) смесей.

3. Что будет происходить с математическим ожиданием размера ущерба при возникновении неблагоприятного отбора (антиселекции)? В качестве механизма антиселекции предположить отказ от работы с теми рисками, средний ущерб по которым меньше среднего ущерба по портфелю<sup>9</sup>.

4. По данным о генеральной совокупности и статистике первого периода риск-менеджер решил ввести линейную поправку к оценке среднего ущерба для учета антиселекции. Будет ли она достаточной в течение нескольких последующих периодов?

<sup>9</sup>Этот механизм предельно упрощен, так как предполагается, что распределение индивидуального ущерба известно и будет проводиться численное оценивание рисков, имеет место нейтральность к риску и т. п. Такой «идеальный» механизм не даст возможности снижать подобный эффект выделения более однородных групп и иных инструментов. Кроме того, в данной задаче не учитывается влияние иных факторов на экономическое поведение.

*Решение**1. Оценка безусловного распределения*

Функция плотности условного распределения задается формулой

$$f_{X|\Theta}(x|\theta) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(\theta+x)^{\alpha+1}},$$

а функция плотности смешивающего распределения —

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\alpha-2}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{\alpha-1}.$$

Тогда плотность безусловного распределения определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_\lambda^\infty \frac{\alpha\theta^\alpha}{(\theta+x)^{\alpha+1}} \cdot \frac{\alpha-2}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^{\alpha-1} d\theta = \alpha(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2} \int_\lambda^\infty \frac{\theta}{(\theta+x)^{\alpha+1}} d\theta = \\ &= \alpha(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2} \left[ \frac{x}{\alpha(\theta+x)^\alpha} - \frac{1}{(\alpha-1)(\theta+x)^{\alpha-1}} \right] \Big|_\lambda^\infty = \\ &= 0 - \alpha(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2} \left[ \frac{x}{\alpha(\lambda+x)^\alpha} - \frac{1}{(\alpha-1)(\lambda+x)^{\alpha-1}} \right] = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2}}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} \left[ \frac{1}{\alpha-1} - \frac{x}{\alpha(\lambda+x)} \right] = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2}}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} \cdot \frac{\alpha\lambda + \alpha x - \alpha x + x}{\alpha(\alpha-1)(\lambda+x)} = \frac{(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2}(\alpha\lambda+x)}{(\alpha-1)(\lambda+x)^\alpha}. \end{aligned}$$

Путем интегрирования по неотрицательным значениям  $x$  легко проверить, что выполнены условия нормировки.

*2. Преобразование функции плотности*

Выражение, полученное в предыдущей части, легко привести к виду

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\alpha(\alpha-2)}{\alpha-1} \cdot \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha} + \frac{\alpha-2}{\alpha-1} \cdot \frac{\lambda^{\alpha-2}x}{(\lambda+x)^\alpha} = \\ &= \frac{(\alpha-2)}{\alpha-1} \cdot \frac{\alpha\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \cdot (\alpha-2) \frac{\lambda^{\alpha-2}x}{(\lambda+x)^\alpha}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое представляет собой функцию плотности распределения Парето с параметрами  $\lambda$  и  $\alpha-1$ , умноженную на весовой коэффициент  $(\alpha-2)/(\alpha-1)$ , а второе слагаемое — функцию плотности обобщенного распределения Парето с параметрами  $\lambda$ ,  $\alpha-2$  и  $2$ , умноженного на вес  $1/(\alpha-1)$ . Последнее имеет более тяжелый хвост:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha} : \frac{(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2}x}{(\lambda+x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha\lambda}{(\alpha-2)x} = 0.$$

Математическое ожидание ущерба для «нормальных» рисков составляет  $\lambda/(\alpha-2)$ , а для «повышенных» — величину  $2\lambda/(\alpha-3)$ . Оба математических ожидания существуют в силу заданного в условиях ограничения  $\alpha > 3$ . Кроме того,

второе больше первого в силу того же ограничения, так как  $\lambda/(\alpha - 2) < 2\lambda/(\alpha - 3)$ , если  $\alpha > 1$  и  $\lambda > 0$ .

Это можно интерпретировать как модель «нормальных» и «повышенных» рисков, доли которых в портфеле составляют соответственно  $(\alpha - 2)/(\alpha - 1)$  и  $1/(\alpha - 1)$ . Иными словами, две различные смеси распределений приводят к одному и тому же безусловному распределению, что хорошо иллюстрирует проблемы с идентифицируемостью.

### 3. Влияние антиселекции

Математическое ожидание ущерба определяется как

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1} \cdot \frac{\lambda}{\alpha - 2} + \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{2\lambda}{\alpha - 3} &= \frac{\lambda}{\alpha - 1} + \frac{\lambda}{\alpha - 1} \cdot \frac{2}{\alpha - 3} = \\ &= \frac{\lambda}{\alpha - 1} \left( 1 + \frac{2}{\alpha - 3} \right) = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \cdot \frac{\alpha - 3 + 2}{\alpha - 3} = \frac{\lambda}{\alpha - 3}. \end{aligned}$$

Тогда откажутся от тех рисков, для которых имеет место

$$\frac{\theta}{\alpha - 1} < \frac{\lambda}{\alpha - 3} \quad \text{или} \quad \theta < \frac{\lambda(\alpha - 1)}{\alpha - 3}.$$

В течение первого периода ожидаемый ущерб

$$E[\Theta_0] = \frac{\lambda_0}{\alpha - 3}.$$

После отказа от части рисков распределение  $\Theta$  подчинено закону Парето с параметрами

$$\lambda_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} \lambda_0$$

и  $\alpha - 2$ . Тогда средний ущерб

$$E[\Theta_1] = \frac{\lambda_1}{\alpha - 3} = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 3)^2} \lambda_0,$$

что больше ожидаемого ущерба, установленного в начале периода. Далее от части рисков опять откажутся. Теперь значение параметра смещенного распределения Парето

$$\lambda_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} \lambda_1,$$

а средний ущерб

$$E[\Theta_2] = \frac{\lambda_2}{\alpha - 3} = \frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 3)^3} \lambda_0.$$

Если процесс продолжится таким же образом и далее, то будут иметь место соотношения

$$\lambda_k = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} \lambda_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad E[\Theta_k] = \frac{(\alpha - 1)^k}{(\alpha - 3)^{k+1}} \lambda_0.$$

## 4. Линейная поправка

По двум точкам

$$E[\Theta_0] = \frac{\lambda_0}{\alpha - 3} \quad \text{и} \quad E[\Theta_1] = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 3)^2} \lambda_0$$

определяется линейная поправка. Это означает, что оценка ожидаемого ущерба, используемая для принятия решений на второй период, определяется не как  $E[\Theta_1]$ , а с помощью линейной функции со свободным членом  $\lambda_0/(\alpha - 3)$  и коэффициентом пропорциональности

$$\frac{\alpha - 1}{(\alpha - 3)^2} \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{\alpha - 3} = \frac{\lambda_0}{\alpha - 3} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} - 1 \right) = \frac{2\lambda_0}{(\alpha - 3)^2},$$

т. е. является следующей величиной:

$$\frac{2\lambda_0}{(\alpha - 3)^2} \cdot 2 + \frac{\lambda_0}{\alpha - 3} = \frac{4\lambda_0 + \lambda_0(\alpha - 3)}{(\alpha - 3)^2} = \frac{\lambda_0(\alpha + 1)}{(\alpha - 3)^2}.$$

Однако ожидаемый ущерб составит

$$\frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 3)^3} \lambda_0.$$

Это больше оценки, учитывающей линейную поправку, на

$$\frac{(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 3)^3} \lambda_0 - \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 3)^2} \lambda_0 = \frac{(\alpha - 1)^2 - (\alpha + 1)(\alpha - 3)}{(\alpha - 3)^3} \lambda_0 = \frac{4\lambda_0}{(\alpha - 3)^3}.$$

Отклонение сохранится, хотя и в меньшем размере. Причиной его сохранения является отсутствие у риск-менеджера достаточной информации об эффекте антиселекции.

## 4.5.2. Типовые задачи по факторам риска

**Задача 4.5** (продолжение задачи 4.1). Для идентификации рисков в портфеле, рассмотренном в условиях задачи 4.1, используется факт наличия или отсутствия некоторого легко идентифицируемого свойства. Известно, что доля рисков первого типа, обладающих этим свойством, составляет 80%, а среди рисков второго типа их всего 10%. Определить ожидаемый ущерб для групп, выделяемых по признаку наличия данного свойства.

*Решение.* Используем специальный индикатор для обозначения наличия ( $w = 1$ ) или отсутствия ( $w = 0$ ) указанного свойства. Для наугад выбранного договора его значение можно считать выборочным значением случайной величины  $W$  со следующим условным распределением:

$$P[W = 1 \mid \Theta = p_1] = 0,8, \quad P[W = 0 \mid \Theta = p_1] = 0,2,$$

$$P[W = 1 | \Theta = p_2] = 0,1, P[W = 0 | \Theta = p_2] = 0,9.$$

Для того чтобы использовать этот случайный индикатор для формирования тарифных групп, рассчитаем условные вероятности распределения типа рисков. Применим формулу Байеса:

$$\begin{aligned} P[\Theta = p_1 | W = 1] &= \\ &= \frac{P[W = 1 | \Theta = p_1] \cdot P[\Theta = p_1]}{P[W = 1 | \Theta = p_1] \cdot P[\Theta = p_1] + P[W = 1 | \Theta = p_2] \cdot P[\Theta = p_2]} = \\ &= \frac{0,8 \cdot 0,75}{0,8 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,25} = 0,96, \\ P[\Theta = p_2 | W = 1] &= \frac{0,1 \cdot 0,25}{0,8 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,25} = 0,04, \\ P[\Theta = p_1 | W = 0] &= \frac{0,2 \cdot 0,75}{0,2 \cdot 0,75 + 0,9 \cdot 0,25} = 0,4, \\ P[\Theta = p_2 | W = 0] &= \frac{0,9 \cdot 0,25}{0,2 \cdot 0,75 + 0,9 \cdot 0,25} = 0,6. \end{aligned}$$

Заметим, что наличие признака почти на верное означает отнесение риска к первому типу, а при его отсутствии шансы того, что речь идет о риске второго типа, существенно повышаются (с 1:3 до 3:2).

*Первый способ.* Это условное распределение теперь можно использовать для оценки ожидаемого ущерба с учетом результатов, полученных при решении задачи 4.1, по формуле  $\mu(w) = E[\mu(\Theta) | W = w]$ , а именно:

$$\mu(1) = 10 \cdot 0,96 + 20 \cdot 0,04 = 10,4 \quad \text{и} \quad \mu(0) = 10 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,6 = 16.$$

*Второй способ.* Определим условное распределение случайной величины  $X$  при условиях, налагаемых на  $W$ :

$$\begin{aligned} P[X = 100 | W = 1] &= P[X = 100 | \Theta = p_1] P[\Theta = p_1 | W = 1] + \\ &+ P[X = 100 | \Theta = p_2] \cdot P[\Theta = p_2 | W = 1] = \\ &= 0,1 \cdot 0,96 + 0,2 \cdot 0,04 = 0,104 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[X = 0 | W = 1] &= P[X = 0 | \Theta = p_1] P[\Theta = p_1 | W = 1] + \\ &+ P[X = 0 | \Theta = p_2] \cdot P[\Theta = p_2 | W = 1] = \\ &= 0,9 \cdot 0,96 + 0,8 \cdot 0,04 = 0,896, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[X = 100 | W = 0] &= P[X = 100 | \Theta = p_1] P[\Theta = p_1 | W = 0] + \\ &+ P[X = 100 | \Theta = p_2] \cdot P[\Theta = p_2 | W = 0] = \\ &= 0,1 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,16, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr[X = 0 \mid W = 0] &= P[X = 0 \mid \Theta = p_1] P[\Theta = p_1 \mid W = 0] + \\ &+ P[X = 0 \mid \Theta = p_2] \cdot P[\Theta = p_2 \mid W = 0] = \\ &= 0,9 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,84. \end{aligned}$$

Тогда ожидаемый ущерб оценивается по формуле  $\mu(w) = E[X \mid W = w]$ :

$$\mu(1) = 100 \cdot 0,104 = 10,4 \quad \text{и} \quad \mu(0) = 100 \cdot 0,16 = 16,0.$$

**Задача 4.6** (продолжение задачи 4.2). Размер ущерба имеет условное логнормальное распределение с параметрами  $w + \theta$  и  $\sigma_X^2$  (при условии, что  $W = w$  и  $\Theta = \theta$ ). Параметры  $w$  и  $\theta$  можно рассматривать как значения факторов риска, первый из которых наблюдаем, а второй нет. Случайная величина  $W$ , отражающая разброс значений наблюдаемого признака по совокупности рисков, распределена нормально с параметрами  $m_W$  и  $\sigma_W^2$ . Распределение случайной величины  $\Theta$  подчинено нормальному распределению с параметрами  $m_\Theta$  и  $\sigma_\Theta^2$ . Оценить ожидаемый ущерб, если:

а) совокупность рисков не разбивается на однородные группы (сведения о величинах  $w$  не используются);

б) совокупность разбивается на группы в соответствии со значениями  $w$ .

Сравнить полученные оценки друг с другом и с ожидаемым ущербом при идеальной информации о типе риска (известны  $w$  и  $\theta$ ). Определить долю повышенных рисков, носители которых проиграют при выборе варианта б).

*Решение.* Обозначим  $X$  случайную величину ущерба. Тогда случайная величина  $Y = \exp(X)$  имеет нормальное распределение с условной плотностью

$$f_{Y|W,\Theta}(y|w,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X^2} \exp\left(-\frac{(y - (w + \theta))^2}{2\sigma_X^2}\right). \quad (4.8)$$

Тогда согласно результатам задачи 4.2 безусловное распределение  $Y$  будет нормальным с математическим ожиданием  $m_W + m_\Theta$  и дисперсией  $\sigma_X^2 + \sigma_W^2 + \sigma_\Theta^2$ . Следовательно, ожидаемый ущерб

$$\mu = E[X] = \exp\left(m_W + m_\Theta + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_W^2 + \sigma_\Theta^2)\right).$$

Получение ответа для варианта (б) не требует оценки условного математического ожидания  $\mu(w) = E[X \mid W = w]$ . Сначала заметим, что условная плотность  $f_{Y|W}(y|w)$  будет плотностью нормального распределения с математическим ожиданием  $w + m_\Theta$  и дисперсией  $\sigma_X^2 + \sigma_\Theta^2$ . Тогда

$$\mu(w) = \exp\left(w + m_\Theta + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_\Theta^2)\right).$$

Отношение  $\mu(w)/\mu$ , очевидно, можно записать так:

$$\exp\left(w - m_W - \frac{1}{2}\sigma_W^2\right).$$

Этот коэффициент больше единицы, если  $w > m_W + \sigma_W^2/2$ . Данное неравенство характеризует тех, кому выгодно отсутствие дифференциации тарифов. В силу того, что речь идет о нормальном распределении, их доля составит  $1 - \Phi(\sigma_W/2)$ .

Если известна полная информация о риске (величины  $w$  и  $\theta$ ), то математическое ожидание и дисперсию следует рассчитывать на основе условной плотности (4.8). Иными словами, имеем формулу

$$\mu(w, \theta) = E[X|W = w, \Theta = \theta] = \exp\left(w + \theta + \frac{1}{2}\sigma_X^2\right),$$

которая отражает истинное значение ожидаемого ущерба. Различия с оценкой среднего ущерба  $\mu(w)$  характеризуются отношением

$$\frac{\mu(w, \theta)}{\mu(w)} = \exp\left(\theta - m_\Theta - \frac{1}{2}\sigma_\Theta^2\right),$$

так что доля тех, кто проигрывает от невозможности идеальной классификации, составляет  $\Phi\left(\frac{1}{2}\sigma_\Theta\right)$ .

Истинная доля повышенных рисков определяется соотношением  $\mu(w, \theta)$  и  $\mu$ , так что она будет равна  $1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_\Theta^2}\right)$ .

**Задача 4.7.** Вывести систему уравнений, позволяющую получить оценки коэффициентов регрессии в модели гамма-регрессии.

*Решение.* Сначала проведем репараметризацию функции плотности распределения путем замены переменных  $\lambda = \alpha/\mu$  в соответствии с тем, как это было сделано в п. 4.4.2. В результате получим

$$f(x; \alpha, \mu) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)\mu^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\alpha x}{\mu}\right).$$

Теперь в формулу относительно легко встроить линейную форму с экспоненциальной функцией связи

$$\mu_j = \exp\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij}\right),$$

так что при оценке среднего ущерба такая модель задает мультипликативные поправочные коэффициенты к базовой величине  $e^{\beta_0}$  при гамма-распределении ущерба. Тогда функция правдоподобия примет вид

$$L(\beta) = \prod_{j=1}^n \frac{\alpha^\alpha x_j^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \exp\left(-\alpha \left[\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij}\right]\right) \times \\ \times \exp\left(-\alpha x_j \exp\left(-\left[\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij}\right]\right)\right),$$

если по каждому риску будет не более одного возникновения ущерба. Логарифм функции правдоподобия можно представить как

$$l(\beta) = \ln L(\beta) \propto -\alpha \sum_{j=1}^n \left[ \left( \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij} \right) + x_j \exp \left( \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij} \right) \right].$$

Тогда частные производные рассчитываются следующим образом:

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} = -\alpha \sum_{j=1}^n \left\{ 1 - x_j \exp \left( - \left[ \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij} \right] \right) \right\},$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_i} = -\alpha \sum_{j=1}^n w_{ij} \left\{ 1 - x_j \exp \left( - \left[ \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij} \right] \right) \right\}, i \in 1 \div m,$$

откуда получим систему  $(m + 1)$  нелинейного уравнения с  $(m + 1)$  неизвестным:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ 1 - x_j \exp \left( - \left[ \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij} \right] \right) \right\} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} \left\{ 1 - x_j \exp \left( - \left[ \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i w_{ij} \right] \right) \right\} = 0, i \in 1 \div m.$$

Существование решения или его единственность не гарантированы в силу нелинейности. В качестве альтернативы можно использовать иные методы определения максимума функции.

## 4.6. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

4.1. Распределение ущерба по определенному риску — экспоненциальное с параметром  $\theta$ . Вместо точечной оценки параметра его значение моделируется случайной величиной, подчиненной обратному экспоненциальному распределению с параметром  $\alpha = 1$ . Оценить безусловное распределение ущерба с учетом дополнительной неопределенности, связанной с рандомизацией параметра.

[Подсказка: должно получиться распределение Парето.]

4.2. Ущерб по определенной группе (портфелю) рисков моделируется обратным распределением Вейбулла с параметром масштаба  $\theta$  и параметром формы  $\tau$ . Параметр масштаба для такого распределения пропорционален математическому ожиданию, так что его можно интерпретировать как характеристику подверженности риску (меру «объема» риска). Из-за того, что последняя будет индивидуальна для каждого конкретного риска, неоднородность портфеля рисков задается распределением данного параметра. В настоящем случае это трансформированное распределение гамма-распределение с параметром масштаба  $\lambda$ , параметром формы  $\alpha$  и

параметром трансформации  $\tau$  (тем же, что и в обратном распределении Вейбулла). Оценить безусловное распределение ущерба по портфелю в целом.

[Подсказка: должно получиться обратное распределение Бёрра.]

4.3. Найти безусловное распределение, если условное распределение ущерба (для фиксированного значения параметра масштаба) подчиняется гамма-закону, а смешивающее распределение также имеет гамма-распределение.

[Подсказка: должно получиться обобщенное распределение Парето.]

4.4. Условное распределение случайной величины ущерба  $X$  (при условии  $\theta \leq \Theta < \theta + d\theta$ ) подчинено нормальному закону с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\theta^{-1}$ . Смешивающее распределение случайной величины  $\Theta$  имеет гамма-распределение с параметрами  $\alpha$  и  $\lambda$ . Найти функцию плотности безусловного распределения случайной величины  $X$ .

[Подсказка: обратите внимание, что носителем безусловного распределения является вся числовая ось. Распределение будет симметричным в силу использования квадратичной функции, а каждая «ветвь» функции распределения будет соответствовать трансформированному бета-распределению.]

4.5. Вывести систему уравнений, позволяющую получить оценки коэффициентов регрессии в модели гамма-регрессии при возможности нескольких случаев возникновения ущерба по одному риску.

## Глава 5

# СОВОКУПНЫЙ УЩЕРБ

Часто для управления рисками достаточно знать не поведение каждого индивидуального риска, рассматриваемого по отдельности или в составе портфеля, а поведение совокупного ущерба по такому портфелю. При этом задача состоит в том, чтобы по свойствам распределений индивидуального ущерба и информации о структуре зависимости получить представление о свойствах распределения совокупного риска. Это позволит прогнозировать поведение портфеля в целом на основе соответствующих моделей, базирующихся на таких распределениях. Среди подобных моделей можно назвать два основных типа:

- модель индивидуального риска, в которой представлен портфель рисков как сумма индивидуальных рисков;
- модель коллективного риска, в которой рассматривается портфель как единое целое, а совокупный ущерб — как отражение свойств самого портфеля (хотя они и имеют отношение к свойствам отдельных рисков).

В результате получаем две традиции моделирования совокупного ущерба, встречающиеся на практике.

Цель данной главы состоит в обсуждении моделей разных типов, базирующихся на вероятностных распределениях совокупного ущерба и числа неблагоприятных событий. Указанные типы приводятся в сравнении, позволяющем понять их достоинства и недостатки.

После изучения материала вы узнаете:

- что такое модель индивидуального риска;
- каковы особенности распределения совокупного ущерба в модели индивидуального риска;
- как оценивать моменты совокупного ущерба в модели индивидуального риска;
- каковы особенности модели индивидуального риска при неоднородности портфеля рисков;
- что такое модель коллективного риска;
- каковы особенности распределения совокупного ущерба в модели коллективного риска;
- как оценивать моменты совокупного ущерба в модели коллективного риска;
- какие типы распределений чаще всего используются для моделирования числа неблагоприятных событий;
- как конструировать дополнительные типы распределений числа неблагоприятных событий;
- каковы особенности модели коллективного риска при неоднородности портфеля рисков;
- как использовать один тип модели для аппроксимации другим типом модели.

**Ключевые слова:** модель индивидуального риска, модель коллективного риска, распределение числа неблагоприятных событий, распределение совокупного ущерба, гомогенизация портфеля.

## 5.1. МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА

### 5.1.1. Постановка модели и оценка распределения совокупного ущерба

В соответствии с данным подходом совокупный ущерб может быть представлен просто как сумма случайных величин индивидуальных ущербов

$$S_{ind} = \sum_{j=1}^n X_j, \quad (5.1)$$

где  $n$  — объем портфеля. Очевидно, что часть слагаемых, соответствующих тем рискам, по которым не было ущерба, будет равна нулю.

Простота этой модели делает её достаточно гибкой. Так, случайные величины ущерба по разным рискам не обязаны иметь одинаковое распределение, хотя для однородных совокупностей они будут одинаково распределены и анализировать совокупный ущерб в последнем случае будет проще.

