

Серия "Управление организационными системами"

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова

**В.Н. БУРКОВ, А.Ю. ЗАЛОЖНЕВ,
Д.А. НОВИКОВ**

**ТЕОРИЯ ГРАФОВ
В УПРАВЛЕНИИ
ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ
СИСТЕМАМИ**

Рекомендовано в качестве учебного пособия Методическим советом ФРГК Московского физико-технического института по специальности № 010300 «Прикладные математика и физика», специализация «Прикладные информационные технологии в управлении и бизнесе»

СИНТЕГ
Москва — 2001

УДК 007
ББК 32.81
Б91

Издатель и научный редактор серии: к.т.н. **В.Л. Гуревич**
(Тел./факс: (095) 371-1316 E-mail: sinteg@mail.ru)

Рецензенты: д.т.н., проф. **В.А. Ириков**,
д.т.н., проф. **А.В. Щепкин**

Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А.

Теория графов в управлении организационными системами.
Серия "Управление организационными системами". - М.: СИНТЕГ,
2001, 124 с.

В настоящем учебном пособии излагаются основные понятия и результаты теории графов (в том числе - задачи о максимальных путях и контурах на графах, свойства псевдопотенциальных графов, задачи о максимальном потоке, задачи сетевого планирования и управления) и иллюстрируется многообразие применений этой теории при решении широкого класса прикладных задач управления организационными системами.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности "Прикладные информационные технологии в управлении и бизнесе" и может быть полезно преподавателям и разработчикам систем управления бизнесом.

ISBN 5-89638-55-0

- © Бурков В.Н., автор, 2001
- © Заложнев А.Ю., автор, 2001
- © Новиков Д.А., автор, 2001
- © Гуревич В.Л., серия, 2001
- © ООО "НПО СИНТЕГ", оформление, 2001

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Элементы теории графов	7
1.1. Основные понятия теории графов	7
1.2. Экстремальные пути и контуры на графах	14
1.3. Псевдопотенциальные графы	25
1.4. Задачи о максимальном потоке	28
1.5. Задачи сетевого планирования и управления	34
1.6. Паросочетания. Независимые и доминирующие множества.	39
Глава 2. Применение теории графов в задачах управления организационными системами	41
2.1. Метод «затраты-эффект»	41
2.2. Методы агрегирования в управлении проектами	47
2.3. Механизмы самоокупаемости	57
2.4. Механизмы согласованного выбора	62
2.5. Метризованные отношения в задачах стимулирования	65
2.6. Ранговые системы стимулирования	74
2.7. Задача выбора оптимального стандартного набора видов продукции	83
2.8. Модели закупок	87
2.9. Механизмы обмена	88
2.10. Оптимизация обменных производственных схем	98
2.11. Задачи оптимизации производственного и коммерческого циклов	109
Литература	115

*Теория графов*¹ в качестве теоретической дисциплины² может рассматриваться как раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы.

Задача настоящего учебного пособия заключается, во-первых, в том, чтобы изложить основные понятия и результаты теории графов, и, во-вторых, в том, чтобы проиллюстрировать многообразие применений этой теории при решении широкого класса прикладных задач в самых разных областях, и, в первую очередь, в теории управления *организационными (активными) системами* [6, 14, 18, 30].

Изложение материала имеет следующую структуру. В первой главе приводятся элементы теории графов³: вводятся основные понятия (раздел 1.1), рассматриваются задачи о максимальных путях и контурах на графах (раздел 1.2), свойства псевдопотенциальных графов (раздел 1.3), задачи о максимальном потоке (раздел 1.4), а также задачи сетевого планирования и управления (управления проектами – раздел 1.5) и задачи о независимых и доминирующих множествах (раздел 1.6). Во второй главе рассматриваются приложения теории графов, возникающие в задачах управления активными системами: механизмы самоокупаемости, механизмы согласованного выбора, модели закупок, обмена и др. При этом

¹ Понятия, вводимые впервые, выделены в тексте курсивом.

² Начало теории графов датируют 1736 г., когда Л. Эйлер решил популярную в то время «задачу о кенигсбергских мостах». Термин «граф» впервые был введен спустя 200 лет (в 1936 г) Д. Кенигом [26].

³ Следует признать, что авторы настоящего учебного пособия не ставили перед собой задачу полного охвата проблематики и результатов теории графов: практически вне рассмотрения остались такие задачи как: разбиения на графах, раскраска графов и др. [4, 5, 8, 26, 33, 36].

каждая из прикладных моделей описана таким образом, что может изучаться независимо от других.

Соответствие между материалом первой главы (теоретическими результатами) и материалом второй главы (прикладными моделями, использующими эти теоретические результаты) представлено графом, приведенным на рисунке 1.

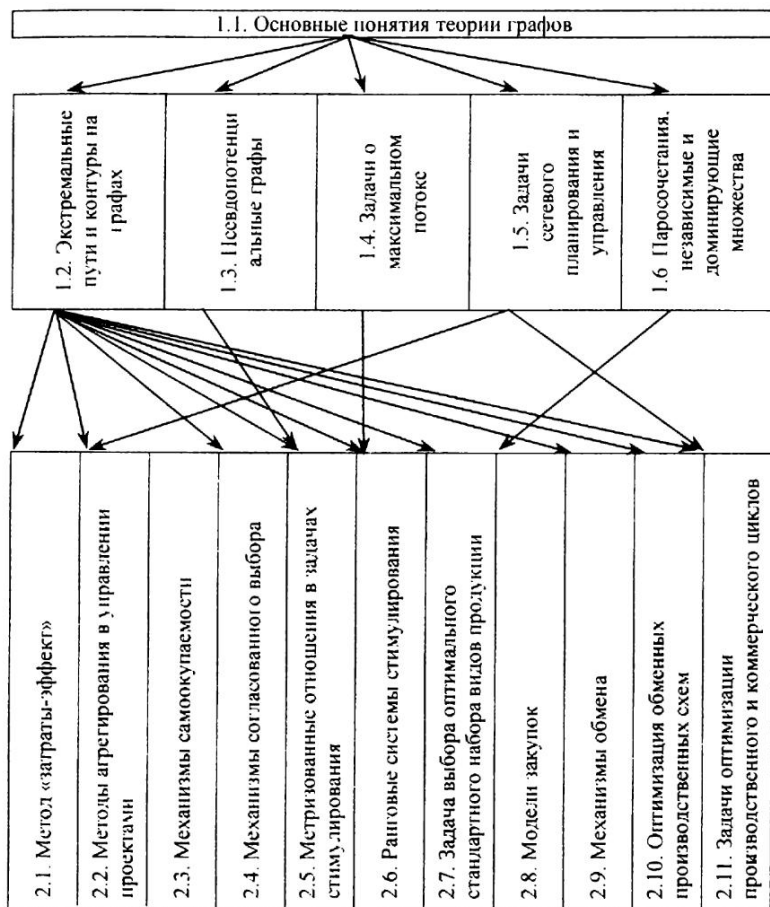


Рис. 1. Соответствие между задачами теории графов (вверху – см. главу 1) и задачами управления организационными системами (внизу – см. главу 2)

Преподавательский опыт авторов¹ свидетельствует, что материал первой главы с избранными прикладными примерами из второй главы составляет основу семестрового курса лекций, дающего общее представление о теории графов и основных ее приложениях к задачам управления социально-экономическими системами. Обе главы целиком, совместно с упражнениями, по содержанию примерно соответствуют годовому курсу лекций. Многочисленные упражнения, снабженные ссылками на соответствующую литературу, представляют обширный материал для самостоятельной работы студентов².

¹ Теория графов и ее приложения к задачам управления социально-экономическими системами читались студентам факультетов «Радиотехники и кибернетики» и «Прикладной математики и экономики» Московского физико-технического института.

² Следует отметить, что многие упражнения являются предметом самостоятельного исследования и требуют подробного ознакомления со специальной литературой.

1.1. Основные понятия теории графов

Граф – система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (*геометрический способ задания графа* – см. рисунок 2). Кружки называются *вершинами* графа, линии со стрелками – *дугами*, без стрелок – *ребрами*. Граф, в котором направление линий не выделяется (все линии являются ребрами), называется *неориентированным*; граф, в котором направление линий принципиально (линии являются дугами) называется *ориентированным*.

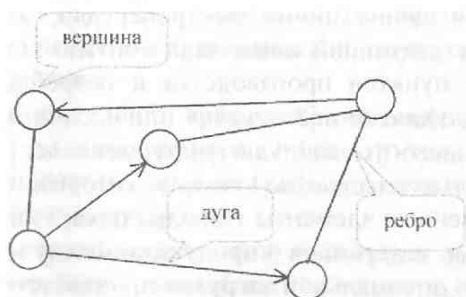


Рис. 2. Пример графа

Теория графов может рассматриваться как раздел дискретной математики (точнее - теории множеств¹), и формальное определение графа таково: задано конечное (бесконечные графы рассматривать мы не будем) множество X , состоящее из n элементов ($X = \{1, 2, \dots, n\}$), называемых вершинами графа, и подмножество V декартова произведения $X \times X$, то есть $V \subseteq X^2$, называемое множеством дуг, тогда ориентированным *графом* G называется совокупность (X, V) (неориентированным графом называется совокупность

¹ Необходимость введения специальной терминологии обусловлена требованиями наглядности и удобства содержательных интерпретаций.

множества X и множества неупорядоченных пар элементов, каждый из которых принадлежит множеству X). Дугу между вершинами i и j , $i, j \in X$, будем обозначать (i, j) . Число дуг графа будем обозначать m ($V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$).

Язык графов оказывается удобным для описания многих физических, технических, экономических, биологических, социальных и других систем.

Приведем ряд **примеров приложений теории графов** (более подробное описание перечисляемых и других задач приводится ниже и в литературе, указанной в соответствующих ссылках).

1. *«Транспортные» задачи*, в которых вершинами графа являются пункты, а ребрами – дороги (автомобильные, железные и др.) и/или другие транспортные (например, авиационные) маршруты. Другой пример – сети снабжения (энергоснабжения, газоснабжения, снабжения товарами и т.д.), в которых вершинами являются пункты производства и потребления, а ребрами – возможные маршруты перемещения (линии электропередач, газопроводы, дороги и т.д.). Соответствующий класс задач оптимизации потоков грузов, размещения пунктов производства и потребления и т.д., иногда называется *задачами обеспечения* или *задачами о размещении*. Их подклассом являются *задачи о грузоперевозках* [5, 8, 20].

2. *«Технологические задачи»*, в которых вершины отражают производственные элементы (заводы, цеха, станки и т.д.), а дуги – потоки сырья, материалов и продукции между ними, заключаются в определении оптимальной загрузки производственных элементов и обеспечивающих эту загрузку потоков [15, 20, 24].

3. *Обменные схемы*, являющиеся моделями таких явлений как бартер, взаимозачеты и т.д. Вершины графа при этом описывают участников обменной схемы (цепочки), а дуги – потоки материальных и финансовых ресурсов между ними. Задача заключается в определении цепочки обменов, оптимальной с точки зрения, например, организатора обмена и согласованной с интересами участников цепочки и существующими ограничениями [7, 12, 18].

4. *Управление проектами*¹. С точки зрения теории графов проект – совокупность операций и зависимостей между ними (*сетевой*

¹ *Управление проектами* – раздел теории управления, изучающий методы и механизмы управления изменениями (*проектом* называется целе-

график - см. ниже). Хрестоматийным примером является проект строительства некоторого объекта. Совокупность моделей и методов, использующих язык и результаты теории графов и ориентированных на решение задач управления проектами, получила название *календарно-сетевого планирования и управления* (КСПУ). В рамках КСПУ решаются задачи определения последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними, оптимальных с точки зрения тех или иных критериев (времени выполнения проекта, затрат, риска и др.).

5. *Модели коллективов и групп*, используемые в социологии, основываются на представлении людей или их групп в виде вершин, а отношений между ними (например, отношений знакомства, доверия, симпатии и т.д.) – в виде ребер или дуг. В рамках подобного описания решаются задачи исследования структуры социальных групп, их сравнения, определения агрегированных показателей, отражающих степень напряженности, согласованности взаимодействия, и др. [34].

Завершив краткое описание прикладных областей, вернемся к введению основных понятий.

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми ребрами (дугами), соединяющими вершины из этого множества. Если из графа удалить часть ребер (дуг), то получим *частичный граф*.

Две вершины называются *смежными*, если они соединены ребром (дугой). Смежные вершины называются *граничными* вершинами соответствующего ребра (дуги), а это ребро (дуга) – *инцидентным* соответствующим вершинам.

Путем называется последовательность дуг (в ориентированном графе), такая, что конец одной дуги является началом другой дуги. *Простой путь* – путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды. *Элементарный путь* – путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды. *Контур* – путь, у которого конечная вершина

направленное изменение некоторой системы, осуществляемое в рамках ограничений на время и используемые ресурсы; характерной чертой любого проекта является его уникальность, то есть нерегулярность соответствующих изменений [16, 22, 35].

совпадает с начальной вершиной. *Длиной пути* (контура) называется число дуг пути (или сумма длин его дуг, если последние заданы).

Граф, для которого из $(i, j) \in V$ следует $(j, i) \in V$ называется *симметрическим*. Если из $(i, j) \in V$ следует, что $(j, i) \notin V$, то соответствующий граф называется *антисимметрическим*¹.

Цепью называется множество ребер (в неориентированном графе), которые можно расположить так, что конец (в этом расположении) одного ребра является началом другого. Другое определение: цепь – последовательность смежных вершин. Замкнутая цепь называется *циклом*. По аналогии с простым и элементарным путем, можно определить соответственно *простые и элементарные цепь и цикл*. Любой элементарный цикл является простым, обратное утверждение в общем случае неверно. Элементарная цепь (цикл, путь, контур), проходящая через все вершины графа называется *гамильтоновой цепью* (соответственно – циклом, путем, контуром). Простая цепь (цикл, путь, контур), содержащая все ребра (дуги) графа называется *эйлеровой цепью* (соответственно – циклом, путем, контуром).

Упражнение 1. Предложите алгоритм проверки заданного множества ребер неориентированного графа на то, является ли оно цепью.

Если любые две вершины графа можно соединить цепью, то граф называется *связным*. Если граф не является связным, то его можно разбить на связные подграфы, называемые *компонентами*. *Связностью* графа называется минимальное число ребер, после удаления которых граф становится несвязным. Если любые две вершины графа можно соединить путем, то граф называется *сильно связным*.

Упражнение 2 [8, 26]². Докажите, что связность графа не может быть больше, чем $[2m/n]$, где $[x]$ – целая часть числа x .

¹ Отметим, что ориентированные графы являются удобным средством графического изображения бинарных отношений на конечных множествах [5, 30].

² Ссылка на литературу в упражнении означает, что в соответствующих работах можно найти подсказку или ответ на поставленный вопрос.

Упражнение 3 [8]. Докажите, что существуют графы с n вершинами и m ребрами, имеющие связность $\lfloor 2m/n \rfloor$.

Упражнение 4 [8]. Докажите, что в сильно связном графе через любые две вершины проходит контур.

Упражнение 5 [8, 26]. Предложите алгоритм проверки сильной связности графа.

Связный граф, в котором существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Упражнение 6. Докажите, что эйлеров граф можно изобразить, не отрывая карандаша и не повторяя линий.

В неориентированном графе *степенью вершины* i называется число d_i инцидентных ей ребер. Очевидно, $d_i \leq n - 1$, $i \in X$ (предполагаем далее, что в графе нет петель, то есть ребер (дуг), инцидентных только одной вершине). Граф, степени всех вершин которого равны $n - 1$, называется *полным*. Граф, все степени вершин которого равны, называется *однородным*.

Вершина, для которой не существует инцидентных ей ребер ($d_i = 0$) называется *изолированной*. Вершина, для которой существует только одно инцидентное ей ребро ($d_i = 1$) называется *висячей*.

Упражнение 7. Докажите тождество¹:

$$(1^2) \quad \sum_{i \in X} d_i = 2m.$$

Упражнение 8. Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

Обозначим n_k – число вершин, имеющих степень k , $k = 0, 1, 2, \dots$.

Упражнение 9. Докажите тождество

$$(2) \quad \sum_{k: n_k > 0} k n_k = 2m.$$

¹ Выражение (1) называется «леммой о рукопожатиях» – поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки, то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно (при условии, что каждая рука учитывается столько раз, в скольких рукопожатиях она участвовала).

² В настоящей работе принята независимая внутри подразделов нумерация формул.

Упражнение 10. Задан набор степеней (d_1, d_2, \dots, d_n) степеней графа, удовлетворяющих (1). Существует ли соответствующий граф? Предложите алгоритм проверки.

Упражнение 11. Существуют ли графы с заданными степенями, содержащие заданное число вершин. Предложите алгоритм проверки.

Упражнение 12 [8, 26]. Докажите теорему Эйлера: связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.

Уравнения (1) и (2) принадлежат классу *диофантовых уравнений* (то есть алгебраических уравнений, решение которых ищется в целых числах), что является одним из свидетельств глубокой взаимосвязи между теорией графов и теорией чисел. Отметим, что существование решений этих уравнений является необходимым, но не достаточным условием существования соответствующих графов.

Упражнение 13. Пусть d – степень вершин однородного графа. Докажите, что:

а) при выполнении условия $nd = 2m$ всегда можно построить соответствующий граф;

б) для любых положительных чисел n_d и n_{d+1} , удовлетворяющих условиям $dn_d + (d+1)n_{d+1} = 2m$, $n_d + n_{d+1} = n$ существует соответствующий граф [8].

Для ориентированных графов для каждой вершины можно ввести два числа – *полустепень исхода* d_i^+ (число выходящих из нее вершин) и *полустепень захода* d_i^- (число входящих в нее вершин). В дальнейшем, если не оговорено особо, будем рассматривать графы без *петель*, то есть без дуг, у которых начальная и конечная вершины совпадают.

Упражнение 14. Докажите, что $\sum_{i \in X} d_i^- = \sum_{i \in X} d_i^+ = m$.

Упражнение 15 [8, 26]. Докажите, что для эйлерова графа имеет место: $d_i^- = d_i^+, i = 1, n$.

Упражнение 16 [8, 26]. Докажите, что эйлеров граф является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.

Определим *матрицу смежности* графа как квадратную матрицу $n \times n$, элемент a_{ij} которой равен единице, если $(i, j) \in V$, и нулю,

если $(i, j) \in V$, $i, j \in X$. Для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрическая.

Определим *матрицу инцидентий для ребер* графа как прямоугольную матрицу $n \times m$, элемент r_{ij} которой равен единице, если вершина i инцидентна ребру j , и нулю в противном случае, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Аналогично определяется *матрица инцидентий для дуг* графа - как прямоугольная матрица $m \times n$, элемент r_{ij} которой равен плюс единице, если дуга U_j исходит из вершины i , минус единице, если дуга U_j заходит в вершину i , и нулю в остальных случаях, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$

Деревом называется связный граф без простых циклов, имеющих не менее двух вершин¹.

Упражнение 17 [4, 8, 33]. Докажите, что у дерева

$$(3) \quad m = n - 1.$$

Подставляя (3) в (2), получаем, что число висячих вершин у дерева равно

$$(4) \quad n_1 = 2 + \sum_{i \geq 2} (i - 2) n_i.$$

Упражнение 18 [4, 8, 26, 33]. Докажите, что в дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

Упражнение 19. Докажите, что для любого набора положительных чисел, удовлетворяющего (4), существует дерево.

Прадеревом называется ориентированное дерево, у которого одна из вершин, называемая *корнем*, не имеет заходящих дуг, а степени захода остальных вершин равны единице.

Плюским (планарным) называется граф, который можно изобразить на плоскости так, что различным вершинам соответствуют различные кружки и никакие два ребра не имеют общих точек, отличных от их границ (не пересекаются). Для плоского графа существует понятие *грани* - части плоскости, ограниченной ребрами и не содержащей внутри себя ни вершин, ни ребер. Для простоты определения грани в дальнейшем в основном будем рассматривать графы без висячих вершин. Например, дерево имеет всего

¹ *Дерево можно также понимать как связный граф, не содержащий связного частично-го графа, состоящего из всех его вершин.*

одну внешнюю грань – всю плоскость. *Степенью грани* называется число ее граничных ребер (висячие ребра считаются дважды). Обозначим p – число граней плоского графа, p_k – число его граней, имеющих степень k , q_i – степень i -ой грани. По аналогии с выражениями (1) и (2) можно доказать, что имеет место:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^p q_i = 2m,$$

$$(6) \quad \sum_{k: p_k > 0} k p_k = 2m.$$

Упражнение 20 [8, 26]. Докажите формулу Эйлера

$$(7) \quad n + p = m + 2.$$

Выражения (5)-(7) являются необходимыми условиями существования плоских графов с заданными наборами чисел $\{n_i\}$ и $\{p_i\}$.

Любому связному плоскому графу G можно поставить в соответствие *двойственный* ему связный плоский граф G^* , определяемый следующим образом: каждой грани графа G соответствует вершина графа G^* , каждому ребру V графа G , являющемуся граничным для граней z_1 и z_2 , соответствует ребро V^* графа G^* , соединяющее соответствующие граням z_1 и z_2 вершины. Понятие двойственного графа тесно связано с понятием двойственности в линейном программировании [8, 28].

1.2. Экстремальные пути и контуры на графах

Задачи поиска кратчайших и длиннейших путей на графах возникают в различных областях управления. Сначала мы рассмотрим задачи о кратчайшем пути, затем задачи об экстремальных контурах.

Задача о кратчайшем пути. Пусть задана *сеть* из $n+1$ вершины, то есть ориентированный граф, в котором выделены две вершины - вход (нулевая вершина) и выход (вершина с номером n). Для каждой дуги заданы числа, называемые длинами дуг. *Длиной пути (контур)* называется сумма длин входящих в него дуг (если длины дуг не заданы, то длина пути (контур) определяется как

число входящих в него дуг). Задача заключается в поиске кратчайшего пути (пути минимальной длины) от входа до выхода сети¹.

Теорема 1 [8]. Для существования кратчайшего пути необходимо и достаточно отсутствия в сети контуров отрицательной длины.

Упражнение 21. Докажите теорему 1².

Предположим, что в сети нет контуров. Тогда всегда можно пронумеровать вершины таким образом, что для любой дуги (i, j) имеет место $j > i$. Такая нумерация называется *правильной*.

Упражнение 22. Докажите, что в сети без контуров всегда существует правильная нумерация³.

Обозначим l_{ij} – длину дуги (i, j) . Кратчайший путь в сети, имеющей правильную нумерацию, определяется следующим алгоритмом.

Алгоритм 1.

Шаг 0: Помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$;

Шаг k : помечаем вершину k индексом $\lambda_k = \min_{i < k} (\lambda_i + l_{ik})$.

Индекс выхода λ_n будет равен длине кратчайшего пути⁴. На рисунке 3 приведен пример применения алгоритма 1 для определения кратчайшего пути (числа у дуг равны длинам дуг, индексы вершин помещены в квадратные скобки, кратчайший путь выделен двойными линиями).

¹ В дальнейшем будем предполагать, что в любую вершину сети можно попасть из входа, и из любой вершины можно попасть в выход (вершины, не удовлетворяющие этому требованию, можно удалить).

² Необходимость очевидна (если существует контур отрицательной длины, то длина кратчайшего пути равна минус бесконечности). Доказательство достаточности основывается на том, что в рамках предположения теоремы для любого пути существует элементарный путь не большей длины, который соединяет вход с выходом, а число элементарных контуров конечно.

³ Воспользуйтесь тем, что в отсутствие контуров всегда найдется вершина, не имеющая заходящих дуг.

⁴ Алгоритм 1 для задач динамического программирования отражает принцип оптимальности Беллмана: если ищется кратчайший путь между двумя точками, то длина пути между любыми двумя точками кратчайшего пути также должна быть минимальна (см. также ниже и [8]).

Когда индексы (называемые в некоторых задачах *потенциалами вершин*) установятся, кратчайший путь определяется методом обратного хода от выхода к входу, то есть кратчайшим является путь $\mu = (0; i_1; i_2; \dots; i_{n-1}; n)$, такой, что $l_{i_{n-1}n} = \lambda_n - \lambda_{i_{n-1}}$ и т.д.

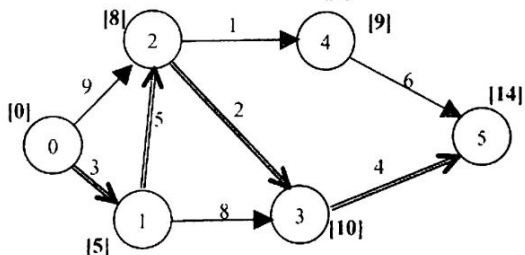


Рис. 3. Поиск кратчайшего пути

Следующий алгоритм дает возможность определять кратчайший путь в общем случае (то есть при произвольной нумерации вершин).

Алгоритм 2.

Шаг 0: Помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$, все остальные вершины индексами $\lambda_i = +\infty, i = \overline{1, n}$;

Шаг k : Рассматриваем все дуги. Для дуги $(i; j)$, если $\lambda_j - \lambda_i > l_{ij}$, то вычисляем новое значение $\lambda'_j = \lambda_i + l_{ij}$.

Индексы устанавливаются за конечное число шагов. Обозначим $\{\lambda_i^*\}$ – установившиеся значения индексов, которые обладают следующим свойством: величина λ_i^* равна длине кратчайшего пути из нулевой вершины в вершину i . Кратчайший путь из вершины 0 в вершину i определяется методом обратного хода.

Докажем, что найденный путь является кратчайшим. Для этого возьмем $i = n$ и произвольный путь $\mu = (0; i_1; i_2; \dots; i_{n-1}; n)$. В силу того, что индексы установились, имеем: $\lambda_{i_1}^* - \lambda_0^* \leq l_{0i_1}$, $\lambda_{i_2}^* - \lambda_{i_1}^* \leq l_{i_1i_2}$, ..., $\lambda_n^* - \lambda_{i_{n-1}}^* \leq l_{i_{n-1}n}$. Обозначим $L(\mu)$ – длину пути μ . Складывая неравенства, получаем $\lambda_n^* \leq L(\mu)$. Следовательно, λ_n^* не превышает длины любого пути из начальной вершины сети в 16

конечную, то есть путь, длина которого равна λ_n^* , является кратчайшим.

Если длины всех дуг неотрицательны, то для поиска кратчайшего пути применим следующий алгоритм.

Алгоритм 3.

Шаг 0: Помечаем нулевую вершину индексом $\lambda_0 = 0$;

Шаг k : Пусть уже помечено некоторое множество вершин. Обозначим Q – множество непомеченных вершин, смежных с помеченными. Для каждой вершины $k \in Q$ вычисляем величину $\xi_k = \min (\lambda_k + l_{ki})$, где минимум берется по всем помеченным вершинам i , смежным с вершиной k . Помечаем вершину k , для которой величина ξ_k минимальна, индексом $\lambda_k = \xi_k$.

Подобную процедуру повторяем до тех пор, пока не будет помечена вершина n . Длина кратчайшего пути равна λ_n , а сам кратчайший путь определяется так, как это было описано выше.

Упражнение 23. Докажите, что, если длины дуг неотрицательны, то алгоритм Данцига определяет кратчайший путь.

Запишем задачу о кратчайшем пути как задачу линейного программирования (ЛП). Пусть $x_{ij} = 1$, если дуга $(i; j)$ входит в путь μ , $x_{ij} = 0$, если дуга $(i; j)$ не входит в путь μ , $i, j = \overline{0, n}$.

Задачу о минимальном пути можно записать в виде²:

$$(1) \quad L(x) = \sum_{i,j=0}^n l_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_x$$

$$(2) \quad \sum_j x_{0j} = 1, \quad \sum_j x_{jn} = 1,$$

$$(3) \quad \sum_i x_{ki} = \sum_j x_{jk}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

¹ Будем считать, что имеются две дуги между каждой парой вершин, так как, если их нет в исходном графе, то, положив их длину равной бесконечности, мы заведомо исключим их из решения.

² Ограничение (2) отражает требование того, что в искомом пути из входа выходит одна дуга и в выход заходит одна дуга. Ограничение (3) обеспечивает равенство числа заходящих и выходящих в любую промежуточную вершину дуг.

Упражнение 24. Докажите, что любое решение системы неравенств (2)-(3) определяет путь в сети без контуров (но не в сети с контурами).

Пусть все контуры имеют строго положительную длину, то есть нет контуров отрицательной и нулевой длины. Тогда решение задачи (1)-(3) определяет путь кратчайшей длины.

Сформулируем задачу ЛП, двойственную задаче (1)-(3), поставив в соответствие ограничениям (2) двойственные переменные λ_{ij} и λ_n , а ограничениям (3) – двойственные переменные $\{\lambda_i\}$, $i = \overline{1, n-1}$:

$$(4) \quad \lambda_n - \lambda_{ij} \rightarrow \max$$

$$(5) \quad \lambda_j - \lambda_i \leq l_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

По теореме двойственности линейного программирования [8, 28], для оптимальных решений задач (1)-(3) и (4)-(5) значения целевых функций совпадают.

Задача (4)-(5) называется *задачей о потенциалах* вершин графа. Общая ее формулировка такова: найти потенциалы вершин $\{\lambda_i\}$, удовлетворяющие системе неравенств (5) и максимизирующие некоторую функцию $\Phi(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи о потенциалах даются теоремой 1.

Примером является *задача о ближайших потенциалах*, в которой $\Phi(\lambda) = \sum_j |\lambda_j - \lambda_j^0|$, где $\{\lambda_j^0\}$ могут интерпретироваться как желательные потенциалы.

Упражнение 25. Докажите, что для решения задачи о ближайших потенциалах на первом шаге начальные значения индексов вершин достаточно взять равными соответствующим желательным потенциалам.

Упражнение 26 [8]. Решите задачу о ближайших потенциалах с критерием $\Phi(\lambda) = \max_j |\lambda_j - \lambda_j^0|$.

Аналогично задаче о кратчайшем пути формулируется и решается *задача о максимальном (длиннейшем) пути* – достаточно изменить знаки дуг на противоположные и решить задачу о кратчайшем пути. Для существования решения задачи о максимальном пути необходимо и достаточно отсутствия контуров положительной длины.

