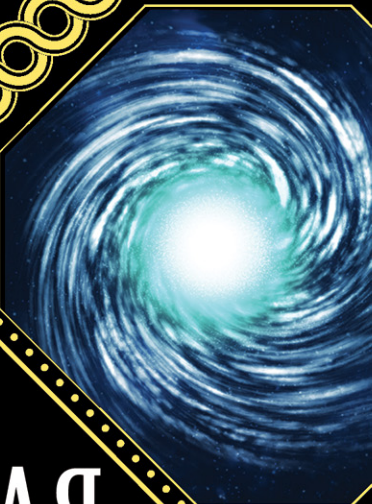
БОЛЕЕ 2000 ИЛЛЮСТРАЦИЙ



САКРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

НУМЕРОЛОГИЯ, МУЗЫКА, КОСМОЛОГИЯ, или КВАДРИВИУМ

От Пифагора до наших дней

ЗОЛОТОЙ ФОНД ЭЗОТЕРИКИ

ДЖОН МАРТИНО,
МИРАНДА ЛАНДИ, ДЖЕЙСОН МАРТИНО
И ДР.

САКРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

НУМЕРОЛОГИЯ, МУЗЫКА, КОСМОЛОГИЯ, или КВАДРИВИУМ

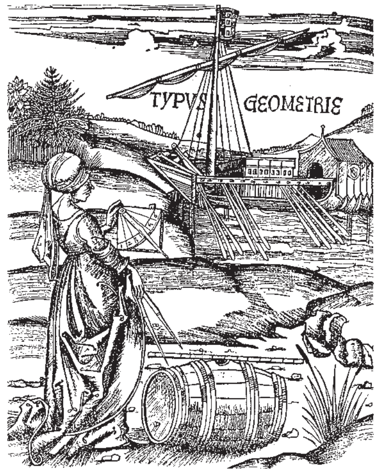
От Пифагора до наших дней

ЭКСМО

Москва
2015

Содержание


TYPUS ARITHMETICAE


TYPUS GEOMETRIE


TYPUS MUSICES
poeta
TUBAL


Ptolemeus

Из предисловия американского издателя

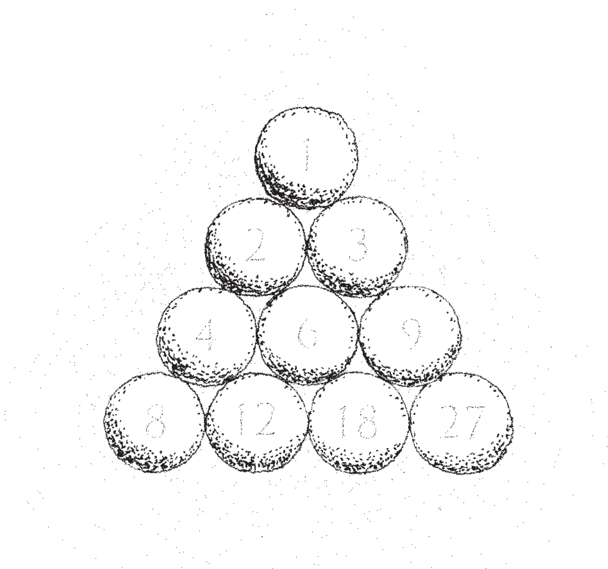
Эта книга — подлинное сокровище, объединяющее знания о древних окутанных тайной и всегда значимых вещах. Затронутые здесь темы бессмертны и никогда не устареют. Это универсальный магический проводник по различным культурам, священному и научному, привычному и незнакомому, древнему и современному.

Шесть книг из серии «Деревянные книги» были объединены под одной обложкой, к ним добавлены 32 страницы совершенно нового текста — так мы создали «Квадривиум». В «Квадривиум» вошли по две книги о геометрии и музыке (гармонии), поэтому всего книг — шесть. Мы постарались исключить из этого издания повторы, которые встречаются в оригинальных книгах, но в нескольких местах они все же сохранились…

Работа над этим изданием объединила многих людей. Благодарим за помощь и вклад в общее дело Салли Пачил (Salli Pucill), Ричарда Генри (Richard Henry), Адама Тетлоу (Adam Tetlow), Джона Мичелла (John Michell), Джона Нила (John Neal), доктора Пола Мерчента (Paul Marchant), Робина Хита (Robin Heath), Дэвида Вейда (David Wade), доктора Халеда Аззама (Khaled Azzam), Малкольма Стюарта (Malcolm Stewart), Ролли Неппер (Rolly Napper), Геоффа Стрея (Geoff Stray), доктора Моффа Беттса (Moff Betts), профессора Скотта Олсена (Scott Olsen), Ричарда Хита (Richard Heath), Метта Твида (Matt Tweed), Марка Миллса (Mark Mills), профессора Роберта Темпла (Robert Temple), Стефена Парсонса (Stephen Parsons), Натана Вильямса (Nathan Williams), Чарли Денси (Charlie Dansey) и Трейси Робинсон (Tracey Robinson).

Спасибо издателям других книг из серии «Деревянные книги» Джорджу Гибсону (George Gibson) из Walker & Bloomsbury (Нью-Йорк) и Дауду Саттону (Daud Sutton) в Каире. Наконец, благодарим профессора Кита Кричлоу (Keith Critchlow) за вступительное слово и собственно авторов книг: Миранду Ланди (Miranda Lundy), Дауда Саттона (Daud Sutton), моего дедушку Энтони Эштона (Anthony Ashton), доктора Джейсона Мартино (Jason Martineau) и Джона Мартино (John Martineau).

Джон Мартино



Тетрактис Пифагора, дополненный лямбдой из диалога Платона «Тимей», посвященного происхождению и устройству Вселенной. Платон исключил три цифры, оставив только семь, связанных с планетами: 1, 2, 3, 4, 8, 9 и 27. Для счета в Древней Греции использовались камешки

Вступление

Впервые принципы квадривиума сформулировал древнегреческий мыслитель Пифагор Самосский в VI веке до Рождества Христова (Р. Х.). Он собрал вокруг себя сообщество, в котором провозглашалось материальное и духовное равенство всех его членов, в том числе женщин, и преподавал своим ученикам теорию *квадривиума*, которую называл *тетрактис*. Школа Пифагора была первой в Европе, где преподавались семь дисциплин, названных позднее семью свободными искусствами.

Английское слово «education» (образование) происходит от латинского *educere*, что означает «воодушевлять». Действительно, Сократ, по словам Платона, считал, что знание есть неотъемлемая и значительная часть человеческой души. Так, *тривиум* (лат. *trivium*, или трехпутье) базируется на понятиях «истина», «красота» и «добро» и включает в себя три гуманитарные науки: *грамматику*, которая отвечает за правильную («добрую») структуру языка, *логику*, помогающую приблизиться к истине, и *риторику*, которая позволяет красиво изложить истину. Квадривиум, в свою очередь, основывается на, пожалуй, самом уважаемом из доступных человечеству понятий — «число». Первая из четырех дисциплин квадривиума — *арифметика*, или *Число*; вторая — *геометрия*, или *Число в Пространстве*; третья — *гармония (музыка)*, которая для Платона означала *Число во Времени*; четвертая — *астрономия*, или *Число во Времени и Пространстве*.

Семь названных выше дисциплин — необходимые ступени на пути к познанию Истины, Добра и Красоты, что, в свою очередь, ведет к пониманию изначального Единства этих понятий.

До своего рождения в человеческом теле душа обладает абсолютным знанием. В диалоге «Федон» (или «О бессмертии души», назван по имени ученика Сократа, Федона. — *Ред.*) Сократ доказывает бессмертие человеческой души. Это значит, что обучение есть не что иное, как вспоминание заложенного в человеческую душу знания, то есть приведение разрозненных частей к изначальному единству.

Цель изучения свободных искусств — возврат к Гармонии через упрощения, основанные на понимании каждой из областей квадривиума. Наконец, цель изучения свободных искусств — в стремлении к *первооснове*, коей традиционно считается потребность человеческой души в познании.

В рассуждениях об идеале обучения Сократ раскрывает свою модель непрерывности человеческого сознания. Древнегреческий мыслитель представил его в виде вертикального стержня, простирающегося от базовых сознательных суждений к высшей точке сознания — *ноэзису* (*noesis* — «я мыслю»), что есть Изначальное Единое Понимание. Сократ считал, что сознанию присущи 4 уровня, или слоя (еще один квадривиум, или тетрактис). Первое и самое значимое деление — на Видимый и Чувственный мир, на Разум и Материю. Далее каждый из этих уровней разделяется на Оценки и Суждения. В материальном мире даже самое правильное суждение основывается на чувственном опыте, в то время как в мире разума наше Сознание оказывается свободным от рамок чувственности и обретает способность к истинно объективному познанию. Самый верхний слой Сознания, где познающий, предмет познания и само знание становятся Единым Целым, Сократ называл *ноус (nous)* — Чистое Знание. В стремлении к Чистому Знанию и заключается смысл любого познания. Так, квадривиум дает искреннему искателю проверенную временем и мудростью возможность обрести свое внутреннее понимание мироустройства и осознать себя его неотъемлемой частью.

Теперь рассмотрим составные части квадривиума более детально.

Арифметика разделена на три уровня: Фактические (Материальные) Числа, Математические Числа (бесконечные) и Идеальные, или Исходные Числа (до 10).

Геометрия разворачивается в четырех измерениях: точка, образующая линию при перемещении, которая, в свою очередь, образует плоскость в результате вращения и обретает устойчивость в форме тетраэдра.

Гармония (*Музыка*), природа Души, отражает четыре музыкальных «звукоряда»: пентатонный, диатонический, хроматический и шрути (микроинтервалы в индийской классической музыке, интонационные варианты. — *Ред.*).

Наконец, *Астрономия*, *Космос*. Слово «*kosmos*» впервые было использовано Пифагором для обозначения мира как упорядоченного, организованного и единого целого, возникшего из первородного хаоса, как синоним понятий «порядок» и «ритм». Пифагорейцы видели в небесах, в пропорциональном соотнесении небесных тел гармонию чистого порядка. Наука о совершенном устройстве Вселенной была для них путем к совершенствованию собственной души.

Квадривиум изучали Кассиодор, Филолай, Тимей, Архит, Платон, Аристотель, Евдем Родосский, Евклид, Цицерон, Филон Иудейский, Никомах, св. Клементий Александрийский, св. Ориген, Плотин, Ямвлих, Макробий, Капелла (его работы, пожалуй, наиболее интересны из тех, что дошли до наших дней), Дионисий Ареопагит, Беда, Алкуин, Аль-Хорезми, Аль-Кинди, Эриугена, Герберт де Орийак, «Братья чистоты» (или «Чистые братья» — группа арабо-мусульманских мыслителей, образовавших в г. Басра, Ирак, в X веке тайное научно-философское общество. — *Ред.*), Фульберт Шартрский, Абу Али ибн Сина (Авиценна), Гуго Сен-Викторский, Бернард Сильвестр, св. Хильдегарда Бингенская, Алан Лилльский, Иоахим Флорский, Ибн Араби, Гроссетест (великий британский естествоиспытатель), Роджер Бэкон, Фома Аквинский, Данте и Кеплер.

Закончить это вступительное слово хочется двумя высказываниями. Первое принадлежит пифагорейцам (взято из «Золотых стихов»; пифагорейские «Золотые стихи» относятся к мистической пифагорейской литературе и представляют собой компиляцию отрывков, содержащих пифагорейские заповеди времен древнего пифагореизма. — *Ред.*): «Всюду познаешь, насколько возможно, единство природы». Второе высказывание принадлежит Ямвлиху: «Мир (космос) был создан не для тебя, но ты — для него».

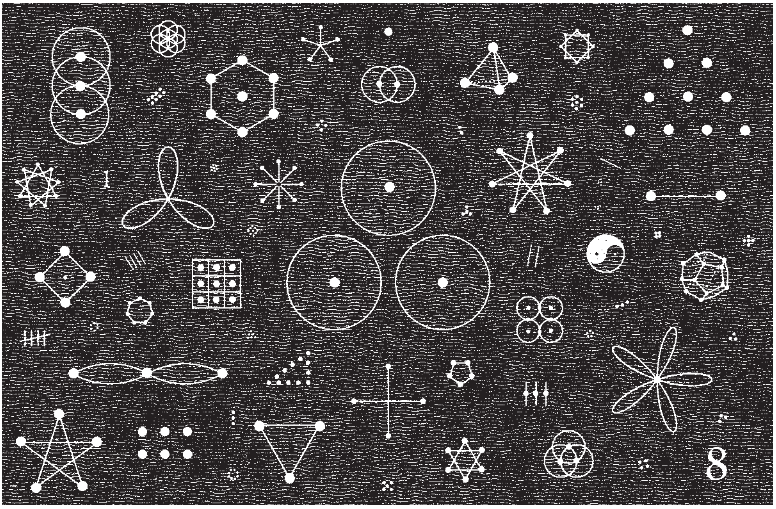
Кит Кричлоу (Keith Critchlow)

КНИГА I

Гравюра XVI века, созданная монахом-картезианцем Грегором Рейшем. Справа изображен Пифагор за средневековой счетной доской, на которой сформированы числа 1241 и 82. Слева — Боэций, который использует для счета знакомые нам по сей день индийские цифры. В центре — символ Арифметики. На ее платье художник разместил арифметическую и геометрическую прогрессии: 1, 2, 3, 4 и 1, 3, 9, 27

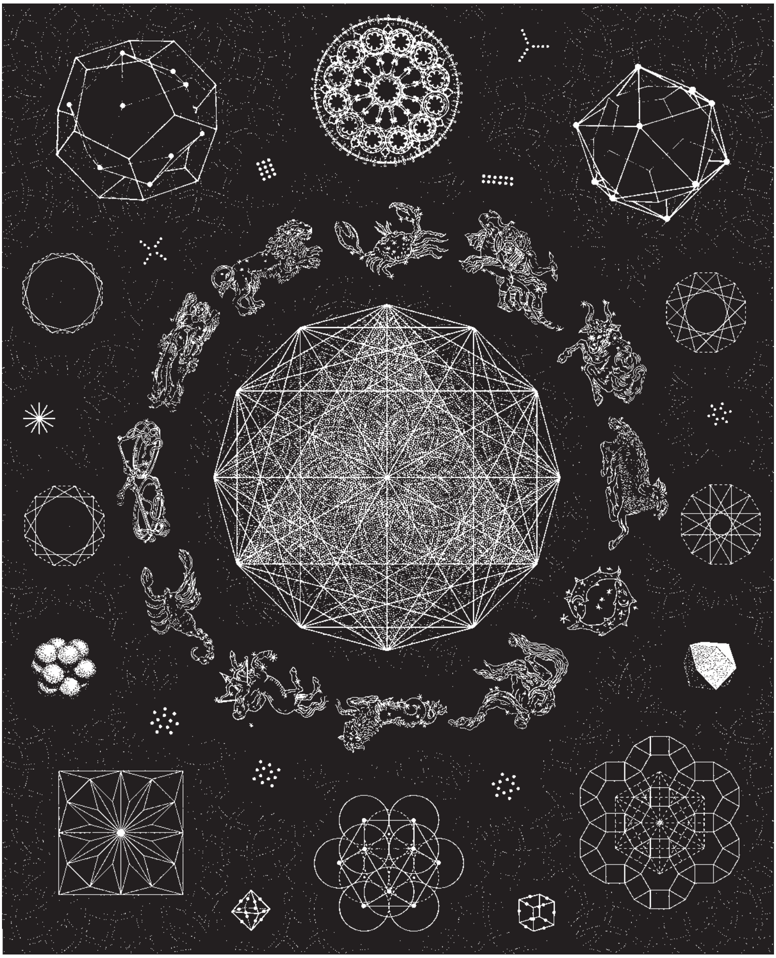
САКРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Тайные свойства чисел



Миранда Ланди

с использованием материалов Адама Тетлоу (Adam Tetlow) и Ричарда Генри (Richard Henry)



Введение

Что такое число? Как мы отличаем одно от многого или, допустим, два от трех? Ворон, потревоженный четырьмя вооруженными мужчинами, решившими остановиться под его деревом, улетит и перед тем, как вернуться в безопасное гнездо, аккуратно, с большого расстояния, «сосчитает» людей, когда они снова двинутся в путь. А если мужчин пять? Вороны не умеют считать до пяти.

Все мы знаем определенные вещи про цифры: в звукоряде 7 нот, мы считаем десятками, у табуретки 3 ножки, у цветка 5 лепестков. Подобные элементарные открытия — первые истины, с которыми знакомится человек, приходя в мир, поэтому мы редко о них задумываемся. Дети на далеких планетах, скорее всего, получают такой же опыт в процессе исследования своего мира.

Наука о числах — одна из древнейших на Земле, ее истоки затеряны в дымке времен. В ранних культурах люди, чтобы обозначить какое-то число, делали насечки на гончарных изделиях или костях, ставили каменные изваяния и вязали узелки. Они присваивали номера своим богам. Позднее все мистическое, связанное с числами, было объединено в систему магического средневекового квадривиума: арифметика, геометрия, музыка и астрономия — четыре «свободных искусства», необходимых для истинного понимания сути чисел.

У истоков любой науки лежит магия, и в древних школах не было колдуна, который не знал бы о силе чисел. В наши дни знания о сакральных свойствах чисел смыты знаниями об их количественных свойствах, коих мы не будем касаться на этих страницах. Первая книга «Квадривиума» — это путеводитель для тех, кто стоит в самом начале пути к высшей арифметике, слабая попытка приоткрыть лишь некоторые тайны и понять исконные свойства множества чисел, содержащихся в Единстве.

Монада

Изначальное единство

Единство. Один. Бог. Великий Дух. Зеркало чудес. Безмолвная вечность. Постоянство. Множество имен, обозначающих одно и то же.

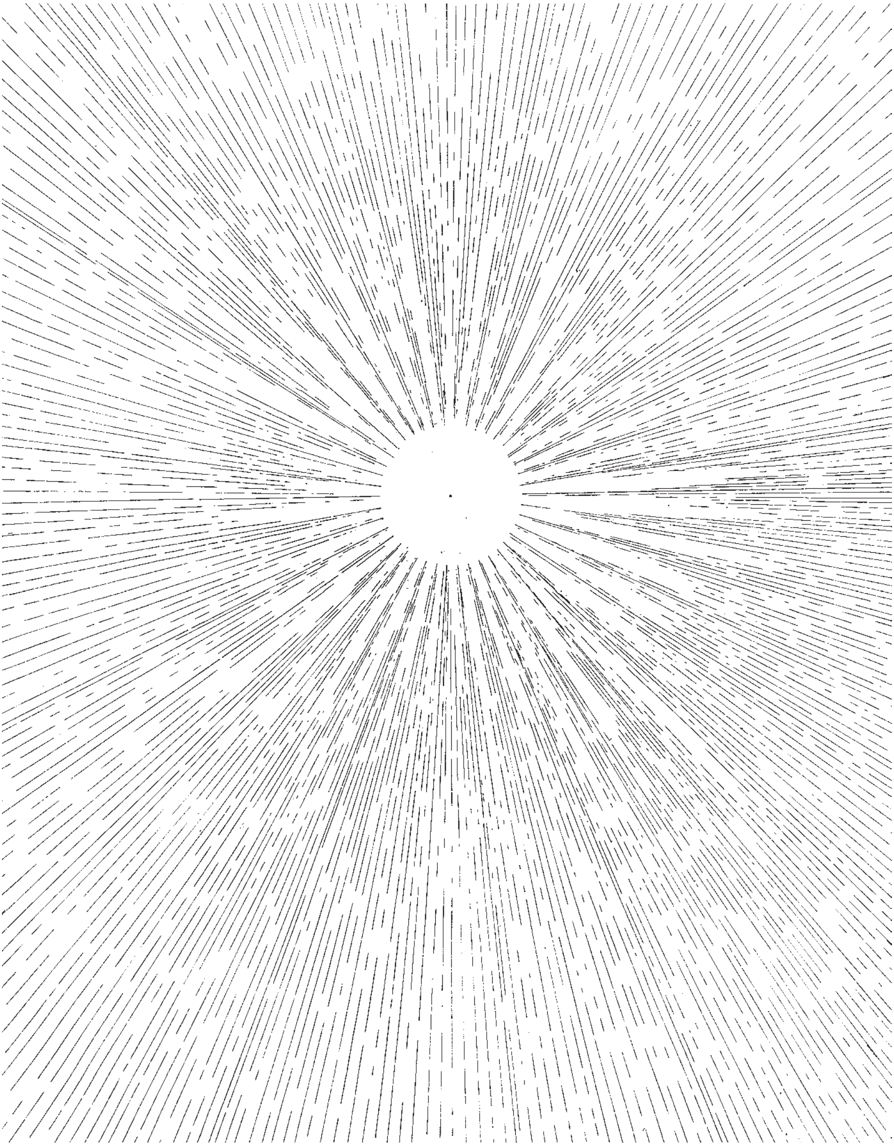
Если задуматься, мы, по сути, даже не можем говорить о Единице, так как, чтобы это сделать, нам потребуется ее объективизировать, то есть отделить себя от нее, что изначально противоречит сути Единицы — мистическая головоломка.

Единица — это предел всему, первая перед началом и последняя после конца, альфа и омега, то, из чего все формируется, и то, что сформировано из всего, начало Вселенной, сама Вселенная и центр, вокруг которого эта Вселенная вращается. Это суть, первоисточник и предназначение.

Единица отражается во всех вещах и оказывает на все одинаковое воздействие. Ее стабильность среди чисел уникальна, единица остается единицей при умножении или делении на саму себя, а одна вещь и есть естественным образом та самая вещь.

Все вещи погружены в безграничный океан Единства. Свойство единичности проникает во все, и, хотя ничто не существует вне его, внутри него также ничего нет. Как солнечный свет или мягкий дождь, мы воспринимаем Единство в его бесконечной, безусловной любви. Однако, хотя над Единицей остается завеса тайна, «по ту сторону» человеческого понимания мы осознаем, что Единицу можно познать лишь через нее саму. Единица всего одна, совершенно одна, и ее невозможно описать.

Единица — это одновременно круг, центр и чистейший тон.



Единица — это начало Вселенной, сама Вселенная и центр, вокруг которого эта Вселенная вращается. Это суть, первоисточник и предназначение

Двойственность

Противоположности

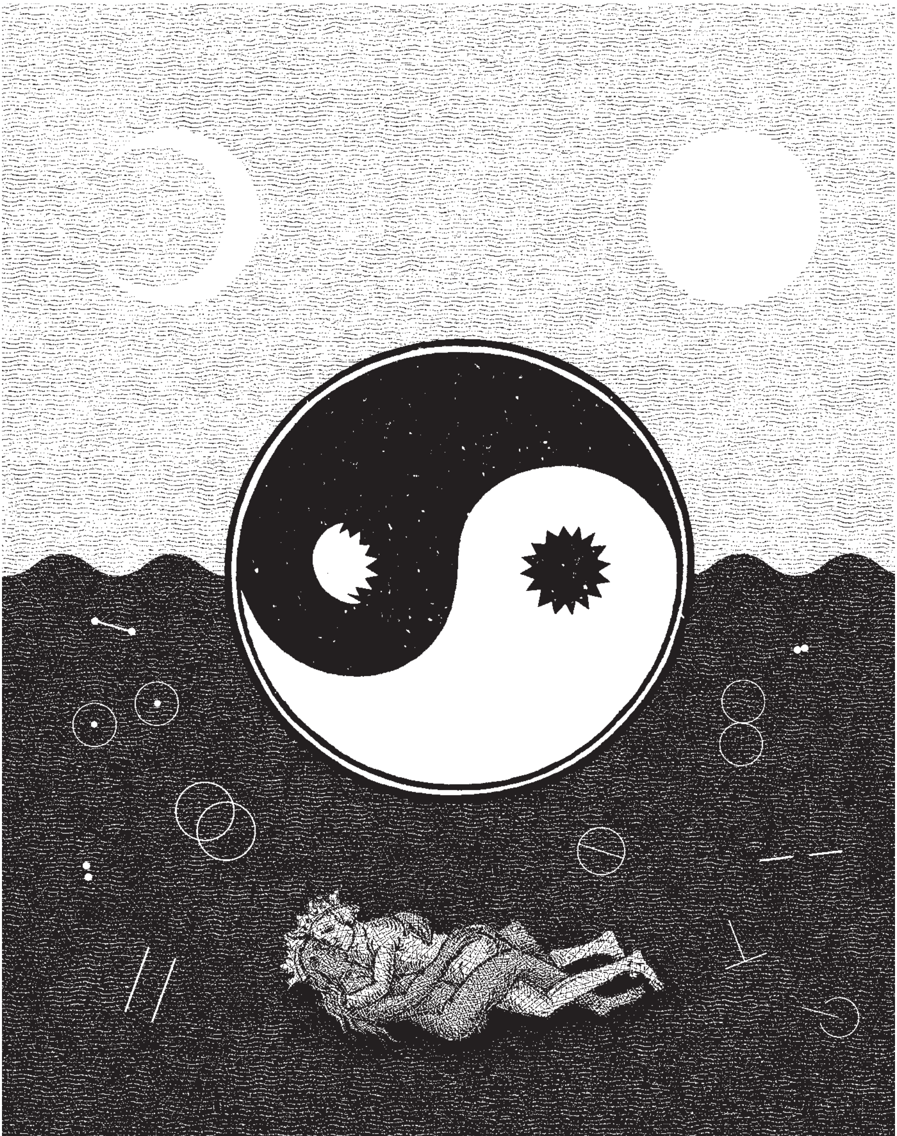
У каждой монеты две стороны. Другая сторона — это воплощение диады. Число 2 — это иносказание для тени, противоположности, полярности и воплощения. Число 2 — это там, а не здесь; тот, а не этот; это изначальная основа любого противопоставления, метода, который наш мозг использует для познания окружающего мира. Число 2 — это божественная пара.

Пифагорейцы считали число 2 сексуальным, женским, уравновешенным началом. Они часто рассуждали о парах полных противоположностей: предельное — беспредельное, четный — нечетный, один — много, правый — левый, мужской — женский, движущийся — неподвижный, прямой — изогнутый... Стоит также вспомнить о движении внутрь и вовне, о нашем дыхании, о положительном и отрицательном зарядах электрического поля, о вещественных и мнимых (комплексных) числах.

В музыке мы слышим диаду (двухголосный аккорд, созвук. — *Ред.*), когда одновременно воспроизводятся два музыкальных звука разной высоты. В геометрии — это линия, две точки или две окружности.

Лингвистически двойственность вещей отражается по-разному. Если мы говорим о едином целом, состоящем из двух частей, то добавляем приставку «би», например «биатлон» или «бинарный». Если же речь идет о разделении или неразрешимости, мы используем приставку «ди», например «дилемма».

Современные философы в понимании двойственности могут продвинуться несколько дальше мыслителей древности. Все свое окружение слева и справа, внизу и вверху, впереди и сзади мы пропускаем через два глаза и два уха. Женщины и мужчины живут под Солнцем и Луной, и лишь изредка замечают, сколь удивительно гармоничны эти небесные светила — одинаковы по размеру на небе, но одно принадлежит дню, второе — ночи.



Число 2 — это божественная пара. Есть пары полных противоположностей: предельное — беспредельное, четный — нечетный, один — много, правый — левый, мужской — женский

Три

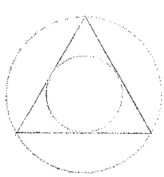
Множество

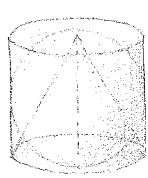
В одних культурах проявляется мужское начало, в других — женское. Число 3 — это дерево, мост между небом и землей. Триада — это синтез, или возврат к Единству после деления. Число 3 традиционно считают первым нечетным числом.

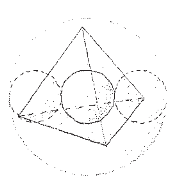
Три ножки табуретки придают ей устойчивость, третья прядь тесьмы формирует плетение (узел можно завязать только в трехмерном пространстве). Сказки и духовные традиции изобилуют необыкновенными тройками, жонглируют прошлым, настоящим и будущим, смешивают знающего, знание и объект знания. Триада проявляется как основной принцип живой природы — рождение, жизнь и смерть. Треугольник — это наиболее простой конструктивный элемент, первый стабильный многоугольник.

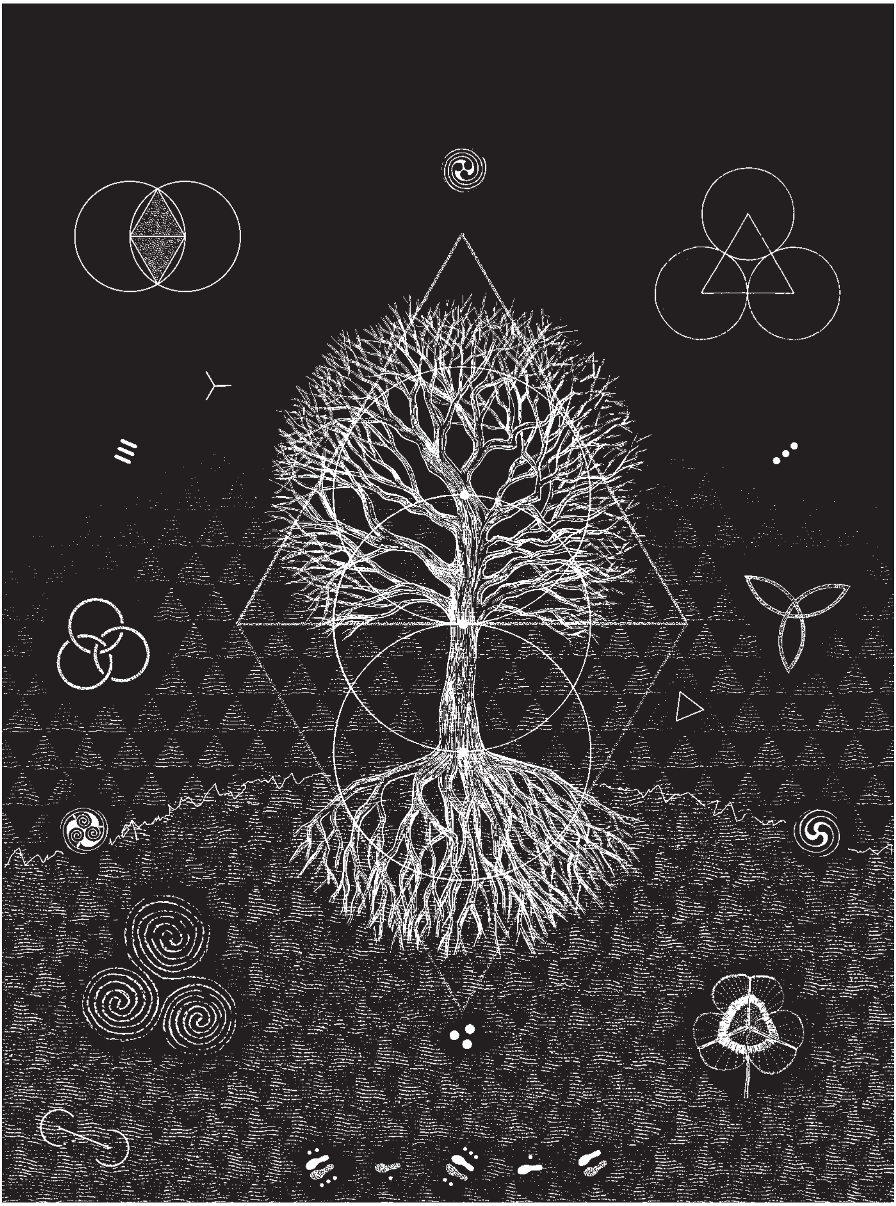
Чистая квинта в музыке (в натуральном строе обозначается как 3:2) — самое красивое сочетание звуков, она прекраснее, чем собственно октава, с нее раньше начиналась настройка любого музыкального инструмента. Число 3 олицетворяет трехчастную природу мира.

Фигура «рыбий пузырь» (*vesica piscis*), образованная пересечением двух кругов одного радиуса, формирует два треугольника (*см. напротив вверху слева*). Равносторонний треугольник, вписанный в окружность, означает октаву, так как диаметр описанной окружности точно вдвое больше диаметра вписанной (*внизу слева*), а площадь внешнего круга — больше втрое. *Внизу в центре* мы видим любимое открытие Архимеда (ок. 287—212 до Р. Х.) — сферу и конус, вписанные в цилиндр. Архимед показал, что объемы этих фигур соотносятся как 1:2:3.









Число 3 — это дерево, мост между небом и землей. Триада проявляется как основной принцип живой природы — рождение, жизнь и смерть

Четыре

Две пары

После числа 3 мы вступаем в царство олицетворения. Число 4 — результат рождения, воспроизведения, две пары; это первое число (кроме единицы), из которого можно извлечь корень; символ Земли и природы.

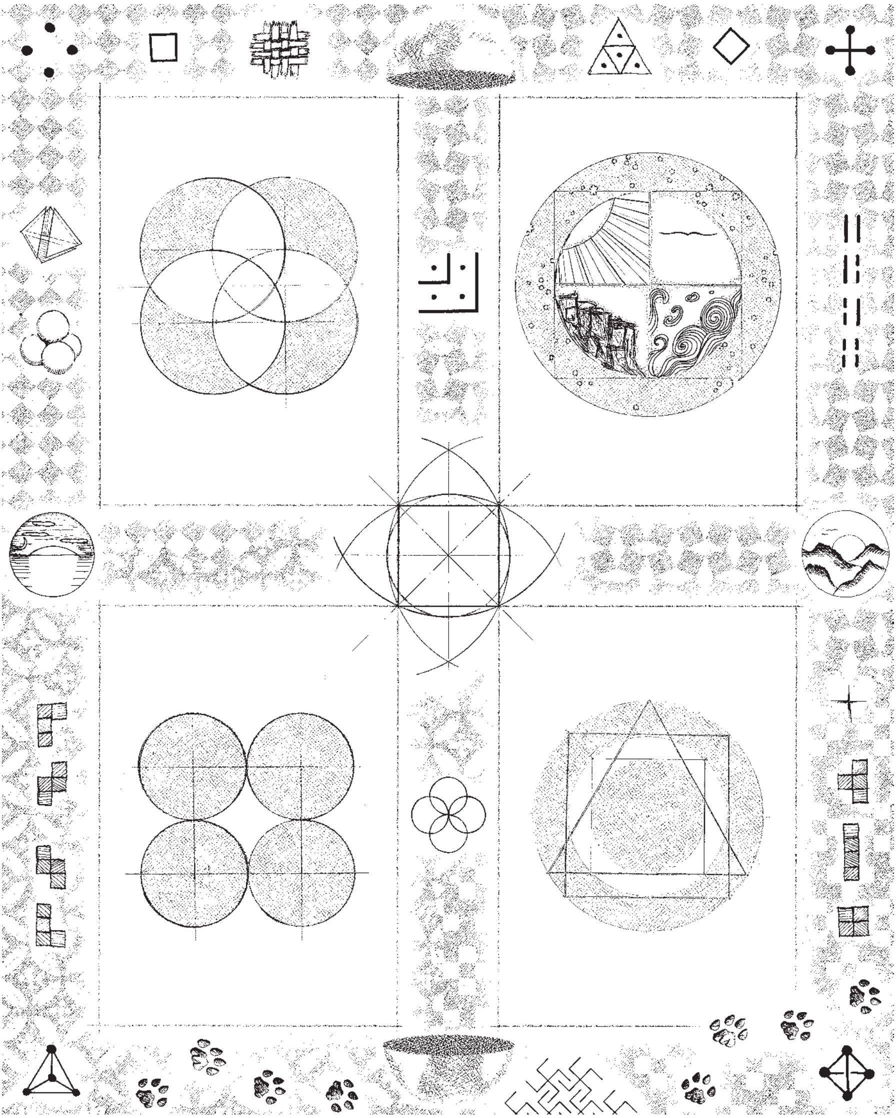
Число 4 — это основа трехмерного пространства. Простое геометрическое тело, известное как тетраэдр, или «четырехгранник», складывается из 4 треугольников, 4 точек или 4 сфер. Так же как треугольник является основанием плоскости, тетраэдр — это основа структуры трехмерного пространства.

Число 4 часто ассоциируется с олицетворением четырех стихий природы: Огонь, Воздух, Земля и Вода. Окружность, вписанная в квадрат, — это небесное кольцо (*см. напротив вверху справа*). Солнцестояния и равноденствия делят год на четверти, животные ходят на 4 ногах. Земля изобилует самыми разнообразными «четверками».

Число 4 как статичный квадрат перетекает в динамичный крест. Взаимодействие креста и квадрата закодировано в традиционном обряде ориентации нового дома по сторонам света, когда тень от центральной колонны на восходе и закате образует символическую ось Восток-Запад. Принцип квадратичности универсален, он встречается в древнекитайских текстах и в работах Марка Витрувия (I век до Р. Х., римский архитектор и механик, ученый-энциклопедист — *Ред.*). Сегодня мы также сталкиваемся с ним повсеместно, например во время прогулок по городским кварталам.

Все, что нас окружает, состоит всего из 4 частиц: протонов, нейтронов, электронов и нейтрино (это авторское деление условно. — *Ред.*).

В музыке число 4 проявляется как третий обертон, 4:1, а также как интервал 4:3, называемый чистой квартой, которая дополняет квинту в октаве.



Число 4 — это символ Земли и природы. Окружность, вписанная в квадрат, — это небесное кольцо. Солнцестояния и равноденствия делят год на четверти, животные ходят на 4 ногах. Земля изобилует самыми разнообразными «четверками»

Пять

Сама жизнь

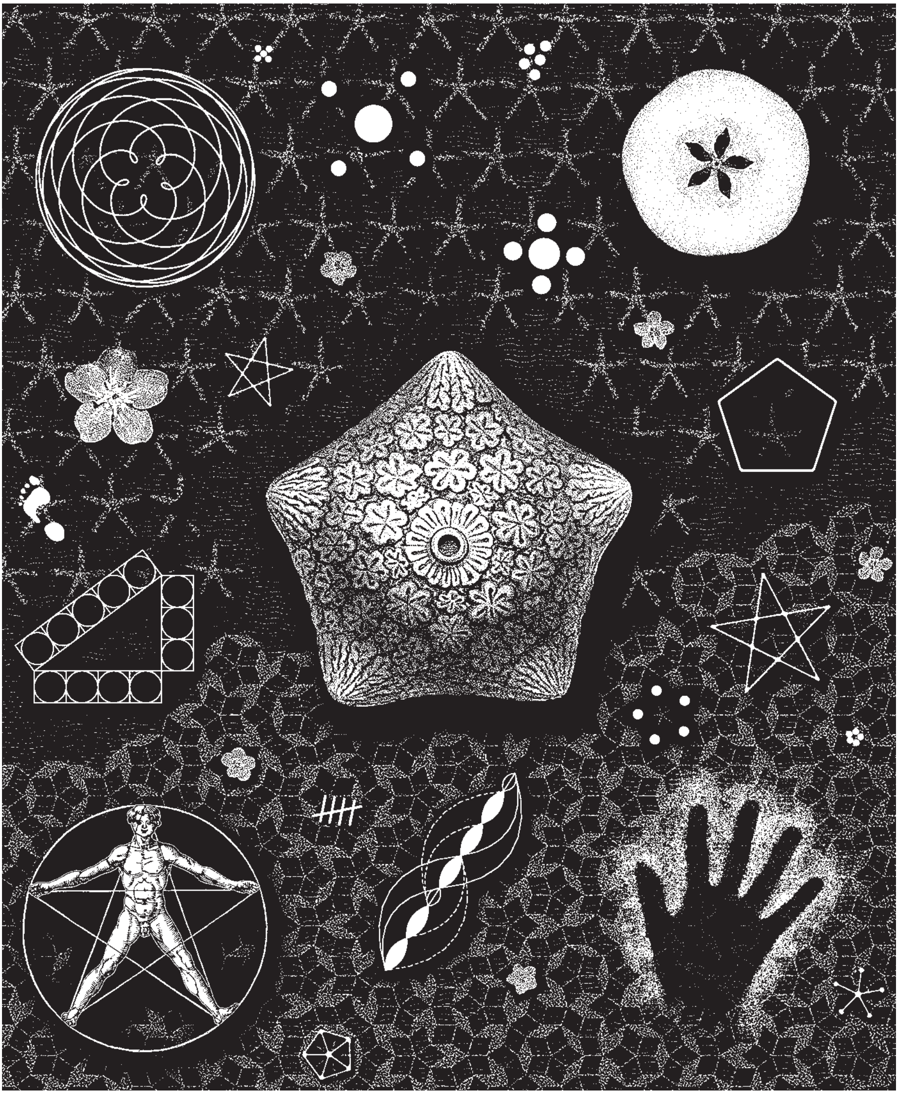
Свойства числа 5 поистине магические. Дети инстинктивно рисуют звезду с пятью лучами, и каждый из нас ощущает исходящую от нее энергию.

Число 5 соединяет мужское и женское начала: 2 и 3 — в одних культурах или 3 и 2 — в других. Число 5 — это универсальное число размножения и биологической жизни, один из элементов числовой последовательности Фибоначчи, а также число, олицетворяющее воду, так как угол H-O-H в молекуле воды близок к 108° — углу правильного пятиугольника. Сама вода — это удивительная жидкость с кристаллической решеткой в виде изменяющегося двадцатигранника, который был одним из так называемых платоновых геометрических тел (*внизу, второй рисунок справа*), 5 треугольников, соединяющихся в каждой вершине. Вода символизирует суть числа 5 — текучесть, изменчивость и жизнь. Сухое либо мертво, либо ждет воды.

Мы обнаруживаем число 5 в цветах яблони, на руке или ступне. Ближайшая к нам планета Венера, получившая свое название в честь римской богини любви и красоты, вращаясь вокруг Солнца, в течение своего восьмилетнего цикла рисует правильный и красивый пятилистник (*напротив вверху слева*).

Универсальная интервальная система в музыке является пятиступенной — пентатоника (черные клавиши фортепиано). Она состоит из 5 тонов, сгруппированных по 2 и 3. Терция в натуральном строе имеет обозначение 5:4.

Число 5 — это диагональ прямоугольника размером 3 × 4, причем в отличие от чисел 3 и 4 число 5 не имеет связи с плоскостями.



Свойства числа 5 поистине магические. Это универсальное число размножения и биологической жизни. Мы обнаруживаем число 5 в цветах яблони, на руке или ступне. Венера, вращаясь вокруг Солнца, в течение восьмилетнего цикла рисует пятилистник. Дети инстинктивно рисуют звезду с пятью лучами, и каждый из нас ощущает исходящую от нее энергию

Шесть

Гексада

Число 6, как и его милый вестник — снежинка, привносит в мир безупречность, структурированность и порядок. Результат взаимного умножения чисел 2 и 3, единение четного и нечетного. Число 6 — это число созидания. Во многих священных книгах мы встречаем упоминания о том, что Бог сотворил мир за 6 дней.

Целые числа, которые мы умножаем друг на друга, чтобы получить другое число, называют *множителями* этого числа. Большинство чисел имеет множители, сумма которых меньше, чем исходное число, их называют *недостаточными*. Число 6 — удивительное, его множители — 1, 2 и 3 — в сумме также дают 6. Это первое *совершенное число*.

Радиус любой окружности можно отложить на ее кривой ровно 6 раз. Вокруг правильного шестиугольника можно описать окружность, радиус которой будет равен длине стороны этого шестиугольника. Так же как треугольник и квадрат, шестиугольник является правильным многоугольником, которым можно полностью замостить плоскость.

Трехмерное пространство включает в себя 6 направлений: вперед — назад, вверх — вниз, налево — направо; воплощением этого служат 6 граней куба, 6 вершин октаэдра и 6 ребер тетраэдра. Число 6 часто проявляется в структуре кристаллов, например кварца и графита, в структуре снежинок, а также в бензольном кольце, которое состоит из 6 атомов углерода и является основой органической химии. «Просто добавь воды...»

Площадь и половинный периметр так называемого египетского треугольника Пифагора со сторонами 3, 4 и 5 равны 6. В музыке число 6 — это октава в пятиступенной интервальной системе.

У насекомых по 6 ножек, а медоносные пчелы делают из воска прекрасные шестиугольные соты.

Число 6, как и его милый вестник — снежинка, привносит в мир безупречность, структурированность и порядок. Это число созидания, единение четного и нечетного

Гептада

Семь сестер

Число 7 стоит отдельно от остальных простых чисел и крайне мало на них похоже. Семиступенная интервальная система так же естественна, как и пентатонная. Это белые клавиши фортепиано, образующие универсальные мелодические обороты, 7 античных ладов. Как все числа, 7 включает в себя предшествующее число; в пространственном отношении оно играет роль центра, из которого в 6 направлениях выходят лучи измерений. На одной плоскости 6 одинаковых окружностей помещаются вокруг седьмой.

Лунный месяц чаще всего делят на 4 фазы; продолжительность каждой — 7 дней (с непостижимо загадочной безлунной ночью, завершающей полный цикл).

Наши глаза различают 3 основных цвета: красный, зеленый и синий. Комбинации этих цветов составляют 4 других цвета: желтый, голубой, пурпурный и белый. Согласно представлениям древних индийцев, сквозь наши тела проходит радуга из 7 энергетических каналов, или чакр. Сегодня мы понимаем их как 7 желез внутренней секреции.

7 небесных тел, известных в эпоху античности, расположенных в соответствии с их кажущейся скоростью (*напротив вверху в центре*) удивительным образом сочетаются с металлами (*напротив вверху слева*) и днями недели (*напротив вверху справа*): Луна-☽-серебро-понедельник, Меркурий-☿-ртуть-среда, Венера-♀-медь-пятница, Солнце-☉-золото-воскресенье, Марс-♂-железо-вторник, Юпитер-♃-олово-четверг, Сатурн-♄-свинец-суббота (*см. также с. 305*).

Есть 7 видов симметрии бордюров, 7 групп кристаллических структур и 7 витков в классическом, или критском, лабиринте (*см. все на рисунке напротив*).