Оценка распределений сумм случайных величин может осуществляться разными способами в зависимости от особенностей суммируемых случайных величин. Для этого можно:

- 1) использовать операции свертки;
- 2) употребить производящие функции моментов;
- 3) воспользоваться свойствами классов распределений, замкнутых к операции сложения случайных величин;
- 4) применить нормальную аппроксимацию.

Рассмотрим эти подходы подробнее.

При небольших объемах портфелей (например,  $n \leq 5$ ) для получения функции распределения совокупного ущерба можно воспользоваться формулой свертки распределений. Для сосредоточенных на неотрицательной полуоси смешанных распределений из главы 1 со скачком в нулевой точке при  $n = 2$  имеем

$$\begin{aligned} F_{S_{ind}}(s) &= P[S_{ind} < s] = P[X_1 + X_2 < s] = \int_0^s P[X_2 < s - x | X_1 = x] P[X_1 = x] dx = \\ &= \int_0^s F_{X_2|X_1}(s - x | x) f_{X_1}(x) dx + F_{X_2|X_1}(s | 0) \cdot p_1, \quad (5.2) \end{aligned}$$

где  $F_{X_2|X_1}(\cdot | x)$  — функция распределения случайной величины  $X_2$  при условии  $X_1 = x$ ;  $f_{X_1}(\cdot)$  — функция плотности, описывающая распределение  $X_1$  при условии  $X_1 > 0$ ;  $p_1 = P[X_1 = 0]$  — величина соответствующего скачка функции распределения случайной величины  $X_1$ . В случае независимости  $F_{X_2|X_1}(\cdot | x)$  преобразуется в функцию безусловного распределения  $F_{X_2}(\cdot)$ .

Для  $n > 2$  процесс свертки можно осуществлять итеративно, начав с двух случайных величин, а затем на каждом шаге добавляя еще по одной. Достоинством такого метода является получение точного распределения. Интеграл является заведомо сходящимся, но если тем не менее возникают трудности его определения, можно воспользоваться методами численного интегрирования. Недостаток такого

подхода состоит в большом объеме вычислений и их громоздкости при больших значениях  $n$ . При этом наличие скачков в функции распределения в значительной мере усложняет процедуру оценки по формуле свертки.

Производящие функции моментов имеют важное свойство

$$M_{X_1+X_2}(t) = E \left[ e^{t(X_1+X_2)} \right] = E \left[ e^{tX_1} e^{tX_2} \right].$$

В случае независимости случайных величин получим

$$E \left[ e^{tX_1} e^{tX_2} \right] = E \left[ e^{tX_1} \right] \cdot E \left[ e^{tX_2} \right] = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t).$$

Таким образом, для независимых случайных величин выполняется соотношение

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t).$$

Это свойство можно распространить на сумму любого (детерминированного) числа независимых случайных величин:

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t). \quad (5.3)$$

Если при этом случайные величины  $X_k$  распределены одинаково, то

$$M_{S_{ind}}(t) = (M_{X_k}(t))^n. \quad (5.4)$$

В силу того, что производящая функция моментов однозначно задает случайную величину, ее можно использовать для получения соответствующих оценок. Ограничением этого подхода является следующий факт: производящие функции моментов определены не для всех типов распределений.

Для некоторых классов распределений, замкнутых по отношению к операции свертки, распределение совокупного ущерба  $S_{ind}$  будет относиться к тому же классу, что и распределение каждого индивидуального ущерба. С учетом сказанного ранее относительно производящих функций моментов, к таким классам, в частности, относятся те распределения, у которых производящие функции моментов являются степенными или показательными, т. е. для достаточно большого числа типов распределений. Так, если  $X_j$  имеет гамма-распределение с параметрами  $\alpha_j$  и  $\lambda$ , то  $S_{ind}$  будет также иметь гамма-распределение с параметрами  $\sum_{j=1}^n \alpha_j$  и  $\lambda$ . Достоинством этого метода будет относительно простой способ определения точного распределения совокупного ущерба. Недостаток заключается в возможности использования только для отдельных классов распределений и, кроме того, при дополнительных ограничениях на значения параметров.

Если  $n$  достаточно велико, можно воспользоваться асимптотическими свойствами  $S_{ind}$  как суммы случайных величин. В центральной предельной теореме утверждается, что при больших  $n$  величина  $S_{ind}$  будет приблизительно иметь нормальное

распределение, а закон больших чисел позволит предсказать параметры последнего<sup>1</sup>.

При этом основная проблема состоит в том, чтобы уточнить, что означает фраза « $n$  достаточно велико». В научных работах, инженерных стандартах и учебных пособиях по математической статистике рекомендуются разные значения нижней границы допустимого количества слагаемых, обычно в пределах 30–50, иногда до 100. Однако при этом неявно предполагается, что рассматриваемые случайные величины ведут себя «регулярно» (в частности, являются абсолютно непрерывными, а нередко допускается, что они к тому же еще симметричны или слабо асимметричны, а иногда даже, что нормально распределены). Понятно, что наличие скачков, сильно выраженной асимметрии и т. п. резко усилит требования к объему изучаемого портфеля, так что минимальная нижняя граница объема выборки может измеряться в сотнях и даже тысячах наблюдений.

Формальные требования к объему выборки при нормальной аппроксимации можно установить, например, с помощью неравенства Берри—Эссеена. Если предположить, что случайные величины  $X_j$  взаимно независимы и одинаково распределены<sup>2</sup>, с математическим ожиданием  $\mu = E[X_j]$ , среднеквадратическим отклонением  $\sigma = \sqrt{D[X_j]}$  и абсолютным моментом третьего порядка  $\nu_3 = E[|X_j - \mu|^3]$ , то для функции распределения  $F_{\tilde{S}}(x)$  стандартизированной случайной величины

$$\tilde{S} = \frac{S_{ind} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

выполняется неравенство

$$|F_{\tilde{S}}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\nu_3}{\sigma^3\sqrt{n}}, \quad (5.5)$$

где  $C$  — некоторая константа, не превосходящая 0,7655. Задав максимально допустимое отклонение  $\gamma$  функции распределения от предельного состояния (нормального распределения), получим

$$n \geq \frac{C^2\nu_3^2}{\sigma^6\gamma^2}. \quad (5.6)$$

В силу того, что  $\sigma^3 < \nu$  и  $\gamma \ll 1$ , значение  $n$  будет достаточно велико.

Ясно, что довольно жесткие требования к объему выборки значительно снизят возможности практического применения такой нормальной аппроксимации.

<sup>1</sup>Центральная предельная теорема и закон больших чисел выполняются при достаточно широких условиях, которым, очевидно, соответствует и рассматриваемый случай (однородные риски, которые моделируются случайными величинами, не связанными жесткой функциональной зависимостью). Возможность предсказания дисперсии на основе закона больших чисел понимается в смысле сходимости выборочной дисперсии к теоретически предсказанному значению.

<sup>2</sup>Достаточно потребовать, чтобы совпадали упомянутые далее моменты этих случайных величин. В этом случае верхняя граница возможных значений упоминаемой далее константы  $C$  будет чуть больше (0,7975).

### 5.1.2. Моменты распределений случайных величин для случая однородных рисков

В ряде случаев риск-менеджера будет интересовать не столько само распределение совокупного ущерба, сколько его моменты, в первую очередь математическое ожидание и дисперсия.

При оценке математического ожидания совокупного ущерба особых проблем не возникает и можно записать соотношение

$$E[S_{ind}] = \sum_{j=1}^n E[X_j]. \quad (5.7)$$

Для портфеля независимых случайных величин индивидуальных ущербов, введенных в главе 1, получим оценку

$$E[S_{ind}] = n(1 - p)\mu. \quad (5.8)$$

Однако уже при оценке дисперсии потребуется дополнительная информация о зависимости случайных величин ущерба внутри исследуемого портфеля рисков, которая содержится в значениях ковариаций:

$$D[S_{ind}] = \sum_{j=1}^n D[X_j] + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \text{Cov}[X_j, X_k]. \quad (5.9)$$

Иными словами, необходимо исследовать структуру зависимости внутри портфеля или сформулировать дополнительные предположения об этом. Предпосылка о независимости, которая делается для простых методов математической статистики, часто не соответствует практике управления рисками, поэтому ее применение без соответствующего обоснования может занижить оценку дисперсии.

Для портфеля независимых случайных величин индивидуального ущерба, введенных в главе 1, получим оценку дисперсии

$$D[S_{ind}] = n(1 - p)\sigma^2 + np(1 - p)\mu^2. \quad (5.10)$$

### 5.1.3. Особенности модели индивидуального риска для неоднородных портфелей

Если допустить неоднородность портфеля в модели индивидуального риска, то такое усложнение эквивалентно отказу от предпосылки об одинаковом распределении случайных величин индивидуальных ущербов.

В остальном дизайн модели, т. е. предпосылки, лежащие в ее основе, и формулы, описывающие базовые соотношения, сохраняются. В частности, случайная величина совокупного ущерба задается равенством (5.1), ее математическое ожидание — формулой (5.7), а дисперсия — выражением (5.9). В случае независимости случайных величин  $X_j$  второе слагаемое в (5.9) становится равным нулю, что существенно

упрощает расчет дисперсии. При отсутствии зависимости также гарантированно выполняется свойство (5.3) для производящих функций моментов.

Оценка распределения совокупного ущерба  $S_{ind}$  проводится с помощью тех же методов, которые были представлены выше. Они разве лишь несущественно усложняются из-за необходимости учета различий в распределениях. В частности, увеличиваются требования к объему статистических данных, который необходим для нормальной аппроксимации.

Отказ от предпосылки об одинаковом распределении среди прочего означает, что

$$E[X_j] = (1 - p_j)\mu_j \quad \text{и} \quad D[X_j] = (1 - p_j)\sigma_j^2 + p_j(1 - p_j)\mu_j^2, \quad j \in 1 \div n.$$

Поэтому математическое ожидание совокупного ущерба можно выразить, уточняя (5.7), таким образом:

$$E[S_{ind}] = \sum_{j=1}^n (1 - p_j)\mu_j, \quad (5.11)$$

что является обобщением формулы (5.8).

Аналогично в случае независимости выражение (2.9) для дисперсии совокупного ущерба можно переписать в виде

$$D[S_{ind}] = \sum_{j=1}^n (1 - p_j)\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^n p_j(1 - p_j)\mu_j^2, \quad (5.12)$$

частным случаем которого будет равенство (5.10).

Все оценки в модели индивидуального риска для неоднородных портфелей удобно осуществлять путем прямых расчетов, например непосредственно используя формулы (5.11) и (5.12). Однако в ряде случаев необходимо переходить к гомогенизированным случайным величинам, т. е. к случайным величинам  $X_j^*$  с одинаковым распределением, однородный (гомогенный) портфель которых имеет те же вероятностные свойства, что и исходный неоднородный портфель, т. е.

$$\sum_{j=1}^n X_j^* \sim \sum_{j=1}^n X_j, \quad (5.13)$$

где знак « $\sim$ » означает формулировку «имеет то же распределение, что и». В частности, такой переход весьма полезен при обсуждении скорости сходимости к нормальному распределению на основе неравенства Берри—Эссеена (5.5) или базирующейся на нем оценки объема выборки (5.6), минимально необходимой для применения нормальной аппроксимации.

Процедуру перехода проще всего осуществлять, если различия в распределениях случайных величин  $X_j$  индивидуального ущерба укладываются в схему смеси распределений (см. главу 4). Для этого все  $X_j$  должны иметь распределения одного типа, различающиеся только значениями параметров  $\theta_j$ . Кроме того, распределение самих величин  $\theta_j$  по портфелю рисков (в дискретном случае — доли числа рисков с

характеристикой  $\theta_j$ ) также должно быть известно. Тогда распределение случайной величины  $X_j$  можно рассматривать как условное (при условии  $\Theta = \theta_j$ ), а формула вида (4.1) или (4.2) дает усреднение по значениям параметров  $\theta_j$ , что можно интерпретировать как оценку распределения ущерба для наугад выбранного риска (его истинное значение  $\theta_j$  неизвестно). Иными словами

$$F_{X_j^*}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_j}(x|\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta,$$

для абсолютно непрерывного распределения  $\Theta$ , или

$$F_{X_j^*}(x) = \sum_k F_{X_j}(x|\theta_k) f_{\Theta}(\theta_k)$$

для дискретного распределения  $\Theta$ . Эти выражения являются частными случаями (4.1) и (4.2).

Случайные величины  $X_j^*$ ,  $j \in 1 \div n$ , будут, очевидно, одинаково распределены, что позволит свести расчеты к методикам, изложенным выше в настоящей главе. Однако такой подход часто является слишком громоздким, так что прямые расчеты в большинстве случаев более просты и имеют более понятную интерпретацию.

## 5.2. МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА

### 5.2.1. Постановка модели и моменты совокупного ущерба

В отличие от модели индивидуального риска, где неопределенность, связанная с размером ущерба, отражалась в специфическом виде их распределений (со скачком в нуле), в модели коллективного риска неопределенность, связанная с числом случаев возникновения ущерба, отделяется от неопределенности, вызванной размером ущерба. При этом совокупный ущерб моделируется как сумма случайного числа случайных величин

$$S_{coll} = \sum_{k=1}^N Y_k, \quad (5.14)$$

где  $N$  — случайная величина числа случаев возникновения неблагоприятных событий,  $Y_k$  — случайная величина размера ущерба, подчиненная усеченному распределению (при  $Y_k > 0$ ).

Таким образом, в модели коллективного риска четко выделяются два типа неопределенностей, связанных с количеством случаев возникновения ущерба и размером ущерба. Для этой модели обычно применяют не закон больших чисел и другие асимптотические результаты (хотя это тоже возможно), а методы анализа случайных процессов. Фактически  $S_{coll}$  можно интерпретировать как значение случайного процесса в случайный момент времени.

Усложнение применяемого математического аппарата является очевидным недостатком указанной модели. К преимуществам следует отнести возможность разделения анализа числа неблагоприятных событий и размера ущерба, что служит

реализации задач риск-менеджера в свете специфических ограничений информационного обеспечения.

Событие  $\{S_{coll} < s\}$  представляется как объединение непересекающихся событий

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n Y_k < s \text{ и } N = n \right\},$$

так что

$$\begin{aligned} P[S_{coll} < s] &= \sum_{i=1}^n P \left[ \sum_{k=1}^n Y_k < s \text{ и } N = n \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n P \left[ \sum_{k=1}^n Y_k < s \mid N = n \right] P[N = n]. \end{aligned}$$

С учетом результатов, полученных для модели индивидуального риска, и определения функций распределения это равенство можно переписать в виде

$$F_{S_{coll}}(s) = \sum_n P[N = n] F_{Y_k}^{*n}(s), \quad (5.15)$$

где  $F_{Y_k}^{*n}(s)$  —  $n$ -кратная свертка случайной величины  $Y_k$ , при этом  $F^{*1}(s) = F(s)$  и

$$F^{*0}(s) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Для упрощения расчетов обычно предполагается, что случайные величины  $Y_k$  являются независимыми и одинаково распределенными, а кроме того, имеет место  $\text{Cov}[N, Y_k] = 0, \forall k$ . Эти условия несколько снижают сферу возможного применения модели, но существенно упрощают применяемые математические методы.

Очевидно, что моменты случайной величины совокупного ущерба будут определяться по-другому, чем в модели индивидуального риска:

$$\begin{aligned} E[S_{coll}] &= E \left[ \sum_{k=1}^n Y_k \right] = E \left[ E \left[ \sum_{k=1}^n Y_k \mid N \right] \right] = \sum_n \left( \sum_{k=1}^n Y_k \right) P[N = n] = \\ &= \sum_n n E[Y_k] P[N = n] = E[Y_k] \cdot E[N]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Аналогичную формулу можно доказать и для дисперсии

$$D[S_{coll}] = (E[Y_k])^2 D[N] + D[Y_k] \cdot E[N]. \quad (5.17)$$

Доказательство предлагается сделать читателю самостоятельно.

Формулу условного математического ожидания можно использовать для получения производящей функции моментов случайной величины  $S_{coll}$ . Если имеет место независимость случайных величин  $Y_k$ , то с учетом (5.4) получим

$$\begin{aligned} M_{S_{coll}}(t) &= E[e^{tS_{coll}}] = E[E[e^{tS_{coll}} | N]] = E[(M_{Y_k}(t))^N] = \\ &= E[\exp(N \ln M_{Y_k}(t))] = M_N(\ln(M_{Y_k}(t))). \end{aligned}$$

Принимая во внимание свойства производящей функции моментов, этот результат можно переписать в следующем виде:

$$M_{S_{coll}}(t) = G_N(M_{Y_k}(t)). \quad (5.18)$$

Последние соотношения существенно упрощают оценивание в модели коллективного риска. Так, вместо использования условных математических ожиданий при доказательстве свойств (5.16) и (5.17) достаточно взять первую и вторую производную производящей функции моментов в нулевой точке.

### 5.2.2. Распределение числа неблагоприятных событий

Если усеченное распределение индивидуального ущерба уже обсуждалось в главе 1, то распределение числа случаев возникновения неблагоприятных событий  $N$  встречается впервые. Очевидно, это будет дискретное распределение, сосредоточенное на множестве натуральных чисел, к которому добавлен нуль, или на конечном подмножестве такого объединения:  $\{0, 1, \dots, n\}$ .

Выбор класса распределения может осуществляться с учетом дополнительных соображений.

Например, если возникновение случаев ущерба в течение рассматриваемого периода соответствует простейшему точечному процессу (т.е. интуитивно или на уровне проверок статистических гипотез выполняются свойства стационарности, отсутствия последействия и ординарности), то подходящей моделью является распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ , т.е. вероятность того, что случайное число событий  $N$  будет равно  $k$ , задается формулой

$$P[N = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

а функция распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-\lambda} \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!}, & k < x \leq k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Если же возникновение неблагоприятных событий удобно представлять как результат серии испытаний, то выбирается биномиальное распределение, для которого вероятность возникновения  $k$  неблагоприятных случаев

$$P[N = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где  $C_n^k$  — биномиальный коэффициент, а функция распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sum_{j=0}^k C_n^j p^j (1-p)^{n-j}, & k < x \leq k+1, \quad k \in 0 \div (n-1), \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

При такой интерпретации фиксируется число испытаний, под которыми понимается объем небольшого портфеля рисков.

Если же мы рассматриваем число неблагоприятных событий как количество «успехов» в серии испытаний, то следует использовать отрицательное биномиальное распределение. Для него вероятность возникновения  $k$  неблагоприятных событий

$$P[N = k] = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r},$$

а функция распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ p^r \sum_{j=0}^k C_{r+j-1}^{j-1} (1-p)^j, & r+k < x \leq r+k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

В ряде случаев для выбора типа дискретного распределения на практике полезным является учет соотношения между выборочной дисперсией и средним:

- если первая характеристика существенно меньше второй, то предпочтение отдается биномиальному распределению;
- если они приблизительно равны, то выбирается пуассоновское распределение;
- если же выборочная дисперсия заметно больше выборочного среднего, то следует использовать отрицательно биномиальное распределение.

Если объем данных достаточен, то необходимо исследовать наблюдаемые данные на предмет их соответствия статистическим гипотезам, которые принимаются в ходе подгонки выборочного распределения к теоретическому. В случае недостаточности данных о числе неблагоприятных событий в качестве первого приближения можно использовать само выборочное распределение. Однако переход к теоретическому дискретному распределению может уменьшить влияние ошибок наблюдения (регистрации событий).

На практике часто возникают ситуации, когда вероятность нулевого исхода существенно отличается от того, что можно получить для распределений, упомянутых в предыдущем разделе. Так, вероятность отсутствия неблагоприятных событий, т. е. вероятность события  $\{N = 0\}$ , может быть весьма близкой к единице, что, в частности, характерно для ущерба, вызванного стихийными бедствиями. Противоположным примером может служить нулевая вероятность рассматриваемого события, скажем, когда  $N$  — случайное число неблагоприятных событий, связанных с одним риском.

Если  $P[N = 0] = 0$ , а остальные события более или менее согласуются с каким-либо дискретным распределением, то можно воспользоваться процедурой усечения

$$f_k^- = \frac{f_k}{1 - f_0} = P[N = k | N > 0], \quad k \in \mathbb{N},$$

где  $f_k = P[N = k]$  — вероятность, соответствующая классическому распределению.

Если вероятности события  $\{N = 0\}$  необходимо приписать априорно заданную величину  $p_0$ , то модифицированное распределение вероятностей можно записать в виде

$$f_0^+ = p_0, \quad f_k^+ = \frac{1 - p_0}{1 - f_0} f_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

### 5.2.3. Связь с моделью индивидуального риска

Хотя предпосылки обоих подходов несколько отличаются, на интуитивном уровне различия сводятся к специфике учета в модели рисков, по которым ущерб не возник: в модели индивидуального риска они «отвечают» за скачок функции распределения, а в модели коллективного риска их игнорирование «оплачивается» рандомизацией числа неблагоприятных событий. Это делает весьма вероятным близкое соответствие результатов моделирования совокупного ущерба обоими способами.

Условия соответствия, очевидно, можно сформулировать так:

- ожидаемые числа событий в обеих моделях должны быть одинаковыми, т. е.

$$E[N] = (1 - p) \cdot n;$$

- распределения ущерба в обеих моделях должны быть согласованы, иначе говоря, усеченное распределение  $F_{X_i|X_i>0}(x)$  случайной величины ущерба  $X_i$  из модели индивидуального риска при условии  $X_i > 0$  должно совпадать с распределением случайной величины ущерба  $Y_k$  из модели коллективного риска

$$F_{X_i|X_i>0}(x) = F_{Y_k}(x), \quad \forall x > 0.$$

Тогда если  $E[Y_k] = \mu$  и  $D[Y_k] = \sigma^2$ , то легко показать, что в соответствии с (5.8) и (5.16) математические ожидания для обеих моделей равны

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = E\left[\sum_{k=1}^N Y_k\right] = n(1 - p)\mu, \quad (5.19)$$

согласно (5.10) и (5.17) дисперсии

$$D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = (1 - p)n\sigma^2 + n\mu^2p(1 - p) \quad (5.20)$$

и

$$D\left[\sum_{k=1}^N Y_k\right] = \mu^2D[N] + (1 - p)n\sigma^2 \quad (5.21)$$

в принципе соответствуют друг другу, а при биномиальном распределении числа случаев возникновения ущерба ( $N \sim \text{Bin}(n, 1 - p)$ ) совпадают.

### 5.3. НЕОДНОРОДНОСТЬ В МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА

#### 5.3.1. Число неблагоприятных событий в модели коллективного риска для неоднородных портфелей

В силу того, что число неблагоприятных событий в теории коллективного риска описывается отдельной случайной величиной  $N$ , анализировать особенности ее распределения намного проще. При этом возможны различные постановки, отражающие специфику тех или иных практических ситуаций.