Упражнение 27. Сформулируйте алгоритмы 1-3 для поиска пути максимальной длины.

Упражнение 28. Докажите, что в графе существуют и кратчайшие, и длиннейшие пути, только если граф не имеет контуров, либо все контуры имеют нулевую длину.

Упражнение 29 [8]. Предложите способы определения контуров положительной и отрицательной длины.

В задаче поиска *пути максимальной надежности* длины дуг интерпретируются, например, как вероятности того, что существует связь между соответствующими двумя пунктами. Заменяя длины дуг их логарифмами, взятыми с обратными знаками, получаем, что путь максимальной надежности в исходном графе будет соответствовать кратчайшему пути в новом графе.

Гораздо более сложными (NP-полными¹) являются задачи поиска элементарных путей кратчайшей (максимальной) длины в случае, когда в сети имеются контуры отрицательной (соответственно, положительной) длины². Эффективных (не сводящихся к полному перебору) точных алгоритмов для них не существует.

К таким же сложным задачам относятся и задачи поиска кратчайших или длиннейших путей или контуров, проходящих через все вершины графа (элементарный путь (контур), проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым путем* (кон-

¹ Качественно, если n – число вершин графа, то, если сложность (количество вычислений, операций, шагов и т.д.) алгоритма поиска точного решения пропорциональна n^α , где α – некоторое положительное число, то говорят, что алгоритм имеет полиномиальную сложность. Если сложность пропорциональна a^n , то имеет место экспоненциальная сложность (NP-полнота). Более полное представление о сложности задач дискретной оптимизации можно получить из [25].

² Существуют несколько алгоритмов проверки отсутствия контуров отрицательной (или положительной) длины [8]: изменять индексы, пока число шагов алгоритма не превысит максимально необходимое (равное n) число; ограничить потенциалы вершин заданными числами d_i и при $\lambda_i \leq d_i$ ($\lambda_i \geq d_i$) проверять действительно ли полученное значение потенциала соответствует длине некоторого пути, или имеется контур отрицательной (положительной) длины; и др.

туром)). Классическим примером¹ задачи поиска гамильтонова контура является *задача коммивояжера*, заключающаяся в следующем. Коммивояжер (бродячий торговец) должен посетить n городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться в исходный пункт своего путешествия. Заданы неотрицательные длины дуг, интерпретируемые как расстояние между городами или стоимости проезда. Требуется найти гамильтонов контур минимальной длины (в графе из n вершин существует $n!$ (число перестановок) гамильтоновых контуров).

Алгоритмы решения задачи о кратчайшем пути позволяют решать широкий класс задач дискретной оптимизации. В качестве примера приведем задачу целочисленного линейного программирования - *задачу о ранце* (о рюкзаке), к которой сводятся многие практически важные задачи определения оптимальной комбинации факторов при ограничениях на общий вес, площадь, объем, финансирование и т.д.

Задача о ранце. Пусть имеется n предметов, которые могут быть полезны в походе. Полезность i -го предмета оценивается числом a_i , вес предмета (или его объем) - b_i . Суммарный вес, который может нести турист (объем рюкзака), ограничен величиной R . Требуется найти набор предметов, обладающий максимальной суммарной полезностью и удовлетворяющий ограничению.

Обозначим x_i - переменную, принимающую значение ноль (если i -ый предмет не кладется в ранец) или единица (если i -ый предмет кладется в ранец). Тогда задача о ранце имеет вид:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i \rightarrow \max_x$$

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n b_i x_i \leq R.$$

Верхняя оценка числа возможных комбинаций - 2^n . Однако для решения задачи о ранце существует эффективный алгоритм -

¹ Одним из способов оценки сложности той или иной задачи дискретной оптимизации является «сведение» ее к задаче, сложность которой известна. Одной из таких базовых задач является задача коммивояжера (см. [5, 8, 20, 25]).

другими вершинами, равен нулю) обладает следующими свойствами: любому решению задачи (6)-(7) соответствует некоторый путь в этой сети; любому пути соответствует некоторое решение задачи. Таким образом, задача свелась к нахождению пути максимальной длины (потенциалы вершин приведены в квадратных скобках). Решение задачи – результат применения алгоритма 1 (сеть не содержит контуров) – на рисунке 4 выделено жирными линиями. Значение целевой функции равно 16.

Задача поиска контура минимальной длины решается следующим образом. Если известно, что искомым контуром содержит некоторую вершину, то нужно определить кратчайший путь от этой вершины до нее же, применяя описанные выше алгоритмы. Так как в общем случае контур минимальной длины может проходить через любую вершину графа, то находятся контуры минимальной длины, проходящие через каждую вершину, и среди них выбирается кратчайший. Более простым является следующий алгоритм 4: берется первая вершина (в произвольном их упорядочении) графа и рассматривается сеть, в которой эта вершина является одновременно конечной и начальной вершиной. Для этой сети (применением описанного выше алгоритма) ищется путь μ_1 минимальной длины $L(\mu_1)$. Затем первая вершина отбрасывается, и минимальный путь μ_2 ищется для сети, в которой начальной и конечной вершиной является вторая вершина. Затем отбрасывается вторая вершина и т.д. для всех вершин исходного графа, для которых существует контур, проходящий через них и через вершины с большими номерами. Контуром минимальной длины будет контур μ_{min} , длина которого равна $L(\mu_{min}) = \min \{L(\mu_1), L(\mu_2), \dots, L(\mu_n)\}$.

В качестве примера рассмотрим задачу поиска контура минимальной длины в графе, представленном на рисунке 5. Вычисляем:

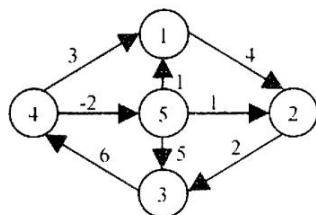


Рис. 5. Поиск кратчайшего контура

$$\mu_1 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1; L(\mu_1) = 11;$$

$$\mu_2 = 2\ 3\ 4\ 5\ 2; L(\mu_2) = 7;$$

$$\mu_3 = 3\ 4\ 5\ 3; L(\mu_3) = 9.$$

$$\text{Находим } \mu_{min} = \mu_2, L(\mu_{min}) = 7.$$

Недостатком предложенного алгоритма является необходимость построения нескольких сетей и поиска кратчайшего пути в каждой из них.

Упражнение 30. Предложите алгоритм, основывающийся на определении потенциалов вершин и не требующий рассмотрения нескольких графов¹.

Задача поиска контура минимальной средней длины заключается в поиске контура, для которого минимально отношение его длины к числу содержащихся в нем дуг. Для решения этой задачи используется алгоритм 5:

1. Определяем произвольный контур. Пусть L – длина этого контура, k – число его дуг. Вычисляем $l_{cp} = L / k$ и добавляем $(-l_{cp})$ к длинам l_{ij} всех дуг.

Затем определяем контур отрицательной длины, повторяем шаг 1, и т.д. до тех пор, пока на очередном шаге таких контуров не найдется.

Так как на каждом шаге длины всех дуг изменялись на одно и то же число, то на последнем шаге длина каждой дуги равна $l_{ij} - \eta$, где η – суммарное изменение длины каждой дуги на всех шагах.

Значение η равно минимальной средней длине дуг контуров графа. При этом контуром минимальной средней длины является контур, определенный на предпоследнем шаге.

Упражнение 31. Обоснуйте алгоритм 5.

Путь максимальной эффективности. Пусть задана сеть, в которой для каждой дуги $(i; j)$ определены два числа $(\mathcal{E}_{ij}; S_{ij})$, интерпретируемые как эффект при осуществлении соответствующей операции – \mathcal{E}_{ij} и затраты на эту операцию – S_{ij} . Эффективность $K(\mu)$ пути μ определяется как отношение его эффекта $\mathcal{E}(\mu) = \sum_{\mu} \mathcal{E}_{ij}$ к

затратам $S(\mu) = \sum_{\mu} s_{ij}$, то есть $K(\mu) = \mathcal{E}(\mu) / S(\mu)$. Задача заключа-

ется в поиске пути μ^* максимальной эффективности: $K(\mu) \rightarrow \max$.

Если решение $K^* = K(\mu^*)$ этой задачи известно, то по определению K^* выполнено:

$$(8) \mathcal{E}(\mu) - K^* S(\mu) \leq 0 \quad \forall \mu$$

Следовательно, задача свелась к поиску минимального значения K^* , для которого имеет место (8). Другими словами, необходи-

¹ Следует отметить, что на сегодняшний день такого алгоритма авторам неизвестно.

мо найти минимальное K^* , такое, что все пути (длина которых определяется как $l_{ij}(K^*) = \mathcal{E}_{ij} - K^* S_{ij}$) в сети имеют неположительную длину (неравенство (8) должно выполняться, в том числе, и для пути максимальной длины).

Алгоритм 6. 1) Положим $K^* = 0$. Находим путь μ_1 максимальной длины. Положим $K_1 = \mathcal{E}(\mu_1) / S(\mu_1)$ (заметим, что при $K = K_1$ длина пути $\mu(K_1)$ равна нулю).

2) Находим максимальный путь μ_2 при $K = K_1$. Если длина пути μ_2 , которую мы обозначим $L(K_1)$, равна нулю, то задача решена. Если $L(K_1) > 0$, то вычисляем $K_2 = \mathcal{E}(\mu_2) / S(\mu_2)$ и находим максимальный путь μ_2 при $K = K_2$ и т.д.

Упражнение 32. Докажите, что в результате применения алгоритма 6 за конечное число шагов будет получен путь максимальной эффективности.

Путь максимальной эффективности с учетом штрафов. Пусть для каждой дуги $(n + 1)$ -вершинной сети заданы два числа: эффект \mathcal{E}_{ij} и время t_{ij} . Каждый путь μ из начальной вершины в конечную вершину характеризует некоторый процесс (проект). Под продолжительностью пути будем понимать сумму времен его дуг. Если продолжительность процесса отличается от заданного времени T , то налагаются штрафы $\chi(\mu)$, пропорциональные отклонению,

то есть: $\chi(\mu) = \begin{cases} \alpha(T - T(\mu)), & T(\mu) \leq T \\ \beta(T(\mu) - T), & T \leq T(\mu) \end{cases}$, где коэффициенты α и β

могут быть как положительными, так и отрицательными.

Задача заключается в том, чтобы найти путь μ^* , максимизирующий разность между эффектом и штрафами, то есть $\mu^* = \arg \max_{\mu} [\mathcal{E}(\mu) - \chi(\mu)]$.

Обозначим $l_{ij}(\lambda) = \mathcal{E}_{ij} - \lambda t_{ij}$, где λ - некоторый параметр, $T(\lambda)$ - продолжительность оптимального пути при параметре λ , то есть пути, имеющего максимальную длину, измеряемую в $l_{ij}(\lambda)$.

Упражнение 33. Докажите, что с ростом λ величина $T(\lambda)$ не возрастает.

Обозначим $T(\alpha)$, $T(\beta)$ - продолжительности оптимального пути при λ равном α (соответственно, β), $\mu(\alpha)$, $\mu(\beta)$ - эти пути (для их нахождения необходимо решить две задачи на поиск пути максимальной длины). Рассмотрим шесть случаев.

Пусть $\alpha \geq \beta$, тогда $T(\beta) \geq T(\alpha)$ и:

- 1) если $T(\beta) \geq T(\alpha) \geq T$, то $\mu(\beta)$ – оптимальное решение;
- 2) если $T \geq T(\beta) \geq T(\alpha)$, то $\mu(\alpha)$ – оптимальное решение;
- 3) если $T(\beta) \geq T \geq T(\alpha)$, то, сравнивая $\mu(\alpha)$ и $\mu(\beta)$ по длинам $l = \sum \chi$, выбираем путь, имеющий максимальную длину.

Упражнение 34. Докажите справедливость утверждений 1-3 (воспользуйтесь тем, что исходную задачу можно разбить на две подзадачи – поиска максимума $\sum(\mu) - \chi(\mu)$ при $T(\mu) \leq T$ и при $T(\mu) \geq T$).

Пусть $\alpha \leq \beta$, тогда $T(\beta) \leq T(\alpha)$ и:

- 4) если $T(\alpha) \geq T(\beta) \geq T$, то $\mu(\beta)$ – оптимальное решение;
- 5) если $T \geq T(\alpha) \geq T(\beta)$, то $\mu(\alpha)$ – оптимальное решение;
- 6) если $T(\alpha) \geq T \geq T(\beta)$, то задача не имеет эффективных методов решения (возможные подходы описаны в [8]).

1.3. Псевдопотенциальные графы

Полный, $(n+1)$ -вершинный, симметричный граф называется *псевдопотенциальным*, если длина его любого гамильтонова контура равна одному и тому же числу. Обозначим ℓ_{ij} , $i, j = \overline{0, n}$ – длины дуг.

Теорема 2 [8]. Для того, чтобы граф был псевдопотенциальным, необходимо и достаточно существование чисел α_i, β_i , $i = \overline{0, n}$, таких, что $\ell_{ij} = \beta_j - \alpha_i$ для всех $i, j = \overline{0, n}$.

Доказательство. Достаточность очевидна, так как длина любого гамильтонова контура $\mu = (0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0)$ равна

$$L(\mu) = \sum_{i=0}^n (\beta_i - \alpha_i).$$

Докажем необходимость. Теорема тривиальна при $n = 1$. Допустим, что теорема справедлива при любом числе вершин, не превосходящем n . Докажем ее для $(n + 1)$ -вершинного графа.

Для n -вершинного графа существуют числа α_i, β_i , $i = \overline{0, n-1}$, такие, что $\ell_{ij} = \beta_j - \alpha_i$ для всех $i, j = \overline{0, n-1}$. Добавим вершину n . Рассмотрим два гамильтоновых контура μ_1 и μ_2 , отличающихся порядком прохождения вершин i, n и j , то есть

$\mu_1 = (0, i_1, i_2, \dots, k, i, n, j, m, \dots, 0)$, $\mu_2 = (0, i_1, i_2, \dots, k, j, n, i, m, \dots, 0)$, где i, j, k и $m, i \neq j \neq n \neq k \neq m$ - произвольные фиксированные вершины.

Пусть для вершины n существуют $2n$ чисел $(\alpha_{n_i}, \beta_{n_i})$, $i = \overline{0, n-1}$, таких, что $l_m = \beta_{n_i} - \alpha_{n_i}$, $l_m = \beta_i - \alpha_{n_i}$. Из условия псевдопотенциальности графа следует, что

$$L(\mu_1) - L(\mu_2) = (\beta_{n_i} - \beta_{n_j}) + (\alpha_{n_i} - \alpha_{n_j}) = 0.$$

Так как последнее неравенство должно выполняться для произвольных i и j , то существуют числа α_n и β_n , такие, что $\alpha_{n_i} = \alpha_n$, $\beta_{n_i} = \beta_n, i = \overline{0, n-1}$. Следовательно, $l_m = \beta_n - \alpha_n, l_m = \beta_i - \alpha_n$.¹

Теорема 3 [8]. Любой подграф псевдопотенциального графа является псевдопотенциальным.

Упражнение 35. Докажите теорему 3.

Будем считать, что $\alpha_0 = 0$. Обозначим $M_j(\mu) = \sum_{k=1}^j (\beta_{i_k} - \alpha_{i_{k-1}})$

- сумма длин первых j дуг гамильтонова контура μ , $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$. Определим $M(\mu) = \max_{1 \leq j \leq n} M_j(\mu)$.

Теорема 4 [8]. Существует оптимальное решение задачи

$$(1) M(\mu) \rightarrow \min_{\mu},$$

в котором сначала идут вершины с $\gamma_i \geq 0$ в порядке возрастания величин β_i , а затем вершины с $\gamma_i \leq 0$ в порядке убывания величин α_i .

Доказательство. Обозначим $M_{min} = \min_{\mu} M(\mu)$, а $\mu = (0, i_1, i_2, \dots, i_m, 0)$ - оптимальный гамильтонов контур (решение задачи (1)). Тогда для него имеет место следующая система неравенств:

¹ Символ «•» здесь и далее обозначает окончание доказательства.

$$(2) \begin{cases} M_{min} \geq \beta_{i_1} \\ M_{min} + \gamma_{i_1} \geq \beta_{i_2} \\ M_{min} + \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} \geq \beta_{i_3} \\ \dots\dots\dots \\ M_{min} + \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_{n-1}} \geq \beta_i \end{cases}$$

Если для некоторого индекса $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено $\gamma_{i_{s-1}} \leq 0$, $\gamma_{i_s} \geq 0$, то из (2) следует справедливость соответствующей системы неравенств для гамильтонова контура $(0, i_1, \dots, i_{s-2}, i_s, i_{s-1}, i_{s-1}, \dots, i_n)$. Поэтому всегда существует оптимальное решение, в котором сначала обходятся вершины с положительными γ , а затем с отрицательными γ (вершину i с $\gamma = 0$ можно отнести в любую группу).

Если $\gamma_{i_{s-1}} \geq 0$, $\gamma_{i_s} \geq 0$ и $\beta_{i_{s-1}} > \beta_{i_s}$, то из (2) следует справедливость соответствующей системы неравенств для гамильтонова контура $(0, i_1, \dots, i_{s-1}, i_s, i_{s-1}, \dots, i_n)$.

Наконец, если $\gamma_{i_{s-1}} \leq 0$, $\gamma_{i_s} \leq 0$ и $\beta_{i_{s-1}} > \beta_{i_s}$, то из (2) следует справедливость соответствующей системы неравенств для гамильтонова контура $(0, i_1, \dots, i_{s-1}, i_s, i_{s-1}, \dots, i_n)$. Докажем, например, последнее утверждение. Из (2) получаем, что

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} \geq \beta_{i_{s-1}} = \alpha_{i_{s-1}} - \gamma_{i_{s-1}},$$

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} + \gamma_{i_{s-1}} \geq \beta_{i_s} = \alpha_{i_s} - \gamma_{i_s}.$$

Но тогда тем более имеет место:

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} + \gamma_{i_{s-1}} \geq \alpha_{i_s}, \text{ так как } \gamma_{i_{s-1}} \leq 0,$$

$$M_{min} + \sum_{j=1}^{s-2} \gamma_{i_j} + \gamma_{i_s} + \gamma_{i_{s-1}} \geq \alpha_{i_s} \geq \alpha_{i_{s-1}}. \bullet$$

Итак, пусть $\mu = (0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0)$ – контур, являющийся решением задачи (1), то есть

$\gamma_{i_j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, s$. причем $\beta_{i_1} \leq \beta_{i_2} \leq \dots \leq \beta_{i_s}$,

$\gamma_{i_j} \leq 0, j = s + 1, \dots, n$. причем $\alpha_{i_{s+1}} \geq \alpha_{i_{s+2}} \geq \dots \geq \alpha_{i_n}$.

Тогда

$$(3) \quad M_{\min} = \max \left[\beta_{i_1}, \max_{1 \leq k \leq n} \left(\beta_{i_k} - \sum_{j=1}^k \gamma_{i_j} \right) \right].$$

Частным случаем псевдопотенциального графа является *потенциальный граф*, у которого длина любого гамильтонова контура равна нулю¹.

Упражнение 36 Докажите, что у потенциального графа длина любого контура равна нулю.

Упражнение 37. Докажите, что для n -вершинного потенциального графа существуют числа $\{\lambda_j\}$, такие, что $l_{ij} = \lambda_j - \lambda_i, i, j = \overline{1, n}$.

Упражнение 38. Докажите, что у потенциального графа для любой вершины сумма длин заходящих дуг по абсолютной величине равна сумме длин исходящих дуг

1.4. Задачи о максимальном потоке

Рассмотрим сеть из $(n + 1)$ вершины. Пусть каждой дуге поставлено в соответствие число c_{ij} , называемое *пропускной способностью* дуги $(i; j)$.

Потоком x в сети называется совокупность чисел $\{x_{ij}\}$, где x_{ij} — поток по дуге $(i; j)$, удовлетворяющих условиям $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}, i, j = \overline{0, n}, \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki}, i \neq 0, n$. *Величиной потока* x называется

$$Q(x) = \sum_i x_{0i} = \sum_i x_{in}.$$

Задача о максимальном потоке заключается в определении потока максимальной величины².

¹ Потенциальный граф может рассматриваться как модель электрической сети, а утверждения упражнений 36-38 как теоретико-графовые аналоги законов Кирхгофа.

² Наиболее распространенной содержательной интерпретацией является перевозка грузов из начальной вершины в конечную по дугам гра-

Разрезом W в сети называется любое множество вершин, обязательно содержащее выход и не содержащее вход. Пропускной способностью $C(W)$ разреза W называется сумма пропускных способностей дуг, заходящих в разрез.

Теорема 5 [8, 36]. Величина любого потока не превышает пропускной способности любого разреза.

Упражнение 39 Докажите теорему 5.

Из теоремы 5 следует, что, если удастся найти поток, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза, то этот поток максимален, а разрез минимален.

Алгоритм 7 (алгоритм Форда-Фалкерсона). Применение алгоритма проиллюстрируем примером сети, приведенной на рисунке 6, в которой пропускные способности всех дуг равны единице.

Шаг 0. Берем произвольный поток (например, поток $x_{01} = x_{12} = x_{25} = 1$). Помечаем начальную вершину индексом «0» (индексы на рисунке 6 приведены в квадратных скобках).

Обозначим Z – множество помеченных вершин.

Общий шаг. Первое действие. Помечаем вершину j индексом $+i$, если, во-первых, существует дуга $(i; j)$, и, во-вторых, $i \in Z$, $x_{ij} < C_{ij}$.

Если в результате этого типа пометок мы поместили выход, то поток можно увеличить хотя бы на единицу (если c_{ij} – целые числа). Двигаясь обратно, можно найти путь, поток по которому можно увеличить. Однако, как видно из примера, этого недостаточно для нахождения максимального потока.

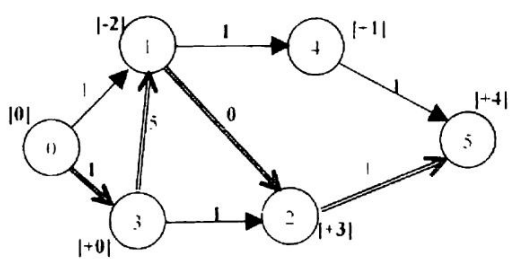


Рис. 6 Поиск максимального потока

фа, где пропускная способность дуги характеризует максимальное количество груза, которое по ней можно перевозить в единицу времени.

Второе действие. Помечаем вершину i индексом $-j$, если, во-первых, существует дуга $(i; j)$, и, во-вторых, $j \in Z$, $x_{ij} > 0$ (легко видеть, что пометки первого типа увеличивают поток по дуге, а пометки второго типа – уменьшают).

Если в результате этого типа пометок мы пометили выход, то поток можно увеличить. Двигаясь обратно, можно найти цепь, в которой каждая вершина помечена номером предыдущей (знак пометки не важен).

Рассмотрим цепь $\mu = (0; 3; 2; 1; 4; 5)$, приведенную на рисунке 6. Полученные в результате второго действия потоки обозначены жирным шрифтом.

Критерий остановки алгоритма дается следующей теоремой.

Теорема 6 [8, 36]. Если, применяя пометки обоих типов, вершину n пометить не удалось, то полученный поток имеет максимальную величину.

Доказательство. Пусть W – множество непомеченных вершин (разрез сети). Обозначим W^- – множество заходящих в разрез W дуг, W^+ – множество выходящих из разреза W дуг. Пропускная способность разреза определится как: $C(W) = \sum_{(i;j) \in W^+} c_{ij}$. Найдем

величину потока: $\Phi = \sum_{(i;j) \in W^-} x_{ij} - \sum_{(i;j) \in W^+} x_{ij}$. Из того, что второе

слагаемое равно нулю и того, что для всех $(i; j) \in W^-$ $x_{ij} = c_{ij}$, следует, что $\sum_{(i;j) \in W^-} x_{ij} = \sum_{(i;j) \in W^-} c_{ij} = C(W)$. Следовательно,

$\Phi = C(W)$. Из теоремы 5 получаем утверждение доказываемой теоремы. •

Поток минимальной стоимости. Предположим, что задана сеть с пропускными способностями дуг c_{ij} . Пусть также для каждой дуги $(i; j)$ заданы число s_{ij} , интерпретируемое как затраты (например, затраты на перевозку единицы груза из вершины i в вершину j). Задача поиска потока минимальной стоимости заключается в нахождении для заданной величины φ суммарного потока ее распределения по дугам, минимизирующего сумму затрат. Общие методы решения задачи о потоке минимальной стоимости рассматриваются в [8, 36].

Частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости является *транспортная задача*, в которой имеется *двудольный граф* (двудольным называется граф, множество вершин которого может быть разбито на два непересекающихся подмножества, причем ребра (дуги) графа соединяют вершины только из разных подмножеств), представленный на рисунке 7: вершины сети разбиты на две группы – m поставщиков и n потребителей.

Упражнение 40 [8, 26]. Докажите теорему Кёнига: граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины (или когда в нем все простые циклы имеют четную длину).

Для поставщиков заданы имеющиеся у них количества единиц товара (груза и т.д.) a_i , $i = \overline{1, m}$, для потребителей – требуемые им количества единиц товара b_i , $i = \overline{1, n}$. Также известны затраты s_{ij} перевозки единицы товара от i -го поставщика j -му потребителю.

Пусть задача является *замкнутой*, то есть $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ - суммарное предложение равно суммарному спросу (вводя фиктивного поставщика или фиктивного потребителя любую незамкнутую задачу можно свести к замкнутой). Требуется определить потоки товаров от поставщиков к потребителям, минимизирующие суммарные затраты.

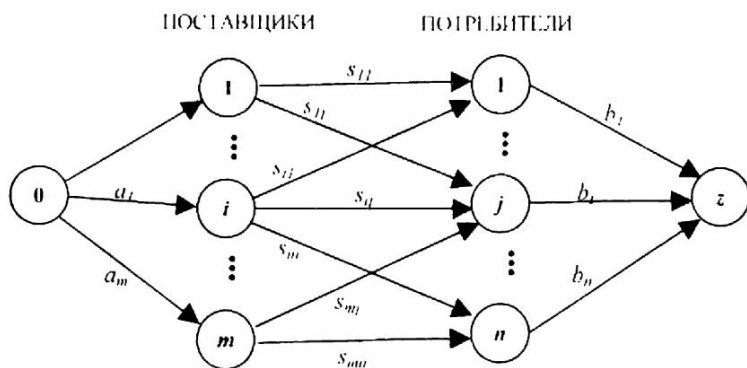


Рис. 7. Транспортная задача

Формально транспортную задачу можно записать в виде:

$$(1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} s_{ij} \rightarrow \min_{\{x_{ij} \geq 0\}}$$

$$(2) \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}$$

$$(3) \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}.$$

Добавляя к двудольному графу вход «0» и выход «z» и соединяя вход и выход с остальными вершинами дугами с потоком $x_{0i} = a_i, i = \overline{1, m}, x_{jz} = b_j, j = \overline{1, n}$, получаем задачу о потоке минимальной стоимости. Алгоритмы решения транспортной и двойственной к ней задач описаны в [8, 20].

Частным случаем транспортной задачи является *задача о назначении*, заключающаяся в следующем: имеются n человек (работников), которые могут выполнять различные работы (занимать различные должности), число работ равно числу работников (вводя фиктивные должности и/или фиктивные работы, всегда можно незамкнутую задачу привести к рассматриваемой замкнутой форме). Известны затраты s_{ij} на назначение i -го работника на j -ю должность (например, минимальная зарплата, за которую он согласится работать на этой должности). Требуется найти назначение работников на должности (каждого работника на одну и только одну должность), минимизирующее суммарные затраты (если s_{ij} интерпретируется как эффективность от работы i -го работника на j -ой должности, то оптимальное назначение должно максимизировать суммарную эффективность).

Формально задачу о назначении можно записать в виде (ср. с (1)-(3)):

$$(4) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} s_{ij} \rightarrow \min_{\{x_{ij} \in \{0; 1\}\}}$$

$$(5) \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$$

$$(6) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}.$$

Известны множество методов решения задачи о назначении [8, 20]. Рассмотрим один из них на следующем примере.

Пусть имеются $n = 3$ работника и столько же работ. Матрица затрат имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Алгоритм 8.

Шаг 0. Назначаем каждого человека на самую дешевую для него работу (назначение выделено на рисунке 8 тонкими дугами), то

есть положим $x_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } s_{ij} = \min_k s_{ik} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$. Если при этом назна-

чение является допустимым (то есть все работы выполняются), то решение получено. Если имеется «дисбаланс», то есть не все работы

выполняются ($\exists j_i: \sum_{i=1}^n x_{ij_i}^0 > 1$), то переходим к следующему шагу.

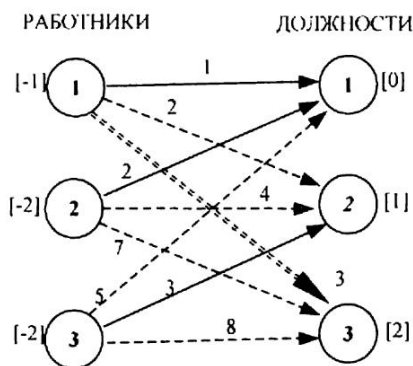


Рис. 8. Задача о назначении

Шаг k . Введем два подмножества множества дуг: $P_1 = \{(i; j) \mid x_{ij} = 1\}$, $P_2 = \{(i; j) \mid x_{ij} = 0\}$. Примем множество вершин-работ, на которых назначено несколько работников за вход сети, множество

вершин-работ, которые не выполняются – за выход сети. Изменим направления дуг из множества P_1 на обратные и примем их длины равными $(-s_{ij})$, длины дуг из множества P_2 примем равными s . Найдем путь μ^k минимальной длины в полученной сети (потенциалы вершин, вычисляемые при нахождении кратчайшего пути в рассматриваемом примере, приведены в квадратных скобках)

Далее полагаем $x_{ij}^k = \begin{cases} x_{ij}^{k-1}, & \text{если } (i; j) \notin \mu^k \\ 1 - x_{ij}^{k-1}, & \text{если } (i; j) \in \mu^k \end{cases}$.

В результате в рассматриваемом примере за один шаг получим оптимальное назначение, отличающееся от найденного на нулевом шаге тем, что первому работнику назначается третья работа (см. дугу, обозначенную двойными линиями на рисунке 8).