Число 7 играет роль центра, из которого в 6 направлениях выходят лучи измерений. Есть 7 небесных тел, 7 дней недели, 7 желез внутренней секреции, 7 цветов радуги, 7 видов симметрии бордюров, 7 групп кристаллических структур и 7 витков в классическом лабиринте

Восемь

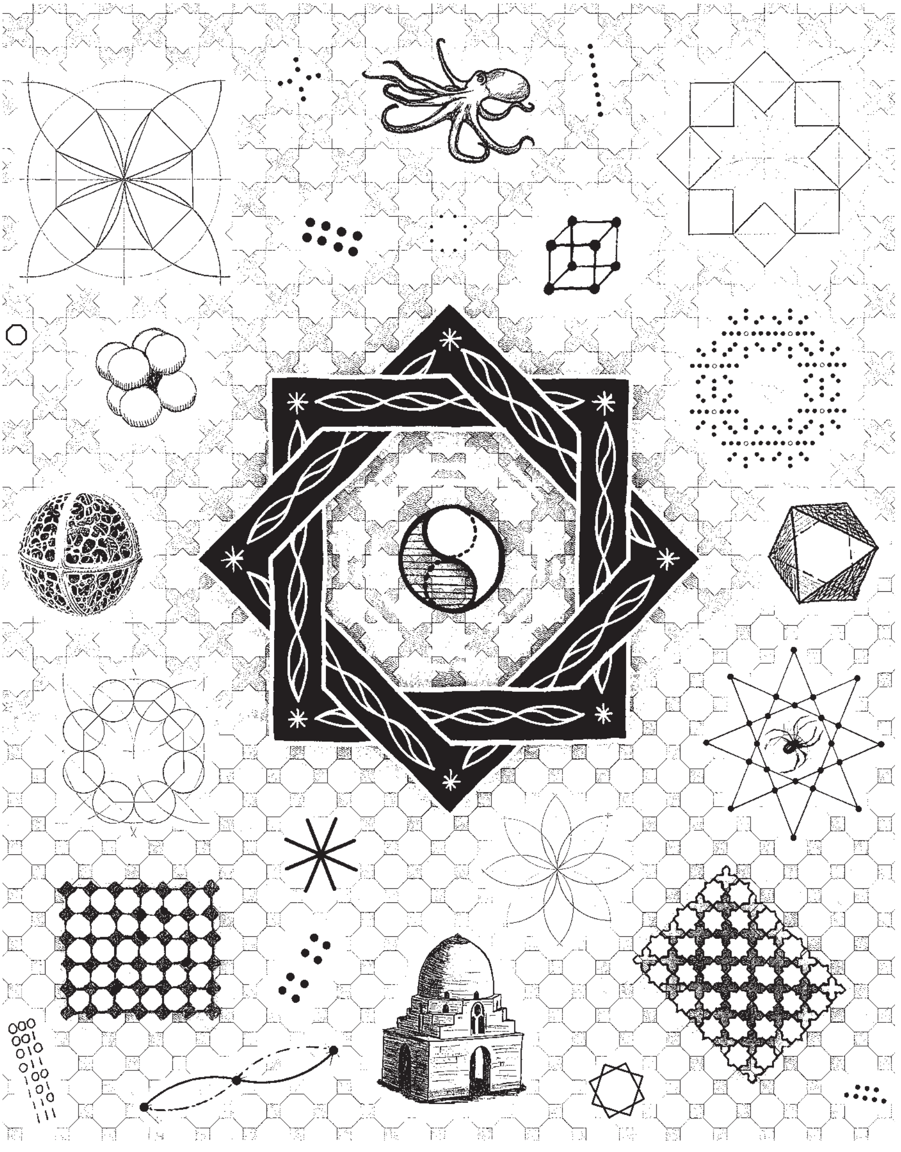
Пара квадратов

Восемь — это дважды дважды два, то есть это первое кубическое число после единицы. Куб имеет 8 вершин, а октаэдр — 8 граней. На молекулярном уровне число 8 проявляется в поведении атомов, которые всегда стремятся иметь в своей валентной оболочке полную «октаву» электронов. Атом серы имеет в своей внешней оболочке 6 электронов, поэтому 8 атомов серы образуют стабильную циклическую молекулу. Также число 8 — это следующее после 5 число Фибоначчи.

В архитектуре восьмиугольник часто символизирует связь между Небом и Землей как «мост» между квадратом и кругом. Сферический купол часто венчает кубическое здание именно в виде прекрасного восьмигранного свода.

Число 8 почитается в религиях и верованиях Востока. Древнекитайская «Книга Перемен» («И-цзин») основывается на комбинациях из 8 *триграмм*, которые представляют собой различные комбинации из трех линий, целых (ян) или прерывистых (инь). Приведенная *на рисунке напротив* «Последовательность Прежних небес» призвана олицетворять идеальную модель космических преобразований. Заметим, что каждая триграмма дополняет противоположную. Отзвук древнекитайских пар мы встречаем в современном мире, полном компьютеров, которые «мыслят» в единицах, называемых байтами, каждый из которых состоит из 8 двоичных битов.

В семиступенной интервальной системе восьмая нота — это октава, то есть нота с частотой, ровно вдвое превышающей частоту первой ноты. Это призыв к переходу на новый уровень. Может быть, именно поэтому в религиозной символике восьмая ступень часто ассоциируется с духовной эволюцией или спасением.



Число 8 проявляется в поведении атомов. В архитектуре сферический купол часто венчает кубическое здание в виде прекрасного восьмигранного свода

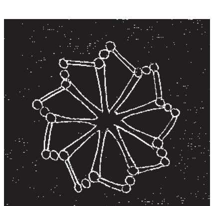
Эннеада

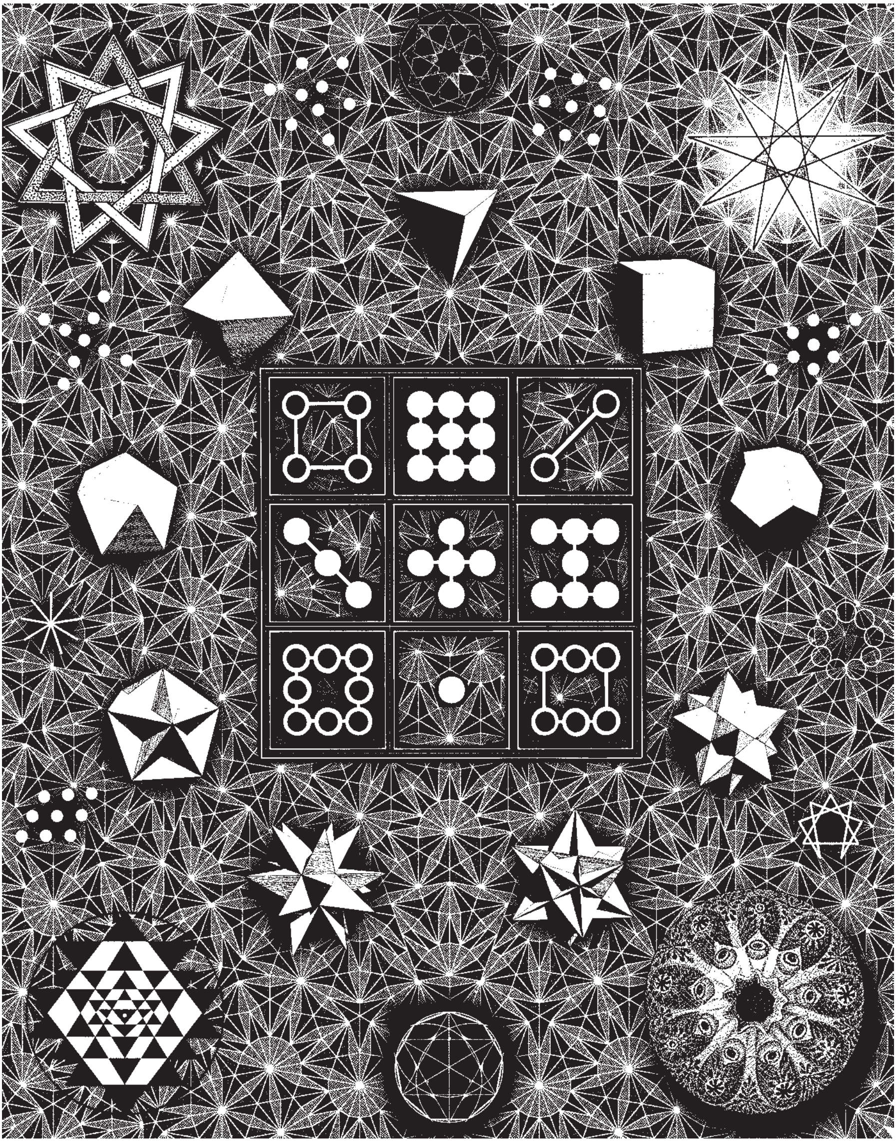
Три тройки

Число 9 — это 3 триады, первое нечетное квадратичное число. С ним связано много удивительного. Только первые 9 чисел участвуют в так называемом магическом квадрате, где сумма трех чисел на одной линии одинакова в любом направлении (*см. напротив в центре*). По легенде, на панцире божественной черепахи, выплывшей из вод реки Ло в Китае 4000 лет назад, был изображен магический квадрат.

Трижды три на единицу больше, чем дважды два, взятое дважды. Отношением 9:8 определяется наиважнейший интервал в музыке, из таких интервалов состоит любая гамма: большая секунда, 1 тон, разница между простейшими созвучиями октавы — квинтой 3:2 и квартой 4:3. Есть 9 правильных трехмерных фигур: 5 платоновых тел и 4 звездчатых многогранника Кеплера — Пуансо (*см. Книгу III*). В нашем организме 9 появляется в поперечном сечении щупальцевидных ресничек, которые перемещают вещества по поверхности тела, и в пучках микротрубочек, ответственных за деление клеток (*внизу*).

Число 9 — это божественное число порядка, 9 миров, сфер или уровней реальности упоминаются во многих древних традициях. Кошки знают: у них 9 жизней, они всегда «одеваются к девяти» (т. е. прекрасно выглядят. — *Ред.*) и большую часть времени проводят, по-видимому, на девятом облаке (т. е. на седьмом небе. — *Ред.*), где бы оно ни находилось.





*Число 9 — это божественное число порядка,
о 9 мирах, сферах или уровнях реальности говорится
во многих древних традициях*

Десять

Пальцы

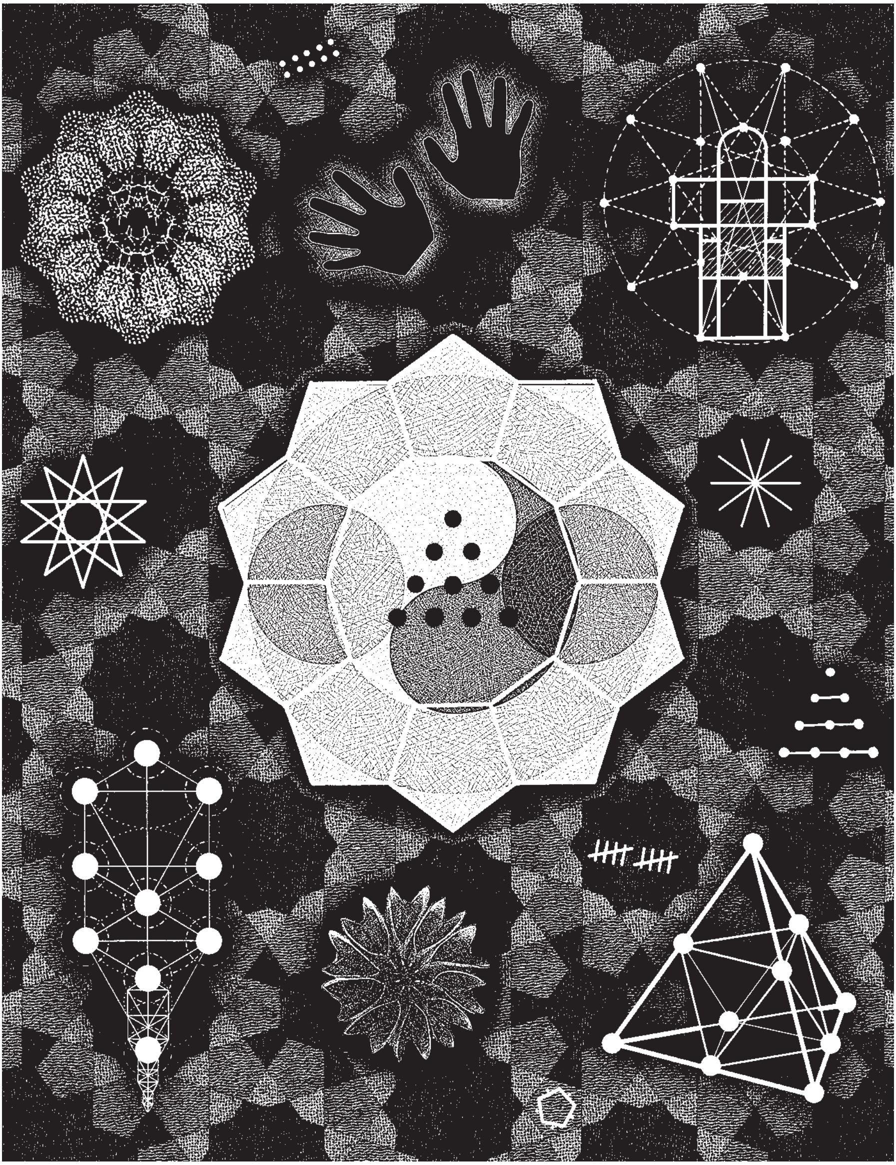
Десять пальцев человека, способных согласованно выполнять сложнейшие движения, во многих древних культурах, например у инков, индийцев, берберов, хеттов и минойцев, стали основой для системы счета. Сегодня мы также повсеместно используем десятки. Десять — это дитя пятерки и двойки, и не удивительно, что происхождение слова «десять» связано с индоевропейским *dekm*, что означает «две руки».

Число 10 получается в результате сложения первых четырех чисел: 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Пифагор увековечил эту формулу в фигуре, имевшей для него огромную важность и получившей название Тетрактис (*черные точки в центре рисунка напротив*). Он считал эту фигуру символом Вселенной, Небес и Вечности. Число 10 — не только четвертое треугольное число, но и третье тетраэдральное число (*напротив внизу справа*), что придает ему необычайную значимость в качестве числа, которое одновременно участвует в создании двух- и трехмерных треугольных форм.

Десять формируется из двух пятиугольников, десять пятиугольников идеально располагаются вокруг десятигранника. Молекула ДНК — ключ к воспроизведению жизни на планете, один из параметров ДНК — это шаг спирали, на каждый полный виток приходится 10 пар оснований, в результате чего формируется поперечное сечение в виде 10-лепестковой розочки (*напротив вверху слева*).

В иудейской каббале Древо Жизни состоит из десяти сфирот (*напротив внизу слева*), а в готической архитектуре часто применялась именно десятикратная симметрия (*напротив вверху справа*).

Платон утверждал, что декада содержит в себе все остальные числа. Сегодня мы не сомневаемся в этом, поскольку можем записать любое вообразимое число, используя всего 10 простых знаков.



Пифагор считал тетрактис символом Вселенной, Небес и Вечности. Платон утверждал, что декада содержит в себе все остальные числа. В готической архитектуре часто применялась десятикратная симметрия

Одиннадцать

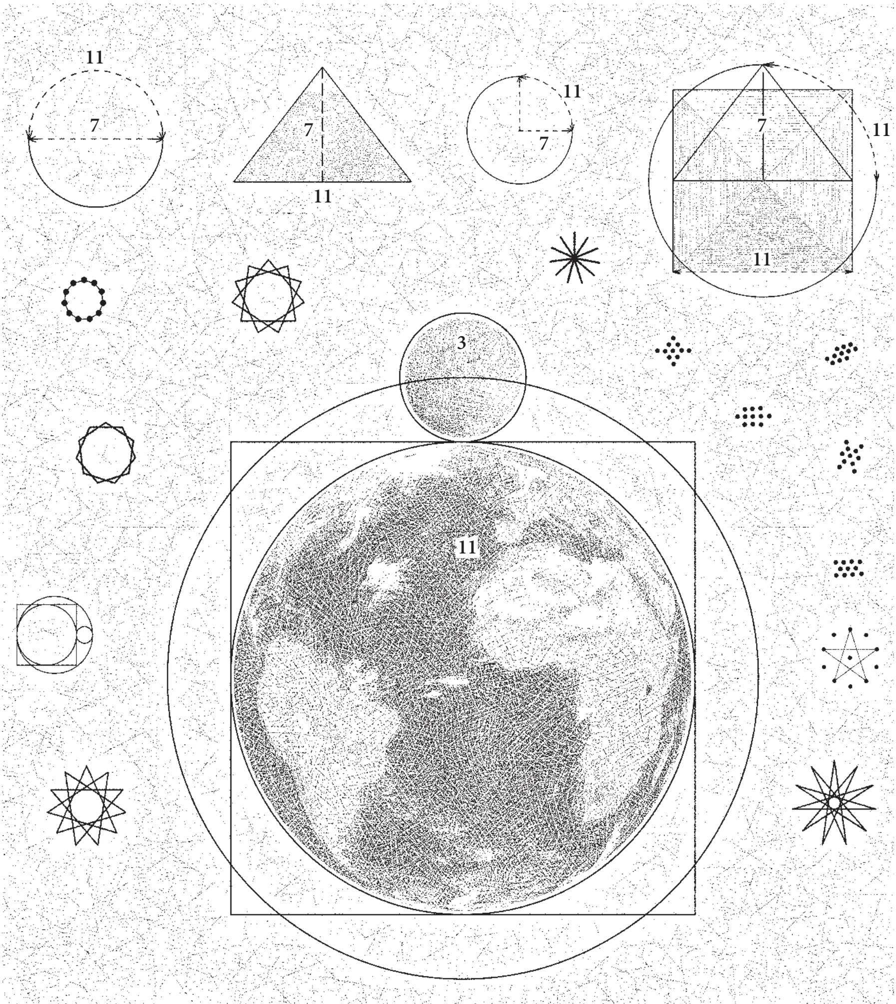
Мера и Луна

Число 11 — это мистическое число; в немецком языке оно созвучно названию очень подходящего существа — *эльфа*, иначе говоря карлика, гнома. Число 11 важно для нас как первое число, позволяющее начать постижение мер окружности. Так, половина длины окружности с диаметром 7 равна 11 (*напротив вверху слева*).

Взаимосвязь между числами 11 и 7 была очень хорошо известна древним египтянам, они даже использовали ее при проектировании пирамиды Хеопса. Длина окружности с радиусом, равным высоте пирамиды, равна периметру ее квадратного основания. Примеров подобного соотношения мер окружности и квадрата великое множество.

Наши предки придавали измерениям огромное значение, и в их метрологической системе число 11 занимало центральное место. Удивительный факт: размеры Луны и Земли соотносятся как 3:11. Это значит, что если мы нарисуем Луну рядом с Землей, как *на рисунке напротив*, а затем проведем небесный круг через центр Луны, то длина этой окружности будет равна периметру квадрата, описанного около Земли. Это называется квадратурой круга. Как именно древним друидам удалось открыть эту взаимосвязь, мы, наверное, никогда не узнаем, но им это определенно удалось. Двойная радуга тоже магическим образом образует квадратуру круга (*см. с. 78*).

Числа 11, 7 и 3 — это «братья» чисел Фибоначчи, числа из последовательности Люка́, где каждое следующее число получается сложением двух предыдущих. Последовательность Фибоначчи начинается так: 1, 1, 2, 3, 5, 8, а последовательность Люка: 2, 1, 3, 4, 7, 11.



ДИАМЕТР ЛУНЫ =
$= 3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 =$
$= 3 \times 8 \times 9 \times 10$ МИЛЬ

СУММА РАДИУСОВ ЛУНЫ И ЗЕМЛИ =
$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 =$
$= 7 \times 8 \times 9 \times 10$ МИЛЬ

ДИАМЕТР ЗЕМЛИ =
$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 11 =$
$= 8 \times 9 \times 10 \times 11$ МИЛЬ

ПЛОЩАДЬ НЕБЕСНОГО КРУГА =
$= 2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$
КВАДРАТНЫХ МИЛЬ

Двенадцать

Небо и земля

Число 12 — это первое *избыточное число*: сумма его множителей 1, 2, 3, 4 и 6 больше 12. Двенадцать точек на окружности можно объединить в 4 треугольника, 3 квадрата или 2 шестиугольника (*см. напротив в центре*). Как результат умножения 3 на 4, число 12 также иногда ассоциируется с суммой этих чисел — 7.

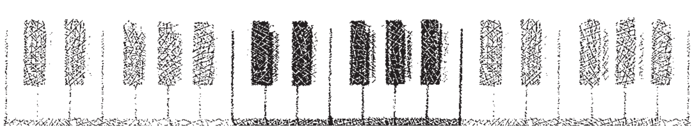
Число 12 любит третье измерение. У куба и октаэдра по 12 ребер. Двадцатигранник, или икосаэдр, имеет 12 вершин, а додекаэдр (дословно «двенадцатигранник») — 12 граней в виде правильных пятиугольников. Кроме того, 12 сфер идеально выстраиваются вокруг одной, чтобы сформировать кубооктаэдр. Позже мы еще поговорим об этом многограннике.

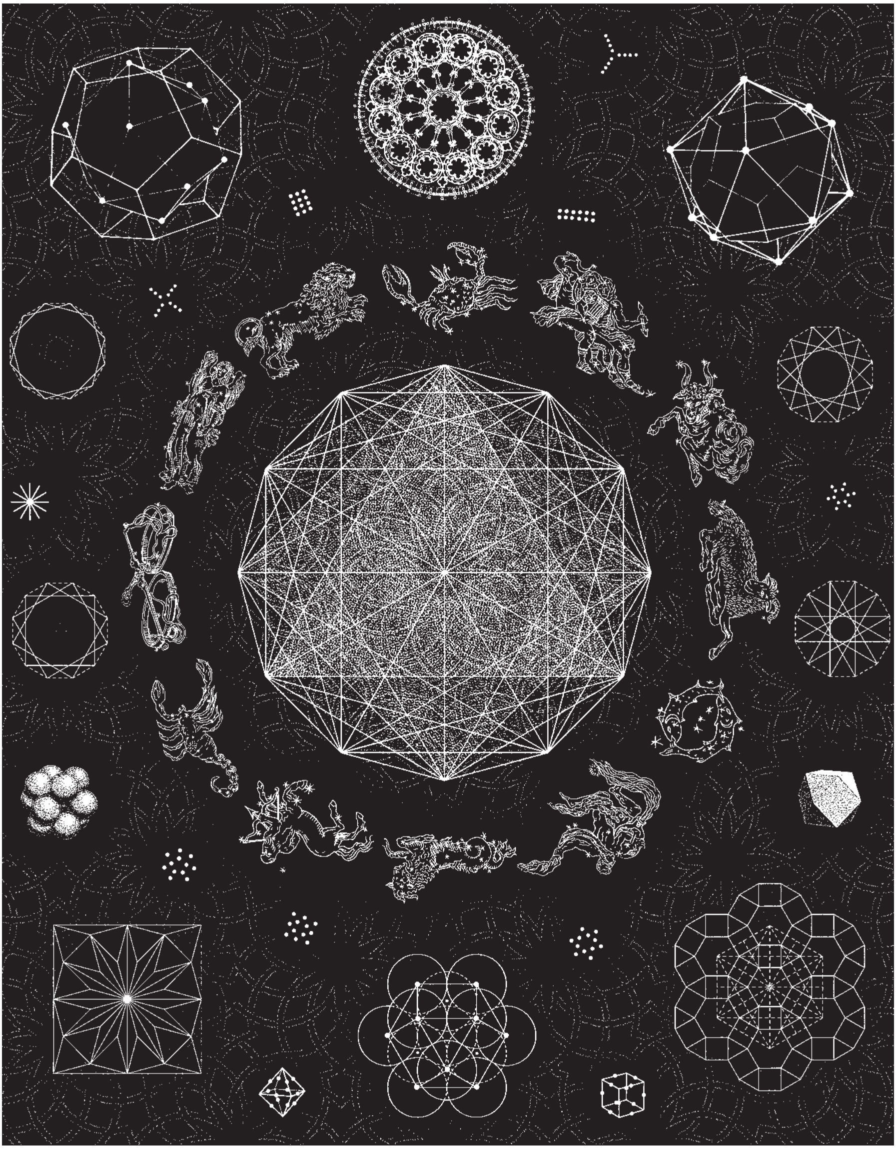
В семиступенной интервальной системе гамма строится как повторение 5 тонов и 2 полутонов. В современной настройке 5 тонов разделены так, чтобы получился строй из совершенно одинаковых полутонов, так называемый равномерно темперированный строй, который мы слышим ежедневно.

Любопытно, что у Пифагора за египетским треугольником со сторонами 3:4:5 следует еще один простейший треугольник со сторонами 5:12:13.

Число 12 часто связывали с солнечной энергией, и в мире есть множество примеров использования этого числа разными народами для описания своей истории (12 колен Израилевых, 12 племен индейцев виннебаго, 12 императоров Перу, 12 пэров Франции, 12 рыцарей святого Грааля и т. д. — *Ред.*). В древних культурах Китая, Египта и Греции города часто состояли из 12 округов, и, конечно, год поделен на 12 полных лун.

Сегодня мы знаем, что материальный мир состоит из 3 семейств элементарных частиц по 4 частицы в каждом (2 кварка, электрон или его родственник и нейтрино. — *Ред.*), итого 12.





Число 12 любит третье измерение. У куба и октаэдра по 12 ребер. Двадцатигранник, или икосаэдр, имеет 12 вершин, а додекаэдр — 12 граней в виде правильных пятиугольников. 12 сфер идеально выстраиваются вокруг одной, чтобы сформировать кубооктаэдр

Ковен и множество

К высшим числам

Число 13 — ковен ведьм, любимое число древних майя и центральное в колоде карт. Число Фибоначчи, проявляющееся в движении Венеры, для которой 13 лет равны восьми нашим. И если вы считаете это число несчастливым, вспомните о 12 науках, которые служат одной лишь цели сделать возможным изучение тринадцатой, и тринадцатый тон хроматической гаммы, завершающий октаву.

Число 14 — это дважды 7, а число 15 — это трижды 5. У каждого из этих чисел есть уникальные свойства, кроме того эти числа не являются простыми, то есть могут без остатка делиться на число, отличное от 1 и самих этих чисел.

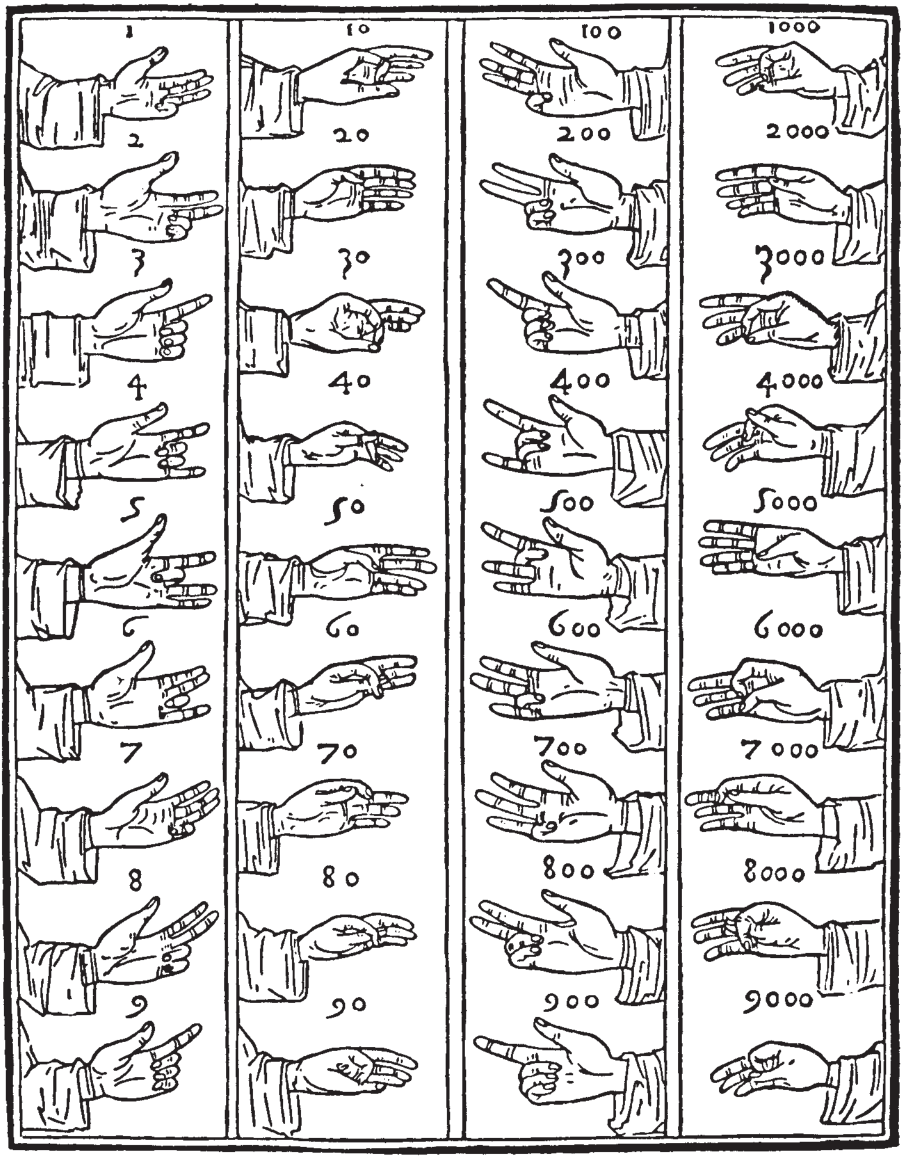
Число 16 — это 2 × 2 × 2 × 2, или квадрат числа 4 (которое само является квадратом).

Число 17 хранит множество секретов. Японские хокку и греческий гекзаметр содержат по 17 слогов. В исламских мистериях к числу 17 часто обращаются как к прекраснейшему.

Числа 18 (равное 2 × 9 и 3 × 6) и 19 имеют сильную связь с Луной (*см. с. 42*).

Число 20 — общее количество пальцев на руках и ногах. Пальцевый счет был широко распространен на рынках средневековой Европы (*см. рисунок напротив*). Во французском языке число 80 до сих пор произносится как *quatre-vingt* (4 по 20), а древние майя использовали сложную двадцатеричную систему счисления (знаки 1—19 показаны *на рисунке внизу*).

Ограниченный объем книги не позволяет подробно описать каждое число, но наиболее интересные свойства высших чисел вы найдете в глоссарии в конце книги (*см. с. 364—366*).



Число 20 — общее количество пальцев на руках и ногах. Пальцевый счет был широко распространен на рынках средневековой Европы. Во французском языке число 80 до сих пор произносится как quatre-vingt (4 по 20)

Квадривиум

Свойства квантов

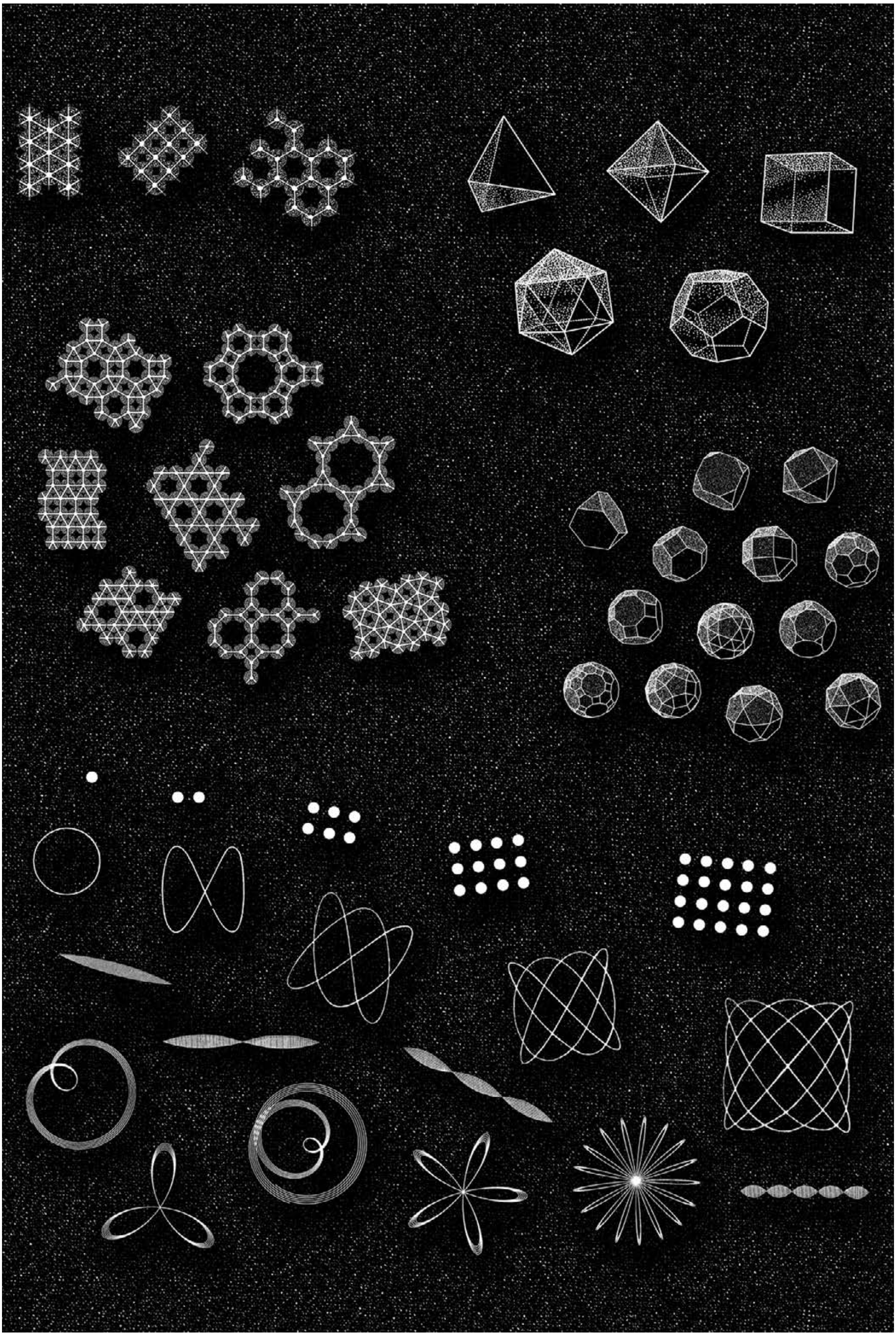
Другое название целого числа — *квант*. Квадривиум — это система знаний о поведении простейших квантов. Строгая наука о целых числах изучает множители, интервалы, трехгранники, квадраты, кубические числа, простые и совершенные числа и то, как они группируются в последовательности, например в последовательности чисел Фибоначчи и Люка. Из этой книги вы узнаете о многих удивительных явлениях в мире чисел, а в данном разделе мы поговорим об универсальности чисел в пространстве и времени.

Например, *на рисунке напротив* мы видим примеры ограничений, которые пространство накладывает на числа. Если использовать только совершенные многоугольники, существует всего 3 правильные мозаики (*напротив вверху слева*), 5 правильных тел (*вверху справа*), 8 полуправильных мозаик (*в центре слева*) и 13 полуправильных тел (*в центре справа*). Группа чисел 3, 5, 8 и 13 невероятно интересна, и мы еще встретимся с ней в этой книге.

Числа в музыке появляются как отношения частот двух нот, то есть как интервалы (*напротив, ниже*): 1:1 (прима), 2:1 (октава), 3:2 (квинта), 4:3 (кварта). Отношение частот пятой и четвертой ступеней гаммы — 9:8 (значение тона, основы музыкального строя).

Проявление чисел в пространстве и времени — это своеобразный космический манифест, который мы просто обязаны изучать, и объектом изучения здесь является не что иное, как Солнечная система. Вспомните, например, прекрасную простоту периодической системы химических элементов, поведение квантов в субатомном мире или идеальную организацию других природных явлений, состоящих из разрозненных элементов.

Численные проявления в пространстве и времени универсальны. Разумные жители ближайшей галактики могут играть мелодии, похожие на наши, или совсем другие, но они согласятся с тем, что квинта звучит красиво, и узна́ют 5 платоновых тел.

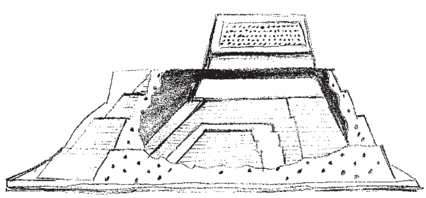


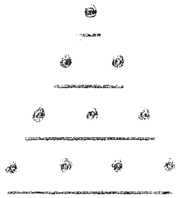
Приращение

Способ роста

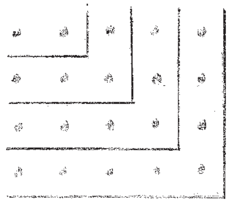
Аристотель заметил, что в природе некоторые живые создания в ходе своего роста не претерпевают никаких изменений, лишь увеличиваясь в размерах. Суть этого явления, названного приращением, заключается в том, что к одной фигуре прибавляется другая и получившаяся в результате фигура по своим свойствам оказывается абсолютно идентична исходной. Принцип приращения является наиболее распространенным в природе. Например, кости, зубы, рога и панцири растут именно таким образом.

Наши предки видели огромный смысл и красоту в построении числовых приращений. Примерами тому служат треугольные, прямоугольные и кубические числа (*напротив вверху*, также *см. с. 358 и 367*); кроме того, *лямбда* Платона, или *лямбдома*, в которой заключены абсолютно все музыкальные интервалы; а также пропорциональные треугольники, использовавшиеся в греческой архитектуре, где каждый последующий треугольник строится на диагонали предыдущего (*напротив в центре*). Последовательность Фибоначчи — это более позднее открытие, но оно основывается все на том же принципе приращения. *На рисунке внизу* показан разрез древнего ацтекского храма в городе Тенайука, где видна серия из пяти приращений. Ацтеки считали, что каждые 52 года начинается новый период в развитии мира, обнуляли свой календарь и обновляли все здания.

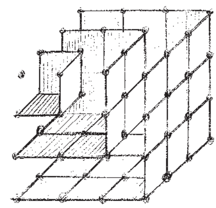




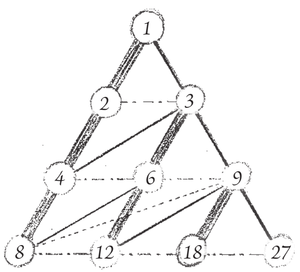
ТРЕУГОЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ
Числа 1, 3, 6, 10 возрастают по образу треугольника



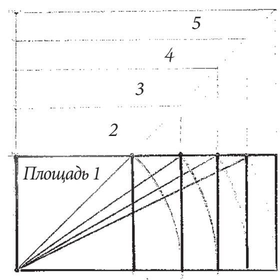
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ
Числа 2, 6, 12, 20 возрастают по образу музыки



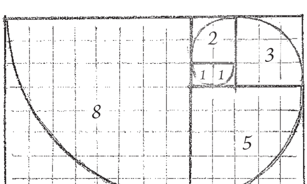
КВАДРАТ и КУБ
Квадратные грани соответствуют последовательности 1, 4, 9, 16, а кубы — 1, 8, 27, 64



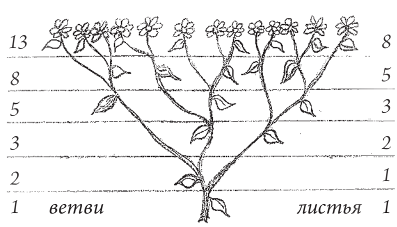
ЛЯМБДОМА
На жирных линиях показаны октавы (2:1), числа на противоположных им линиях утраиваются. Также присутствуют квинта (3:2), кварта (4:3) и целый тон (9:8)



ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ
Начиная с квадрата со стороной 1, из каждого следующего прямоугольника, построенного на диагонали предыдущего, получается квадрат площадью 2, 3, 4 и 5



ЗОЛОТАЯ СПИРАЛЬ
Начав с единичного квадрата, мы строим новые квадраты, образуя из них спираль, раскручивающуюся в соответствии с магической последовательностью Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55



ЧИСЛА РОСТА
Последовательность чисел Фибоначчи проявляется в живом мире. На рисунке показано число ветвей и листьев обычной полевой ромашки.

Время и пространство

Космология и числовой манифест

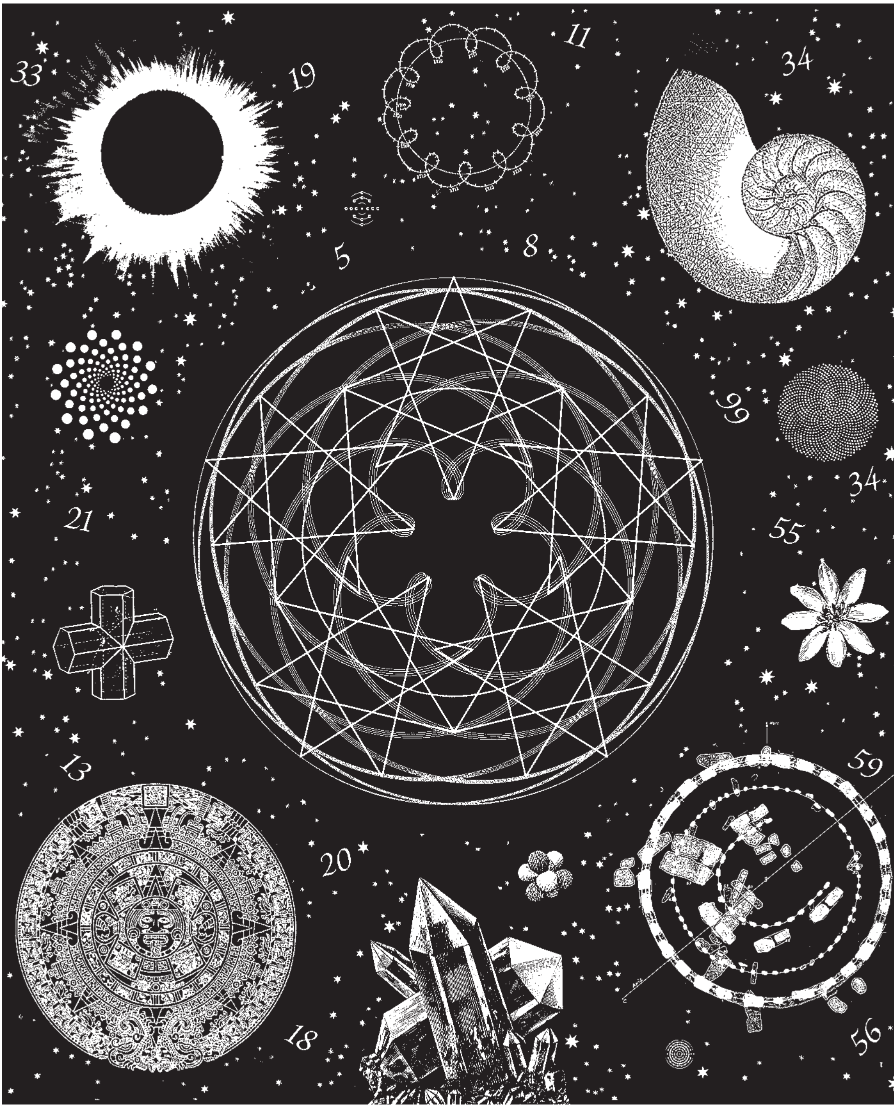
Оглядитесь: повсюду вы заметите числа, которые проявляются буквально во всем на Земле и вокруг нее. Детально мы поговорим об этом *в Книге IV*, а здесь сделаем небольшое вступление. Например, в году ровно 12 полных лун, но двенадцатая на 11 дней короче других. Это означает, что год двенадцати лун, например как в исламском календаре, словно медленно поворачивается относительно солнечного года, делая полный оборот через 33 года, трижды 11.

Другие числа, связанные с Солнцем и Луной, — 18 и 19. Затмения повторяются каждые 18 лет, а даты полнолуния — каждые 19 лет. Отражением этого являются 19 камней внутренней подковы Стоунхенджа. Два полных лунных цикла длятся 59 дней, что зашифровано во внешнем круге Стоунхенджа в виде 30 камней, один из которых вдвое тоньше других, что означает 29,5 дней на один лунный цикл.

Венера рисует пятилистник вокруг Земли каждые 8 лет, что позволяет нам составить удивительную диаграмму (*напротив в центре*). За эти 8 лет Луна проходит ровно 99 полных циклов, 9 раз по 11, — число имен Аллаха в Исламе. Юпитер рисует вокруг Земли прекрасный одиннадцатилистник (*напротив вверху*).

Числа во многих более длинных циклах, таких как великий год Платона, или предварение равноденствий, также полны скрытых смыслов. Каждая астрологическая эра (период, когда точка весеннего равноденствия находится в одном зодиакальном созвездии. — *Ред.*), к примеру эра Водолея или Рыб, длится 2160 лет, таков же диаметр Луны в милях. Двенадцать зодиакальных эр составляют 25 920 лет, что на Древнем Западе считалось продолжительностью полного жизненного цикла.

Древние майя были великолепными звездочетами. Их календарь согласован с движением не только Луны и Солнца, но также Венеры и Марса. Они выяснили, что 81 (или 3 × 3 × × 3 × 3) лунный месяц длится ровно 2392 дня (или 8 × 13 × 23), поразительная точность вычислений.



Числа проявляются буквально во всем на Земле и вокруг нее. Венера рисует пятилистник вокруг Земли каждые 8 лет, что позволяет нам составить удивительную диаграмму. За эти 8 лет Луна проходит ровно 99 полных циклов, 9 раз по 11, — число имен Аллаха в Исламе. Юпитер рисует вокруг Земли прекрасный одиннадцатилистник

Вавилон, Шумер и Египет

Ранние системы счета

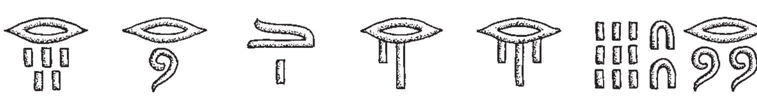
Примерно за 3000 лет до Р. Х. шумеры создали самую древнюю из известных нам письменностей, а вместе с ней привязанную к 60 систему счета (*см. с. 356*). Число 60 — очень «практичное»: оно делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Шестидесятеричная система значительно отличается от привычной нам десятеричной. На рисунке напротив изображены шумерские глиняные таблички, испещренные клинописью. На них нанесена таблица умножения на 36. Сегодня шестидесятеричная система счета сохранилась в общепринятых единицах измерения плоских углов. В одном градусе 60 минут, в одной минуте 60 секунд, а полный оборот по кругу это 6 × 60 = 360 градусов.