Самая простая постановка такого рода связана с предположением о том, что в составе портфеля можно выделить  $m$  однородных подпортфелей. Если число случаев возникновения ущерба в каждом из них моделируется с помощью случайной величины  $N_j$ ,  $j \in 1 \div m$ , то общее число случаев

$$N_{ind} = \sum_{j=1}^m N_j. \quad (5.22)$$

Эта модель удобна, когда тип риска (относительно) легко идентифицировать, а цель исследования — анализ портфеля в целом. Модель (5.22) фактически является применением идей теории индивидуального риска к числу неблагоприятных событий, так что распределение случайной величины  $N_{ind}$  оценивается из тех же соображений, что и распределение произвольной суммы фиксированного числа случайных величин (см. п. 5.1). При этом соответствующие методы можно упростить, используя особенности дискретных распределений, например, при нахождении свертки

$$f_{N_{ind}}(k) = [f_{N_1} * f_{N_2} * \dots * f_{N_m}](k)$$

вместо интегрирования (которое на практике часто осуществляется с помощью численных методов) можно воспользоваться более простым вычислением конечных сумм:

$$[f_{N_1} * f_{N_2}](k) = \sum_{j=0}^k f_{N_1}(j) f_{N_2}(k-j)$$

и т. д. Хотя и при этом подходе могут возникать проблемы (например, уменьшение порядка слагаемых ниже предела, допустимого программным обеспечением), они решаются с помощью технических приемов.

Если принадлежность риска к той или иной однородной группе выявить сложно, но известны доли рисков  $\alpha_j$ ,  $j \in 1 \div m$ , относящихся к указанным группам, то часто переходят к смесям

$$f_N(k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_{N_j}(k), \quad (5.23)$$

где набор  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  играет роль дискретного распределения «вида» риска, так что распределение случайной величины  $N_j$  считается условным (условие состоит в

отнесении риска к  $j$ -й однородной группе), т. е.  $f_{N_j}(k) = P[N_j = k | \Theta = \theta_j]$ , а доля  $\alpha_j$  интерпретируется как вероятность  $P[\Theta = \theta_j]$ .

Этот подход можно обобщить за счет изменения толкования смешивающего распределения.

Самый простой вариант подобного расширения состоит в формальном сведении моделей, отражающих нерегулярность поведения ущерба, к смеси распределений. В частности, для анализа совокупного портфеля применение упомянутой в главе 1 модели ущерба «большого» размера может потребовать рассмотрения смеси распределений ущерба «нормального» и «большого» размера. Другим примером служит использование дискретного распределения с модифицированным значением вероятности  $p_0 = P[N = 0]$ , которое также представляется как смесь распределений (см. задачу 5.10).

Другое обобщение состоит в изменении интерпретации смешивающего распределения, которое описывает теперь не попадание в однородные группы, а распределение некоторой характеристики риска по портфелю в целом. Такое смешивающее распределение бывает как дискретным, так и непрерывным. В последнем случае вместо (5.23) используем соотношение

$$f_N(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{N|\Theta}(k|\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta.$$

При использовании смеси дискретных распределений можно упростить расчеты, воспользовавшись, например, свойством безграничной делимости отрицательно-биномиального распределения и распределения Пуассона. Для них имеет место важное соотношение

$$G_N(z) = G_{\Theta}(G_{N|\Theta}(z)) \quad \text{или} \quad G_N(z) = M_{\Theta}(\ln G_{N|\Theta}(z)). \quad (5.24)$$

Второе выражение предпочтительнее для абсолютно непрерывных смешивающих распределений, так как производящая функция вероятности для них не имеет простой интерпретации.

Еще один тип моделей числа неблагоприятных событий состоит в использовании сложных распределений. Он возникает естественным образом при анализе ситуации с несколькими неблагоприятными событиями по одному риску. Другой важной интерпретацией является исследование общего числа пострадавших в авариях и несчастных случаях, если в каждом из них может пострадать разное число объектов.

Если  $N$  — случайная величина числа рисков, по которым имел место ущерб, а  $K_j$  — независимые и одинаково распределенные случайные величины числа неблагоприятных событий по  $j$ -му риску ( $j \in 1 \div N$ ), то общее число случаев возникновения ущерба задается суммой

$$N_{coll} = \sum_{j=1}^N K_j.$$

По существу это приложение теории коллективного риска к моделированию совокупного числа событий в портфеле. Для нее выполняются соответствующие свой-

ства. В частности, можно показать, что

$$G_{N_{coll}}(t) = G_N(G_{K_j}(t)). \quad (5.25)$$

Данное свойство широко используется при анализе случайной величины  $N_{coll}$ .

Как и для других типов моделей совокупного числа неблагоприятных событий, ряд соотношений из п. 5.2 упрощается в силу дискретности распределений. В частности, равенство (5.15) можно свести к виду

$$f_{N_{coll}}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_N(n) f_{K_j}^{*n}(k), \quad (5.26)$$

который упрощает расчеты за счет использования в формуле свертки дискретных распределений

$$f_{k_j}^{*n}(k) = \sum_{j=0}^k f_{k_j}^{*(n-1)}(j) f_{k_j}(k-j).$$

Более того, формулу (5.26) можно еще более упростить, используя особенности распределений.

Тем не менее в одном отношении дискретные распределения слагаемых усложняют модель — это касается расчета  $P[N_{coll} = 0]$ . Если при абсолютно непрерывном распределении слагаемых имеет место  $P[S_{coll} = 0] = P[N = 0]$ , то в данном случае возможна ситуация, когда  $N > 0$ , но  $K_j = 0$ ,  $j = 1 \div N$ . Для решения данной проблемы следует заметить, что  $P[X = 0] = G_X(0)$ , и воспользоваться формулой (5.25):

$$P[N_{coll} = 0] = G_{N_{coll}}(0) = G_N(G_{K_j}(0)) = G_N(f_{K_j}(0)),$$

где  $f_{K_j}(0) = P[K_j = 0]$ .

Кроме прямого применения (исследование механизма возникновения неблагоприятных событий) рассмотренные модели позволяют расширить список распределений числа случаев ущерба, которые можно использовать на практике. При этом они не обязаны отражать особенности такого механизма, а просто удачно описывают первичные данные.

### 5.3.2. Переход к однородному портфелю

Принципиальное свойство модели коллективного риска зафиксировано в одной из ее предпосылок — слагаемые должны быть распределены одинаково. Это означает, что данная модель, по существу, может использоваться только для однородных портфелей.

Для того чтобы распространить ее на более важный для практики случай неоднородных совокупностей рисков, необходимо осуществлять специальные подготовительные мероприятия, а именно — гомогенизацию портфеля. Этот прием в общем и целом работает так же, как и для модели индивидуального риска. Однако в модели коллективного риска часто учитываются её особенности. К примеру, нередко используется следующая процедура, учитывающая такую особенность распределения Пуассона, как возможность его декомпозиции.

Если портфель рисков можно разбить на  $m$  однородных групп, в каждой из которых совокупный ущерб описывается сложным распределением Пуассона и соответствующие величины независимы, то можно сконструировать сложное распределение Пуассона, адекватно моделирующее случайную величину совокупного ущерба по этому портфелю.

Для каждой однородной подгруппы соответствующая случайная величина

$$S_i = \sum_{k=1}^{N_i} Y_{ik}$$

имеет сложное распределение Пуассона с пуассоновским параметром  $\lambda_i$  и функцией распределения  $F_i(\cdot)$  случайных величин  $Y_{ik}$ , одинаковой для всех  $k$ . Ее производящая функция моментов

$$M_{S_i}(t) = \exp(\lambda_i (M_i(t) - 1)).$$

В свою очередь, производящая функция моментов случайной величины

$$S = \sum_{i=1}^m S_i$$

совокупного ущерба по неоднородному портфелю может быть записана в силу независимости  $S_i$  в виде

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^m M_{S_i}(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i (M_i(t) - 1)\right). \quad (5.27)$$

Для того чтобы привести ее к виду, соответствующему сложному распределению Пуассона, домножим и разделим показатель на

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

Тогда получим

$$M_S(t) = \exp\left(\lambda \left[\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t) - 1\right]\right).$$

Иными словами, пуассоновский параметр нового распределения равен  $\lambda$ , а функция распределения слагаемых представляет собой

$$F_{Y_j^*}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x). \quad (5.28)$$

Дадим интерпретацию полученного результата.

Тот факт, что интенсивность возникновения неблагоприятных событий по портфелю в целом равна сумме интенсивностей возникновения ущерба по его отдельным

частям, хорошо согласуется с интуитивными представлениями (особенно с учетом использования пуассоновского точечного процесса). Поэтому с определением случайной величины

$$N = \sum_{i=1}^m N_i$$

общего числа случаев возникновения ущерба проблем не возникает.

Сложнее объяснить, почему набор случайных величин  $Y_{ik}$ , имеющих разное распределение для различных значений  $i$ , заменяется последовательностью одинаково распределенных случайных величин  $Y_j^*$ . Особенность такой замены можно объяснить с помощью уравнения (5.28), если интерпретировать отношение  $\lambda_i/\lambda$  как вероятность того, что наугад выбранное неблагоприятное событие относится к риску из  $i$ -й однородной группы. Тогда (5.28) можно интерпретировать как смесь распределений с функциями распределения  $F_i(x)$ ,  $i \in 1 \div m$ . В результате происходит «усреднение» распределения по типу риска, так что случайная величина  $Y_j^*$ , взятая в отдельности, может не соответствовать ни одной из случайных величин  $Y_{ik}$ , но их суммы будут иметь одинаковые распределения:

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{N_i} Y_{ik} \sim \sum_{j=1}^N Y_j^*.$$

### 5.3.3. Сложно-пуассоновская аппроксимация модели индивидуального риска

Для модели коллективного риска разработаны более мощные методы получения решения, чем для модели индивидуального риска (особенно если последняя рассматривается для случая неоднородного портфеля). Поэтому для нее имеет смысл использовать специальные аппроксимации на основе сложного распределения Пуассона. Ниже представлен один из наиболее популярных вариантов. Альтернативы содержатся в задаче 5.14 и упражнении 5.15.

Легко показать, что из выражения (1.3) для индивидуального ущерба следует формула

$$M_{X_j}(t) = p_j + (1 - p_j)M_{Y_j}(t).$$

Тогда производящую функцию моментов случайной величины  $S_{ind}$  можно записать в виде

$$M_{S_{ind}}(t) = \prod_{j=1}^n [p_j + (1 - p_j)M_{Y_j}(t)].$$

Прологарифмируем это выражение:

$$\ln M_{S_{ind}}(t) = \sum_{j=1}^n \ln (1 + (1 - p_j) [M_{Y_j}(t) - 1]).$$

Разложим каждое слагаемое в ряд Тейлора:

$$\ln M_{S_{ind}}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} [(1-p_j)(M_{Y_j}(t)-1)]^k.$$

Если взять только первые члены рядов ( $k=1$ ), то получим аппроксимацию

$$\ln M_{S_{ind}}(t) \approx \sum_{j=1}^n (1-p_j)(M_{Y_j}(t)-1).$$

Полагая  $\lambda_j = 1 - p_j$ , сведем последнее выражение к (5.27), откуда легко получить искомую сложно-пуассоновскую аппроксимацию  $M_{S_{ind}}(t) \approx M_{S_{coll}}(t)$ , если  $S_{coll}$  подчинено сложному распределению Пуассона.

Качество этой аппроксимации вполне удовлетворительное. В частности, можно показать, что

$$\sup_A |P[S_{ind} \in A] - P[S_{coll} \in A]| \leq \sum_{j=1}^n (1-p_j)^2,$$

где точная верхняя граница берется по всем подмножествам  $A$  носителя распределения. Это означает достаточно высокую степень близости исходного распределения совокупного ущерба и его аппроксимации, так как для любого  $x$  будет выполнено

$$|F_{S_{ind}}(x) - F_{S_{coll}}(x)| \leq \sup_A |P[S_{ind} \in A] - P[S_{coll} \in A]|.$$

## 5.4. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ УЩЕРБА

### 5.4.1. Задачи по модели индивидуального риска

**Задача 5.1.** Получить различными способами распределение сумм двух независимых случайных величин, причем  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

[Подсказка: параметры распределения могут быть разными.]

*Решение.* Очевидно, что нормальная аппроксимация здесь не может быть применена. Поэтому для получения распределения суммы будут использованы:

- 1) формула свертки;
- 2) производящие функции моментов;
- 3) особенности экспоненциального распределения.

*Способ 1. Формула свертки*

$$f_S(s) = \int_0^s \lambda_1 e^{-\lambda_1(s-x)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx.$$

Необходимо рассмотреть два случая: а)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , б)  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} \int_0^s e^{-x(\lambda_2 - \lambda_1)} dx = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 s} \left( 1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)s} \right) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_2 s}). \end{aligned}$$

Здесь для определенности положено  $\lambda_2 > \lambda_1$ . В противном случае для удобства представления числитель и знаменатель могут быть домножены на  $-1$ . Функция распределения равна

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \int_0^x f_S(s) ds = \int_0^x \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_2 s}) ds = \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x}) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-\lambda_2 x}) = 1 - \frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то

$$f_S(s) = \lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s ds = \lambda^2 s e^{-\lambda s}.$$

Это плотность гамма-распределения с параметрами 2 и  $\lambda$ .

*Способ 2. Производящие функции моментов*

В соответствии со свойствами экспоненциальных распределений имеем

$$M_{X_1}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - t}, \quad t < \lambda_1 \quad \text{и} \quad M_{X_2}(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - t}, \quad t < \lambda_2.$$

Тогда согласно (2.3) получим

$$M_S(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - t} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - t}, \quad t < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то

$$M_S(t) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^2, \quad t < \lambda,$$

что приводит к гамма-распределению с параметрами 2 и  $\lambda$ .

*Способ 3. Особенности экспоненциального распределения*

Экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$  является частным случаем гамма-распределения с параметрами 1 и  $\lambda$ . Известно, что сумма двух случайных величин, имеющих гамма-распределение с одним и тем же параметром масштаба, также имеет гамма-распределение с тем же параметром масштаба и параметром положения, равным сумме параметров положения из распределений случайных величин, которые выступают в роли слагаемых. В нашем случае речь идет о гамма-распределении с параметрами 2 и  $\lambda$ . Если параметры распределения различны  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то этот способ использовать нельзя.

Задача 5.2. Вывести формулу абсолютного момента третьего порядка:

- а) для произвольного распределения;  
 б) для экспоненциального распределения с параметром  $\lambda$ .

Решение

- а) Положим  $\mu = E[X]$ . Тогда абсолютный момент третьего порядка

$$\begin{aligned} E[|X - \mu|^3] &= \int_0^\mu (\mu - x)^3 f(x) dx + \int_\mu^\infty (x - \mu)^3 f(x) dx = \\ &= \mu^3 F(\mu) - 3\mu^2 \int_0^\mu x f(x) dx + 3\mu \int_0^\mu x^2 f(x) dx - \int_0^\mu x^3 f(x) dx + \\ &+ \int_\mu^\infty x^3 f(x) dx - 3\mu \int_\mu^\infty x^2 f(x) dx + 3\mu^2 \int_\mu^\infty x f(x) dx - \mu^3 (1 - F(\mu)) = \\ &= \mu^3 (2F(\mu) - 1) - 3\mu^2 (2I_1 - \mu_1) + 3\mu (2I_2 - \mu_2) - (2I_3 - \mu_3), \end{aligned}$$

где  $I_1 = \int_0^\mu x f(x) dx$ ,  $I_2 = \int_0^\mu x^2 f(x) dx$ ,  $I_3 = \int_0^\mu x^3 f(x) dx$ ,

$$\mu_1 = \int_0^\infty x f(x) dx = \mu, \mu_2 = \int_0^\infty x^2 f(x) dx, \mu_3 = \int_0^\infty x^3 f(x) dx.$$

- б) Для экспоненциального распределения с параметром  $\lambda$  имеет место

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \mu_1 = \frac{1}{\lambda}, \mu_2 = \frac{2}{\lambda^2}, \mu_3 = \frac{6}{\lambda^3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\mu x \lambda e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^\mu - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\mu = \\ &= -\mu e^{-\lambda \mu} + 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \mu} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \left( \mu + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda \mu}. \end{aligned}$$

Так как  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ , то  $I_1 = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda e}$ . Аналогично вычислим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\mu x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^\mu - 2 \int_0^\mu x e^{-\lambda x} dx = -\mu^2 e^{-\lambda \mu} + \frac{2}{\lambda} I_1 = \\ &= -\frac{1}{\lambda^2 e} + \frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda e} \right) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{5}{\lambda^2 e}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\mu x^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^3 e^{-\lambda x} \Big|_0^\mu + 3 \int_0^\mu x^2 e^{-\lambda x} dx = -\mu^3 e^{-\lambda \mu} + \frac{3}{\lambda} I_2 = \\ &= -\frac{1}{\lambda^3 e} + \frac{3}{\lambda} \left( \frac{2}{\lambda^2} - \frac{5}{\lambda^2 e} \right) = \frac{6}{\lambda^3} - \frac{16}{\lambda^3 e}. \end{aligned}$$

$$F(\mu) = 1 - e^{-\lambda \mu} = 1 - e^{-1}.$$

Подставив полученные выражения в результат пункта (а) данной задачи, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^3} \left( 2 \left( 1 - \frac{1}{e} \right) - 1 \right) - \frac{3}{\lambda^2} \left( \frac{2}{\lambda} - \frac{4}{\lambda e} - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{3}{\lambda} \left( 2 \left( \frac{2}{\lambda^2} - \frac{5}{\lambda^2 e} \right) - \frac{2}{\lambda^2} \right) - \left( \frac{12}{\lambda^3} - \frac{32}{\lambda^3 e} - \frac{6}{\lambda^3} \right) = \\ & = \frac{1}{\lambda^3} - \frac{2}{\lambda^3 e} - \frac{3}{\lambda^3} + \frac{12}{\lambda^3 e} + \frac{6}{\lambda^3} - \frac{30}{\lambda^2 e} - \frac{6}{\lambda^3} + \frac{32}{\lambda^3 e} = \\ & = \frac{1}{\lambda^3} (1 - 3 + 6 - 6) + \frac{1}{\lambda^3 e} (-2 + 12 - 30 + 32) = \frac{12e^{-1} - 2}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

**Задача 5.3.** Найти минимальный объем выборки, при котором выборочная функция распределения, построенная на основе стандартизированных наблюдений выборочных значений независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с одинаковым параметром, отличается от стандартного нормального распределения не более чем на  $\gamma = 0,05$ .

*Решение.* Согласно формуле (5.6) и результатам предыдущей задачи имеем

$$n \geq \frac{(12e^{-1} - 2)^2 \lambda^6 \cdot C^2}{\lambda^6 \cdot \gamma^2} = \frac{(12e^{-1} - 2)^2 \cdot C^2}{\gamma^2} \approx \frac{3,363}{\gamma^2}.$$

При  $\gamma = 0,05$  это даст  $n \geq 1346$ .

**Задача 5.4.** Получить распределение суммы пятисот независимых и одинаково распределенных случайных величин, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . Оценить, будет ли полученное распределение приближенно нормальным с максимальным абсолютным отклонением в 0,05.

*Решение.* В данной задаче число слагаемых слишком велико, чтобы было удобно использовать формулу свертки.

Использование свойств экспоненциального распределения как частного случая гамма-распределения позволит оценить распределение  $S_{ind}$  как гамма-распределение с параметрами 500 и  $\lambda$ .

Нормальная аппроксимация приведет к нормальному распределению с математическим ожиданием  $500/\lambda$  и дисперсией  $500/\lambda^2$ .

Для определения того, насколько сильно будут отличаться эти оценки, сравним некоторые характеристики. Значения математического ожидания и дисперсии совпадают. Однако оценки моды отличаются: в первом случае  $499/\lambda$ , во втором —  $500/\lambda$ . Хотя различия невелики ( $1/\lambda$ ), первый подход даст распределение с небольшой положительной асимметрией: коэффициент асимметрии равен

$$\frac{2}{\sqrt{500}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \approx 0,09.$$

Для оценки точности нормальной аппроксимации воспользуемся формулой (5.6) и результатами задачи 5.3. Количество слагаемых недостаточно велико ( $500 < 1346$ ) для того, чтобы абсолютные отклонения от нормального распределения не превышали 0,05. Для оценки верхней границы абсолютного отклонения воспользуемся соотношением, аналогичным (5.6):

$$\gamma = \sqrt{3,363/500} = 0,082.$$

Иными словами, выборочное распределение, которое построено на основе 500 стандартизированных наблюдений результатов реализации случайной величины, подчиненных экспоненциальному закону, будет отличаться от стандартного нормального распределения не более чем на 0,082.

**Задача 5.5.** Найти функцию распределения суммы двух случайных величин индивидуального ущерба, если вероятность отсутствия неблагоприятных событий составляет  $p_i$  для  $i$ -й случайной величины ( $i \in \{1, 2\}$ ), а размер ущерба, если он имеет место, подчиняется экспоненциальному распределению с параметром  $\lambda_i$ .