На каждом шаге число «дисбалансов» уменьшается на единицу. Следовательно, число шагов алгоритма не превышает числа «дисбалансов», которое конечно.

Упражнение 41 [8]. Докажите, что алгоритм 8 дает оптимальное решение.

Аналогичным способом можно решить любую транспортную задачу (искать кратчайший путь из множества вершин, в которые доставили товара больше, чем требуется, во множество вершин, где товара не хватает) [8].

Решение общего случая задачи о потоке минимальной стоимости основывается на рассмотрении двойственной задачи [8, 37].

1.5. Задачи сетевого планирования и управления

Рассмотрим *проект*, состоящий из набора *операций* (работ). Технологическая зависимость между операциями задается в виде сети (*сетевого графика*). При этом дуги сети соответствуют операциям, а вершины событиям (моментам окончания одной или нескольких операций). Для каждой операции $(i; j)$ задана ее продолжительность t_{ij} . Методы описания и исследования сетевых графиков изучаются в теории календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) [15, 21, 22, 24, 35].

Задача определения продолжительности проекта (управление временем). Легко видеть, что продолжительность проекта определяется путем максимальной длины, называемым *критичес-*

ким путем. Методы поиска пути максимальной длины описаны выше. Критический путь в сети на рисунке 9 выделен двойными дугами и равен 16.

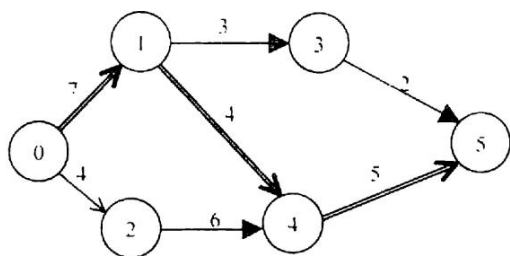


Рис. 9. Поиск критического пути

Операции, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Остальные (некритические) операции имеют *резерв времени*, характеризуемый максимальной задержкой операции, при которой продолжительность проекта не изменяется. Критические операции имеют нулевой резерв. Приведем соответствующие формулы.

Алгоритм 9. Предположим, что выполнение комплекса операций (проекта) начинается в нулевой момент времени. Обозначим Q_0 – множество событий, не требующих выполнения ни одной из операций, то есть входы сети; Q_i – множество событий, непосредственно предшествующих событию i , то есть множество вершин j сети, для которых существует дуга $(j; i)$.

Положим $t_i^- = t_0$, $j \in Q_0$, $t_i^- = \max_{j \in Q_i} (t_j^- + t_{ij})$, $j \in Q_i$. Величина

t_i^- называется *ранним моментом (временем) свершения* i -го события и характеризует время, раньше которого это событие произойти не может. *Длина критического пути* $T = \max_i t_i^-$ определяется ранним временем свершения конечного события, то есть события, заключающегося в завершении всех операций.

Поздним моментом t_i^+ *свершения события* называется максимальное время его наступления, не изменяющее продолжительности проекта. Обозначим R_i – множество событий, непосредственно

следующих за событием i , то есть множество вершин j сети, для которых существует дуга $(i; j)$. Вычислим для каждой вершины-события i длину l_i максимального пути от этой вершины до выхода сети – события, заключающегося в завершении всего комплекса операций: $l_i = \max_{j \in R_i} (l_j + t_{ij})$. Положим $t_i^+ = T - l_i$, $i = \overline{1, n}$.

Упражнение 42. Докажите, что для завершения проекта за время T необходимо и достаточно, чтобы событие i произошло не позднее момента t_i^+ , $i = \overline{1, n}$.

Полным резервом Δ_i события i называется разность между его поздним и ранним моментами свершения, то есть $\Delta_i = t_i^+ - t_i^-$, $i = \overline{1, n}$.

Задачи распределения ресурса на сетях удобно рассматривать, изображая операции вершинами сети, а события (зависимости) – дугами (представления «операции-дуги, события-вершины» и «зависимости-дуги, операции-вершины» эквивалентны [15]). Пунктиром могут быть отражены ресурсные зависимости – когда для выполнения одних и тех же операций должны быть использованы одни и те же ресурсы. Примером могут являться сети, изображенные на рисунках 9 и 10. *Полным резервом операции* $(i; j)$ называется величина $\Delta_{ij} = t_j^+ - t_i^- - t_{ij}$.

Упражнение 43 [8, 15, 24]. Получите выражения для моментов позднего начала и раннего окончания, а также резервов операций при представлении проекта в виде «операции-вершины».

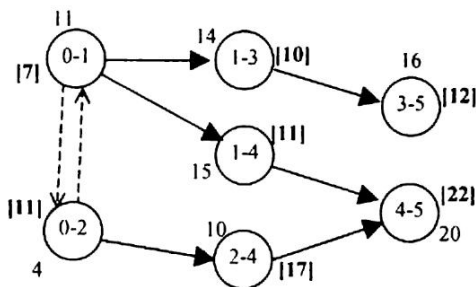


Рис. 10. Представление «операции-вершины» для сети рисунка 9

Для определения оптимального распределения ресурса необходимо найти критические пути для каждого из вариантов распределения ресурса и сравнить длины этих путей (в сети, приведенной на рисунке 10, существует общий для операций «0-1» и «0-2» ресурс; потенциалы вершин, соответствующие различным способам использования этого ресурса – сначала выполняется операция «0-1», затем «0-2» и наоборот, приведены на рисунке 10 соответственно в квадратных скобках и без скобок).

Универсальных эффективных точных методов решения задач распределения ресурсов на сетях не существует. В качестве частного случая, для которого существует простой алгоритм, приведем следующий пример.

В сети, изображенной на рисунке 11, для трех операций известны длины критических путей τ_i (от них через некоторую сеть до конечной вершины). Требуется определить очередность выполнения этих трех операций при условии, что все операции выполняются одной единицей ресурса и поэтому не могут выполняться одновременно.

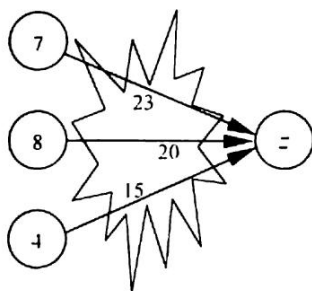


Рис. 11. Пример распределения ресурса

Упражнение 44 [8, 15]. Докажите, что в рассматриваемом примере оптимально выполнять первой операцию с максимальным τ_i .

Если для выполнения проекта выделено ограниченное количество ресурса, то возникает задача наилучшего его использования. Обозначим v_i – объем i -ой операции, $f_i(v_i)$ – скорость ее выполнения в зависимости от количества ресурса v_i . Предположим, что $f_i(\cdot)$ – непрерывная справа неубывающая функция, причем $f_i(0) = 0$. Если $v_i(t)$ – количество ресурса на i -ой операции в момент времени t , то

момент t_i ее окончания определяется как минимальное время, удовлетворяющее уравнению:

$$(1) \int_0^{t_i} f_i(v_i(t)) dt = w_i.$$

Если количество ресурса, используемое при выполнении некоторой операции, не изменяется во времени, то говорят, что она выполняется с *постоянной интенсивностью*. Тогда продолжительность операции определяется выражением

$$(2) t_i(v_i) = w_i \cdot f_i(v_i).$$

В настоящее время обших алгоритмов поиска распределения ограниченных ресурсов между операциями, минимизирующего время завершения проекта, не существует. Поэтому рассмотрим несколько частных случаев.

Пусть все операции независимы и выполняются ресурсом одного вида, количество которого равно R , а $f_i(v_i)$ – непрерывные строго монотонные вогнутые функции.

Теорема 7 [8, 15]. Существует оптимальное решение, в котором каждая операция выполняется с постоянной интенсивностью и все операции заканчиваются одновременно в момент времени T , определяемый как минимальное время, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$(3) \sum_{i=1}^n f_i^{-1}\left(\frac{w_i}{T}\right) \leq R.$$

где $f_i^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции $f_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$.

Упражнение 45 [8, 15]. Докажите теорему 7.

Эвристические алгоритмы определения оптимального распределения ресурса для ряда случаев «невогнутых» функций интенсивности рассматриваются во второй главе.

Обширный класс задач КСПУ составляют *задачи агрегирования* – представления комплекса операций (проекта) в виде одной операции и наследования свойств таких представлений, для которых оптимизация в рамках агрегированного описания дает решение, оптимальное для исходного (детального) описания. Основные подходы к постановке и решению задач агрегирования рассматриваются на примере ряда прикладных задач во второй главе (см. раздел 2.2).

1.6. Паросочетания.

Независимые и доминирующие множества

Материал этого параграфа связан с проблемой выделения из множества ребер и вершин конечного графа множества с определенными свойствами (паросочетания, независимые множества, покрытия и т.д.). Эти понятия используются при решении многих прикладных задач (размещение объектов, перевозка грузов, формирование комиссий и др.).

Паросочетаниями графа называется множество ребер W , такое что никакие два ребра не имеют общей вершины.

С точки зрения приложений наиболее интересно паросочетание двудольного графа. В частности, рассмотренную выше задачу назначения (см. п. 1.4) можно сформулировать как задачу определения максимального взвешенного паросочетания двудольного графа (то есть паросочетания с максимальной суммой длин дуг, если длина дуги отражает эффективность работы на соответствующей должности).

Интересный класс комбинаторных задач составляют так называемые задачи о покрытии [33].

Реберным покрытием графа называется множество ребер D , такое, что каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру.

Задача о покрытии с минимальной (или максимальной) суммой длин дуг, возникающая в задачах доставки грузов, проектирования схем и пр., формулируется аналогично задаче определения минимального или максимального паросочетания. Между этими задачами довольно тесная связь. Так если длины всех ребер равны 1, то решение задачи о максимальном паросочетании позволяет получить решение задачи о минимальном паросочетании и наоборот. Достаточно к максимальному паросочетанию добавить ребра в каждой вершине, которая не покрыта и наоборот, если мы нашли минимальное покрытие, то чтобы получить максимальное паросочетание достаточно удалить все ребра, инцидентные одной вершине, кроме одного.

Упражнение 46. Докажите этот факт.

Рассмотрим теперь кратко понятия независимости и доминирования.

Внутренне устойчивым (независимым) называется множество A вершин графа, такое что никакие две вершины не смежны.

Часто встречаются задачи нахождения наибольшего внутренне устойчивого множества, то есть внутренне устойчивого множества с

максимальным числом вершин. Это число называется *числом внутренней устойчивости* (вершинной независимости). Если приписать каждой вершине некоторый вес, то получаем задачу определения максимального взвешенного внутренне устойчивого множества.

Внутренне устойчивым (доминирующим) называется множество V вершин графа, такое что каждая вершина, не принадлежащая V , смежна хотя бы с одной вершиной в V .

Упражнение 47. Докажите, что максимальное внутренне устойчивое множество является внешне устойчивым.

Задача, часто встречающаяся в приложениях, заключается в определении минимального внешне устойчивого множества (минимального взвешенного внешне устойчивого множества).

Упражнение 48. Докажите, что число вершин в наибольшем внутренне устойчивом множестве не меньше, чем число вершин в наименьшем внешне устойчивом множестве.

Задачи нахождения наибольшего внутренне устойчивого множества или наименьшего внешне устойчивого множества относятся к трудным комбинаторным задачам.

Введем еще одно понятие, также связанное с предыдущими.

Вершинным покрытием графа называется множество вершин S , такое что каждое ребро инцидентно, по крайней мере, одной вершине в S .

Соответственно возникает задача определения минимального вершинного покрытия (или минимального взвешенного вершинного покрытия). Заметим, что если S^* – минимальное вершинное покрытие, то дополняющее множество $A^* = X \setminus S^*$ является максимальным внутренне устойчивым множеством. И наоборот, если A^* – максимальное внутренне устойчивое множество, то $S^* = X \setminus A^*$ является минимальным вершинным покрытием.

Упражнение 49. Верен ли вышеприведенный факт для максимального взвешенного внутренне устойчивого множества и минимального взвешенного вершинного покрытия?

Упражнение 50. Предложите содержательные задачи, решение которых сводится к определению максимального (минимального) взвешенного внутренне устойчивого множества, внешне устойчивого множества, паросочетания, реберного покрытия, вершинного покрытия.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

В первой главе введены основные понятия теории графов, описаны ее базовые задачи и методы их решения. В настоящей главе рассматриваются приложения теоретических результатов к задачам управления организационными системами (связь между результатами первой и второй главы иллюстрируется на рисунке 1 во введении), решаемыми в теории активных систем¹. Изложение материала всех нижеследующих разделов ведется таким образом, чтобы читатель имел возможность знакомиться с ними независимо.

2.1. Метод «затраты-эффект»²

В управлении проектами, при реформировании и реструктуризации предприятий и т.д., возникает необходимость определения набора мероприятий (проектов), реализация которых позволит достичь максимального эффекта при существующих ограничениях. Рассмотрим метод «затраты-эффект» на следующем примере [1].

Пусть определена совокупность возможных мероприятий, данные о которых приведены в таблице 2.

Табл. 2.

Мероприятие №	Затраты S	Эффект Q	Эффективность $\Xi = Q/S$
1	40	80	2
2	100	300	3
3	50	50	1
4	60	240	4

¹ В качестве базового учебного пособия по теории активных систем можно использовать [30].

² Изложение материала настоящего раздела базируется, в основном, на работе [1].

Изменим номера мероприятий так, чтобы самое эффективное мероприятие получило номер 1, следующее за ним – номер 2 и т.д. При новой нумерации строим таблицу 3, в которой помимо затрат и эффекта по каждому мероприятию добавляются столбцы, в которых определяются затраты и эффект нарастающим итогом.

Табл. 3

Мероприятие №	Затраты S	Эффект Q	Затраты нарастающим итогом	Эффект нарастающим итогом
1	60	240	60	240
2	100	300	160	540
3	40	80	200	620
4	50	50	250	670

Таблица затрат и эффекта нарастающим итогом, в которой мероприятия пронумерованы в порядке убывания эффективности, отражает зависимость «затраты-эффект». График этой зависимости приведен на рисунке 13. Эта зависимость имеет замечательное свойство - она определяет максимальный эффект по данному критерию, который можно получить от заданного множества мероприятий при заданной величине финансирования. Фактический эффект может быть меньше за счет дискретности мероприятий. Действительно, если имеется 140 единиц финансовых ресурсов, то нельзя реализовать первые два мероприятия, требующие 160 единиц ресурса. Оптимальный вариант – реализовать второе и третье мероприятия, что дает суммарный эффект 380 единиц, что меньше, чем получается по зависимости рисунка 13 – эффект 480 единиц. Конечно, если бы каждое мероприятие можно было реализовать частично, с пропорциональным уменьшением и затрат, и эффекта, то зависимость рисунка соответствовала бы реальному эффекту при любом уровне затрат.

Для построения реальной зависимости «затраты-эффект» необходимо решить задачу о ранце (см. раздел 1.2), задавая различные уровни финансирования R :

$$240x_1 + 300x_2 + 80x_3 + 50x_4 \rightarrow \max$$

при ограничении $60x_1 + 100x_2 + 40x_3 + 50x_4 \leq R$.

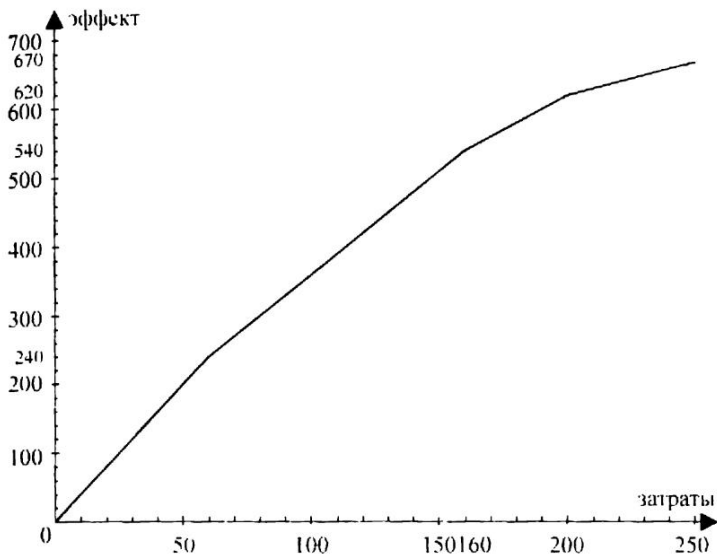


Рис. 13. Зависимость «затраты-эффект»

Для решения этой задачи при различных значениях R эффективным является метод динамического программирования (см. раздел 1.2). Для применения метода предварительно строим на плоскости систему координат, одна ось которой соответствует мероприятиям, а вторая – объему финансирования (см. рисунок 14, ср. с рисунком 4). По оси мероприятий отмечаем номера мероприятий – 1, 2, 3, 4. Из начала координат проводим две дуги – одна горизонтальная, в точку $(1,0)$, а другая – в точку $(1,60)$, где 60 – объем финансирования первого мероприятия. Первая дуга соответствует случаю, когда первое мероприятие не финансируется, а вторая, – когда оно финансируется. Из каждой полученной точки $((1,0)$ и $(1,60))$ проводим также по две дуги, для второго мероприятия. Получаем уже четыре точки – $(2,0)$, $(2,60)$, $(2,100)$ и $(2,160)$, соответствующие четырем возможным вариантам для двух первых мероприятий (если бы оба мероприятия требовали одинакового финансирования, то мы получили бы три точки). Продолжая таким же образом, получаем сеть, приведенную на рисунке 14. Очевидно, что любой путь в сети из начальной вершины $(0,0)$ в конечные вершины соответствует некоторому набору мероприятий. И наоборот,

рот. любому набору мероприятий соответствует вполне определенный путь в сети, соединяющий начальную вершину с конечной.

Значение координаты по второй оси равно объему финансирования соответствующего набора мероприятий (или пакета проектов). Примем длины горизонтальных дуг равными 0, а длины наклонных – эффектам от соответствующих мероприятий. В этом случае длина пути, соединяющего начальную вершину с одной из конечных, будет равна суммарному эффекту от соответствующего этому пути множества мероприятий. Следовательно, путь максимальной длины, соединяющий начало координат и точку $(4, S)$ будет соответствовать множеству мероприятий, дающему максимальный эффект среди всех множеств мероприятий, требующих совокупного финансирования ровно S единиц. Таким образом, мы получаем оптимальные наборы мероприятий при любых объемах финансирования.

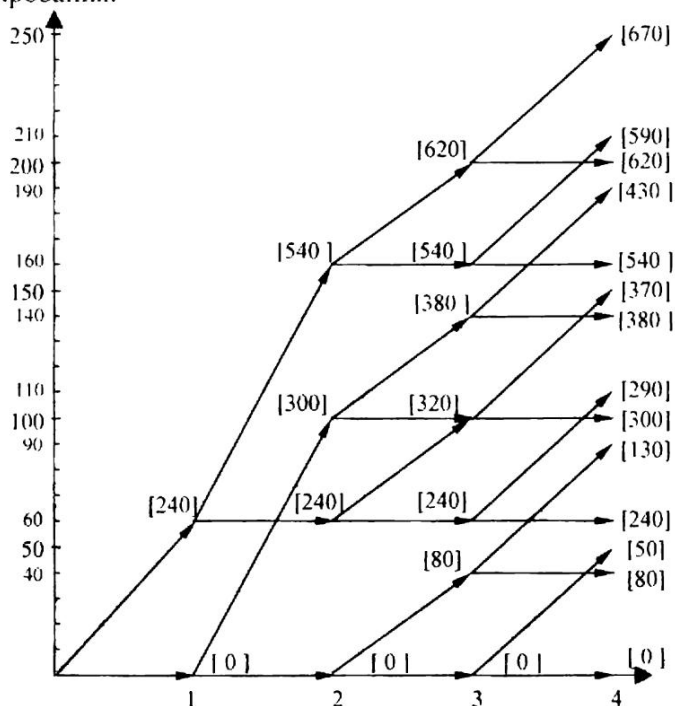


Рис. 14.

Анализируя приведенные решения (рисунок 14), можно заметить любопытный парадокс. При финансировании, например, в объеме 100 единиц, мы получаем эффект в 300 единиц, а при увеличении объема финансирования на 10 эффект составляет всего 290 единиц, то есть на 10 единиц меньше. Аналогичная картина наблюдается при сравнении эффектов при объемах финансирования 200 и 210 единиц, 140 и 150 и т.д. Парадокс в том, что, если задать вопрос, в каком случае будет больший эффект – при финансировании в 100 или в 110 единиц, то любой здравомыслящий человек скажет, что чем больше объем финансирования, тем больше эффект, естественно, при оптимальном наборе мероприятий. Этот парадокс возникает из-за дискретности задачи. Понятно, что варианты, нарушающие монотонность (парадоксальные варианты) мы не должны рассматривать. Полученные значения максимального эффекта при различных объемах финансирования выпишем в таблицу 4.

Табл. 4.

Объем финансирования	40	60	100	140	160	200	250
Эффект	80	240	300	380	540	620	670

График этой зависимости приведен на рисунке 15. На этом же рисунке тонкой линией показан прежний график «затраты-эффект» (см. рисунок 13).

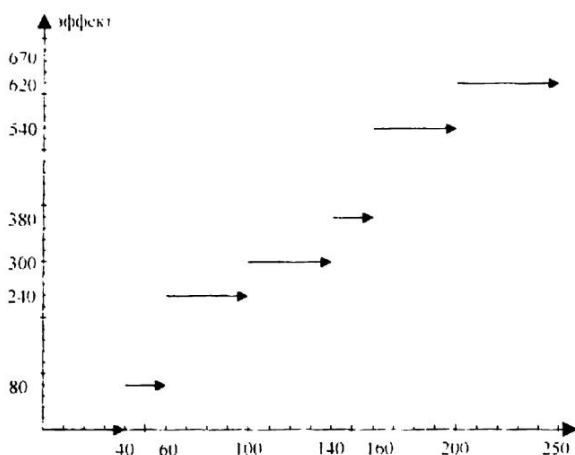


Рис. 15.

Имея зависимость «затраты-эффект», можно решать и задачи привлечения дополнительных финансовых ресурсов, в частности, взятия кредита. Пусть, например, имеется 90 единиц ресурса, а кредит можно взять под 300%. Какой величины кредит взять, чтобы получить максимальный финансовый результат?

Из графика на рисунке 15 видно, что рассмотреть следует 4 варианта – взять кредит 10, 70, 110 или 160 единиц. При взятии кредита в размере 10 единиц дополнительный эффект составит $300 - 240 = 60$ единиц, то есть эффективность равна 600%, что выше, чем ставка кредита. Это значит, что брать кредит целесообразно. Если взять кредит в размере 70 единиц, то дополнительный эффект составит $540 - 240 = 300$ единиц, что дает эффективность 430%, что также больше ставки кредита. При кредите в 110 единиц дополнительный эффект составит $620 - 240 = 380$ единиц, что дает эффективность 345%, то есть больше, чем ставка кредита. Наконец, при кредите в 160 единиц дополнительный эффект составит $670 - 240 = 430$ единиц, что дает эффективность 281%, то есть ниже ставки кредита. Таким образом оптимальная величина кредита равна 70 единиц, что дает эффект 540 единиц и, за вычетом процентов за кредит $540 - 370 = 170$ единиц.

Зависимость «затраты-эффект» характеризует потенциал рассматриваемого проекта (предприятия и т.д.) по соответствующему критерию. Зная эту зависимость, можно определить минимальный уровень финансирования, достаточный для достижения поставленных целей. И наоборот, при ограниченных финансах определяется максимальный уровень, который можно достичь по данному критерию. Так, например, если поставлена цель обеспечить по данному критерию эффект в 600 единиц, то при заданном множестве мероприятий для этого потребуется не менее 200 единиц финансовых ресурсов (из графика видно, что эффект составит 620 единиц, но при уменьшении финансирования он сразу падает до 540, то есть поставленная цель не достигается). Если же имеется всего 150 единиц финансовых ресурсов, то максимальный уровень эффекта, который можно достичь, составит 380 единиц (причем достаточно для достижения цели всего 140 единиц ресурса).

2.2. Методы агрегирования в управлении проектами¹

Основной задачей в управлении проектами является задача формирования плана реализации проекта или задача календарно-сетевое планирование и управления (КСПУ). Как правило, эта задача связана с распределением ограниченных ресурсов по операциям проекта. Поэтому задачу КСПУ часто называют задачей оптимального распределения ресурсов в проекте (комплексе операций). Отметим, что эта задача в общем случае относится к сложным многоэкстремальным или комбинаторным задачам оптимизации. Точные эффективные методы получены только для небольшого числа частных постановок или для задач небольшой размерности. Поэтому для решения реальных задач КСПУ развиваются два подхода.

Первый подход основан на использовании эвристических алгоритмов. Первая группа эвристических алгоритмов использует некоторые правила приоритетности операций при возникновении конфликтной ситуации, связанной с ограниченностью ресурсов. Вторая группа эвристических алгоритмов использует идею локальной оптимизации, то есть улучшения некоторого начального решения. Подход, описываемый ниже, основан на идее *агрегирования*, то есть уменьшения числа операций проекта путем замены нескольких операций (подпроектов) одной операцией. Полученный агрегированный проект, как правило, допускает более эффективные методы решения (в силу меньшей размерности). Полученное агрегированное решение затем дезагрегируется в календарный план исходного проекта.

Метод агрегирования естественным путем вписывается в иерархическую организационную структуру системы управления проектом. Действительно, на верхнем уровне решения принимаются руководителем всего проекта на основе агрегированных описаний, а на нижних уровнях - руководителями подпроектов.

Проект обычно представляют как множество операций (комплекс операций). Операция - процесс, требующий затрат времени и ресурсов. Для формального описания операции необходимо задать ее объем W и зависимость скорости (интенсивности) операции от

¹ Изложение материала настоящего раздела базируется, в основном, на работах [2, 13, 15].

количества ресурсов, ее выполняющих. Будем обозначать эту зависимость $w = f(u(t))$, где $u(t)$ - вектор ресурсов в операции в момент t .

Пусть t_n - момент начала операции, а t_m - момент ее окончания.

Тогда объем операции удовлетворяет условию
$$W = \int_{t_n}^{t_m} f[u(t)] dt.$$

Как правило, ресурсы участвуют в операции в определенных соотношениях, называемых набором ресурсов. Набор ресурсов можно представить в виде $u_j = \beta_j v_j$, $j = \overline{1, m}$, где m - количество видов ресурсов, v_j - интенсивность набора, β_j - количество ресурса j -го вида на единицу мощности набора.

В качестве величины интенсивности набора, как правило, берется вид ресурса, который является основным (определяющим). Например, количество людей, выполняющих работу, определяет требуемое количество материалов, инструмента, рабочей одежды и т.д. Для определяющего ресурса, очевидно, $\beta_j = 1$. Ограничение на ресурсы теперь можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n \beta_{ij} u_i(t) \leq N_j(t), \quad j = \overline{1, m},$$

где $N_j(t)$ - количество ресурсов j -го вида в момент t .

Ограничения на ресурсы часто связаны с ограниченностью финансов. Если обозначить c_j - стоимость единицы ресурсов j -го вида в единицу времени, а $S(t)$ - объем финансирования в момент t , то ограничения, связанные с финансированием, принимают вид

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_j \beta_{ij} v_i(t) \leq S(t).$$

Это - ограничения типа мощности. Если ограничены средства Q , выделенные на проект, то получаем ограничения типа затрат:

$$\sum_{i=1}^n S_i \leq Q, \quad \text{где } S_i = \sum_{j=1}^m c_j \int_{t_n}^{t_m} v_i(t) dt.$$

Наконец, если задан график $Q(t)$ поступления ресурсов на проект (график финансирования проекта), то получаем следующие

ограничения на ресурсы:
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_j \beta_{ij} \int_0^1 v_i(\tau) d\tau \leq Q(t).$$

Задача оптимального распределения ресурсов (задача календарного планирования) заключается в определении распределения ресурсов $\bar{v}(t) = \{v_i(t)\}$ такого, что все операции комплекса выполняются за минимальное время (задача оптимального быстрогодействия), либо потери, связанные с задержкой времени реализации комплекса или ряда его операций, минимальны (минимизация упущенной выгоды). Критерий минимизации упущенной выгоды

обычно рассматривается в виде:
$$\Phi = \sum_{i=1}^n q_i (t_i - d_i), \quad t_i \geq d_i,$$
 где d_i -

желательный срок завершения i -ой операции, q_i - потери в единицу времени при завершении i -ой операции позже d_i , $i = \overline{1, n}$. Заметим, что в настоящее время в условиях дефицита финансовых средств, насыщенности рынка и материальных, и трудовых ресурсов, ограничивающим фактором являются финансовые ресурсы. Это позволяет рассматривать задачи календарного планирования, как задачи распределения ресурсов одного вида (финансовых ресурсов). Такой подход тем более обоснован, поскольку он позволяет сконцентрировать внимание именно на особенностях решения задач календарного планирования на основе агрегирования. Поэтому в дальнейшем, если это не оговорено особо, будем считать, что все операции выполняются ресурсами одного вида (финансовыми ресурсами).

Будем обозначать далее $u_i(t) = \sum_{j=1}^m c_j \beta_{ij} v_j(t)$ количество финансо-

вых ресурсов на i -ой операции в момент t и, соответственно, $f^i(u)$ - скорость i -ой операции в зависимости от количества ресурсов.

Модель операции. Для решения задач календарного планирования необходимо, в первую очередь, получить описание всех операций, то есть определить объем каждой операции и зависимость $f^i(u)$ скорости операции от количества ресурсов. Дело в том, что на практике, как правило, известны продолжительности операций при различных количествах ресурса на ней, то есть зависимость

ти $\tau(v)$. Если операции выполняются с фиксированным уровнем ресурсов (v принимает только одно значение) или с постоянным уровнем ресурсов (количество ресурсов в процессе выполнения операции не меняется), то проблем не возникает. Действительно, в

этом случае $\tau(v) = \frac{W}{f(v)}$ или $f(v) = \frac{W}{\tau(v)}$, и скорость операции

определяется с точностью до параметра W (при известной зависимости $\tau(v)$ объем W может выбираться произвольно). Ситуация становится сложнее, если операция выполняется с переменным уровнем ресурсов.