В системе счета Древнего Египта использовали отдельные символы для 1, 10, 100 и т. д. Хорошим примером математики древних египтян является их способ умножения. Его суть заключалась в повторяющемся удвоении первого множителя и сложении результатов.

Восприятие чисел нашими древними предками было музыкальным, они верили, что каждое число отражается в зеркале Единицы, 2 становится половиной, 3 — третью и т. д. В шестидесятеричной системе счета такое соответствие особенно прекрасно, так как числа (2, 3, 4, 5 и 6) становятся простыми дробями. Например, число 15 становится четвертью. Жители Вавилона переняли эту систему и использовали ее для заклинания своих богов.

Египтяне использовали иероглиф, обозначающий «рот», для записи дробей (*внизу*), а объемные доли записывали с помощью иероглифа, получившего название Глаз Гора.



1/5 1/100 1/2 2/3 3/4 1/229

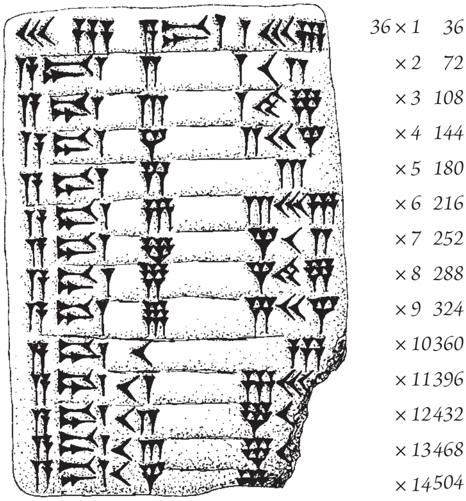
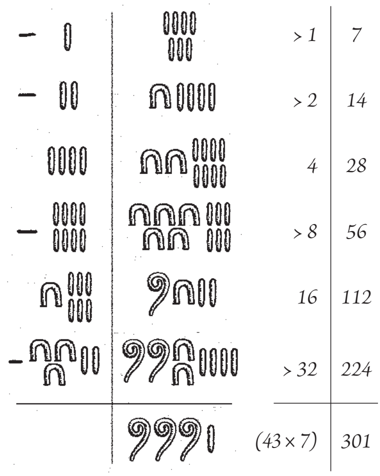
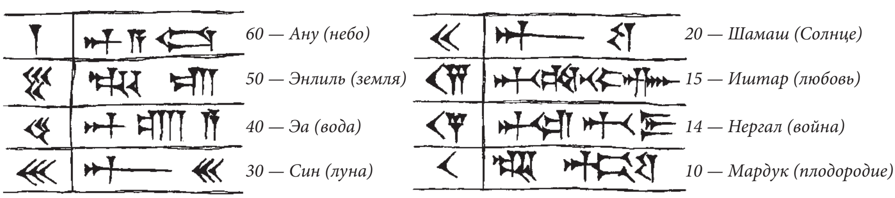


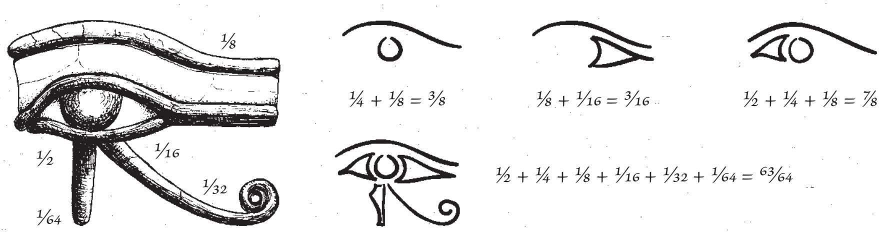
Таблица умножения на 36



Система умножения у египтян



Числа богов



Глаз Гора — объемные доли

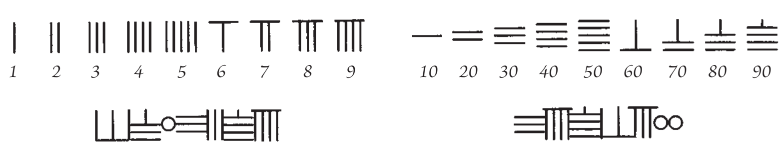
Древняя Азия

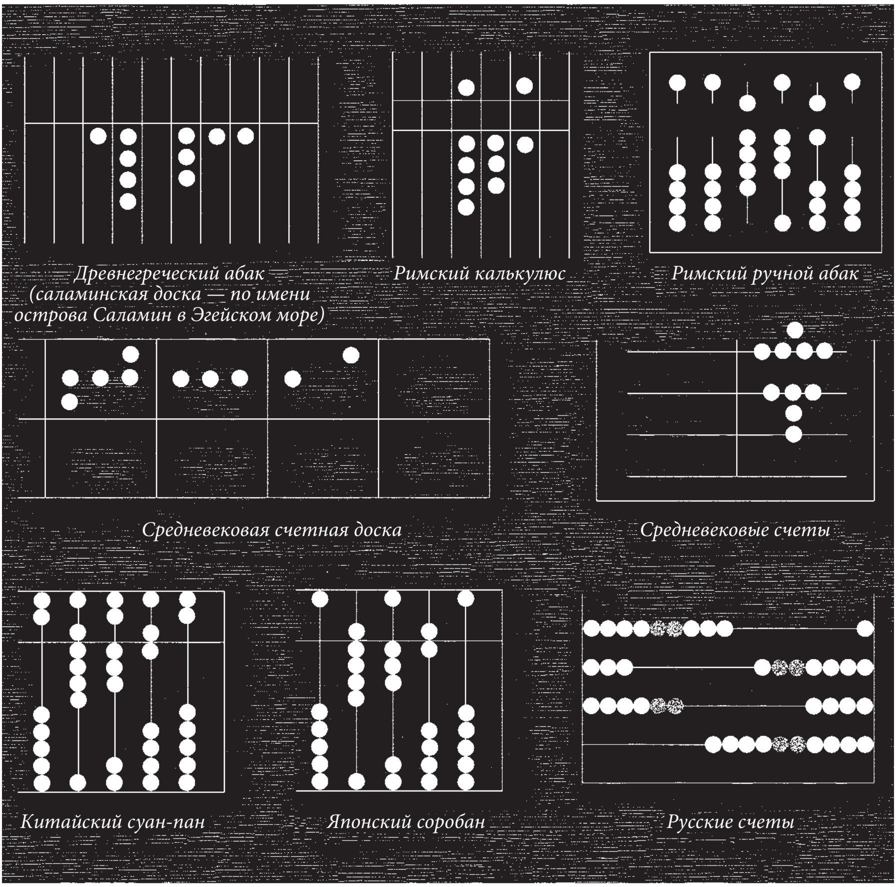
Десятичный счет

В Китае десятичная система счисления с 13 основными знаками используется уже почти 3000 лет (*см. с. 356*). Еще одна чрезвычайно интересная система написания чисел — палочки *цзе суань*, или *санги*, дополненные «малым нулем», — использовалась в Китае, Японии и Корее, по крайней мере, с 200 года до Р. Х. (*внизу*). Позднее им на смену пришла знаменитая счетная доска *абак*. Скорость вычислений, производимых с ее помощью, особенно на Дальнем Востоке, поистине легендарна. Абаки до сих пор распространены там довольно широко.

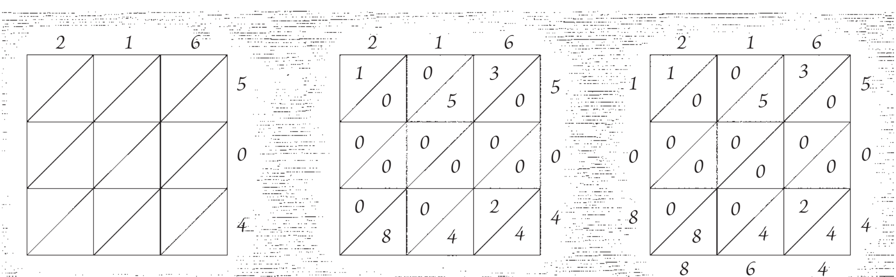
В Индии традиция оперирования числами уходит своими корнями в глубокую древность. Числа присутствуют во многих священных текстах, а индийская космология оперирует настолько огромными числами, что их можно сравнить, пожалуй, только с теми, которые встречаются в современной физике. Индийские цифры происходят от системы счисления брахми. Изначально в Индии использовали 45 символов для обозначения цифр от 1 до 90 000. Но со временем индийским математикам понадобилась новая система, которая позволила бы быстро и элегантно записывать большие цифры и производить сложные вычисления. Так, числа от 1 до 9, объединенные с возможностями десятков, легли в основу новой, более совершенной системы счета.

Ноль появился именно для обозначения десятков. К нам десятичная система ценностей пришла, несомненно, из Индии через арабов.





Число 9360 на различных счетных досках



Арабский вариант использования индийских чисел: 216 × 504 = 108 864

Гематрия

Говорящие числа и скрытые смыслы

Финикийцы использовали очень лаконичный алфавит, состоящий из 22 букв. Со временем народы Средиземноморья переняли этот алфавит, и его латинский вариант европейцы используют в наши дни.

Гематрия кодирует буквы в виде численных символов и делает возможным математический анализ языка. Важные канонические, геометрические, метрологические и космологические числа зашифрованы во многих ключевых терминах древних текстов. Впервые гематрия появилась в Древней Греции, откуда пришла к иудеям и арабам, где получила название *абджад* — консонантное письмо. В трех языках эта система существует также в упрощенном варианте, без использования нулей.

На рисунке внизу показано, как две фразы связаны одинаковым числовым значением. Множество подобных примеров дают нам основание предполагать наличие магической резонансной взаимосвязи между буквами и цифрами, которую может постичь любой человек, умеющий читать и считать. Более чем 1000 лет гематрия была не столько оккультной наукой, сколько обычным способом толкования чисел.

Маги и мистики используют гематрию по сей день для выявления тайных смыслов слов и фраз.

	Святой Дух				Источник мудрости	
ΤΟ	ΑΓΙΟΝ	ΠΝΕΥΜΑ			ΠΗΓΗ	ΣΟΦΙΑΣ
300.70	1.3.10.70.50	80.50.5.400.40.1	= 1,080 =		80.8.3.8	200.70.500.10.1.200
370	134	576			99	981

АРХАИЧНЫЙ ФИНИКИЙСКИЙ		ГРЕЧЕСКИЙ			ИВРИТ		АРАБСКИЙ западный /восточный		ЗНАЧЕНИЕ
ʻaleph	𐤀	alpha	Α	α	aleph	א	ʻalif	ا	1
bet	𐤁	beta	Β	β	bet	ב	ba	ب	2
gimmel	𐤂	gamma	Γ	γ	gimmel	ג	jim	ج	3
dalet	𐤃	delta	Δ	δ	dalet	ד	dal	د	4
he	𐤄	epsilon	Ε	ε	he	ה	ha	ه	5
waw	𐤅	digamma	Ϝ	ϛ	vov	ו	waw	و	6
zayin	𐤆	zeta	Ζ	ζ	zayin	ז	za	ز	7
ḥet	𐤇	eta	Η	η	het	ח	ḥa	ح	8
ṭet	𐤈	theta	Θ	θ	tet	ט	ṭa	ط	9
yod	𐤉	iota	Ι	ι	yod	י	ya	ي	10
kaf	𐤊	kappa	Κ	κ	kof	כ	kaf	ك	20
lamed	𐤋	lambda	Λ	λ	lamed	ל	lam	ل	30
mem	𐤌	mu	Μ	μ	mem	מ	mim	م	40
nun	𐤍	nu	Ν	ν	nun	נ	nun	ن	50
samekh	𐤎	ksi	Ξ	ξ	samekh	ס	sin/ṣad	س ص	60
ʼayin	𐤏	omicron	Ο	ο	ayin	ע	ʼayn	ع	70
pe	𐤐	pi	Π	π	pé	פ	fa	ف	80
ṣade	𐤑	qoppa	Ϙ	ϙ	tsade	צ	ṣad/ḍad	ص ض	90
qof	𐤒	rho	Ρ	ρ	quf	ק	qaf	ق	100
resh	𐤓	sigma	Σ	σ	resh	ר	ra	ر	200
shin	𐤔	tau	Τ	τ	shin	ש	shin/sin	ش س	300
taw	𐤕	upsilon	ϒ	υ	tav	ת	ta	ت	400
		phi	Φ	φ	kof	ך	tha	ث	500
		chi	Χ	χ	mem	ם	kha	خ	600
		psi	Ψ	ψ	nun	ן	dhal	ذ	700
		omega	Ω	ω	pé	ף	ḍad/ḍha	ض ظ	800
		san	Ϡ	ϡ	tsade	ץ	ḍha/ghayn	ظ غ	900
							ghayn/shin	غ ش	1,000

Греческая гематрия ставит вышедшие из употребления буквы *дигамма* и *коппа* на прежние места, а букву *сан* — в конец алфавита. Похожим образом в иудейский алфавит для достижения числа 900 были добавлены так называемые буквы «окончания слова». В арабской системе буквы, означающие числа 60, 90, 300, 800, 900 и 1000, различаются на востоке и западе исламского мира

Магические квадраты

Когда все согласуется

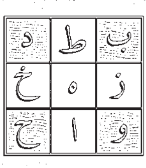
Магические квадраты — это удивительнейший способ группировки чисел. Теме магических квадратов и их секретам посвящено множество книг. Сумма чисел на одной линии магического квадрата всегда одинакова, в каком бы направлении вы ни складывали: магическая сумма.

Семь магических квадратов традиционно ассоциируются с небесными телами (*см. напротив*). Квадрат 3 × 3 соотносится с Сатурном, размер квадратов увеличивается на одну строку при прохождении через очередную планетарную сферу, и, наконец, квадрат Луны достигает размеров 9 × 9. Квадраты также предоставляют нам элегантный пример взаимодействия нечетных и четных чисел (*на темных полях квадратов*). Для каждой планеты создан также магический символ, основанный на структуре ее квадрата, полезный знак для чародеев.

Магический квадрат — прекрасный пример упорядочивания вещей в соответствии с определенным замыслом. Существует лишь 8 способов получить число 15 в результате сложения трех простых чисел от 1 до 9, и все эти 8 способов присутствуют в магическом квадрате 3 × 3.

Свойства магических квадратов заслуживают самого пристального изучения и таят в себе немало секретов. Например, индейцы майя сильно удивились бы, узнав, что магическая сумма квадрата 8 × 8 равна 13 × 20, а сумма чисел каждого ряда квадрата Солнца составляет 111 и дает зловещее 666 в общей сумме.

Добавив гематрию в качестве дополнительного инструмента к изучению магических квадратов, мы получим пропуск в таинственный мир магических заклинаний (*см. пример ниже*).



Сумма квадрата = ب + خ + د + ه + و + ز + ح + ط = 45

ادم *Адам* = 1 + 4 + 40 = 45 = 7 + 8 + 30 = زحل *zuhal (Сатурн)*

حواء *Хава (Ева)* = 8 + 6 + 1 = 15 = *магическая сумма*

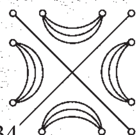
♄

4	9	2
3	5	7
8	1	6

магическая сумма 15
сумма квадрата 45

☽

магическая сумма 369
сумма квадрата 3,321

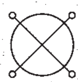


37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

♃

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

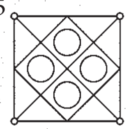
магическая сумма 34
сумма квадрата 136



☿

магическая сумма 260
сумма квадрата 2,080

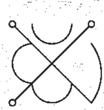
8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57



♂

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

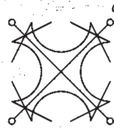
магическая сумма 65
сумма квадрата 325



☉

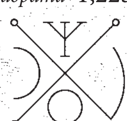
6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

магическая сумма 111
сумма квадрата 666



♀

магическая сумма 175
сумма квадрата 1,225



22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Сумма чисел на одной линии магического квадрата всегда одинакова

Миф, игра и рифма

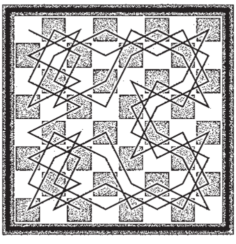
Числа, с которыми мы росли

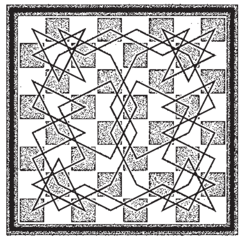
Наш первый опыт оперирования числами часто связан с играми, рифмами, историями, сказками и мифами, многие из которых являются настоящей сокровищницей скрытых нумерологических смыслов.

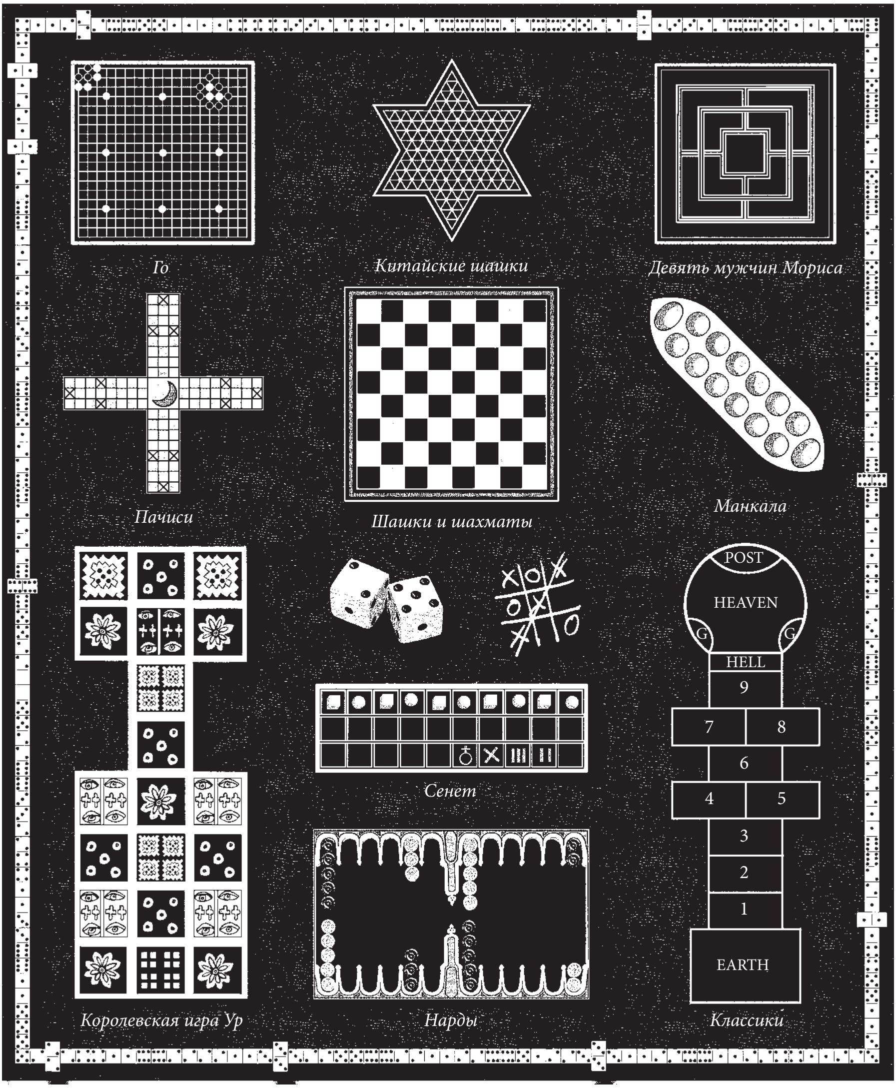
Древние языковые формы были гармонично привязаны к числам: так, в поэзии мы находим триплеты (3 строки в строфе), четверостишья (4 строки в строфе), пентаметр (пятистопный стих), гекзаметр (шестистопный стих) и хокку (стих в 3 строки с 17 ударными слогами: 5, 7 и снова 5; *сравните с 17-нотной гаммой на с. 196*).

Игры, как истории и сказки, могут содержать информацию. Сумма карт в игральной колоде, если принять валета, королеву и короля за 11, 12 и 13, равна 364, а если добавить джокера, то получим 365, что соответствует числу дней в году. Числа 18 и 19 в японской игре го перекликаются с циклами Солнца и Луны (*см. с. 42*). Эти древние игры — лишь маленькие отражения вечных законов большой космической игры.

Правила и структура многих игр основаны на числах. Вообразите, например, игрока в покер, который может досчитать только до трех! На рисунке внизу приведены два примера ходов шахматного коня. Если их последовательно пронумеровать, оба образуют магические квадраты.







Правила и структура многих игр основаны на числах. Игры, как истории и сказки, могут содержать информацию. Числа 18 и 19 в японской игре го перекликаются с циклами Солнца и Луны. Эти древние игры — лишь маленькие отражения вечных законов большой космической игры

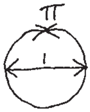
Современные числа

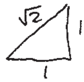
Время сложных чисел

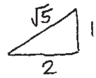
Когда древние греки выяснили, что диагональ квадрата нельзя точно представить в виде дроби, в математике того времени начался настоящий кризис. Многие из нас и сегодня впадают в панику, впервые столкнувшись с символом квадратного корня √.

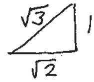
За последние 400 лет развитие науки перевернуло человеческое представление о числах. После принятия индийской системы счета и осознания нуля мы познали чары *отрицательных* чисел. Числовая прямая стала вдвое длиннее, развернувшись в обе стороны. Отрицательные числа оказались полезны, но создали загадку: если возвести отрицательное число в квадрат, то оно становится положительным — так каков же тогда квадратный корень отрицательного числа? Математики осознали, что существует еще одна числовая прямая, прямая квадратных корней из отрицательных чисел, которые получили название *комплексных*, или *мнимых*, чисел. Сегодня их принято обозначать буквой i (то есть i — это квадратный корень из -1). Так, числовая плоскость сегодня поделена на действительную и мнимую части. Интересно, что именно игра с действительными и комплексными числами без усилия подводит нас к прекрасной замысловатости фракталов, теории хаоса и процессам, с которыми мы ежедневно сталкиваемся в природе.

С помощью современной десятичной системы счисления мы можем с большой точностью записать такие числа, как, например, π, которое выражает отношение длины окружности к ее диаметру. И все же некоторые из наиболее прекрасных математических объектов по сути основаны на повторяющихся дробях и вполне могли быть знакомы нашим далеким предкам. Это относится, например, к квадратному корню, *золотому сечению* φ или Φ, числу π и экспоненте e^x.









$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\phi \approx 7$$

$$\pi \approx 6/5\,\phi^2$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.732050807569\ldots$$

$$\phi = 1.61803398875\ldots$$

$$\sqrt{5} = 2.2360679775\ldots$$

$$e = 2.71828182846\ldots$$

$$\pi = 3.14159265359\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}$$

$$\sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}$$

$$\sqrt{5} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}}$$

$$\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}$$

$$V-E+F=2$$

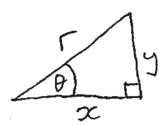
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + c$$

$$\sqrt{-1} = i$$

$$e^{i\pi}+1=0$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$



$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = x\tan\theta$$

Ноль

Все уже сказано

Обсуждение ноля мы оставили напоследок, потому что, строго говоря, он не является числом, это лишь символ, обозначающий отсутствие числа. На самом деле наибольшее время человеческому сознанию требуется именно на то, чтобы осознать существование «*ничто*», но практически в любой высокоразвитой культуре для него есть символическое обозначение.

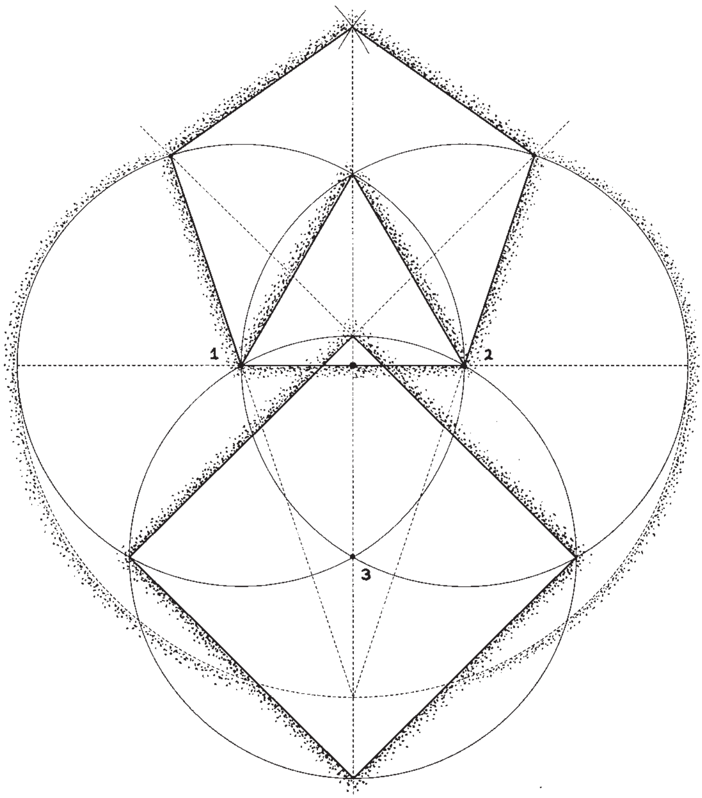
Символ ноля был изобретен, по крайней мере, трижды в разное время в разных культурах разными людьми независимо друг от друга. Жители Вавилона около 400 года до Р. Х. начали использовать символ из двух клиновидных насечек для обозначения «пустого места» в своей шестидесятеричной системе исчисления: «нет числа в этой графе». На другой стороне планеты приблизительно на 1000 лет позднее для этой же цели древние майя использовали знак, изображающий морскую раковину.

Округлая форма для обозначения «ничто» появилась в Индии как ассоциация с отпечатком, остававшимся на песке после того, как убрали камешек, который использовался для счета. Таким образом, современное обозначение ноля пришло к нам именно из Индии как видимый след чего-то, уже исчезнувшего.

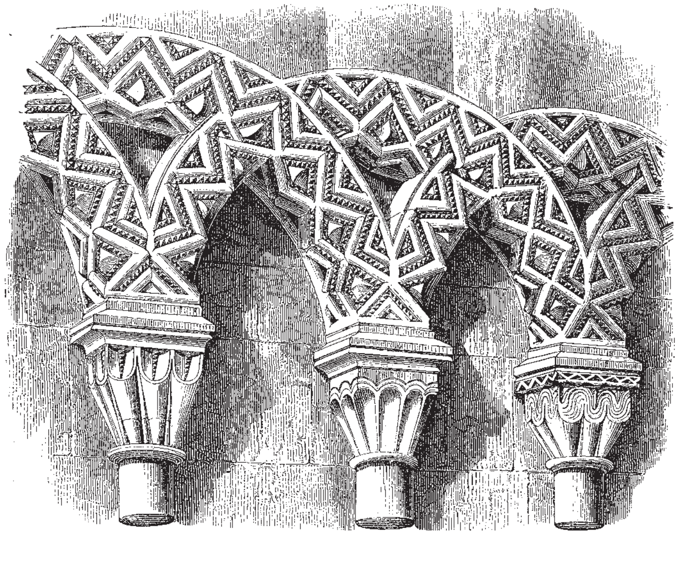
Как и единица, ноль стоит на границе между тем, что есть, и тем, чего нет. В ранних трактатах индийских математиков ноль использовался для обозначения понятия «шунья» (*śūnya*), что значит «пустота», первозданный хаос, нечто непостижимое, то, из чего рождается все сущее.

Вероятно, в том, что наш ноль имеет форму круга — символа единства, а единица обозначается короткой линией, соединяющей две точки, заключен глубокий смысл. Как утверждает гематрия, каждое число содержит в себе семя следующего за ним, а 0 и 1 удивительным образом при совмещении образуют знак золотого сечения φ, который прекрасно подходит в качестве завершающего аккорда для этого раздела книги.

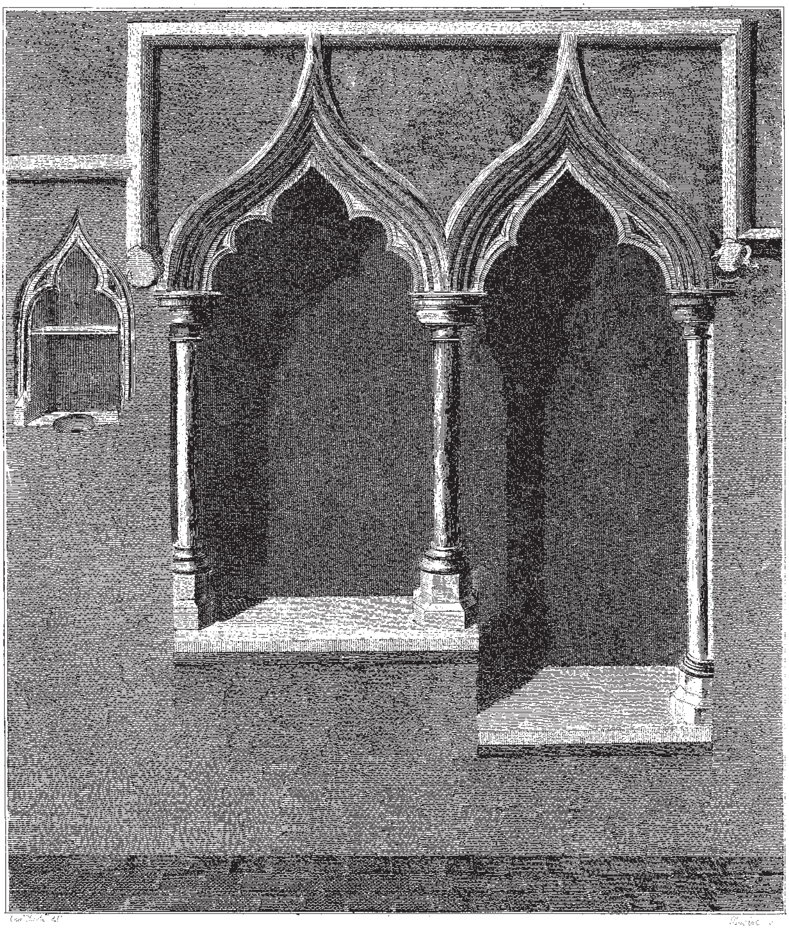
КНИГА II


1
2
3

САКРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Миранда Ланди



Сиденья в часовне Норвудов, церковь Милтона, Кент

Введение

Сакральная геометрия изучает глубокие связи между числом, пространством и человеком. Она отличается от геометрии, которую преподают в школах и университетах, тем, что каждая фигура или каждое тело имеет для нее символическую ценность и символическое значение. Так, изучение и применение геометрии, как хорошая музыка, может помочь в духовном совершенствовании. Изучение геометрии начинается с точки, которая переходит в линию, та разворачивается в плоскость, затем углубляется в три измерения, и в итоге мы снова возвращаемся к точке, и наша задача заключается лишь в наблюдении за тем, что происходит на этом пути.

Книга II «Квадривиума» рассказывает об элементах двухмерной геометрии, она изучает числа, принадлежащие одной плоскости. Трехмерные тела описаны *в Книге III*. Эти материалы долгое время использовались в качестве введения в метафизику. Как и родственная ей музыка, геометрия — это истинное откровение, яркое, неоспоримое проявление Реальности и теория созидания.

Арифметика, Музыка, Геометрия и наука о небесных телах — это четыре свободных искусства древнего мира, изучающих кванты, или целые числа. Четыре свободных искусства — это простой и универсальный язык, понятный в любой культуре на протяжении многих веков, не утративший актуальность и сегодня. Скорее всего, геометрия разумных трехмерных существ в любой другой точке универсума, мира как целого, будет похожей на нашу.

Прямо над входом в Академию Платона было написано: «Не геометр да не войдет!» Итак, приступим к изучению сакральной геометрии.

Точка, линия и плоскость

Ноль, одно и два измерения

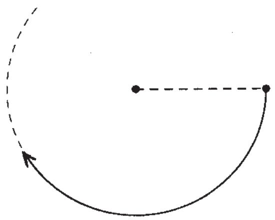
Начнем с листа бумаги. Точка — это первое, что мы можем изобразить. Она не принадлежит ни одному из измерений и находится вне пространства. В точке нет внутренней или внешней части, она лишь служит началом для всего остального. Точка изображается как небольшое круглое пятнышко (*см. внизу*).

Первое измерение — линия — содержит в себе одновременно две сущности: активную и пассивную (*внизу справа*). Точка выбирает вне себя другую точку. Как только это происходит, появляется направление, а вместе с ним — линия. У линии нет ни толщины, ни конца.

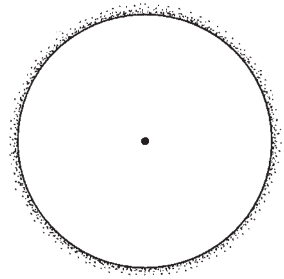
Теперь становятся очевидными три способа трансформации линии (*напротив*):

1. Один конец линии пассивен и неподвижен, в то время как второй может вращаться, описывая, таким образом, круг, олицетворяющий небо.
2. Активная точка может переместиться в третью позицию, равноудаленную от первых двух точек, и мы увидим равносторонний треугольник.
3. От линии может отделиться ее копия и, будучи перенесенной на равное расстояние, сформировать квадрат, олицетворяющий Землю.

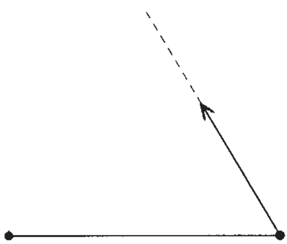
Таким образом, появляются три основные формы — круг, треугольник и квадрат. Каждый из них имеет глубокое значение. Наше путешествие в мир геометрии начинается.



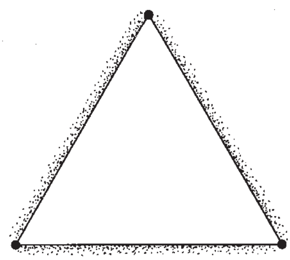
поворотом линии...



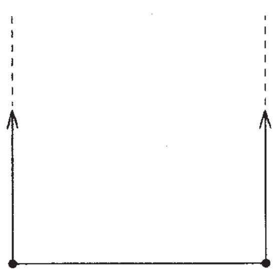
...создается круг



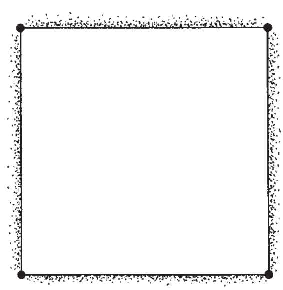
перемещением вершины...



...создается треугольник



переносом линии...



...создается квадрат

Сфера, тетраэдр и куб

От второго измерения к третьему

Хотя в этой книге мы не собирались выходить за рамки двухмерного пространства — плоскости, в этом разделе мы все же заглянем чуть глубже и коснемся трех «способов» трансформации при появлении объемных тел (*см. напротив*):

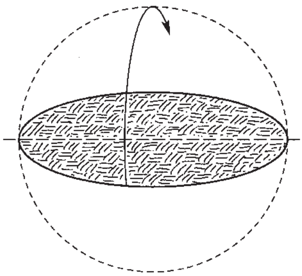
1. Поворачиваясь, круг образует сферу. Округлый предмет, как видите, всегда остается округлым (*верхний ряд*).
2. Четвертая точка, равноудаленная от первых трех точек треугольника, становится вершиной тетраэдра. Так, из одного равностороннего треугольника появляются еще три (*средний ряд*).
3. От квадрата отделяется его точная копия, переносится на расстояние, равное длине его стороны, и получается куб (*нижний ряд*).

Обратите внимание, первичное разделение на круг, треугольник и квадрат сохраняется здесь так же, как в предыдущих трансформациях.

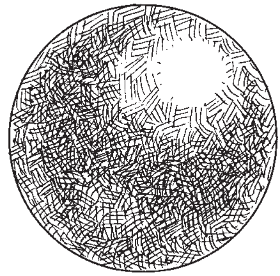
Сфера — это символ космоса и полноты творения. Самые большие и самые маленькие природные объекты имеют сферическую форму. Эйнштейн выяснил, что точка в четырехмерном пространстве — это сфера, расширяющаяся со скоростью света, а весь универсум находится внутри сферической черной дыры. Куб символизирует Землю.

Площадь поверхности сферы имеет наименьшее по сравнению с поверхностной площадью других трехмерных тел такого же объема значение, тогда как площадь поверхности тетраэдра среди правильных геометрических тел, наоборот, самая большая.

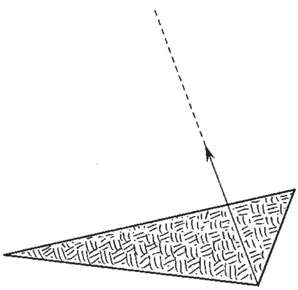
Тетраэдр на самом деле спрятан в кубе, чтобы его увидеть, достаточно провести по одной диагонали на каждой грани куба так, чтобы они соединялись в углах, — тетраэдр готов.



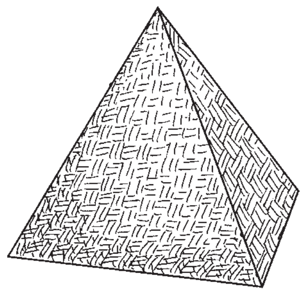
вращением круга…



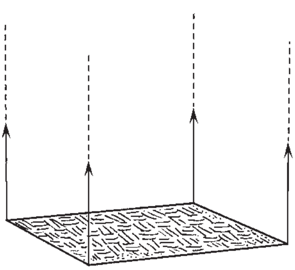
…создается сфера



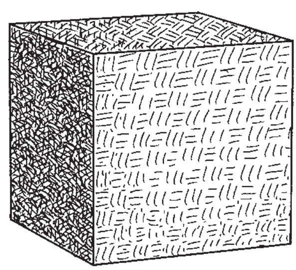
перемещением вершины…



…создается тетраэдр



переносом квадрата…



…создается куб

Раз, два, три

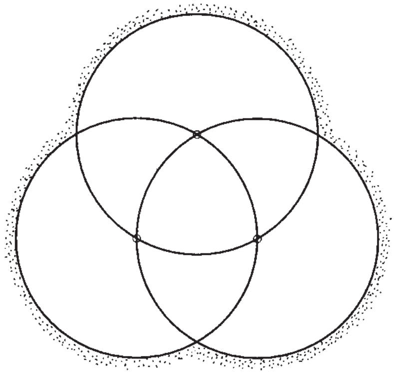
Игра с окружностями

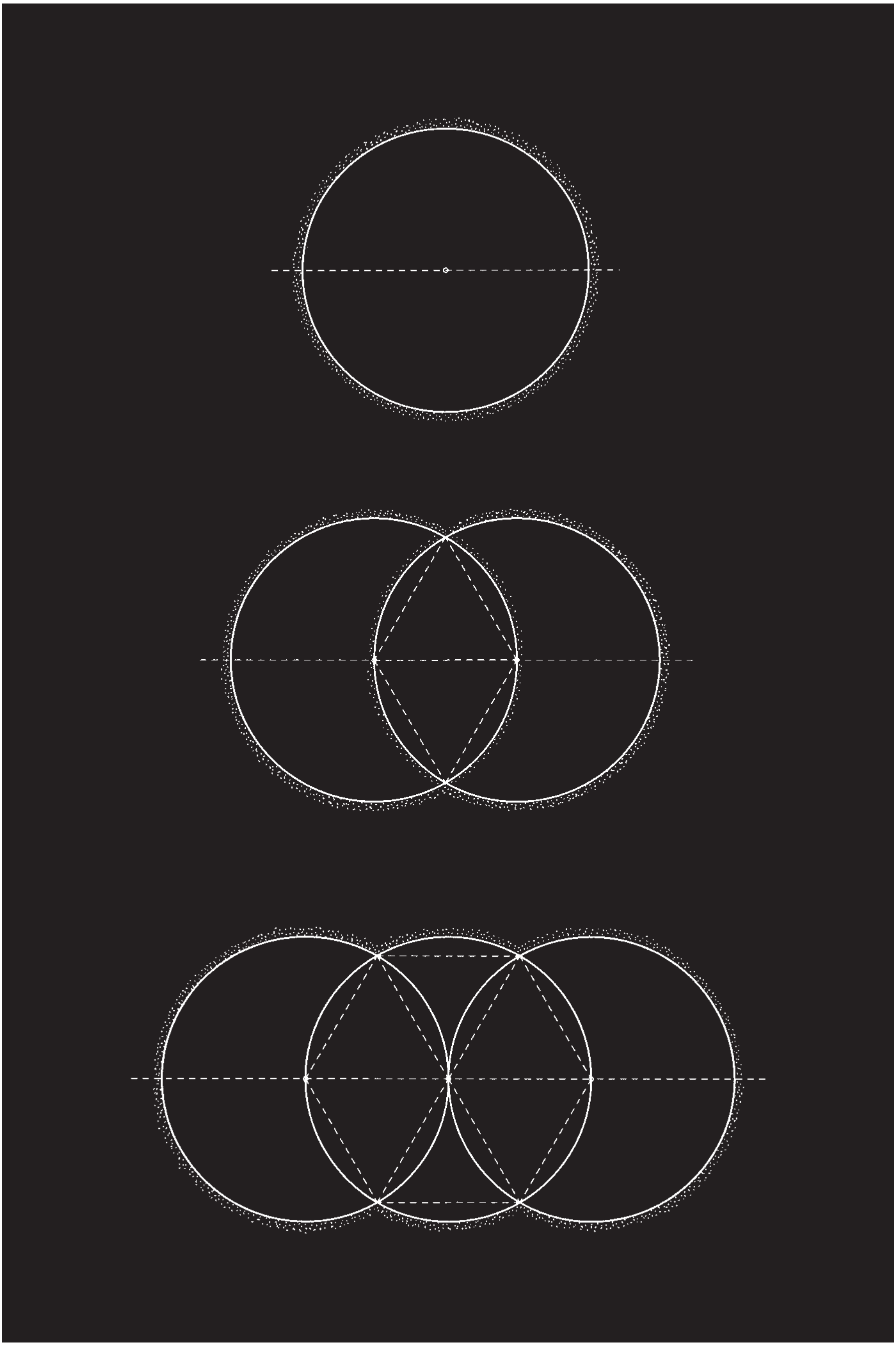
Возьмите линейку, циркуль, ручку и лист бумаги. Проведите на листе горизонтальную линию. Раскройте циркуль и поместите его острый конец на линии. Нарисуйте окружность (*см. напротив вверху*).

Поставьте циркуль на пересечение окружности с линией и нарисуйте вторую окружность, не меняя размах ножек циркуля. Такая фигура, образованная пересечением двух окружностей, проходящих через центр друг друга, называется *vesica piscis*, дословно «рыбий пузырь». Это один из первых геометрических феноменов, связанных с окружностями. Иисуса часто изображают внутри *vesica*. На пересечении линий «рыбьего пузыря» образуются два равносторонних треугольника (*напротив в центре*).

Если с другой стороны к первой окружности добавить еще один такой же круг, то получим 6 вершин правильного шестиугольника — гексагона (*напротив внизу*). В качестве альтернативы можно добавить третий круг, как показано *на рисунке внизу*, и мы получим элегантную треугольную фигуру.

Таким образом, окружности прекрасно подходят для построения правильных треугольников и гексагонов.





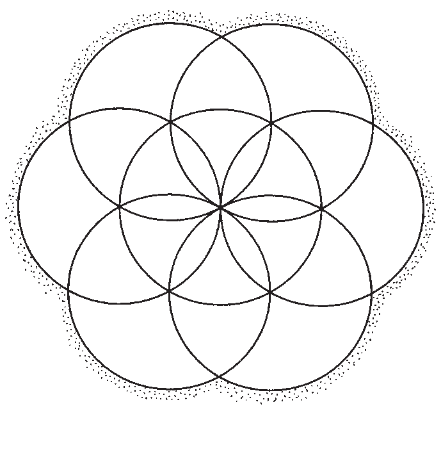
Шесть вокруг одной

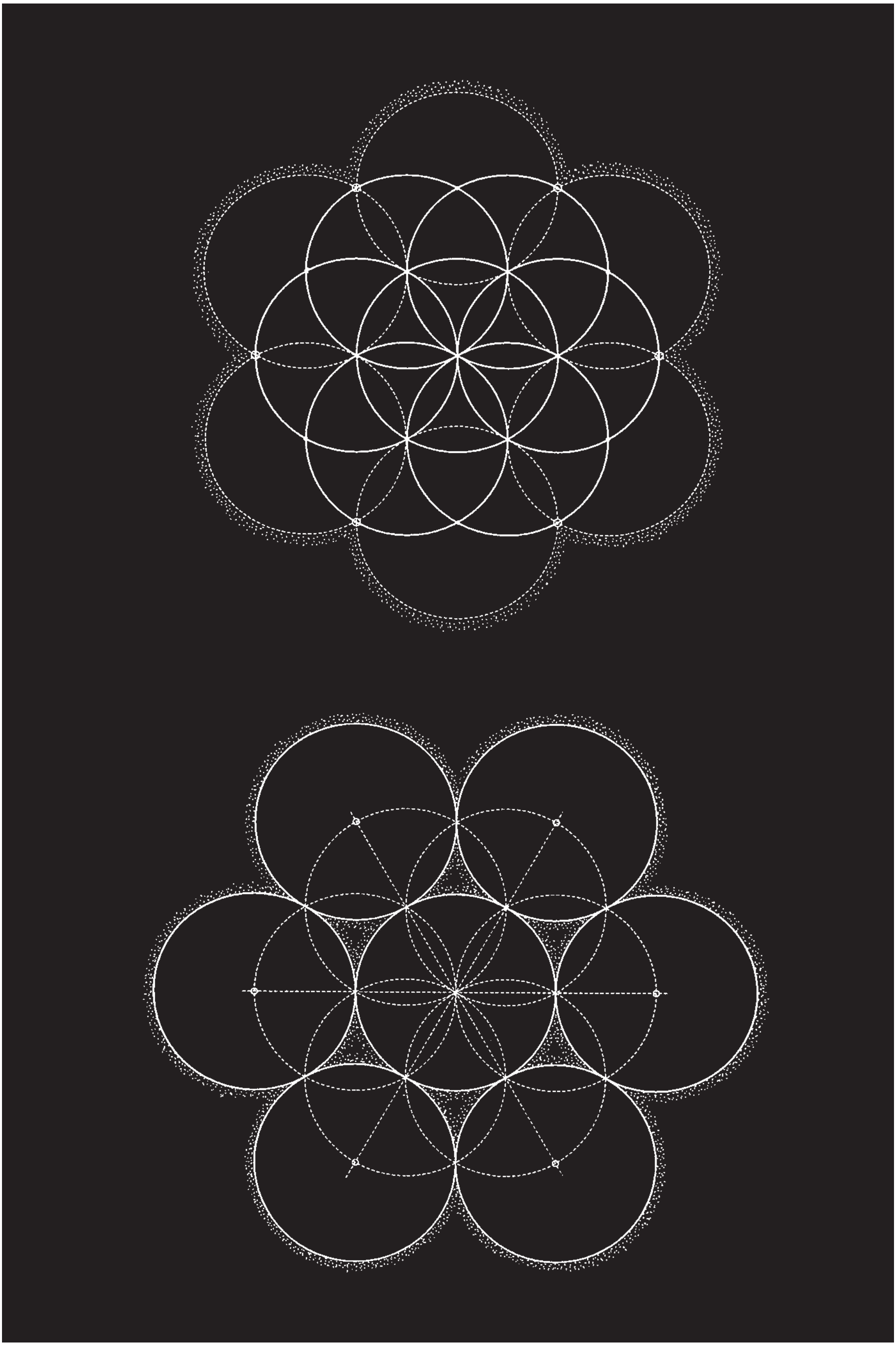
...Или двенадцать, или даже восемнадцать

Шесть вершин гексагона дают начало фигуре, похожей на цветок, которая изображена *на рисунке внизу*. Такую фигуру можно получить также, последовательно размещая центр новой окружности на каждом следующем пересечении с первой окружностью. Наверное, каждый ребенок хоть однажды чертил такую фигуру в своей школьной тетрадке по просьбе учителя либо просто забавляясь с циркулем.