*Решение.* Очевидно, функция распределения  $i$ -й случайной величины в соответствии с соотношением (1.4) имеет следующий вид:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ p_i + (1 - p_i)(1 - e^{-\lambda_i x}), & x > 0. \end{cases}$$

Для получения общей формулы воспользуемся соотношением (5.2). С учетом вида функции распределения и обозначений в главе 1 имеем

$$F_S(s) = \int_0^s (p_1 + (1 - p_1)F_{Y_1}(s - x)) f_{X_2}(x) dx + F_{X_1}(s)p_2. \quad (5.29)$$

При  $s = 0$  получим  $F_S(0) = p_1 p_2$ . При  $s > 0$  первое слагаемое в (5.29) определяется так:

$$\begin{aligned} & p_1 \int_0^s f_{X_2}(x) dx + (1 - p_1) \int_0^s F_{Y_1}(s - x) f_{X_2}(x) dx = \\ & = p_1(1 - p_2) \int_0^s f_{Y_2}(x) dx + (1 - p_1)(1 - p_2) \int_0^s F_{Y_1}(s - x) f_{Y_2}(x) dx = \\ & = p_1(1 - p_2)F_{Y_2}(s) + (1 - p_1)(1 - p_2) \int_0^s F_{Y_1}(s - x) f_{Y_2}(x) dx. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (5.29) можно преобразовать следующим образом:

$$F_{X_1}(s)p_2 = p_2(p_1 + (1 - p_1)F_{Y_1}(s)).$$

Тогда формула (5.29) примет вид:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= p_1 p_2 + p_2(1 - p_1)F_{Y_1}(s) + p_1(1 - p_2)F_{Y_2}(s) + \\ &+ (1 - p_1)(1 - p_2) \int_0^s F_{Y_1}(s - x) f_{Y_2}(x) dx. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Теперь используем вид распределения усеченных случайных величин:

$$F_{Y_1}(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}, \quad x > 0, \quad \text{и} \quad F_{Y_2}(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x}, \quad x > 0.$$

Для того чтобы применить формулу (5.30), сначала найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^s (1 - e^{-\lambda_1(s-x)}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx &= \int_0^s \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx - \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} \int_0^s e^{-x(\lambda_2 - \lambda_1)} dx = \\ &= (1 - e^{-\lambda_2 s}) - \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} \int_0^s e^{-x(\lambda_2 - \lambda_1)} dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая. При  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  это выражение сведется к следующему:

$$1 - e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)s}\right) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 s} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 s}.$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то искомый интеграл равен  $\lambda - e^{-\lambda s} - \lambda s e^{-\lambda s}$

Подставляя полученные выражения в (5.30), получим формулу функции распределения для двух рассматриваемых случаев:

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то

$$\begin{aligned} F_S(s) &= p_1 p_2 + p_2(1 - p_1) (1 - e^{-\lambda_1 s}) + p_1(1 - p_2) (1 - e^{-\lambda_2 s}) + \\ &+ (1 - p_1)(1 - p_2) \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 s} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 s}\right) = \\ &= p_1 p_2 + p_2(1 - p_1) + p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)(1 - p_2) - \\ &- e^{-\lambda_1 s} \left(p_2(1 - p_1) + (1 - p_1)(1 - p_2) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) - \\ &- e^{-\lambda_2 s} \left(p_1(1 - p_2) - (1 - p_1)(1 - p_2) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) = \\ &= 1 - (1 - p_1) \left(p_2 + (1 - p_2) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) e^{-\lambda_1 s} - (1 - p_2) \left(p_1 + (1 - p_1) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{-\lambda_2 s}. \end{aligned}$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то

$$\begin{aligned} F_S(s) &= p_1 p_2 + p_2(1 - p_1) (1 - e^{-\lambda s}) + \\ &+ p_1(1 - p_2) (1 - e^{-\lambda s}) + (1 - p_1)(1 - p_2) (1 - e^{-\lambda s} - \lambda s e^{-\lambda s}) = \\ &= 1 - e^{-\lambda s} (p_2(1 - p_1) + p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)(1 - p_2) + (1 - p_1)(1 - p_2)\lambda s) = \\ &= 1 - e^{-\lambda s} (1 - p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)\lambda s). \end{aligned}$$

**Задача 5.6.** В портфеле объемом  $n$  рисков имеются риски двух типов — стандартные и повышенные. Первые характеризуются средним ущербом  $\mu_0$  и дисперсией  $\sigma_0^2$ , второе — соответственно  $\mu_1$  и  $\sigma_1^2$ . Размеры ущерба по разным рискам независимы. Определить математическое ожидание и дисперсию совокупного ущерба для каждого из следующих вариантов, характеризующихся разной информацией о структуре портфеля:

- 1) доля стандартных рисков составляет  $q$  (при этом  $nq$  — целое);
- 2) число стандартных рисков в портфеле описывается биномиальной случайной величиной с параметрами  $n$  и  $q$ .

Сравнить полученные результаты.

*Решение*

*Вариант 1.* Воспользуемся известными свойствами

$$E[S_{ind}] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

и для независимых случайных величин

$$D[S_{ind}] = \sum_{i=1}^n D[X_i],$$

которые, очевидно, преобразуются к виду

$$E[S_{ind}] = nq\mu_0 + n(1-q)\mu_1$$

и соответственно

$$D[S_{ind}] = nq\sigma_0^2 + n(1-q)\sigma_1^2.$$

*Вариант 2.* Для получения решения необходимо рандомизировать сумму по количеству стандартных рисков. Обозначим  $N$  соответствующую случайную величину ( $N \sim \text{Bin}(n, q)$ ). Тогда получим следующие формулы для математического ожидания:

$$E[S_{ind}] = E[E[S_{ind} | N]] = E[\mu_0 N + \mu_1(n - N)] = nq\mu_0 + n(1-q)\mu_1$$

и дисперсии:

$$\begin{aligned} D[S_{ind}] &= D[E[S_{ind} | N]] + E[D[S_{ind} | N]] = \\ &= D[\mu_0 N + \mu_1(n - N)] + E[\sigma_0^2 N + \sigma_1^2(n - N)] = \\ &= (\mu_1 - \mu_0)^2 D[N] + \sigma_0^2 E[N] + n\sigma_1^2 - \sigma_1^2 E[N] = \\ &= (\mu_1 - \mu_0)^2 nq(1-q) + nq\sigma_0^2 + n(1-q)\sigma_1^2. \end{aligned}$$

*Сравнение:*

Математические ожидания совпадают, а дисперсия для второго варианта больше дисперсии для первого на величину  $D[E[S_{ind} | N]]$ , равную  $(\mu_1 - \mu_0)^2 nq(1-q)$ .

**Задача 5.7.** Выразить математическое ожидание и дисперсию гомогенизированной усеченной случайной величины  $Y_j^*$  и скачка  $p_*$  в нулевой точке в терминах аналогичных показателей для исходных усеченных случайных величин  $Y_j$  и скачков  $p_j$ .

*Решение.* Решение этой задачи можно осуществлять различными способами.

*1 способ. Приравнивание плотностей непрерывного компонента*

Согласно (5.13) вероятности, сосредоточенные на одном и том же бесконечно малом интервале, для суммы гомогенизированных случайных величин и для совокупного ущерба по портфелю определяются так:

$$n(1-p_*)f_{Y_j^*}(x) = \sum_{j=1}^n (1-p_j)f_{Y_j}(x), \quad (5.31)$$

для фиксированного  $x > 0$ . Тогда путем интегрирования по всем возможным значениям  $x$ , т. е.

$$n(1-p_*) \int_0^{\infty} f_{Y_j^*}(x) dx = \sum_{j=1}^n (1-p_j) \int_0^{\infty} f_{Y_j}(x) dx,$$

получим

$$n(1 - p_*) = \sum_{j=1}^n (1 - p_j)$$

или, что то же самое,

$$1 - p_* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - p_j),$$

откуда следует соотношение

$$p_* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_j. \quad (5.32)$$

Введем вспомогательные величины

$$\beta_j = \frac{1 - p_j}{n(1 - p_*)} = \frac{1 - p_j}{\sum_{j=1}^n (1 - p_j)},$$

которые можно интерпретировать как веса в формуле среднего взвешенного или вероятности дискретного смешивающего распределения. С их учетом выражение (5.37) переписывается в виде

$$f_{Y_*}(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j f_{Y_j}(x). \quad (5.33)$$

Его можно использовать для вывода соотношения математических ожиданий

$$\mu_* = \int_0^{\infty} x \cdot f_{Y_*}(x) dx = \int_0^{\infty} x \sum_{j=1}^n \beta_j f_{Y_j}(x) dx = \sum_{j=1}^n \beta_j \int_0^{\infty} x f_{Y_j}(x) dx = \sum_{j=1}^n \beta_j \mu_j \quad (5.34)$$

и дисперсий

$$\begin{aligned} \sigma_*^2 + \mu_*^2 &= \int_0^{\infty} x^2 f_{Y_*}(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \sum_{j=1}^n \beta_j f_{Y_j}(x) dx = \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_j \int_0^{\infty} x^2 f_{Y_j}(x) dx = \sum_{j=1}^n \beta_j (\sigma_j^2 + \mu_j^2), \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\sigma_*^2 = \sum_{j=1}^n \beta_j (\sigma_j^2 + \mu_j^2) - \mu_*^2. \quad (5.35)$$

*2 способ. Прямые рассуждения*

Выражение (5.38) можно было получить путем прямых рассуждений, так как скачок распределений обеих сумм случайных величин в (5.13) должен быть одинаков.

Аналогично для начальных моментов первого и второго порядка:

$$n(1 - p_*)\mu_* = \sum_{j=1}^n (1 - p_j)\mu_j \quad \text{и} \quad n(1 - p_*)(\sigma_*^2 + \mu_*^2) = \sum_{j=1}^n (1 - p_j)(\sigma_j^2 + \mu_j^2),$$

откуда легко получить (5.34) и (5.35).

### 5.4.2. Задачи по модели коллективного риска

**Задача 5.8.** Определить математическое ожидание, дисперсию и производящую функцию моментов для сложного пуассоновского распределения.

*Решение.* Для этого сложного распределения случайное число неблагоприятных событий  $N$  имеет распределение Пуассона ( $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ ). Тогда, очевидно, выполняется соотношение  $E[N] = D[N] = \lambda$ .

Для оценки математического ожидания воспользуемся формулой (5.16):

$$E[S_{coll}] = \lambda E[Y_k].$$

Для определения дисперсии применим формулу (5.17):

$$D[S_{coll}] = D[Y_k] \lambda + (E[Y_k])^2 \lambda = E[Y_k^2] \lambda.$$

Производящая функция моментов распределения Пуассона выглядит следующим образом:

$$M_N(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)),$$

тогда с учетом (5.18) получим производящую функцию моментов для сложного пуассоновского распределения:

$$M_{S_{coll}}(t) = \exp(\lambda(M_{Y_k}(t) - 1)).$$

**Задача 5.9.** Показать, что при биномиальном распределении числа неблагоприятных событий в портфеле рисков имеет место

$$D[S_{ind}] = D[S_{coll}],$$

а при пуассоновской аппроксимации числа случаев ущерба в портфеле:

$$D[S_{ind}] < D[S_{coll}].$$

*Решение.* Согласно условиям, сформулированным в п. 5.2.3, модели индивидуального и коллективного риска должны соответствовать друг другу, так что соотношения (5.19), (5.20) и (5.21) выполняются.

Случайная величина числа событий в модели коллективного риска может быть оценена как

$$N = \sum_{i=1}^n I_i, \tag{5.36}$$

что соответствует требованию равенства их математических ожиданий

$$E[N] = \sum_{i=1}^n (1 - p_i)$$

или, если случайные величины  $I_i$  одинаково распределены,

$$E[N] = n(1 - p).$$

Случайные величины  $I_i$  имеют распределение Бернулли, т. е. биномиальное распределение с параметрами 1 и  $p$ :

$$I_i \sim \text{Binom}(1; 1 - p).$$

Тогда из соотношения (5.36) следует, что  $N$  должна иметь биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p$ , т. е.

$$N \sim \text{Binom}(n; 1 - p).$$

При больших  $n$  и близких к единице значений  $p$  распределение  $N$  можно аппроксимировать с помощью пуассоновского закона с параметром  $\lambda = n(1 - p)$ . Несмотря на возможность выполнения соответствующих предпосылок, это все равно будет приближением, так как для него

$$P[N > n] > 0,$$

что не сочетается с постановкой задачи. Однако, если эта вероятность будет мала, то такую аппроксимацию можно считать удовлетворительной.

Если  $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ , то  $E[N] = D[N] = \lambda = n(1 - p)$ . Тогда равенство (5.21) можно переписать в виде

$$D[S_{coll}] = n(1 - p)\sigma^2 + n(1 - p)\mu^2.$$

Второе слагаемое в этом выражении больше, чем второе слагаемое в формуле (5.20), так что

$$D[S_{ind}] < D[S_{coll}].$$

**Задача 5.10.** Показать, что модифицированное распределение (с измененным значением  $p_0 = P[N_{mod} = 0]$ ) можно представить как

- 1) смесь распределений;
- 2) сложное распределение.

*Решение*

1. *Модифицированное распределение как смесь распределений*

Модифицированное распределение естественным образом представляется в виде смеси вырожденного распределения, вся масса вероятности которого сосредоточена в нулевой точке, и дискретного распределения, используемого для описания вероятностей ненулевых значений (см. п. 5.2.2):

$$F_{N_{mod}}(x) = p_0 + (1 - p_0) \frac{F_N(x) - f_0}{1 - f_0} \quad \text{при } x > 0,$$

где  $f_0 = P[N = 0]$ . Это выражение соответствует формуле (1.4). В терминах производящей функции его можно переписать как

$$G_{N_{mod}}(z) = p_0 + (1 - p_0) \frac{G_N(z) - f_0}{1 - f_0}. \quad (5.37)$$

Последнее равенство можно привести к виду:

$$G_{N_{mod}}(z) = \left(1 - \frac{1-p_0}{1-f_0}\right) + \frac{1-p_0}{1-f_0} G_N(z),$$

при  $f_0 < p_0 < 1$  оно представляет собой среднее взвешенное с положительными весами.

*2. Модифицированное распределение как сложное распределение*

С учетом формулы (5.25) выражение (5.37) можно интерпретировать как производящую функцию сложного распределения со случайным числом событий, подчиняющимся распределению Бернулли с параметром

$$\frac{1-p_0}{1-f_0},$$

и усеченным распределением компонент произвольного вида.

**Задача 5.11.** Условные распределения компонент смеси (при условии  $\Theta = \theta$ ) представляют собой распределение Пуассона с параметром  $\theta$ . Смешивающее распределение является гамма-распределением. Показать, что безусловное распределение будет отрицательным биномиальным.

*Решение.* Используем соотношение смеси дискретных распределений с непрерывным смешивающим распределением

$$P[N = k] = E[P[N = k | \Theta]] = \int_{-\infty}^{+\infty} P[N = k | \Theta = \theta] f_{\Theta}(\theta) d\theta,$$

которое является модификацией выражения (6.1). Подставляем формулы для распределения Пуассона с параметром  $\theta$  и гамма-распределения с параметрами  $\lambda$  и  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} P[N = k] &= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} d\theta = \frac{\lambda^\alpha}{k! \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \theta^{k+\alpha-1} e^{-\theta(\lambda+1)} d\theta = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{k! \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(k+\alpha)}{(\lambda+1)^{k+\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda+1)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha)} \theta^{k+\alpha-1} e^{-\theta(\lambda+1)} d\theta. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение представляет собой плотность гамма-распределения с параметрами  $\lambda+1$  и  $k+\alpha$ , откуда

$$P[N = k] = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{k! \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+1)^{k+\alpha}} = C_{k+\alpha-1}^k \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^\alpha \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^k.$$

Последнее выражение представляет собой распределение вероятностей для отрицательного биномиального распределения.

**Задача 5.12.** Показать, что сложное распределение Пуассона с параметром  $\lambda$  и логарифмическим распределением компонент, имеющим параметр  $p$ , подчинено

смещенному отрицательному биномиальному распределению<sup>3</sup> с параметрами  $(1-p)$  и  $r = -\frac{\lambda}{\ln(1-p)}$ , а также со смещением в размере  $r$ .

*Решение.* Результатом должно быть распределение с производящей функцией

$$G_S(t) = E[t^S] = E[t^{S_{NB}-r}] = t^{-r} G_{S_{NB}}(t) = t^{-r} \left( \frac{qt}{1-(1-q)t} \right)^r = \left( \frac{q}{1-(1-q)t} \right)^r. \quad (5.38)$$

Воспользуемся теперь соотношением (5.24):

$$G_S(t) = G_N(G_{K_j}(t)) = \exp(\lambda(G_{K_j}(t) - 1)).$$

Для логарифмического распределения имеет место

$$G_{K_j}(t) = \frac{\ln(1-pt)}{\ln(1-p)}.$$

Тогда

$$G_S(t) = \exp\left(\lambda \left( \frac{\ln(1-pt)}{\ln(1-p)} - 1 \right)\right) = \exp\left(\frac{\lambda}{\ln(1-p)} \ln \frac{1-pt}{1-p}\right).$$

В силу того, что  $\ln(1-p) < 0$ , перепишем это выражение в виде:

$$G_S(t) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\ln(1-p)} \ln \frac{1-p}{1-pt}\right) = \left(\frac{1-p}{1-(1-p)t}\right)^{\frac{-\lambda}{\ln(1-p)}},$$

что соответствует формуле (5.35) при  $q = 1-p$  и  $r = -\frac{\lambda}{\ln(1-p)}$ .

**Задача 5.13** (Декомпозиция распределения Пуассона). Число неблагоприятных событий  $N$  описывается распределением Пуассона с параметром  $\lambda$ . В зависимости от типа риска события относятся к одному из  $m$  классов. Доли этих классов в портфеле рисков составляют  $p_1, \dots, p_m$ . Показать, что

а) число событий  $N_j$ , относящихся к  $j$ -му классу ( $j \in 1 \div m$ ), может быть описано распределением Пуассона с параметром  $p_j \lambda$ ;

б) случайные величины  $N_j$  независимы.

*Решение.* При условии, что число неблагоприятных событий составит  $N = n$ , их распределение по классам можно представить как полиномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $p_1, \dots, p_m$ .

а) Согласно свойствам полиномиального распределения с параметрами  $n$  и  $p_1, \dots, p_m$  маргинальное распределение является биномиальным с параметрами  $n$  и  $p_j$ . Оно также будет условным (при условии  $N = n$ ). Тогда

$$P[N_j = n_j] = \sum_{n=n_j}^{\infty} P[N_j = n_j | N = n] P[N = n] =$$

<sup>3</sup>Иными словами, носителем этого распределения является множество целых неотрицательных чисел. Его также называют отрицательным биномиальным распределением, типичная интерпретация которого — число неудачных испытаний, предшествовавших  $r$ -му «успеху».

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=n_j}^{\infty} C_n^{n_j} p_j^{n_j} (1-p_j)^{n-n_j} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!} \sum_{n=n_j}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p_j)]^{n-n_j}}{(n-n_j)!} = \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!} e^{\lambda(1-p_j)} = e^{-\lambda p_j} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получается распределение Пуассона с параметром  $p_j \lambda$ .

б) Условное совместное распределение случайных величин, как уже подчеркивалось ранее, имеет полиномиальное распределение

$$\begin{aligned}
P[N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m] &= P[N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m | N = n] \cdot P[N = n] = \\
&= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = \prod_{j=1}^m e^{-\lambda p_j} \frac{(\lambda p_j)^{n_j}}{n_j!}.
\end{aligned}$$

С учетом результата, полученного для маргинального распределения, это означает, что случайные величины  $N_1, \dots, N_m$  являются независимыми.

**Задача 5.14.** (Продолжение задачи 5.9). Обосновать сложно-пуассоновскую аппроксимацию модели индивидуального риска, альтернативную данной в пункте 5.3.3. В рамках этой аппроксимации в формуле (5.28) используется замена  $\lambda_j = -\ln p_j$ .

*Решение*

В задаче 5.9 была обоснована сложно-пуассоновская аппроксимация модели индивидуального риска для однородных портфелей. По аналогии с ней каждую отдельную случайную величину  $X_j$  можно приближенно представить в виде суммы  $S_j$  случайного числа случайных величин, причем распределение слагаемых соответствует усеченному слева распределению ущерба  $Y_j$ , а число слагаемых  $N_j$  по предположению подчиняется закону Пуассона с параметром  $\lambda_j = -\ln p_j$ , которое получено путем приравнивания вероятностей отсутствия неблагоприятных событий

$$P[X_j = 0] = P[S_j = 0].$$

Левая часть равенства представляет собой  $p_j$ , а правая находится из условия

$$P[S_j = 0] = P[N_j = 0] = e^{-\lambda_j}.$$

Далее согласно процедуре п. 5.3.3 легко перейти к гомогенизированному портфелю, откуда получается (5.28) при усредненных  $\lambda_j$ .

Это будет аппроксимацией, так как она допускает неоднократные случаи возникновения ущерба с вероятностью

$$1 - e^{-\lambda_j} - \lambda_j e^{-\lambda_j} = 1 - e^{-\lambda_j} (1 + \lambda_j) = 1 - p_j (1 - \ln p_j),$$

что не предполагается исходной моделью индивидуального риска.

## 5.5. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

### 5.5.1. Упражнения по модели индивидуального риска

5.1. Получить различными способами распределение сумм двух независимых одинаково случайных величин для всех типов распределений, упомянутых в главе 1.

5.2. Найти минимальный объем выборки, при котором выборочная функция распределения, построенная на основе стандартизированных наблюдений выборочных значений независимых одинаково распределенных случайных величин, отличается от стандартного нормального распределения не более чем на (а)  $\gamma = 0,05$ , (б)  $\gamma = 0,01$ . В качестве распределений ущерба поочередно взять все распределения, представленные в главе 1.

5.3. Оценить качество нормальной аппроксимации совокупного ущерба по портфелю из 1000 одинаковых независимых рисков. В качестве распределений ущерба поочередно взять все распределения, представленные в главе 1.

5.4. Найти функцию распределения суммы двух случайных величин размера ущерба, если вероятность отсутствия неблагоприятного события составляет  $p_i$  для  $i$ -й случайной величины ( $i \in \{1, 2\}$ ), а в качестве распределений ущерба, если они имеют место, следует поочередно взять все распределения, представленные в главе 1.

5.5. Показать, что если случайная величина индивидуального ущерба  $X_j$  имеет гамма-распределение с параметрами  $\lambda$  и  $\alpha_j$ , то совокупный ущерб подчинен гамма-распределению с параметрами  $\lambda$  и  $\sum \alpha_j$ .

5.6. Показать, что если случайная величина индивидуального ущерба  $X_j$  подчинена обратному гауссовскому распределению с параметрами  $\alpha_j$  и  $\beta$ , то совокупный ущерб также имеет обратное гауссовское распределение с параметрами  $\sum \alpha_j$  и  $\beta$ .

[Подсказка: производящая функция моментов для этого распределения представляет собой

$$M_{X_j}(t) = \exp\left(\alpha_j \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2t}{\beta}}\right)\right).$$

### 5.5.2. Упражнения по модели коллективного риска

5.7. Доказать формулу (5.17).

5.8. Вывести формулы (5.16) и (5.17), используя производную производящей функции моментов (5.18).

2.9. Оценить производящую функцию моментов, математическое ожидание и дисперсию для сложного отрицательного биномиального распределения.

5.10. Требования к общему объему неоднородного портфеля в модели индивидуального риска можно сформулировать с помощью неравенства Берри—Эссеена (5.5) при переходе к гомогенизированным случайным величинам. Переписать соответствующее условие в терминах характеристик исходных случайных величин.

[Подсказка: воспользоваться равенством (5.38) и решением задачи 5.2.]

5.11. Доказать формулу (5.24) для распределения Пуассона.

5.12. Найти безусловное распределение, если условное распределение — биномиальное, а смешивающее — бета-распределение.

[Подсказка: полученное распределение называется отрицательным гипергеометрическим, или распределением Пойа—Эггенбергера.]

5.13. Найти сложное распределение Пуассона, если слагаемые подчинены а) распределению Пуассона;

[Подсказка: полученное распределение называется Пуассон-пуассоновским, или распределением Неймана типа А.]

б) усеченному геометрическому распределению (исключается нулевая точка);

[Подсказка: полученное распределение называется распределением Пойа—Эпли.]

с) обратному гауссовскому распределению.