Рассмотрим задачу выбора объемов частей операции в общем случае. Пусть операция состоит из n частей, каждая из которых может выполняться при m различных уровнях ресурсов. Обозначим τ_{ij} - продолжительность i -ой части при j -ом уровне ресурсов, y_i - объем i -ой части операции, Q_j - продолжительность операции при j -м уровне ресурсов. Обозначим далее $x_{ij} = 1$, если i -ая операция выполняется j -ом уровнем ресурсов, $x_{ij} = 0$ в другом случае. Тогда продолжительность операции определяется на основе ее описания (то есть на основе объемов частей $\{y_i\}$ и продолжительностей $\{Q_j\}$) и будет равна

$$(1) \quad Q = \sum_{i,j} y_i Q_j x_{ij}.$$

а истинная продолжительность

$$(2) \quad T = \sum_{i,j} x_{ij} \tau_{ij}.$$

Относительная ошибка описания операции составит

$$(3) \quad \delta = \left| 1 - \frac{Q}{T} \right|.$$

Поставим задачу определить объемы частей $\{y_i\}$ и продолжительности $\{Q_j\}$ так, чтобы ошибка δ была минимальной. Очевидно, что если существуют числа $\{y_i\}$ такие, что $\tau_{ij} = y_i T_j$, где $T_j = \sum_i \tau_{ij}$.

то ошибка $\delta = 0$. Запишем условие (3) в виде

$$(4) \quad -\delta \leq 1 - \frac{Q}{T} \leq \delta, \quad (1 - \delta)T \leq Q \leq (1 + \delta)T.$$

Условия (4) можно представить в виде двух неравенств:

$$\sum_i \min_j ((1 + \delta)\tau_{ij} - y_i Q_j) \geq 0, \quad \sum_i \min_j (y_i Q_j - (1 - \delta)\tau_{ij}) \geq 0.$$

Наконец, введя новые переменные:

$$u_i = \min_j ((1 + \delta)\tau_{ij} - y_i Q_j), \quad v_i = \min_j (y_i Q_j - (1 - \delta)\tau_{ij}),$$

приведем задачу к следующему виду:

$$(5) \quad \delta \rightarrow \min.$$

$$\sum_i u_i \geq 0.$$

$$\sum_i v_i \geq 0.$$

$$u_i = (1 + \delta)\tau_{ij} - y_i Q_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$v_i = y_i Q_j - (1 - \delta)\tau_{ij} \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Задача (5) является задачей нелинейного программирования. Если зафиксировать $\{y_i\}$ или $\{Q_j\}$, то она становится задачей линейного программирования. Поэтому задачу (5) можно решать как последовательность задач линейного программирования, фиксируя сначала значения $\{Q_j\}$ (например, взяв $Q_j = \sum_i \tau_{ij}$, $j = \overline{1, m}$), а

затем $\{y_i\}$ и т.д.

Заметим, что в ряде случаев величины $\{Q_j\}$ выбираются из других соображений. Так, например, если мы хотим получить описание операции с линейной зависимостью скорости операции от количества ресурсов, то есть $f(w) = u = w/Q_j$, то в этом случае $Q_j = w/u$, где u - количество ресурсов, соответствующее j -му уровню. Если принять $W = 1$, то $Q_j = 1/u$ становится известным и задача (5) является задачей линейного программирования.

Рассмотрим приближенный метод построения описания операции. В его основе лежит идея приближенного представления чисел τ_{ij} в виде $y_i Q_j$. Относительная ошибка такого представления составит

$$(6) \quad \delta = \max_{i,j} \left| 1 - \frac{y_i Q_j}{\tau_{ij}} \right|.$$

Представим (6) в виде

$$(7) \quad (1 - \delta_i) \max_j \frac{\tau_{ij}}{Q_j} \leq y_i \leq (1 + \delta_i) \min_j \frac{\tau_{ij}}{Q_j}$$

или

$$(8) \quad \delta_i = \frac{\max_j \frac{\tau_{ij}}{Q_j} - \min_j \frac{\tau_{ij}}{Q_j}}{\max_j \frac{\tau_{ij}}{Q_j} + \min_j \frac{\tau_{ij}}{Q_j}}, \quad \delta = \max_i \delta_i.$$

Легко показать, что задача минимизации δ сводится к задаче минимизации $\varepsilon = \max_i \varepsilon_i$, где

$$(9) \quad \varepsilon_i = \frac{\max_j \tau_{ij} w_j}{\min_j \tau_{ij} w_j}, \quad w_j = \frac{1}{Q_j}.$$

Условие (9) легко сводится к виду

$$(10) \quad \frac{w_j}{w_k} \geq \frac{1}{\varepsilon} \max_i \frac{\tau_{ik}}{\tau_{ij}} = \frac{1}{\varepsilon} q_{kj}.$$

Обозначим $\ln w_i = \lambda_i$, $\ln \varepsilon = \eta$, $\ln q_{kj} = \ell_{kj}$. Тогда система (10) сведется к виду

$$(11) \quad \lambda_j - \lambda_k \geq \ell_{kj} - \eta, \quad j, k = \overline{1, m}.$$

Необходимо определить минимальное $\eta \geq 0$, при котором система (11) имеет решение.

Определим полный граф с m вершинами и длинами дуг ($\ell_{kj} - \eta$). Как известно (см. раздел 1.2), система (11) имеет решение, если в графе отсутствуют контуры положительной длины.

Алгоритм решения задачи.

1 шаг. Положим $\eta_0 = 0$. Определим контур μ_1 положительной длины. Если таких контуров нет, то задача решена ($\eta = \eta_0 = 0$). Если $L(\mu_1) > 0$, то полагаем длины дуг равными $\ell_{ij} - \eta_1$, где

$$\eta_1 = \frac{L(\mu_1)}{n(\mu_1)} \quad (n(\mu) - \text{число дуг контура } \mu).$$

k -й шаг. Определяем контур μ_k положительной длины, при длинах дуг $\ell_{ij} - \eta_{k-1} L_k$. Если $L_k = L(\mu_k) \leq 0$, то $\eta = \eta_{k-1}$. Если $L(\mu_k) > 0$,

то определяем $\eta_k = \frac{1}{n_k} L_k$, где $n_k = n(\mu_k)$, и переходим к следующему

шагу.

За конечное число шагов будет получена величина η такая, что в графе отсутствуют контуры положительной длины при длинах дуг $l_{ij} - \eta$. Соответствующие потенциалы вершин $\{\lambda_i\}$ и величина η определяют оптимальное решение задачи (11), а значит (10) и (7). Определив δ , мы можем найти μ , и, следовательно, получить полное описание операции.

Идеальное агрегирование. Агрегирование, то есть представление сложной модели (описываемой большим числом параметров) в упрощенном (агрегированном) виде (описываемом меньшим числом параметров) есть не только эффективный метод решения задач большой размерности, но едва ли не единственный подход к принятию решений на высших уровнях управления. И дело здесь не в том, что ограничены возможности лица, принимающего решения (ЛПР), в решении задач большой размерности. Главная причина агрегированного описания сложных моделей в том, что руководитель (ЛПР) способен принимать эффективные решения, оперируя только небольшим числом существенных факторов (порядка 7-8 факторов).

Отсюда следует, что подход к решению задач большой размерности на основе построения агрегированных моделей адекватен иерархическому построению организационных систем. Очевидно, что упрощенное описание является приближенным (ошибка агрегирования), однако, это упрощение окупается повышением эффективности принятия решения на основе агрегированных моделей. Большой интерес представляют случаи идеального агрегирования, то есть агрегирования с нулевой ошибкой. Дадим формальные определения агрегирования и ошибки агрегирования в задачах календарного планирования.

Агрегированием комплекса операций называется его представление в виде комплекса с меньшим (как правило, значительно меньшим) числом операций.

Пусть задан класс M возможных ограничений $N(t)$ на количество ресурсов, выделенных для реализации проекта. Обозначим

$T_m[N(t)]$ - минимальное время реализации проекта при графике использования ресурсов $N(t)$, а $T_a[N(t)]$ - минимальное время реализации агрегированного проекта при том же графике $N(t)$. Разность

$$(12) \varepsilon[N(t)] = \left| 1 - \frac{T_a[N(t)]}{T_m[N(t)]} \right|$$

определяет ошибку агрегирования при заданном графике $N(t)$. Ошибку агрегирования для всех возможных графиков $N(t) \in M$ будем оценивать выражением

$$(13) \varepsilon = \max_{N(t) \in M} \varepsilon[N(t)].$$

Агрегирование с нулевой ошибкой называется *идеальным*.

Примеры идеального агрегирования комплекса операций приведены в [2, 13].

В [2, 15] показано, что, если комплекс состоит из однородных операций (операций, скорости которых удовлетворяют соотношениям $f_i = \beta_i f$, где f - вогнутые функции) и имеет последовательно-параллельную структуру, то такой комплекс допускает идеальное агрегирование в одну операцию. Существует класс зависимостей $f(u)$, при которых возможно идеальное агрегирование любого комплекса операций. Это - так называемые степенные зависимости вида

$$(14) f(u) = u_i^\alpha, \quad \alpha \in I, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для случая степенных зависимостей (14) доказано [8, 15], что существует агрегированное представление комплекса в виде одной операции объема W , и со скоростью $f = u^\alpha$ такое, что для любого $N(t)$ имеет место $T_m[N(t)] = T_a[N(t)]$. Таким образом, задача сводится к определению объема агрегированной операции (этот объем назван *эквивалентным объемом комплекса*).

Известны несколько методов определения эквивалентного объема. Первый метод основан на решении задачи распределения ресурсов при заданном уровне ресурсов N . Если $T_{mm}(N)$ - минимальное время реализации проекта, то эквивалентный объем проекта определяется выражением

$$(15) W_e = T_{mm}(N) T^\alpha.$$

Второй метод основан на решении задачи минимизации затрат при заданном сроке реализации проекта. При этом зависимость

затрат на i -ую операцию от ее продолжительности определяется

$$\text{выражением } s_i(\tau_i) = \frac{W_i^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot i = \overline{1, n}.$$

$$\tau_i^\alpha$$

Если $s_{\min}(T)$ – величина минимальных затрат, то эквивалентный объем проекта определяется выражением $W_j = s_{\min}^\alpha T^{1-\alpha}$.

Опишем еще один метод определения эквивалентного объема, основанный на геометрической аналогии. Для этого введем понятие размерности комплекса операций.

Размерностью комплекса операций называется максимальное число независимых операций.

Множество состояний комплекса размерности m можно изобразить в виде некоторой области m -мерного фазового пространства. Для этого определим множество M путей, покрывающих сеть, то есть таких, что каждая вершина сети принадлежит хотя бы одному пути. Как известно, минимальное число таких путей равно размерности комплекса [2, 8, 13, 15]. Обозначим Q_i – множество вершин сетевого графика, принадлежащих пути μ_i (если вершина принадлежит нескольким путям, то оставляем ее только в одном из множеств Q_i). Поставим в соответствие каждому пути μ_i координатную ось y_i фазового пространства, а последовательности вершин $k \in \mu_i$ – последовательность отрезков длины W_k на оси y_i (см. рисунок 16). Точка θ соответствует начальному состоянию комплекса (ни одна операция не начата), а точка A – конечному состоянию (все операции завершены). Чтобы отобразить зависимости между операциями различных путей, «вырежем» из параллелограмма на рисунке 16 соответствующие области. Полученная область полностью описывает множество возможных состояний комплекса. Любому процессу выполнения операций соответствует траектория, соединяющая точку θ с точкой A и проходящая в области возможных состояний. Определим расстояние между любыми двумя точками y_1 и y_2 сле-

$$\text{дующим образом: } \rho(y^1, y^2) = \left(\sum_{i=1}^m |y_i^1 - y_i^2|^{1/\alpha} \right)^\alpha.$$

В [3] показано, что эквивалентный объем комплекса операций равен длине кратчайшей траектории, соединяющей точку θ с точкой A .

Опишем алгоритм определения кратчайшей траектории, использующий геометрическую аналогию.

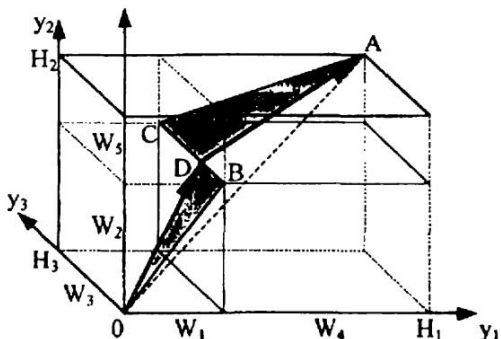


Рис. 16.

Проводим прямую, соединяющую точку θ с точкой A . Эту прямую можно описать параметрически в виде $y_i(t) = t H_i$, где $H_i = \sum_{k \in \Pi_i} W_k$ (см. рисунок 16). Определяем минимальное t , начиная с

которого прямая выходит за пределы области возможных состояний. Геометрически это означает, что кратчайшая траектория должна проходить через отрезок BC' на рисунке 16. Как известно, в этом случае треугольники OBD и $AC'D$ должны быть подобными. Это позволяет определить координаты точки D на рисунке 16.

Далее процедура повторяется. Определяем минимальное t , начиная с которого траектория выходит за пределы области возможных состояний. далее определяем соответствующую точку на границе области (из условия подобия треугольников) и т.д., пока не получим траекторию, состоящую из отрезков прямых, целиком лежащую в области возможных состояний.

На втором этапе происходит корректировка полученной траектории. А именно, рассматриваем три последовательных точки излома траектории и корректируем, если это необходимо, положение средней точки из условия подобия треугольников.

Методы приближенного агрегирования линейных моделей, а также задачи оптимального распределения ресурсов в агрегированных комплексах, в том числе, задачи календарного планирования при учете совмещения агрегированных операций рассматриваются в [2, 8, 13, 15].

2.3. Механизмы самокупаемости¹

Одной из задач, стоящих перед руководством проекта, является минимизация затрат на его реализацию. Если есть n операций и заданы их стоимости $\{\beta_i\}_{i=1}^n$, то общие затраты на весь проект равны $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i$. Отметим, что величина β не зависит от порядка выполнения операций.

Если проект-менеджер (ПМ) имеет в своем распоряжении на момент начала проекта сумму R_0 и $R_0 \geq \beta$, то имеющихся средств хватит на выполнение всех операций в любой допустимой последовательности. Если же $R_0 < \beta$, то возникает задача разработки механизма самокупаемости (самофинансирования) [16], определяющего оптимальную последовательность выполнения операций, в которой выполнение операций частично финансируется за счет доходов от уже выполненных операций.

Пусть i -я операция описывается кортежем $(\beta_i, \alpha_i, \tau_i)$, где $\alpha_i \geq 0$ - доход от i -ой операции, τ_i - ее продолжительность. Будем различать прибыльные ($\alpha_i \geq \beta_i$) и убыточные ($\alpha_i < \beta_i$) операции. Тогда, в случае нехватки исходных средств, некоторые операции могут выполняться за счет доходов от уже выполненных операций. Идеалом, в некотором смысле, является полностью автономный проект, в котором самофинансирование позволяет выполнить его целиком, без привлечения внешних источников.

Для простоты предположим, что не существует технологических ограничений на последовательность выполнения операций - каждая операция может начинаться в момент окончания другой операции, причем произвольное число операций может вестись параллельно.

¹ Материал настоящего раздела базируется, в основном, на работе [16].

Обозначим $t_i \geq 0$ - время начала i -ой операции, R - величину заемных средств. Предположим, что ПМ может получить беспроцентные кредиты в любом объеме и в произвольный момент времени (дисконтирование отсутствует).

Финансовый баланс в момент времени t имеет вид:

$$(1) \quad f(t) = R_0 + R - \sum_{i=1}^n \beta_i I(t \geq t_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i I(t \geq T_i + \tau_i),$$

где $I(t \geq t_i) = \begin{cases} 1, & t \geq t_i \\ 0, & t < t_i \end{cases}$ - функция-индикатор.

Понятно, что для возможности выполнения операций финансовый баланс должен быть неотрицательным в любой момент времени, то есть для допустимого баланса должно выполняться $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, \tau]$, где τ - время выполнения проекта.

В рамках описанной модели возникает целый ряд оптимизационных задач.

Например, можно решать задачу выбора последовательности выполнения операций (то есть времен начала их выполнения), минимизирующей суммарную величину привлеченных средств:

$$(2) \quad \begin{cases} R \rightarrow \min \\ \{t_i\} \\ f(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Может быть поставлена задача минимизации времени выполнения проекта $T = \max_{i=1, n} \{t_i + \tau_i\}$ только за счет собственных средств, или с фиксированным значением привлеченных средств (отметим, что при последовательном выполнении операций время завершения проекта не зависит от порядка выполнения операций):

$$(3) \quad \begin{cases} T \rightarrow \min \\ \{t_i\} \\ R = \text{const}, f(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, возможны самые разные постановки. Во всех оптимизационных задачах требуется найти оптимальную последовательность выполнения операций, то есть оптимальный механизм самофинансирования. При введении дисконтирования, по аналогии с (3), можно максимизировать конечную (дисконтированную)

прибыль и т.д. При наличии технологических ограничений, они должны быть добавлены в ограничения задач (2)-(3).

Следует отметить, что на сегодняшний день не существует универсальных и эффективных методов решения задач из рассматриваемого класса. Понятно, что так как число допустимых вариантов (последовательностей) конечно, то все они могут быть найдены простым перебором. Однако, даже при не очень большом числе операций (порядка нескольких десятков) простой перебор оказывается чрезвычайно трудоемким. Поэтому при решении задач сетевого планирования используют методы целенаправленного перебора, ветвей и границ и др. Рассмотрим в качестве примера использование для решения задачи (3) следующего эвристического алгоритма.

1. Определяем все комбинации операций, которые могут быть начаты (являются допустимыми с точки зрения бюджетного ограничения) в нулевой момент времени.

2. Для каждого из допустимых вариантов определяем в момент окончания одной из операций, какие из еще невыполненных операций могут быть начаты. Если ни одна из операций не может быть начата, то для данного варианта ждем момента окончания следующей операции и т.д. до тех пор, пока все операции не закончатся и/или ни одна не сможет быть начата.

Применение шагов 1 и 2 дает все допустимые с точки зрения балансового ограничения варианты (получаем дерево вариантов). Среди всяких вершин могут оказаться и те, которым соответствует выполнение не всех операций. Сравнивая продолжительности тех вариантов - всяких вершин, которые соответствуют выполнению всех операций проекта, определяем решение задачи (3) - варианты минимальной продолжительности.

В общем случае описанный выше алгоритм является более эффективным, чем простой перебор, так как сразу отсеиваются неудовлетворительные варианты и не рассматриваются деревья, для которых они являются корневыми вариантами. Можно предложить и другие эвристические алгоритмы численного решения задачи (3), быстрое действие которых зависит от соотношения исходных параметров.

Аналитические методы получения оптимального решения существуют лишь для задачи (2), алгоритм решения которой описывается ниже.

Рассмотрим $(n-1)$ -вершинный граф, в котором вершины $1, 2, \dots, n$ соответствуют операциям, вершина 0 - нулевая операция. Предположим, что с нулевой вершины начинается реализация проекта, ее затраты и доход равны 0 ($\alpha_0 = 0$). Пусть $\mu = (0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0)$ - произвольный гамильтонов контур.

Обозначим $M_j(\mu) = \sum_{k=1}^j (\beta_{i_k} - \alpha_{i_k})$ - сумма длин первых j

дуг контура μ . Заход некоторой дуги в вершину i ($i = \overline{1, n}$) требует затрат β_i , исход дуги из вершины i соответствует получению дохода α_i . Так как в рассматриваемой модели все операции могут выполняться одновременно (не существует технологических ограничений на последовательность их выполнения), то, очевидно, минимум привлеченных средств будет соответствовать последовательное выполнение операций (время реализации всего проекта при этом равно $T = \sum_{i=1}^n \tau_i$), а граф, построенный для нашей задачи, будет полным и симметричным.

Таким образом, задача свелась к определению оптимальной последовательности выполнения операций, то есть такой последовательности, при которой величина привлеченных средств будет минимальной. Последовательному выполнению всех операций (ни одна из операций не выполняется дважды) соответствует некоторый гамильтонов контур. Если под длиной дуги l_{ij} понимать разность между затратами на выполнение j -ой операции и доходом от i -ой операции, то есть $l_{ij} = \beta_j - \alpha_i$, то легко видеть, что полученный граф является псевдопотенциальным. Действительно, любой гамильтонов контур соответствует выполнению всех операций. Независимо от последовательности суммирования длин дуг, получим инвариантную (не зависящую от последовательности, то есть контура) величину $\left(\beta - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)$. Тогда величина $M_j(\mu)$ есть взятый с обратным знаком чистый доход от выполнения первых $(j-1)$ операций контура μ и начала j -ой операции.

С другой стороны, $M_j(\mu)$ может интерпретироваться как нехватка собственных средств на выполнение j -ой (в контуре μ)

операции. Если $M_j(\mu) > 0$, то именно такую величину придется занимать у третьей стороны. Если $M_j(\mu) \leq 0$, то собственных средств ПМ хватает на выполнение j -ой операции.

Предположим теперь, что задача ПМ заключается в определении последовательности выполнения операций, при которой максимальная величина однократного заема внешних средств минимальна при условии, что собственные средства отсутствуют (то есть $R_0 = 0$). Формально эту задачу можно представить в следующем виде: определить гамильтонов контур μ , имеющий минимальное значение $M(\mu) = \max_{j \in I, \mu} M_j(\mu)$.

Решение этой задачи дается теоремой 4. Система неравенств (2) раздела 1.3 в рассматриваемой модели может интерпретироваться следующим образом. Первое неравенство утверждает, что минимальная величина привлеченных средств не может быть меньше, чем затраты на операцию, выполняемую первой. Действительно, мы предположили, что величина собственных средств равна нулю (если она не равна нулю, то на нее уменьшится M_{min}). Следовательно, на первую операцию придется затратить β_{i_1} , так как никакие операции еще не выполнялись (нет доходов от их выполнения). Второе неравенство требует, чтобы затраты β_{i_2} на выполнение второй операции были меньше, чем заемные средства M_{min} плюс доход от выполнения первой операции γ_{i_1} (и т.д. для всех операций).

Итак, в соответствии с результатом теоремы 4 **оптимальное решение** имеет следующую структуру:

- упорядочим прибыльные операции (для которых $\gamma_j \geq 0$) в порядке возрастания затрат (величин β_j) и включим их в последовательность (гамильтонов контур);

- добавим к полученной последовательности убыточные операции (для которых $\gamma_j \leq 0$) в порядке убывания доходов (величин D_j).

Таким образом, оптимальной является следующая последовательность: выполнять сначала прибыльные операции в порядке возрастания затрат (сначала более дешевые и т.д.), затем выполнять

убыточные операции в порядке убывания дохода (сначала - приносящие наибольший доход, и т.д.).

Минимальная величина заемных средств при этом определяется выражением (3) раздела 1.3. Содержательная интерпретация этого выражения следующая: как минимум, придется занимать либо величину затрат первой операции (если при этом дохода от нее и последующих операций будет хватать на реализацию невыполненных или если заем не будет превосходить β_{i_1}), либо максимум по остальным операциям из нехватки собственных средств на их выполнение.

Найденное решение минимизирует максимальную величину однократного займа. Суммарная же величина заемных средств при использовании полученного решения равна (при $R_0 = 0$):

$$R = \beta_{i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \max \left(\beta_{i_{k+1}} - \sum_{j=1}^k y_j, 0 \right).$$

Итак, мы нашли последовательность выполнения операций, минимизирующую максимальную величину внешнего займа. Легко показать [8, 16], что найденное решение (последовательность выполнения операций) минимизирует также суммарную величину привлеченных средств.

2.4. Механизмы согласованного выбора¹

Рассмотрим модель *активной системы* (АС), состоящей из управляющего органа – *центра* – и одного управляемого субъекта *активного элемента* (АЭ). Стратегией АЭ является выбор *действия* $y \in A$ из конечного множества $A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, стратегией центра является выбор *механизма стимулирования*, то есть назначение *плана* $x \in X \subseteq A$ и выбор *функций штрафов* χ_{ij} за отклонения выбора АЭ y_j от плана x_i и *дохода* АЭ h_i , $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Целевая функция АЭ f_{ij} , определенная на множестве $A \times X$ представляет собой разность между доходом h_i и штрафами χ_{ij} .

¹ Изложение материала настоящего раздела базируется, в основном, на работах [10, 19].

Выбирая при заданном плане и штрафах действие. АЭ стремится максимизировать свою целевую функцию.

Пусть на функции дохода и штрафов наложены следующие ограничения:

$$(1) \quad l_i \leq h_i \leq b_i, \quad i \in I.$$

$$(2) \quad d_{ij} \leq \chi_{ij} \leq c_{ij}, \quad d_{ij} - c_{ij} = 0, \quad i, j \in I.$$

Механизм стимулирования (штрафов), при котором АЭ выгодно выполнять планы, назначаемые центром, называется *согласованным*.

Задача согласованного выбора заключается в ответе на вопрос – существует ли механизм, согласованный на заданном подмножестве X множества A .

Выпишем условия согласованности для множества X в предположении благожелательности АЭ к центру (в случае равенства АЭ выполняет план):

$$(3) \quad h_i \geq h_j - \chi_{ij}, \quad i \in J, j \in I,$$

где $J \subseteq I$ – множество индексов, соответствующих множеству X .

Преобразуя (3) к $h_i - h_j \leq \chi_{ij}$, $i, j \in I$, получаем, что штрафы следует выбирать как можно большими, то есть $\chi_{ij} = c_{ij}$. Тогда (3) примет вид:

$$(4) \quad h_i - h_j \leq c_{ij}, \quad i \in J, j \in I.$$

Пусть $j \notin J$, тогда соответствующая часть условий $h_i - h_j \leq c_{ij}$, $i \in J, j \notin I$, приводится к виду

$$(5) \quad h_i \geq h_j - c_{ij}, \quad i \in J, j \notin I.$$

Очевидно, следует взять $h_j = l_j$. Получаем ограничение на выбор h_i :

$$(6) \quad h_i \geq g_i = \max_{j \notin X} (l_j - c_{ij}), \quad i \in J.$$

Обозначим $\alpha_i = \max \{l_j - c_{ij}\}$, $i \in J$.

Итак, задача свелась к определению набора $\{h_i\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$(7) \quad \alpha_i \leq h_i \leq b_i, \quad i \in J,$$

$$(8) \quad h_i - h_j \leq c_{ij}, \quad i, j \in J.$$

Определим полный граф $G(X)$ с q вершинами, где $q = |J|$ – число элементов множества X , и длинами луг c_{ij} . Задача (7)-(8) является

задачей о потенциалах. Из результатов раздела 1.2 следует справедливость следующей теоремы¹.

Теорема 8 [10, 19]. Для разрешимости системы неравенств (7)-(8) необходимо и достаточно отсутствия в графе $G(X)$ контуров отрицательной длины и выполнения условий:

$$(9) \quad L_{ij} \geq a_i - b_j, \quad i, j \in J,$$

где L_{ij} – длина минимального пути, соединяющего вершину i с вершиной j .

Если функции штрафов неотрицательны, то есть $c_{ij} \geq 0$, то граф $G(X)$ не имеет контуров отрицательной длины. Тогда (9) дает необходимые и достаточные условия существования согласованного механизма. Для поиска минимальных или максимальных $\{h_i\}$, обеспечивающих согласованность, достаточно воспользоваться модификацией алгоритма Данцига: выбираем $h_i(0) = a_i$ (соответственно, $h_i(0) = b_i$, где «0» – номер шага алгоритма) и вычисляем последовательно $h_i(q) = \max_j [h_i(q-1) - L_{ij}]$ ($h_i(q) = \min_j [h_i(q-1) + L_{ij}]$). За конечное число итераций получаем $\{h_i^{min}\}$ ($\{h_i^{max}\}$) такие, что $h_i^{min} - h_j^{min} \leq L_{ij}$, $i, j \in J$.

Отметим, что не существует системы стимулирования, обеспечивающей согласованность механизма на множестве X с меньшими значениями $\{h_i\}$. Интересно также отметить, что решение задачи, если оно есть всегда существует на множестве так называемых *сильно согласованных механизмов* [14, 30], то есть механизмов, функция штрафов в которых удовлетворяет «неравенству треугольника»: $\chi_{ij} + \chi_{jk} \geq \chi_{ik}$, $i, j, k \in J$.

Осталось определить значения h_i , χ_{ij} для $i, j \in J$, а также χ_{ij} для $i \in J, j \notin J$ и для $i \notin J, j \in J$. Очевидно, что значения χ_{ij} , $i \notin J, j \in J$ не влияют на согласованность механизма на множестве J . Значения h_i , $i \notin J$ можно взять минимальными: $h_i = l_i$, а χ_{ij} для $i \in J, j \notin J$ – максимальными: $\chi_{ij} = c_{ij}$.

В заключение настоящего раздела рассмотрим случай, когда ограничения наложены не на функции дохода и штрафов по отдельности, а непосредственно на функции f_{ij} :

¹ Для доказательства достаточно добавить к графу $G(X)$ еще одну вершину $i = 0$ с дугами $0 \rightarrow i$, $c_{0i} = -b_i$, $c_{i0} = a_i$, $i \in J$.

$$(10) q_{ij} \leq f_{ij} \leq r_{ij}.$$

Тогда из условий согласованности $h_i - h_i \leq \chi_{ij} \leq h_i - q_{ij}$ получаем необходимые и достаточные условия: $h_i \geq q_{ij}, i \in J, j \in I$.

Таким образом, если $b_i \geq \max_{j \in I} q_{ij}$, то задача имеет решение:

$$(11) h_i^{\min} = \max [l_i, \max_{j \in I} q_{ij}], i \in J.$$

$$h_i^{\min} = l_i, i \notin J.$$

$$\chi_{ij} = h_i^{\min} - q_{ij}, i \in J, j \in I$$

$$h_i^{\min} - r_{ij} \leq \chi_{ij} \leq h_i^{\min} - q_{ij}, i \notin J, j \in I.$$

В работах [10, 19] рассмотрены обобщения описанной модели на случаи: L-согласованных планов (при которых назначение плана $x \in X$ приводит к тому, что АЭ выбирает действие из множества $L(x) \subseteq A$), неопределенности относительно информации о функции дохода АЭ, наличия нескольких взаимосвязанных АЭ.