Теперь нарисуем диаграмму, изображенную *на нижнем рисунке напротив*. Нам нужно найти 6 центров для внешних окружностей. Первый способ заключается в том, чтобы расширить цветок, нарисовав шесть дополнительных окружностей, показанных пунктирной линией *на верхнем рисунке напротив*. Они укажут нам 6 нужных точек. Второй способ — прочертить прямые через центр исходной окружности, как показано *на нижнем рисунке*. Оба способа подходят.

Таким образом, мы убедились в том, что 6 окружностей идеально размещаются вокруг одной. Наглядно продемонстрировать это свойство окружностей можно, взяв стаканы, теннисные мячи или монетки. «Шесть вокруг одной» — это первый ветхозаветный сюжет, 6 дней Господь работал, а один отдыхал. В самом деле, окружности весьма «шестеричны».





Двенадцать вокруг одного

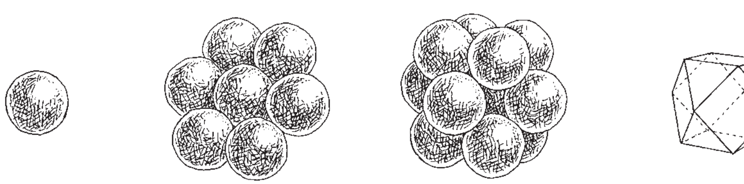
Как начертить додекагон

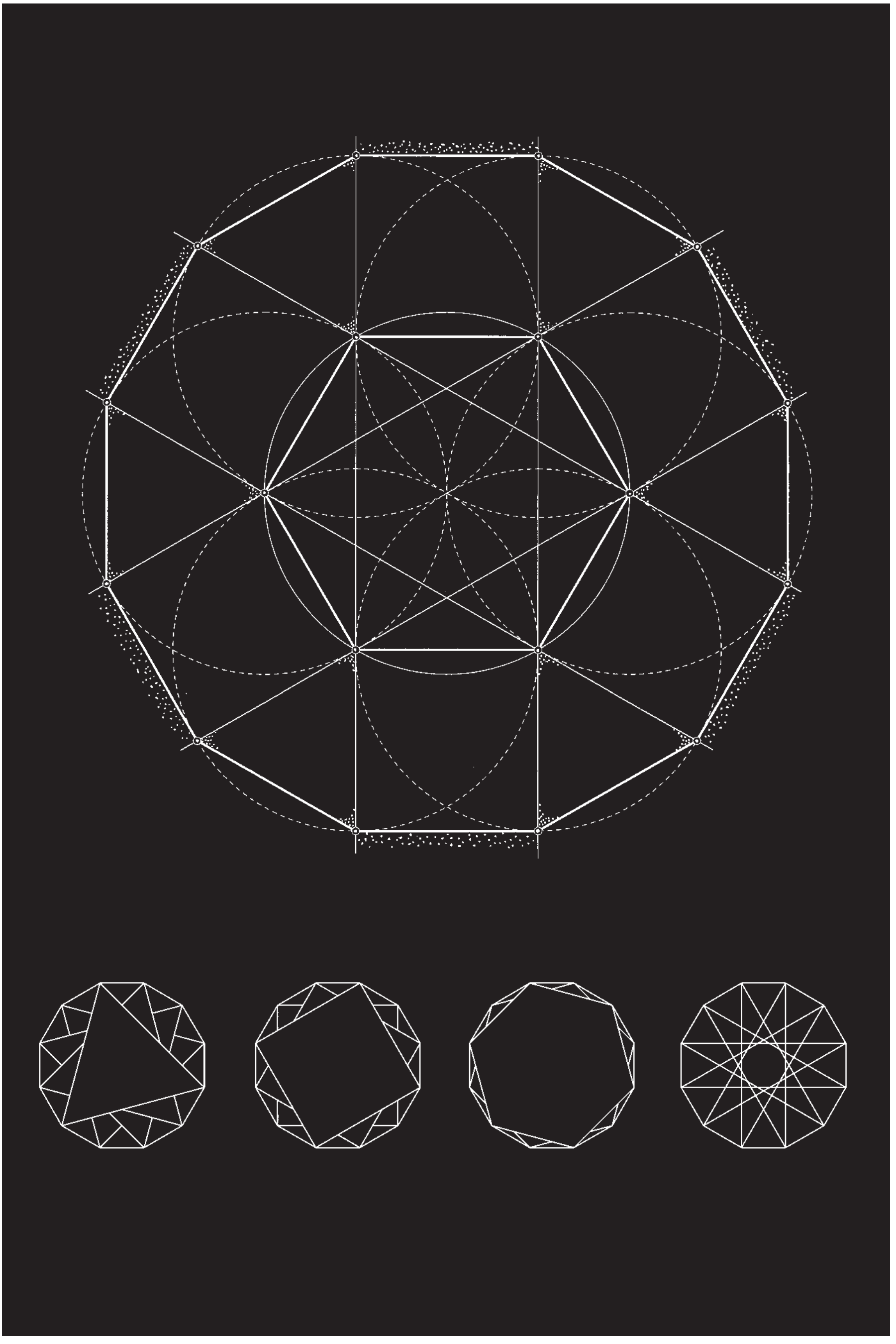
Как единица дает начало шести, так шесть становится основой для двенадцати. Если продолжить лучи шестиконечной звезды, которую формирует центральный цветок нашей фигуры, то точки их пересечения с внешними дугами 6 окружностей станут вершинами правильного двенадцатиугольника (*см. напротив*). Многоугольник с 12 сторонами называется додекагон («двенадцатиугольник» в переводе с греческого).

Додекагон также можно начертить, разместив вокруг правильного гексагона 6 квадратов и 6 равносторонних треугольников. Сможете найти их *на рисунке напротив*? Кроме того, додекагон можно разбить на фигуры, соответствующие множителям числа 12 (3, 4 и 6): 4 треугольника, 3 квадрата и 2 шестиугольника (*напротив внизу*).

На рисунке внизу — примерно то же, только в трехмерном пространстве. Так, вокруг мяча естественным образом умещаются 12 мячей того же размера, при этом каждый касается центрального мяча и 4 своих соседей. Апельсины или яблоки в лотках у продавцов — наглядное тому подтверждение. Полученная фигура называется *кубооктаэдром* и тесно связана с тетраэдром и кубом, которые мы видели *на с. 67*. Большинство кристаллов растут именно вдоль линий кубооктаэдра.

Число 12 согласуется с единицей в трехмерном пространстве, так же как 6 — в двухмерном. Вспомним Новый Завет — историю об учителе, окруженном 12 учениками.





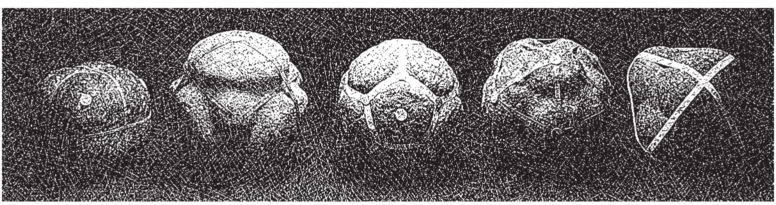
Пять стихий

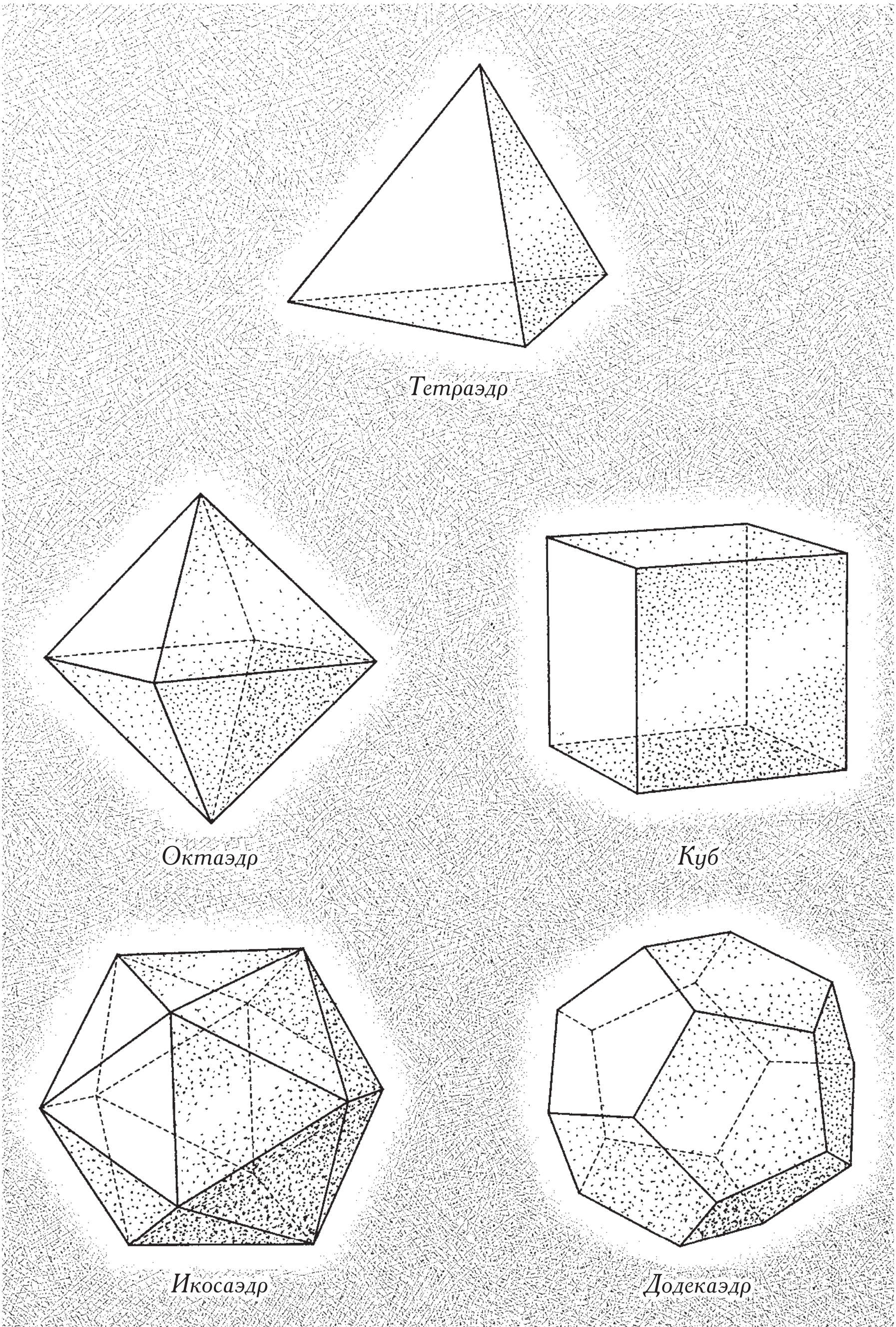
Краткое вторжение в третье измерение

Хотя *в Книге III* данного издания эта тема разбирается очень подробно, мы решили, что именно сейчас необходимо поговорить о правильных трехмерных телах. Их всего 5. Каждое из них имеет одинаковые ребра, грани в виде одинаковых правильных многоугольников, и все вершины такого тела равноудалены от его центра. Называемые платоновыми телами, эти многогранники были известны на Британских островах за 2000 лет до Платона. В шотландском Абердиншире на каменных кругах были найдены связки резных каменных шаров, возраст которых — 4000 лет (*согласно Кричлоу, см. внизу*).

Первое тело — это тетраэдр. У него 4 угла и 4 грани в виде равносторонних треугольников. Традиционно тетраэдр символизирует огненную стихию, Огонь. Второе тело — октаэдр, у которого 6 вершин и 8 граней в виде равносторонних треугольников. Он символизирует Воздух. Куб стоит третьим в этом ряду. У него 8 углов и 6 квадратных граней. Символизирует Землю. Четвертое тело — икосаэдр, или двадцатигранник, — имеет 12 вершин и 20 граней в виде равносторонних треугольников. Считается элементом водной стихии. Пятое, последнее тело — додекаэдр с 12 углами, символизирующий мистическую пятую стихию — Эфир.

Посмотрите, как прекрасен додекаэдр, как идеально он сложен из 12 равносторонних пятиугольников.




Тетраэдр
Октаэдр
Куб
Икосаэдр
Додекаэдр

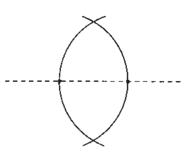
Квадратура круга

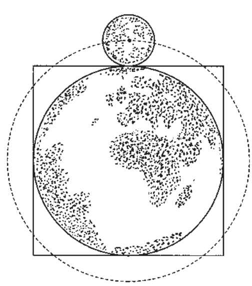
Единение Неба и Земли

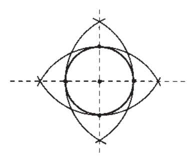
Круг — это фигура, традиционно символизирующая Небо, в то время как квадрат обычно относят к Земле. Когда две эти фигуры имеют одинаковую площадь, мы говорим о «квадратуре круга», подразумевая символическое единение Неба и Земли, Духа и Материи. «Пятикратный» человек существует между «шестикратным» Небом и «четырехкратной» Землей. Леонардо да Винчи на рисунке (*см. напротив*) показал пропорции человеческого тела. Например, размах рук человека равен его высоте, что соответствует семикратной длине ступни.

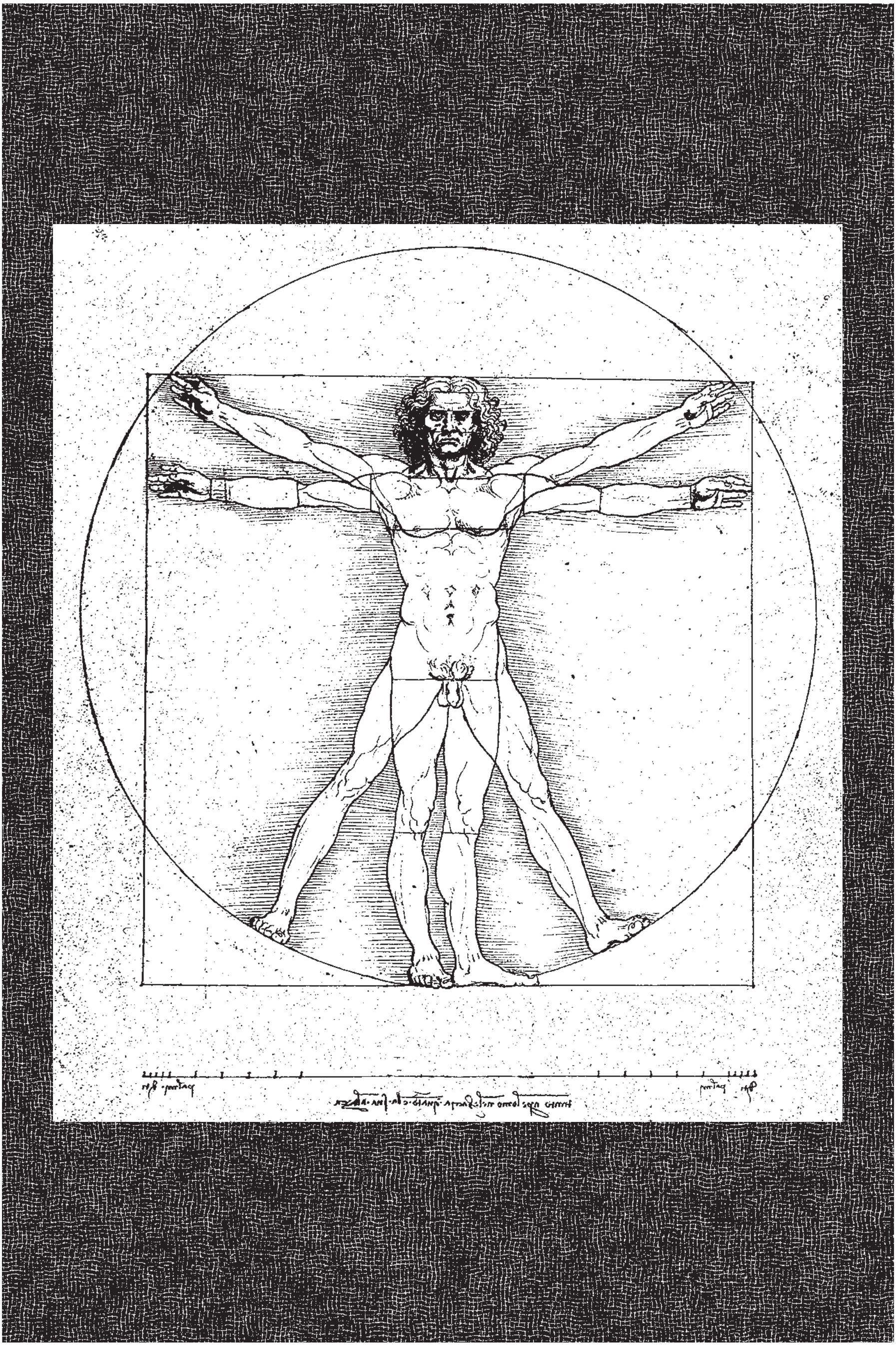
Как мы убедились ранее (*см. с. 33*), Земля и Луна имеют связь с квадратурой круга. Так, если Луну (диаметр 3) разместить непосредственно над Землей (диаметр 11), то небесный круг, проведенный через центр Луны (пунктирная линия *на рисунке внизу*), будет иметь радиус 7 и длину окружности 44, что полностью соответствует периметру квадрата, описанного вокруг Земли. Так происходит, потому что отношение длины окружности к ее диаметру, то есть число π, фактически равно $^{22}/_{7}$. На рисунке Леонардо Луна разместилась бы поверх головы человека.

Также *на рисунках внизу (справа и слева)* показаны простые схемы построения квадрата при помощи циркуля и линейки. А теперь плавно перейдем к восьмиугольникам.









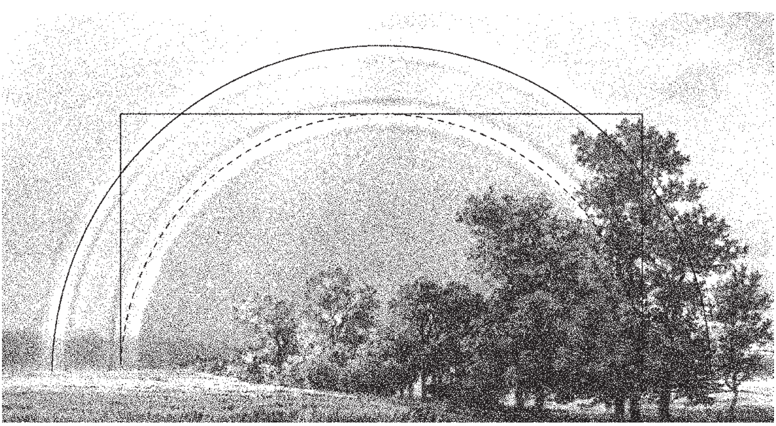
Канон

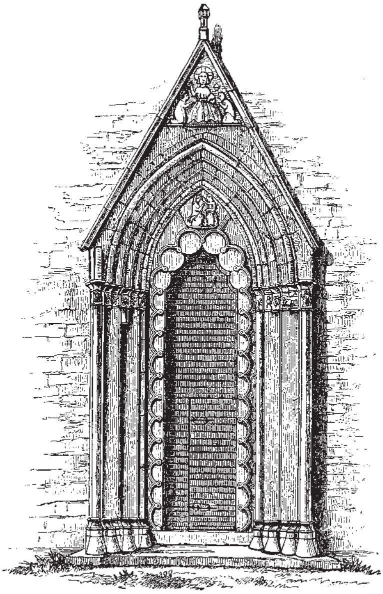
3, 7 и 11

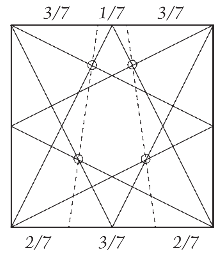
Квадратура круга, которую нам демонстрируют Луна (диаметр 3) и Земля (диаметр 11), точно повторяется в геометрии двойной радуги, чьи прекрасные дуги под углами 41,5° и 52,5° разворачивают перед нами картину единения Неба и Земли (*внизу, рисунок Мартино*). Глаз наблюдателя оказывается в вершине конусов, в основании которых — разноцветные дуги. Образующие этих конусов с осью составляют углы 41,5° и 52,5°.

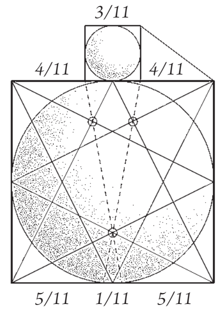
Архитектура входного портала Герумской церкви в шведском Готленде (напротив) опирается на взаимосвязь 3 и 11. Трижды 11 это 33 — ирландские и норвежские мифы изобилуют историями о 33 воинах. Иисус умер и воскрес в возрасте 33 лет, полный солнечный цикл длится 33 года. Число 7 также взаимодействует с числами 3 и 11. Наши предки давно знали, что ось Земли совпадает с диагональю треугольника высотой 7 и шириной 3. Они зашифровывали это значение в предметах сакрального искусства, например в наклоне головы Девы Марии или Будды. Наконец, $^{11}/_{7}$ — это древнеегипетское сакральное число, равное половине ϖ.

Октаграмма (*напротив*) — это уникальный способ деления прямоугольника на гармоничные фрагменты (*по Малкольму Стюарту*).

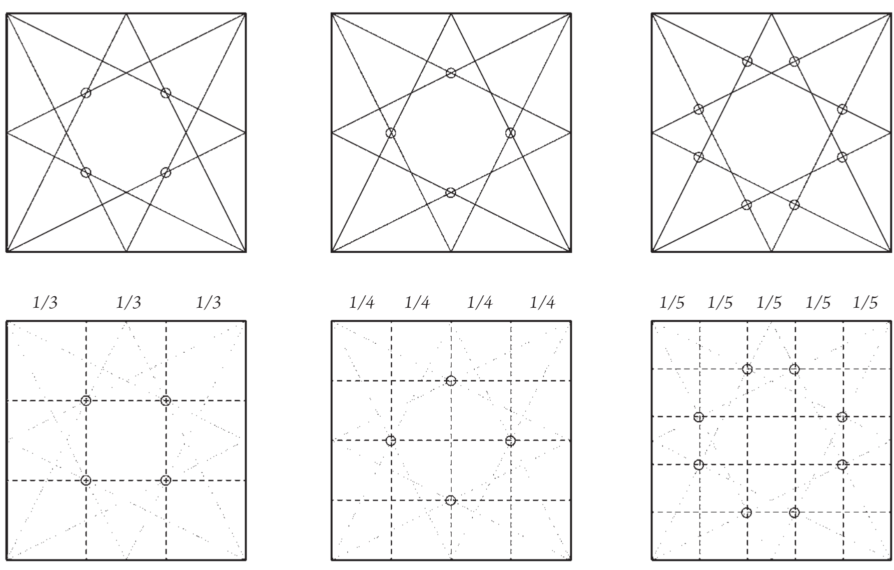








Вверху и внизу: октаграмма. Соединив углы квадрата с центрами противоположных сторон, мы получим отправные точки для деления квадрата на 3, 4, 5 и (вверху) 7 и 11 равных фрагментов. Крайне полезный инструмент. Кроме того, в линиях октаграммы обнаруживается большое количество целых чисел, красивых пропорций и фигур, включая множество пифагорейских треугольников со сторонами 3, 4, 5



Число π в пирамиде

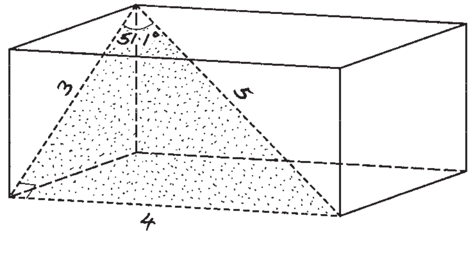
Всеобщее единение

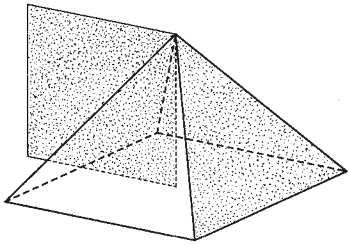
Наверное, самым известным геометрическим объектом на Земле является Великая пирамида Хеопса в Гизе. Она полна загадок, даже ее происхождение покрыто завесой тайны. Пять чертежей на следующей странице показывают следующее.

1. Квадрат высоты пирамиды равен площади каждой из ее граней.
2. *Золотое сечение* в пирамиде, Φ = 1,618 (*см. с. 86*).
3. *Число π* в пирамиде выражает отношение длины окружности к ее диаметру (3,14159...).
4. Пирамида в квадратуре круга (*см. с. 76*).
5. Пентаграмма выражает «суть» пирамиды — вырежи и склей!

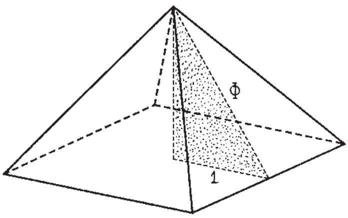
Геометрия в переводе с греческого означает «землемерие». Пирамида одинаково хороша в качестве точнейших солнечных часов, обсерватории, инструмента землемера и хранилища мер и весов. В ее архитектуре идеально сочетаются точнейшие измерения Земли, детальные астрономические данные и простейшие геометрические формы.

Треугольник с соотношением сторон 3:4:5 идеально вписывается в «камеру царицы» (среднее из помещений Великой пирамиды Хеопса. — *Ред., внизу*), а также задает угол наклона граней второй пирамиды в Гизе. Угол между двумя гранями пирамиды составляет 51,4°, 1/7 полного круга.

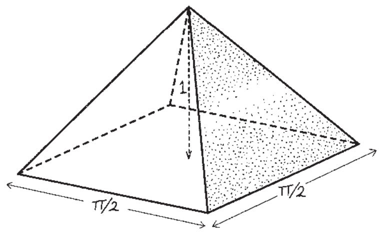




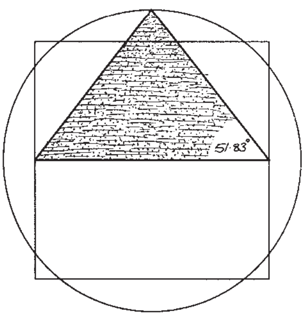
карта Земли
квадрат высоты = площадь грани



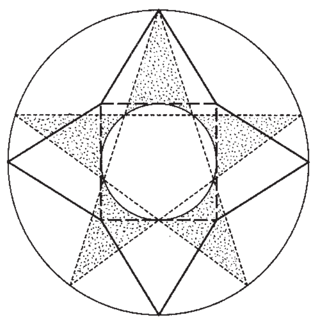
золотое сечение пирамиды
косинус угла наклона грани = 0,618



число π в пирамиде
периметр = 2π × высота



длина окружности с радиусом,
равным высоте пирамиды, =
= периметру основания пирамиды



конструируем пирамиду
из пентаграммы, вписанной
в круг

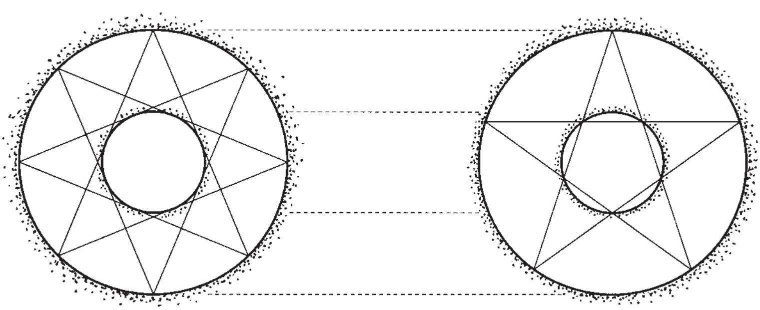
Половина и треть

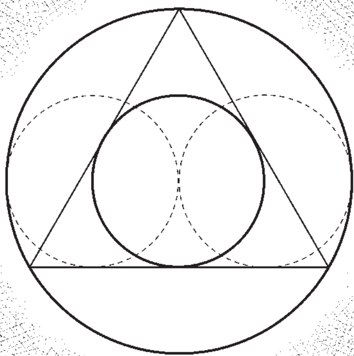
Делим при помощи треугольников и квадратов

Равносторонний треугольник (*напротив вверху слева*) или два вложенных друг в друга квадрата (*напротив вверху справа*) хранят один и тот же секрет — радиус окружности, вписанной в любую из этих фигур, ровно вдвое меньше радиуса окружности, описанной вокруг нее. Это геометрическое изображение музыкальной октавы, где частота верхней ноты ровно вдвое больше частоты нижней.

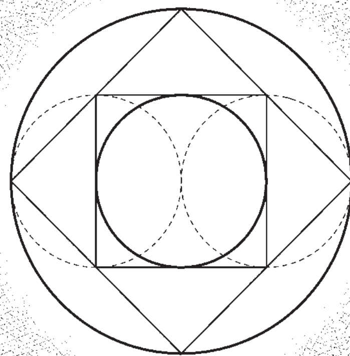
Соответственно трехмерный эквивалент треугольника — тетраэдр — обладает похожим геометрическим свойством. Радиус сферы, вписанной в тетраэдр, ровно втрое меньше радиуса сферы, описанной вокруг него (*напротив внизу слева*). У куба, вписанного в другой куб, октаэдра, вписанного в другой октаэдр, или октаэдра, вписанного в куб (*напротив внизу справа*), внутренняя сфера также в 3 раза меньше. В музыке геометрическая треть соответствует октаве, совмещенной с квинтой, в гармонической нотации. Итак, в *двумерном* пространстве легко определить *половину*, а в *трехмерном* — *треть*.

Близкое (но не точно такое же) геометрическое соотношение существует между числами 5 и 8. *На чертежах внизу* видно, что если внешний круг соотнести с орбитой Земли, то внутренний круг будет соответствовать орбите Меркурия.

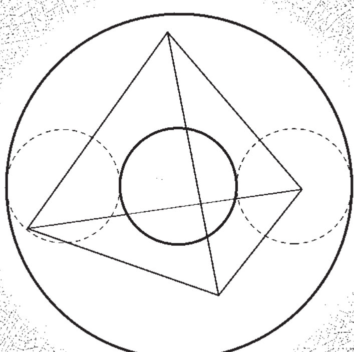




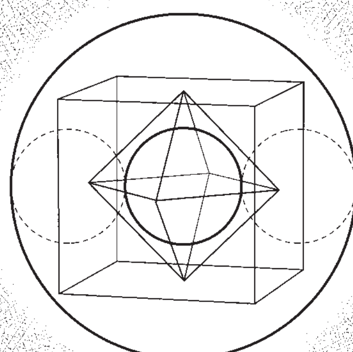
Ad triangulum («от треугольника»)
Равносторонний треугольник задает две окружности: диаметр внутренней вдвое меньше диаметра внешней



Ad quadratum («от квадрата»)
Два квадрата (один вписан в другой) задают две окружности: диаметр внутренней также вдвое меньше диаметра внешней



Ad tetratum («от тетраэдра»),
Диаметр сферы, вписанной в тетраэдр, втрое меньше диаметра сферы, описанной около него



Ad cuboctum («от куба»),
Диаметр сферы, вписанной в октаэдр, вписанный в куб, втрое меньше диаметра сферы, описанной около куба

Радиус вписанной окружности или сферы ровно в 2 или 3 раза меньше радиуса описанной окружности или сферы

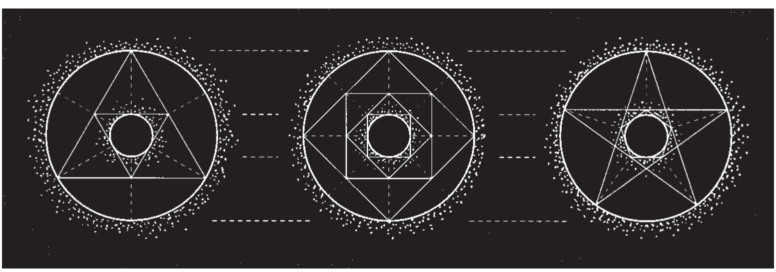
Формы звуков

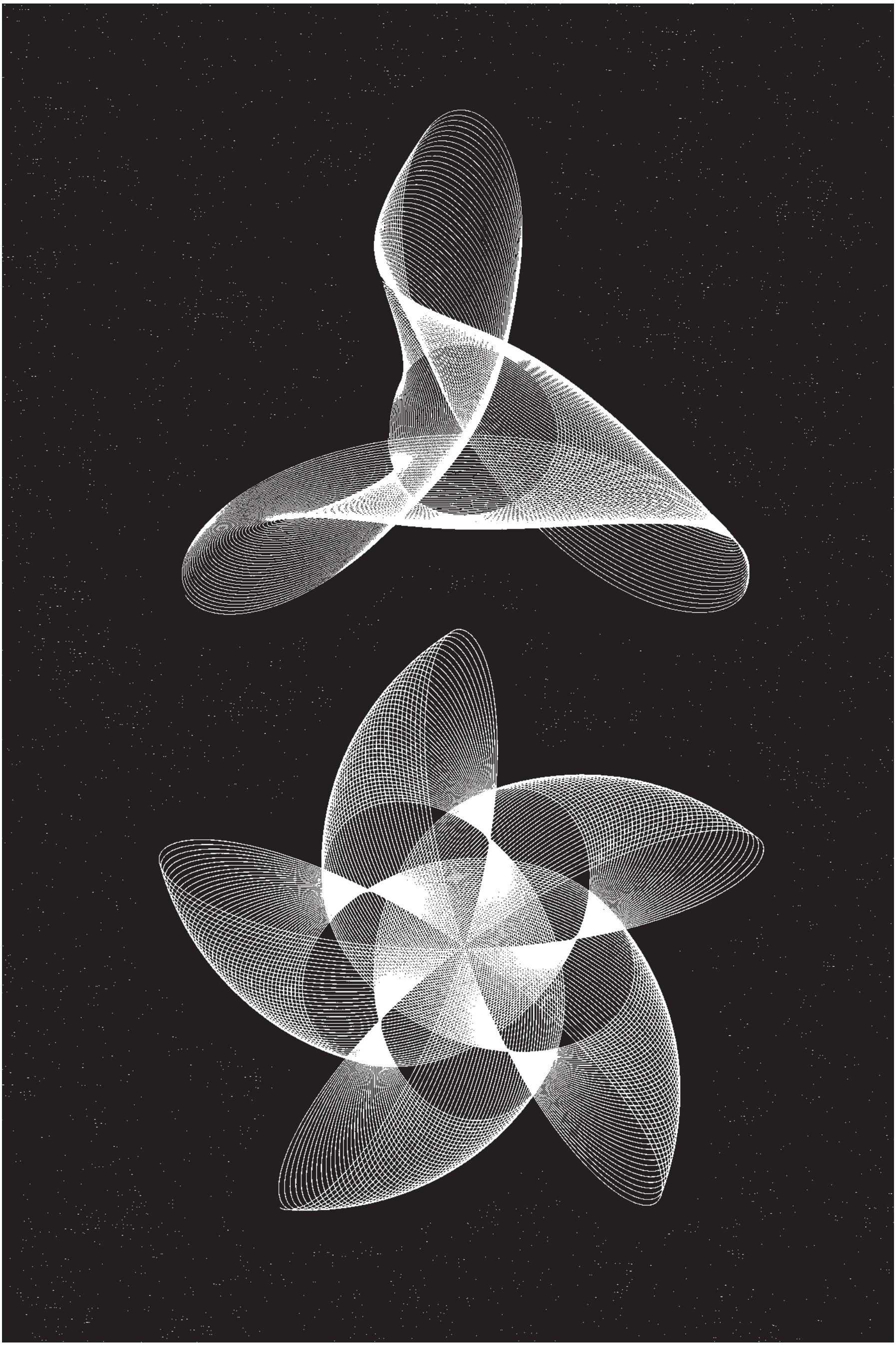
И три четверти

Геометрия — это «число в пространстве», музыка — это «число во времени». Как мы убедимся *в Книге IV*, основные музыкальные интервалы это не что иное, как простые пропорции: 1:1 (прима), 2:1 (октава), 3:2 (квинта), 4:3 (кварта) и т. д. Разница между квартой и квинтой составляет 1 тон и выражается как отношение 9:8. Музыкальные *интервалы*, как и геометрические пропорции, всегда являются результатом взаимодействия двух элементов: 2 струны, 2 периода (времени), 2 частоты. Простые пропорции звучат и выглядят прекрасно.

Музыкальный интервал можно изобразить в виде сложной фигуры. Прибор, который способен это сделать, называется *гармонограф*. Принцип его работы заключается в том, что ручка двигается по кругу с одной частотой, а стол движется в обратную сторону с другой частотой. *На рисунке напротив* изображены 2 чистых интервала. Октава (*вверху*) тяготеет к треугольнику, квинта (*внизу*) — к пятиугольнику.

В духе показанного на предыдущей странице, 2 октавы, или четверть, можно точно изобразить при помощи 2 треугольников, 4 квадратов или пятиугольника в пентаграмме (*внизу*).





Золотое сечение

И другие важные корни

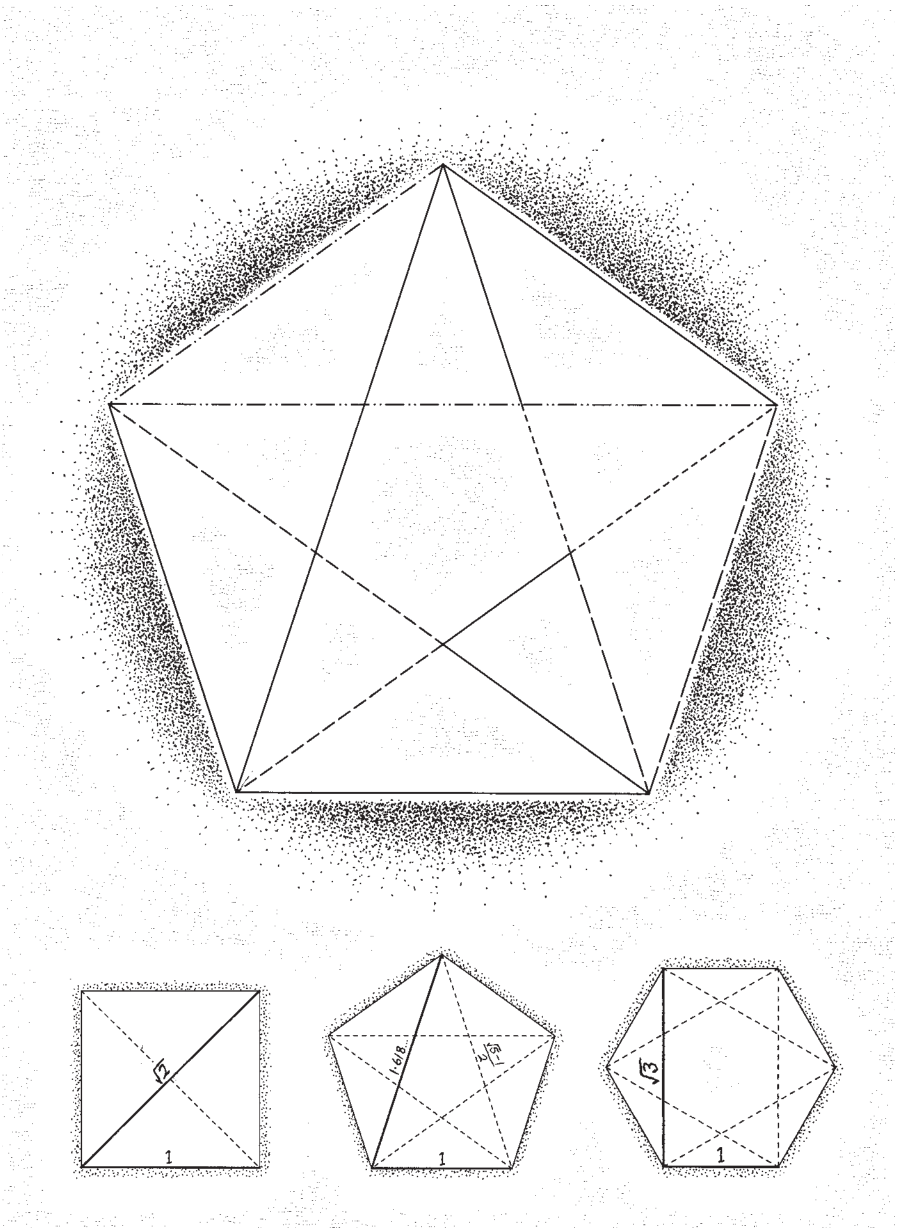
Напротив изображена пентаграмма, вписанная в пятиугольник. Если завязать простой узел на широкой ленте или полоске бумаги, затянуть, а потом расправить, то складки лягут в форме правильного пятиугольника. Попробуйте как-нибудь!

На большом чертеже напротив можно разглядеть разные пунктирные линии. Длины линий, обозначенных одинаковым пунктиром, находятся между собой в пропорции золотого сечения, 1:φ, где φ (фи) равна либо 0,618, либо 1,618 (точнее, 0,61803399…). В этой книге мы будем обозначать 0,618 буквой φ, а 1,618 — буквой Φ.

Важный факт: φ делит линию так, что меньшая ее часть относится к большей так же, как большая часть относится ко всей линии целиком. Другой столь же элегантной пропорции не существует. Так, $1 : 1{,}618 = 0{,}618$ и $1{,}618 \times 1{,}618 = 2{,}618$. Так, $1 : \Phi = \varphi = \Phi - 1$, а $\Phi \times \Phi = \Phi + 1$!

Золотое сечение — одна из трех пропорций, которые мы можем обнаружить в простейших многоугольниках (*внизу напротив*). Если принять длину грани за единицу, то внутренняя диагональ квадрата будет равна $\sqrt{2}$ (квадратному корню из двух), пятиугольника — Φ, шестиугольника — $\sqrt{3}$ (квадратному корню из трех). Множество знакомых нам объектов, от кассет и кредитных карт до входных дверей, представляют из себя прямоугольники золотого сечения. Соответствие с $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ часто можно обнаружить в кристаллах, а с Φ — в подавляющем большинстве случаев в органической природе, возможно, благодаря икосаэдрической структуре воды и других жидкостей. Эти геометрические пропорции присутствуют как в хорошей архитектуре, так и в гармонических интервалах.

Соседние числа в последовательности Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55… (складываем предыдущие два числа, чтобы получить следующее) стремятся к φ со все возрастающей точностью. Для уточнения: $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, а $\Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.


√2
1
1·618
√5−1 / 2
1
√3
1

Особенные спирали

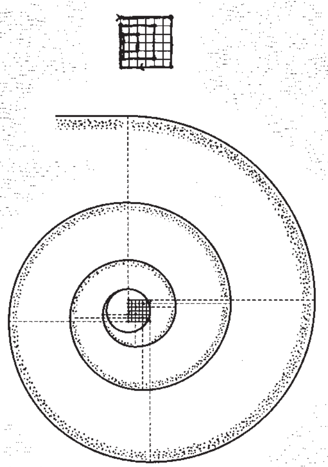
Как их начертить

Спирали — это поистине изумительные фигуры, которые так любит использовать сама природа. Для этой книги мы отобрали всего три из них. Любая спираль состоит из множества последовательно соединенных дуг.

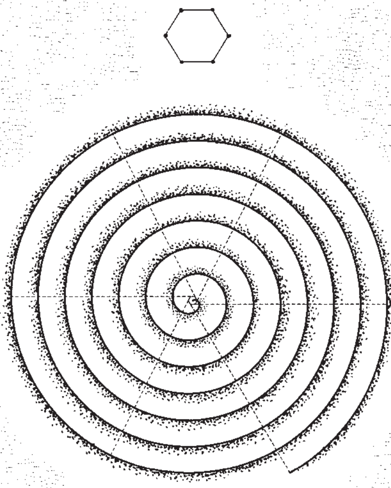
На рисунке вверху слева изображена одна из таких спиралей — так называемая ионическая волюта (волюта — архитектурный мотив, спиралевидный завиток с «глазком» в центре. — *Ред.*). Ее довольно сложно начертить, если не знать секрета (*см. маленькую «подсказку» над спиралью*). Пунктирными линиями на основном чертеже показаны радиусы дуг, которые формируют спираль, а точкой обозначены их центры. Это не так сложно, как кажется!