5.14. (*Декомпозиция сложного распределения Пуассона*) Совокупный ущерб по портфелю рисков моделируется сложным распределением Пуассона с параметром  $\lambda$  и функцией распределения ущерба  $F(\cdot)$ . Портфель можно разбить на  $m$  классов в зависимости от типа риска, при этом  $p_j$  — доли указанных классов в портфеле, так что

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1, \quad p_j \geq 0, \quad j \in 1 \div m.$$

Показать, что в этом случае совокупный ущерб в каждом классе описывается сложным распределением Пуассона с параметром  $\lambda p_j$  и функцией распределения индивидуального ущерба  $F_j(\cdot)$ . При этом

$$F(x) = \sum_{j=1}^m p_j F_j(x).$$

[Подсказка: начать с совместного распределения случайных величин

$$(N_1, \dots, N_m, S_1, \dots, S_m).]$$

5.15 (*Аппроксимация Корнья*). Обосновать сложно-пуассоновскую аппроксимацию модели индивидуального риска, при которой в формуле (5.28) используется замена

$$\lambda_j = \frac{1 - p_j}{p_j}.$$

5.16. Рассчитать математические ожидания и дисперсии ущерба для сложно-пуассоновских аппроксимаций из п. 5.3.3, задачи 5.14 и упражнения 5.13. Показать, что минимальные оценки математических ожиданий и дисперсий будут при использовании первого приближения, а максимальные — последнего. Показать, что математическое ожидание совокупного ущерба для аппроксимации п. 5.3.3 совпадает с математическим ожиданием исходной модели, а дисперсия будет больше.

## Глава 6

# РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН УЩЕРБА

При рассмотрении портфелей рисков часто необходимо исследовать не совокупный ущерб или иную линейную комбинацию индивидуальных случайных величин, а проанализировать их взаимодействие или увязанное поведение квантилей. Для этого будет недостаточно информации о маргинальных распределениях и их корреляциях, и может потребоваться построить модель, основанную на совместном распределении рисков. Однако стандартных типов многомерных распределений может не хватить, и придется конструировать распределение с заранее известными свойствами, отражающими особенности наблюдаемой ситуации.

Цель данной главы — рассмотрение вероятностных распределений многомерных случайных величин, описывающих размер ущерба, а также в обсуждении основных подходов к конструированию таких распределений.

После изучения материала вы узнаете:

- причины популярности многомерного нормального распределения;
- какими свойствами обладает многомерное нормальное распределение;
- какие проблемы возникают для многомерных распределений, отличных от нормального распределения;
- какие основные подходы имеются для построения многомерного гамма-распределения;
- какими свойствами обладает многомерное логнормальное распределение;
- какие распределения входят в класс эллиптических распределений;
- какими свойствами обладают эллиптические распределения;
- что такое копула;
- какими свойствами обладает копула.

**Ключевые слова:** многомерное нормальное распределение, многомерное гамма-распределение, многомерное логнормальное распределение, эллиптические распределения, копула, пределы Фреше—Хёфдинга.

## 6.1. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

### 6.1.1. Особенности применения многомерного нормального распределения

В главе 1 подчеркивалось, что одномерное нормальное распределение далеко не всегда подходит для моделирования индивидуального ущерба. Этот результат естественным образом распространяется и на модели портфелей рисков.

Иными словами, реальные процессы проявления риска в большинстве случаев не очень хорошо согласуются с многомерным нормальным распределением. Исключения составляют ситуации, отражающие массовые экономические явления при наличии несильных форм зависимости, когда применимы закон больших чисел и центральная предельная теорема. Таким образом, реальная сфера использования этого распределения не должна бы быть слишком широка.

Тем не менее под воздействием технических и инженерных приложений данное распределение длительное время было в центре внимания исследователей, поэтому многие методы анализа тесно связаны с ним. Это накладывает определённые ограничения на выбор методов моделирования и статистического анализа. В результате практики предпочитают в ряде случаев подогнать свои модели и методы к хорошо известному аналитическому аппарату, хотя это требует введения в модель дополнительных модификаций и поправок, что сужает сферу применения и достоверность выводов. Со своей стороны разработчики нового инструментария часто рассматривают многомерное нормальное распределение как исходную точку для конструирования новых методов.

Итогом является некоторое искусственное расширение сферы применения многомерного нормального распределения и порождённых им распределений, когда адекватность приносится в жертву удобству<sup>1</sup>. По этой причине риск-менеджеру следует быть особенно аккуратным и внимательным при использовании любых методов, подразумевающих использование соответствующих распределений, а вопросам проверки адекватности нужно уделять особое внимание.

### 6.1.2. Общие сведения о многомерном нормальном распределении

Если случайный вектор  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  имеет  $n$ -мерное нормальное распределение<sup>2</sup> с вектором математических ожиданий  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  и ковариационной матрицей  $\boldsymbol{\Sigma}$  с полным рангом  $n$ , то его плотность задается формулой

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp \left( -\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{2} \right), \quad (6.1)$$

<sup>1</sup>В частности, многие «провалы» финансового моделирования связаны в первую очередь с избыточно широкой сферой применения моделей, основанных на многомерном нормальном распределении и распределениях, порожденных им (прежде всего многомерным логнормальным). Именно из-за того, что огромные усилия были потрачены на доказательства возможности использования указанных распределений в данной области, вопрос о границах применения оказался размыт, а практики часто недооценивают степень адекватности финансовых моделей.

<sup>2</sup>Многомерное нормально распределение хорошо известно и широко применяется на практике. Подробности можно найти в справочнике [Balakrishnan, Lai, 2009].

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  — некоторый вещественный  $n$ -мерный вектор, а  $\det \Sigma$  — определитель ковариационной матрицы. С учетом формулы (3.14) имеет место  $\Sigma = \Sigma_{diag}^{1/2} \cdot \mathbf{P} \cdot \Sigma_{diag}^{1/2}$ , откуда  $\det \Sigma = \det \mathbf{P} \cdot \prod_{k=1}^n \sigma_k^2$ , и  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1/2} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \Sigma_{diag}^{-1/2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ , т. е. квадратичная форма в показателе экспоненты представляет собой выражение в терминах стандартизированных значений  $z_k = (x_k - \mu_k)/\sigma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Это позволяет задать функцию плотности стандартного многомерного нормального распределения

$$\phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{P}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{z}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{z}}{2}\right),$$

а произвольное многомерное нормальное распределение представить как

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \phi_{Z_1, \dots, Z_n}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n}\right).$$

В частности, для двумерной нормальной случайной величины  $(X_1, X_2)^T$  с вектором математических ожиданий  $(X_1, X_2)^T$  и ковариационной матрицей

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$$

формула (6.1) примет вид

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Поэтому при анализе зависимостей её часто рассматривают как функцию коэффициента корреляции  $\rho$ .

В условиях вырожденности ковариационной матрицы (т. е. в ситуации, когда её ранг меньше  $n$ ), многомерное нормальное распределение будет сосредоточено на соответствующем подпространстве. Этот случай здесь не рассматривается, и соответственно в дальнейшем ссылка на наличие полного ранга не делается.

Популярность многомерного нормального распределения также связана с большим числом полезных свойств. Их наличие среди прочего способствует широкому применению данного распределения, иногда даже вопреки адекватности получаемых моделей.

Прежде всего, все маргинальные распределения будут нормальными (гауссовыми). Это свойство позволяет упростить ряд постановок моделей риска. Формально данное свойство можно представить как следующее утверждение: если  $n$ -мерная случайная величина  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  с вектором математических ожиданий  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$  распадается на два компонента размерности  $k$  и  $n - k$  соответственно, т. е. эта случайная величина представима в

виде  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ , где  $\mathbf{X}_1 = (X_1, \dots, X_k)^T$  и  $\mathbf{X}_2 = (X_{k+1}, \dots, X_n)^T$ , а вектор математических ожиданий и ковариационная матрица также распадаются на соответствующие компоненты

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

то случайная величина  $\mathbf{X}_1$  имеет  $k$ -мерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий  $\boldsymbol{\mu}_1$  и ковариационной матрицей  $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ , а случайная величина  $\mathbf{X}_2$  —  $(n - k)$ -мерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий  $\boldsymbol{\mu}_2$  и ковариационной матрицей  $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ . В частности, все элементы случайного вектора  $X_1, \dots, X_n$  будут иметь одномерные нормальные распределения с математическими ожиданиями  $\mu_1, \dots, \mu_n$  и дисперсиями  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ , представляющими собой соответственно элементы вектора  $\boldsymbol{\mu}$  и диагональные элементы матрицы  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

Вопреки распространенному мнению (среди прочего проявляющемуся и при построении моделей) обратное неверно: тот факт, что маргинальные распределения относятся к семейству нормальных, не является достаточным условием для многомерного нормального распределения. Для этого должны выполняться дополнительные условия. Они могут быть различными. Например, одно из них для двумерного распределения представляет собой требование

$$\frac{\partial^2 \ln f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = c,$$

где  $c$  — некоторая константа. Нормальности (гауссовости) маргинальных распределений в совокупности с данным условием достаточно для того, чтобы утверждать, что  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  — двумерное нормальное распределение с коэффициентом корреляции

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + 4c^2} - 1}{2c}.$$

Ещё одно исключительно важное свойство состоит в том, что условные распределения также являются нормальными. На этом основаны многие результаты регрессионного анализа. Формально его можно записать следующим образом: условное распределение  $\mathbf{X}_2$ , при условии  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$ , является  $(n - k)$ -мерным нормальным с вектором математических ожиданий  $\boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)$  и ковариационной матрицей

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{12}.$$

Кроме того, любое линейное преобразование многомерного нормального распределения также имеет нормальное распределение. Если  $\mathbf{A}$  — некоторая матрица размерности  $m \times n$ , а  $\mathbf{b}$  — произвольный  $m$ -мерный вектор, то преобразование  $\mathbf{AX} + \mathbf{b}$  подчинено  $m$ -мерному нормальному распределению с вектором  $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$  и ковариационной матрицей  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T$ . У этого свойства имеются важные частные случаи.

Во-первых, это декомпозиция Холецкого: выбрав в качестве матрицы  $\mathbf{A}$  такую матрицу, что  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , и вектор  $\mathbf{b} = -\boldsymbol{\mu}$ , после соответствующего преобразования получим вектор независимых стандартно распределенных случайных величин

**Z.** Обратное преобразование часто используется для генерации значений, имеющих многомерное нормальное распределение с заданными свойствами.

Во-вторых, это линейная комбинация нормально распределённых случайных величин, когда  $m = 0$  и  $b = 0$ , а матрица  $\mathbf{A}$  превращается в вектор  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , так что случайная величина  $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{X}$  имеет одномерное нормальное распределение с параметрами  $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\alpha}^T$ . В частности, на этой основе легко получить формулу для суммы нормально распределённых случайных величин.

Некоторые сочетания этих свойств (например, линейность условных математических ожиданий и нормальность суммы случайных величин) могут быть основой для того, чтобы принадлежность маргинальных распределений параметрическому семейству нормальных распределений была достаточным условием для получения многомерного нормального распределения. Имеются и иные свойства многомерных нормальных распределений.

## 6.2. ИНЫЕ ТИПЫ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

### 6.2.1. Сложности построения многомерных распределений, отличных от многомерного нормального

На практике часто требуется рассмотреть многомерные распределения, отличающиеся от нормального. Примером может служить распределение различных чистых рисков в портфеле: каждый из них имеет распределение, сосредоточенное на положительной полуоси, а зависимости между ними могут быть достаточно сложными. Иными словами, распространенная задача состоит в построении многомерного распределения с несимметричными маргинальными плотностями и определённым типом нелинейной зависимости.

К сожалению, не существует семейства многомерных распределений, сосредоточенных на положительном квадранте, октанте и т. д. и обладающих таким же широким набором свойств, как и многомерное нормальное распределение. В такой ситуации обычно сначала выясняют, какое из свойств реальной ситуации является ключевым, и уже по нему строят семейство многомерных распределений, т. е. идут от особенностей моделируемого объекта. Это приводит к неоднозначности используемых моделей.

В качестве примера рассмотрим многомерное гамма-распределение. Имеется достаточно большое количество разных конструкций подобного распределения. Они отличаются набором свойств и в целом имеют различную форму плотности совместного распределения.

Наиболее известно двумерное гамма-распределение Киббле [Kibble, 1941], которое имеет совместную плотность

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\rho)\rho^{(\alpha-1)/2}} (x_1 x_2)^{(\alpha-1)/2} \exp\left(-\frac{x_1+x_2}{1-\rho}\right) I_{\alpha-1}\left(\frac{2\sqrt{x_1 x_2 \rho}}{1-\rho}\right), \quad (6.3)$$

где  $\alpha > 0$  — параметр формы,  $0 \leq \rho < 1$  — коэффициент корреляции Пирсона между случайными величинами  $X_1$  и  $X_2$ ,  $I_\nu(z)$  — модифицированная функция Бесселя

первого рода, т. е.

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu} = \frac{z^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{-zt} dt.$$

Избавиться от ряда или интеграла в выражении функции плотности и, следовательно, функции распределения не представляется возможным.

Популярность данной формы связана с тем, что её маргинальные распределения будут одномерными гамма-распределениями, так что каждая из случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  подчинена гамма-распределению с параметрами  $\alpha$  и 1. Кроме того, коэффициент корреляции однозначно представлен в качестве параметра. Условные математические ожидания и условные дисперсии линейны по значению условия (что важно для регрессионных приложений):

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \rho x_1 + (1 - \rho)\alpha \quad \text{и} \quad D[X_2 | X_1 = x_1] = 2\rho(1 - \rho)x_1 + (1 - \rho)^2\alpha. \quad (6.4)$$

Переписав формулу (6.3) в виде

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \frac{\Gamma(\alpha)}{(1 - \rho)} (\rho x_1 x_2)^{-(\alpha-1)/2} \exp\left(\frac{\rho(x_1 + x_2)}{1 - \rho}\right) I_{\alpha-1}\left(\frac{2\sqrt{x_1 x_2 \rho}}{1 - \rho}\right),$$

где  $f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} \exp(-x_i)$ ,  $i = 1, 2$ , — плотность маргинального распределения, легко показать, что она задает один из вариантов зависимости в положительном квадранте (см. п. 3.3.2).

Все эти свойства делают данное двумерное распределение популярным для практических приложений, несмотря на то что соответствующие расчеты приходится проводить численно из-за особенностей представления плотности. Однако есть и крупный недостаток — маргинальные распределения идентичны, что не всегда удобно для приложений.

Поэтому делались многочисленные попытки обобщения распределения Киббле, для того чтобы получить возможность моделирования неидентичных объектов. В данном учебнике не будет приведен полный обзор таких попыток, а показаны лишь некоторые результаты, иллюстрирующие возникающие сложности.

Приведем два обобщения, сделанные Изавой<sup>3</sup>. Во-первых, маргинальные распределения представляют собой гамма-распределения с одним и тем же параметром формы, но разными параметрами масштаба. Во-вторых, маргинальные распределения являются гамма-распределениями с разными параметрами формы и единичным параметром масштаба<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Первые работы Т. Изава опубликовал на японском языке, поэтому они остались малоизвестными. Впоследствии часть результатов была независимо получена другими исследователями. Некоторые результаты Изава на английском можно найти в работе [Izawa, 1965].

<sup>4</sup>Разумеется, имеется вариант и с разными параметрами формы, и с разными параметрами масштаба одновременно. Но он довольно сложен, и в то же время не дает дополнительных преимуществ для рассматриваемых примеров.

Первое обобщение приводит к двумерному гамма-распределению с функцией плотности вида

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1-\rho)} \left( \frac{x_1 x_2}{\rho \lambda_1 \lambda_2} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{1-\rho}\right) I_{\alpha-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho \lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2}}{1-\rho}\right),$$

где  $\alpha$  параметр формы гамма-распределений обеих случайных величин,  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , — параметр масштаба гамма-распределения случайной величины  $X_i$ . Такое обобщение сохраняет все важные свойства плотности Киббле. В частности, формулы (6.4) соответственно приобретают вид

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \rho \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1 + (1-\rho) \frac{\alpha}{\lambda_2}$$

и

$$D[X_2 | X_1 = x_1] = 2\rho(1-\rho) \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} x_1 + (1-\rho)^2 \frac{\alpha}{\lambda_2^2}. \quad (6.5)$$

Второе обобщение приводит к двумерному гамма-распределению с плотностью

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{(x_1 x_2)^{(\alpha_1-1)/2} x_1^{\alpha_1-\alpha_2} \exp(-(x_1+x_2)/(1-\eta))}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)(1-\eta)\eta^{(\alpha_1-1)/2}} \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^{(\alpha_1-1)/2} t^{\alpha_1-\alpha_2-1} \exp\left(\frac{\eta x_1 t}{1-\eta}\right) I_{\alpha_1}\left(\frac{2\sqrt{\eta x_1 x_2(1-t)}}{1-\eta}\right) dt,$$

где  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , — параметр формы гамма-распределения случайной величины  $X_i$ , причём  $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ,  $\eta = \rho\sqrt{\alpha_1/\alpha_2}$  — характеристика зависимости,  $0 \leq \rho < 1$ ,  $0 \leq \eta < 1$ . С этой плотностью работать сложнее из-за наличия интеграла, а если учесть, что модифицированная функция Бесселя первого рода также может быть представлена в виде интеграла, то условные распределения выглядят крайне громоздко. В результате тяжело анализировать свойства данного распределения, а расчеты проводятся только численно.

Предпринимались попытки обобщения подхода Киббле в других направлениях. Так, Малик и Трудель [Malik, Trudel, 1985] переписали (6.3) в виде

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{(1-\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x_1+x_2}{1-\rho}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\rho^k (x_1 x_2)^{\alpha+k-1}}{k! (\Gamma(\alpha+k)(1-\rho)^{\alpha+k})^2},$$

что позволило им предложить в качестве обобщения для различных параметров формы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  следующую плотность двумерного распределения:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{(1-\rho)^{(\alpha_1+\alpha_2)/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)} \exp\left(-\frac{x_1+x_2}{1-\rho}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+k\right)\rho^k x_1^{\alpha_1+k-1} x_2^{\alpha_2+k-1}}{k! \Gamma(\alpha_1+k)\Gamma(\alpha_2+k)(1-\rho)^{\alpha_1+\alpha_2+2k}}.$$

Тем не менее для данного обобщения маргинальные распределения являются гамма-распределениями только при  $\alpha_1 = \alpha_2$ , т. е. для случая Киббле. Если равенство нарушается, то маргинальные распределения относятся к другим параметрическим семействам.

Разумеется, возможны и другие подходы к конструированию двумерного гамма-распределения. Так, Черьян [Cheriyān, 1941], Рамабхадран [Ramabhadran, 1951], а также Прёкопа и Шантаи [Prékopa, Szántai, 1978] предложили следующую схему. Заданы независимые случайные величины  $V_1, V_2$  и  $V_3$ , имеющие гамма-распределение с параметрами формы  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  соответственно и единичным параметром масштаба. Тогда  $X_1 = V_1 + V_3$  и  $X_2 = V_2 + V_3$ , так что случайная величина  $V_3$  является общим фактором и определяет механизм зависимости<sup>5</sup>. В этом заключается существенное отличие от подхода Киббле, где зависимость отражалась только коэффициентом корреляции и никаких общих факторов не учитывалось. Функция плотности совместного распределения случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  записывается как

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{e^{-(x_1+x_2)}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \int_0^{\min\{x_1, x_2\}} (x_1 - t)^{\alpha_1-1} (x_2 - t)^{\alpha_2-1} t^{\alpha_3-1} e^{-t} dt.$$

Этот подход также обладает «красивыми» свойствами, как и подход Киббле и его последователей. Прежде всего, маргинальные распределения случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  представляют собой гамма-распределения с параметрами формы  $\alpha_1 + \alpha_3$  и  $\alpha_2 + \alpha_3$  соответственно и единичным параметром масштаба. Коэффициент корреляции Пирсона оценивается как  $\alpha_3 / \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)}$ . При этом условное математическое ожидание линейно по условию

$$E[X_2 | X_1 = x_1] = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3} x_1 + \alpha_2.$$

Все эти свойства похожи на свойства распределения Киббле, но условная дисперсия представляет собой не линейную, а квадратичную функцию условия:

$$D[X_2 | X_1 = x_1] = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{(\alpha_1 + \alpha_3)^2 (1 + \alpha_1 + \alpha_3)} x_1^2 + \alpha_2.$$

Последние два свойства крайне важны для применения регрессионного анализа. В совокупности все упомянутые свойства объясняют популярность данного подхода в практических приложениях. Тем не менее следует обратить внимание, что данный подход сильно отличается от подхода Киббле, так как в основу конструирования распределения положены различные идеи, и что предпосылки моделей отличаются.

Все рассмотренные типы двумерного гамма-распределения основаны на необходимости того, чтобы маргинальные распределения относились к семейству гамма-распределений. На практике могут быть важны иные соображения. Например, Сен, Ламичхейн и Дайавара [Sen, Lamichhane, Diawara, 2014] рассмотрели двумерное распределение, исходя из следующих соображений. Маргинальное распределение случайной величины  $X_1$  является гамма-распределением с параметрами  $\alpha$  и  $\lambda$ . В отношении случайной величины  $X_2$  постулируется не маргинальное распределение,

<sup>5</sup>В схеме Прёкопа и Шантаи возможны и более сложные механизмы зависимости, но для противопоставления подходу Киббле достаточно взять простейший вариант.

а условное (при условии  $X_1 = x_1$ ): оно представляет собой гамма-распределение с параметрами  $\beta$  и  $x_1$ . Тогда плотность совместного распределения, очевидно, можно представить так:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) f_{X_1}(x_1) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x_1^{\alpha+\beta-1} x_2^{\beta-1} e^{-\lambda x_1} e^{-x_1 x_2}. \quad (6.6)$$

При этом маргинальное распределение  $X_2$  будет не гамма-распределением, а обобщенным бета-распределением второго рода.

### 6.2.2. Распределения, порождаемые многомерным нормальным распределением

По причине сложностей, возникающих при конструировании многомерных распределений, стараются использовать те параметрические семейства многомерных распределений, которые порождаются многомерным нормальным распределением или являются его обобщением в некотором смысле. Это позволяет путем подходящих преобразований переходить к формам, допускающим использование тех или иных популярных методов анализа (например, регрессионных методов). Такие распределения часто сохраняют многие свойства нормального распределения или удовлетворяют условиям, являющимся их подходящей модификацией.

Примером такого преобразования может служить многомерное логнормальное распределение. Оно довольно популярно в финансовых приложениях, где традиционно (не всегда оправданно) делается предпосылка о нормальности (гауссовости) темпов прироста цен активов. Многомерность возникает за счет одновременного рассмотрения нескольких подобных активов.