2.5. Метризованные отношения в задачах стимулирования¹

Приведем постановку задачи стимулирования в двухуровневой активной системе (АС), состоящей из управляющего органа – центра на верхнем уровне иерархии и одного управляемого субъекта – активного элемента (АЭ) на нижнем уровне [29-31]. Рассматриваемая ниже в настоящем разделе простейшая модель стимулирования является базовой как для теории активных систем [18], так и для теории иерархических игр [23] и для теории контрактов [31].

Пусть множество I возможных действий (стратегий) АЭ конечно: $I = \{1, 2, \dots, n\}$ и предпочтения АЭ в отсутствие стимулирования описываются вектором $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, компоненты которого интерпретируются как доход от выбора соответствующего действия. Управление со стороны центра заключается в выборе системы стимулирования $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, т.е. - в доплате (стимулировании, которое по знаку может быть как положительным, так и отрицательным) АЭ за выбор тех или иных действий. Огра-

¹ Изложение материала настоящего раздела базируется, в основном, на работах [17, 30].

ничений на абсолютную величину стимулирования накладывать не будем. Целевая «функция» $A \ni f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ представляет собой сумму дохода и стимулирования, т.е. $f_i = q_i + \sigma_i, i \in I$. В рамках гипотезы рационального поведения [18, 30] АЭ выбирает при известной функции стимулирования действие, максимизирующее его целевую функцию. Если таких действий несколько, то будем считать, что АЭ выберет из них действие, наиболее благоприятное (в оговариваемом ниже смысле) для центра (гипотеза благожелательности [14, 30]). Эффективностью системы стимулирования (управления) называется максимальное значение целевой функции центра на множестве действий АЭ, реализуемых этой системой стимулирования.

Задача стимулирования заключается в назначении центром такой системы стимулирования, при которой АЭ выбирает наиболее благоприятное для центра действие. Решение рассматриваемой задачи элементарно [29-31]: для фиксированной системы стимулирования σ определяется множество действий АЭ, доставляющих максимум его целевой функции (это множество называется *множеством реализуемых действий*): $P(\sigma) = \{i \in I \mid f_i \geq f_j, j \in I\}$, после чего ищется система стимулирования, которая реализует наиболее благоприятное для центра действие.

Например, если предпочтения центра на множестве действий АЭ заданы в виде его функции дохода $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ (соответствующая задача называется задачей первого рода [29, 31]), то оптимальна любая система стимулирования σ_1 , которая удовлетворяет следующему условию: $P(\sigma_1) \cap \text{Arg max}_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.

Если целевая функция центра $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ представляет собой разность между доходом и стимулированием, т.е. $\Phi_i = H_i - \sigma_i, i \in I$ (соответствующая задача называется задачей второго рода [29, 30]), то оптимальна система стимулирования

$$\sigma_2 = \max_{\sigma} \max_{i \in P(\sigma)} \{H_i - \sigma_i\}.$$

Записывая определение множества реализуемых действий в виде: $P(\sigma) = \{i \in I \mid q_i - \sigma_i \geq q_j + \sigma_j, j \in I\}$, получаем, что минимальной (т.е. имеющей в каждой точке минимальное значение) системой стимулирования, реализующей в рамках гипотезы благожелательности все действия АЭ, является компенсаторная система

стимулирования $\sigma^k = (\sigma_1^k, \sigma_2^k, \dots, \sigma_n^k)$, определяемая следующим образом [30, 31]:

$$(1) \sigma_j^k = q_k - q_j, j \in I,$$

где $k = \arg \max_{j \in I} q_j$. Множество оптимальных с точки зрения центра

в задачах второго рода реализуемых действий при этом есть:

$$(2) P(\Phi, f) = \text{Arg max}_{i \in I} \{H_i - \sigma_i^k\} - \text{Arg max}_{i \in I} \{H_i - q_i - q_i\}.$$

Содержательно компенсаторная система стимулирования, являющаяся решением задач стимулирования и первого, и второго рода [29-31], делает все допустимые действия АЭ эквивалентными с точки зрения его целевой функции, т.е. в точности компенсирует АЭ те потери, которые он несет при выборе данного действия по сравнению с выбором действия k , приносящего наибольший доход в отсутствие стимулирования (очевидно, доплачивать за выбор этого действия нет смысла).

Итак, при формулировке задачи стимулирования в терминах целевых функций, предпочтения АЭ на конечном множестве действий задаются вектором q чисел, разности (1) между которыми есть минимальные выплаты, делающие соответствующие пары действий эквивалентными с точки зрения значений целевой функции АЭ. Альтернативой такому описанию предпочтений является задание предпочтений непосредственно на парах действий АЭ, т.е. перечисление n^2 чисел (являющихся, например, экспертной информацией, полученной в результате парных сравнений альтернатив), интерпретируемых как *сравнительная предпочтительность действий* в смысле минимальных доплат, делающих соответствующую пару действий эквивалентными. Этот подход и его взаимосвязь с описанием предпочтений в терминах целевых функций рассматривается ниже.

Задача стимулирования, сформулированная в терминах внутренне согласованных метризованных отношений. Целевая функция АЭ, введенная в предыдущем разделе и зависящая от используемой центром системы стимулирования, порождает на множестве I полное антисимметричное транзитивное бинарное отношение [30], причем всегда существует хотя бы одна недоминируемая по этому отношению альтернатива (действие). В терминах

этого бинарного отношения задачу стимулирования можно формулировать следующим образом: найти систему стимулирования такую, что недоминируемой по соответствующему бинарному отношению окажется альтернатива, наиболее благоприятная с точки зрения центра.

Такая постановка задачи выглядит искусственной по следующим причинам. Во-первых, теряется содержательная интерпретация стимулирования как компенсации за выбор того или иного действия (введение явной зависимости бинарного отношения от вектора стимулирования выглядит очень экзотической конструкцией – см. обсуждение в [17]). Во-вторых, одно и то же бинарное отношение может порождаться несколькими (не только различающимися аддитивной константой) целевыми функциями. Кроме того, не совсем ясно как сделать обратный переход - от бинарного отношения к конкретной целевой функции, ведь в прикладных задачах ключевую роль играет именно численное значение вознаграждения, получаемого АЭ.

Промежуточное место между «обычными» бинарными отношениями и целевыми функциями занимают так называемые *метризованные отношения* (МО). МО на множестве I задается матрицей $\Delta = \|\delta_{ij}\|$, $i, j \in I$. Элементы δ_{ij} матрицы Δ , $i, j \in I$ - положительные, отрицательные или равные нулю числа, интерпретируемые как сравнительные предпочтительности различных альтернатив, в нашем случае - действий АЭ (отметим, что мы ограничимся рассмотрением полных отношений, т.е. исключим несравнимость действий и т.д.).

Будем считать, что, если $\delta_{ij} < (>) 0$, то действие i в отсутствии стимулирования строго лучше (хуже) для АЭ, чем действие j ; если $\delta_{ij} = 0$, то действия i и j эквивалентны. Содержательно, величина δ_{ij} равна той сумме, которую нужно доплатить АЭ, чтобы действие i стало эквивалентно действию j .

Предположим, что управление со стороны центра (стимулирование) заключается в изменении сравнительной предпочтительности различных действий, т.е. элементов матрицы Δ . Задача стимулирования при этом как и ранее заключается в таком их допустимом изменении, чтобы наилучшим для АЭ стало максимально благоприятное для центра действие.

Предположим, что предпочтения АЭ удовлетворяют следующему свойству: $\forall i, j, m \in I \delta_{im} + \delta_{mj} = \delta_{ij}$, которое назовем *условием внутренней согласованности* (УВС) предпочтений АЭ. Из УВС следует, что $\delta_{ii} = 0$, $\delta_{ji} = -\delta_{ij}$, $i, j \in I$ (см. также упражнения 36-38), причем граф, соответствующий матрице Δ , является потенциальным (см. раздел 1.3) с потенциалами вершин q_i , $i \in I$, определяемыми с точностью до аддитивной константы следующим образом:

$$(3) \quad q_i = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta_{im}, \quad i \in I.$$

Матрицу Δ можно восстановить по потенциалам q_i , $i \in I$, однозначно:

$$(4) \quad \delta_{ij} = q_i - q_j, \quad i, j \in I.$$

Содержательно потенциалы действий можно интерпретировать как значения функции дохода АЭ, а элементы матрицы Δ - как их первые разности.

Если предпочтения АЭ заданы в виде МО, удовлетворяющего УВС, то информация обо всех элементах матрицы Δ является избыточной: например, если известна одна ее строка (или столбец), то в рамках УВС остальные элементы матрицы восстанавливаются суммированием по соответствующим цепочкам. Это свойство внутренне согласованных МО представляется достаточно привлекательным с точки зрения объема информации, которую необходимо получить на практике для идентификации параметров АС.

Наилучшим с точки зрения АЭ действием в рассматриваемой модели можно считать действие k , для которого $\delta_{kj} \leq 0$ для всех $j \in I$. В случае внутренне согласованных предпочтений такое действие (быть может, не единственное) всегда существует - это действие, имеющее максимальный потенциал. Таким образом, множество реализуемых действий в данном случае есть $P(\Delta) = \{k \in I \mid \delta_{kj} \leq 0, j \in I\}$.

Определим для произвольной пары действий i и j , $i, j \in I$, операцию $(j \rightarrow i)$ «уравнивания» их потенциалов:

$q_j^{j \rightarrow i} \rightarrow q_j + (q_i - q_j)$. В терминах элементов матрицы Δ эта операция состоит из двух этапов: 1) $\delta_{jm}^{j \rightarrow i} \rightarrow \delta_{jm} + \delta_{ij}$, $m \in I$;

2) $\delta_{mj}^{j \rightarrow i} \rightarrow -\delta_{jm}$, $m \in I$. При этом, очевидно, действие j становится

эквивалентным действию i ($\delta_{i_1} - \delta_{i_2} - 0$), причем внутренняя согласованность предпочтений АЭ сохраняется, а стоимость для центра проведения операции ($j \rightarrow i$) равна $\delta_{ij} = q_i - q_j$ (ср. с (1)).

Идея решения задачи стимулирования заключается в следующем. Для того, чтобы побудить АЭ выбрать действие $l \in I$, центр должен выплачивать АЭ за выбор этого действия вознаграждение σ_l , удовлетворяющее системе неравенств: $\sigma_l - \sigma_i \geq \delta_{li}$, $i, l \in I$. Компенсаторная система стимулирования

$$(5) \quad \sigma_l = \max_{j \in I} \delta_{lj} = \max_{j \in I} (q_i - q_j) - q_k - q_l - \delta_{lk}, \quad l \in I.$$

удовлетворяет этой системе неравенств. Поэтому, если k - наиболее предпочтительное с точки зрения АЭ в отсутствие стимулирования действие, то минимальное значение стимулирования σ_l для реализации действия l равно δ_{lk} , $l \in I$. Еще раз отметим, что компенсаторная система стимулирования (5) делает все действия АЭ эквивалентными с его точки зрения.

Пусть предпочтения центра в отсутствие стимулирования заданы в виде МО - матрицы $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$, $i, j \in I$ - удовлетворяющего УВС. Матрицу Γ может быть поставлена в соответствие «функция»

$$\text{дохода центра } H_i = - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \gamma_{im}, \quad i \in I. \text{ Если вознаграждение, вы}$$

плачиваемое АЭ, вычитается из функции дохода центра (задача второго рода - см. выше и [29, 30]), то, реализуя действие l , центр «теряет» δ_{lk} , $l \in I$. Следовательно, сравнительная предпочтительность с точки зрения центра пары действий (k, l) также изменяется. Численно новое значение в силу УВС равно сумме: $\gamma_{kl} - \delta_{lk}$. Значит, предпочтения центра с учетом стимулирования представляются МО Ξ определяемым следующим образом: $\Xi = \Delta + \Gamma = \|\gamma_{ij} + \delta_{ij}\|$, $i, j \in I$.

Тот факт, что в отношении предпочтения центра Ξ аддитивно входят как его собственные предпочтения в отсутствие стимулирования, так и предпочтения АЭ в отсутствие стимулирования, позволяет содержательно интерпретировать стимулирование как *согласование их интересов*.

Легко видеть, что, если предпочтения центра, и АЭ в отсутствие стимулирования внутренне согласованы, то и МО Ξ удов-

детворяет УВС. Из этого следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 9 [17]. Множество оптимальных реализуемых действий АЭ есть (ср. с (2)): $P(\Gamma, \Delta) = \{i \in I_1 \mid \delta_i \leq \gamma_j, j \in I_1\}$.

Взаимосвязь между задачами стимулирования, сформулированными в терминах целевых функций и МО, устанавливается следующим утверждением.

Теорема 10 [17]. Задачи стимулирования, сформулированные в терминах целевых функций и МО, удовлетворяющих УВС, эквивалентны.

Эквивалентность подразумевает сводимость одной задачи к другой и наоборот. Пусть задача стимулирования сформулирована в терминах целевых функций, т.е. известна функция q дохода АЭ. Матрицу Δ , считая значения функции дохода потенциалами, определим по выражению (4): выполнение УВС очевидно. Аналогично, если выполнено УВС, то по матрице Δ можно по выражению (3) восстановить потенциалы (функцию дохода), т.е. выполнить переход в обратную сторону. Итак, если выполнено УВС, то из (3)-(4) и теоремы 9 следует, что $P(\Gamma, \Delta) = P(\Phi, f)$.

Из теоремы 10 следует, что МО описывают более широкий класс предпочтений АЭ и центра, нежели целевые функции, так как последние эквивалентны внутренне согласованным МО.

Конечно, нет никаких гарантий, что полученное на практике (например в результате некоторой экспертной процедуры) МО, отражающее выявленные предпочтения управляемого субъекта, окажется внутренне согласованным. Поэтому обсудим методы решения задач стимулирования, сформулированных в терминах МО, не удовлетворяющих УВС.

Отказ от внутренней согласованности: результаты и проблемы. Предположим теперь, что предпочтения АЭ, отражаемые полным МО, то есть некоторой матрицей Δ , не удовлетворяют УВС. Рассмотрим две задачи: задача 1 – определение системы стимулирования, реализующей заданное действие АЭ с минимальными затратами центра на стимулирование; задача 2 – определение системы стимулирования, реализующей любое действие АЭ (отметим, что в случае представления предпочтений АЭ как в виде целевых функций, так и в виде внутренне согласованных МО компенсаторная

система стимулирования (1), (5) принадлежит множествам решения обеих задач).

Первая задача решается элементарно – для каждого из действий $A \in I$ ищется система стимулирования $\sigma^i = (\sigma_1^i, \sigma_2^i, \dots, \sigma_n^i)$, его реализующая (в общем случае для различных действий эти системы стимулирования различны), т.е. удовлетворяющая условию: $\forall j \in I \sigma_j^i - \sigma_j^i \geq \delta_{ij}$, $i, j \in I$, например, $\sigma_j^i = \max_{j \in I} \delta_{ij}$, $\sigma_j^i - \delta_{ij}$, $j \neq i$, а затем определяется оптимальное для центра реализуемое действие: $i^* = \arg \max_{i \in I} \{H_i - \max_{j \in I} \delta_{ij}\}$. Эффективность стимулирования при этом равна:

$$(6) K_i - \max_{i \in I} \{H_i - \max_{j \in I} \delta_{ij}\}.$$

Рассмотрим вторую задачу. Для того, чтобы система стимулирования реализовывала все действия $A \in I$ (делала все действия $A \in I$ эквивалентными с его точки зрения) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующей системе неравенств:

$$(7) \sigma_i - \sigma_j \geq \delta_{ij}, \quad i, j \in I.$$

Систему стимулирования, удовлетворяющую (7), можно рассматривать как компенсаторную $(\sigma_i - q_k^* - q_i^*, \quad i \in I)$ для системы потенциалов $\{q_i^*\}$, определяющих некоторое внутренне согласованное МО $\Delta^* - \delta_{ij}^*$, $\delta_{ij}^* = q_j^* - q_i^*$, $i, j \in I$. Из выражений (5) и (7) получаем, что для элементов матриц Δ и Δ^* должно выполняться следующее соотношение:

$$(8) \delta_{ij}^* \geq \delta_{ij}, \quad i, j \in I.$$

Другими словами, обеспечив реализуемость компенсаторной системой стимулирования всех действий при предпочтениях $A \in I$, отражаемых МО Δ^* , можно быть уверенным, что все действия будут реализованы той же системой стимулирования и при предпочтениях $A \in I$, отражаемых МО Δ .

Следовательно, проблема заключается в поиске условий существования и алгоритмов нахождения МО, удовлетворяющего (8) и максимизирующего целевую функцию центра в смысле (2). Из выражений (7) и (8) получаем, что потенциалы искомого внутренне

согласованного МО Δ^* должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$(9) \quad q_j^* - q_i^* \geq \delta_{ij}, \quad i, j \in I.$$

Из теоремы 1 известно, что система неравенств (9) имеет решение тогда и только тогда, когда в графе, соответствующем МО Δ , отсутствуют контуры (петли не рассматриваются) положительной длины (последнее условие может интерпретироваться как ослабление УВС). Естественно, если Δ удовлетворяет УВС, то при использовании центром компенсаторной системы стимулирования (5) системы неравенств (7)-(9) обращаются в равенства.

Из выражения (1) следует, что минимальные затраты центра на стимулирование по реализации действия $l \in I$ равны $q_k^* - q_l^*$, где $k \in I$ – такое действие АЭ, что $q_k^* \geq q_j^*, j \in I$. Следовательно, задачу стимулирования для рассматриваемой модели можно сформулировать как задачу поиска набора потенциалов $\{q_i^*\}$, удовлетворяющего (9), и такого действия АЭ, которое доставляло бы максимум разности дохода центра и его затрат на стимулирование по реализации данного действия, т.е. эффективность стимулирования равна:

$$(10) \quad K_2 = \arg \max_{l \in I, \{q_i^*\}} \{H_l - q_k^* + q_l^*\}.$$

Теорема 11 [17]. а) Для того, чтобы задача (7), (9)–(10) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы в графе, соответствующем МО Δ , отсутствовали контуры положительной длины; б) Решение задачи (7), (9)–(10) может быть получено в результате применения следующего алгоритма:

0-ой шаг. Полагаем $q_j^{*0} = 0, j \in I$.

k -ый шаг. Определяем $\lambda_j = \max_{i \in I} \{q_i^{*k-1} + \delta_{ij}\}$,

$$q_j^{*k} = \max \{\lambda_j, q_j^{*k-1}\}, \quad j \in I.$$

Доказательство. Справедливость пункта а) утверждения 3 следует из теоремы 1. Алгоритм, приведенный в пункте б) утверждения 3, являющийся частным случаем алгоритма 2 (см. раздел 1.2), обладает следующими свойствами.

Покажем, что хотя бы один из установившихся потенциалов будет равен нулю. Предположим противное, т.е. пусть все потенциалы положительны. Берем произвольное действие $j \in I$ и определяем действие $l \in I$, для которого имеет место $q_j^* - q_l^* = \delta_{ij}$ (такое действие обязательно найдется). Подобное действие найдется и для действия $l \in I$. Продолжая таким образом, придем к противоречию в силу конечности множества допустимых действий.

Число шагов алгоритма не превышает n , так как потенциал q_j^* , в соответствии с результатами раздела 1.2, равен длине максимального пути в графе, соответствующем МО Δ^* , соединяющего одну из вершин с нулевым потенциалом с вершиной j . Поэтому на каждом шаге алгоритма хотя бы одна из вершин получит окончательный потенциал, который в дальнейшем меняться не будет. Значит после конечного числа шагов потенциалы установятся: $\lambda_j = q_j^*, j \in I$.

Кроме того, все потенциалы $q_i^*, i \in I$, определяемые как решение задачи (9) (см. раздел 1.2), т.е. МО Δ^* , получающееся в результате решения задачи (9)-(10), является ближайшим в смысле затрат на стимулирование к МО Δ внутренне согласованным МО. Другими словами, минимальный набор потенциалов $\{q_i^*\}$, удовлетворяющий (9), определяет ранжировку действий АЭ, ближайшую в оговоренном смысле к МО Δ . Утверждение 3 доказано.

2.6. Ранговые системы стимулирования¹

В большинстве рассматриваемых в теории активных систем (АС) [18] и в теории контрактов [31] моделей стимулирования вознаграждения управляемых субъектов - активных элементов (A^*) - со стороны управляющего органа - центра - зависят от абсолютных значений их стратегий - действий. В то же время на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС), в которых величина индивидуального вознаграждения АЭ определяется либо принадлежностью его действия некоторому

¹ Изложение материала настоящего раздела следует, в основном, работам [9, 32].

наперед заданному множеству - так называемые нормативные РСС, либо местом, занимаемым АЭ в упорядочении действий всех элементов - так называемые соревновательные РСС [9, 32, 38]. В настоящем разделе нас будет интересовать следующий аспект: так как нормативные РСС (НРСС) являются специфическим подклассом систем стимулирования, то возникает вопрос - какова их эффективность в сравнении с другими системами стимулирования.

Постановка задачи стимулирования. Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель стимулирования в АС, состоящей из центра и n АЭ. Стратегией i -го АЭ является выбор действия $y_i \in A_i$, где A_i - множество допустимых действий, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ - множество АЭ. Стратегией центра является выбор системы стимулирования - набора функций стимулирования $\sigma_i(y)$, $i \in I$, где

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A' = \prod_{i=1}^n A_i, \quad i \in I. \quad \text{Целевая функция } i\text{-го АЭ } f_i(y)$$

представляет собой разность между стимулированием и его индивидуальными затратами $c_i(y_i)$, т.е. $f_i(y) = \sigma_i(y) - c_i(y_i)$.

Множество действий $P(\sigma) \subseteq A'$, выбираемых АЭ при данной системе стимулирования (то, какие действия будут выбирать АЭ, зависит от используемой в той или иной модели концепции равновесия игры [30, 32] - см. конкретизации ниже), называется множеством реализуемых действий (множеством решений игры). Для действия $y^* \in P(\sigma)$, реализуемого системой стимулирования σ ,

$$\text{величина } \mathcal{G}_\sigma(y^*) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(y^*) \text{ называется затратами центра на стимулирование.}$$

Если при заданных ограничениях на стимулирование некоторое действие не реализуемо, то соответствующие затраты на стимулирование считаются равными бесконечности.

Целевая функция центра зависит от стратегий всех участников АС: $\Phi(\sigma, y) = H(y) - \mathcal{G}_\sigma(y)$, где $H(y)$ - функция дохода центра. Эффективностью системы стимулирования $K(\sigma)$ в рамках гипотезы благожелательности [14, 30] является максимальное значение целевой функции центра на множестве решений игры АЭ: $K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} \Phi(\sigma, y)$. Общие методы решения задач стимулирования

в многоэлементных АС описаны в [32]. Для последующего

изложения существен следующий достаточно очевидный факт [30, 32]: система стимулирования, реализующая действия с меньшими для центра затратами, имеет более высокую эффективность. Следовательно, для сравнения эффективностей различных систем стимулирования достаточно сравнить соответствующие затраты на стимулирование.

Введем следующие предположения, которые, если не оговорено особо, будут считаться выполненными в ходе дальнейшего изложения материала настоящего раздела.

А.1. Множества возможных действий A^i одинаковы: $A_i = A, \forall i, i \in I$.

А.2. Функции затрат A^i положительнозначны и монотонны.

А.3. Затраты A^i от выбора нулевого действия равны нулю.

Универсальные нормативные ранговые системы стимулирования. Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов A^i в зависимости от выбираемых действий и одинаковым поощрением A^i , имеющих один и тот же ранг. Пусть $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, m\}$ - множество возможных рангов, где m - размерность НРСС, $\{q_j\}, j = \overline{1, m}$ - совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за "попадание" в различные ранги; $\delta_i: A \rightarrow \mathcal{J}, i \in I$ - процедуры классификации (присвоения рангов). НРСС называется кортеж $\{m, \mathcal{J}, \{\delta_i\}, \{q_j\}\}$.

В [38] доказано, что для любой системы стимулирования существует НРСС не меньшей эффективности. Идея доказательства этого факта заключается в следующем. Пусть имеется произвольная допустимая система стимулирования, которая реализует некоторый вектор действий A^i с некоторыми суммарными затратами на стимулирование. Легко показать, что можно подобрать: число m , вектор вознаграждений $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ и совокупность процедур классификации $\{\delta_i\}$ - в общем случае различных для различных A^i , таких, что соответствующая НРСС будет реализовывать тот же вектор действий с теми же затратами на стимулирование, что и исходная система стимулирования (см. детали в [32]). Ключевым при этом является то, что процедуры классификаций $\delta_i(\cdot), i \in I$, действий разных A^i могут быть различны.

То, что центр использует различные процедуры присвоения рангов, может показаться «не справедливым» с точки зрения A^i .

Действительно, например, выбирая одинаковые действия, два АЭ могут иметь различные ранги и, следовательно, получать различные вознаграждения. Более «справедливой» представляется анонимная НРСС, в которой процедура классификации одинакова для всех АЭ, т.е. так называемая универсальная НРСС (УНРСС), при использовании которой элементы, выбравшие одинаковые действия, имеют один и тот же ранг и, следовательно, получают одинаковые вознаграждения.

Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ такой, что $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_m < +\infty$, который определяет некоторое разбиение множества A . УНРСС задается кортежем $\{m, \{Y_i\}, \{q_i\}\}$, причем вознаграждение i -го АЭ σ_i определяется следующим образом:

$$\sigma_i(y_i) = \sum_{j=0}^m q_j I(y_i \in [Y_j, Y_{j+1})), \text{ где } I(\cdot) - \text{ функция-индикатор, } Y_0 = 0,$$

$q_0 = 0$. Универсальная НРСС называется прогрессивной [32, 38], если $q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$. Исследуем эффективность УНРСС.

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то из монотонности функций затрат АЭ следует, что АЭ будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$, причем так как в силу А.3 $c_i(0) = 0$, то следует положить $q_0 = 0$. Действие y_i^* , выбираемое i -м АЭ, определяется парой (Y, q) , т.е. имеет место $y_i^*(Y, q) = Y_{k_i}$, где $k_i = 0$ соответствует нулевому действию и

$$(1) \quad k_i = \arg \max_{k=0, m} \{q_k - c_i(Y_k)\}, \quad i \in I.$$

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q), y_2^*(Y, q), \dots, y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности НРСС m и векторов $q \geq 0$ и Y , удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

$$(2) \quad \Phi(q, y^*(Y, q)) \rightarrow \max_{Y, q}.$$

Фиксируем некоторый вектор действий $y^* \in A'$, который мы хотели бы реализовать УНРСС. Известно, что минимально возможные (среди всех систем стимулирования) затраты на стимулирование

ние по реализации этого вектора соответствуют использованию компенсаторной системы стимулирования [30-32] (т.е. системы стимулирования, компенсирующей затраты и являющейся "абсолютно оптимальной", для которой используется индекс "К") и равны:

$$(3) \quad \mathcal{G}_k(y^*) = \sum_{i=1}^n c_i(y_i^*).$$

Из того, что при использовании УНРСС АЭ выбирают действия только из множества Y , следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонент вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n , нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу АЭ, т.е. положим $m = n$.

Для фиксированного $y^* \in A'$ положим $Y_i = y_i^*$, $i \in I$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i, j \in I$. Из определения реализуемого действия следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $y^* \in A'$, $y^* > 0$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств, обеспечивающей совпадение множества реализуемых действий и множества равновесий Нэша ($j = \bar{0}$ соответствует нулевому действию):

$$(4) \quad q_i - c_{ij} \geq q_j - c_{ji}, \quad q_i \geq 0, \quad i \in I, \quad j = \bar{0}, n.$$

Запишем (4) в виде

$$(5) \quad q_i - q_j \leq \alpha_{ij}, \quad q_i \geq 0, \quad i \in I, \quad j = \bar{1}, k_1,$$

где $\alpha_{ij} = c_{ij} - c_{ji}$. Обозначим через $\{q_i(y^*)\}$ решение системы неравенств (5). Тогда суммарные затраты на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС равны

$$(6) \quad \mathcal{G}_{\text{УНРСС}}(y^*) = \sum_{i=1}^n q_i(y^*).$$

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (6) при условии (5).

Из того, что $q_i \geq c_{ii}$, немедленно следует, что $\forall y^* \in A'$ выполнено: $\mathcal{G}_{\text{УНРСС}}(y^*) \geq \mathcal{G}_k(y^*)$, т.е. минимальные затраты на стимулирование по реализации любого вектора действий АЭ при использовании

универсальных нормативных систем стимулирования не ниже, чем при использовании компенсаторных систем стимулирования.

Таким образом, исследование УНРСС свелось к необходимости ответа на следующие вопросы - какие векторы действий АЭ могут быть реализованы в этом классе систем стимулирования (иначе говоря, для каких действий система неравенств (5) имеет решение) и в каких случаях УНРСС являются оптимальными во всем классе допустимых систем стимулирования.

Введем в рассмотрение n -вершинный граф $G_n(y^*)$, веса дуг в котором определяются $\|\alpha_{ij}(y^*)\|$. Задача минимизации (6) при условии (5) является задачей о минимальных неотрицательных потенциалах вершин графа G_n , для существования решения которой необходимо и достаточно отсутствие контуров отрицательной длины (см. теорему 1). Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Для того чтобы вектор $y^* \in A'$ был реализуем в классе УНРСС необходимо и достаточно, чтобы граф $G_n(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Рассмотрим следующую задачу о назначении (см. раздел 1.4): определить $x_{ij} \in \{0; 1\}$, $i, j \in I$:

$$(7) \quad \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_{\{x_{ij}\}}$$

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j \in I;$$

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I.$$

Лемма 2. Для того чтобы $x_{ii} = 1$, $i \in I$, $x_{ij} = 0$, $j \neq i$, необходимо и достаточно, чтобы граф $G_n(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Доказательство леммы 2. Пусть (i_1, i_2, \dots, i_n) - решение задачи (7)-(9), т.е. назначение $y_{i_1}^* = y_1^*$, $y_{i_2}^* = y_2^*$, ..., $y_{i_n}^* = y_n^*$ минимизирует (7). Предположим, что $\forall j \in I$ $i_i = j$ и в графе $G_n(y^*)$ имеется контур отрицательной длины. Тогда существует такое переназначение (перестановка вершин графа, входящих в этот контур), кото-

рое уменьшит суммарные затраты (7), следовательно, исходное назначение не является решением задачи (7)-(9) - противоречие.