Для того чтобы начертить правильную спираль (*справа вверху*), тоже требуется ключ. Это могут быть просто 2 точки (самый простой вариант), треугольник, квадрат, пятиугольник или гексагон (*как на рисунке*). Чем больше точек вы возьмете за основу, тем идеальнее получится спираль. Вот как сделать это, используя всего 2 точки. Поставьте 2 точки на достаточно близком расстоянии друг от друга. Начертите полукруг так, чтобы его центр находился в первой точке, при этом линию начинайте вести от второй точки. Теперь, не перемещая ручку, немного расширьте размах циркуля так, чтобы его острый конец оказался во второй точке, и начертите еще один полукруг. Повторите так несколько раз и увидите, как у вас на глазах начнет появляться спираль. Описать этот процесс сложнее, чем выполнить. Попробуйте и убедитесь сами. Чем дальше друг от друга расположены исходные точки, тем шире получатся витки спирали. Посмотрите на подсказку к «ионической волюте»: заметили, в чем хитрость?

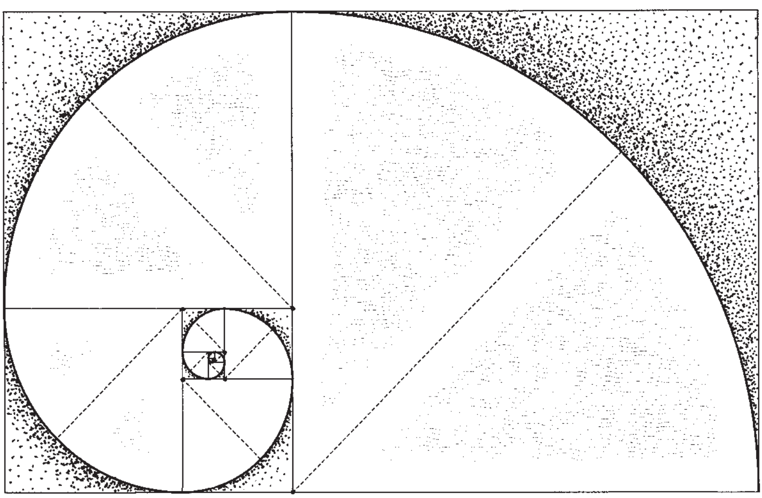
Внизу изображена золотая спираль — одна из семейства экспоненциальных спиралей, которые так часто встречаются в живой природе. У золотого прямоугольника есть замечательное свойство: если из него вычесть квадрат, останется такой же золотой прямоугольник, только меньшего размера. Золотая спираль появляется, когда мы последовательно вычитаем квадраты из золотого прямоугольника и соединяем дугой его противоположенные вершины.



Греческая ионическая волюта
(вверху подсказка с центрами дуг)



Правильная спираль
(за основу взят правильный шестиугольник)



Золотая спираль в золотом прямоугольнике

Любая спираль состоит из множества последовательно соединенных дуг

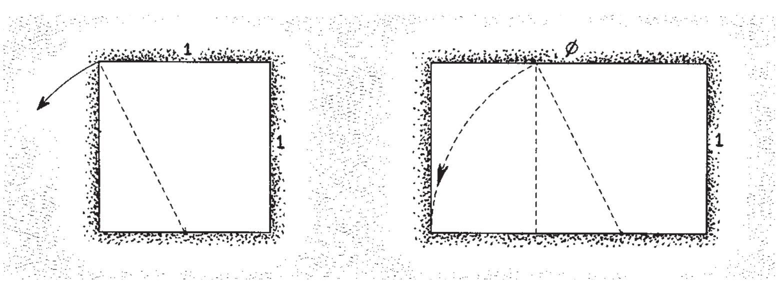
Как начертить пятиугольник (пентагон)

И золотой прямоугольник

Метод построения пятиугольника (*см. напротив*) безупречен. Впервые он был зафиксирован в труде Птолемея «Альмагест» (написан около 168 года от Р. Х.).

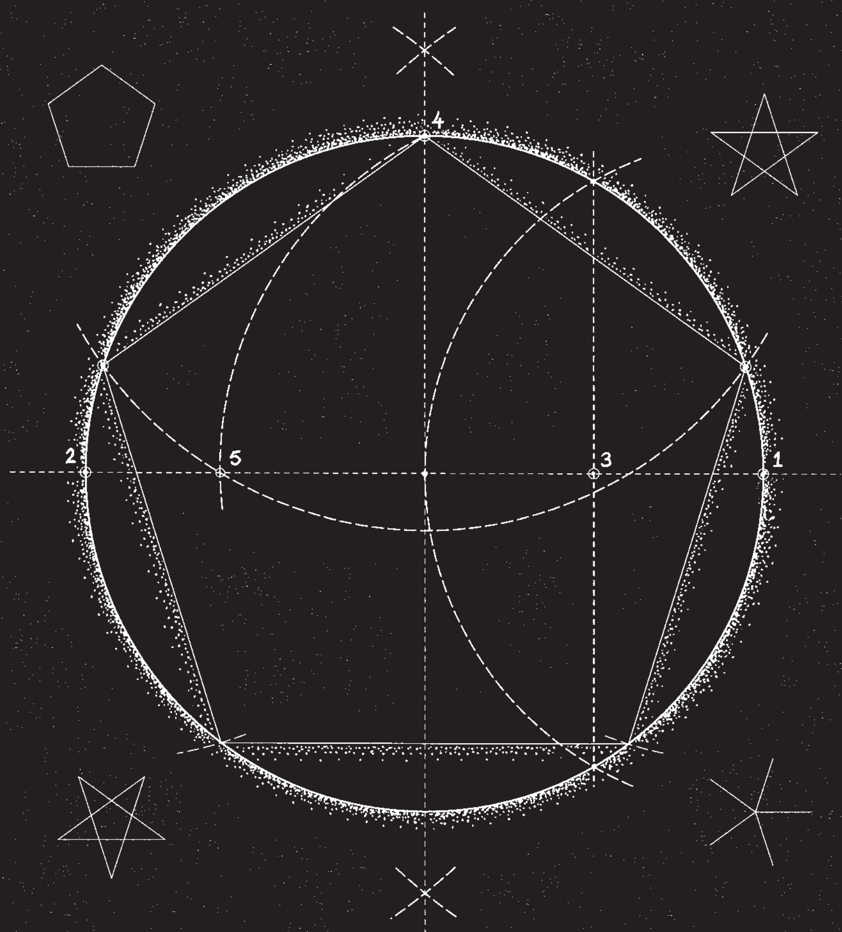
Начертите горизонтальную линию и окружность с центром на ней. Не меняя размаха циркуля, поставьте его острый конец в точку *1* и начертите полукруг через центр исходной окружности. Затем разведите ножки циркуля шире и найдите точки пересечения дуг, проведенных из точек *1* и *2*, над и под окружностью. Соедините получившиеся точки вертикальной линией. Эта линия пройдет точно через центр исходной окружности. Затем соедините вертикальной линией точки пересечения исходной окружности с ранее проведенной через ее центр дугой. Вы нашли точку *3*. Поставьте острый конец циркуля в точку *3* и проведите нисходящую дугу через точку *4*. На пересечении горизонтальной линии и этой дуги получим точку *5*. Далее дуга с центром в точке *4*, проведенная через точку *5*, даст нам две вершины пятиугольника. Чтобы найти две оставшиеся вершины, достаточно провести дугу через точку *4* с центром в одной из полученных вершин.

Золотой прямоугольник часто используется художниками и архитекторами. Чтобы его начертить, достаточно провести дугу из середины одной из сторон квадрата через противоположную вершину (*внизу*).



Древний метод построения правильного пятиугольника (пентагона) — цифрами на чертеже обозначены точки размещения иглы циркуля

Десятиугольник (10 граней) легко можно построить, взяв за основу пятиугольник — десять пятиугольников точно размещаются вокруг десятиугольника



Пятиугольник и его «звездная сестра» пентаграмма считаются символами воды (ее молекулы имеют пятиугольную структуру) и самой жизни

Число 5 символизирует священное единение между числами 2 (женское начало) и 3 (мужское начало), олицетворяет продолжение рода и магическое искусство исцеления

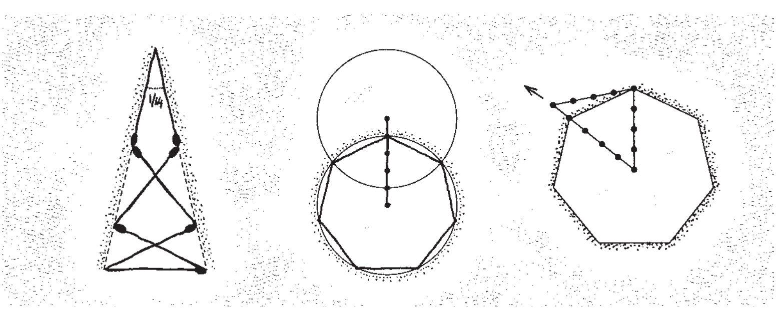
Семиугольник (гептагон)

Семь из трех

Разделите круг на 6 частей и начертите исходный равносторонний треугольник. По центру двух верхних граней треугольника отметьте точки *1* и *2* и опустите из них две вертикальные линии. Пересечение этих линий с основой треугольника обозначим точками *3* и *4*. Две нижние вершины гептагона окажутся на пересечении этих линий с окружностью. Теперь следует провести 2 дуги с центром в вершине треугольника: первую — через точки *1* и *2*, вторую — через точки *3* и *4*. Точки пересечения дуг с исходной окружностью дадут нам оставшиеся 4 вершины семиугольника.

Невозможно начертить идеальный семиугольник, используя только циркуль и линейку, но это легко можно сделать при помощи 7 одинаковых палочек или спичек (*внизу слева*). Каждый клин — *точно* $^{1}/_{14}$ окружности, то есть, чтобы получить $^{1}/_{7}$ часть, достаточно объединить 2 таких клина. Более древний и грубый метод заключается в использовании шнурка с 6 узелками или петли с 13 узелками (*внизу в центре и справа*).

Наши далекие предки были потрясающими землемерами. Каменные круги в Эйвбери (графство Уилтшир, Англия) расставлены точно на широте 51,4°, $^{1}/_{7}$ полного круга от экватора. Луксор в Египте расположен точно посредине между Эйвбери и экватором, а Мекка находится в точке золотого сечения между двумя полюсами.



Метод построения приближенно правильного семиугольника основан на равностороннем треугольнике, вписанном в окружность

В тексте нет ошибки. Идеальный семиугольник действительно невозможно построить при помощи только линейки и циркуля, так как каждая вершина определяется в нашем способе независимо от других

Число 7 символизирует непорочность и мало связано с остальными небольшими числами. Во многих культурах оно считается особенным, священным числом

7 нот гаммы, 7 дней недели, 7 небес античной мифологии и 7 чакр человеческого тела — все это прямое доказательство особенного отношения к числу 7 с древних времен

Девятиугольник

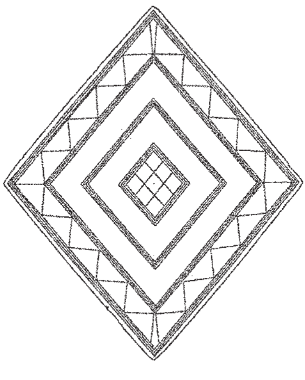
Число 9 и магические ромбы

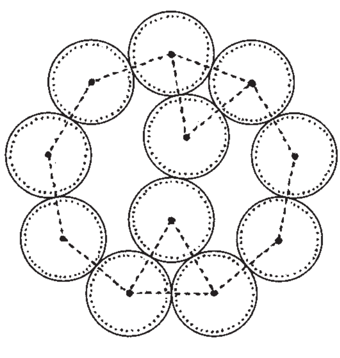
На чертеже напротив мы видим, как можно разделить окружность на 9 примерно равных частей, взяв за основу шестиконечную звезду.

Цифры многих особенных чисел при сложении дают 9: диаметры Луны и Земли в милях, например, равны 2160 и 7920. Еще 360 и 666, а также углы пентагона 36, 72 и 108. На самом деле, если умножить любое число на 9, а потом сложить его цифры, получится 9. Число 9 это 3×3, или 3^2. Многие традиционные культуры рассказывают о 9 мирах или 9 измерениях.

Недалеко от Стоунхенджа находится золотой ромб Кургана Буш (*внизу слева*). Его внутренние углы равны 80° и 100°, опять отсылка к числу 9. Угол рассвета и заката на широте Стоунхенджа всегда составляет примерно 80°, а угол лунного восхода и заката — около 100°. Ромб, очевидно, был весьма полезным приспособлением.

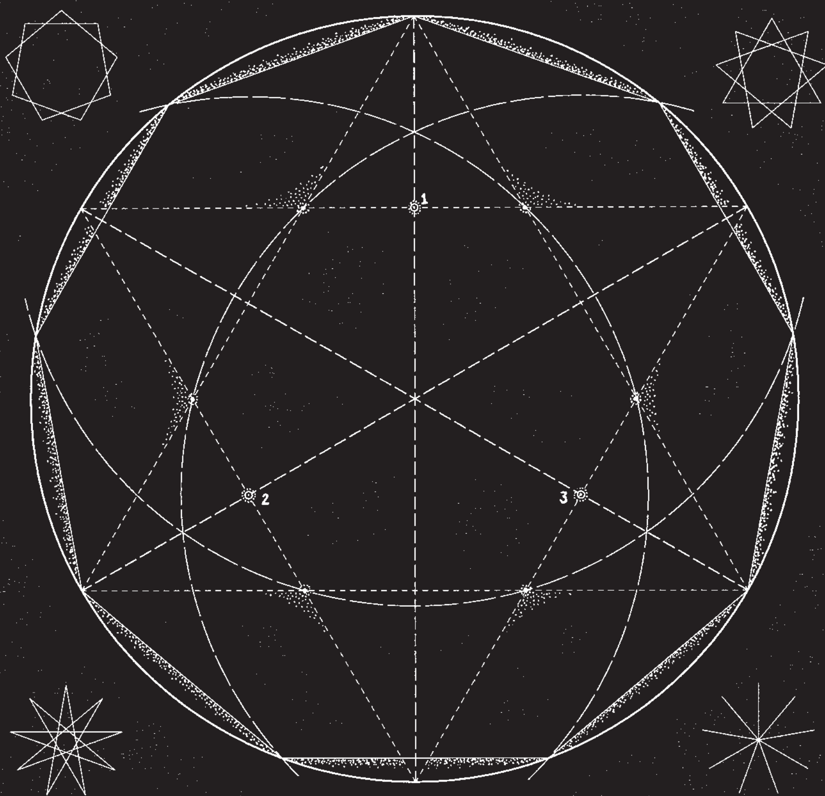
Теперь информация не для новичков. Малоизвестный факт, касающийся девятиугольника, заключается в том, что сферы с центрами в вершинах девятиугольника (или 9 монет, разложенных в форме правильной девятиугольной фигуры) могут поместить внутри еще 2 такие же сферы, которые только соприкоснутся (*внизу справа*).





Метод построения приблизительно правильного девятиугольника, предложенный Джоном Мичеллом, основан на гексаграмме, вписанной в круг

Этот метод прост и понятен, к тому же он достаточно точен для любых практических целей



Символизм числа 9 кроется в историях о 9 мирах, или сферах, присущих многим традициям шаманизма

9 это 3 в квадрате. Наряду с 8 (2 в кубе) 9 имеет большое значение для космологии Востока

Разделение пространства

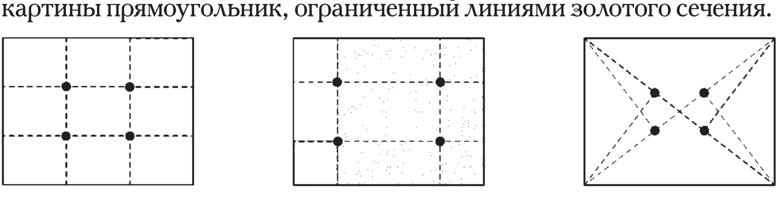
Правило третей

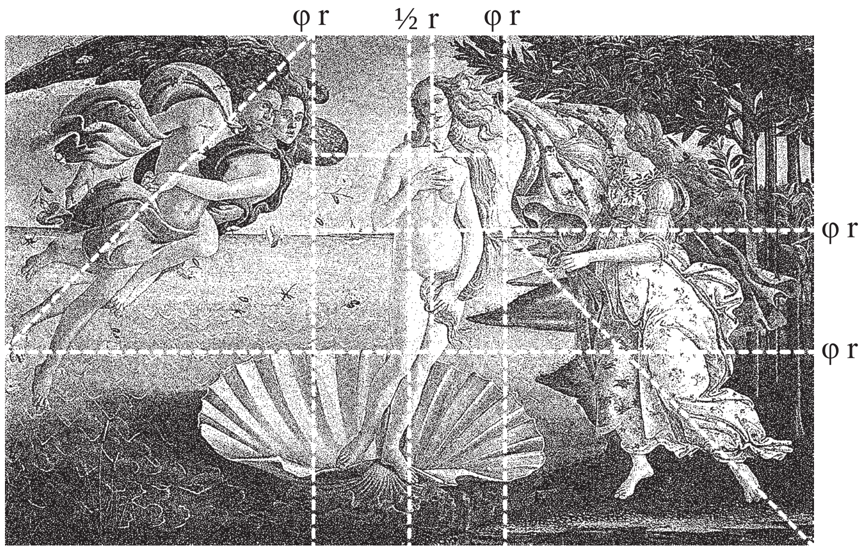
У художников в запасе всегда есть множество трюков, которые помогают им создавать идеальную картину. На занятиях по композиции студентам рассказывают о «правиле третей». Оно заключается в том, что холст делится на 9 уменьшенных копий исходного прямоугольника при помощи 3 вертикальных и 3 горизонтальных линий (*внизу слева*). Места пересечения исходных линий — это идеальные точки фокуса для будущего творения. Множество признанных мастеров пользуются именно этим приемом, так как объекты, размещенные на центральных линиях холста, смотрятся слишком надуманными и неестественными.

Другой прием заключается в том, чтобы начертить внутри исходного прямоугольника квадрат и использовать производные от него линии в качестве фокусных осей (*внизу в центре*). В золотых прямоугольниках пространство вне квадрата будет представлять собой еще один золотой прямоугольник. Этот процесс можно продолжать до бесконечности.

Неявные центры (*внизу справа*) находятся на пересечении диагоналей прямоугольника со сторонами прямоугольного треугольника. Вершины этого треугольника находятся в центре и в углах исходного прямоугольника.

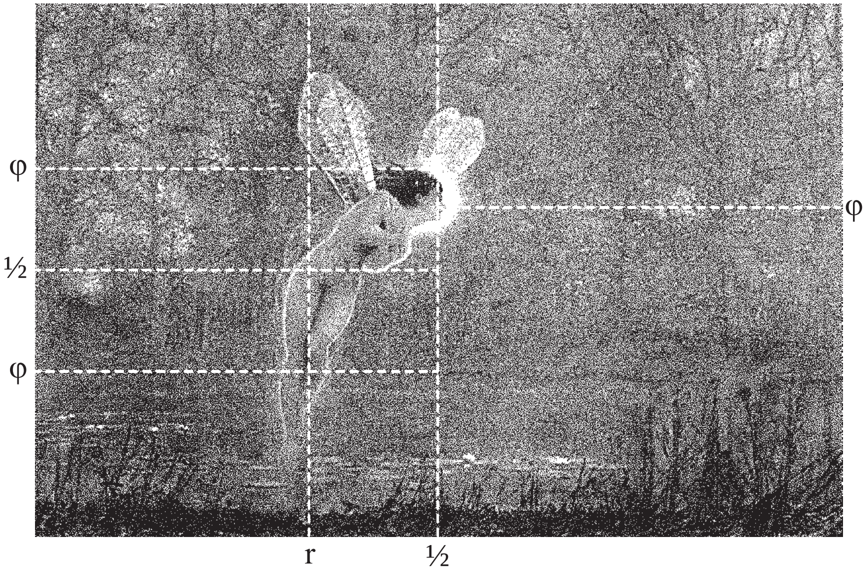
Кроме того, линию можно делить на 2 или 3 части, используя несколько первых чисел последовательности Фибоначчи, где пары соседних чисел стремятся к числу золотого сечения 0,618. Некоторые художники используют пропорцию 3:5 или само золотое сечение. *Напротив* вы видите 2 замечательных примера разделения пространства картины. Боттичелли использовал золотой прямоугольник, несколько раз поделенный при помощи квадрата, в то время как Джон Аткинсон Гримшоу взял за основу своей картины прямоугольник, ограниченный линиями золотого сечения.





Вверху: «Рождение Венеры» Боттичелли. Золотой прямоугольник, разделенный на внутренние квадраты, проходит через линию горизонта, позвоночник, пупок и другие части тела

Внизу: «Радужная фея» Джона Аткинсона Гримшоу. Положение феи определяют центральные линии и линии золотых пропорций. Фея нарисована на левой половине холста



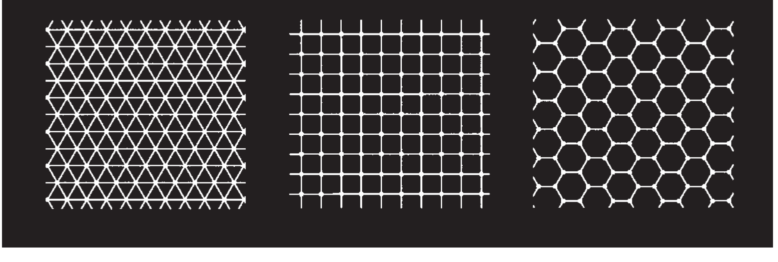
Простые мозаики

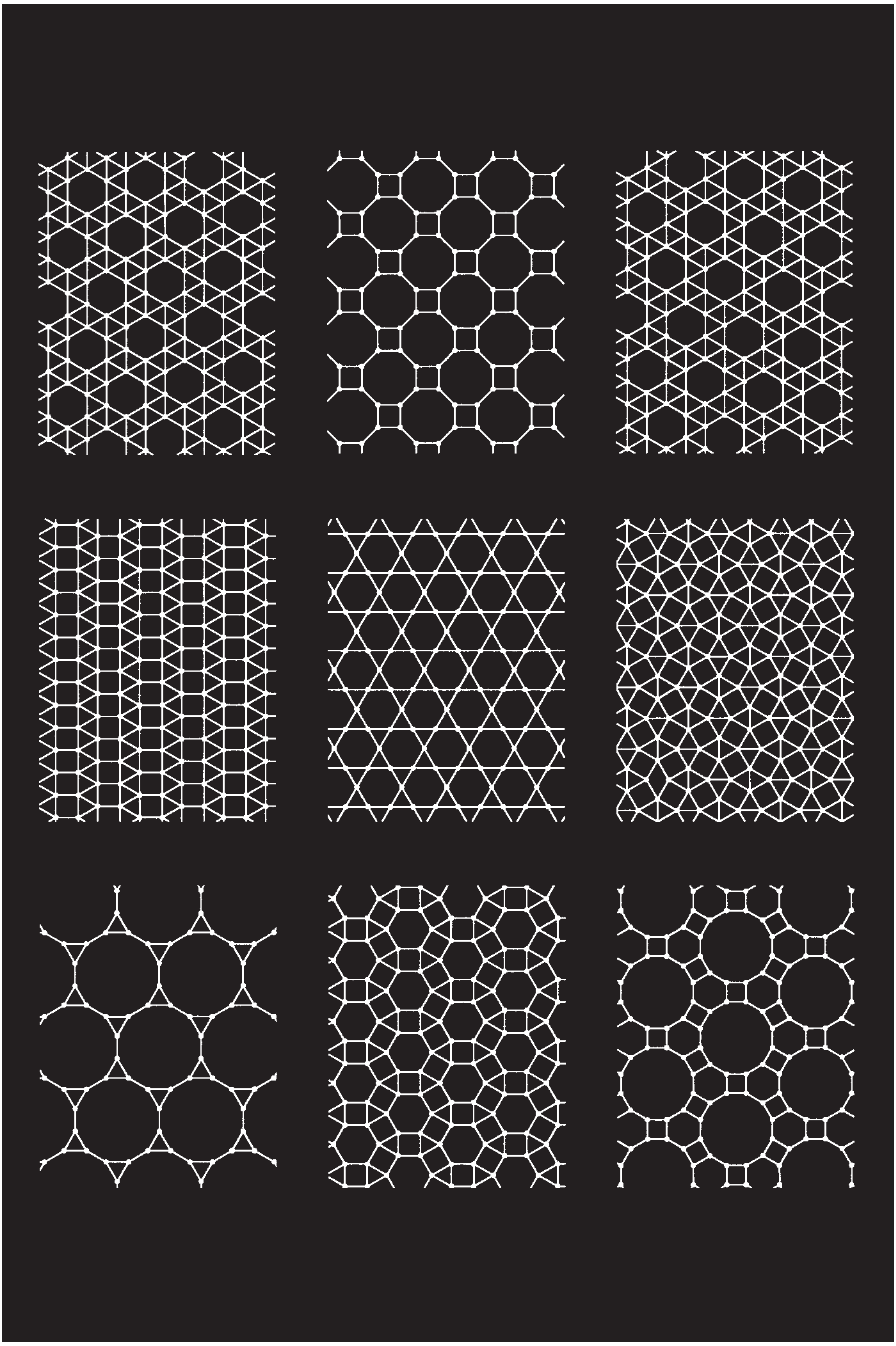
Повторяющиеся узоры на безграничной поверхности

Правильные мозаики (или паркеты) возникают в результате равномерного замощения плоскости одинаковыми правильными многоугольниками. Таких мозаик известно всего три (*внизу*). В полуправильных мозаиках допускается применение разных многоугольников, но стыковочные узлы должны быть одинаковыми. Например, в мозаике, изображенной *по центру напротив*, повторяющийся узор состоит из 2 пятиугольников и 2 треугольников. Все 8 существующих полуправильных мозаик показаны *напротив* (крайние слева и справа в верхнем ряду мозаики — это зеркальные версии друг друга, поэтому их можно считать одной).

Некоторые композиции можно составить иначе. Как показано *на с. 73*, двенадцатиугольник легко сформировать из шестиугольников, треугольников и квадратов, а гексагон — это просто коллекция треугольников. Как мы скоро увидим, треугольники и квадраты вместе могут создавать поистине удивительные конструкции. А как насчет остальных правильных многоугольников? Восьмиугольник составляет мозаику только вместе с квадратом (*напротив вверху в центре*). Пятиугольники плохо ложатся на плоскость, предпочитая трехмерное пространство (*см. с. 74 и 75*).

О семиугольниках и девятиугольниках разговор особый.





Более сложные мозаики

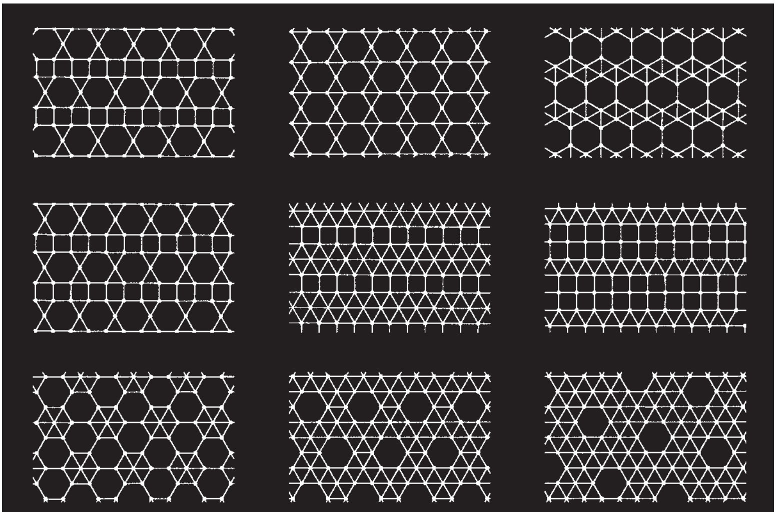
Веселье в ванной комнате

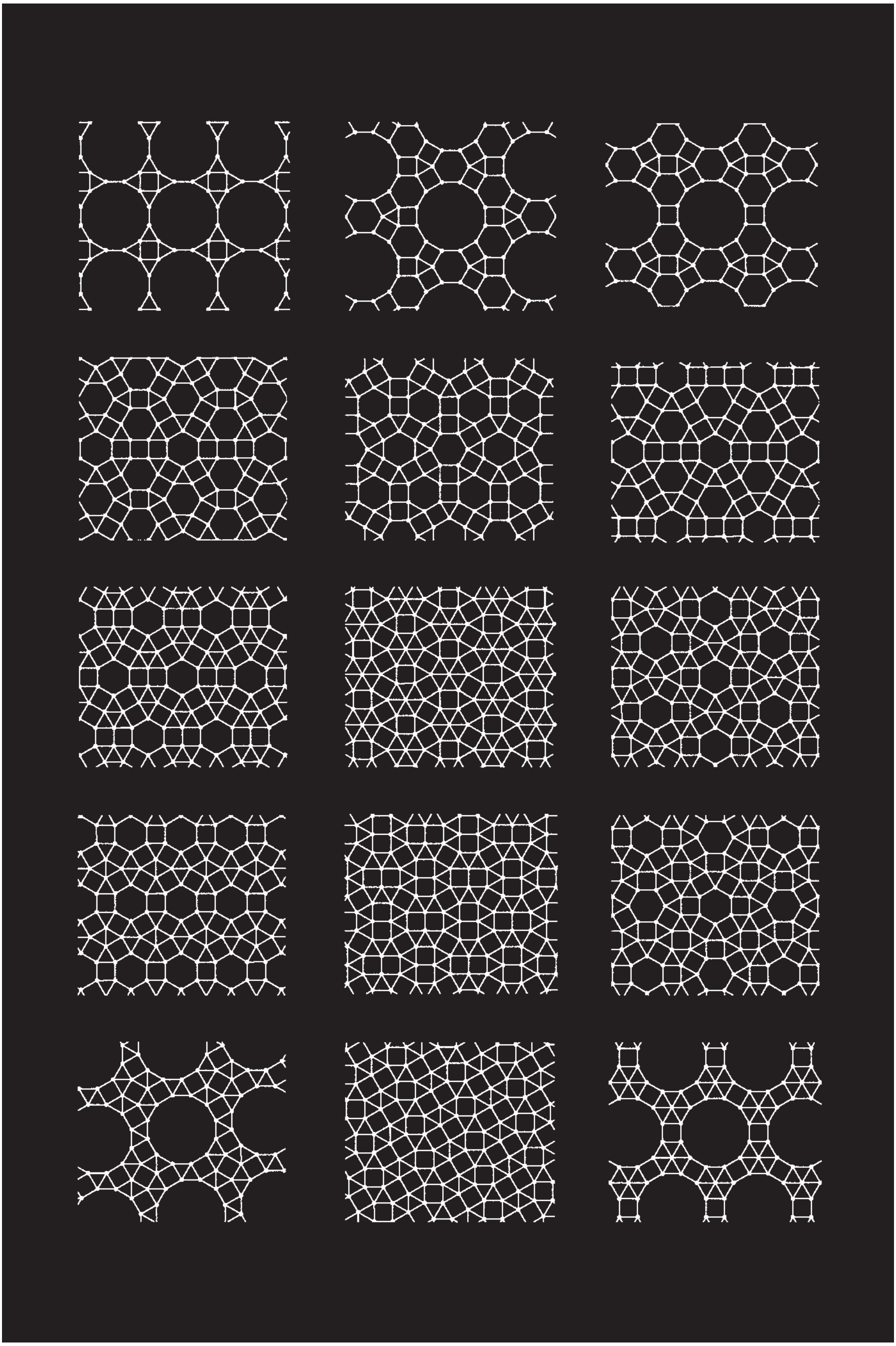
Известно 20 приблизительно правильных мозаик (в их узоре допускаются 2 разных стыковочных узла). Большинство из них, а также еще несколько интересных способов мощения плоскости показаны на этих двух страницах.

Такие виды мощения используются во многих традициях сакрального и декоративного искусства по всему миру. Их можно встретить в кельтских и исламских узорах, а в природе они наблюдаются в кристаллических и молекулярных структурах.

Эти мозаики в своем дизайне часто использовал Уильям Моррис. Возможности их применения ограничены лишь вашей фантазией!

В следующем разделе мы увидим пример использования одного из таких узоров.





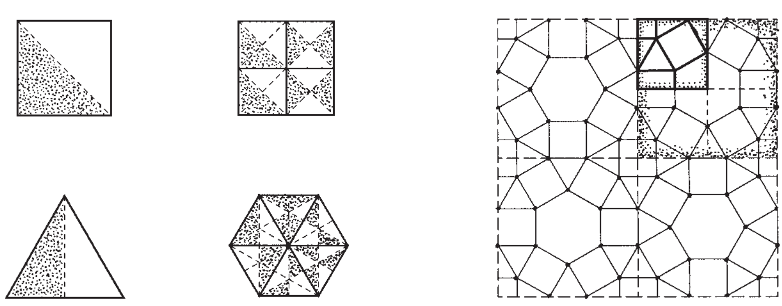
Наименьшая часть

Двусторонние трафареты и поворотные блоки

Большинство полуправильных и приблизительно правильных мозаик можно сократить до простого квадратного или треугольного модуля, при последовательном отражении или повороте восстанавливается целый узор. Часто эти повторяющиеся треугольники и квадраты оказываются на удивление маленькими. Стоит вспомнить, тем не менее, что на практике обычно гораздо легче повернуть трафарет, чем отразить его зеркально, поэтому в таких случаях бывает проще увеличить область исходного модуля.

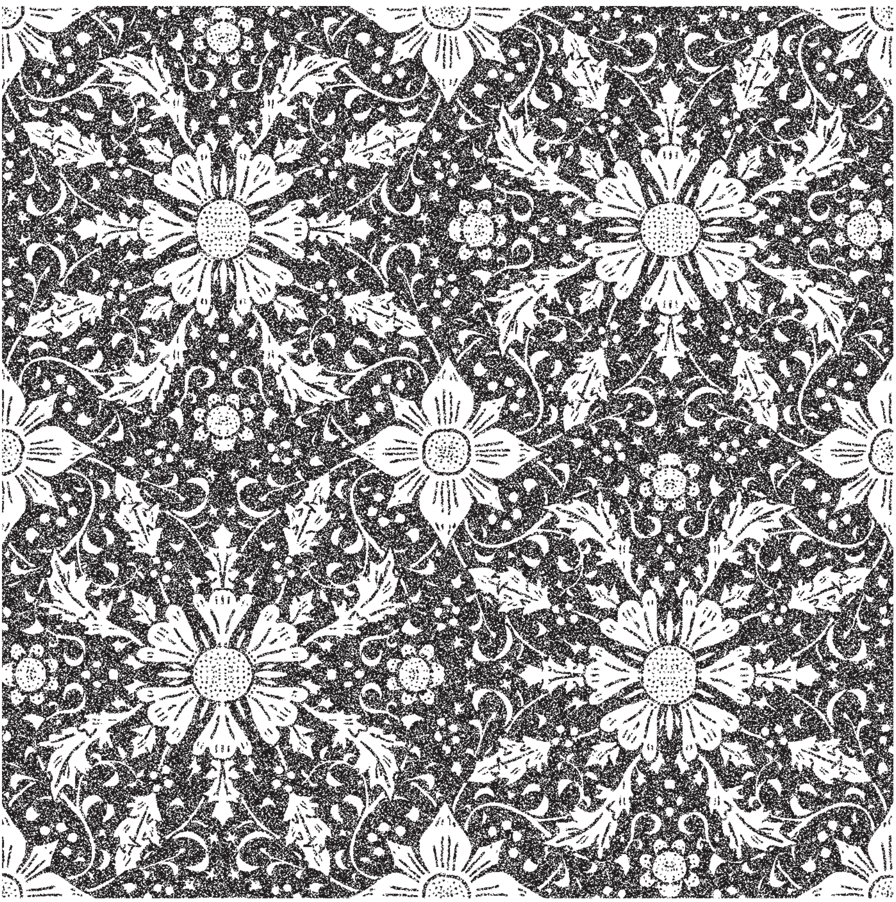
Узор *на рисунке напротив* основан на одной из мозаик с предыдущей страницы (догадайтесь, о какой из них речь). Узор формируется вращением и отражением небольшого модуля (*внизу справа*). Как только вы определили исходный модуль, все, что вам остается сделать, это начертить минимальный набор модулей для создания полного узора.

Квадраты и равносторонние треугольники можно делить пополам для получения маленьких треугольных модулей (*внизу слева*). Но опять же, будьте внимательны и помните о конечной цели; например, вы не сможете проделать это с узором, показанным *напротив*. Догадались почему?



Исходный модуль изображен в том же масштабе, что и весь узор. Поверх него нанесены линии, взятые за основу его структуры

Обратите внимание: листья и лепестки расположены вдоль граней многоугольников, а сердцевины цветков — в точках, вокруг которых вращается узор



Симметрия

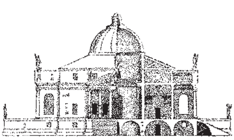
Правильная и прекрасная

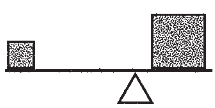
Симметрия означает «соразмерность». Мы называем что-то симметричным, когда оно обладает гармоничными пропорциями, зачастую между повторяющимися элементами. Элементы могут повторяться множеством различных способов: перемещением, поворотом, отражением, по спирали, образуя мозаику, растягиваясь, складываясь, или множеством комбинаций только что перечисленного.

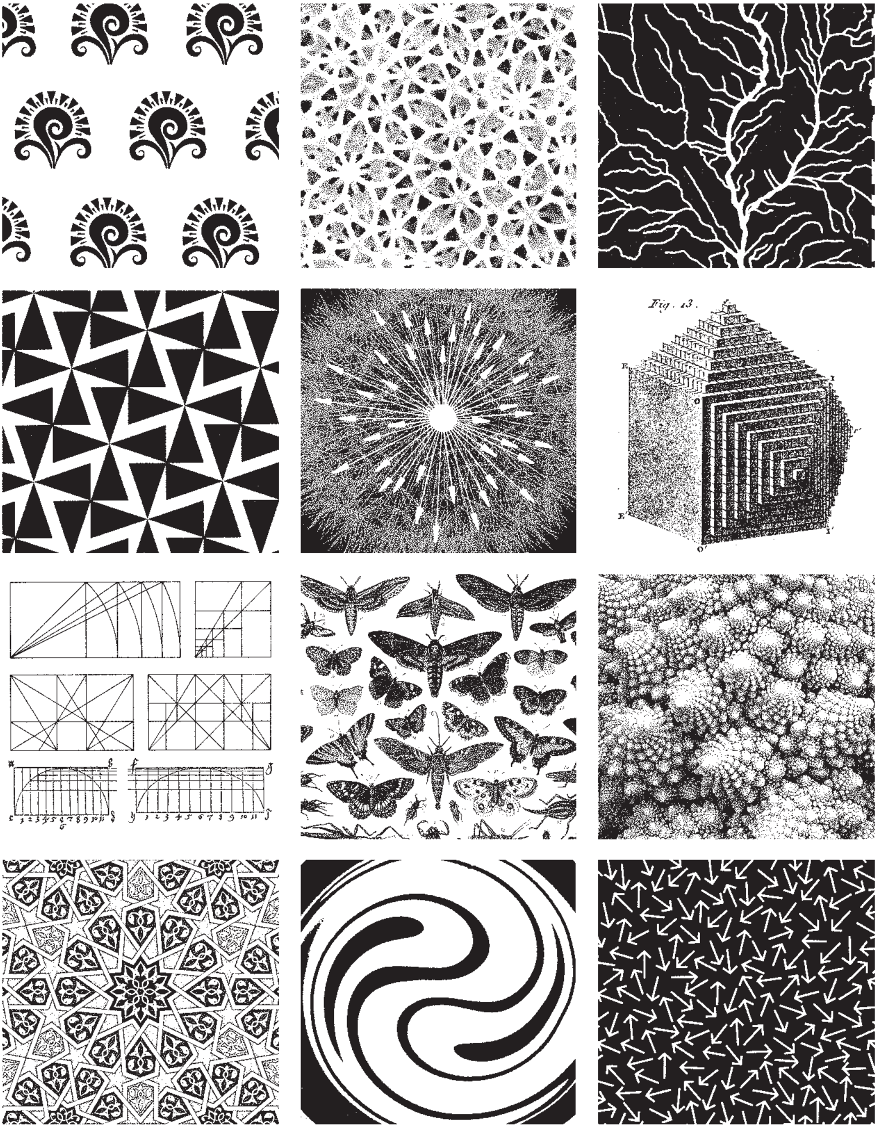
Симметрия может быть явной (четкой) или неявной (скрытой). Например, уравновешенные весы (*внизу в центре*) намекают на скрытую математическую и физическую симметрию, на которой основаны законы физического мира. Симметрия может служить предметом исследования для целой книги, поэтому приведенные здесь соображения — это всего лишь попытка навести вас на определенные мысли без претензий на полноту объяснения. Помимо симметрий, перечисленных выше, существуют также топологические симметрии (*внизу справа*), фрактальные симметрии (части являются уменьшенными копиями целого), симметрии кристаллов, разворачивающиеся по орбите электрона, апериодические (*см. симметрию Ли, с. 120*), радиальные, повторяющиеся и серийные симметрии (*см. например, филлотаксис, с. 324*), а также разные виды асимметрии.

Важно понимать, что геометрия и гармония сами по себе являются примерами симметрии, которая проявляется в дивной эстетике их объектов. Сюжету фильма или книги тоже можно придать симметрию. Даже идея или понятие могут иметь симметрию, например идея судьбы или справедливости.

«Соразмерность» действительно может означать многое.







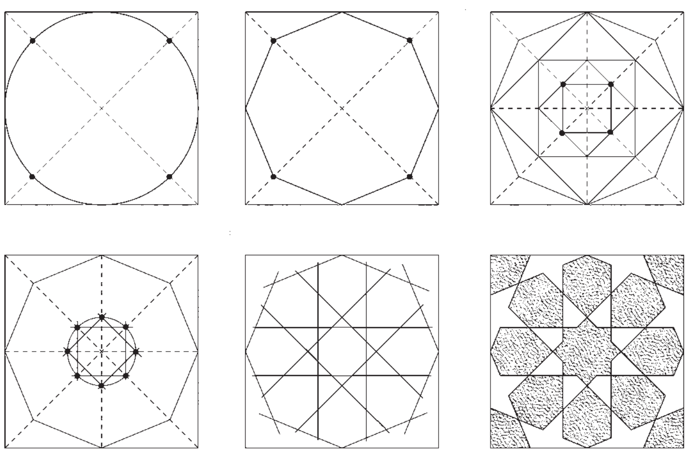
Элементы симметрии могут повторяться множеством различных способов: перемещением, поворотом, отражением, по спирали, образуя мозаику, растягиваясь, складываясь, а также образуя бесчисленное количество комбинаций всего перечисленного

Исламские узоры

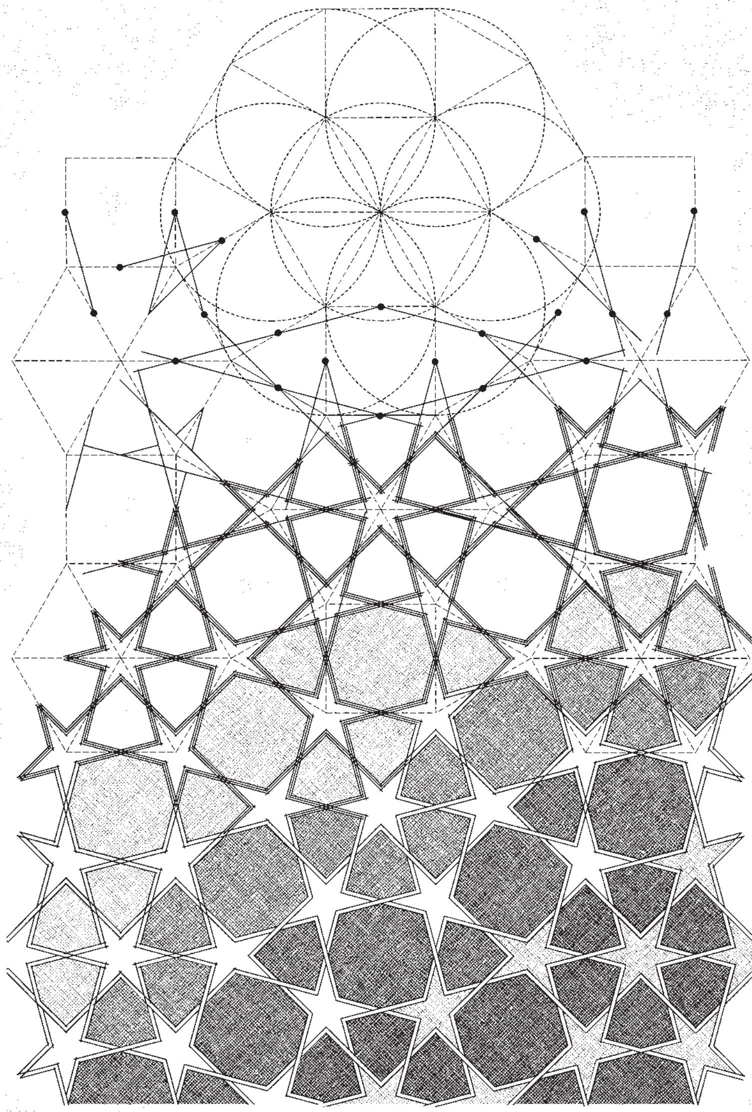
Звезды складываются из решеток

Исламские узоры говорят о бесконечности и вездесущем центре. Чтобы получить такой узор, как *на рисунке напротив*, начните с шести окружностей, размещенных вокруг одной. Постепенно у вас будет получаться узор из перекрывающих друг друга двенадцатиугольников, состоящих из треугольников, квадратов и гексагонов (*см. с. 73 и 99*). Ключевыми точками будут середины граней каждого многоугольника. Их необходимо объединить и продолжить так, как показано *в верхней части рисунка*. В каждой простой решетке скрыт прекрасный узор, нужно только уметь его извлечь.

Сами по себе решетки редко встречаются в традиционном искусстве. Они служат каркасом реальности, на который надевается покрывало космического порядка: «порядок» значит «красота».