Точно так же, как и одномерное логнормальное распределение получается экспоненциальным преобразованием нормального, многомерное логнормальное распределение получается аналогичным поэлементным преобразованием [Balakrishnan, Lai, 2009]. Иными словами, если случайный вектор  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  подчинен многомерному нормальному распределению с вектором математических ожиданий  $\boldsymbol{\mu}$  и ковариационной матрицей  $\boldsymbol{\Sigma}$ , то вектор  $\mathbf{X}$  с компонентами  $X_i = e^{Y_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , имеет многомерное логнормальное распределение. Для размерности  $n = 2$  функция плотности представляет собой

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left( -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[ \left( \frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right).$$

Важно напомнить, что  $\boldsymbol{\mu}$  не является вектором математических ожиданий, а  $\boldsymbol{\Sigma}$  — ковариационной матрицей. Можно показать, что математическое ожидание компонент случайной величины  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  равно

$$E[X_i] = \exp \left( \mu_i + \frac{\sigma_{ii}}{2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$  — диагональный элемент матрицы  $\Sigma$ , равный дисперсии случайной величины  $Y_i$ , а ковариационная матрица вектора  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  состоит из элементов

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i, X_j] &= \exp\left(\mu_i + \mu_j + \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj} + 2\sigma_{ij}}{2}\right) - \exp\left(\mu_j + \frac{\sigma_{ii}}{2}\right) \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_{jj}}{2}\right) = \\ &= \exp\left(\mu_i + \mu_j + \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj}}{2}\right) (e^{\sigma_{ij}} - 1) = E[X_i] E[X_j] (e^{\sigma_{ij}} - 1), \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$  —  $(i, j)$ -й элемент матрицы  $\Sigma$ ,  $\rho_{ij}$  — коэффициент корреляции между случайными величинами  $Y_i$  и  $Y_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Соответственно коэффициент корреляции между случайными величинами  $X_i$  и  $X_j$

$$\text{Corr}[X_i, X_j] = \frac{e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_i^2} - 1)(e^{\sigma_j^2} - 1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j.$$

### 6.2.3. Класс эллиптических распределений

Источником многих «красивых» свойств многомерного нормального распределения является наличие в формуле плотности квадратической формы  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ . Она, в частности, приводит к тому, что линии (поверхности) уровня функции плотности, характеризующие множества значений с одинаковыми вероятностями реализации, имеют форму вложенных эллипсов (для двумерного случая) или эллипсоидов (для случаев большей размерности)

$$\{\mathbf{x} : (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \text{const}\}.$$

Если случайные величины некоррелируемы, то набор эллипсов принимает форму концентрических окружностей, а эллипсоиды — сфер соответствующей размерности.

В связи с этим возникла идея обобщить многомерное нормальное распределение так, чтобы сохранить эллиптическую форму линий (поверхностей) уровня. В такой ситуации упрощается поиск маргинальных распределений и сечений многомерного распределения. Распределения будут симметричными, а поведение на хвостах легко прогнозируется.

Такой класс параметрических семейств распределений называют эллиптическим [Balakrishnan, Lai, 2009; McNeil, Frey, Embrechts, 2005]. Плотность такого распределения задается функцией

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{K_n}{\sqrt{\det \Sigma}} g\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad (6.7)$$

где  $K_n$  — нормирующая константа, зависящая от размерности  $n$ ,  $g(\cdot)$  — функция, называемая генератором распределения или генерирующей функцией. Генератор может зависеть от размерности, но это не обязательно. Для него должно выполняться

условие

$$\int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1} g(y) dy < \infty.$$

Тогда нормирующую константу можно определить по формуле

$$K_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1} g(y) dy}.$$

Фактически тип распределения задается выбором генерирующей функции. Частным случаем является многомерное нормальное распределение, для которого имеет место  $g(y) = \exp(-y/2)$ .

Основные типы эллиптических распределений представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Класс эллиптических распределений

Тип распределения	Генератор, $g(\cdot)$	Нормирующая константа, $K_n$
Многомерное нормальное распределение	$e^{-y}$	$(2\pi)^{-n/2}$
Многомерное $t$ -распределение Стьюдента *	$\left(1 + \frac{y}{\nu_p}\right)^{-p}$ , $p > \frac{n}{2}$	$\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-\frac{n}{2})} (2\pi\nu_p)^{-n/2}$
Многомерное логистическое распределение	$\frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}$	$\frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} dy}$
Многомерное экспоненциально-степенное распределение **	$\exp(-ay^b)$	$\frac{b\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2} \Gamma(n/(2b))} a^{n/2b}$

Примечания: \* При  $p = (n+1)/2$  получаем многомерное распределение Коши ( $\nu_p = 1/2$ ).

\*\* При  $a = b = 1$  получаем многомерное нормальное распределение; при  $b = 1$  частным случаем является многомерное распределение Котца; при  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1/2$  имеем многомерное распределение Лапласа.

### 6.3. КОПУЛЫ

В ряде случаев удобно задавать функцию совместного распределения в форме функционального соотношения функций маргинальных распределений [Джозеф, 1997; Нельсен, 1999]:

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)).$$

Такая функция  $n$  переменных называется *копула* (copula).

Подобная постановка фактически позволяет строить многомерное распределение по маргинальным, задавая различные типы копул. При этом имеется возможность четкого отделения маргинальных распределений от формы зависимости, которая выражается аналитически в «чистом» виде. Зная свойства копул, можно подбирать подходящие распределения с нужными для приложений свойствами. Такой подход в настоящее время достаточно популярен для решения задач количественного риск-менеджмента.

В силу того, что  $U_j = F_{X_j}(x_j)$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0; 1]$ , определение копулы можно упростить, представив ее как функцию совместного распределения равномерно распределенных случайных величин  $U_1, \dots, U_n$  на отрезке  $[0; 1]$ :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) = P[U_1 < u_1; \dots; U_n < u_n].$$

Это позволяет при рассмотрении зависимости в многомерном распределении исключить влияние маргинальных распределений и концентрировать внимание только на свойствах взаимосвязи случайных величин.

Наиболее простая копула отвечает случаю независимости

$$C_{ind}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{j=1}^n u_j. \quad (6.8)$$

Она сама по себе не нужна как отдельная конструкция, так как подобный подход предназначен именно для анализа зависимостей. Но копула независимости важна для сравнения и оценки на основе такого сравнения степени интенсивности зависимостей.

Любая копула обладает следующими свойствами:

1.  $C(u_1, \dots, u_n)$  является возрастающей функцией по всем переменным.
2.  $C(u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_n) = 0$  для любого  $k \in 1 \div n$ .
3.  $C(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ раз}}, u_k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k \text{ раз}}) = u_k$  для любого  $k \in 1 \div n$ .

Можно показать, что любая копула лежит между пределами

$$C_{up}(u_1, \dots, u_n) = \min_{j \in 1 \div n} \{u_j\}$$

и

$$C_{low}(u_1, \dots, u_n) = \max \left\{ \sum_{j=1}^n u_j - n + 1; 0 \right\} = \left( \sum_{j=1}^n u_j - n + 1 \right)_+.$$

Иными словами, имеет место

$$C_{low}(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq C_{up}(u_1, \dots, u_n).$$

Такие границы называют *пределами Фреше–Хёффдинга*. Верхний предел всегда является копулой, а нижний предел для высоких размерностей — не обязательно (хотя для двумерного случая является).

С учетом определений условных распределений и функции плотности многомерного распределения имеем

$$\begin{aligned} F_{X_k|X_1 \dots X_{k-1} X_{k+1} \dots X_n}(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{f_{X_1 \dots X_{k-1} X_{k+1} \dots X_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)} \times \end{aligned}$$

$$\times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_{X_i}(x_i) \frac{\partial^{n-1} C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1} \partial u_{k+1} \dots \partial u_n} \Big|_{\substack{u_j = F_{X_j}(x_j) \\ j \in 1 \div n}},$$

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \times \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \Big|_{\substack{u_j = F_{X_j}(x_j) \\ j \in 1 \div n}}.$$

Эти выражения существенно упрощаются при  $n = 2$  и для специальных видов функции  $C(u_1, \dots, u_n)$ .

Вид и параметры функции  $C(u_1, \dots, u_n)$  определяют характер зависимости компонент многомерной случайной величины. В частности, удобно противопоставлять анализируемый тип зависимости случаю полной независимости

$$\prod_{j=1}^n F_{X_j}(x_j)$$

или, что то же самое, произвольную копулу удобно сравнивать с копулой независимости (6.8).

При наличии положительной зависимости на квадранте, которая в терминах копул может быть записана как

$$C(u_1, \dots, u_n) \geq \prod_{j=1}^n u_j,$$

формулы (3.9) и (3.10) могут быть переписаны соответственно в виде

$$C(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i + \Psi_C(u_1, \dots, u_n) \quad \text{и} \quad C(u_1, \dots, u_n) = A_C(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n u_i. \quad (6.9)$$

Эти подходы могут быть использованы для конструирования параметрических классов копул.

Другие типы зависимости также могут иметь выражения в форме копул, что важно для понимания свойств последних. Например, убывание по условию на левом хвосте условного распределения эквивалентно убыванию функции  $C(u_1, u_2)/u_1 u_2$  по обоим аргументам. Остальные необходимые и достаточные условия, к сожалению, не симметричны. Так, убывание на левом хвосте условного распределения случайной величины  $X_2$  по условию на  $X_1$  эквивалентно неравенству

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \leq \frac{C(u_1, u_2)}{u_1} \quad \forall u_2 \in [0, 1],$$

а убывание на левом хвосте условного распределения случайной величины  $X_1$  по условию на  $X_2$  эквивалентно неравенству

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \leq \frac{C(u_1, u_2)}{u_2} \quad \forall u_1 \in [0, 1].$$

Возрастание на правом хвосте условного распределения случайной величины  $X_2$  по условию на  $X_1$  эквивалентно убыванию функции  $[u_2 - C(u_1, u_2)] / [1 - u_1]$  по  $u_1$  или выполнению неравенства

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \geq \frac{u_2 - C(u_1, u_2)}{1 - u_1} \quad \forall u_2 \in [0, 1].$$

Аналогично возрастание на правом хвосте условного распределения случайной величины  $X_1$  по условию на  $X_2$  эквивалентно убыванию функции  $[u_1 - C(u_1, u_2)] / [1 - u_2]$  по  $u_2$  или выполнению неравенства

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \geq \frac{u_1 - C(u_1, u_2)}{1 - u_2} \quad \forall u_1 \in [0, 1].$$

Наиболее распространённым способом конструирования копул является использование так называемых *архимедовых копул*<sup>6</sup>. Под ними понимаются копулы, представимые в виде

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right), \quad (6.10)$$

где  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$  — убывающая функция,  $\varphi(0) = \infty$ ,  $\varphi(1) = 0$ , называемая генератором копулы, а  $\varphi^{-1}$  — обратная к ней функция, для которой должно выполняться

$$(-1)^k \frac{d^k \varphi^{-1}(t)}{dt^k} \geq 0.$$

Такие копулы удобны для генерации случайных чисел и подгонки к наблюдениям, так как для архимедовых копул можно организовать рекуррентную процедуру

$$C_n(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(C_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1})) + \varphi(u_n)).$$

Копулы, рассматриваемые как параметрические семейства формул, описывающих зависимости, можно увязать с мерами зависимости, рассмотренными в главе 3. Коэффициент корреляции Пирсона будет плохо «работать» в таком качестве, так как его значения будут определяться видом маргинальных распределений, от влияния которых копулы «очищены». Однако коэффициенты ранговой корреляции свободны от типа распределений, поэтому их вполне можно использовать для этой цели.

Далее для простоты будем считать  $n = 2$ , т. е. рассматривать только двумерные случайные величины. Это, в частности, позволит избежать громоздких обозначений. Кроме того, для двумерных случайных величин можно увязать копулы с различными коэффициентами корреляции.

Коэффициент корреляции Спирмена (3.18) можно представить в терминах копулы как

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2, \quad (6.11)$$

<sup>6</sup>Название связано с тем, что в таком определении используется свойство Архимеда (о соотношении величин).

а коэффициент корреляции Кендалла (3.19) как

$$\begin{aligned}\tau_K(X_1, X_2) &= 4E[C(U_1, U_2)] - 1 = 4 \iint_{[0,1] \times [0,1]} C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 = \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} du_1 du_2 - 1. \quad (6.12)\end{aligned}$$

Это дает дополнительную интерпретацию данных коэффициентов в контексте применения копул. Так, формула (6.11) отражает тот факт, что коэффициент Спирмена представляет собой аналог корреляции, рассчитанной на равномерных распределениях: см. формулу (3.4). Формула (6.12) связана с тем свойством, что коэффициент Кендалла может быть определен как нормированное среднее значение. В целом непосредственная увязка копул с коэффициентами ранговой корреляции позволяет упростить подгонку параметров в рамках процедур статистического оценивания.

С понятием копулы также хорошо сочетаются коэффициенты зависимости на хвостах, так как они формулируются в терминах квантилей. Формулы (3.23) и (3.24) можно переписать в терминах копул в виде

$$\lambda_u(X_1, X_2) = 2 - \lim_{u \rightarrow 1-0} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \quad \text{и} \quad \lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (6.13)$$

соответственно.

В табл. 6.2 приведены наиболее часто используемые копулы и их основные свойства.

#### 6.4. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО МНОГОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ УЩЕРБА

**Задача 1.1.** Для двумерного нормального распределения с плотностью (6.2) найти маргинальные и условные распределения.

*Решение.* Сначала выделим полный квадрат для переменной  $x_2$  в показателе экспоненты в формуле (6.2):

$$\begin{aligned}& - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] = \\ & = - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \rho^2 \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + (1-\rho^2) \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] = \\ & = - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) - \rho \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \right]^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 = \\ & = - \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} \left[ x_2 - \left( \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_2) \right) \right]^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2.\end{aligned}$$

Таблица 6.2. Некоторые типы копул

№ п/п	Наименование	Совместное распределение, $F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$	Условное распределение, $F_{U_2 U_1}(u_2 u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}$
1	Копула независимости	$u_1 u_2$	$u_2$
2	Копула Кука—Джонсона*	$(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha},$ $\alpha \geq 0$	$u_1^{-(1+\alpha)}$ $(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}$
3	Копула Фарли—Гумбеля—Моргенштерна	$u_1 u_2 [1 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)],$ $-1 \leq \alpha \leq 1$	$u_2 [1 + \alpha(1 - 2u_1)(1 - u_2)]$
4	Копула Али—Михаила—Хака	$\frac{u_1 u_2}{1 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2)},$ $-1 \leq \alpha \leq 1$	$\frac{u_2 - \alpha u_2(1 - u_2)}{(1 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2))^2}$
5	Копула Франка**	$\frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right)$ $\alpha \neq 0$	$\frac{e^{-\alpha u_1}(e^{-\alpha u_2} - 1)}{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1) + (e^{-\alpha} - 1)}$
6	Копула Гумбеля***	$e^{-[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{1/\alpha}},$ $\alpha \geq 1$	$C(u_1, u_2) \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1^\alpha} \times$ $\times [(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}$
7	Нормальная копула****	$\Phi_2(\Phi^{-1}(u_1); \Phi^{-1}(u_2))$	$\Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(u_2) - \alpha \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right)$

Примечания: \* При замене  $a = 1/\alpha$  она также называется копулой Клейтона.

\*\* При замене  $a = e^{-\alpha}$  копулу Франка можно записать в виде

$$\log_a \left( 1 + \frac{(a^{u_1} - 1)(a^{u_2} - 1)}{a - 1} \right), \quad a \neq 1.$$

\*\*\* Также называется копулой Гумбеля—Хоугарда (Gumbel—Hougaard).

Теперь с учетом этого результата найдем плотность маргинального распределения случайной величины  $X_1$ :

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left( -\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left( -\frac{1}{2(1 - \rho^2)\sigma_2^2} \left[ x_2 - \left( \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1) \right) \right]^2 \right) dx_2.$$

Очевидно, что подынтегральное выражение представляет собой плотность нормального распределения, так что интеграл равен единице, откуда, очевидно, полу-

для двумерных распределений

Плотность совместного распределения, $f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$	Коэффициент ранговой корреляции	
	Спирмена, $\rho_S$	Кендалла, $\tau_K$
1	0	0
$(1 + \alpha)(u_1 u_2)^{-(1+\alpha)} \times$ $\times \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1+2\alpha}{\alpha}}$	Невозможно упростить в общем виде	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$
$1 + \alpha(1 - 2u_1)(1 - 2u_2)$	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{2\alpha}{9}$
$\frac{1 - \alpha - 2\alpha C(u_1, u_2)}{(1 + \alpha(1 - u_1)(1 - u_2))^2}$	Невозможно упростить в общем виде	$\left(\frac{3\alpha - 2}{\alpha}\right) -$ $-\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ $\ln(1 - \alpha)$
$-\frac{\alpha(e^{-\alpha} - 1)e^{-\alpha(u_1 + u_2)}}{[(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1) + (e^{-\alpha} - 1)]^2}$	$\frac{1 +}{\alpha^3} \int_0^\alpha \frac{2t^2 + \alpha t}{e^t - 1} dt$	$1 - \frac{4}{\alpha} +$ $+\frac{4}{\alpha^2} \int_0^\alpha \frac{t}{e^t - 1} dt$
$C(u_1, u_2) \frac{[\ln(u_1) \ln(u_2)]^{\alpha-1}}{u_1 u_2} \times$ $\times [(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{-\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} \times$ $\times (1 + (\alpha - 1)[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha]^{1/\alpha})$	$1 - \frac{1}{\alpha}$	$\frac{\alpha-1}{\alpha}$
$\frac{e^{-(\alpha^2 \Phi^{-1}(u_1) - 2\alpha \Phi^{-1}(u_1) \Phi^{-1}(u_2) + \alpha^2 \Phi^{-1}(u_2))/2(1-\alpha^2)}}{\sqrt{1-\alpha^2}}$	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$\frac{2}{\pi} \arcsin \alpha$

\*\*\*\*  $\Phi_2(\cdot, \cdot)$  – функция двумерного нормального распределения с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix},$$

где  $\alpha$  – коэффициент корреляции,  $-1 \leq \alpha \leq 1$ . При этом всегда имеет место  $\tau_k < \alpha$ .  $\Phi^{-1}(\cdot)$  – функция, обратная функции стандартного нормального распределения.

чаем

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

Это плотность одномерного нормального распределения с параметрами  $\mu_1$  и  $\sigma_1^2$ .

Маргинальное распределение случайной величины  $X_2$  будет оцениваться аналогично.

Для оценки условного распределения  $X_2$  при условии  $X_1 = x_1$  рассмотрим отношение двумерной плотности и одномерной плотности условия. При этом также воспользуемся разложением квадрата в показателе экспоненты выражения (6.2):

$$\begin{aligned}
f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) &= \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} \left[ x_2 - \left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)\right) \right]^2\right).
\end{aligned}$$

Это плотность одномерного нормального распределения с математическим ожиданием  $\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - \mu_1)$  и дисперсией  $(1 - \rho^2)\sigma_2^2$ .

Условное распределение случайной величины  $X_1$  при условии  $X_2 = x_2$  будет оцениваться аналогично.

**Задача 6.2.** Показать, что если плотность совместного распределения представлена формулой (6.6), то плотность маргинального распределения случайной величины  $X_2$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{\lambda^\alpha x_2^{\beta-1}}{(x_2 + \lambda)^{\alpha+\beta}}.$$

*Решение.* Интегрируем плотность (6.6) по  $x_1$ :

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{\lambda^\alpha x_2^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x_2^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda x_1} e^{-x_1 x_2} dx_1$$

Производим замену переменных  $t = x_1(x_2 + \lambda)$ :

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{\lambda^\alpha x_2^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(x_2 + \lambda)^{\alpha+\beta}} \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} e^{-t} dt.$$

Дополнив подынтегральное выражение до плотности гамма-распределения, избавимся от интеграла (он будет, очевидно, равен единице), что приведет нас к искомому выражению

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\lambda^\alpha x_2^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(x_2 + \lambda)^{\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+\beta-1} e^{-t}}{\Gamma(\alpha + \beta)} dt = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{\lambda^\alpha x_2^{\beta-1}}{(x_2 + \lambda)^{\alpha+\beta}}.$$

**Задача 6.3.** Показать, что коэффициент Спирмена может быть представлен в виде

$$\rho_S(F_{X_1}^{-1}(U_1), F_{X_2}^{-1}(U_2)) = 12E[U_1 U_2] - 3.$$

Решение. Раскрывая скобки в (6.11), легко получить

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} du_1 du_2 - 4 = 12 \iint_{[0,1] \times [0,1]} u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3,$$

что и дает искомое выражение.

## 6.5. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

6.1. Для ковариационной матрицы

$$\Sigma = \left\| \begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array} \right\|$$

найти матрицу Холецкого, т. е. такую матрицу  $\mathbf{A}$ , что  $\Sigma^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , и показать, что если  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T$  состоит из независимых стандартно распределенных случайных величин, то случайный вектор  $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$  имеет двумерное нормальное распределение с математическими ожиданиями  $\boldsymbol{\mu}$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ .

*Замечание.* Это свойство является основой для наиболее популярного метода генерации нормально распределенных случайных величин.

6.2. Для плотности двумерного гамма-распределения Киббле вида (6.3) вывести выражения (6.4).

6.3. Проверить соотношения, содержащиеся в табл. 6.2.

6.4. Найти функции  $\Psi_C(u_1, \dots, u_n)$  и  $A_C(u_1, \dots, u_n)$  из формул (6.9) для всех копул из табл. 6.2.

6.5. Оценить коэффициенты  $\lambda_u(X_1, X_2)$  и  $\lambda_l(X_1, X_2)$  из формул (6.13) для всех копул из табл. 6.2.

## Глава 7

# ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

С точки зрения задач риск-менеджмента акцент часто делается не на всем распределении ущерба, но лишь на его правом (верхнем) хвосте. Это вызвано тем, что именно правый хвост отвечает за самые большие ущербы. Для решения подобных задач разработаны подходы, позволяющие отделить задачу изучения всего распределения от задачи анализа лишь некоторой его части. При этом в ряде случаев оказывается, что для описания поведения хвоста достаточно сравнительно узкого класса распределений.

Цель данной главы — описание способов формулировки задачи отбора больших ущербов и подходов к их решению.

После изучения материала вы узнаете:

- в чем заключается метод анализа максимальных ущербов;
- что такое теория экстремальных значений;
- как выглядит предельное распределение максимума из ряда случайных величин;
- в чем заключается метод анализ превышений некоторого порога;
- с какого момента начинается правый хвост распределения;
- как классифицировать распределения в зависимости от поведения их хвоста;
- как изучать распределение максимума из случайного числа случайных величин.

**Ключевые слова:** распределение максимума из нескольких случайных величин, обобщенное распределение экстремальных значений, распределение Вейбулла, распределение Гумбеля, распределение Фреше, теорема Фишера—Типпета, распределение превышения порога, функция среднего превышения, обобщенное распределение Парето, бета-распределение, распределение Парето, экспоненциальное распределение, метод Хилла, производящая функция вероятностей.

## 7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УЩЕРБОВ

### 7.1.1. Причины необходимости отдельного изучения экстремальных ущербов

Одна из важных задач процессов управления рисками — контроль ситуаций, связанных с экстремально большими ущербами. Примерами подобных случаев на финансовых рынках могут быть финансовые кризисы 1998 или 2008 г. С точки зрения количественного риск-менеджмента речь идет прежде всего об анализе правого хвоста распределений ущерба, как раз и описывающего вероятности серьезных потерь. Такие меры риска, как рисковый капитал и условный рисковый капитал, концентрируются именно на данных особенностях случайных величин.