Пусть граф $G_n(\hat{y}')$ не имеет контуров отрицательной длины. Предположим, что решение (i_1, i_2, \dots, i_n) не является оптимальным решением задачи (7)-(9). Пусть (j_1, j_2, \dots, j_n) – оптимальное решение. Тогда решение (j_1, j_2, \dots, j_n) можно получить из решения путем переназначений, которым в графе $G_n(\hat{y}')$ соответствуют один или несколько контуров отрицательной длины. Однако при этом суммарные затраты могут только увеличиться. Таким образом, (i_1, i_2, \dots, i_n) – оптимальное решение. •

Следствием лемм 1 и 2 является следующая теорема, характеризующая множество всех действий, реализуемых УНРСС (отметим, что при отказе от предположения А.3 результат теоремы 12 остается в силе).

Теорема 12 [9, 32]. Для того чтобы вектор $y^* \in A'$ был реализуем в классе УНРСС, необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением задачи о назначении (7)-(9).

Из результатов раздела 1.2 известно, что в оптимальном решении задачи (5)-(6) минимальна не только сумма потенциалов вершин графа G_n (суммарные затраты на стимулирование), но и минимальны все потенциалы вершин (индивидуальные вознаграждения). То есть, решение задачи о назначении (7)-(9) минимизирует не только суммарные выплаты АЭ со стороны центра, но и обеспечивает минимально возможные значения всех индивидуальных вознаграждений.

Приведенные выше результаты характеризуют множество действий, реализуемых УНРСС. Исследуем теперь эффективность этого класса систем стимулирования. Имея результат теоремы 1, мы имеем возможность предложить алгоритм вычисления минимальных потенциалов и, следовательно, количественно оценить потери в эффективности.

Рассмотрим задачу (7)-(9). Перенумеруем АЭ таким образом, чтобы оптимальным было диагональное назначение $\forall j \in I \ i_i = j$ ($x_{ii} = 1, i \in I$). Поставим в соответствие ограничению (8) двойственную переменную $u_j, j \in I$, а ограничению (9) - двойственную переменную $v_i, i \in I$. Ограничения двойственной к (7)-(9) задачи имеют вид $u_i - v_i \leq \alpha_{ii}, i, j \in I$. Заметим, что так как $x_{ii} = 1, i \in I$, то $u_i -$

$v_i = \alpha_{ii} = 0$, а значит $u_i - v_i = q_i$. Используя этот факт, определим следующий алгоритм.

Шаг 0. $u_j = c_j, j \in I$.

Шаг 1. $v_i := \max_{j \in I} \{u_j - \alpha_{ij}\}, i \in I$.

Шаг 2. $u_j := \min_{i \in I} \{v_i + \alpha_{ij}\}, j \in I$.

Последовательное повторение шагов 1 и 2 алгоритма конечное число (очевидно, не превышающее n) раз даст оптимальное решение задачи (5)-(6).

Приведенный выше алгоритм позволяет решать задачу поиска минимальных неотрицательных потенциалов вершин графа G_{α} , удовлетворяющих условию (5), т.е. реализующих заданный вектор действий АЭ. С одной стороны, доказанный выше критерий реализуемости заданных действий (теорема 12) и алгоритм синтеза оптимальной УНРСС применимы в широком классе АС, так как при их доказательстве вводились чрезвычайно слабые предположения о свойствах элементов АС (см. предположения А.1 и А.2). С другой стороны, для ряда более узких классов АС, рассматриваемых ниже, существуют более простые алгоритмы синтеза оптимальных УНРСС. Обозначим

$$(10) c'_i(y_i) = \frac{dc_i(y_i)}{dy_i}, i \in I,$$

и введем следующее предположение:

А.4. Существует упорядочение АЭ такое, что

$$(11) \forall y \in A \quad c'_1(y) \geq c'_2(y) \geq \dots \geq c'_n(y).$$

Предположениям А.2-А.4 удовлетворяют, например, такие распространенные в экономико-математическом моделировании функции затрат АЭ, как: $c_i(y_i) = k_i c(y_i)$, $c_i(y_i) = k_i c(y_i/k_i)$, где $c(\cdot)$ - строго монотонная дифференцируемая функция (иногда добавляется требование выпуклости), а коэффициенты упорядочены: $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ (частными случаями являются линейные функции затрат, функции затрат типа Кобба-Дугласа и др.).

Фиксируем некоторый вектор $y^* \in A'$, удовлетворяющий следующему условию:

$$(12) y_1^* \leq y_2^* \leq \dots \leq y_n^*.$$

Лемма 3. Если выполнены предположения А.1, А.2 и А.4, то в задаче (7)-(9) оптимально диагональное назначение.

Справедливость утверждения леммы следует из того, что любая перестановка диагонального назначения в силу предположения А.4 увеличивает суммарные затраты (отметим, что при этом предположения А3 не требуется).

Лемма 3 дает простое решение задачи о назначении (7)-(9): в случае, когда выполнено предположение А.4, АЭ, имеющим большие удельные затраты, должны назначаться меньшие действия. Теорема 12 и лемма 3 позволяют охарактеризовать множество действий, реализуемых УНРСС в рамках предположения А.4.

Следствие. Если выполнены предположения А.1, А.2 и А.4, то УНРСС реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (12).

В АС, удовлетворяющих предположениям А.1-А.4 (включая А.3!), для определения оптимальных потенциалов может быть использована следующая рекуррентная процедура, являющаяся частным случаем (соответствующим А.3-А.4) общего приведенного выше алгоритма: $q_i - c_{ij}, q_i = c_{ii} - \max_{j < i} \{q_j - c_{ij}\}, i = \overline{2, n}$.

Лемма 4. Если выполнены предположения А.1-А.4, то для решения задачи синтеза оптимальной УНРСС имеет место:

$$\forall i = \overline{2, n} \quad \max_{j < i} \{q_j - c_{ij}\} = q_{i-1} - c_{i, i-1}.$$

Справедливость леммы 4 обосновывается следующим образом. Из предположений А.3-А.4 следует, что $\forall u \in A \quad c_i(u) \geq c_i(v) \geq \dots \geq c_{ii}(1)$, а из (11) следует, что максимум в выражении для q_i достигается при $j = i - 1$.

Следствием леммы 4 является следующее простое выражение для индивидуальных вознаграждений для УНРСС, реализующей вектор $y^* \in A'$ в АС, удовлетворяющей предположениям А.1-А.4:

$$(13) \quad q_i = \sum_{j=1}^i c_i(y_j^*) - c_i(v_{j-1}^*).$$

Подставляя (13) в (6), получаем, что потери $L(\text{УНРСС}, QK, y^*)$ от использования УНРСС (по сравнению с компенсаторными) равны:

$$(14) \Delta(\text{УНРСС}; QK, y^*) = \sum_{i=1}^n \{ \sum_{j=1}^l (c_j(y_i^*) - c_j(y_{i-1}^*)) - c_i(y_i^*) \}.$$

Совокупность полученных выше результатов формулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 13 [9, 32]. Если выполнены предположения А.1 - А.4, то:

а) в классе УНРСС реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют условию (12);

б) оптимальное решение задачи стимулирования при этом определяется выражением (13);

в) превышение затратами на стимулирование минимально необходимых определяется выражением (14);

г) оптимальная УНРСС является прогрессивной.

Утверждение пункта г) теоремы 13 обосновывается следующим образом: из (13) следует, что $q_{i-1} \geq c_{i-1} / (q_i - c_{i-1})$. В силу монотонности затрат и (12): $c_{i-1} / (q_i - c_{i-1}) \geq 0$, следовательно, $\forall i = \overline{1, n-1} \quad q_{i-1} \geq q_i$, т.е. система стимулирования прогрессивна.

2.7. Задача выбора оптимального стандартного набора видов продукции¹

Стандартным набором в производстве строительных материалов и изделий называют совокупность видов продукции, обладающих функциональной завершенностью, измеряемыми и контролируемыми свойствами, независимо от того, предназначены они для непосредственного применения или для последующей переработки. Функциональная завершенность стандартного набора означает, что соответствующая совокупность видов продукции удовлетворяет все потребности данной отрасли (в рассматриваемой в настоящем разделе модели используется пример отрасли строительных материалов и изделий). Очевидно, что существует много различных вариантов стандартных наборов. Для того, чтобы сравнивать различные наборы, введем два показателя - показатель маргинальной прибыли и показатель фиксированных издержек. Как известно, маргинальной прибылью называется прибыль, определя-

¹ Изложение материала настоящего раздела базируется, в основном, на работе [11].

емая с учетом только переменных затрат. Производство каждого продукта требует, помимо переменных издержек (пропорциональных объему выпуска), фиксированных или постоянных (условно постоянных) издержек, то есть не зависящих от объема выпуска.

Пусть имеется n продуктов (например, строительных материалов и изделий), производство которых технологически осуществимо в рассматриваемом периоде времени. Обозначим a_j - переменные затраты на производство j -го продукта, b_j - постоянные или фиксированные затраты, p_j - маргинальная прибыль на единицу j -го продукта, V_j - потребность в j -ом продукте. Пусть стандартный набор состоит из множества Q продуктов. Тогда совокупная маргинальная прибыль составит $P(Q) = \sum_{j \in Q} p_j V_j$, а совокупные фиксированные затраты:

$$B(Q) = \sum_{j \in Q} b_j. \text{ Разность } \Pi(Q) = P(Q) - B(Q)$$

составляет прибыль, которую дает стандартный набор Q .

Для постановки задачи определения оптимального стандартного набора обозначим через m число различных типов потребностей в строительных материалах и изделиях, R_i - множество продуктов, которые могут удовлетворить i -ю потребность, v_{ij} - количество j -го продукта, требуемого для удовлетворения i -ой потребности. Обозначим также W_j - множество потребностей, удовлетворяемых j -ым продуктом из стандартного набора Q . В этом случае потребность в j -ом продукте составит $V_j = \sum_{i \in W_j} v_{ij}$.

Множество продуктов Q будем называть *полным*, если для любой потребности i найдется продукт $j \in Q$ такой, что $i \in W_j$ (то есть найдется продукт, который может удовлетворить i -ю потребность). Очевидно, что стандартный набор должен быть полным множеством продуктов.

Задача заключается в том, чтобы определить полное множество Q , для которого величина прибыли

$$(1) \quad \Pi(Q) = \sum_{j \in Q} (p_j V_j - b_j)$$

максимальна.

Отметим, что в случае, если рассматривается достаточно большой период времени, при определении прибыли и фиксиро-

ванных затрат необходимо учитывать их изменение во времени, а также учитывать инфляцию и дисконтирование. Кроме того, в плановой экономике задача стандартизации решалась, как правило, по критерию минимума совокупных затрат. В рыночной экономике такой критерий уже не годится, поскольку он не учитывает потребительной стоимости продуктов.

Дадим постановку задачи в терминах теории графов. Для этого определим двудольный граф $G(X, Y, U)$, где X - множество вершин, соответствующих продуктам, Y - множество вершин, соответствующих потребностям. Вершины $j \in X$ соединяются дугами (j, i) с вершинами $i \in Y$ в том и только в том случае, когда $i \in W_j$ (то есть продукт j удовлетворяет i -ю потребность). Для каждой вершины $j \in X$ зададим числа b_j, p_j , а для каждой дуги (j, i) - числа v_{ij} .

Подмножество Q множества вершин X , соответствующее полному множеству продуктов (или стандартному набору продуктов), является покрытием двудольного графа G . Обозначим T_i - множество продуктов из набора Q , каждый из которых может удовлетворить потребность i . Очевидно, что для удовлетворения i -ой потребности будет выбран продукт, для которого маргинальная прибыль максимальна. С учетом этого замечания критерий (1) можно записать в следующем виде:

$$(2) \quad \Pi = \sum_{i \in Y} \max_{j \in T_i} p_j v_{ij} - \sum_{j \in Q} b_j.$$

Задача свелась к поиску покрытия двудольного графа, для которого (2) принимает максимальное значение.

Поставленная задача является экстремальной задачей комбинаторного типа. Рассмотрим ряд частных случаев, допускающих эффективные алгоритмы решения.

Будем говорить, что продукт j *накрывает* продукт k , если $W_j \supset W_k$, то есть продукт j может удовлетворить все потребности, которые удовлетворяет продукт k .

Пусть существует упорядочение продуктов (j_1, j_2, \dots, j_n) такое, что каждый продукт накрывает все следующие за ним. Построим сеть следующим образом. Вершины сети соответствуют продуктам (j_1, j_2, \dots, j_n) и одна вершина $j_{n+1} = 0$ является выходом сети (вершина j_1 является входом). Вершины j_2, j_3, \dots, j_n соединяются дугой (j_k, j_s) , длина которой $l_{j_k j_s} = p_{j_s} (\Gamma_{j_s}^+ - \Gamma_{j_k}^+) - b_{j_s}$; $\Gamma_{j_1}^+ = 0$ по определению.

Содержательный смысл дуги (j_i, j_k) состоит в том, что продукт j_k удовлетворяет все потребности, которые он может удовлетворить, за исключением тех, которые может удовлетворить продукт j_i , а длина дуги (j_i, j_k) при этом определяет прибыль, получаемую от продукта j_k . При таком построении сети любой путь, соединяющий вершину j_i с вершиной j_n , определяет некоторый стандартный набор продуктов и наоборот, любому стандартному набору продуктов соответствует некоторый путь в сети, соединяющий вход j_i с выходом j_n . Каждой дуге (j_k, i) пути, соединяющего вход с выходом, соответствует продукт j_k , входящий в стандартный набор. Поэтому длина пути равна прибыли, получаемой от соответствующего этому пути стандартного набора. Таким образом задача определения оптимального стандартного набора свелась к задаче поиска пути в сети, имеющего максимальную длину (см. разделы 1.2 и 1.5).

Рассмотренная модель позволяет решить задачу и в более сложном случае. А именно, до сих пор мы считали, что прибыль от продажи единицы продукта не зависит от объема продажи. На самом деле с ростом объема продаж прибыль на единицу продукта, как правило, уменьшается (хотя объем прибыли, естественно, растет с ростом объема продаж). Это происходит потому, что увеличение объема продаж происходит, как правило, за счет вытеснения с рынка конкурирующих продуктов, что достигается за счет снижения цены, а значит уменьшения маргинальной прибыли на единицу продукта.

Пусть известна зависимость цены, а значит и маргинальной прибыли на единицу j -го продукта, от объема продаж $p_j(V_j)$. В рассмотренной выше модели эту зависимость легко учесть, поскольку для каждой дуги (j_k, j_i) известен продукт j_k , который соответствует этой дуге и объем этого продукта $(V_{j_k} - V_{j_i})$. Следовательно, легко определить длину дуги, соответствующую совокупной прибыли от продажи продукта j_k :

$$l_{j_k j_i} = p_{j_k}(V_{j_k} - V_{j_i})(V_{j_k} - V_{j_i}) - b_{j_k}.$$

Решение задачи в общем случае, когда не удастся получить упорядоченную последовательность накрывающих продуктов, требует применения комбинаторных методов, например, метода ветвей и границ [8].

2.8. Модели закупок¹

Рассмотрим следующий частный случай модели закупок [3], когда оптовая цена линейно зависит от объема закупок, то есть уменьшение оптовой цены q прямо пропорционально увеличению объема закупок:

$$(1) \quad q = q_0 - k \cdot x,$$

где q_0 – начальная цена, x – объем закупок, k – коэффициент снижения цены. В этом случае затраты на оплату продукции в объеме x равны (см. рисунок 17):

$$(2) \quad S(x) = x(q_0 - k \cdot x)$$

Функция $S(x)$ является вогнутой функцией x . Как известно, вогнутая функция достигает минимума на границе. Отсюда следует, что объем продукции, закупаемой в момент τ_i , должен быть равен W_{i-1} , W_{i-1} , где $\{\tau_i\}$ – моменты закупок продукции.

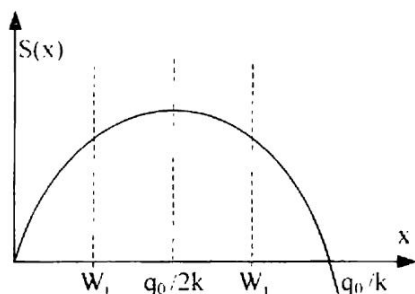


Рис. 17.

Это свойство существенно упрощает процедуру построения сети рациональных вариантов закупок (РВЗ). Действительно, сеть РВЗ будет содержать $(n + 1)$ вершину, причем любые две вершины i, j ($j > i$) будут соединены дугой, соответствующей закупке $(W_{j-1} - W_{i-1})$ единиц продукции ($W_0 = 0$).

Рассмотрим пример графика закупок, приведенного в таблице 5.

Табл. 5.

i	1	2	3
τ_i	1	6	16
W_i	10	30	45
Δ_i	10	20	15

¹ Изложение материала настоящего раздела следует, в основном, работе [3].

Пусть зависимость оптовой цены q от объема закупок x имеет вид: $q = 5 - 0,04x$. Соответствующая сеть РВЗ, вершины которой соответствуют закупкам в различные моменты времени, а длины дуг - объему закупаемой продукции, приведена на рисунке 18. Она обладает тем свойством, что любому рациональному варианту закупок соответствует один и только один путь в сети, соединяющий вход с выходом.

Цены и стоимости оптовых закупок при различных объемах x указаны в таблице 6. Добавляя к этим стоимостям затраты на хранение, пропорциональные времени хранения на складе, получаем длины дуг сети РВЗ (см. рисунок 18).

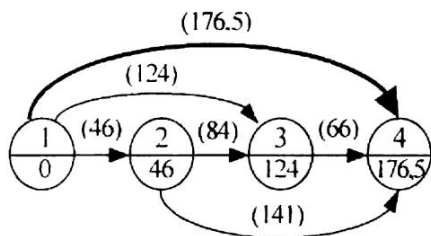


Рис. 18.

Оптимальный вариант определяется дугой $(0, 4)$ и соответствует оптовой закупке сразу всего объема 45 ед. продукции по цене 3,2 тыс. руб.

Табл. 6.

x	10	15	20	30	35	45
q	4,6	4,4	4,2	3,8	3,6	3,2
S	46	66	84	114	126	144

2.9. Механизмы обмена¹

Представим модель обменной схемы в виде графа $G(X, U)$, вершины X которого соответствуют экономическим агентам (предприятия, организации, государство, другие государства, пенсионный фонд, банки и т.д.), а дуги U указывают на возможность передачи тех или иных ресурсов от одного агента другому. Примем, что

¹ Изложение материала настоящего раздела следует, в основном, работе [12]

в экономической системе имеются m видов ресурсов (финансовые, материальные, топливно-энергетические, информационные, а также различного рода льготы, доли и т.д.). Обозначим через $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ – неотрицательный вектор ресурсов, имеющийся в распоряжении у i -го агента до обмена, а через $f_i(x_i)$ – целевую функцию i -го агента. Обозначим далее z_{iq} – вектор ресурсов, передаваемый i -ым агентом q -му. $y_i = \sum_q z_{iq} - \sum_q z_{qi}$ – вектор, показывающий изменения количества ресурсов у i -го агента. $x_i = a_i - y_i$ – вектор ресурсов у i -го агента после обмена. Очевидно, $x_i \geq 0$ и, следовательно, $y_i \leq a_i$, $i = \overline{1, n}$. Допустимым вариантом обмена будем называть совокупность неотрицательных векторов $\{z_{iq}\}$, удовлетворяющих условиям

(1) $y_i = \sum_q z_{iq} - \sum_q z_{qi} \leq a_i$, $i = \overline{1, n}$,

(2) $f_i(a_i + y_i) \geq f_i(a_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Условие (2) требует, чтобы обмен был выгоден (неубыточен) для всех агентов, иначе они откажутся в нем участвовать. Если теперь ввести критерий эффективности обмена, то получим задачу определения оптимального варианта обмена. В качестве критерия эффективности можно взять такие критерии как: максимальное увеличение доходов всех агентов на одну и ту же величину или в одно и то же число раз. В первом случае задача оптимизации обменной схемы примет вид $\max \varepsilon$ при ограничениях (1) и

$f_i(a_i + y_i) \geq f_i(a_i) + \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$, а во втором: $\max \varepsilon$ при ограничениях (1) и $f_i(a_i + y_i) \geq \varepsilon f_i(a_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Приведенные выше общие критерии применяются в том случае, когда организатором обменной схемы выступает государство, заинтересованное в росте доходов всех экономических агентов, а также в случае, когда обменная схема применяется внутри корпорации или объединения предприятий. В случае, когда организатором обменной схемы выступает отдельная фирма, получающая определенный процент от прироста доходов агентов, в качестве

критерия оптимальности примем суммарный доход агентов:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n f_i(a_i + y_i).$$

Наконец, если организатором обменной схемы является фирма-оператор, которая сама участвует в этой схеме, то критерий оптимальности может отражать ее интерес - максимизацию дохода.

Процедура получения варианта обмена при заданном графе возможных обменов и заданных векторах ресурсов у агентов называется механизмом обмена.

Важным требованием к механизму обмена является *условие прогрессивности*. Суть его заключается в том, что при изменении количества ресурсов, предъявляемых агентами к обмену, вообще говоря, изменяется и вариант обмена. Условие прогрессивности требует, чтобы при увеличении количества ресурсов, предъявляемых каким-либо агентом, новый вариант обмена был бы не менее выгоден агенту, чем прежний вариант. Это условие достаточно естественно, так как в противном случае агент будет скрывать часть ресурсов, что может снизить эффективность обмена в целом, а то и сделать его невозможным.

На практике обменные схемы работают на основе обменных коэффициентов, которые показывают, какое количество одного ресурса агент согласен обменять на единицу другого (если в качестве единицы измерения ресурса выступают деньги, то обменные коэффициенты называются дисконтом). Безусловно, обменные коэффициенты связаны с целевыми функциями участников обмена. Чтобы показать эту связь, рассмотрим линейные целевые функции агентов:

$f_i = \sum_{j=1}^m r_{ij} x_{ij}$. Очевидно, что если i -ый агент отдает j -ый

ресурс в обмен на единицу q -го, то он должен отдать не более

$x_{ij} = \frac{r_{iq}}{r_{ij}}$ единиц j -го ресурса. Таким образом, максимальный обменный коэффициент, при котором i -ый агент не проигрывает при

обмене, равен $k_{qj}^i = \frac{r_{iq}}{r_{ij}}$, то есть за единицу q -го ресурса i -ый агент

должен отдать не более k_{qj}^i единиц j -го ресурса. Агенты могут

определить минимальные обменные коэффициенты и для нелинейных зависимостей функций дохода от количества ресурсов. Естественно, что предъявляемые агентами коэффициенты обмена выше минимальной величины, поскольку агенты ожидают увеличения своего дохода в результате обмена.

Итак, примем, что для всех агентов заданы коэффициенты обмена, смысл которых заключается в том, что агенты согласны участвовать в обменной схеме на этих условиях. Коэффициенты обмена по-прежнему будем обозначать через $\{k_{ij}^l\}$. Граф, отражающий возможные обмены агентов, и совокупность обменных коэффициентов составляют *модель обменной схемы*, которая исследуется в данном разделе.

Рассмотрим сначала ситуацию, в которой каждый агент имеет ресурс только одного типа. В этом случае для построения модели достаточно каждой дуге (i, j) , соединяющей агента i с агентом j , приписать длину k_{ij} , равную обменному коэффициенту соответствующей операции обмена, а именно, показывающую, сколько единиц своего ресурса агент согласен обменять на единицу ресурса i -го агента.

Для построения модели в случае, если агенты могут иметь ресурс нескольких типов, поступим следующим образом. Пусть агент имеет ресурсы r различных типов. Представим этого агента как r агентов, каждый из которых имеет ресурс только одного типа (этих r агентов будем называть элементами). В графе возможных обменов вершины, соответствующие одному агенту, между собой не связаны.

Поскольку обменные схемы интересуют нас с позиций фирмы-оператора, то, принимая, что фирма-оператор имеет номер n , представим ее в модели в виде двух элементов – 0 и n . При этом элемент 0 является входом обменной схемы и соответствует началу обменного процесса, когда фирма-оператор передает свой ресурс какому-либо элементу. Элемент n является выходом обменной схемы и соответствует окончанию обменного процесса, когда фирма-оператор получает ресурс от какого-либо элемента системы. Обменные коэффициенты k_{in} определим как количество ресурса, которое элемент i согласен отдать за единицу стоимости ресурса фирмы-оператора, а обменные коэффициенты k_{ni} определим как стоимость единицы ресурса, получаемого фирмой-оператором от элемента i .

Получим модель обменных схем в виде *сети возможных обменов* (сеть ВО).

В дальнейшем число k_i у дуги будем называть усилением дуги, а произведение усилений дуг пути будем называть *усилением пути*. Задача фирмы-оператора заключается в том, чтобы определить обменную схему, дающую максимальную маргинальную прибыль. Методы решения задач определения оптимальных обменных схем по критериям маргинальной прибыли и дохода будут рассмотрены далее.

Методы решения задач оптимизации обменных схем. В предыдущей главе была рассмотрена задача оптимизации обменных схем. В [27] эта задача сведена к определению оптимальной циркуляции в графе с усилениями в дугах или к определению оптимального потока на сети с усилениями в дугах. Однако, полученная в результате решения этой задачи обменная схема может не удовлетворять ряду требований, которые не учтены в формальной постановке. Чтобы разобраться в сути этих дополнительных требований, рассмотрим простой пример.

Пример. Рассмотрим сеть ВО из четырех вершин (рисунок 19). Вершины 0 и 3 соответствуют фирме-оператору, числа у дуг равны обменным коэффициентам, нижние числа в вершинах равны количеству ресурса, имеющегося у соответствующего элемента.

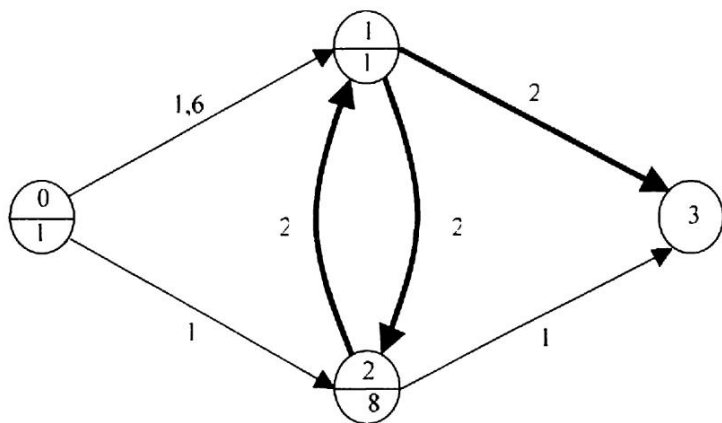


Рис. 19.

Задача определения оптимального потока с усилением в дугах в данном случае имеет вид: определить $\{x_{ij} \geq 0, (i, j) \in U\}$, где U – множество дуг сети, максимизирующие $\Phi = x_{01} - x_{02} + 2x_{13} + x_{23}$ при ограничениях $x_{13} + x_{12} = 2x_{21} - 1,6x_{01}$; $x_{21} + x_{22} = x_{02} + 2x_{12}$; $x_{01} + x_{02} \leq 10$; $x_{12} + x_{13} \leq 16$; $x_{21} + x_{23} \leq 8$. Оптимальное решение этой задачи имеет вид $x_{12} = 4$, $x_{21} = 8$, $x_{13} = 12$, остальные $x_{ij} = 0$ со значением целевой функции $\Phi_0 = 24$ (это – маргинальная прибыль фирмы оператора). Для того, чтобы убедиться, что это решение является оптимальным, рассмотрим двойственную задачу: определить $u_j, v_0, v_0 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$, минимизирующие: $F = 10v_0 + 16v_1 + 8v_2$ при ограничениях: $v_0 - 1,6u_1 \geq -1$; $v_0 - u_2 \geq -1$; $u_1 + v_1 - 2u_2 \geq 0$; $u_2 - v_2 - 2u_1 \geq 0$; $u_1 + v_1 \geq 2$; $u_2 + v_2 \geq 1$. Оптимальное решение двойственной задачи имеет вид: $u_1 = 5/8$; $u_2 = 1$; $v_0 = 0$; $v_1 = 11/8$; $v_2 = 1/4$ со значением целевой функции $F = 24$. Совпадение значений целевых функций доказывает оптимальность обоих решений.

Рассмотрим содержательный смысл полученного решения. Так как $x_{01} = x_{02} = 0$, то фирма-оператор не тратит свой ресурс, получая при этом весьма ощутимый доход! Фактически фирма-оператор выступает посредником между фирмой 1 и фирмой 2, организуя обмен ресурсами между ними (оптимальная схема обмена показана на рисунке – толстыми дугами). Такие схемы обмена (не включающие ресурс фирмы оператора) будем называть *спекулятивными*. Несмотря на всю привлекательность спекулятивных схем для оператора, они относятся к схемам обмена с повышенным риском. Действительно, достаточно велика вероятность того, что фирмы 1 и 2 просто договорятся между собой напрямую, минуя посредника (фирму-оператора) еще в процессе переговоров. Поэтому спекулятивные схемы обмена следует рассматривать отдельно.

Гораздо большей надежностью (меньшим риском) обладают так называемые *продуктовые* схемы обмена, в которых обменная схема представляет собой последовательную цепочку фирм, каждая из которых (включая фирму-оператора) получает какой-либо ресурс в обмен на свой. Продуктовым схемам обмена соответствует простой путь в сети, соединяющий вершину 0 с вершиной 3, то есть путь, каждая вершина которого проходится только один раз. Для нашего примера таких путей четыре: $\mu_1 = (0, 1, 2, 3)$, $\mu_2 = (0, 1, 3)$, $\mu_3 = (0, 2, 1, 3)$, $\mu_4 = (0, 2, 3)$. Нетрудно проверить, что оптимальным является путь $(0, 1, 3)$ и соответствующий поток – $x_{01} = 10$, $x_{13} = 16$.