В каждой решетке скрыт прекрасный узор, нужно только уметь его извлечь



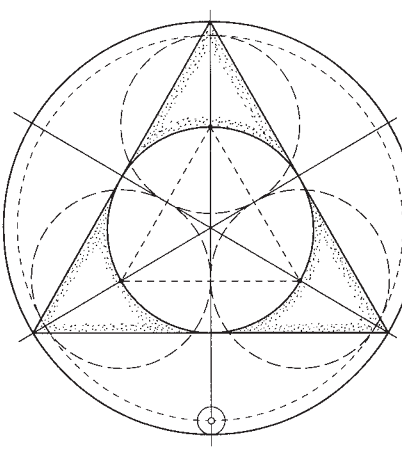
Церковное окно

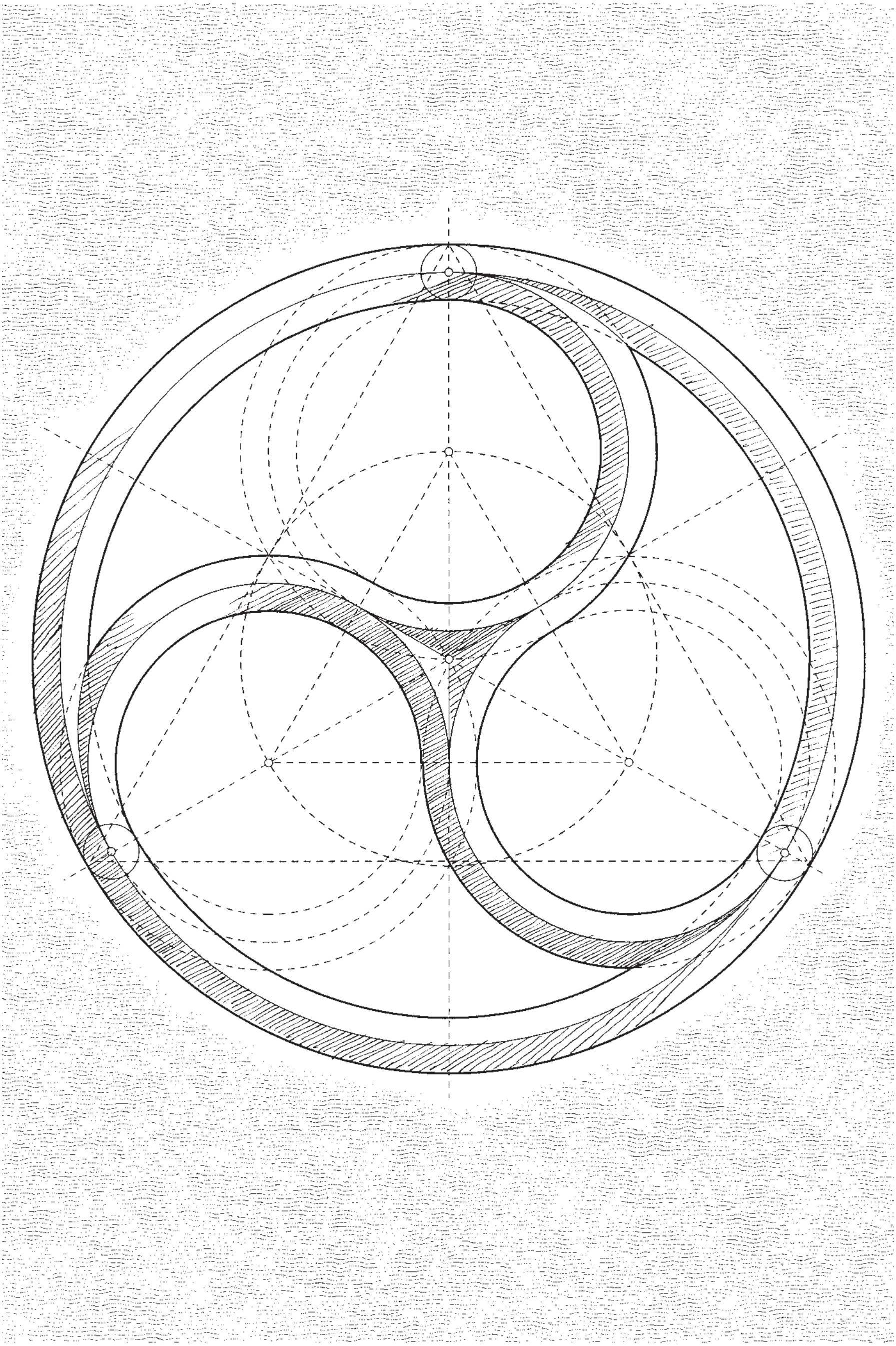
Неподалеку от острова Мэн

На рисунке напротив вы видите часть кирпичной кладки церковного окна. Такая композиция говорит о сокрытой в единстве троице. Этот чертеж очень красив и доставляет истинное удовольствие. Проверьте, получится ли у вас сделать нечто подобное. В качестве подсказки используйте чертеж *внизу страницы*; начните с большой окружности. Обратите внимание, как в результате геометрических построений появляется каждая новая деталь.

Начертите большой круг и разделите его на 6 частей. В этот круг поместите большой треугольник. Далее в треугольник впишите окружность. Таким образом, мы получим центры для 3 соприкасающихся внутренних окружностей (*на линиях, проходящих через центр треугольника на чертеже*). Обратите внимание, что эти окружности не соприкасаются ни с внешней окружностью, ни с центром окна. Маленький круг (*у нижнего края чертежа внизу*) задает толщину каменного переплета для всего узора и позволяет прорисовать оставшиеся внешние и внутренние линии.

Попробуйте воссоздать показанный *напротив* чертеж самостоятельно.





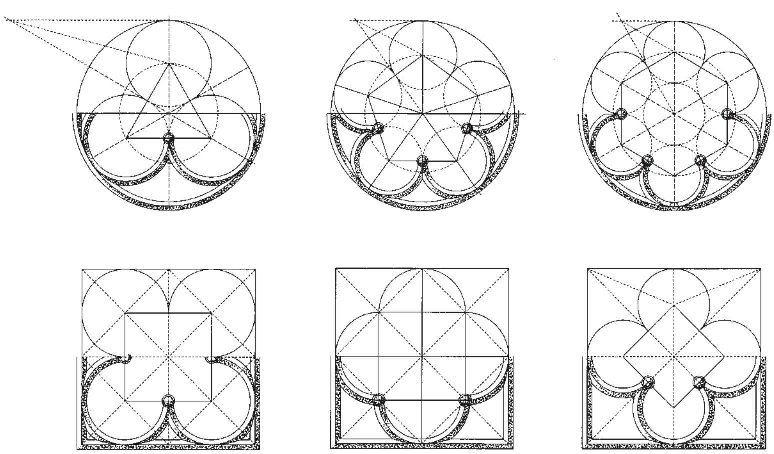
Трилистники и четырехлистники

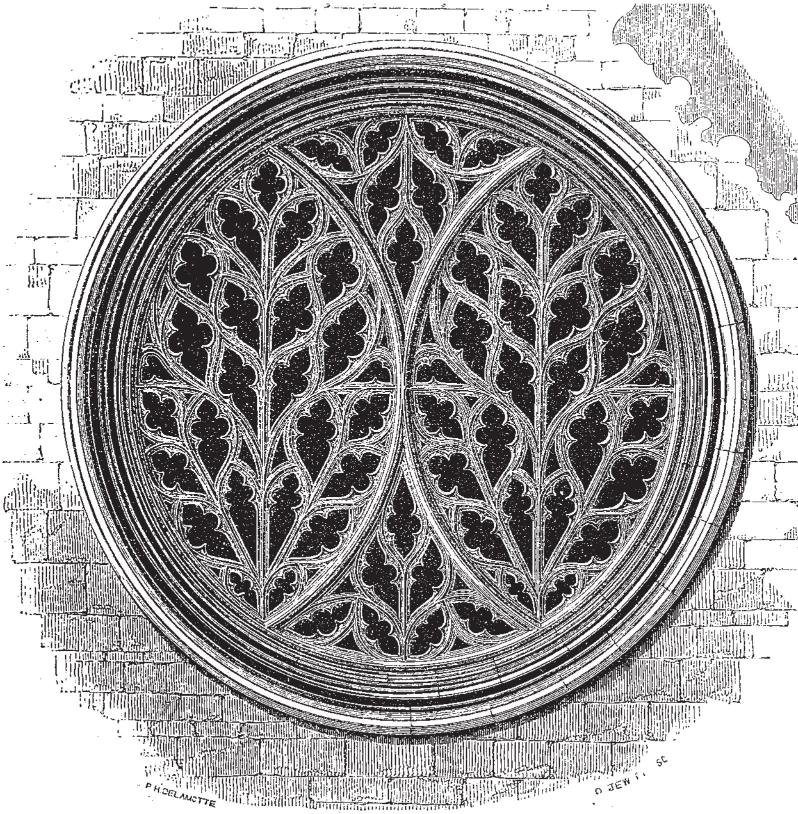
Геометрия внутри орнамента

Любая вещественная материя соткана из света, а без материи нет звука. Атомы и планеты движутся по идеально выверенным траекториям, похожим на геометрические узоры. Окно — одна из самых символичных придумок человечества. Оно позволяет световому потоку проникнуть в темное помещение и наполнить его жизнью.

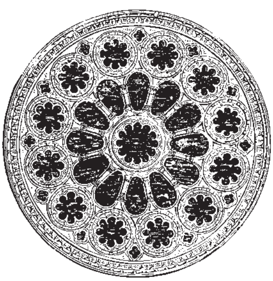
Архитектура соборов и церквей всегда подчинялась очень строгим правилам, традиционным канонам, она полна символизма. Формы некоторых церковных окон показаны на этих страницах. Пожалуй, проще всего начертить три четырехлистника (*нижний ряд внизу*).

Южное окно Линкольнского собора Девы Марии украшено ажурным узором тончайшей работы (*напротив*) и поразительно оформленным «рыбьим пузырем». Ниже изображены еще три великолепных окна, украшающие соборы Шартра, Эвре и Реймса. Посмотрите, как хорошо в их узорах соблюден баланс между линией и дугой.

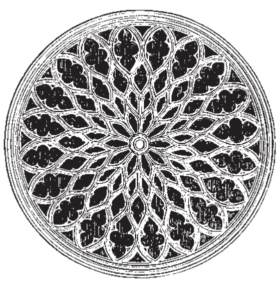




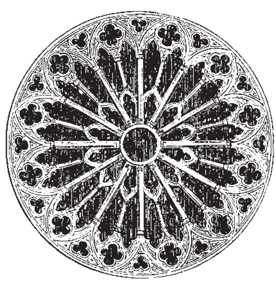
Линкольнский собор



Собор Шартра



Собор Эвре



Собор Реймса

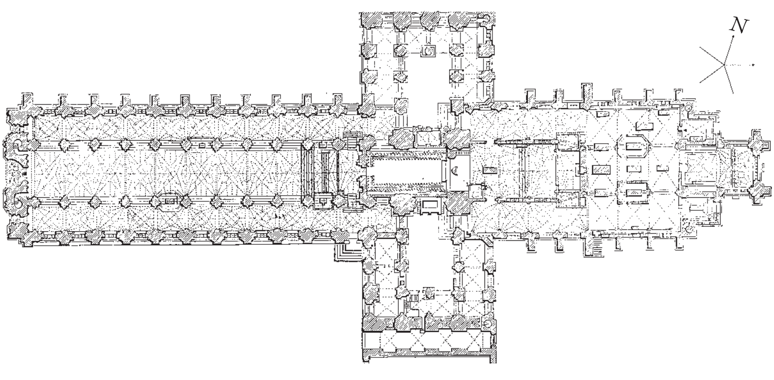
Каменные круги и церкви

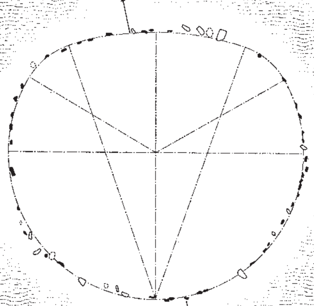
Применение «рыбьего пузыря» на протяжении 4000 лет

Четыре найденных британским профессором Томом каменных круга имеют схожую сплюснутую форму. *Напротив слева* изображены круги типа *А*, а *справа* — типа *Б*. *Чертеж внизу* поясняет роль *vesica* (фигуры «рыбий пузырь») в этих конструкциях (*о vesica читайте на с. 68*).

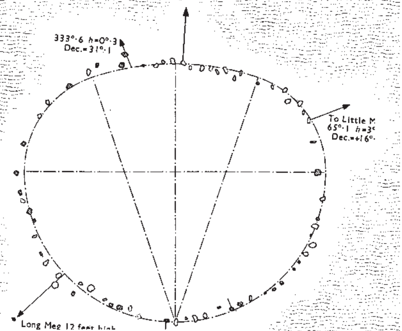
Внизу представлен план Уинчестерского собора. В нем обнаруживается взаимодействие простых, основанных на *vesica* треугольных и квадратных систем, *ad triangulum* и *ad quadratum* (*см. верхний ряд на с. 83*). По такому принципу были построены многие религиозные строения.

Проектирование священного ритуального строения, будь то церковь, каменный круг или собор, обязывает архитектора найти возможность для объединения универсального символизма геометрических построений, которые он использует, со специфическим религиозным языком. Кроме того, ему необходимо учитывать самые разные локальные факторы, например движение Солнца, звезд и Луны, близлежащие священные места и прочее. *На рисунке внизу* видно, что ось Уинчестерского собора отклонена на 72° относительно направления на север, что создает магическую магнетическую пентаграмму.

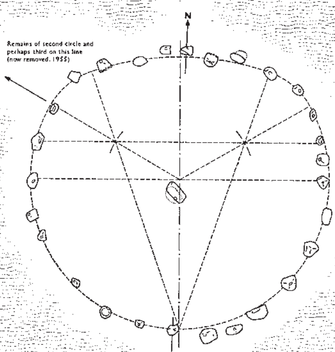




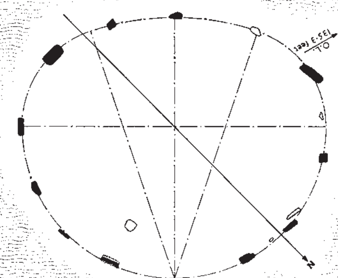
Динневер-Хилл



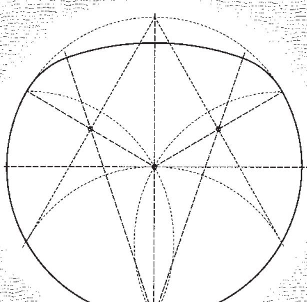
Лонг Мег —
кромлех на севере Англии



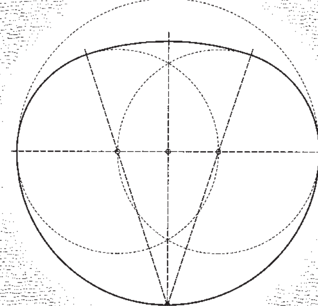
Камбрет Мур



Круг Барбрук в Дербишире



Каменный круг, сплюснутый
по типу А



Каменный круг, сплюснутый
по типу Б

Очаровательные арки

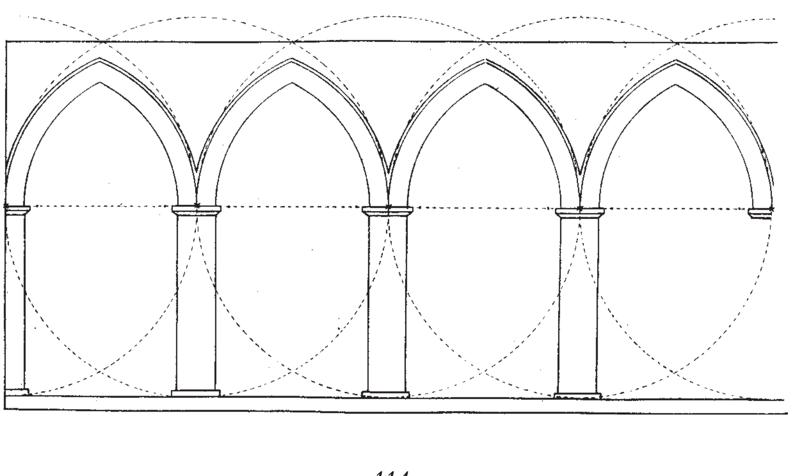
Учимся чертить некоторые из них

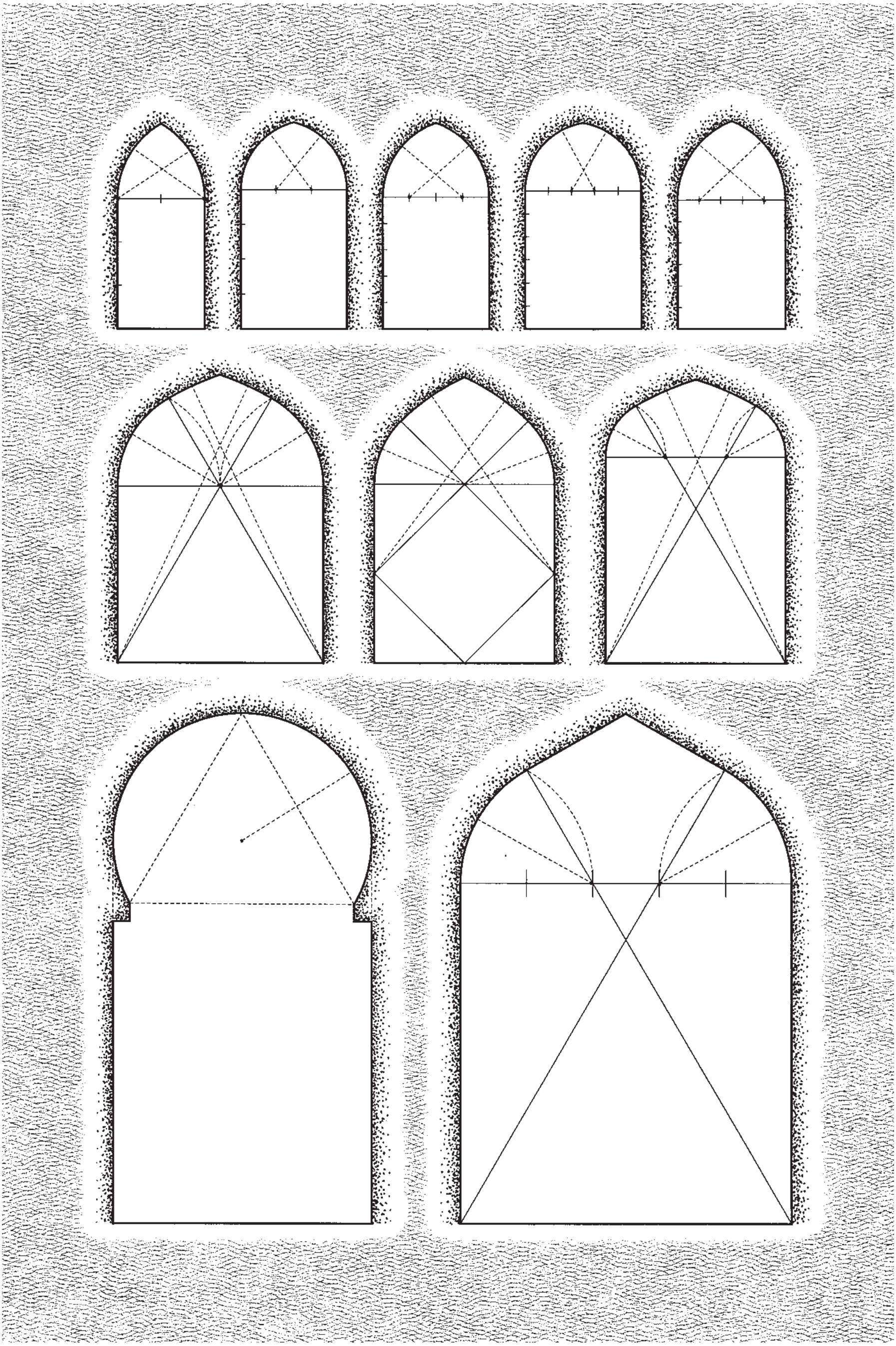
Арки имеют удивительно схожие очертания по всему миру, и некоторые из них показаны здесь. Живые деревья часто создают лучшие арки.

Напротив в верхнем ряду показаны 5 двуцентровых арок. Пространство под аркой в этих примерах разделено на 2, 3, 4 части и двумя способами на 5 частей. Пунктирными линиями обозначены радиусы дуг, формирующих арку. Высота арки может варьироваться, но в наших примерах она характеризуется пропорцией, соответствующей музыкальному интервалу 2:3, 3:4 и т. д. (*см. с. 84*).

Во втором ряду изображены четырехцентровые арки. Сплошная линия указывает на места смены центра дуги. Как определить их высоту, тоже показано на схеме.

Внизу даны схематичные изображения арки в форме подковы и стрельчатой арки. Кажется, что вершина стрельчатой арки постепенно сужается, но на самом деле образующие ее линии абсолютно прямые.





Кельтская спираль

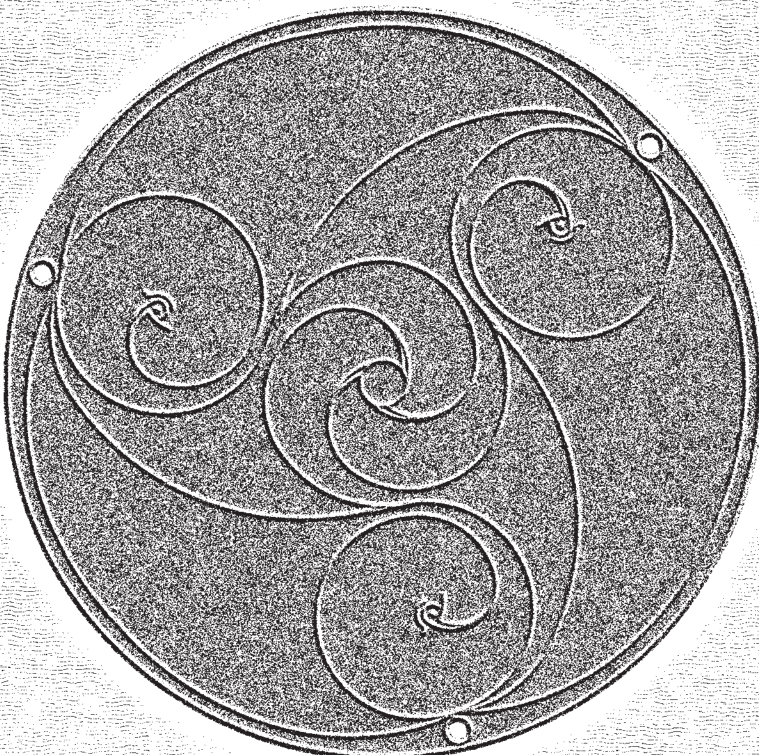
Евклидова геометрия в Древней Ирландии

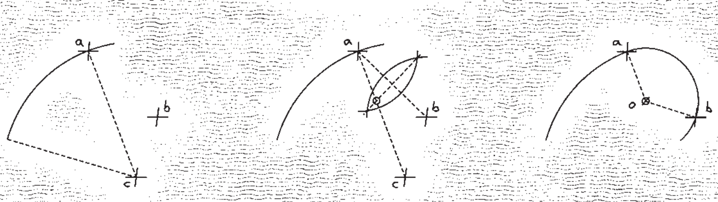
Узор, который вы видите *напротив*, украшает четырехдюймовый бронзовый диск, найденный на острове Луган (Loughan) в Северной Ирландии. Его возраст — около 2000 лет. Это прекраснейший образец раннего кельтского стиля. На примере арок и каменных кругов мы уже убедились, что «бесшовное» соединение различных дуг может быть весьма эстетичным. Кельты, очевидно, достигли в этом совершенства.

Многие образцы кельтского искусства убеждают нас в том, что их создатели прекрасно умели пользоваться циркулем. Например, чтобы начертить узор на диске, о котором мы говорили, потребовалось сменить позицию циркуля не менее 42 раз! Считается, что мастер, изготовивший диск, начинал с простых геометрических построений вроде соприкасающихся окружностей. Затем он делал эскизные наброски остальных линий узора и возвращался к точной геометрии, чтобы каждая кривая стала идеальной дугой, то есть частью окружности. В результате кривые получались совершенно одинаковыми. Интуиция и интеллект здесь требуются в одинаковой степени.

На схемах ниже показано, как строить арки, проходящие через определенные точки. На первой схеме — арка с центром в точке *c*. Нам нужно, чтобы арка плавно повернула в точке *a* и прошла через точку *b*. Как это сделать? Найдите перпендикулярную биссектрису между точками *a* и *b*, для этого начертите циркулем две дуги с центрами в обеих этих точках. Прямая, соединяющая точки пересечения этих дуг, и будет искомой биссектрисой (*внизу в центре*). Она пересекает прямую *ac* в точке 0, которая и будет центром новой дуги между точками *a* и *b* (*внизу справа*).

Каждый завиток в узоре на диске, о котором мы рассказали, выполнен таким простым и элегантным способом.





Утверждение, что окружность (дуга окружности) — это единственная по-настоящему небесная кривая, присутствует во многих философиях и священных искусствах. Этот кельтский узор можно использовать где угодно, чтобы создать вьющийся дизайн и придать ему магическую притягательность

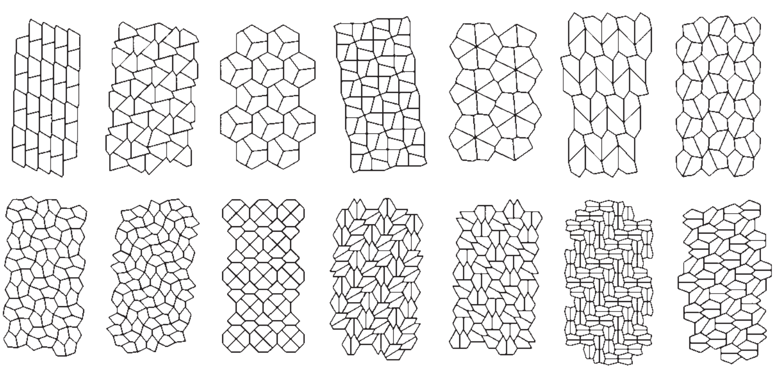
Пятиугольные мощения

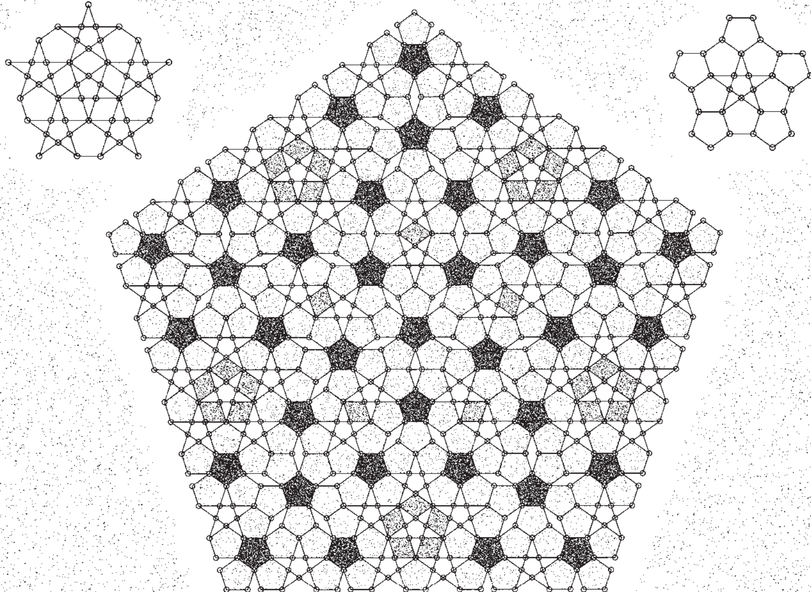
Эти фантастические шипучие пузырьки

Хотя правильными пятиугольниками нельзя замостить плоскость, они участвуют во многих других геометрических чудесах, о которых мы просто не можем умолчать. *На рисунке напротив вверху* как раз изображено одно из таких чудес, описаное Иоганном Кеплером (1571—1630). Ключевой узор здесь увеличивается и усложняется *от центра*. Между серыми пятиугольниками остаются свободные пространства, из которых складываются пентаграммы, и наоборот. Узор насыщен примерами золотых сечений. Рядом с основным рисунком показаны базовые фрагменты узора.

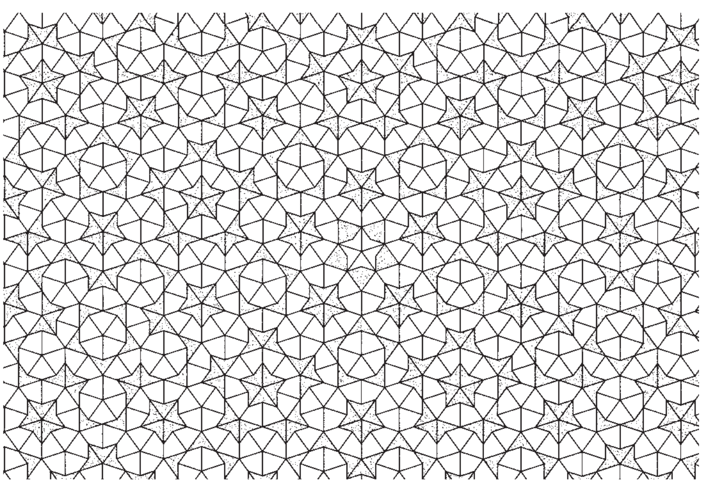
Математик Роджер Пенроуз не так давно открыл мозаику, изображенную *напротив внизу*. Две фигуры образуют сплошное мощение, создавая при этом непериодические пятиугольные элементы. Недавно стало известно, что подобные фигуры лежат в основе структуры большинства жидкостей. Так, например, выглядит молекула воды в поперечном разрезе.

Внизу изображены 14 типов мозаик, способных образовывать сплошное мощение и состоящих из неправильных выпуклых пятиугольников.





Бесконечная пятиугольная система, описанная Кеплером в начале XVII века. Внизу — парные модули мощения, придуманного Пенроузом в XX веке



Симметрии Ли

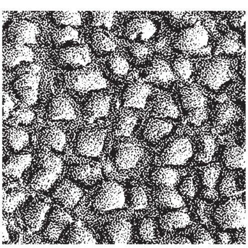
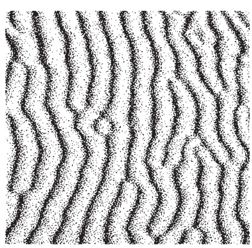
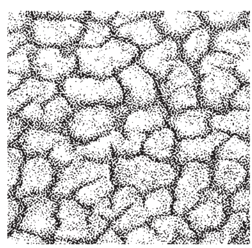
Застывшее время

Симметрии Ли настолько хорошо нам знакомы, что мы практически никогда их не замечаем. В природе они окружают нас повсеместно, но впервые эти загадочные самоорганизующиеся формы симметрии были осмыслены в новаторской работе Тьюринга только в 1850-х годах. Хотя китайцы изучали их тысячелетиями, и именно они дали им такое название.

Симметрии Ли следует отличать от статичных симметрий, так как они преимущественно являются результатом воздействия какого-то процесса на материал. Например, повторяющееся воздействие ветра на песок создает привычную для нас рябь на дюнах, а воздействие жары на мокрую глину заставляет ее растрескаться, и появляется узор, который так сильно напоминает карту обычного города, вплоть до соотношения ширины улиц (*см. иллюстрацию Давида Вейда напротив*).

Симметрии Ли проявляются в окрасе животных, на коре деревьев, в узоре облаков и во многих других природных явлениях.

В следующий раз, когда решите прогуляться по парку, проверьте, сколько вам удастся распознать таких узоров!

Симметрии Ли проявляются в окрасе животных, на коре деревьев, в узоре облаков и во многих других природных явлениях

Семнадцать симметрий

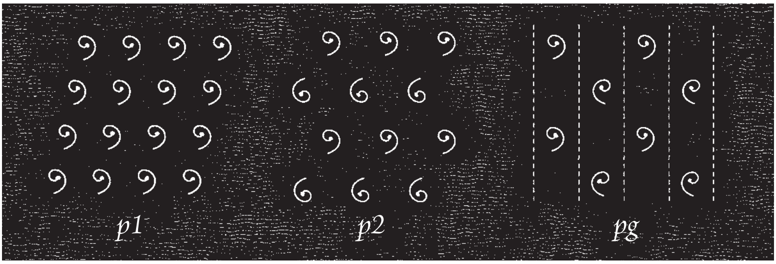
Созданные переносом, вращением и отражением

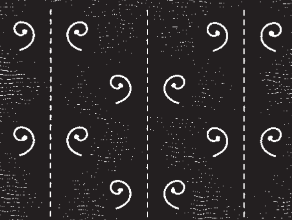
Арабский алхимик Джабир ибн Хайан, на Западе известный как Гебер, считал, что 17 является числовой основой физического мира.

С помощью простого узора *на с. 123—125* исследуются три важнейшие базовые геометрические операции: перенос, вращение и отражение. Вместе с 3 правильными мозаиками они образуют 17 «подложек», или плоских симметричных групп (*по Критчлоу*), приведенных *ниже*, *напротив и на с. 124*. *На с. 125* изображены все 7 бордюров, которые можно получить этим способом.

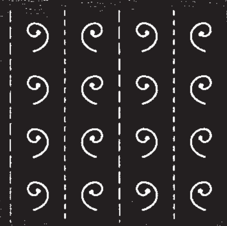
Такая визуальная карта может быть очень полезна при составлении узоров для тканей или гончарных изделий (*см. также с. 102 и 103*). Кстати, английское слово *pattern* (узор) происходит от латинского *pater*, что означает «отец», так же как *matrix* (матрица) происходит от *mater* — мать. Помните, не каждый узор можно развернуть (отразить) без ущерба для общей картины, поэтому выбирайте повторяющиеся модули аккуратно.

На этой весьма практичной ноте наш маленький раздел об одном из древнейших искусств, известных человечеству, подошел к концу. Надеюсь, вы смогли почерпнуть из него достаточно идей, чтобы создать что-то по-настоящему великолепное!

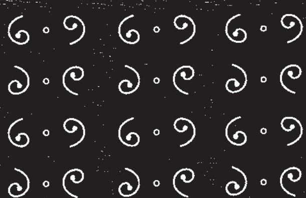




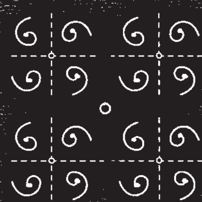
cm



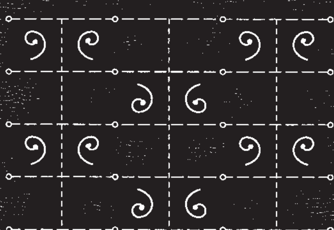
pm



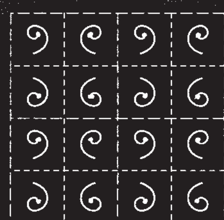
pgg



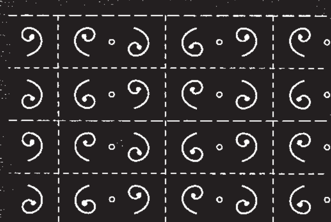
p4



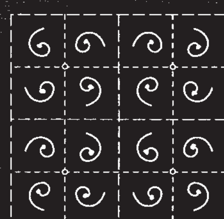
pmg



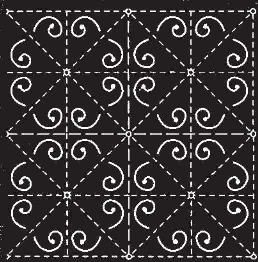
pmm



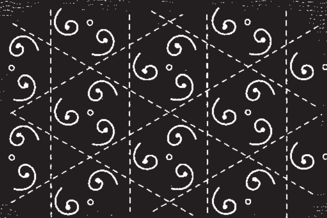
cmm



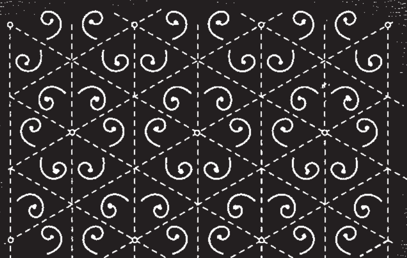
p4g



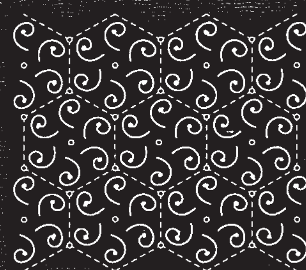
p4m



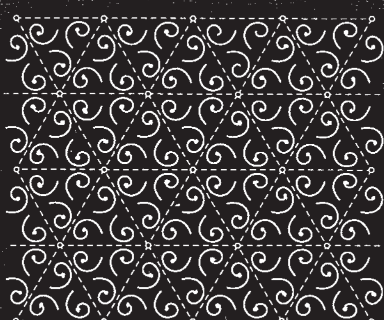
p3



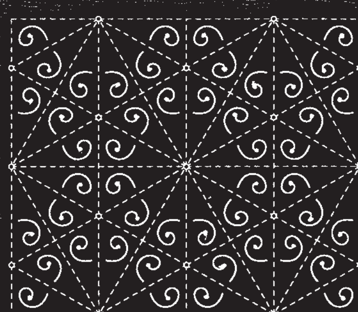
p3m1



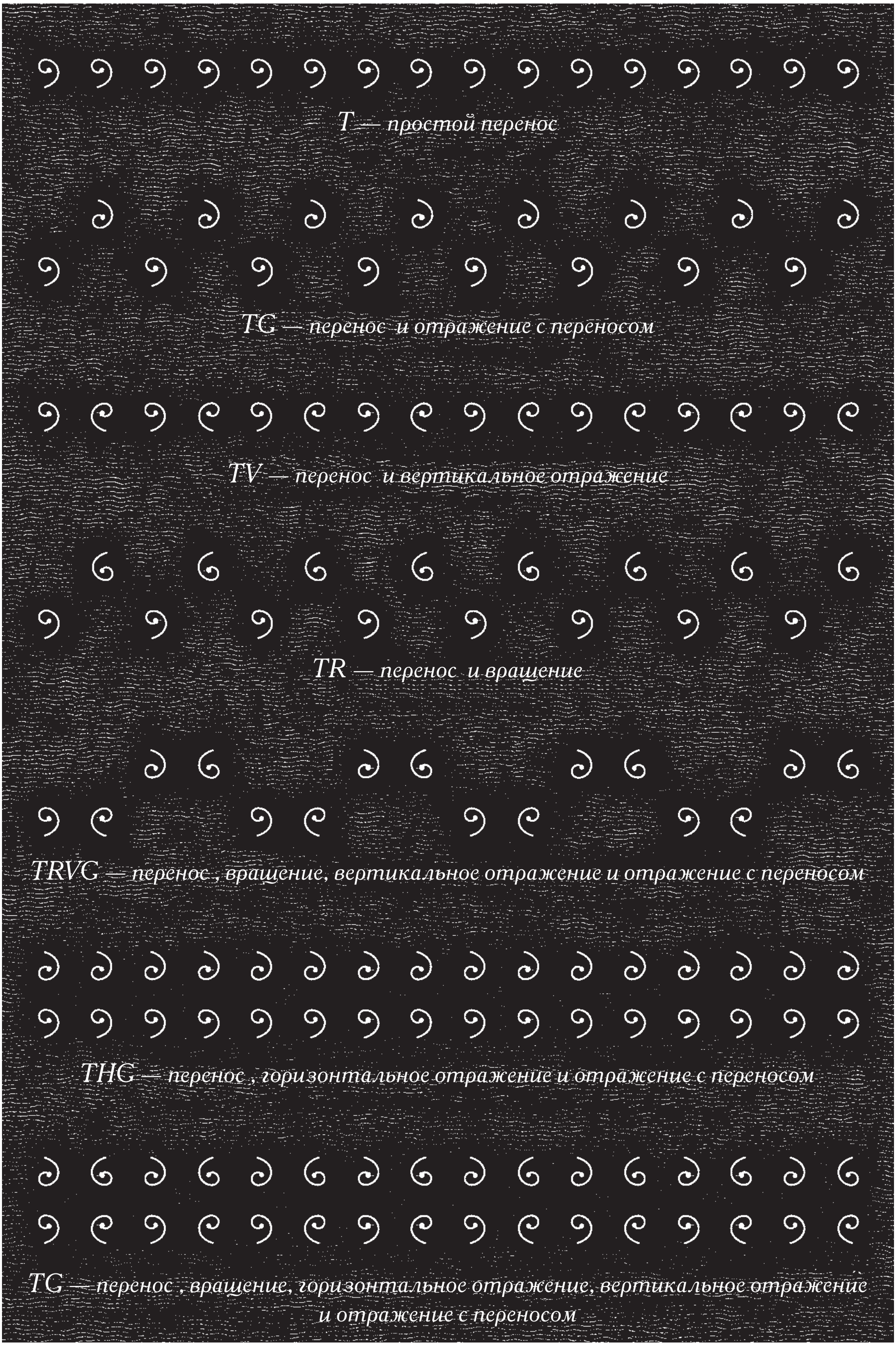
p6



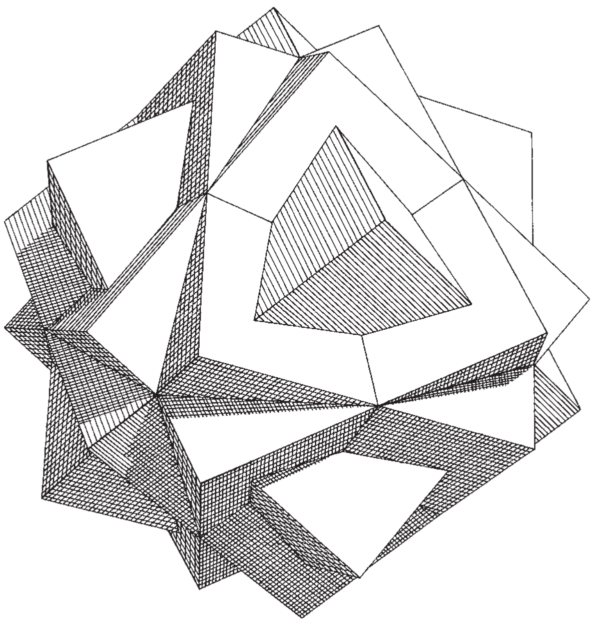
p31m



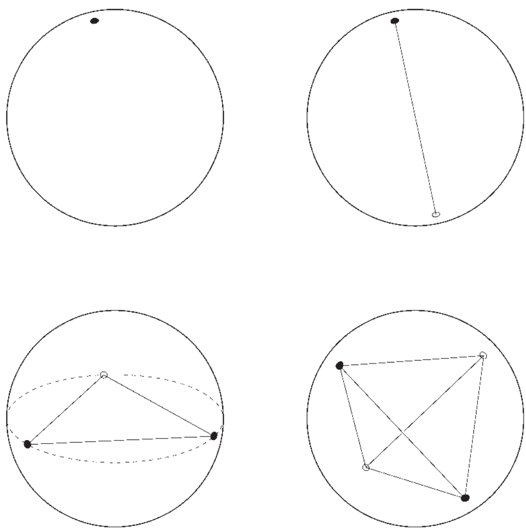
p6m


T — простой перенос
TG — перенос и отражение с переносом
TV — перенос и вертикальное отражение
TR — перенос и вращение
TRVG — перенос , вращение, вертикальное отражение и отражение с переносом
THG — перенос , горизонтальное отражение и отражение с переносом
TG — перенос , вращение, горизонтальное отражение, вертикальное отражение и отражение с переносом

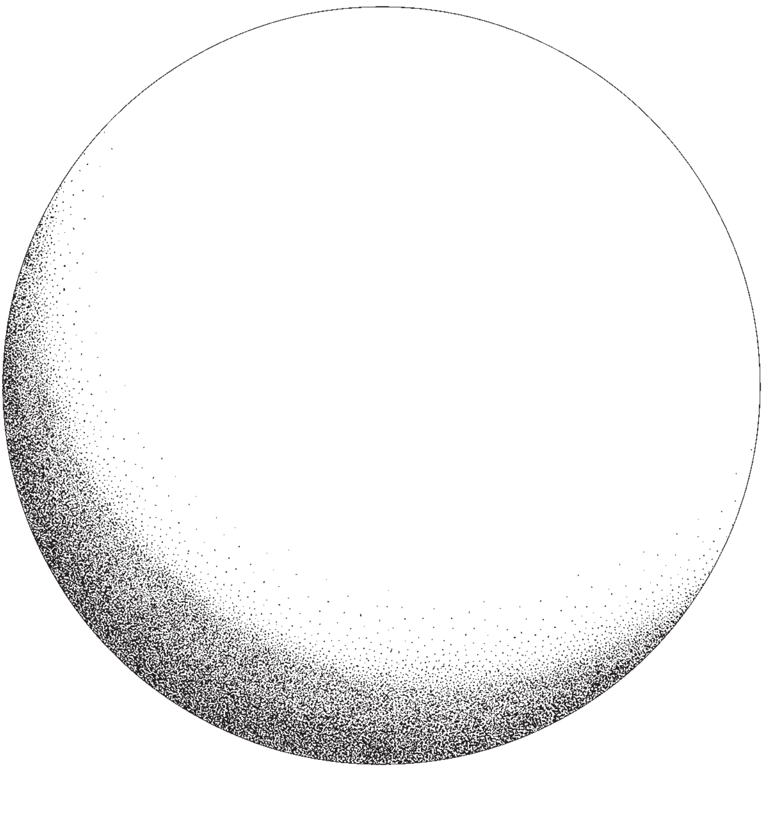
КНИГА III



ПЛАТОНОВЫ И АРХИМЕДОВЫ ТЕЛА



Дауд Саттон



Введение

Представьте себе сферу. Это идеальный символ Единства. Каждая точка на ее поверхности равноудалена от центральной точки.

Любая точка на поверхности сферы находится во взаимодействии с остальными. Простейшая и наиболее очевидная взаимосвязь обнаруживается между 2 точками сферы, расположенными строго друг напротив друга. Чтобы найти 2 такие точки, достаточно просто провести прямую через центр сферы. Расположите на поверхности сферы 3 точки на максимально возможном друг от друга расстоянии — и готов равносторонний треугольник. Эти 3 точки принадлежат так называемому *большому кругу*. Радиус такого круга равен радиусу сферы, его центр совпадает с центром сферы, и это самый большой круг, который сфера может в себя вместить. Точка, линия и треугольник определяют соответственно 0, 1 и 2 измерения, а для того чтобы обозначить неискривленную трехмерную форму, потребуется по меньшей мере 4 точки.

С помощью основных геометрических тел, извлекаемых из сферы, этот раздел «Квадривиума» исследует число в трехмерном пространстве. Еще в античные времена эти прекрасные объемные фигуры были краеугольным камнем математических и художественных изысканий. Они и сегодня все так же привлекают и и вдохновляют нас.