В п. 2.6 обсуждались два подхода к оценке квантильных характеристик: непараметрический (историческая имитация) и параметрический (подгонка теоретического распределения). К сожалению, в ряде случаев оба они не приводят к желаемым результатам. Минусом непараметрического оценивания является большая чувствительность к выборочным данным. Изменение всего одного числа в верхней части выборки может привести к серьезным изменениям оценки исследуемого параметра, как это показано на рис. 7.1.

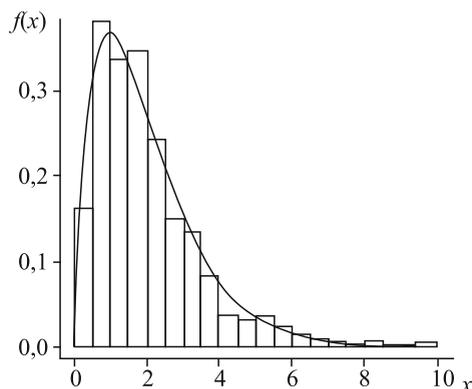


Рис. 7.1. Проблема недооценки квантилей при подгонке гамма-распределением.

В свою очередь, параметрическое оценивание для задач управления экстремальным риском неудобно тем, что при подгонке теоретического распределения на параметры модели влияют все элементы выборки. На первый взгляд упоминание данной детали как негативной может выглядеть странно. Однако на практике возникают ситуации, когда, например, на носителе случайной величины в целом нормальная аппроксимация дает хорошие результаты с точки зрения различных статистических проверок на нормальность, но старшие квантили при этом недооцениваются. Подобная проблема характерна для распределений с так называемыми «тяжелыми хвостами», встречающимися во многих финансовых приложениях.

Иногда проблему слишком быстрого убывания хвоста нормального распределения решают с помощью использования  $t$ -распределения или нормальных смесей, хвосты которых убывают несколько медленнее, однако часто и этот метод является недостаточным.

Другой источник данной проблемы — риски, характеризующиеся малой частотой реализации, но при этом большими потенциальными убытками. К таким рискам относятся, например, операционные риски — связанные с ошибками персонала, сбоями технических систем и т. п. Так, в 2005 г. ошибка трейдера, перепутавшего местами количество акций, выставяемых на продажу, и цену за одну акцию, привела к серьезным потерям компании *J-Cot* на сумму более 300 млн долл. и вместе с этим к обвалу индексов на токийской бирже.

Для подобных рисков характерны длительные периоды отсутствия ущербов, прерывающиеся на единичные ущербы большой величины. Соответственно выборочные данные из подобных случайных наблюдений будут состоять из большого количества нулей и сравнительно малых значений ущерба и небольшого количества экстремальных ущербов.

### 7.1.2. Краткая характеристика методов работы с экстремальными значениями

Для решения вышеописанных проблем используется группа методов, часто объединяемых под названием «теория экстремальных значений» (*extreme value theory*). Первый метод предполагает анализ не всех ущербов, но лишь максимального ущерба в течение периода фиксированной длины на основе выборки из максимальных ущербов за предыдущие периоды такой же длины. Второй метод предполагает анализ распределения ущербов, превышающих некоторый заранее выбранный порог, на основе выборки из прошлых ущербов, превысивших тот же порог. Их сравнение приведено на рис. 7.2. Более подробно данные методы обсуждаются далее в настоящей главе<sup>1</sup>.

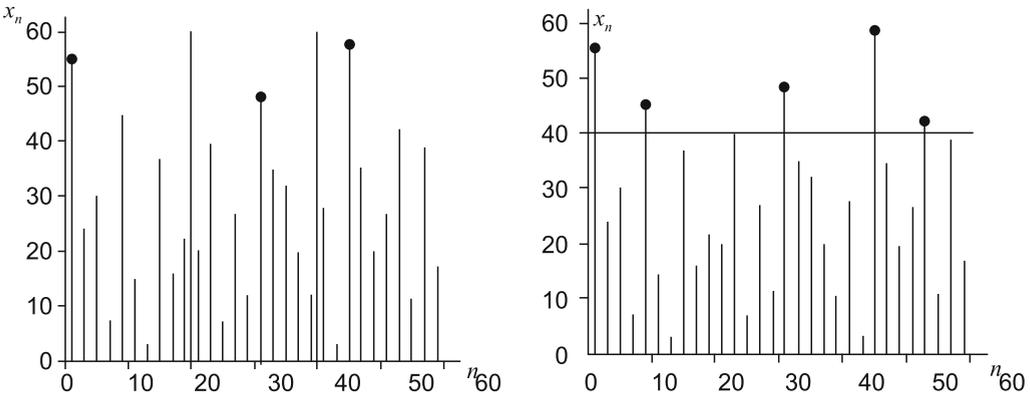


Рис. 7.2. Подходы к отбору наблюдений для задач анализа экстремальных значений.

<sup>1</sup>См. также: [Embrechts, Kluppelberg, Mikosch, 2003].

## 7.2. МЕТОД АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО УЩЕРБА ЗА ПЕРИОД

### 7.2.1. Формальное описание метода анализа максимального ущерба

Первый подход к анализу больших ущербов предлагает вместо исследования распределения случайной величины, описывающей ущерба, сконцентрироваться на распределении случайной величины, описывающей «максимальный ущерб за некоторый период». Так, если наблюдаемые данные  $X_i$  представляют выборку из ущербов за день, то максимальный дневной ущерб за неделю будет описываться случайной величиной  $Y = \max\{X_1, \dots, X_7\}$ , т. е. будет характеризовать максимальный ущерб по итогам дня за неделю.

Очевидно, что если предполагать  $X_i$  независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, то функции распределения  $Y$  и  $X_i$  связаны следующим соотношением:

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(\max(X_1, \dots, X_n)) = P(X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x) = \\ = P(X_1 < x) \cdot P(X_2 < x) \cdot \dots \cdot P(X_n < x) = P(X_i < x)^n = F_{X_i}^n(x). \quad (7.1)$$

Главный вывод теории экстремальных значений заключается в том, что если удастся подобрать такие последовательности  $b_n, a_n$ , что  $\left(F_{X_i}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right)\right)^n$  — невырождено при  $n \rightarrow \infty$ , то для независимых, одинаково распределенных случайных величин выполняется соотношение

$$\left(F_{X_i}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right)\right)^n \rightarrow G(x), \quad (7.2)$$

где  $G(x)$  — обобщенное распределение экстремальных значений (*generalized extreme value distribution, GEV distribution*).

Функция обобщенного распределения экстремальных значений выглядит следующим образом:

$$G_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}}, & \xi \neq 0, \\ e^{-e^{-x}}, & \xi = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

где  $1 + \xi x < 0$ . В литературе данный результат известен как теорема Фишера—Типпета (Fisher—Tippet Theorem).

Привлекать последовательности  $b_n, a_n$  приходится постольку, поскольку без соответствующей нормировки  $F_{X_i}^n(x)$  будет при  $n \rightarrow \infty$  стремиться либо к 0, либо к 1. При этом подобные последовательности существуют не для всех распределений.

С точки зрения практики из теоремы следует, что если вместо рассмотрения всей выборки разбить её на равные периоды длительностью  $n$ , выбрать из каждого периода максимальный ущерб и составить новую выборку из выбранных значений, то можно ожидать, что новая выборка будет хорошо описываться обобщенным распределением экстремальных значений. В дальнейшем с помощью найденного распределения возможно исследование поведения максимального ущерба за будущий

период той же длительности. В результате можно ожидать, что проблема недооценки больших квантилей исходного распределения будет решена, так как новое распределение будет оцениваться лишь по большим реализациям исходного.

Поведение GEV-распределения в значительной степени зависит от значения параметра  $\xi$ . Различают три основных случая:  $\xi > 0$ ,  $\xi < 0$ ,  $\xi = 0$ . В первом случае вместо обобщенного распределения экстремальных значений говорят о распределении Фреше, во втором — о распределении Вейбулла, уже встречавшемся в п. 1.3.1, в последнем случае — о распределении Гумбеля.

Конечно, в данном методе присутствует некоторая условность. Теорема предполагает, что длительность периода стремится к бесконечности. Однако данная условность присуща всем предельным теоремам. Так, центральная предельная теорема о нормальной аппроксимации сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин используется и для конечного числа слагаемых.

Напоследок отметим, что нужно различать понятия «максимальный ущерб за период» и «итоговый ущерб за период». Итоговый ущерб за период говорит об ущербе по портфелю рисков на конец периода, а максимальный ущерб за период — о максимуме из ущербов по итогам нескольких подпериодов.

### 7.2.2. Теоретическое применение теоремы Фишера—Типпета

Для некоторых распределений поиск предельного распределения максимума сравнительно прост. Рассмотрим случайные величины  $X$  со стандартным экспоненциальным распределением (т. е. экспоненциальным распределением с параметром  $\lambda = 1$ ). В качестве последовательностей нормирующих констант возьмем  $b_n = -\ln n$ ,  $a_n = 1$ . Тогда с учетом (7.1) для  $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  верно

$$\begin{aligned} P\left[\frac{Y - b_n}{a_n} < x\right] &= P[Y < a_n x + b_n] = \\ &= P[X < x - \ln n]^n = (1 - e^{-x + \ln n})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-e^{-x}}. \end{aligned}$$

Разумеется, для других распределений поиск нормирующих констант может быть неочевидной задачей. Однако стоит отметить, что на практике при отсутствии информации об исходном распределении выполнять подобную процедуру и не требуется. Теорема Фишера—Типпета позволяет подгонять выборку из максимальных значений за несколько периодов с помощью обобщенного распределения экстремальных значений. Более того, разумеется, знание исходного распределения позволяет исследовать максимальный ущерб за период и без применения теоремы. Наконец, важно отметить, что последовательности констант могут быть разными, но предельное распределение при этом не изменится.

### 7.2.3. Классификация распределений по тяжести хвоста

Теорема Фишера—Типпета позволяет классифицировать различные распределения в зависимости от знака параметра  $\xi$ . Так, если теорема верна для некоторого распределения  $F(x)$ , то говорят, что  $F(x)$  принадлежит к *максимальной области притяжения*  $G_\xi(x)$  (maximum domain of attraction, сокращенно MDA).

При этом поведение случайных величин значительно отличается в зависимости от того, к максимальной области распределения какого обобщенного распределения экстремальных значений оно принадлежит.

Наиболее тяжелые хвосты характерны для распределений из максимальной области притяжения распределения Фреше (обобщенное распределение экстремальных значений с  $\xi > 0$ ). К ним относятся такие распределения, как обратное гамма-распределение,  $t$ -распределение Стьюдента, логгамма распределение, распределение Бёрра, распределение Парето, распределение Коши,  $F$ -распределение и многие другие.

Группа подобных распределений удобно классифицируется с помощью понятия медленно меняющихся на бесконечности функций, т. е. функций, для которых

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1, \quad a > 0.$$

Верно утверждение, что если  $F(x) \in MDA(G_\xi)$ ,  $\xi > 0$ , то  $1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x)$ , где  $L(x)$  — некоторая медленно меняющаяся на бесконечности функция. Величину  $\frac{1}{\xi}$  в таком случае называют хвостовым индексом распределения.

О тяжести хвостов распределений из данной группы говорит, например, то, что их моменты  $E[X^k]$  конечны лишь в случае  $k \leq \frac{1}{\xi}$ . Данные распределения активнее других используются в финансовых приложениях, причем наиболее часто встречаются значения  $\xi$  от 0,2 до 0,4.

Характеризация распределений из области притяжения распределения Гумбеля ( $\xi = 0$ ) представляется несколько более сложной. Так, в эту область максимального притяжения входят и нормальные распределения с очень тонкими хвостами, и логнормальные распределения, хвосты которых зачастую на практике сложно отличить от хвостов распределений из области максимального притяжения распределения Фреше. Сюда также входят гамма, хи-квадрат, гиперболические, обобщенные гиперболические распределения, нормальные смешанные распределения (за исключением  $t$ -распределения, являющегося предельным в схеме нормальных смешанных распределений) и распределения Бектандера I и II рода. Важным свойством подобных распределений является конечность моментов всех порядков.

Распределения из MDA распределения Вейбулла ( $\xi < 0$ ) представляют наименьший интерес с точки зрения анализа рыночных рисков. Так, все они обладают конечным носителем. Впрочем, подобные распределения активно используются в областях, связанных с кредитным риском и актуарными приложениями, где максимальный ущерб предполагается конечным.

Важно отметить, что, несмотря на принципиальные различия в свойствах в зависимости от знака  $\xi$ , GEV-семейство является непрерывным по  $\xi$ , так как при  $\xi \rightarrow 0$   $e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}} \rightarrow e^{-e^{-x}}$ .

Наконец, естественно, что каждое из распределений Вейбулла, Фреше и Гумбеля попадает в свою область притяжения.

#### 7.2.4. Достоинства и недостатки метода анализа максимального ущерба

Использование метода анализа максимальных значений имеет ряд недостатков. Так, схема выбора максимумов предполагает потерю большого числа наблюдений из выборки, в силу того что из каждого периода выбирается всего лишь одно значение. При этом корректность метода предполагает независимость и одинаковую распределенность случайных величин, что часто не выполняется на практике. Например, для рыночных цен характерны протяженные периоды большой и малой волатильности (значимость этой проблемы можно снижать, выбирая большую длительность периодов). Кроме того, для рыночных приложений анализ лишь максимальных ущербов представляется не всегда верным, так как в этом случае могут игнорироваться среди прочего и значительные (но не самые большие) ущербы, произошедшие в течение одного периода. Конечно, проблему недостаточности данных или потери излишне большого количества данных можно решить, уменьшив величину периода, что, впрочем, вступает в противоречие с борьбой с волатильностью. Корректность метода при этом не пострадает, так как из соотношения (7.1) следует строгая зависимость между анализируемыми функциями распределения.

Однако в некоторых приложениях важность метода анализа максимумов сложно переоценить. Классическим примером является задача об определении оптимальной высоты дамбы, предназначенной для защиты города от наводнений. В подобных задачах требуется очень высокий уровень надежности: высота дамбы должна быть достаточной, чтобы «почти всегда» «на протяжении большого периода времени» уровень воды не превысил уровень дамбы. Решением может быть использование в качестве выборки данных о максимальном уровне воды в течение года и оценка по ним параметра обобщенного распределения экстремальных значений. В дальнейшем, зная распределение максимального уровня воды за год, легко подсчитать распределение максимального уровня воды, например, за сто лет (с учетом (7.1)) и вычислить квантиль требуемого уровня.

Стоит отметить, что, несмотря на совершенно нефинансовый характер данной задачи, её также корректно рассматривать в контексте риск-менеджмента в соответствующих приложениях.

#### 7.2.5. Распределение максимума из случайного числа случайных величин

Предложенный выше метод подразумевает анализ максимума из фиксированного числа случайных величин, однако в некоторых приложениях интерес представляет анализ максимума из случайного числа случайных величин. Использование предельной теоремы здесь не представляется корректным. Для изучения распределения подобной случайной величины удобно использовать инструмент производящей функции вероятностей, определяемой как  $\varphi_X(z) = E[z^X]$ . Обозначим  $Y_N = \max(X_1, \dots, X_N)$ , где  $N$  определяет число реализовавшихся ущербов. В этом случае в предположении независимости  $N$  и  $X_i$ , а также с учетом формулы полной вероятности выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
 F_{Y_N}(x) &= P(Y_N < x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y_N < x | N = i) P(N = i) = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\max(X_1, \dots, X_i) < x) P(N = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X < x)^i P(N = i) = \varphi_N(F_X(x)).
 \end{aligned}$$

### 7.3. МЕТОД АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕВЫШЕНИЯ ЗАДАННОГО ПОРОГА

#### 7.3.1. Формальное описание метода

При всех своих достоинствах идея анализа максимального ущерба, рассмотренная выше, не совсем подходит для решения проблемы, описанной в п. 7.1.1, так как вместо уточнения оценки квантилей решается несколько иная задача, впрочем также очень важная.

Альтернативный метод предлагает выбрать некоторый (достаточно большой) порог и исследовать распределение лишь ущербов, превышающих данный порог (рис. 7.2). Подобный подход позволяет более бережно относиться к имеющейся выборке.

Формально предполагается анализ случайной величины  $Y = X - d \geq 0$ , где  $d$  — фиксированный порог, при условии  $X \geq d$ . Таким образом, исследуется случайная величина, определяющая, на сколько ущерб превысил данный уровень (при условии, что данный уровень вообще был превышен).

Очевидно, что функция распределения  $Y$  определяется функцией распределения  $X$  и значением  $d$ :

$$F_Y(x) = P[X - d < x | X \geq d] = \frac{P[d \leq X < d + x]}{P[X \geq d]} = \frac{F_X(d + x) - F_X(d)}{1 - F_X(d)},$$

где  $0 \leq x \leq x_F = \sup\{t : F(t) < 1\}$ .

Часто акцент делается на математическом ожидании случайной величины  $Y$ , которое называют *функцией среднего превышения* (mean excess function):

$$e(d) = E[Y] = E[X - d | X \geq d].$$

Отметим, что подобная характеристика встречается, например, в страховании жизни и демографии, где её называют *средней остаточной продолжительностью жизни*.

Таким образом, величина  $Y$ , по сути, определяет поведение хвоста случайной величины  $X$ . При этом с учетом представления

$$\begin{aligned}
 1 - F_X(x) &= P[X \geq d] = P[X \geq d] P[X \geq x | X \geq d] = \\
 &= (1 - F_X(d)) P[X - d \geq x - d | X \geq d] = (1 - F_X(d))(1 - F_Y(x - d)) \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

задача оценки квантилей распределения  $X$  сводится к задаче оценки величины  $F_X(d)$  и анализу функции распределения  $Y$ .

Для распределения  $Y$  верна теорема (Balkema, de Haan, Pickands Theorem), связывающая проблему превышения порога с проблемой анализа максимума: Если (и только если)  $X$  принадлежит к максимальной области притяжения одного из обобщенных распределений экстремальных значений (с параметром  $\xi$ ), то можно найти такую функцию  $\beta(d)$ , что

$$\lim_{d \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - d} |F_Y(x) - W_{\xi, \beta(d)}(x)| = 0,$$

где  $W_{\xi, \beta(d)}(x)$  — обобщённое распределение Парето (*generalized Pareto distribution, GPD*). Его функция распределения определяется следующим образом:

$$W_{\xi, \beta(d)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, & \xi = 0. \end{cases}$$

### 7.3.2. Теоретическое применение теоремы о предельном поведении превышения порога

Несложно заметить, что, так же как и GEV-распределение, GPT-распределение по-разному ведет себя в трех случаях:  $\xi > 0$ ,  $\xi < 0$ ,  $\xi = 0$ . В первом случае речь идет о линейно преобразованном распределении Парето, во втором — о линейно преобразованном бета-распределении, третий же случай представляет собой обычное экспоненциальное распределение (с использованием несколько других обозначений, чем в главе 1). Кроме того, так же как и GEV-распределение, GPT-распределение непрерывно по параметру  $\xi$ . Более того, функции распределения GEV и GPT связаны соотношением  $W_{\xi, 1}(x) = 1 + \ln G_{\xi}(x)$ .

Таким образом, в случае если изучаемое распределение  $X$  попадает в область притяжения распределения Фреше, то и распределение  $Y$  будет сходиться к распределению Парето.

Конечно, не для всех распределений существуют нормирующие константы, определяющие предельное распределение максимума и соответственно распределение превышения порога. В части 7.2.3 приводились примеры распределений, для которых применима теорема Фишера—Типетта. Очевидно, их список достаточно обширен, чтобы ожидать, что достаточно часто распределение превышения удастся оценить с помощью одного из GPT-распределений, при условии, конечно, что будет выбран достаточно высокий порог  $d$ .

Кроме того, несложно проверить, что предельным распределением превышения для GPT-распределений будет GPT-распределение того же типа.

Так, при  $\xi = 0$ , т. е. в случае экспоненциального распределения, этот эффект связан с хорошо известным свойством отсутствия памяти:  $P[X > s + t | X > s] = P[X > t]$ . Таким образом, в случае если  $X$  распределена экспоненциально, то и  $Y$  будет распределена экспоненциально.

Математическое распределение GPT-распределений также легко вычисляется по формуле

$$E[X] = \frac{\beta}{1 - \xi}.$$

Наконец, ещё одним важным свойством GPT-распределений является линейная связь между рисковым капиталом и условным рисковым капиталом.

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{VaR_\alpha(X)}{1 - \xi} + \frac{\delta}{1 - \xi} \quad (7.5)$$

для некоторого  $\delta$ .

В дальнейшем это свойство окажется полезным для определения порога, относительно которого будут считаться превышения.

### 7.3.3. Достоинства и недостатки метода анализа превышения заданного порога

Как уже отмечалось выше, анализ максимумов и анализ превышений порога решают немного разные задачи. При этом для финансовых приложений более актуальным является второй метод, позволяющий, с одной стороны, использовать большее количество информации, а с другой — не игнорировать большие ущербы, произошедшие на протяжении небольшого отрезка времени. При этом базовые требования к модели сохраняются: по-прежнему предполагается, что ущербы независимы и одинаково распределены.

### 7.3.4. Анализ распределения числа превышений заданного порога

Часто важное значение придается анализу числа превышений установленного порога, так как именно оно может являться критерием для контроля модельного риска. Число превышений можно представить в виде

$$N = I_{\{X_1 \geq d\}} + I_{\{X_2 \geq d\}} + \dots + I_{\{X_n \geq d\}},$$

где  $I_{\{X_i > d\}}$  — индикатор превышения порога в  $i$ -й момент времени.

Очевидно, что  $I_{\{X_i \geq d\}}$  имеет распределение Бернулли с параметром  $p = 1 - F(d)$  соответственно,  $N$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $n$  и  $1 - F(d)$ .

Однако для задач, связанных с операционным риском, характерна ситуация, когда ущербы появляются редко, при этом их число, разумеется, заранее неизвестно. В таком случае число ущербов является случайной величиной:

$$N_2 = I_{\{X_1 \geq d\}} + I_{\{X_2 \geq d\}} + \dots + I_{\{X_{N_1} \geq d\}},$$

где  $N_1$  описывает число реализовавшихся ущербов, а  $N_2$  — число реализовавшихся ущербов, которые превысили при этом порог  $d$ .

Таким образом,  $N_2$  представляет собой сумму случайного количества случайных величин. Для анализа подобных объектов снова удобно использовать производящую функцию вероятностей. В этом случае производящая функция вероятностей  $N_2$  есть композиция производящей функции вероятностей  $N_1$  и производящей функции вероятностей индикатора  $I_{\{X_i > d\}}$ :  $\varphi_{N_2} = \varphi_{N_1}(\varphi_I(z))$ .