который обеспечивает чистый доход $\Phi_1 = 22$, что на 2 единицы меньше, чем в спекулятивной схеме.

Наконец, возможны *смешанные схемы обмена*, включающие одновременно и продуктовые и спекулятивные схемы. Так, если бы фирма 1 имела ресурс в количестве 24 единицы, то оптимальная схема обмена был бы следующей: $x_{01} = 5$, $x_{12} = 4$, $x_{21} = 8$, $x_{13} = 20$ (остальные $x_{ij} = 0$), что дает чистый доход $\Phi_2 = 40$. В данной схеме объединены продуктовая схема (0, 1, 3) и спекулятивная (1, 2, 1, 3). Высокий риск спекулятивной схемы может привести к тому, что фактически будет реализована продуктовая схема, что дает оператору чистый доход $F_3 = 11$, что меньше чем в оптимальной продуктовой схеме. Рассмотренный пример показывает, что продуктовые и спекулятивные схемы следует рассматривать отдельно. •

Построение оптимальных продуктовых схем обмена. Как было показано выше, задача поиска оптимальной продуктовой схемы обмена сводится к задаче определения простого пути в сети ВО, соединяющего начальную вершину сети 0 (вход) с конечной n (выход) и дающего оператору максимальную маргинальную прибыль. Покажем, что эта задача является в общем случае NP-трудной комбинаторной задачей, решение которой требует перебора всех простых путей. Для этого примем, что ограниченным является только ресурс оператора, а остальные элементы имеют неограниченное количество ресурса. В этом случае, очевидно, оптимальной продуктовой схеме обмена соответствует простой путь в сети, имеющий максимальное произведение обменных коэффициентов дуг пути (это произведение будем называть усилением пути). Заметим, что для выгодности обменной схемы усиление соответствующего ей пути должно быть больше единицы. Определим длины дуг сети $l_{ij} = \ln k_{ij}$. В этом случае длина любого пути μ будет равна $L(\mu) = \ln K(\mu) = \sum_{i,j \in \mu} l_{ij}$, где $K(\mu)$ – усиление пути μ .

Таким образом, задача поиска простого пути с максимальным усилением эквивалентна задаче поиска пути максимальной длины. Как известно, эта задача эффективно решается, если в сети отсутствуют контуры положительной длины (см. раздел 1.2). В противном случае эффективных точных методов ее решения не существует. В частности, если все обменные коэффициенты больше единицы, а значит длины всех дуг положительны, граф ВО является полным

графом и для любой тройки вершин i, j, k имеет место $\ell_{ij} + \ell_{jk} > \ell_{ik}$, то задача эквивалентна задаче коммивояжера (см. раздел 1.2), которая является NP-трудной. Отсюда следует, что в общем случае для выбора оптимальной продуктовой схемы обмена необходимо применять либо алгоритмы перебора, либо эвристические алгоритмы. В случае если сеть ВО не имеет контуров с усилением больше единицы (а значит контуров отрицательной длины), существуют эффективные алгоритмы определения путей с максимальным усилением. Предлагаемый метод решения задачи состоит из двух этапов.

На первом этапе строится сеть, не имеющая контуров с усилением больше единицы, или просто сеть без контуров, эквивалентная исходной сети. Эквивалентность понимается в том смысле, что каждому простому пути исходной сети соответствует простой путь в новой сети (возможно, не один) и наоборот, каждому простому пути новой сети соответствует один и только один простой путь в исходной сети. На втором этапе определяется оптимальный простой путь в новой сети.

Рассмотрим сначала второй этап. Имеется сеть без контуров с усилением больше единицы. Требуется определить простой путь в этой сети и допустимый поток по этому пути с максимальной величиной маргинальной прибыли. Сначала рассмотрим алгоритм определения пути с максимальным усилением.

Алгоритм.

1 шаг. Помечаем вершину 0 индексом $u_0^1 = 1$, а все остальные вершины индексом $u_i^1 = 0$, $i = \overline{1, n}$.

k -й шаг. Пусть u_i^{k-1} - индекс вершины i на $(k-1)$ шаге. $i = \overline{1, n}$. Помечаем вершину i индексом $u_i^k = \max_{j \in \mathcal{L}_i} u_j^{k-1} \cdot k_{ji}$, где \mathcal{L}_i - множество дуг, заходящих в вершину i .

За конечное число шагов индексы всех вершин установятся, то есть не будут меняться при следующих шагах (доказательство этого факта приведено ниже). Обозначим через Φ_i установившиеся индексы вершин, $i = \overline{1, n}$. В этом случае величина Φ_n равна максимальному усилению. Для определения пути, имеющего максимальное усиление, применяем метод «обратного хода», как это делается

в алгоритмах определения экстремальных путей в сетях (см. раздел 1.2). А именно, определяем вершину i_1 , такую что $(i_1, n) \in U$ (U – множество дуг сети) и $\Phi_n = \Phi_{i_1} \cdot k_{i_1, n}$. Далее, определяем вершину i_2 , такую что $(i_2, i_1) \in U$ и $\Phi_{i_1} = \Phi_{i_2} \cdot k_{i_2, i_1}$, и т.д. Эта процедура за конечное число шагов p приведет к вершине $i_p = \theta$. Покажем, что полученный простой путь $\mu_0 = (\theta, i_{p-1}, i_{p-2}, \dots, i_1, n)$ имеет максимальное усиление.

Теорема 14 [12]. Полученный методом обратного хода путь определяет оптимальную продуктовую схему обмена по критерию маргинальной рентабельности, а сама маргинальная рентабельность равна индексу конечной вершины n минус 1, то есть $(\Phi_n - 1)$.

Доказательство. Для любой дуги (i, j) имеет место $\Phi_j \geq k_{ij} \Phi_i$. Поэтому для усиления $K(\mu)$ любого пути μ , соединяющего вход с выходом сети, имеем $K(\mu) \leq \Phi_n$. Отсюда следует, что если найдется путь μ_0 , такой что $K(\mu_0) = \Phi_n$, то этот путь имеет максимальное усиление. Но именно такой путь получается методом обратного хода.

Далее, маргинальная рентабельность $MP = \frac{K(\mu)x_0 - x_0}{x_0} = K(\mu) - 1$, где x_0 – количество продукта,

отдаваемое фирмой-оператором. •

Нас, однако, интересует путь, для которого соответствующая продуктовая схема обмена имеет максимальную прибыль. Определим максимальный поток $x(\mu_0)$ по пути μ_0 (величиной потока в сети с усилениями в дугах будем считать поток, выходящий из начальной вершины). Имеем $x(\mu_0) = \min_{i \neq n} \frac{a_i}{\Phi_i}$.

Пусть минимум достигается в вершине q_n . Эту вершину будем называть насыщенной. Тогда имеет место:

Теорема 15 [12]. Путь μ_0 определяет оптимальную схему обмена по критерию маргинальной прибыли среди всех путей, проходящих через насыщенную вершину.

Доказательство. Для всех путей, проходящих через вершину q_n , поток из вершины q_n не превышает a_{q_n} . Поскольку Φ_{q_n} равно максимальному усилению среди всех путей, соединяющих началь-

ную вершину с вершиной q_n , то минимальное количество ресурса, отдаваемое оператором не менее $x(\mu_0) = \frac{a_{q_0}}{\Phi_{q_0}}$.

Далее, так как Φ_n/Φ_{q_0} равно максимальному усилению среди всех путей, соединяющих вершину q с конечной вершиной n , то оператор не может получить доход больше, чем $\frac{\Phi_n}{\Phi_{q_0}} \cdot a_{q_n}$. Окончательно получаем, что маргинальная прибыль оператора составляет

$$\text{МП}(\mu_0) = \Phi_n \cdot x(\mu_0) - x(\mu_0) = \frac{a_{q_0}}{\Phi_{q_0}} (\Phi_n - 1),$$

и эта прибыль максимальна на множестве обменных схем, включающих элемент q_n . •

Исключим вершину q_0 и определим путь с максимальным усилением для оставшейся сети. Пусть это путь μ_1 , его усиление $K(\mu_1)$ и насыщенная вершина q_1 . Соответствующая маргинальная прибыль равна $\text{МП}_1 = \frac{a_{q_1}}{\Phi_{q_1}} (K(\mu_1) - 1)$ и она максимальна среди всех

путей, проходящих через вершину q_1 и не проходящих через вершину q_0 . Удаляем вершину q_1 и снова определяем путь с максимальным усилением в оставшейся сети, и т.д. Процедура заканчивается, если насыщенной окажется вершина θ или когда после удаления очередной вершины q_m в сети не останется ни одного пути, соединяющего вход с выходом. Оптимальный путь по критерию маргинальной прибыли это путь μ_n такой что

$$\frac{a_{q_i}}{\Phi_{q_i}} (K(\mu_i) - 1) = \max_{0 \leq j \leq m} \frac{a_{q_j}}{\Phi_{q_j}} (K(\mu_j) - 1).$$

Оптимизация обменных схем по доходу. Выше мы рассмотрели задачу определения обменной схемы по критерию маргинальной прибыли. Довольно часто в качестве критерия оптимальности выступает не маргинальная прибыль, а доход, получаемый оператором при реализации обменной схемы, то есть величина $D = K(\mu) x(\mu)$. Например, если фирма оператор получила за свою

продукцию или услуги от заказчика не деньги, а какую-либо продукцию, векселя или зачеты, то ее основная задача – реализовать уже полученный ресурс с максимальным доходом. Опишем алгоритм построения обменной схемы, оптимальной по критерию дохода. Предполагаем, что вершины преобразованной сети ВО имеют правильную нумерацию.

0 шаг. Присваиваем входной вершине индекс $u_0 = a_0$.

q-й шаг. Присваиваем вершине k индекс

$$(3) \quad u_q = \min \left[a_q; \max_{j < q} k_{jq} \right].$$

Индекс вершины p будет равен максимальному доходу оператора.

Для обоснования алгоритма покажем, что индекс вершины $j \neq n$ равен максимальному количеству ресурса, который можно получить от j -го элемента. Докажем этот факт по индукции. Для выходной вершины $j = 0$ это очевидно. Пусть этот факт имеет место для всех вершин $j < q$. Докажем, что это справедливо и для вершины q . Действительно, величина $k_{jq} u_j$ определяет максимальное количество ресурса, которое отдает элемент q , получив от элемента j ресурс в количестве u_j , а значит выражение (3) определяет максимальное количество ресурса, которое может отдать элемент q . то есть существует обменная схема, в которой элемент q отдает u_q единиц ресурса, и не существует обменной схемы, в которой элемент q отдает ресурса больше, чем u_q . Теперь очевидно, что максимальный доход оператора будет равен $\max_j u_j k_{jn} = u_n$.

Методы учета риска в моделях обмена и соответствующие примеры рассмотрены в [12].

2.10. Оптимизация обменных производственных схем¹

Приведем постановки задач оптимизации обменных производственных схем [7].

1.1. Обобщенная модель взаимодействия технологически связанных предприятий. Представим схему взаимодействия (взаимообмена) предприятий, составляющих производственные

¹ Изложение материала настоящего раздела базируется, в основном, на работе [7].

цепочки, в виде сети $G = (A, V)$, множество узлов которой (A) - предприятия, входящие в цепочки, источники сырья и рынок, а множество дуг (V) соответствует допустимым потокам ресурсов между предприятиями-производителями, между источниками сырья и потребителями, а также между предприятиями и рынком. Здесь и далее под ресурсами понимается как сырье, так и готовый продукт.

На множестве узлов выделяем подмножество узлов $S \subset A$, соответствующих источникам сырья (например, нефтедобывающие объединения), подмножество узлов $R \subset A$ - потребители готовых продуктов и сырья на рынке, все остальные узлы подмножества $N \subset A$ - предприятия - производители.

Каждое предприятие-производитель может использовать часть поступившего к нему сырья для переработки и выпуска продукции, а часть может в необработанном виде реализовать на рынке или расплатиться им (сырьем) со своими кредиторами. Поэтому каждый узел $i \in N$ представим в виде узлов $i_1 \in N$ и $i_2 \in N$.

Введем коэффициент усиления в узле k_i , соответствующий коэффициенту выработки предприятием i конечного продукта из единицы поступившего сырья. Если сырье, поступившее на предприятие, соответствующее узлу i , будет обрабатываться, то поток проходит через узел i_1 и коэффициент усиления в узле i_1 равен k_{i_1} . В случае же, когда сырье используется в качестве платежного средства, поток направляется в узел i_2 , причем коэффициент усиления потока в узле i_2 равен 1, $k_{i_2} = 1$.

Пусть \bar{N} - преобразованное множество узлов, соответствующих предприятиям. Обозначим поток из узла i в узел j через $f(i, j)$. Суммарный поток из узла i во все узлы, принадлежащие множеству \bar{N} , обозначим $f(i, \bar{N})$:

$$(1) \quad f(i, \bar{N}) = \sum_{j \in \bar{N}} f(i, j)$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$(2) \quad f(i, \bar{N}) + f(i, R) = k_i (f(\bar{N}, i) + f(S, i)).$$

Здесь $f(i, \bar{N})$ - потоки по дугам, соединяющим узел i с узлами подмножества \bar{N} , то есть это - ресурсы, переданные предприятием i другим предприятиям-производителям, $f(i, R)$ - количество ресур-

сов, представленных предприятием i на рынок. Если узел i первого типа, то $k_i \neq 1$, и ресурсы полученные у производителей \bar{N} и источников сырья S в количестве $f(\bar{N}, i) + f(S, i)$ будут использованы для переработки. Если узел i второго типа, то сумма $f(\bar{N}, i) + f(S, i)$ - часть сырья, которая будет использована для обмена без переработки.

Еще одной характеристикой узла является коэффициент пропускной способности узла a_i . Он соответствует предельно допустимому количеству сырья, которое может переработать предприятие i , исходя из своих технологических возможностей. Для узлов из подмножества R пропускная способность соответствует емкости рынка. Для узлов второго типа $a_{i,2} = +\infty$. Ограничение объема выпуска продукции, связанное с технологическими возможностями предприятия, эквивалентно ограничению потока по пропускной способности узла:

$$(3) \quad f(S, i) + f(\bar{N}, i) \leq a_i.$$

Для переработки единицы сырья в конечный продукт на предприятии i необходимо затратить некоторое количество денежных средств (расходы на приобретение сырья и материалов, на эксплуатацию оборудования, на выплату заработной платы и т.д.) Обозначим затраты на производство единицы продукции предприятия i через W_i . Ясно, что для вершин второго типа $i_2 \in \bar{N}$ $W_{i,2} = 0$. Как упоминалось выше, существует значительный разброс цен на одни и те же ресурсы при реализации их на рынке и при обмене ими предприятиями-партнерами между собой. Поэтому введем различные обозначения для стоимости единицы потока по дугам, входящим непосредственно в узел R (рынок), и по дугам, соединяющим узлы подмножества \bar{N} между собой. Обозначим их соответственно \bar{C}_i и \underline{C}_i . Денежные средства, имеющиеся в распоряжении предприятия i , обозначим D_i . Тогда ограничение по балансу стоимости запишется так:

$$(4) \quad (\bar{C}_i - W_i) f(i_1, R) + \bar{C}_i f(i_2, R) + (\underline{C}_i - W_i) (f(i_1, \bar{N}) + \underline{C}_i f(i_2, \bar{N})) + D_i \geq \sum_{j \in N \cup S} \underline{C}_j f(j, i) + \bar{C}_R f(R, i).$$

То есть каждое предприятие i может приобрести ресурсы на сумму, не большую той, которую оно получило от продажи своей продукции на рынке и своим партнерам $(\bar{C}_i - W_i) f(i_1, R) + (\underline{C}_i - W_i) (f(i_1, \bar{N}))$ и от продажи необработанного сырья $\bar{C}_i f(i_2, R) + \underline{C}_i f(i_2, \bar{N})$.

Если у предприятий имеется нехватка собственных средств D_i на организацию производства, то для того, чтобы «цепочки» пришли в движение, необходим организатор, который обеспечил бы денежные вливания в виде кредитов или организовал бы перераспределение начальных запасов сырья между производителями.

Ясно, что для такого организатора существенную роль будут играть вопросы времени, то есть временные интервалы от момента предоставления кредита или партии сырья до момента реализации конечной продукции на рынке, то есть период оборота вложенных денежных средств. Важной для него является также проблема снижения риска при вложении денег в организацию производственных цепочек. В описываемой ситуации интересы отдельных предприятий, например получаемая ими прибыль, отходят на второй план, а основной целью является максимизация дохода фирмы-организатора цепочек.

Для того, чтобы сформулировать ограничения на риск и отразить в постановке динамический характер задачи введем дополнительные параметры на дугах.

Обозначим $r(i, j)$ риск на дуге (i, j) , под которым будем понимать надежность производственной связи между предприятиями i и j , то есть ожидаемую долю потерь продукции при транспортировке и в ходе производственного процесса. Примем, что риск прохождения потока по связной цепи равен произведению рисков на всех дугах цепи. Пусть Z_i - цепь, проходящая через узел i : $Z_i = \{(i, i+1), f(i, i+1) \neq 0, i = \overline{0, n}\}$, где узел 0 - источник сырья, узел $n+1$ - рынок. Риск цепи Z_i равен

$$(5) \quad \mathfrak{R}_{Z_i} = \prod_{(i, j) \in Z_i} r(i, j).$$

Оценить цепочки можно либо минимизируя риск по наилучшей цепочке, то есть

$$(6) \quad \max_{Z_i} \mathfrak{R}_{Z_i} \rightarrow \min, i \in N,$$

либо принимая некоторую пороговую величину риска $\bar{\mathfrak{R}}$:

$$\max_{z_i} \mathfrak{R}_{z_i} \leq \bar{\mathfrak{R}} .$$

Другой дуговой характеристикой является время прохождения потока по дуге $\tau(i, j)$. Каждой дуге (i, j) приписано целое положительное число $\tau(i, j)$, определяющее количество интервалов времени, необходимых для ее прохождения.

1.2. Динамическая модель с учетом кредитования производственной цепочки. Рассмотрим технологическую цепочку из m предприятий $(i_0, i_1, \dots, i_m, i_{m+1})$, где i_k - предприятие, занимающее k -е место в технологической последовательности, i_0 - поставщик исходного сырья, i_{m+1} - рынок. Далее обозначим k_{ij} - количество продукции, производимое предприятием j из единицы сырья, поставляемого ему предприятием i (эти технологические коэффициенты учитывают, что часть сырья или готовой продукции отдается предприятию j). $k_{i,m+1}$ - прибыль от реализации продукции предприятия i на рынке, τ_{ij} - продолжительность производственного цикла на предприятии j , включая время доставки исходной продукции (сырья или материалов) с предприятия i , r_{ij} - риск, связанный с установлением производственной связи между предприятиями i и j . Напомним, что под риском, в данном случае, подразумевается ожидаемая доля потерь продукции при транспортировке ее от предприятия i на предприятие j и в ходе производственного процесса на предприятии j . Определим для рассматриваемой цепочки следующие величины: D - прибыль (доход) от реализации конечной продукции, полученной из единицы исходного сырья:

$$(7) \quad D = \prod_{j=1}^{m+1} k_{i_{j-1}i_j} ,$$

T - продолжительность производственного цикла цепочки от поставки исходного сырья до реализации на рынке конечной продукции:

$$(8) \quad T = \sum_{j=1}^{m+1} \tau_{i_{j-1}i_j} ,$$

Q - надежность технологической цепочки, как ожидаемая доля прибыли после реализации конечной продукции на рынке:

$$(9) Q = \prod_{i=1}^{m-1} (1 - r_{i, i_i})$$

Тогда ожидаемая прибыль, приведенная к началу процесса, описывается следующей формулой:

$$(10) \Phi = \frac{D \cdot Q}{\prod_{t=1}^T (1 + \alpha_t)}$$

где $\{\alpha_t\}$ - коэффициенты дисконтирования.

Задача заключается в определении технологической цепочки, обеспечивающей максимум прибыли на вложения средств, произведенные в начале производственного процесса. То есть, необходимо найти $\max \Phi$ по множеству всех возможных технологических цепочек. Логарифмируя выражение (10), приведем его к виду

$$(11) F = \lg \Phi = \sum_{j=1}^{m-1} \lg(k_{i_j, i_j} (1 - r_{i_j, i_j})) - \sum_{t=1}^T \lg(1 + \alpha_t)$$

Обозначив $l_{ij} = \lg k_{ij} \cdot (1 - r_{ij})$ и $\beta_t = \lg(1 + \alpha_t)$, приведем (11) к виду

$$(12) F = \sum_{j=1}^{m-1} l_{i_j, i_j} - \sum_{t=1}^T \beta_t$$

Для каждой дуги исходного графа зададим две величины l_{ij} - длина дуги и τ_{ij} - время прохождения дуги.

Заметим, что любой технологической цепочке можно поставить в соответствие простой путь μ в графе, соединяющий начальную вершину i_0 с конечной i_m . Величина F для этого пути будет равна

$$(13) F = L(\mu) - \sum_{t=1}^T \beta_t$$

$$\text{где } T(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} \tau_{ij}, \quad L(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} l_{ij}$$

Итак, задача заключается в определении пути μ , для которого величина F принимает максимальное значение.

1.3. Динамическая модель в условиях поэтапного кредитования с постоянным дисконтным коэффициентом. Предположим более выгодную с точки зрения фирмы-организатора ситуацию, когда размер кредита неограничен, и может быть получен в любой момент времени по мере возникновения необходимости. Процент, выплачиваемый по кредиту в единицу времени, как и раньше, равен α . Этот процент считается стабильным, не зависящим от времени.

Итак, пусть S - множество всех источников сырья для предприятий из множества N , а R - рынок сбыта всех видов товаров, включая сырьё и продукцию всех предприятий из множества N . Предполагается, что для производства своей продукции каждому предприятию требуется ровно один вид сырья, а все остальные расходные материалы учитываются в производственных затратах.

Пусть w_i - затраты на производство единицы продукции в вершине i , k_i - коэффициент усиления в i , равный количеству готовой продукции, которая может быть изготовлена в i из единицы сырья, c_i - рыночная стоимость единицы продукции i , a_i - ограничение на производственную мощность в вершине i , то есть максимальное количество продукции, которое может быть произведено в единицу времени, τ_{ij} - время прохождения дуги (i, j) , $f(i, j)$ - величина потока из i в j .

Рассмотрим производственную "технологическую цепочку" $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ такую, что $i_1 \in S \cup N$, $i_n \in R$, $i_2, i_3, \dots, i_{n-1} \in N$ и для каждой пары i_k, i_{k+1} существует дуга (i_k, i_{k+1}) . Вычислим прибыль от функционирования цепочки в расчете на единицу сырья, поступающего из i_1 в i_2 , при условии, что кредит может быть получен в момент возникновения необходимости.

Если из i_1 в i_2 поступит единица сырья, то в результате функционирования всей "цепочки" на рынке R будет продано конечного продукта в количестве $k_2 k_3 \dots k_{n-1}$, и доход от его продажи составит

$$(14) D = C_{i_{n-1}} \cdot k_2 \cdot k_3 \dots k_{n-1}.$$

Затраты с учетом дисконтного процента будут равны:

$$(15) F = W_{i_1}' (1 + \alpha)^{-1} \sum_{i_k, i_{k+1}} \tau_{i_k, i_{k+1}} + k_{i_2} W_{i_2}' (1 + \alpha)^{-2} \sum_{i_k, i_{k+1}} \tau_{i_k, i_{k+1}} + \dots + \left(\prod_{k=1}^{n-1} k_{i_k} \right) W_{i_n}' (1 + \alpha)^{-\tau_{i_1, i_n}}.$$

Ясно, что прибыль от этой цепочки будет равна $D - F$.

Рассмотрим задачу построения цепочки, оптимальной с точки зрения максимизации удельной прибыли, то есть прибыли, которая может быть получена в расчете на единицу исходного сырья. Такая постановка, очевидно, упрощает исходную задачу, так как сводит ее к построению простейших линейных цепочек без разветвлений. Этот подход, однако, обоснован с практической точки зрения, так как делает явными, прозрачными производственные связи и источники доходов и расходов, что необходимо при распределении конечной прибыли и ответственности за возможные срывы в сроках и поставках.

Введем следующие обозначения. Пусть P_1 - множество всех вершин графа, связанных с R -ориентированной цепочкой длины 1, то есть $P_1 = \{i \mid \exists(i, R)\}$, P_2 - множество вершин связанных с R ориентированной цепочкой длины 2, $P_2 = \{i \mid \exists(i, j) \text{ и } \exists(j, R)\}$ и т.д., P_m - множество вершин, из которых существует путь в R длины m . Ясно, что эти множества могут пересекаться. Это означает, что продукция предприятий может либо быть либо непосредственно продана на рынке, либо переработана на других предприятиях, причем вариантов технологических цепочек может быть много. Отметим, что множества P_1, P_2, \dots, P_m нет необходимости строить отдельно, так как в ходе выполнения алгоритма формируются только те их элементы, которые требуются для построения оптимальной цепочки.

Перейдем к описанию **методов решения** поставленных задач.

2.1. Построение оптимальной цепочки с использованием сетевых методов. Задача, описанная в пункте 1.2 настоящего раздела, относится к классу задач поиска экстремальных путей на графах (см. раздел 1.2). Однако, специфический вид критерия

$F = L(\mu) - \sum_{t=1}^{T(\mu)} \beta_t$ затрудняет применение известных алгоритмов.

Заметим, что если $\beta_t = \beta$ для всех t , то

$$\sum_{k=1}^{T(\mu)} \beta = \beta \cdot T(\mu) = \beta \sum_{ij \in \mu} \tau_{ij}.$$

и задача сводится к определению пути максимальной длины при длинах дуг, равных $(l_{ij} - \beta \tau_{ij})$. Пусть β принимает значения $\beta(k)$ на $(T_{k-1}, T_k]$, $T_0 = 0$, $k = \overline{1, s}$.

Рассмотрим случай, когда $\beta(1) > \beta(2) > \dots > \beta(s)$. Пусть далее $T(\mu) \in (T_{k-1}, T_k]$. Тогда целевую функцию (7) можно представить в виде

$$(16) F(\mu) = L(\mu) - \beta(k) \cdot T(\mu) - \sum_{i=1}^{k-1} (\beta(i) - \beta(i+1)) J_i.$$

Пусть μ_k - путь максимальной длины при длинах дуг, равных $(l_{ij} - \beta(k) \tau_{ij})$ и $M = \bigcup_k \mu_k$.

Теорема 16 [7]. Оптимальный путь исходной задачи μ_0 существует среди путей множества M .

Теорема 16 утверждает, что оптимальный путь μ_0 существует среди путей μ_k , причем таких, для которых $T(\mu_k) \in (T_{k-1}, T_k]$.

Опишем алгоритм решения.

1. Определяем оптимальный путь μ_1 при $\beta = \beta(1)$. Переходим к следующему шагу.

2. Если $T(\mu_1) \in [0, T_1)$, то определяем путь μ_2 . Если $T(\mu_1) \in (T_{k-1}, T_k]$, где $k > 1$, то определяем путь μ_k . Переходим к следующему шагу.

3. Если $T(\mu_k) \in (T_{k-1}, T_k]$, то определяем путь μ_{k+1} . Если $T(\mu_k) \in (T_{q-1}, T_q]$, где $q > k$, то определяем μ_q . Переходим к следующему шагу.

В силу конечности числа отрезков описанный алгоритм за конечное число шагов позволяет определить все пути μ_k , такие что $T(\mu_k) \in (T_{k-1}, T_k]$. Среди этих путей определяем оптимальный по критерию (16). Обоснование алгоритма приведено в [7].

Если условие убывания $\beta(k)$ с ростом k не выполняется, то теорема уже не имеет места. В этом случае для решения задачи необходимо развернуть сеть во времени [7, 8, 15]. При этом, одному и тому же предприятию, выпускающему продукцию в различные моменты времени, будут соответствовать различные вершины. Дугу в такой сети будем обозначать $[i(t_i), j(t_j)]$, где $i(t_i)$ означает, что предприятие i завершает выпуск продукции в момент времени t_i . Длина дуги $[i(t_i), j(t_j)]$ определяется выражением

$$(17) l_{i(t_i), j(t_i)} = l_{ij} - \sum_{t=t_i-1}^{t_i} \beta_t.$$

где $\beta_t = \beta(k)$ при $t \in [T_{k-1}, T_k)$.

2.2 Построение оптимальной цепочки с использованием методов динамического программирования. Для построения оптимальной цепочки в условиях поэтапного кредитования при наличии ограничений на производственные мощности предприятий с использованием методологии динамического программирования можно использовать следующий алгоритм:

Шаг 1. Построим множество P_1 , как множество вершин графа, связанных с R по исходящим дугам. Каждой вершине $i \in P_1$ припишем два значения:

$$(18) g(i) = c_i - w_i (1 + \alpha)^{n_R}$$

$$(19) \pi(i) = \tau_{iR}.$$

Величина $g(i)$ равна доходу от продажи единицы продукции i -го предприятия на рынке минус затраты на его производство с учетом процента на кредит. Величина τ_{iR} - промежуток времени от производства единицы продукции на предприятии i до ее реализации на рынке R .

Шаг 2. Строим множество P_2 всех вершин графа, связанных с P_1 исходящими дугами: $P_2 = \{i \mid \exists(i, j), j \in P_1\}$.

Если из вершины i исходит более одной дуги, то есть $\exists(i, j_1), \dots, (i, j_k) \in P_1$, то представляем вершину i в виде k вершин i_1, \dots, i_k так, чтобы из каждой вершины исходила ровно одна дуга (i_k, j_k) . Далее, каждой вершине $i \in P_2$ с исходящей из неё дугой (i, j) припишем пару значений:

$$(20) g(i) = k_j \cdot g(j) - w_i \cdot (1 + \alpha)^{n_i - \pi(i)}$$

$$(21) \pi(i) = \tau_{ij} + \tau_{(j)}$$

Шаг 2 повторяется для множеств P_3, P_4 и т.д. Алгоритм заканчивается, когда на m -ом шаге в множестве P_m не окажется ни одной вершины, у которой не существует входящей дуги, то есть множество P_m построить будет нельзя.