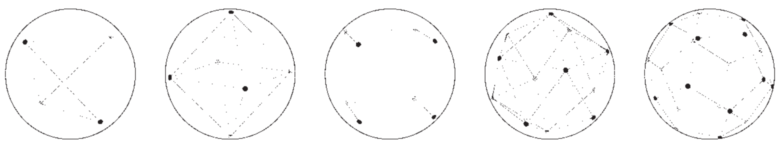
Платоновы тела

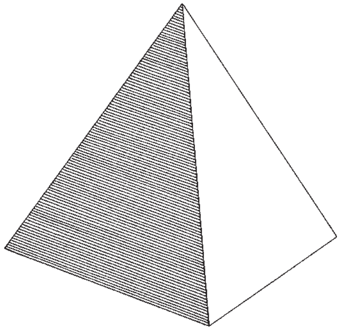
Прекрасные фигуры, развертывающиеся из единства

Представьте, что вы очутились на необитаемом острове. У вас есть только палки, камни и куски древесной коры. Экспериментируя с трехмерными структурами, вы скоро откроете для себя 5 «правильных» тел. Они выглядят одинаково с любого *угла зрения*, их грани имеют форму одного и того же правильного многоугольника, и все углы равны друг другу. Их вершины представляют собой наиболее симметричное распределение 4, 6, 12 и 20 точек на поверхности сферы (*внизу*).

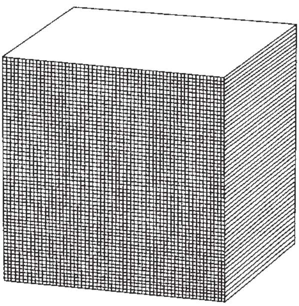
Самое раннее дошедшее до нас описание правильных многогранников (*полиэдры*, дословно «многогранники») встречается в диалоге Платона «Тимей», поэтому в современной традиции они получили название *платоновых тел*. Платон жил с 427 по 347 год до Р. Х., однако есть свидетельства, что эти тела были известны нашим предкам задолго до этого.

Три платоновых тела складываются из равносторонних треугольников — 3, 4 или 5, сходящихся в одной вершине, — и называются по количеству граней: *тетраэдр* — 4 грани, *октаэдр* — 8, *икосаэдр* — 20. Ритм 3—4—5 угадывается и в следующих многогранниках: *куб* с 6 квадратными гранями и *додекаэдр* с 12 гранями в виде правильных пятиугольников. На страницах этой книги мы узнаем больше об этих поразительных трехмерных фигурах.

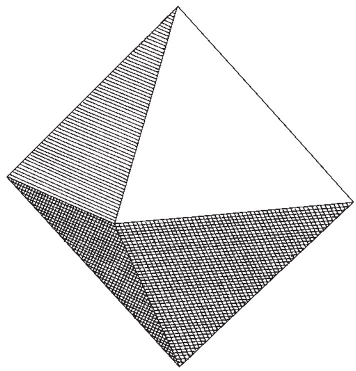




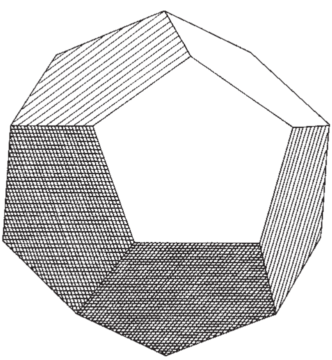
Тетраэдр



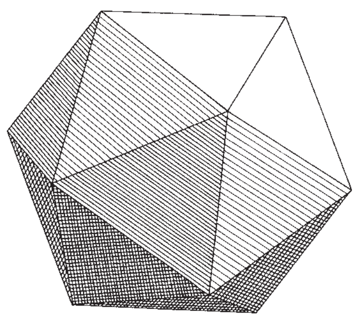
Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Тетраэдр

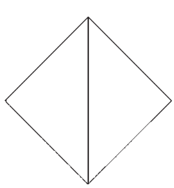
4 грани : 6 ребер : 4 вершины

Тетраэдр состоит из 4 равносторонних треугольников, при этом 3 из них встречаются в каждой вершине. Центры 4 соприкасающихся сфер будут вершинами тетраэдра (*см. напротив внизу справа*). Из-за очень острых ребер и вершин Платон ассоциировал тетраэдр со стихией Огня. Из всех правильных многогранников тетраэдр самый простой и устойчивый. Греки называли тетраэдр *puramis* — отсюда появилось слово *пирамида*. Любопытно также, что «огонь» по-гречески будет *pur*.

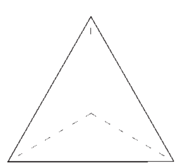
Тетраэдр имеет 3 оси симметрии 2-го порядка, которые проходят через середины его ребер, и 6 осей симметрии 3-го порядка, каждая из которых проходит через вершину и середину противоположенной ей грани (*внизу*). Любой многогранник с такими осями вращения относят к *группе симметрий тетраэдра*.

Вокруг любого платонова тела можно описать *внешнюю сферу*, которая будет касаться каждой его вершины. Две другие особые сферы присущи каждому правильному многограннику: *средняя сфера*, которая касается середины каждого ребра, и *внутренняя сфера*, которая касается середины каждой грани.

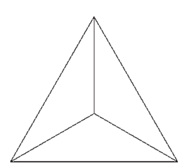
Радиус внутренней сферы тетраэдра равен $^{1}/_{3}$ *радиуса внешней сферы* (*внизу напротив слева*).



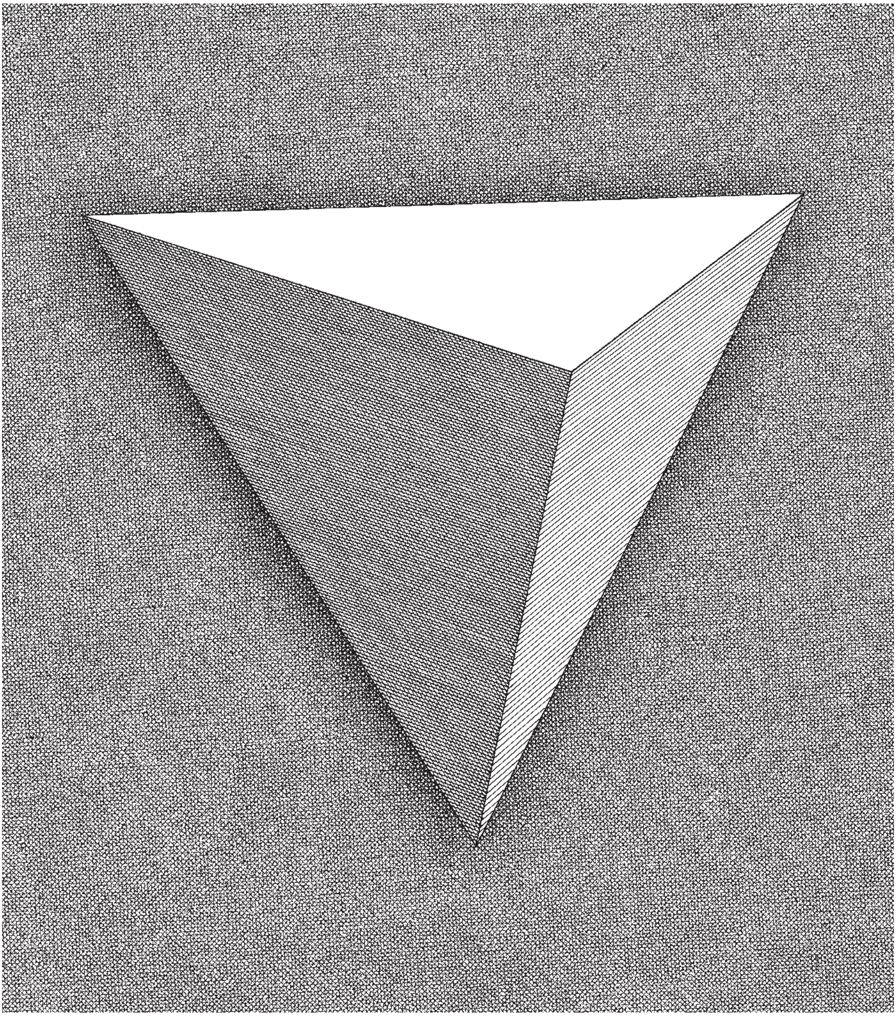
На ребре:
2-го порядка

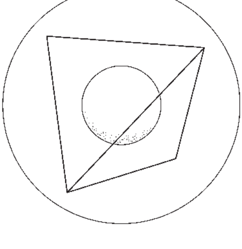


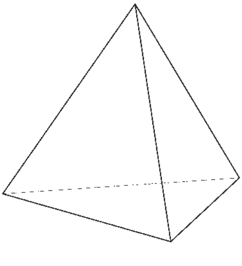
На грани:
3-го порядка

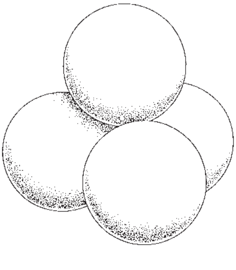


От вершины:
3-го порядка









Октаэдр

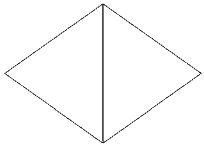
8 граней : 12 ребер : 6 вершин

Октаэдр состоит из 6 равносторонних треугольников, в каждой вершине встречаются 4 из них. Платон считал октаэдр промежуточной фигурой между тетраэдром, или Огнем, и икосаэдром, или Водой, и поэтому относил его к стихии Воздуха. Октаэдр имеет 6 осей симметрии 2-го порядка, которые проходят через противоположенные ребра, 4 оси 3-го порядка, проходящие через середины граней, и 3 оси 4-го порядка, проходящие через противоположенные вершины (*внизу*). Объемные фигуры с такими осями вращения относятся к *группе симметрии октаэдра*.

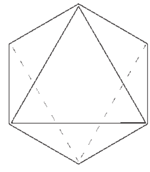
Греческие источники приписывают открытие октаэдра и икосаэдра Теэтету Афинскому (417—369 до Р. Х.). Книга XIII Евклидовых «Начал» (*см. с. 144*), очевидно, базируется именно на выкладках Теэтета.

Радиус сферы, описанной около октаэдра, больше радиуса внутренней сферы в √3 раз (*см. с. 377*). В такой же пропорции находятся радиусы внешней и внутренней сфер куба и радиусы внешней и *средней* сфер (и средней и внутренней) тетраэдра.

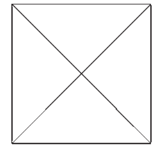
Тетраэдр, октаэдр и куб часто встречаются в царстве минералов. Кристаллы алмазов и флюоритов обычно имеют форму октаэдра.



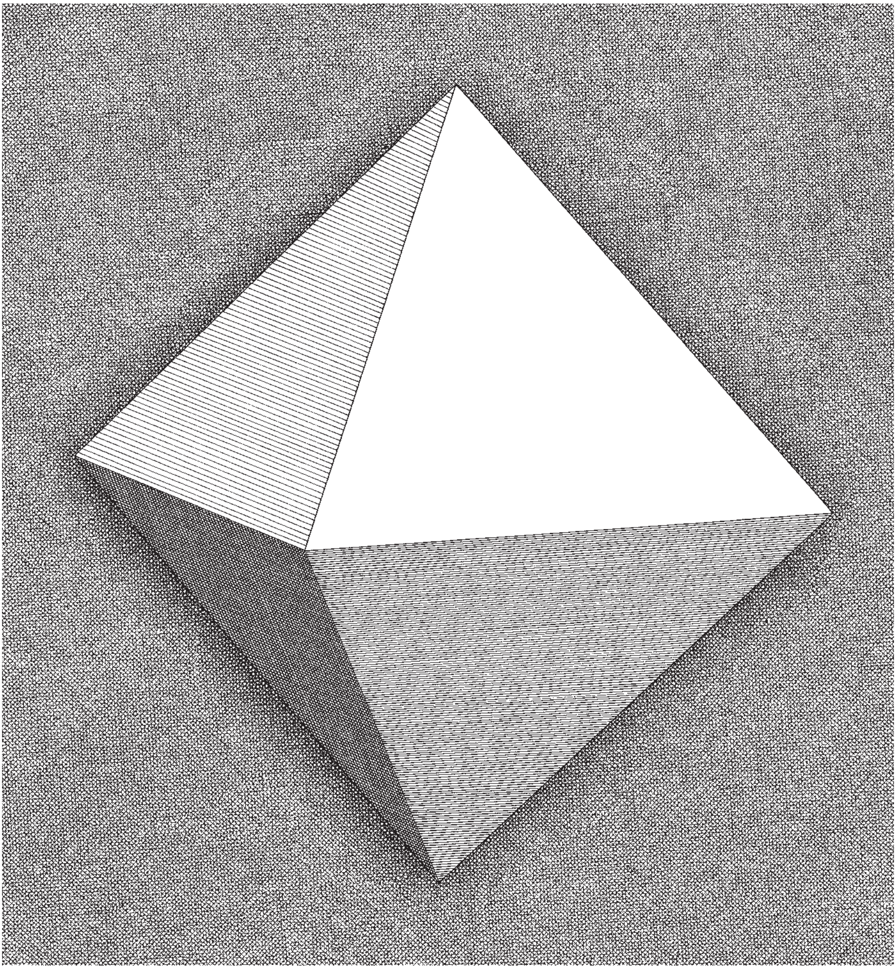
На ребре:
2-го порядка

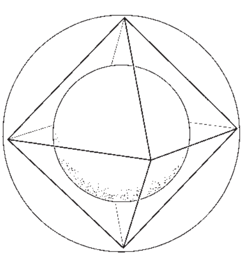


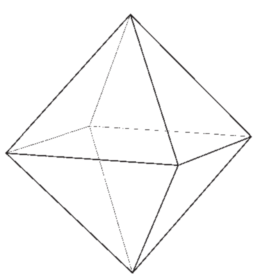
На грани:
3-го порядка

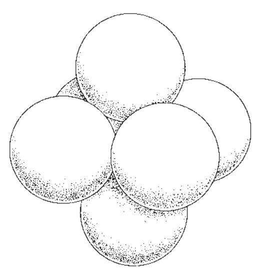


От вершины:
4-го порядка









Икосаэдр

20 граней, 30 ребер, 12 вершин

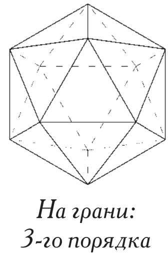
Икосаэдр состоит из 20 равносторонних треугольников, по 5 у каждой вершины. У него 15 осей 2-го порядка, 19 осей 3-го порядка и 6 осей 5-го порядка (*внизу*), что известно как *икосаэдрическая группа симметрии*. Если сформировать из одинаковых треугольников тетраэдр, октаэдр и икосаэдр, то самым большим будет икосаэдр. Платон ассоциировал икосаэдр со стихией Воды. Из трех «текучих» элементов (Огонь, Воздух и Вода) последняя — самая плотная и наименее проникающая.

Угол, где встречаются, образуя ребро, две грани многогранника, называется *диэдральным углом*. Среди всех платоновых тел икосаэдр имеет самые большие углы.

Если соединить 2 конца ребра икосаэдра с его центром, то получится равнобедренный треугольник — именно такие треугольники представляют собой внешние грани пирамиды Хеопса в Гизе. Противоположенные ребра икосаэдра формируют золотой прямоугольник (*см. с. 152*).

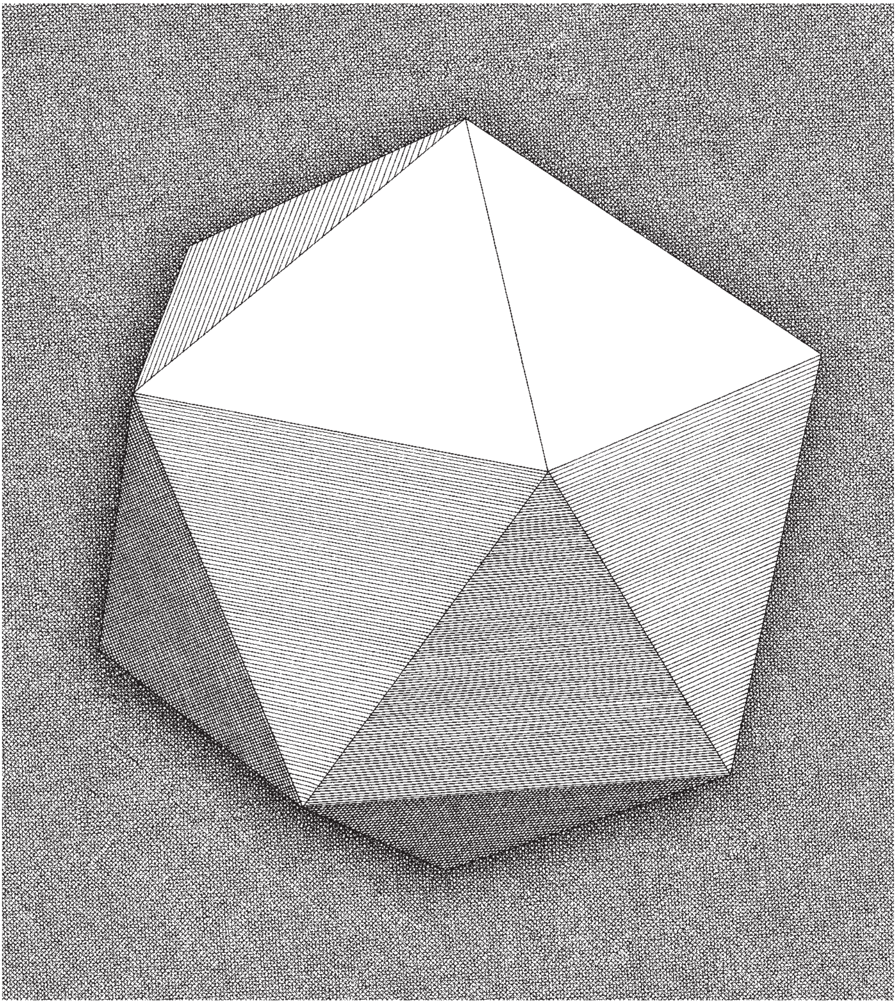
Из 12 одинаковых сфер, сложенных вместе, формируется икосаэдр с вершинами в их центрах. При этом в середине между этими сферами остается место для еще одной, размером $^{9}/_{10}$ остальных (*напротив внизу справа*).

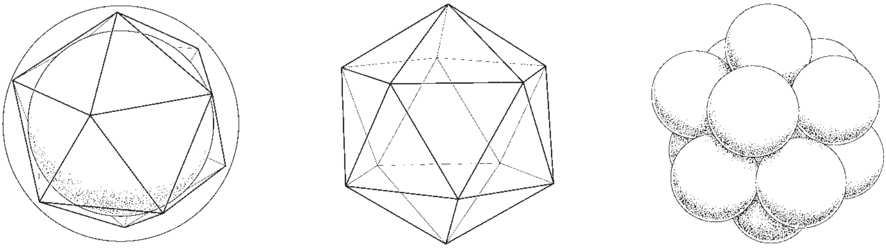
На ребре: 2-го порядка



На грани: 3-го порядка

От вершины: 5-го порядка





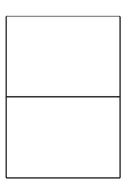
Куб

6 граней, 12 ребер, 8 вершин

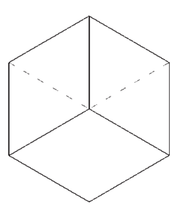
Куб принадлежит группе симметрий октаэдра (*внизу*). Платон ассоциировал куб со стихией Земли из-за основательности его квадратных граней. Привычное для нас разделение пространства на север, юг, запад, восток, зенит и надир согласуется с 6 направлениями граней куба: вперед, назад, налево, направо, вверх и вниз. Как мы уже знаем *из Книги I* этого издания, число 6 является первым совершенным числом, сумма множителей которого равна самому числу (1 + 2 + 3 = 6).

Если сложить 12 ребер, 12 диагоналей, расположенных на гранях, и 4 внутренние диагонали, то получится 28 прямых, соединяющих между собой все вершины куба. Число 28 — второе совершенное число (1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28).

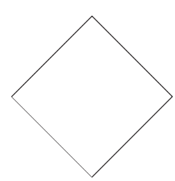
Мусульмане совершают ежегодное паломничество к храму Кааба (дословно «куб») в Мекке. Святилище Храма Соломона имело форму куба, как и Новый Иерусалим в откровениях святого Иоанна. В 430 году до Р. Х. дельфийский оракул потребовал от афинян «удвоить» алтарь в храме Аполлона, который имел форму куба. «Удвоение куба» — одна из старейших задач, которую невозможно решить, используя только евклидову геометрию.



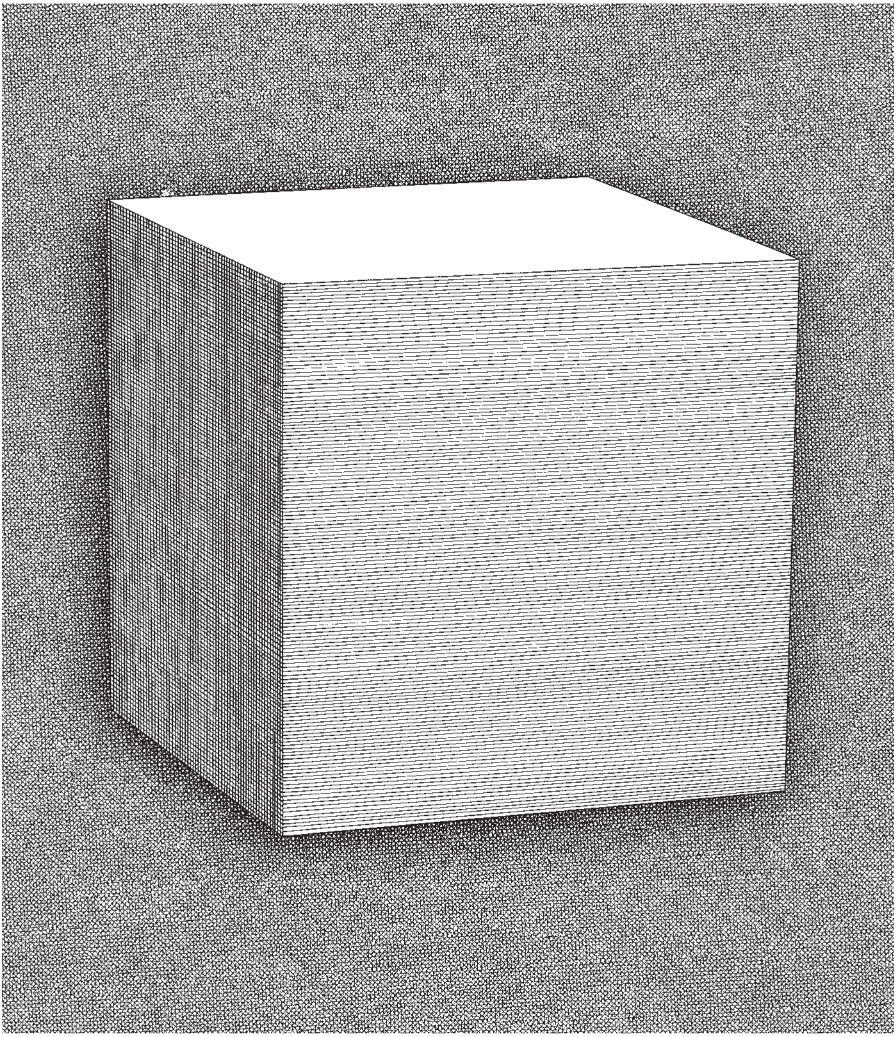
На ребре:
2-го порядка

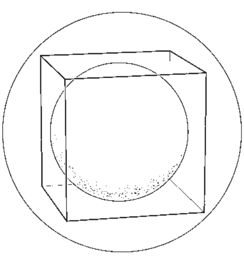


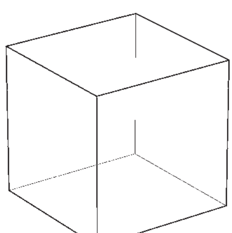
На грани:
3-го порядка

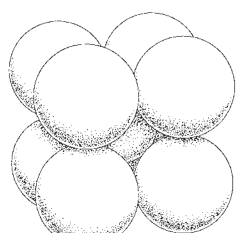


От вершины:
4-го порядка









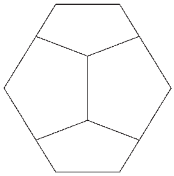
Додекаэдр

12 граней, 30 ребер, 20 вершин

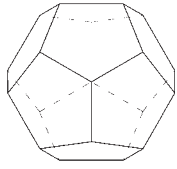
Додекаэдр — красивейшая геометрическая фигура с 12 правильными пятиугольными гранями, в каждой вершине которого встречаются 3 из них. Он относится к группе симметрий икосаэдра (*внизу*). Как и тетраэдр или куб, додекаэдр был известен ранним пифагорейцам, которые чаще всего называли его *сферой 12 пятиугольников*. В диалоге Платона «Тимей» 4 геометрических тела соотнесены со стихиями, а о додекаэдре сказано: «Остается еще пятая многогранная конструкция, которую Бог использовал для того, чтобы украсить небосвод звездами».

Вершины додекаэдра, поставленного на одну из граней, лежат в 4 плоскостях, которые делят додекаэдр на 3 части. Удивительно, но средняя часть по объему равна двум другим, то есть каждая часть составляет равно $^1/_3$ всего объема! Если поместить икосаэдр и додекаэдр в одну сферу, площадь поверхности одного будет относиться к площади поверхности другого в той же пропорции, что и их объемы, а внутренние сферы этих фигур будут одинаковыми.

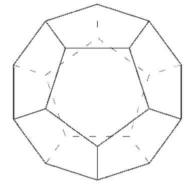
«Золото дураков», как называют железный колчедан, имеет кристаллы формы, схожей с додекаэдром, но не дайте ввести себя в заблуждение: их пятиугольные грани — неправильные, а симметрия относится к группе тетраэдра.



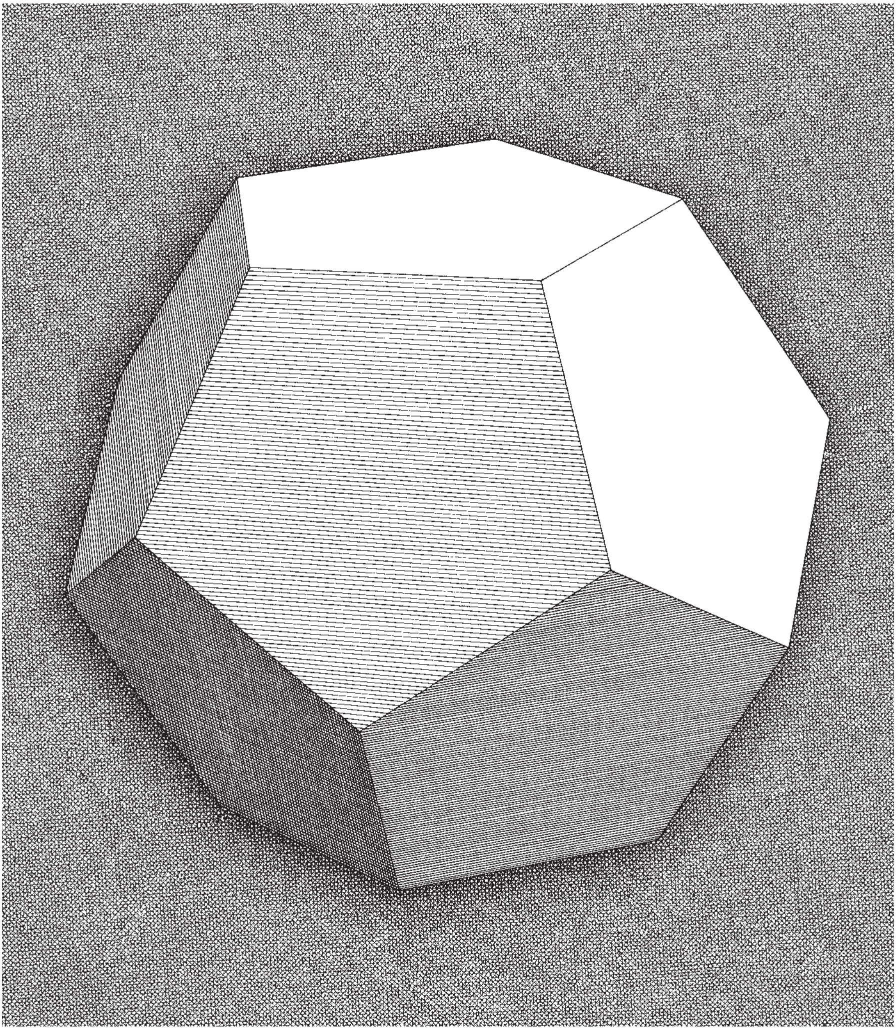
На ребре:
2-го порядка

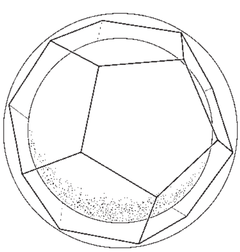


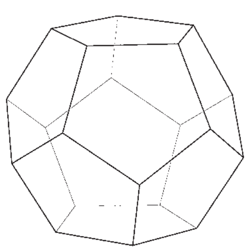
На грани:
3-го порядка

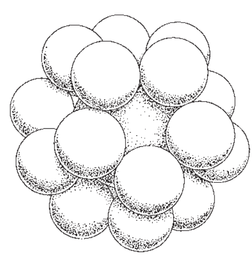


От вершины:
5-го порядка









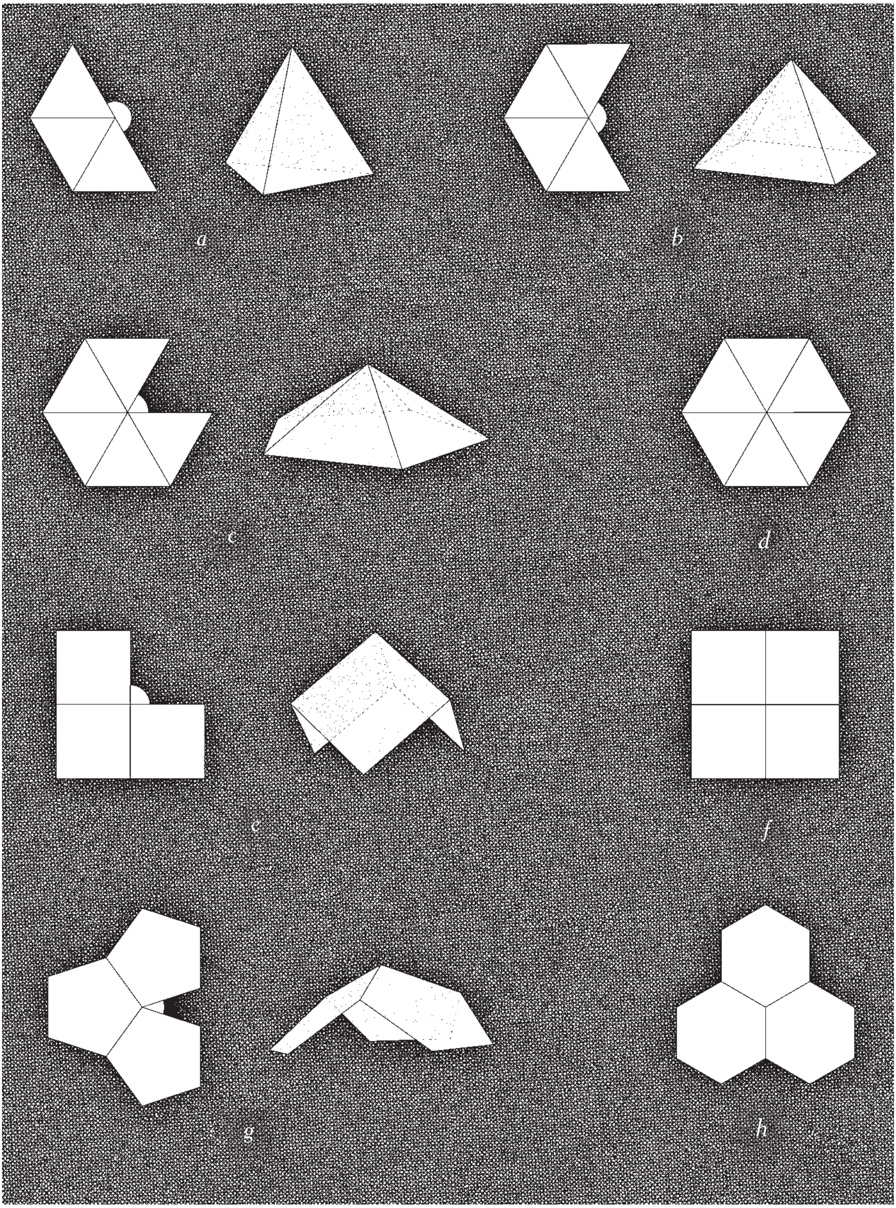
Краткое доказательство

Неужели их действительно только пять?

У правильного многоугольника одинаковые стороны и углы. У правильного многогранника одинаковые правильные грани и идентичные вершины. Платоновы тела являются единственными возможными *выпуклыми правильными многогранниками*. Евклид Александрийский (около 325—265 годов до Р. Х.) в Книге XIII своего труда «Начала» доказал, что кроме этих пяти выпуклых правильных многогранников невозможно сконструировать какие-либо другие.

Для того чтобы создать *пространственный угол*, необходимы как минимум три многоугольника. Если взять за основу равносторонний треугольник (*см. напротив*), то из трех получим угол *a*, из четырех — *b*, из пяти — *c*. Шесть треугольников замостят сплошную плоскость *d*. Три квадрата создадут пространственный угол *e*, но этим будет достигнут предел, так как четыре квадрата уже создают плоскость *f*. Три правильных пятиугольника формируют пространственный угол *g*, но для четырех или более уже не остается места, даже чтобы замостить плоскость. Три правильных гексагона совмещаются в плоскость *h*, а многоугольники с бо́льшим количеством сторон не могут совмещаться по три в одной точке, поэтому здесь мы достигли предела. Итак, из правильных многоугольников можно построить только пять пространственных углов, следовательно существует не более пяти выпуклых правильных многогранников.

Угол, который образуется, если расположить три грани, формирующие вершину многогранника, на одной плоскости, называется *угловым дефектом*. Рене Декарт (1596—1650) выяснил, что сумма угловых дефектов выпуклых правильных многогранников всегда равна 720°, или двум полным оборотам. Позднее, в XVIII веке, Леонард Эйлер (1707—1783) заметил еще один любопытный факт: в любом выпуклом многограннике число граней минус число ребер плюс число вершин равно 2.



Из правильных многоугольников можно построить только пять пространственных углов, следовательно существует не более пяти выпуклых правильных многогранников

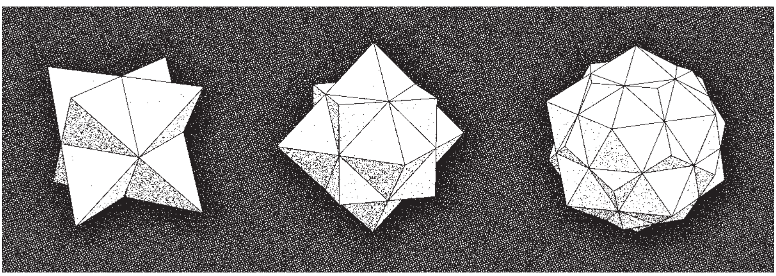
Все по парам

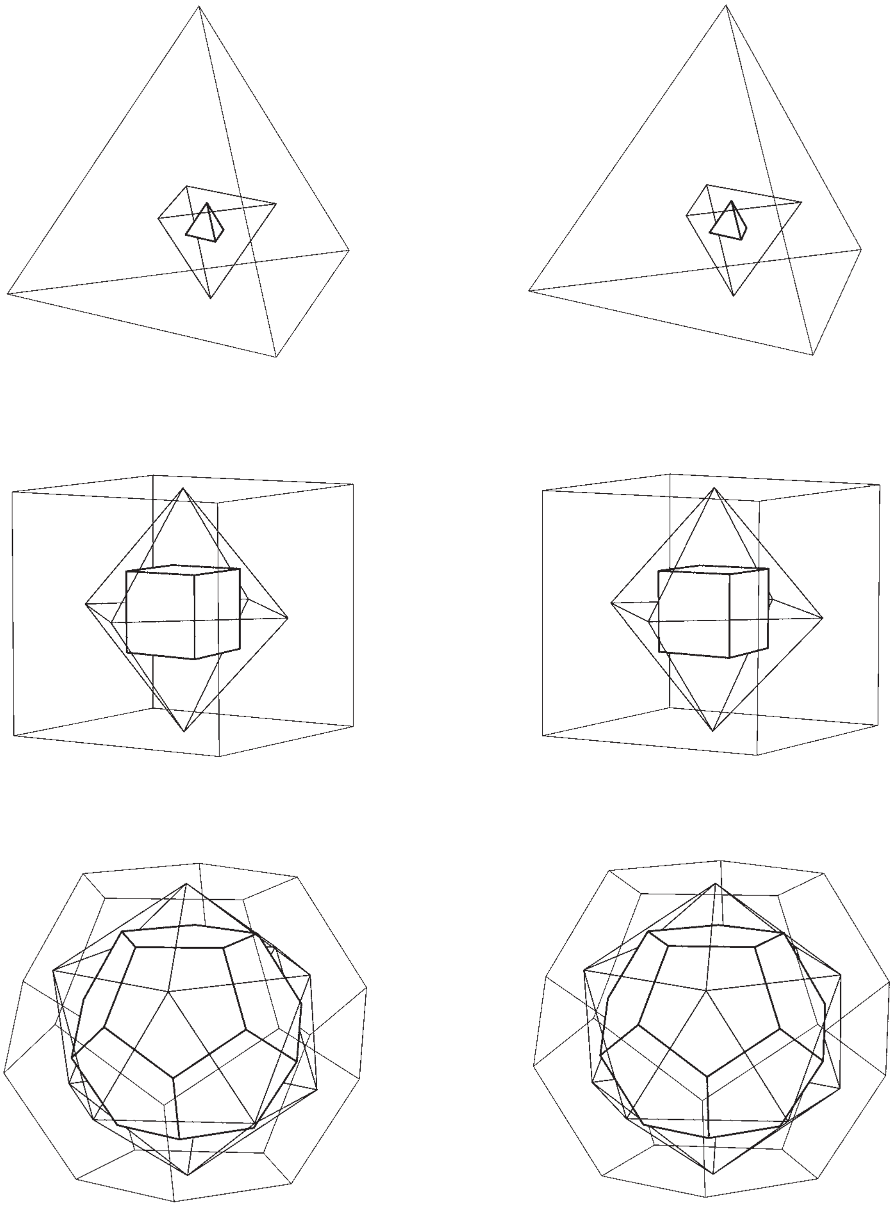
Платоновы тела два на два

Что произойдет, если мы соединим центры граней платоновых тел? Из тетраэдра мы получим другой, вывернутый наизнанку, тетраэдр. Куб превратится в октаэдр, а октаэдр — в куб. Икосаэдр и додекаэдр трансформируются таким же образом друг в друга. Так, если вершины одного многогранника идеально совпадают с гранями другого, такие многогранники называются двойственными, или *дуальными*. Тетраэдр *самодуален*. Дуальные многогранники имеют одинаковое количество ребер и относятся к одной группе симметрий.

Иллюстрации напротив являются стереограммами. Возьмите книгу в вытянутую руку, а по центру между книгой и глазами держите палец. Сконцентрируйтесь на пальце и переведите расфокусированный взгляд на страницу с рисунками. Изображения должны стать объемными.

Двойственные платоновы тела можно вложить друг в друга так, что центры их ребер совместятся и получатся новые объемные фигуры, показанные *ниже*. Все сущее имеет свою пару или противоположность. Пары платоновых тел — прекрасное тому доказательство.





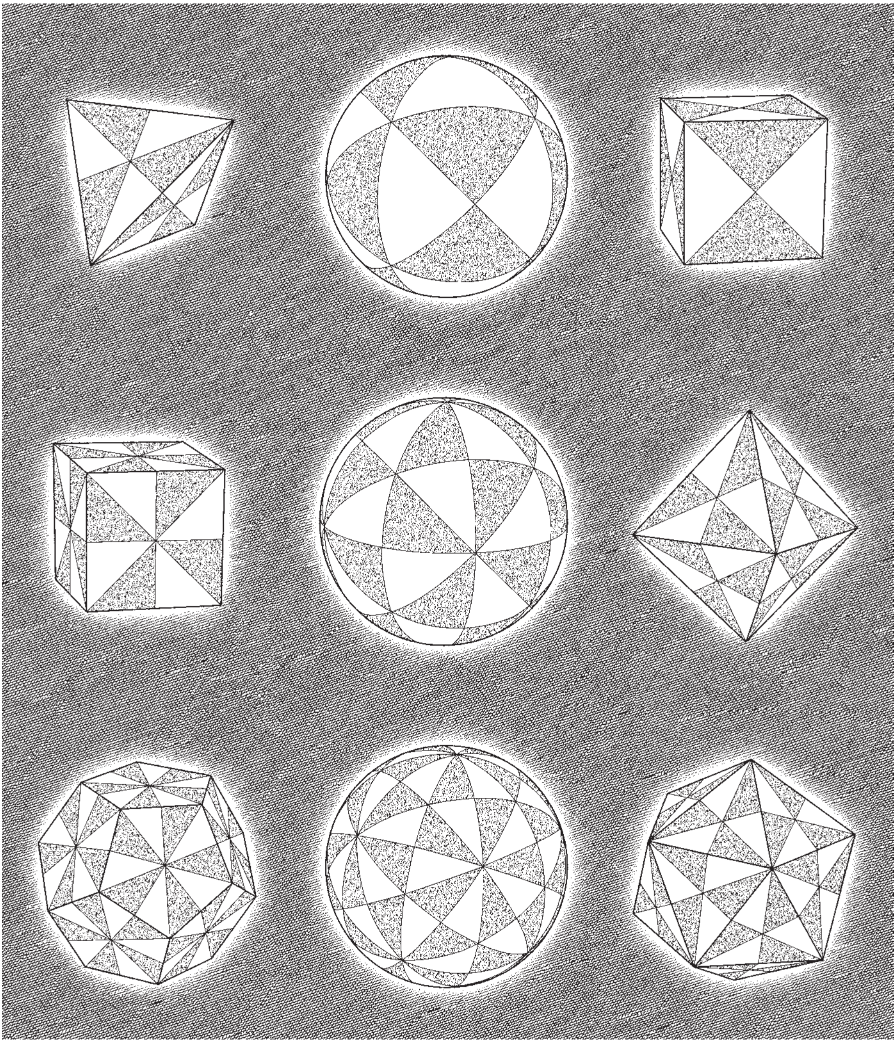
Вокруг шара

Изящным способом

В космологии Платона элементарные тела конструируются из двух типов атомов в форме прямоугольных треугольников. Первый атом является половиной равностороннего треугольника. Шесть таких треугольников совмещаются в равносторонний треугольник большего размера; они формируют тетраэдр, октаэдр и икосаэдр. Второй тип атома — это треугольник, который получается, если по диагонали разделить квадрат. Группы таких треугольников формируют квадратные грани куба.

Платоновы тела имеют плоскости симметрии, которые делят их на зеркальные половины. У тетраэдра 6 плоскостей симметрии, у октаэдра и куба — 9, а у икосаэдра и додекаэдра — 15. Платоновы треугольные атомы, обозначенные на поверхности тетраэдра, октаэдра и икосаэдра, проявляют линии зеркальной симметрии. На кубе, однако, придется разместить вдвое больше треугольников, чем у Платона (*верхний ряд*), чтобы обозначить все возможные для него плоскости симметрии (*средний ряд*).

Атомарные деления платоновых тел, спроецированные на их внешние сферы, образуют три сферические системы симметрий. Каждый сферический треугольник в такой системе имеет один прямой угол и один угол, равный трети полуоборота. Третий угол в этих треугольниках равен $^1/_3$ полуоборота (*верхний ряд*), четверти полуоборота (*средний ряд*) и одной пятой полуоборота (*нижний ряд*). Последовательность $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ служит изящным отражением пифагоровой тройки целых чисел 3, 4, 5.



Платоновы треугольные атомы, обозначенные на поверхности тетраэдра, октаэдра и икосаэдра, проявляют линии зеркальной симметрии

Вокруг, вокруг

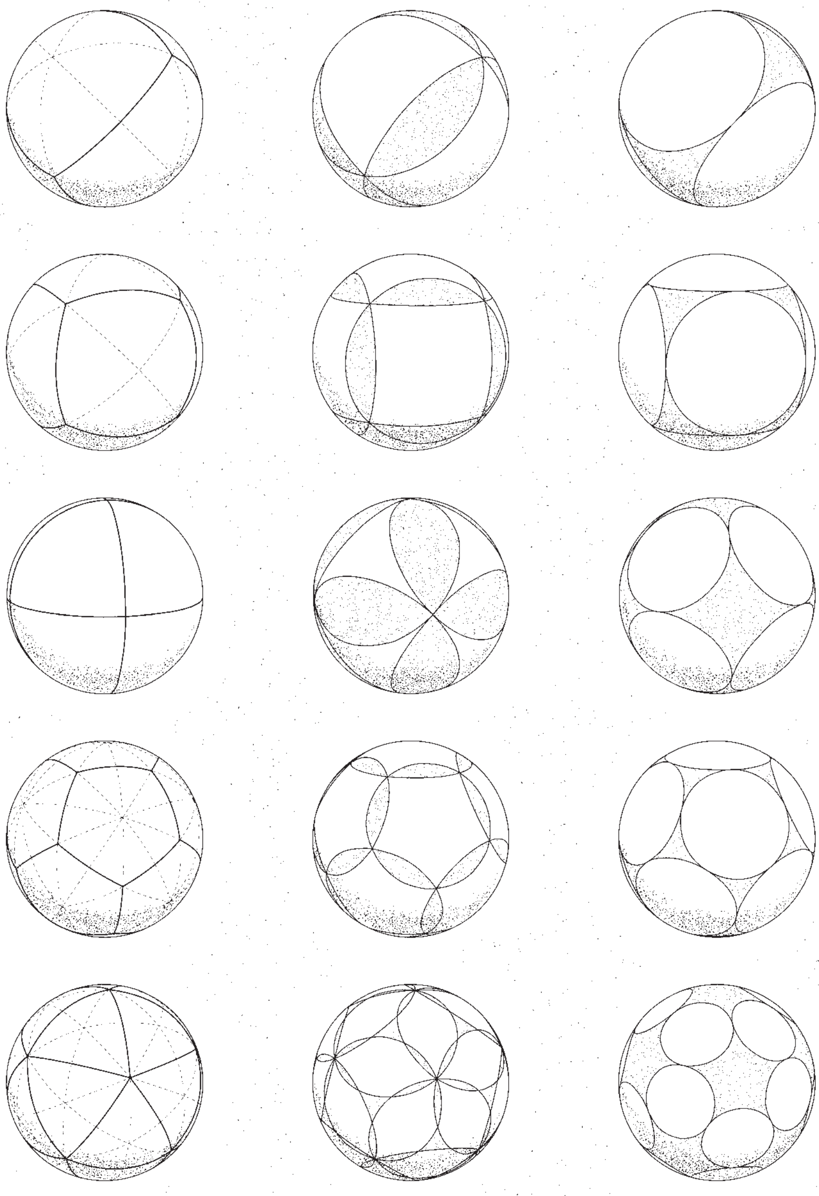
Малые круги

Любой навигатор подтвердит, что кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности сферы всегда является дугой, принадлежащей *большому кругу*. Если ребра многогранника спроецировать на внешнюю сферу, то получится совокупность дуг большого круга, известная как *радиальная проекция*. *Напротив в левой колонке* показаны радиальные проекции платоновых тел. Пунктирной линией на схемах обозначен большой круг.