## 7.4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ОБОБЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПАРЕТО

### 7.4.1. Статистическое оценивание обобщенных распределений экстремальных значений

Статистическое оценивание параметров GEV-распределений начинается с предположения, что исходное распределение  $F$  принадлежит области притяжения некоторого распределения  $G_\xi$ . На следующем этапе аналитику предстоит разделить имеющуюся выборку на периоды одинаковой ширины и из каждого периода выбрать максимальный ущерб. В дальнейшем на основе новой выборки оцениваются параметры возможно смещенного и масштабированного GEV-распределения  $G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ , где  $\sigma > 0$ .

Конечно, подход предполагает возможность разбиения первоначальной выборки на интервалы равной длины. В противном случае придется игнорировать некоторые наиболее старые данные, чтобы добиться корректности метода. В дальнейшем для оценки параметров GEV-распределения можно использовать стандартные статистические процедуры. Так, метод максимального правдоподобия при условии  $\xi \neq 0$  предполагает минимизацию логарифмической функции правдоподобия:

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \mu, \sigma, M_1, M_2, \dots, M_m) = \\ = -m \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^m \ln \left(1 + \frac{M_i - \mu}{\sigma} \xi\right) - \sum_{i=1}^m \ln \left(1 + \frac{M_i - \mu}{\sigma} \xi\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \end{aligned}$$

где  $M_i$  — максимальный убыток, полученный компанией в  $i$ -м периоде.

К сожалению, состоятельность и асимптотическая эффективность оценок, максимизирующих  $\ln L$ , однозначно присутствует только при  $\xi > -0.5$ . Впрочем, с учетом того, что в финансовых приложениях, как правило, используются распределения с тяжелыми хвостами, для которых значение параметра положительно, данный недостаток не кажется слишком серьезным.

Метод максимального правдоподобия в случае  $\xi = 0$  допускает элементарное представление оценок:

$$\hat{\mu} = -\hat{\sigma} \ln \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m M_i e^{-\frac{M_i}{\hat{\sigma}}} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^m M_i}{m} - \frac{\sum_{i=1}^m M_i e^{-\frac{M_i}{\hat{\sigma}}}}{\sum_{i=1}^m e^{-\frac{M_i}{\hat{\sigma}}}}.$$

Последнее уравнение можно решить, например, итеративным способом, на первом шаге подставив некоторое произвольное начальное значение  $\hat{\sigma}$  в правую часть, после чего использовать найденную оценку параметра масштаба для определения оценки параметра сдвига.

Помимо метода максимального правдоподобия для оценки параметров может использоваться метод моментов (точнее, метод взвешенных моментов). Эта процедура более проста с точки зрения вычислений, однако менее эффективна.

Отдельную проблему представляет принцип выбора ширины одного периода и, соответственно, количества периодов. Так, например, для финансовых данных периоды могут составлять недели, месяцы или годы. При этом важно отметить, что выбор большого числа периодов (и соответственно большого размера выборки максимальных значений) приведет к меньшей дисперсии итоговых оценок, в то время как выбор периодов большей ширины — к их меньшему смещению.

### 7.4.2. Статистическое оценивание обобщенных распределений Парето

Так же, как и при оценке GEV-распределений, оценка GPT-распределений начинается с построения новой выборки. После выбора порога  $d$  из исходной выборки отбираются наблюдения  $x_i$ , превысившие данный порог, и вычисляются размеры превышений этого порога  $y_i = x_i - d$ . В дальнейшем оценка будет происходить на основе этой новой выборки.

Построение оценки максимального правдоподобия не представляет большой сложности. Следует лишь найти решение, максимизирующее выражение

$$\ln L(\xi, \beta, y_1, y_2, \dots, y_N) = -N \ln \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^N \ln \left(1 + \frac{y_i}{\beta} \xi\right),$$

где  $N$  — объем выборки  $y_i$ .

Важным вопросом является определение пороговой величины  $d$ . Грубо говоря, речь идет о поиске границы, с которой начинается хвост. Напомним: предельная теорема предполагает, что  $d$  стремится к правой границе носителя. На практике это может означать, что порог должен быть достаточно большим. При этом, разумеется, чем больше  $d$ , тем меньше элементов будет оставаться в выборке и тем медленнее оценка параметров будет сходиться к их истинным значениям. При выборе  $d$  может использоваться соотношение (7.5), из которого следует линейная связь между функцией среднего превышения и  $d$ . Выбирая различные значения  $d$  и соответственно оценивая функцию среднего превышения для каждого значения  $d$ , можно построить график их связи и выбрать такое значение  $d$ , начиная с которого связь будет похожа на линейную.

При этом оценить функцию среднего превышения можно с помощью соотношения

$$e(d) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - d) I_{\{X_i > d\}}}{\sum_{i=1}^N I_{\{X_i > d\}}},$$

где  $I_{\{X_i > d\}}$  равно 1, в случае если  $i$ -е наблюдение превысило выбранный порог.

Наконец, для оценки квантилей исходного распределения можно воспользоваться соотношением  $1 - F_X(x) = (1 - F_X(d))(1 - F_Y(x - d))$ , в котором параметры второго множителя определяются с помощью указанного выше способа, а первый множитель оценивается с помощью величины  $\frac{N}{n}$ , где  $n$  — объем первоначальной выборки анализируемых ущербов, а  $N$  — объем выборки ущербов, превысивших порог.

Отметим также, что на практике  $d$  часто выбирается таким образом, чтобы объем новой выборки составлял примерно 5% от исходной.

### 7.4.3. Оценка параметра $\xi$ методом Хилла

Для задач анализа экстремальных значений можно использовать способ оценки  $\xi$  с помощью метода Хилла. В рамках метода предполагается упорядочить исходную выборку от большего к меньшему, выбрать некоторое значение  $k$  и вычислить

$$\xi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_{(i)} - \ln X_{(k+1)},$$

где  $X_{(i)}$  —  $i$ -е по размеру наблюдение. Данная оценка будет состоятельна и асимптотически нормальна при  $k \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$ . На практике же обычно увеличивают  $k$  до тех пор, пока приблизительно не стабилизируется оценка параметра  $\xi$ .

## 7.5. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

**Задача 7.1.** Найти предельное распределение для максимумов из случайных величин, распределенных по Парето.

*Решение.* Для решения используем классическую форму распределения Фреше, представленную в п. 1.3.1:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^\alpha, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right)^{-\alpha}, & x > 0. \end{cases}$$

В качестве последовательностей нормирующих констант возьмем

$$a_n = \frac{\lambda n^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}, \quad b_n = \lambda n^{\frac{1}{\alpha}} - \lambda.$$

В этом случае для  $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  верно

$$\begin{aligned} P\left[\frac{Y - b_n}{a_n} < x\right] &= P[Y < a_n x + b_n] = P\left[X < \frac{\lambda n^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} x + \lambda n^{\frac{1}{\alpha}} - \lambda\right]^n = \\ &= \left(1 - \left(1 + \frac{\lambda n^{\frac{1}{\alpha}} x + \lambda n^{\frac{1}{\alpha}} - \lambda}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-(1 + \frac{x}{\alpha})^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

**Задача 7.2.** Показать, что максимум из случайных величин с распределением Фреше также имеет распределение Фреше.

*Решение.* Функция распределения Фреше определяется соотношением  $F_X(x) = e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}}$ . В этом случае для  $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  верно:

$$P[Y < x] = F_x^n(x) = \left(e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}}\right)^n = \left(e^{-(1+\xi x)^{-n/\xi}}\right) = \left(e^{-(1+\frac{\xi}{n}(xn))^{-n/\xi}}\right).$$

Последнее выражение является функцией распределения масштабированного распределения Фреше.

**Задача 7.3.** Показать, что предельным распределением превышения порога для распределения Парето будет также распределение Парето.

*Решение.* Для простоты вычислений снова воспользуемся формой функции распределения Парето (см. главу 1):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^\alpha, & x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right)^{-\alpha}, & x > 0. \end{cases}$$

В этом случае для  $Y = X - d|X > d$  верно:

$$\begin{aligned} P[Y < x] &= P[X - d < x | X \geq d] = P[X < x + d | X \geq d] = \\ &= 1 - \frac{1 - P[X < x + d]}{1 - P[X < d]} = 1 - \left(\frac{x + d + \lambda}{d + \lambda}\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Последнее выражение является функцией распределения смещённого распределения Парето.

Отметим, что с учетом теоремы из п. 7.3.1 ответ задачи автоматически следует из задачи 1.1.

## 7.6. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

7.1. Предложить способ разбиения данных на блоки для анализа максимального ущерба на протяжении некоторого периода в случае, если у аналитика есть данные по ущербам за двухлетний период.

7.2. Доказать, что предельным распределением максимума для распределения Гумбеля также будет распределение Гумбеля.

7.3. Доказать, что если число ущербов определяется распределением Пуассона, а размер ущерба — экспоненциальным распределением, то максимум из случайного числа ущербов будет описываться распределением Гумбеля.

7.4. Показать, что предельным распределением превышения порога для экспоненциального распределения будет экспоненциальное распределение.

7.5. Доказать формулу (7.5).

## ЛИТЕРАТУРА

- Кудрявцев А. А.* Санкт-Петербургский парадокс и его значение для экономической теории // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5. Экономика. 2013. Вып. 3. С. 41–55.
- Artzner Ph., Delbaen F.* Default risk insurance and incomplete markets // *Mathematical Finance*. 1995. Vol. 5, N 3. P. 187–195.
- Balakrishnan N., Lai C.-D.* Continuous bivariate distributions. 2<sup>nd</sup> ed. Dordrecht: Springer, 2009. 684 p.
- Bäuerle N., Müller A.* Stochastic orders and risk measures: consistency and bounds // *Insurance: Mathematics and Economics*. 2006. Vol. 38, N 1. P. 132–148.
- Cheriyian K. C.* A bivariate correlated gamma-type distribution function // *Journal of the Indian Mathematical Society*. 1941. Vol. 5. P. 133–144.
- Chernobai A. S., Rachev S. T., Fabozzi F. J.* Operational risk: a guide to Basel II capital requirements, models, and analysis. Hoboken: Wiley, 2007. 300 p.
- Crouhy M., Galai D., Mark R.* Risk management. New York: McGraw-Hill, 2001. 717 p.
- Denuit M. et al.* Actuarial theory for dependent risks: measures, orders and models. Chichester: Wiley, 2005. 458 p.
- Duffie D., Singleton K. J.* Credit risk: pricing, measurement, and management. Princeton: Princeton University Press, 2003. 416 p.
- Elton E. J. et al.* Modern portfolio theory and investment analysis. 9<sup>th</sup> ed. Hoboken: Wiley, 2013. 752 p.
- Embrechts P., Kluppelberg Cl., Mikosch Th.* Modelling extremal events for insurance and finance. Berlin: Springer Verlag, 2003. 648 p.
- Föllmer H., Schied A.* Stochastic finance: an introduction in discrete time. 2nd ed. Berlin: Walter de Gruyter, 2004. 459 p. (Русский перевод: Фёлмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы: дискретное время. М.: МЦМНО, 2008. 496 с.).
- Izawa T.* Two or multidimensional gamma-type distribution and its application to rainfall data // *Papers in Meteorology and Geophysics*. 1965. Vol. 15. P. 167–200.
- Joe H.* Multivariate Models and Dependence Concepts. Boca Raton: Chapman and Hall / CRC, 1997. 399 p.
- Jorion Ph.* Value-at-Risk: the new benchmark for managing financial risk. New York: McGraw-Hill, 2001. 544 p.
- Kibble W. F.* A two-variate gamma-type distribution // *Sankhya*. 1941. Vol. 5. P. 137–150.
- Malik H. J., Trudel R.* Distribution of the product and the quotient of from bivariate t, F and Pareto distribution // *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 1985. Vol. 14. P. 2951–2962.
- McNeil A., Frey R., Embrechts P.* Quantitative risk management: concepts, techniques, tools. Princeton: Princeton University Press, 2005. 538 p.
- Nelsen R. B.* An introduction to copulas. New York: Springer, 1999. 216 p.
- Prékopa A., Szántai T.* A new multivariate gamma distribution and its fitting to empirical streamflow data // *Water Resources Research*. 1978. Vol. 14. P. 19–24.

- 
- Ramabhadran V. R.* A multivariate gamma-type distribution // *Sankhya*. 1951. Vol. 11. P. 45–46.
- Schoemaker P. J. H.* The expected utility model: its variants, purposes, evidence and limitations // *Journal of Economic Literature*. 1982. Vol. 20, N 2. P. 529–563.
- Sen S., Lamichhane R., Diawara N.* A bivariate distribution with conditional gamma and its multivariate form // *Journal of Modern Applied Statistical Methods*. 2014. Vol. 13, N 2. P. 169–184.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
<b>Глава 1. Распределение ущерба .....</b>	<b>5</b>
1.1. Моделирование рисков .....	6
1.1.1. Роль и место математических моделей при управлении рисками .....	—
1.1.2. Этапы построения моделей рискованных ситуаций .....	7
1.1.3. Риски моделирования .....	—
1.2. Распределение ущерба как модель .....	9
1.2.1. Простейшее представление о распределении ущерба .....	—
1.2.2. Учет информации об отсутствии ущерба .....	11
1.3. Краткий обзор распределений, подходящих для моделирования ущерба .....	13
1.3.1. Типичные распределения размера ущерба .....	14
1.3.2. Преобразование распределений ущерба .....	16
1.3.3. Экспоненциальный класс распределений .....	18
1.4. Статистическое оценивание параметров распределения ущерба .....	22
1.4.1. Общая характеристика процедур статистического оценивания параметров распределения .....	—
1.4.2. Метод наименьших квадратов .....	23
1.4.3. Метод максимального правдоподобия .....	24
1.4.4. Методы, основанные на численных характеристиках распределений .....	25
1.4.5. Особенности статистического оценивания скачка в нулевой точке .....	—
1.5. Типовые задачи по распределениям ущерба .....	26
1.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки .....	32
<b>Глава 2. Меры риска .....</b>	<b>34</b>
2.1. Постановка задачи измерения риска .....	35
2.1.1. Необходимость использования численных характеристик риска .....	—
2.1.2. Субъективный и объективный подходы к измерению риска .....	—
2.2. Субъективный подход к измерению риска .....	37
2.2.1. Общая характеристика субъективного подхода к измерению риска .....	—
2.2.2. Теория ожидаемой полезности .....	38
2.2.3. Теория ожидаемой полезности и портфельная теория Марковица .....	39
2.3. Объективный подход к измерению риска .....	41
2.3.1. Общая характеристика объективного подхода к измерению риска .....	—
2.3.2. Измерение риска в портфельных теориях .....	42
2.3.3. Подходы к измерению риска по портфелю рисков в целом .....	44
2.3.4. Построение меры риска в зависимости от требуемых свойств .....	47
2.4. Аксиоматический подход к выбору меры риска .....	—
2.4.1. Общий обзор возможных свойств меры риска .....	—
2.4.2. Формальное обоснование использования когерентных мер риска .....	50
2.4.3. Примеры когерентных мер риска .....	52
2.4.4. Когерентные меры риска как супремум математических ожиданий .....	53

2.5. Рискový капитал .....	53
2.5.1. Место рискového капитала в современном риск-менеджменте .....	—
2.5.2. Рискový капитал для нормально распределенных случайных величин .....	54
2.5.3. Параметры рискového капитала .....	—
2.5.4. Свойства рискového капитала .....	55
2.5.5. Рискový капитал и субаддитивность .....	—
2.5.6. Рискový капитал в актуарных приложениях .....	57
2.5.7. Недостатки рискového капитала .....	—
2.5.8. Использование рискového капитала для определения требований к капиталу .....	58
2.6. Статистическое оценивание рискového капитала .....	59
2.6.1. Метод исторической имитации .....	—
2.6.2. Метод оценки рискového капитала на основе априорных распределений .....	60
2.6.3. Метод параметрического оценивания рискového капитала .....	—
2.6.4. Оценка рискového капитала с помощью метода Монте-Карло .....	—
2.7. Условный рискový капитал .....	61
2.7.1. Понятие рискového капитала .....	—
2.7.2. Когерентность рискového капитала .....	62
2.7.3. Условный рискový капитал для нормального распределения .....	63
2.7.4. Другие примеры условного рискového капитала .....	65
2.8. Типовые задачи по измерению риска .....	66
2.9. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки .....	68
<b>Глава 3. Портфель рисков .....</b>	<b>69</b>
3.1. Портфель рисков как объект моделирования .....	70
3.1.1. Необходимость управления портфелем рисков .....	—
3.1.2. Изменение рисков во времени .....	71
3.2. Многомерные случайные величины .....	72
3.2.1. Понятие многомерной случайной величины .....	—
3.2.2. Характеризация многомерной случайной величины .....	73
3.2.3. Моменты многомерного распределения .....	75
3.3. Стохастическая зависимость .....	76
3.3.1. Понятия независимости и зависимости .....	—
3.3.2. Положительная зависимость на квадранте и её обобщения .....	77
3.3.3. Зависимость в терминах поведения условных распределений .....	79
3.4. Измерение зависимости .....	80
3.4.1. Общая характеристика измерения зависимости .....	—
3.4.2. Измерение зависимости на основе ковариации .....	81
3.4.3. Ранговая корреляция .....	84
3.4.4. Оценка зависимости на хвосте .....	85
3.5. Типовые задачи по оценке зависимости .....	86
3.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки .....	87
<b>Глава 4. Неоднородность рисков и факторы риска .....</b>	<b>88</b>
4.1. Общая характеристика неоднородных портфелей рисков .....	89
4.1.1. Неоднородность портфеля рисков .....	—
4.1.2. Перекрестное субсидирование и неблагоприятный отбор рисков .....	90
4.2. Смесь распределений как модель ущерба по неоднородной группе рисков .....	91
4.2.1. Понятие смеси распределений .....	—
4.2.2. Формула Байеса .....	92
4.2.3. Смеси распределений для моделирования неоднородности .....	93
4.3. Факторы риска .....	98
4.3.1. Понятие факторов риска .....	—
4.3.2. Основные этапы анализа факторов риска .....	99
4.3.3. Подготовительный этап .....	100
4.3.4. Отбор ковариат .....	102
4.3.5. Согласование результатов анализа с политикой управления рисками .....	103
4.3.6. Использование полученных оценок для принятия управленческих решений .....	105

4.4. Общая характеристика статистических процедур анализа факторов риска.....	105
4.4.1. Многомерная классификация при исследовании факторов риска.....	—
4.4.2. Анализ зависимости при исследовании факторов риска.....	107
4.5. Типовые задачи.....	110
4.5.1. Типовые задачи по неоднородности рисков.....	—
4.5.2. Типовые задачи по факторам риска.....	116
4.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки.....	120
<b>Глава 5. Совокупный ущерб.....</b>	<b>122</b>
5.1. Модель индивидуального риска.....	123
5.1.1. Постановка модели и оценка распределения совокупного ущерба.....	—
5.1.2. Моменты распределений случайных величин для случая однородных рисков.....	126
5.1.3. Особенности модели индивидуального риска для неоднородных портфелей.....	—
5.2. Модель коллективного риска.....	128
5.2.1. Постановка модели и моменты совокупного ущерба.....	—
5.2.2. Распределение числа неблагоприятных событий.....	130
5.2.3. Связь с моделью индивидуального риска.....	132
5.3. Неоднородность в модели коллективного риска.....	133
5.3.1. Число неблагоприятных событий в модели коллективного риска для неоднородных портфелей.....	—
5.3.2. Переход к однородному портфелю.....	135
5.3.3. Сложно-пуассоновская аппроксимация модели индивидуального риска.....	137
5.4. Типовые задачи по распределениям ущерба.....	138
5.4.1. Задачи по модели индивидуального риска.....	—
5.4.2. Задачи по модели коллективного риска.....	146
5.5. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки.....	151
5.5.1. Упражнения по модели индивидуального риска.....	—
5.5.2. Упражнения по модели коллективного риска.....	—
<b>Глава 6. Распределения многомерных случайных величин ущерба.....</b>	<b>153</b>
6.1. Многомерное нормальное распределение.....	154
6.1.1. Особенности применения многомерного нормального распределения.....	—
6.1.2. Общие сведения о многомерном нормальном распределении.....	—
6.2. Иные типы многомерных распределений.....	157
6.2.1. Сложности построения многомерных распределений, отличных от многомерного нормального.....	—
6.2.2. Распределения, порождаемые многомерным нормальным распределением.....	161
6.2.3. Класс эллиптических распределений.....	162
6.3. Копулы.....	163
6.4. Типовые задачи по многомерным распределениям ущерба.....	167
6.5. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки.....	171
<b>Глава 7. Теория экстремальных значений.....</b>	<b>172</b>
7.1. Постановка задачи оценки экстремальных ущербов.....	173
7.1.1. Причины необходимости отдельного изучения экстремальных ущербов.....	—
7.1.2. Краткая характеристика методов работы с экстремальными значениями.....	174
7.2. Метод анализа распределения максимального ущерба за период.....	175
7.2.1. Формальное описание метода анализа максимального ущерба.....	—
7.2.2. Теоретическое применение теоремы Фишера—Типшета.....	176
7.2.3. Классификация распределений по тяжести хвоста.....	—
7.2.4. Достоинства и недостатки метода анализа максимального ущерба.....	178
7.2.5. Распределение максимума из случайного числа случайных величин.....	—
7.3. Метод анализа распределения превышения заданного порога.....	179
7.3.1. Формальное описание метода.....	—
7.3.2. Теоретическое применение теоремы о предельном поведении превышения порога.....	180

---

7.3.3. Достоинства и недостатки метода анализа превышения заданного порога . . . . .	181
7.3.4. Анализ распределения числа превышений заданного порога . . . . .	—
7.4. Статистическое оценивание обобщенных распределений экстремальных значений и обобщенных распределений Парето . . . . .	182
7.4.1. Статистическое оценивание обобщенных распределений экстремальных значений . . . . .	—
7.4.2. Статистическое оценивание обобщенных распределений Парето . . . . .	183
7.4.3. Оценка параметра $\xi$ методом Хилла . . . . .	184
7.5. Типовые задачи по теории экстремальных значений . . . . .	—
7.6. Задачи и упражнения для самостоятельной подготовки . . . . .	185
Литература . . . . .	186

Учебное издание

*Андрей Алексеевич Кудрявцев,  
Андрей Владимирович Радионов*

**ВВЕДЕНИЕ В КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ РИСК-МЕНЕДЖМЕНТ**

*Учебник*

Редактор *Е. Е. Жукова*  
Корректор *Е. В. Величкина*  
Компьютерная верстка *А. М. Вейшторт*

---

Подписано в печать 10.02.2016. Формат 70 × 100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,6. Тираж 130 экз. (1-й завод). Заказ № 42

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11

Тел./факс (812) 328-44-22

E-mail: [publishing@spbu.ru](mailto:publishing@spbu.ru)     [publishing.spbu.ru](http://publishing.spbu.ru)

---

Типография Издательства СПбГУ. 199061, С.-Петербург, Средний пр., 41

Книги Издательства СПбГУ можно приобрести  
в Доме университетской книги  
Менделеевская линия, д. 5  
тел.: +7(812) 329 24 71  
часы работы 10.00–20.00 пн. — сб.,  
а также в интернет-магазине OZON.ru