На модифицированном графе, полученном в результате выполнения алгоритма, выделим вершины, не имеющие входящих дуг, и назовем их "исходными". Такие вершины могут принадлежать любому из множеств P_1, P_2, \dots, P_m . Обозначим множество исходных вершин через I . Тогда оптимальная с точки зрения мак-

симального удельного дохода "технологическая цепочка" выбирается из условия:

$$(22) i_l = \arg \max g(i).$$

Вершина i_l является исходной в оптимальной цепочке. Поскольку каждая вершина на модифицированном графе имеет ровно одну исходящую дугу, и в соответствии с шагом 1 алгоритма все цепочки заканчиваются в вершине R , то, зная исходную вершину, всю цепочку можно построить однозначно.

Существуют очевидные способы усовершенствования приведенного выше алгоритма. Так, если для некоторой вершины i $g(i) < 0$, эту вершину можно отбросить и далее не рассматривать. Среди всех вершин $i \in P_k$ можно отобрать только Парето-оптимальные, а остальные исключить из дальнейшего рассмотрения. А именно, если для некоторой вершины $i \in P_k$ найдётся вершина $j \in P_k$ такая, что $g(i) < g(j)$ и $\pi(i) > \pi(j)$, то вершину i можно исключить из модифицированного графа.

После того, как оптимальная цепочка построена, можно вычислить прибыль от её функционирования. Используя предельные пропускные способности входящих в неё вершин, можно вычислить максимальный поток по этой цепочке. Итак, пусть оптимальна цепочка $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$.

Шаг 0. Примем $f(i_j, i_2) = a_{1j}, j = 2$.

Шаг 1. $f(i_j, i_{j-1}) = k_{ij} f(i_j, i_1)$.

Шаг 2. Если $f(i_j, i_{j-1}) \leq a_{ij}$, то $j = j + 1$, перейти к шагу 1.

Шаг 3. Если $f(i_j, i_{j-1}) < a_{ij}$, то принять $f(i_j, i_{j-1}) = a_{ij}, j = j + 1$, перейти к шагу 1. Выполнять до тех пор, пока $j \leq m$.

Если в течение всего алгоритма шаг 3 не исполнялся ни разу, то оптимальный поток $f(i_1, i_2), \dots, f(i_{m-1}, i_m)$ построен.

Если шаг 3 выполнялся хотя бы один раз и последний раз для $j = n$, то следует пройти по цепочке, начиная с $f(i_n, i_{n-1})$, в обратном порядке, пропорционально уменьшая потоки:

$$(23) \begin{cases} f(i_{n-1}, i_n) = f(i_n, i_{n-1}) / k_{in} \\ \dots \\ f(i_1, i_2) = f(i_2, i_3) / k_{i_2} \end{cases}$$

Суммарный доход от такой цепочки составляет $f(i_1, i_2) g(i_1)$.

2.11. Задачи оптимизации производственного и коммерческого циклов¹

Длительность производственного цикла оказывает существенное влияние на эффективность производства и величину требуемых оборотных средств. Сокращение производственного цикла включается, как правило, в план развития предприятия, как одна из ключевых проблем. Рассмотрим задачу оптимального согласованного планирования мероприятий по *сокращению производственного цикла*.

Представим производственный процесс в виде технологической сети, вершины которой соответствуют цехам (участкам), а дуги отражают необходимую технологию производственного процесса. Обозначим τ_i - продолжительность процесса в i -ом цехе. Тогда продолжительность производственного цикла определяется длиной максимального (критического) пути в сети (см. раздел 1.2). Если существенными являются времена доставки продукции из одного цеха в другой, то эти времена можно учесть, вводя длины соответствующих дуг.

Рассмотрим задачу сокращения продолжительности цикла на заданную величину Δ .

Опишем сначала частный случай, когда технологическая сеть представляет собой последовательную цепочку из n цехов. Каждый цех - активный элемент (АЭ) - разрабатывает и представляет в отдел стратегического развития (центр) мероприятия по сокращению продолжительности производственного цикла. В агрегированном виде эти мероприятия можно описать зависимостью $S_i(\tau_i)$ затрат, требуемых на сокращение производственного цикла на величину τ_i . Рассмотрим два механизма решения поставленной задачи.

Первый механизм. План мероприятий по сокращению продолжительности производственного цикла на величину Δ определяется

в результате решения следующей задачи:
$$\sum_{i=1}^n S_i(\tau_i) \rightarrow \min,$$

при условии $\sum_{i=1}^n \tau_i = \Delta$. Пусть τ_i^* - оптимальное решение этой

¹ Изложение материала настоящего раздела базируется, в основном, на работе [35].

задачи. Тогда i -ый цех получает плановое задание на сокращение продолжительности производственного цикла на τ_i^* и ему обеспечивается финансирование соответствующих мероприятий в объеме $S_i(\tau_i^*)$.

Второй механизм. В этом механизме величина финансирования мероприятий цеха по сокращению продолжительности производственного цикла прямо пропорциональна величине τ_i сокращения продолжительности производственного процесса в цехе, то есть $S_i = \lambda \tau_i$, где λ - величина финансирования, выделяемая на сокращение продолжительности производственного процесса на единицу времени. Для определения плана мероприятий и величины λ каждый цех представляет в отдел стратегического развития вариант сокращения продолжительности производственного процесса в цехе в зависимости от величины λ . Обозначим $\tau_i = \xi_i(\lambda)$, предлагаемую цехом величину сокращения производственного процесса при финансировании $\lambda \tau_i$.

Отдел стратегического развития определяет величину λ и план сокращения продолжительности производственного цикла из условия $\sum_{i=1}^n \xi_i(\lambda) \geq \Delta$, то есть определяется минимальное λ^* , удовлетворяющее этому условию. Далее каждый цех i получает задание на сокращение продолжительности производственного процесса на величину $\tau_i^* = \xi_i(\lambda^*)$ и соответствующее финансирование $\lambda^* \tau_i^*$.

Для исследования сравнительной эффективности этих двух механизмов рассмотрим производственные функции $S_i(\tau_i)$ типа Кобба-Дугласа, то есть $S_i(\tau_i) = \frac{1}{\alpha} \tau_i^\alpha \cdot r_i^{1-\alpha}$, $i = \overline{1, n}$, $\alpha > 1$, где

параметр r_i характеризует технологическую эффективность мероприятий по снижению продолжительности цикла.

Примем, что целевой функцией каждого цеха является разность между тем объемом финансирования, которое он получает на проведение мероприятий по сокращению производственного цикла и объективно необходимой величиной средств на эти мероприятия.

В работах [28, 30, 35] показано, что оба механизма обеспечивают одинаковое превышение выделяемых средств над объективно

необходимыми, и в этом смысле являются эквивалентными по эффективности. Однако, существенным преимуществом второго механизма является тот факт, что он стимулирует представление достоверных сведений о величине объективно требуемых объемов финансирования, то есть является механизмом честной игры [10, 14, 30]. Это свойство является решающим для создания на предприятии корпоративного духа, одним из основных условий которого являются доверительные отношения между подразделениями.

Таким образом, анализ показал преимущества второго механизма, поскольку при том же объеме финансирования он обладает важным свойством - достоверности информации, поступающей от активных элементов. Поэтому рассмотрим второй механизм для случая произвольной технологической сети.

Итак, пусть все цеха сообщили зависимости $\tau_i = \xi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим T_0 - длину критического пути. Для решения задачи используем следующий алгоритм (см. раздел 1.5):

1 шаг. Определяем λ_0 по формуле $\lambda^* = \left(\frac{\Delta}{S}\right)^{\alpha-1}$, где S - сумма

оценок s_i операций критического пути, и полагаем $t_i^1 = t_i - \xi_i(\lambda_0)$.

2 шаг. Определяем длину критического пути при продолжительностях соответствующих операций, равных t_i^1 . Обозначим эту длину через T_1 , а сам путь через μ_1 . Если $T_1 > T_0 - \Delta$, то определяем новое значение λ_1 по той же формуле, в которой $\Delta = T(\mu_1) - T_0 + \Delta$, где $T(\mu_1)$ - длина пути μ_1 при начальных продолжительностях операций $\{t_i\}$, а S равно сумме оценок s_i активных элементов, составляющих путь μ_1 . Заметим, что $\lambda_1 > \lambda_0$. Находим критический путь μ_2 и его длину $T(\mu_2)$ при продолжительностях операций $t_i^2 = t_i - \xi_i(\lambda_2)$ и повторяем процедуру.

В силу конечности числа путей сети за конечное число шагов получим минимальное значение λ^* , такое что длина критического пути в сети равна $(T_0 - \Delta)$ при продолжительностях операций пути μ_k , равных $t_i - \xi_i(\lambda^*)$.

Теперь необходимо определить плановые задания τ_i цехам по сокращению продолжительности цикла, имея в виду, что продол-

жительности операций должны удовлетворять условиям $t_i' = t_i - \xi_i(\lambda^*) \leq t_i - \tau_i \leq t_i$.

На этом этапе алгоритма критерием служит объем финансирования мероприятий, который равен $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* \tau_i$. Эта задача является частным случаем широко известной задачи оптимизации сети по стоимости (см. разделы 1.2 и 1.5).

До сих пор мы рассматривали задачу оптимального согласованного планирования производственного цикла. Не менее важной задачей является *планирование коммерческого цикла*, поскольку именно от продвижения товара от предприятия к потребителю (транспортировка, складирование, продажа) зависит конечный финансовый результат, то есть получение прибыли. Коммерческий цикл представляет собой последовательность различных операций. При планировании коммерческого цикла, как правило, учитываются такие факторы, как затраты на транспортировку, хранение и продажу, продолжительность цикла от производства до продажи, включая реализацию товара, полученного по бартеру, доход от реализации товара и различного рода риски. Все эти факторы взаимосвязаны. Так, увеличивая затраты, можно уменьшить продолжительность цикла и риски, повысить спрос (за счет рекламы) и т.д.

Рассмотрим *задачу выбора оптимального коммерческого цикла* с учетом факторов продолжительности цикла, затрат и дохода. Возможные варианты коммерческого цикла можно представить в виде сети. Вход сети соответствует началу процесс (запуск продукции в производство, переговоры по поводу закупок и заключение договора, и т.д., в зависимости то того, с какой операции начинается планирование коммерческого цикла). Выход сети соответствует окончанию процесса (реализация товара и получение денег на расчетный счет). Каждая вершина соответствует некоторой операции. В этом случае последовательности операций, составляющих коммерческий цикл, соответствует путь сети, соединяющий вход с выходом. Каждой вершине i сети поставим в соответствие два числа - затраты на проведение соответствующей операции (стоимость операции) s_i и ее продолжительность τ_i , связанные зависимостью $s_i(\tau_i)$.

Продолжительность цикла определяемая путем, обозначенным μ , равна $T(\mu) = \sum_{i \in \mu} \tau_i$, а стоимость всех его операций $S(\mu) = \sum_{i \in \mu} s_i$.

Ожидаемый доход от реализации продукции в момент T будем оценивать с помощью показателя упущенной выгоды $F(T)$.

Задача оптимизации коммерческого цикла. Определить цикл μ и продолжительность всех его операций так, чтобы сумма затрат и упущенной выгоды была минимальной.

Заметим, что в отличие от задачи оптимизации производственного цикла, в данном случае необходимо выбрать путь μ в сети (конкретный коммерческий цикл), а затем оптимизировать его по

$$\text{критерию } \Phi = \sum_{i \in \mu} s_i(\tau_i) + F\left(\sum_{i \in \mu} \tau_i\right).$$

Фактически мы имеем дело с двойной оптимизацией - выбрать оптимальный путь и выбрать оптимальные продолжительности операций этого пути. Рассмотрим сначала вторую задачу оптимизации - выбрать оптимальные продолжительности операций коммерческого цикла μ , состоящего из n операций.

Пусть $s_i(\tau_i)$ - выпуклые дифференцируемые убывающие функции τ_i , а $F(T)$ - выпуклая дифференцируемая возрастающая функция T . Тогда условия оптимальности имеют вид $-\frac{ds_i}{d\tau_i} = \frac{dF}{dT}$, $i = \overline{1, n}$.

Из этих условий можно выразить $\tau_i = \xi_i(T)$ и определить T из уравнения $\sum_{i=1}^n \xi_i(T) = T$.

Пусть теперь $F(T)$ - вогнутая функция. Практически без ограничения общности можно принять, что $F(T)$ - кусочно-линейная функция ($q_1 > q_2 > \dots > q_{k-1}$, где q_i - тангенс угла наклона соответствующего участка прямой). Из уравнения $-\frac{ds_i}{d\tau_i} = q$ определим

$$\tau_i = \xi_i(q).$$

Заметим, что τ_i - убывающая функция q . Полагаем $q = q_1$. Определяем $\tau_{i1} = \xi_i(q_1)$ и $Q_1 = \sum_{i=1}^n \tau_{i1}$. Если $Q_1 \leq T_1$, то полагаем $q = q_2$ и

повторяем процедуру. Если $T_{k-1} < Q_l \leq T_k$, где $k > l$, то полагаем $q = q_k$ и повторяем процедуру, то есть определяем $\tau_k = \xi(q_k)$, $Q_k = \sum_{i=1}^n \tau_{ik}$ и т.д. Выделяем все отрезки k такие, что $T_{k-1} < Q_k \leq T_k$.

Для каждого такого отрезка вычисляем $\sum_{i=1}^n s_i(\tau_{ik}) + F(Q_k)$ и выбираем отрезок с минимальной величиной. Соответствующие этому отрезку значения $\{\tau_{ik}\}$ определяют оптимальное решение задачи.

Перейдем к исследованию задачи, когда задана сеть, описывающая возможные варианты коммерческих циклов.

Пусть зависимости $s_i(\tau)$ имеют вид $s_i(\tau) = w_i \varphi\left(\frac{\tau_i}{w_i}\right)$, $i = \overline{1, n}$,

где φ - убывающая выпуклая функция τ . При зависимостях такого вида задача оптимизации коммерческого цикла свелась к двум отдельным задачам.

Задача 1. Определить путь минимальной длины при длинах дуг, равных w_i (см. раздел 1.2).

Задача 2. Для пути минимальной длины W_m решить задачу оптимизации продолжительностей операций.

Вторая задача сводится к минимизации функции одной переменной T : $W_m \varphi\left(\frac{T}{W_m}\right) + F(T)$. При найденном оптимальном значении T_0 продолжительность операций легко определяется:

$$\tau_i = \frac{w_i}{W_m} T_0.$$

1. Андронникова Н.Г., Баркалов С.А., Бурков В.Н., Котенко А.М. Модели и методы оптимизации региональных программ развития. М.: ИПУ РАН, 2001. – 60 с.
2. Баркалов С.А., Бурков В.Н., Гилязов Н.М. Методы агрегирования в управлении проектами. М.: ИПУ РАН, 1999. – 55 с.
3. Баркалов С.А., Бурков В.Н., Курочка П.Н., Образцов Н.Н. Задачи управления материально-техническим снабжением в рыночной экономике. М.: ИПУ РАН, 2000. – 58 с.
4. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1973. – 368 с.
5. Берж К. Теория графов и ее применения. М.: Иностранная литература, 1962. – 319 с.
6. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. - 255 с.
7. Бурков В.Н., Багатурова О.С., Иванова С.И. Оптимизация обменных производственных схем в условиях нестабильной экономики. М.: ИПУ РАН, 1996. – 48 с.
8. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974. - 234 с.
9. Бурков В.Н., Гуреев А.Б., Новиков Д.А., Цветков А.В. Эффективность ранговых систем стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2000. № 8.
10. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989. - 245 с.
11. Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С. Экономико-математические модели управления производством строительных материалов. М.: ИПУ РАН, 1996. – 69 с.
12. Бурков В.Н., Зинченко В.Н., Сочнев С.В., Хулап Г.С. Механизмы обмена в экономике переходного периода. М.: ИПУ РАН, 1999. – 70 с.
13. Бурков В.Н., Кwon О.Ф., Цитович Л.А. Модели и методы мультипроектного управления. М.: ИПУ РАН, 1998. – 62 с.
14. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 384 с.
15. Бурков В.Н., Ланда Б.Д., Ловецкий С.Е., Тейман А.И., Чернышев В.Н. Сетевые модели и задачи управления. М.: Советское радио. 1967. – 144 с.
16. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.
17. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Стимулирование в активных системах: целевые функции и метризованные отношения // Автоматика и Телемеханика. 2000. № 9. С. 138 - 146.
18. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с.

19. Бурков В.Н., Филиппов А.А. Синтез согласованных механизмов для дискретных моделей активных систем // Автоматика и Телемеханика. 1990. № 4.
20. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. Т. 1–4.
21. Воропаев В.И., Любкин С.М., Голенко-Гинзбург Д. Модели принятия решений для обобщенных альтернативных стохастических сетей // Автоматика и Телемеханика. 1999. № 10. С. 144 – 152.
22. Воропаев В.И. Управление проектами в России. М.: Аланс, 1995. – 225 с.
23. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.
24. Голенко Д.И. Статистические методы сетевого планирования и управления. М.: Наука, 1968. – 400 с.
25. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. – 416 с.
26. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. – 384 с.
27. Канцельсон М.Б. Перераспределение ресурсов. М.: Наука, 1985.
28. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1986. – 288 с.
29. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999. – 150 с.
30. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999. – 108 с.
31. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.
32. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования многоэлементных организационных систем. М.: Апостроф, 2000. – 184 с.
33. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1968. – 352 с.
34. Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. М.: Логос, 1998. – 280 с.
35. Уандыков Б.К. Методы согласованного планирования в активных производственных системах с зависимыми элементами / Диссертация на соискание ученой степени к.т.н. М.: ИПУ РАН, 1998.
36. Управление проектами: справочник для профессионалов / Под ред. И.И. Мазура, В.Д. Шапиро. М.: Высшая школа, 2000. – 819 с.
37. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. – 276 с.
38. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. М.: Наука, 1991. – 166 с.



**Владимир Николаевич
БУРКОВ**

Доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией активных систем Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, действительный член РАЕН, лауреат Государственной премии СССР и премии Дж. фон-Неймана.

Более 30 лет работает в области управления большими системами.

Вице-президент Российской ассоциации по управлению проектами, основатель теории активных систем, один из ведущих специалистов по управлению социально-экономическими системами, в том числе – по анализу и синтезу организационных механизмов.



**Алексей Юрьевич
ЗАЛОЖНЕВ**

Кандидат физико-математических наук. Автор ряда работ в области макроэкономики и систем передачи и обработки информации. Один из ведущих специалистов по управлению организационными проектами.



**Дмитрий Александрович
НОВИКОВ**

Доктор технических наук, профессор кафедры «Проблемы управления» МФТИ, ведущий научный сотрудник лаборатории активных систем Института проблем управления РАН.

Автор многих работ по теории управления социально-экономическими системами, в том числе – по механизмам стимулирования и моделированию механизмов управления организационными системами, функционирующими в условиях неопределенности

Научное издание

Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А.
Теория графов в управлении организационными системами.
Серия "Управление организационными системами".
- М.: СИНТЕГ, 2001, 124 с.

Подписано в печать 12.11.2001 г. Формат 60x88/16.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная №1.
П.л. 7,75. Тираж 1500. Заказ № 7766

Налоговая льгота – общероссийский классификатор продукции
ОК-00-93, том 2; 953000 – книги, брошюры

Гигиенический сертификат
№ 77.ФЦ.8.953.П.25.2.99 от 04.02.99 г.

ЛР № 065323 от 04.08.97 г.

ООО "НПО СИНТЕГ"
109542, Москва, ул. Вострухина, д. 6, к. 5, кв. 77

Адрес для переписки: 109542, Москва, а/я 16
Тел./факс: (095) 371-13-16 E-mail:sinteg@mail.ru

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ.
140010, г. Люберцы, Московская обл., Октябрьский пр-кт, 403.
Тел. (095) 554-21-86.

ISBN 5 - 89638 - 055 - 0



**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
имени В.А. Трапезникова
Российской Академии Наук
(ИПУ РАН)**

Является научным центром, занимающимся теоретическими и прикладными исследованиями в области управления.

Основная функция института — формирование и развитие новых прогрессивных идей и технологий управления.

Новые идеи получают строгое теоретическое обоснование и проходят экспериментальную проверку. Затем разрабатываются технологии, средства автоматизации, программы, компьютерные системы и устройства, которые находят практическое использование в сферах управления организационными, промышленными и другими объектами и системами.

ИПУ РАН — лидер российской науки об управлении в технических, организационных и социальных структурах, генератор новых прогрессивных идей и технологий в области систем управления.

Адрес: 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65.

Факс: (095) 420-2016

E-mail: iveri@ipu.rssi.ru , ymbabik@ipu.rssi.ru

WWW: <http://nicst.ipu.rssi.ru/ipu1.htm>

Лаборатория активных систем

❖ **Лаборатория активных систем**
Института проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

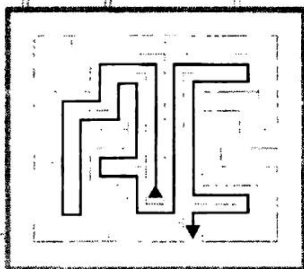
имеет более чем тридцатилетний успешный опыт анализа и синтеза механизмов управления организационными системами. В ней работают 4 доктора и 6 кандидатов наук, ядро лаборатории составляют выпускники МФТИ.

❖ **Лаборатория активных систем**

- оказывает полный комплекс исследовательских и консалтинговых услуг;
- выполняет работы по:
 - описанию и анализу социально-экономических систем,
 - разработке механизмов и методов повышения эффективности их функционирования.

❖ **Заведующий лабораторией**
– д.т.н., профессор Бурков
Владимир Николаевич,

является основателем теории активных систем, академиком РАН, зав. кафедрой проблем управления МФТИ, вице-президентом Российской ассоциации управления проектами (СОВНЕТ), лауреатом Государственной премии и премии фон Неймана.



✉ **Адрес:** 117806, Москва,
ул. Профсоюзная,
д. 65,
Институт
проблем
управления,
лаборатория 57

☎ **Телефон:** (095) 334-79-00
(095) 334-90-51

📠 **Факс:** (095) 334-89-11

✉ **E-mail:** lab57@ipu.rssi.ru

Книги издательства СИНТЕГ (по рубрикам)

Код	Рубрика•Автор•Наименование книги• ISBN• Формат•Тираж•Кол. книг в пачке• Обложка: М-мягкая/Т-твердая	Год-квартал выпуска	Кол. стр.
1. Системы и проблемы управления			
49	Ю.Б. Косьяков. Мой мозг: строение, принципы работы, моделирование. ISBN 5-89638-049-6•А5•1500•30•М	2001-3	164
44	Л.М. Фридман. Основы проблемологии. ISBN 5-89638-043-7•А5•1000•24•М	2001-2	228
42	Э.А. Трахтенгерц. Субъективность в компьютерной поддержке управленческих решений. ISBN 5-89638-041-0•А5•1500•16•М	2001-2	256
39	И.В. Прангишвили. Системный подход и общесистемные закономерности. ISBN 5-89638-042-9•А5•1500•8•Т	2000-4	528
25 26	Международная конференция по проблемам управления (29 июня – 2 июля 1999 года). ИПУ РАН – 60 лет. Избранные труды. В двух томах. Том 1 - ISBN 5-89638-025-9•А5•600•12•М Том 2 - ISBN 5-89638-026-7•А5•600•16•М	1999-4	316 312
05	Э.А. Трахтенгерц. Компьютерная поддержка принятия решений. ISBN 5-89638-003-8•А5•3000•16•М	1998-1	376
03	Управление большими системами. Материалы Международной научно-практич. конференции. Общая редакция – В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. ISBN 5-89638-001-1•А5•1000•10•М	1997-4	432
2. Управление организационными системами			
56	С.А. Юдицкий. Сценарный подход к моделированию поведения бизнес-систем. ISBN 5-89638-054-2• А5•1500•40•М	2001-4	112
55	В.Н. Бурков, А.Ю. Заложнев, Д.А. Новиков. Теория графов в управлении организационными системами. Учебное пособие. ISBN 5-89638-055-0•А5•1500•30•Т	2001-4	124
24	Д.А. Новиков, С.Н. Петраков. Курс теории активных систем. Учебное пособие. ISBN 5-89638-023-2•А5•1200•40•М	1999-4	108
22	Теория активных систем. Труды Юбилейной международной научно-практической конференции. Общая редакция – В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. ISBN 5-89638-021-6•А5•600•16•М	1999-3	320
23	В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. Теория активных систем. Состояние и перспективы.	1999-3	128

Код	Рубрика•Автор•Наименование книги• ISBN• Формат•Тираж•Кол. книг в пачке• Обложка: М-мягкая/Т-твердая	Год-квартал выпуска	Кол. стр.
	ISBN 5-89638-022-4•А5•1000•20•М		
	3. Управление проектами		
48	В.С. Смирнов, С.А. Власов, Е.С. Ваулинский, Б.И. Лебедев. Методы и модели управления проектами в металлургии. ISBN 5-89638-048-8• А5•1500•20•Т	2001-2	176
11	Н.Е. Симионова. Управление реформированием строительной организации. ISBN 5-89638-012-7•А5•1000•20•М	1998-4	224
	4. Управление качеством программных средств		
54	В.В. Липаев. Выбор и оценивание характеристик качества программных средств. Методы и стан- дарты. ISBN 5-89638-053-4• А5•1500•20•М	2001-4	232
46	В.В. Липаев. Обеспечение качества программ- ных средств. Методы и стандарты. ISBN 5-89638-044-5• А5•1500•12•М	2001-2	380
08	В.В. Липаев. Надежность программных средств. ISBN 5-89638-008-9•А5•3000•20•М	1998-3	232
07	В.В. Липаев. Документирование и управление конфигурацией программных средств. Методы и стандарты. ISBN 5-89638-004-6•А5•3000•20•М	1998-2	212
	5. Информационные технологии и проектирование информационных систем		
40	Г.Н. Калянов. Теория и практика реорганизации бизнес-процессов. ISBN 5-89638-040-2• А5•1500•20•М	2000-4	212
37	Б.Н. Гайфуллин, Г.С. Антипина. Современные информационные технологии. Обучение и кон- салтинг. ISBN 5-89638-039-9• А5•1500•20•М	2000-3	176
33	М.М. Безкорвайный, А.И. Костогрызов, В.М. Львов. Инструментально-моделирующий ком- плекс для оценки качества функционирования информационных систем "КОК". Руководство системного аналитика. Прилагается демо-версия на дискете. ISBN 5-89638-032-1•А5•1000•40•М	2000-2	120
19	В.В. Кульба, С.С. Ковалевский, С.А. Косячен- ко, В.О. Сиротюк. Теоретические основы проек- тирования оптимальных структур распределен-	1999-3	660

Код	Рубрика•Автор•Наименование книги• ISBN• Формат•Тираж•Кол. книг в пачке• Обложка: М-мягкая/Т-твердая	Год-квартал выпуска	Кол стр.
	ных баз данных. ISBN 5-89638-016-Х•А5•1200•6•Т		
	6. Информационная безопасность и информационные войны		
51	В.Н. Бурков, Е.В. Грацианский, С.И. Дзюбко, А.В. Щепкин. Модели и механизмы управления безопасностью. ISBN 5-89638-045-3•А5•1500•30•М	2001-3	160
50	А.Я. Приходько. Словарь-справочник по инфор- мационной безопасности. ISBN 5-89638-050-Х•А5•1500•40•М	2001-3	124
43	А.Я. Приходько. Информационная безопасность в событиях и фактах. ISBN 5-89638-036-4•А5•1500•16•М	2001-2	260
38	Г.Н. Устинов. Основы информационной безо- пасности систем и сетей передачи данных. ISBN 5-89638-035-6•А5•3000•20•М	2000-3	244
32	Г.Г. Почепцов. Информационно-психологическая война. ISBN 5-89638-028-3•А5•1500•30•М	2000-2	180
	7. Экономика и бизнес		
34	Толковый словарь предпринимателя. Состави- тель и редактор - В.И. Рыкунов. ISBN 5-89638-033-Х• А6•1500•40•М	2000-2	216
	8. Наука и творчество		
31	Э.А. Соснин, Б.Н. Пойзнер. Путь в науку XXI века. Руководство к действию. ISBN 5-89638-031-3•А5•1500•50•М	2000-2	88
12	Н.П. Абовский. Творчество: системный подход, законы развития, принятие решений. ISBN 5-89638-009-7•А5•1500•16•М	1998-4	296
06	Д.А. Гаврилов и др. Старые и новые столбовые шахматные игры. ISBN 5-89638-005-4•А5•1000•60•М	1998-2	98
	9. Информация и социум		
53	Л.В. Лесков. Знание и Власть. Синергетическая кратология. ISBN 5-89638-052-6•А5•1500•50•М	2001-4	100
47	Ю.С. Затуливетер. Информационная природа социальных перемен. ISBN 5-89638-046-1•А5•1500•30•М	2001-2	132
45	Ю.А. Фомин. Человечество в XXI веке. ISBN 5-89638-047-Х•А5•1500•60•М	2001-2	80
09	В.И. Бодякин. Куда идешь, человек? Основы	1998-4	332

Код	Рубрика•Автор•Наименование книги• ISBN• Формат•Тираж•Кол. книг в пачке• Обложка: М-мягкая/Т-твердая	Год-квартал выпуска	Кол. стр
	эволюциологии. Информационный подход Дис- куссионное издание. ISBN 5-89638-011-9•А5•3000•16•М		
	10. Человек, Земля, Вселенная		
41	В.Д. Цыганков. Нейрокомпьютер и мозг. ISBN 5-89638-034-8•А5•1500•20•М	2001-1	248
36	М.Г. Рогульченко. От "Розы Мира" Даниила Андреева – к концепции "Разум". ISBN 5-89638-038-0•А5•1000•50•М	2000-3	72
28	В.Д. Цыганков. Вселенная Хокинга и нейроком- пьютер. ISBN 5-89638-027-5•А5•1500•50•М	2000-1	84
10	В.В. Куликов. Узник бессмертия. Научно-фан- тастический роман. ISBN 5-89638-013-5•А5•1000•36•М	1998-4	148

Приглашаем к сотрудничеству авторов и книготорговые организации

Связь с издательством СИНТЕГ:

Адрес для переписки: **109542, Москва, а/я 16, Гуревич В.Л.**

Тел./факс: **(095) 371-1316** e-mail: sinteg@mail.ru <http://www.sinteq.ru>