Круг, принадлежащий сфере, но меньший по размеру, чем большой круг, называется *малым кругом*. Если около каждой грани правильного многогранника описать окружность, то получатся группы малых кругов. На внешней сфере они будут выглядеть так, как показано *напротив в средней колонке*. В апокрифической Книге XIV «Начал» Евклид доказывал, что малые круги, описанные около граней додекаэдра (*четвертый ряд*), равны подобным кругам икосаэдра (*пятый ряд*). То же верно для пары куб (*второй ряд*) и октаэдр (*третий ряд*).

Если уменьшить малые круги, изображенные *в средней колонке*, так, чтобы они пересекались только по касательной, то получатся любопытные сферические схемы (*в правой колонке*). В Шотландии было найдено множество неолитических каменных сфер с узорами, точно повторяющими 4 верхних примера (*см. с. 74*). 12 кругов додекаэдра были вырезаны на камне возрастом около 4000 лет — это самое древнее известное нам изображение из группы симметрии икосаэдра.

Модель малых кругов правильного многогранника можно сделать из ивовых прутьев или обычных гимнастических обручей, скрепленных проволокой, веревкой или лентами.

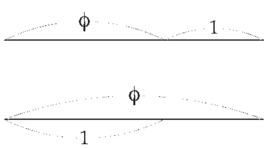


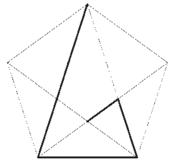
Золотое сечение

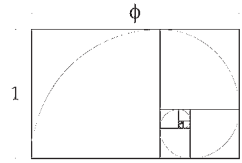
И некоторые интригующие соседства

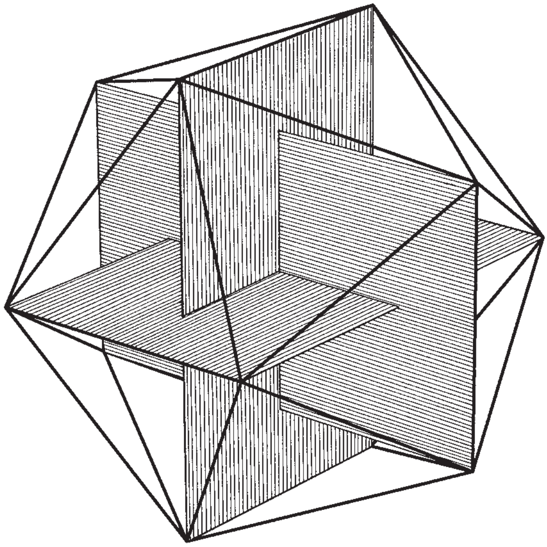
Разделив линию на две части таким образом, чтобы длина большей части относилась к длине меньшей части так же, как длина всей линии к длине большей части, мы получим золотое сечение (*внизу*). Пропорция золотого сечения — это иррациональное число, которое нельзя выразить простой дробью (*см. с. 54 и 377*). Оно равно $1 + \sqrt{5} : 2$, то есть примерно 1,618, и обозначается греческой буквой Φ (фи), иногда τ (тау). Число Φ очень сильно связано с единицей; Φ в квадрате (Φ^2) равно $\Phi + 1$ (2,618…), а $1 : \Phi = \Phi - 1$ (0,618…). Кроме того, число Φ родственно пятикратной симметрии. Линии пентаграммы, выделенные жирным, являются непрерывной цепочкой золотых сечений.

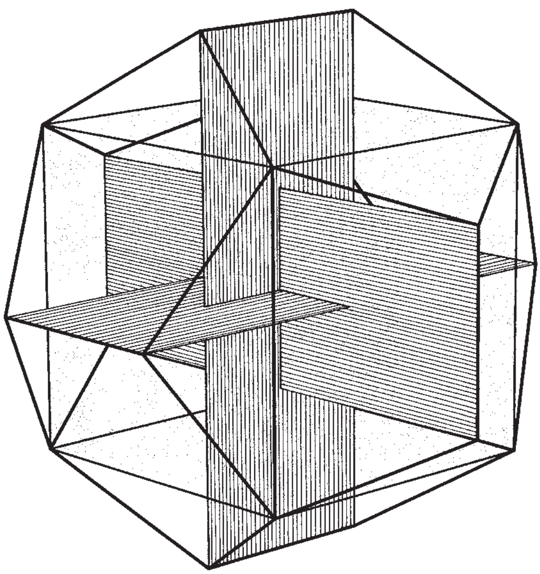
Удалите квадрат из золотого прямоугольника — и стороны оставшегося прямоугольника также будут находиться в пропорции золотого сечения. Этот процесс может продолжаться бесконечно, а в результате таких преобразований получается золотая спираль (*внизу справа*). Двенадцать вершин икосаэдра задаются тремя перпендикулярными золотыми прямоугольниками (*напротив вверху*), 12 вершин додекаэдра — 3 перпендикулярными Φ^2-прямоугольниками, а оставшиеся 4 вершины можно найти, если добавить в конструкцию куб с ребром длиной Φ (*напротив внизу*).











Полиэдр внутри полиэдра

И так до бесконечности

Платоновы тела совмещаются друг с другом удивительным и очаровательным образом. В приложении *на с. 376* собрано множество различных вариантов.

На верхней стереограмме изображен додекаэдр со стороной 1. В него заключены куб с ребром длиной Ф и тетраэдр с ребром длиной $\sqrt{2}$Ф (*см. с. 377*). Объем тетраэдра равен $^1/_3$ объема куба.

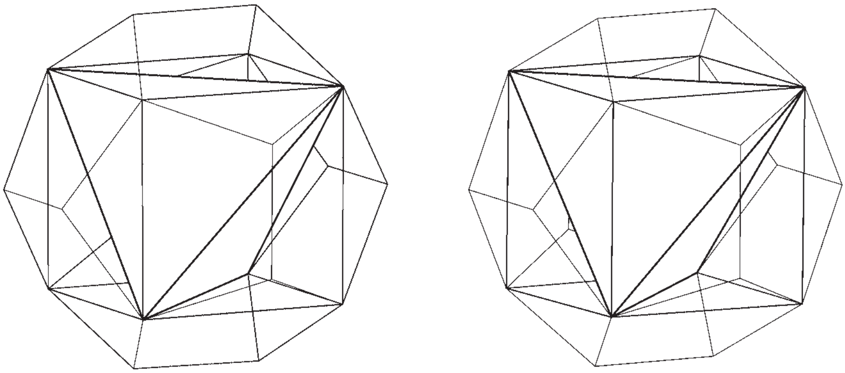
В нижней стереограмме середины 6 ребер тетраэдра совпадают с 6 вершинами октаэдра. Кроме того, площадь и объем октаэдра точно вдвое меньше площади и объема тетраэдра — идеальная визуализация музыкальной октавы 1:2.

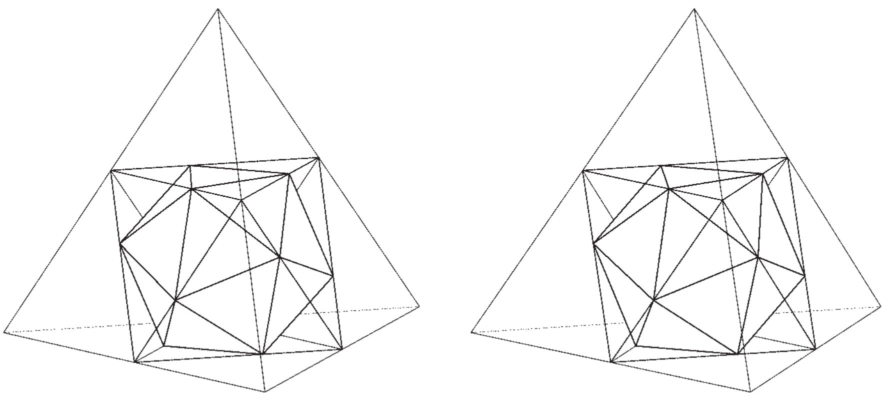
Похожим образом 12 ребер октаэдра соотносятся с 12 вершинами икосаэдра. Вершины икосаэдра делят ребра октаэдра в пропорции золотого сечения (*на с. 146 пояснено, как увидеть 3D-изображение, зашифрованное в этих стереограммах*).

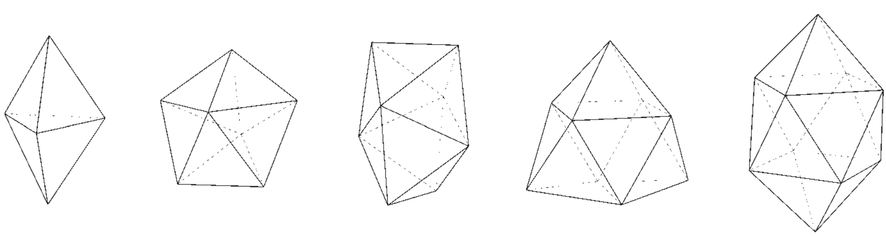
Попробуйте представить сложную систему из 5 платоновых тел, вложенных друг в друга. Внешний додекаэдр благодаря отношениям двойственности определяет больший икосаэдр, а внутренний икосаэдр, в свою очередь, вмещает меньший додекаэдр.

Такие совмещения можно продолжать до бесконечности.

Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр состоят из равносторонних треугольников и иначе называются *выпуклыми дельтаэдрами*. Кроме них существует всего 5 других выпуклых дельтаэдров — все они показаны *напротив внизу*.





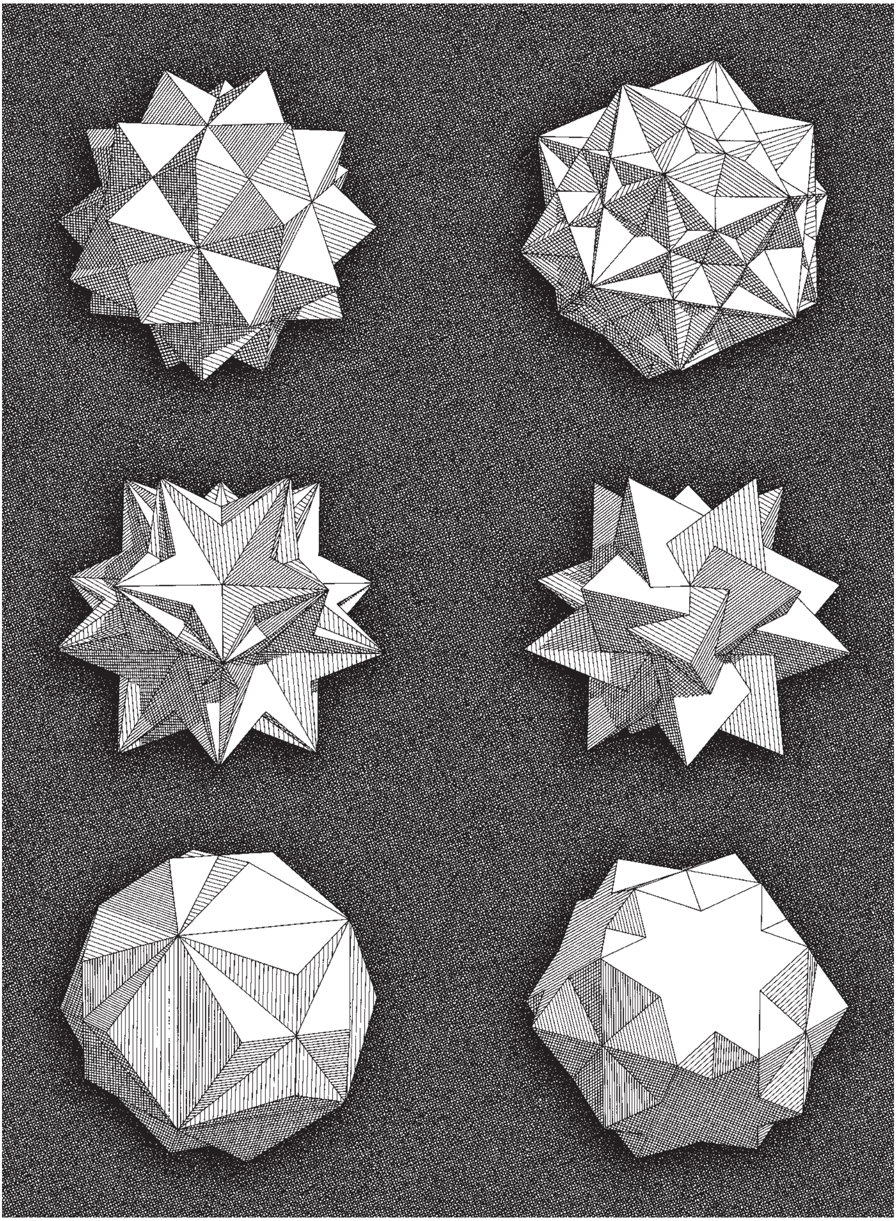


Сложносоставные полиэдры

Тренировка воображения

Взаимосвязи, описанные в предыдущей главе, позволяют нам создавать из многогранников удивительно прекрасные и сложные структуры. Если зафиксировать икосаэдр в одной позиции, то вокруг него можно будет разместить пять различных октаэдров, которые сформируют сложносоставную объемную фигуру (*вверху слева*). Похожим образом куб в додекаэдре может принимать пять различных положений (*вверху справа*). Тетраэдр в кубе размещается двумя способами и образует сложносоставную структуру, изображенную *на с. 146*. Заменив каждый из пяти кубов, размещенных в додекаэдре, двумя тетраэдрами, вы получите структуру из девяти тетраэдров (*по центру слева*). Уберите пять тетраэдров из предыдущей фигуры, чтобы получить сложносоставную структуру из пяти тетраэдров (*по центру справа*). Такая фигура может быть составлена в двух версиях — правая (*dextro*) и левая (*laevo*); эти версии нельзя накладывать одну на другую, так как они являются зеркальными отражениями друг друга — *энантиоморфами*. Полиэдры, или сложные структуры, обладающие таким свойством зеркальности, называют *киральными*.

Вернемся к кубу и додекаэдру и на этот раз зафиксируем куб. Существует два способа расположить додекаэдр вокруг куба. Использованные одновременно, эти два способа формируют структуру из двух вложенных додекаэдров (*внизу слева*). Похожим образом пара октаэдр и икосаэдр формирует структуру из двух икосаэдров (*внизу справа*). Существует еще множество великолепных сложносоставных объемных фигур, например конструкция из четырех кубов, показанная *на с. 128*.



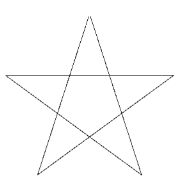
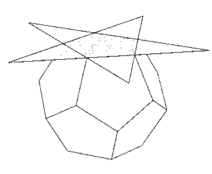
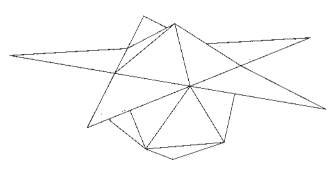
Полиэдр Кеплера

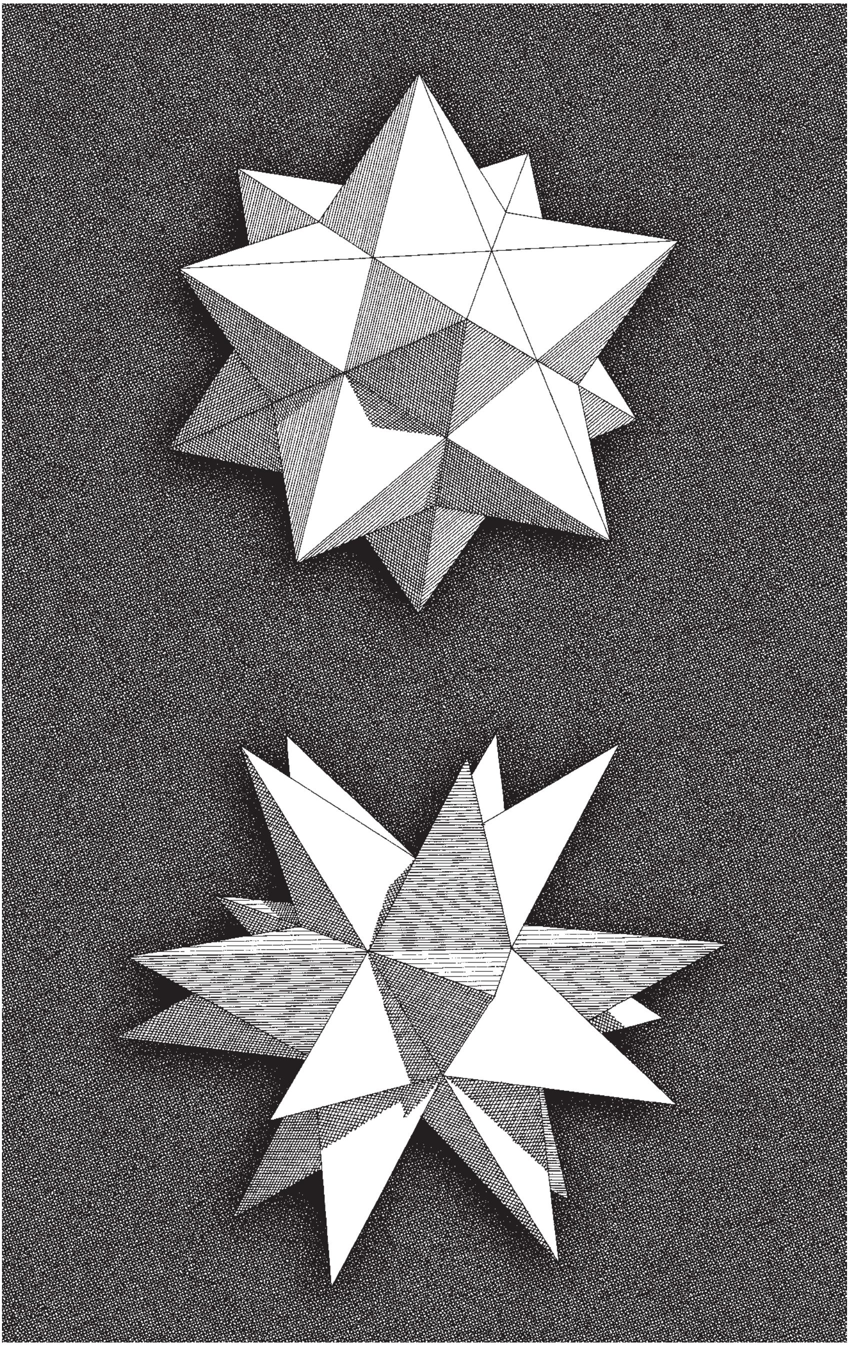
Звездообразные додекаэдры

Стороны некоторых многоугольников можно продолжить так, что они пересекутся; например, стороны правильного пятиугольника таким образом превращают его в пятиконечную звезду, или пентаграмму (*внизу*). В геометрии такие формы принято называть *звездчатыми*. Кеплер подробно изучал полиэдры (*см., например, с. 306*) и описал звездчатые многогранники. При этом он использовал два различных способа получения «звездного луча»: продолжением ребра и продолжением плоскости грани. Применяя первый способ к додекаэдру и икосаэдру (*внизу*), он получил две фигуры, изображенные *напротив*, и назвал их большим и малым икосаэдральными дикобразами!

В современной традиции их принято называть звездчатым додекаэдром (*напротив вверху*) и большим звездчатым додекаэдром (*напротив внизу*). Эти полиэдры также являются двумя производными додекаэдра, получившего звездчатую форму путем продолжения плоскости грани. Каждый состоит из 12 пентаграмм, один с пятью, другой с тремя, встречающимися в каждой вершине. Они относятся к группе симметрий икосаэдра.

Хотя 5 сторон пентаграммы пересекаются друг с другом, ее стороны и углы одинаковы, поэтому ее можно назвать *невыпуклым правильным многоугольником*, а значит, звездчатые полиэдры, состоящие из пентаграмм, можно назвать *невыпуклыми правильными многогранниками*.

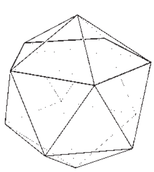
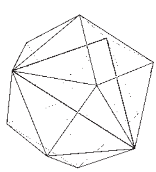
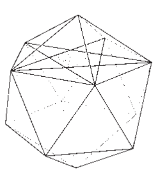
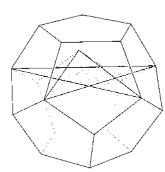


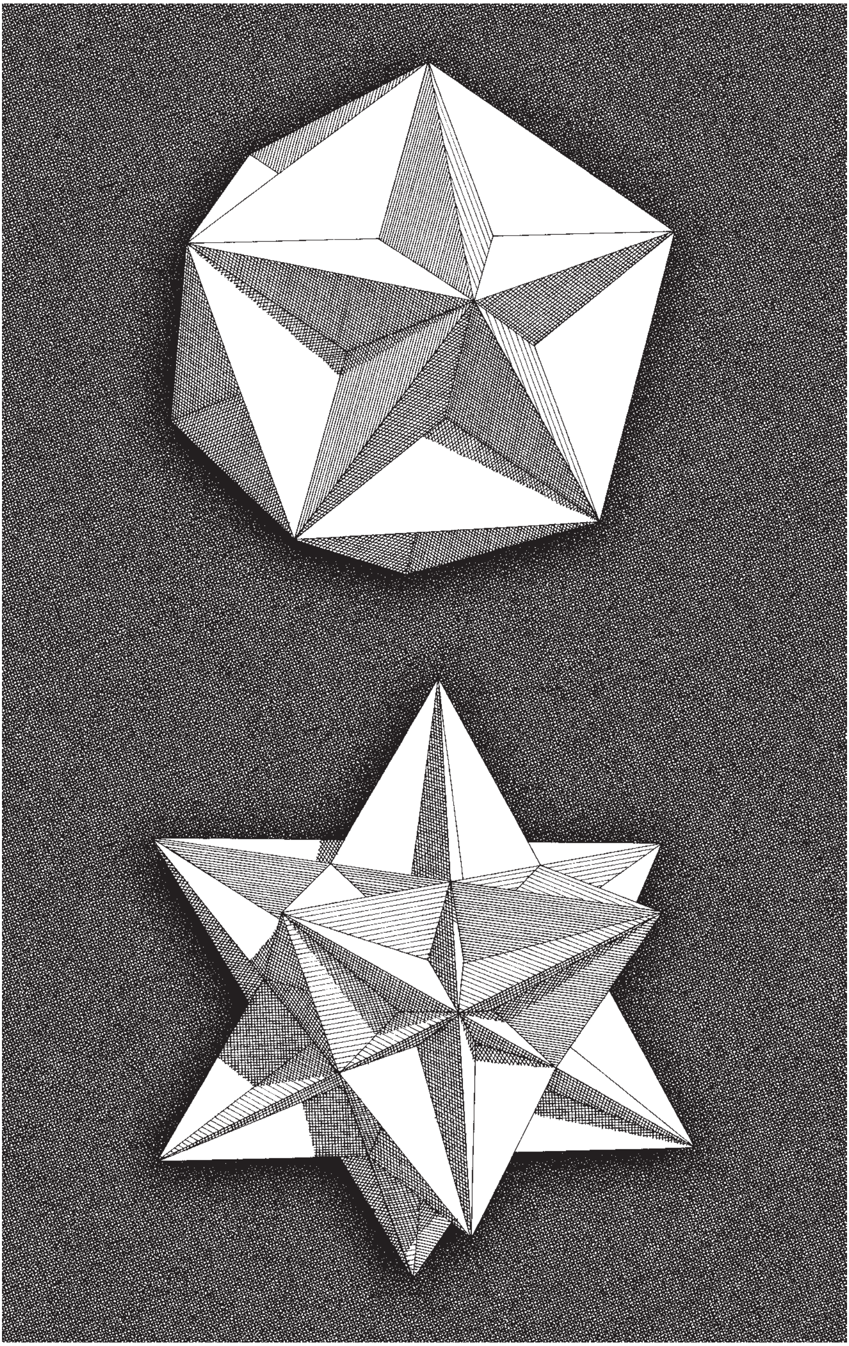
Полиэдры Кеплера — Пуансо

Большой додекаэдр и большой икосаэдр

Луи Пуансо (1777—1859) изучал многогранники независимо от Кеплера. Он заново открыл два кеплеровских икосаэдральных дикобраза и придумал два новых: большой додекаэдр (*напротив вверху*) и большой икосаэдр (*напротив внизу*). Эти многогранники имеют по 5 граней, сходящихся в одной вершине. Пересекаясь, они формируют *вершинную фигуру* в виде пентаграммы. У большого додекаэдра 12 пятиугольных граней, и он представляет собой третью звездчатую форму додекаэдра. У большого икосаэдра 20 треугольных граней, и он является одной из 58 невероятных звездчатых форм икосаэдра (часто говорят о 59 формах, считая сам икосаэдр). Эти звездчатые формы также включают в себя сложносоставные объемные фигуры из 5 октаэдров, 5 тетраэдров и 10 тетраэдров.

Невыпуклый правильный полиэдр должен иметь вершины, расположенные по форме одного из платоновых тел. Соединение вершин полиэдра так, чтобы внутри получился новый многогранник, называется *фасетизацией*. Фасетки внутри платоновых тел создают структуры из двух и десяти тетраэдров, структуру из 5 кубов, 2 полиэдра Пуансо (*внизу слева*) и 2 звездчатых полиэдра Кеплера (*внизу справа*). 4 полиэдра Кеплера — Пуансо, тем не менее, являются единственными правильными невыпуклыми многогранниками.



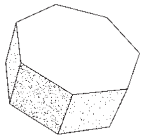
Архимедовы тела

13 полуправильных полиэдров

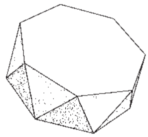
Почти все оставшиеся страницы этой книги будут посвящены 13 архимедовым телам (*напротив*). Также известные как *полуправильные многогранники*, эти фигуры состоят из правильных многоугольников разного вида и одинаковых вершин. Все они идеально помещаются в сферу по типу тел из группы симметрий тетраэдра, октаэдра или икосаэдра. Хотя самое ранее описание полуправильных многогранников приписывают Архимеду, со времен античности первым, кто подробно изучил эти 13 тел, был Кеплер в своей работе «Гармония сфер» («Гармония мира»). Позднее он описал две бесконечные группы призм и антипризм (*примеры внизу*), которые также имеют одинаковые вершины и правильные грани.

Поверните верхнюю секцию ромбокубоктаэдра на $^{1}/_{8}$ полного оборота, чтобы получить псевдоромбокубоктаэдр (*внизу*). Его вершины окружены такими же правильными многоугольниками, но симметрия всей фигуры изменяется.

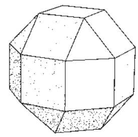
Существует 53 полуправильных невыпуклых многогранника, пример — додекадодекаэдр (*внизу*). Вместе с платоновыми и архимедовыми телами и многогранниками Кеплера — Пуансо они составляют группу из 75 *однородных многогранников*.



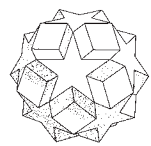
Гептагональная призма



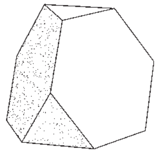
Гептагональная антипризма



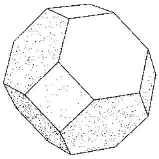
Псевдоромбокубоктаэдр



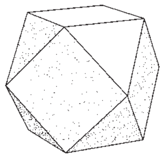
Додекадодекаэдр



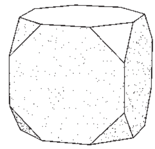
Усеченный тетраэдр



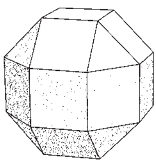
Усеченный октаэдр



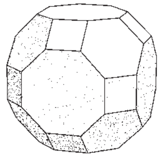
Кубоктаэдр



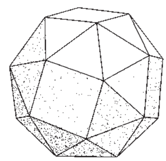
Усеченный куб



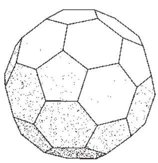
Ромбокубоктаэдр



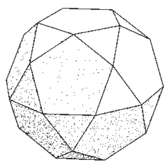
Большой ромбокубоктаэдр



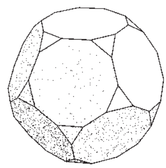
Курносый куб



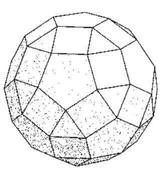
Усеченный икосаэдр



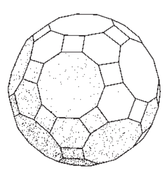
Икосододекаэдр



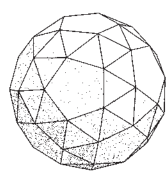
Усеченный додекаэдр



Ромбоикосододекаэдр



Большой ромбоикосододекаэдр



Курносый додекаэдр

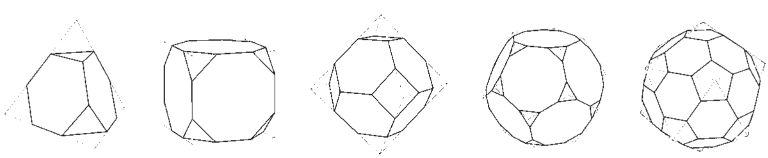
Пять усечений

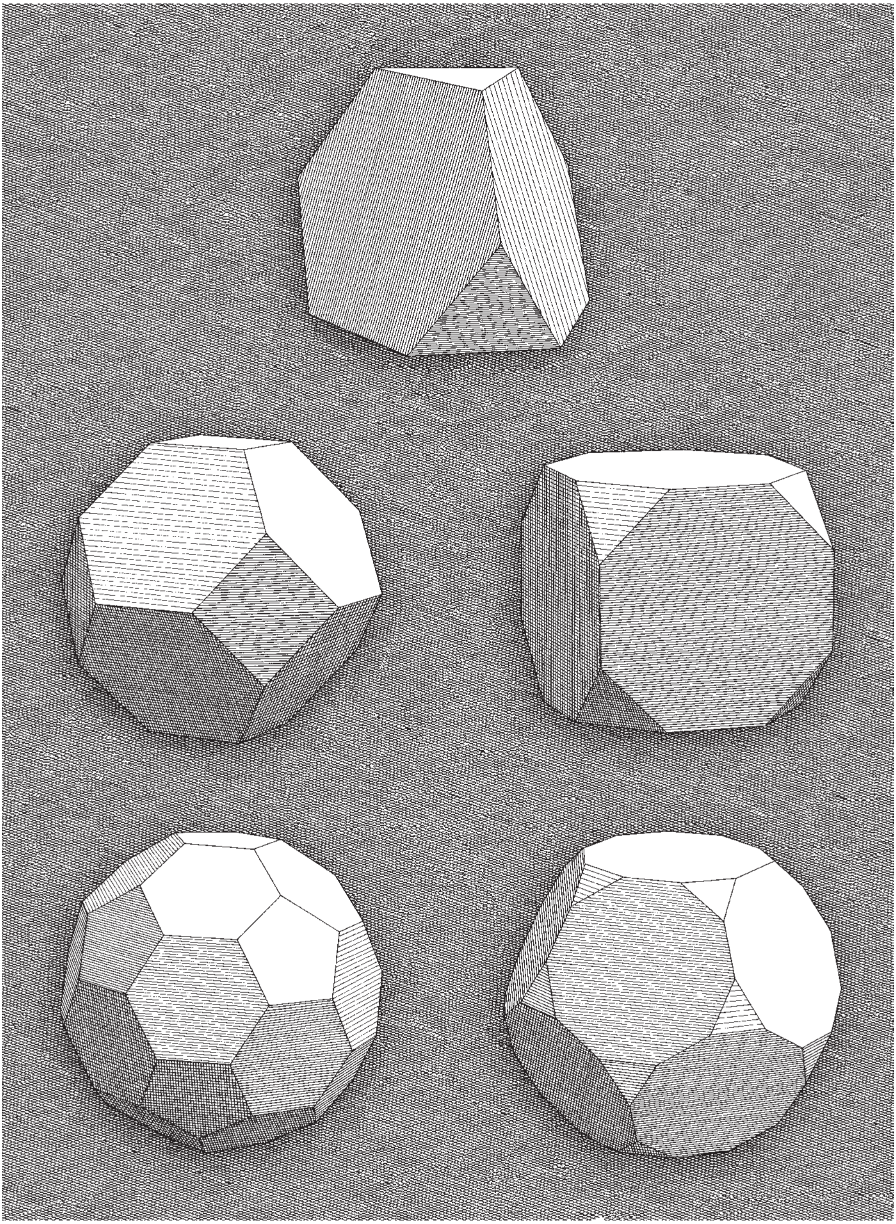
Долой углы!

Платоновы тела с усеченными углами представляют собой 5 многогранников Архимеда с одинаковыми ребрами. Все они представлены *напротив*. Эти усеченные многогранники идеально демонстрируют вершинные фигуры платоновых тел: треугольник для тетраэдра, куба и додекаэдра, квадрат для октаэдра и пятиугольник для икосаэдра. У каждого архимедова тела есть внешняя и средняя сферы, а каждому типу грани соответствует внутренняя сфера. Каждый усеченный многогранник формирует 4 концентрические сферы.

Любая из 5 усеченных фигур четко помещается в исходном платоновом теле или в его дуальном двойнике. Например, усеченный куб может расположить свои восьмиугольные грани в кубе, а треугольные грани — в октаэдре.

Усеченный октаэдр — единственное из архимедовых тел, которое может заполнять пространство своими копиями, не оставляя пустот. В нем кроется еще один менее известный секрет. Если соединить концы любого из его ребер с центром, то получившийся остроконечный треугольник будет соответствовать пифагорову треугольнику со сторонами 3, 4, 5 — любимому инструменту египетских каменщиков для определения прямого угла.





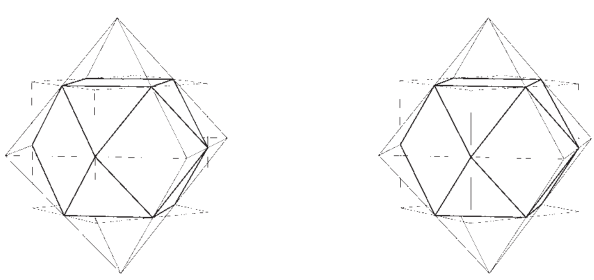
Кубоктаэдр

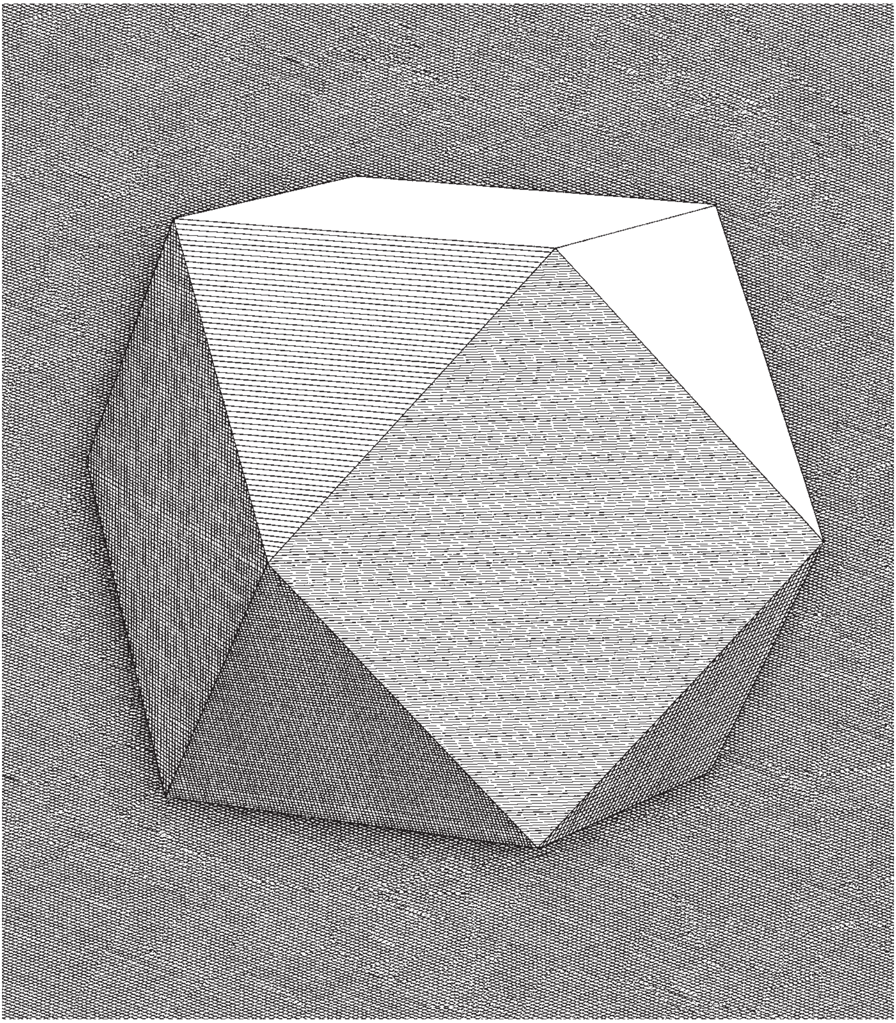
14 граней : 24 ребра : 12 вершин

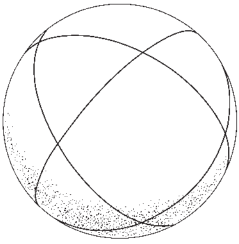
Кубоктаэдр состоит из 6 квадратных граней куба и 8 треугольных граней октаэдра. Он принадлежит к группе симметрий октаэдра. Для того чтобы получить кубоктаэдр, достаточно соединить центры ребер куба или октаэдра (*на стереограмме внизу*). Согласно утверждению Герона Александрийского (10—75 годы от Р. Х.), Архимед приписывал открытие кубоктаэдра Платону.

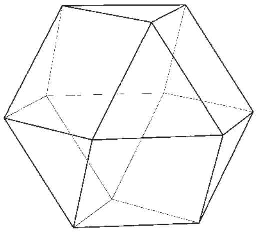
Квазиправильные многогранники, к которым относится кубоктаэдр, формируются из двух типов правильных многоугольников. При этом каждый многоугольник одного типа всегда окружен многоугольниками второго типа. Одинаковые ребра этого многогранника формируют собственно грани полиэдра и экваториальные многоугольники. Например, ребра кубоктаэдра составляют 4 правильных гексагона (*внизу напротив в центре*). Радиальные проекции квазиправильных многогранников полностью состоят из больших кругов (*внизу напротив слева*).

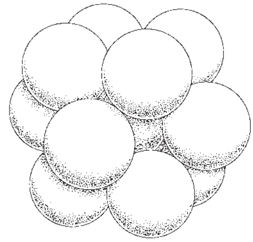
Группа из 12 сфер вокруг такой же 13-й создает кубоктаэдр (*внизу напротив справа*). Продавцы используют эту схему для раскладки апельсинов в лотках. Химики называют такие системы плотнейшей гексагональной упаковкой. Центры сфер, сгруппированных вокруг одной, задают жесткую пространственную решетку для тетраэдра и октаэдра.









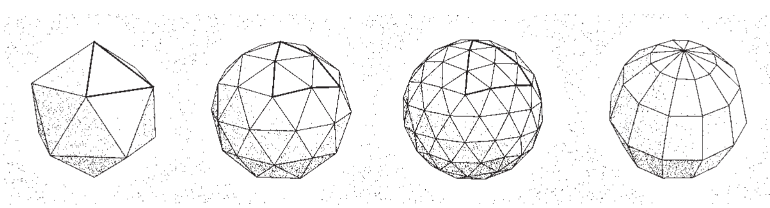


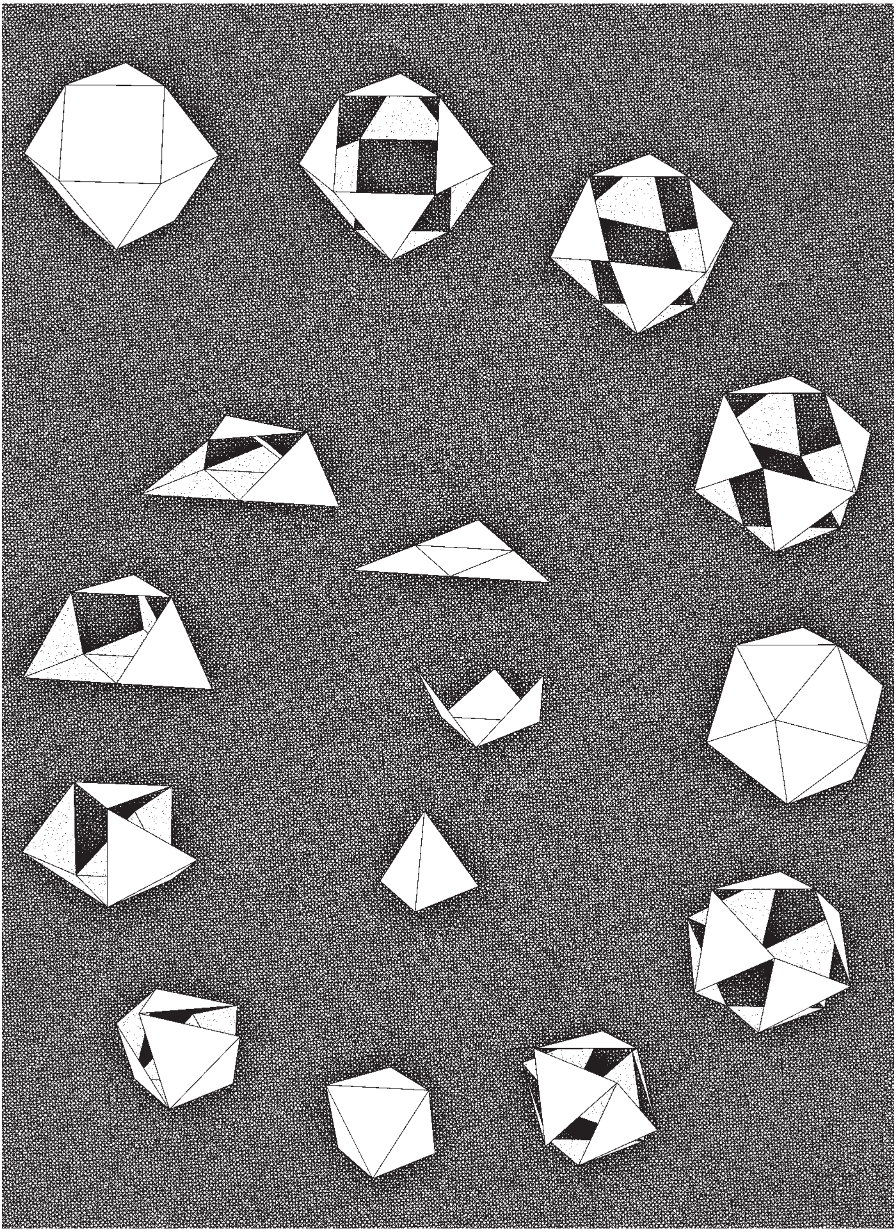
Хитрые вращения

И конструкторское чудо

Кубоктаэдр можно сделать из жестких распорок, соединенных друг с другом в подвижных вершинах. Р. Бакминстер Фуллер (1895—1983) назвал эту структуру *векторным равновесием*. *На рисунке напротив* изображена такая подвижная система с закрашенными для наглядности треугольными гранями. Подобные структуры можно складывать в две стороны так, что квадратные отверстия будут искажаться. Когда расстояние между сближающимися углами сравняется с длиной ребра, мы получим икосаэдр. Продолжим складывать структуру — и получим октаэдр. Если поворачивать верхний треугольник, вся структура станет плоской и сформирует четыре треугольника, которые, сомкнувшись, сформируют тетраэдр.

Геодезический купол — это еще одно конструкторское изобретение Фуллера. Он представляет собой часть геодезической сферы, сформированной при помощи разделения треугольных граней многогранника, обычно икосаэдра, на меньшие треугольники и перемещения новых вершин на то же расстояние от центра, что и исходные вершины (*внизу*). Геодезическая сфера отдаленно напоминает знаменитый многогранник Кампано с 72 поверхностями (*внизу справа*).





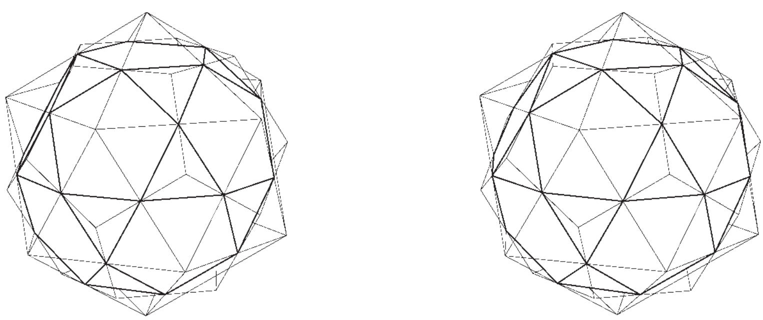
Икосододекаэдр

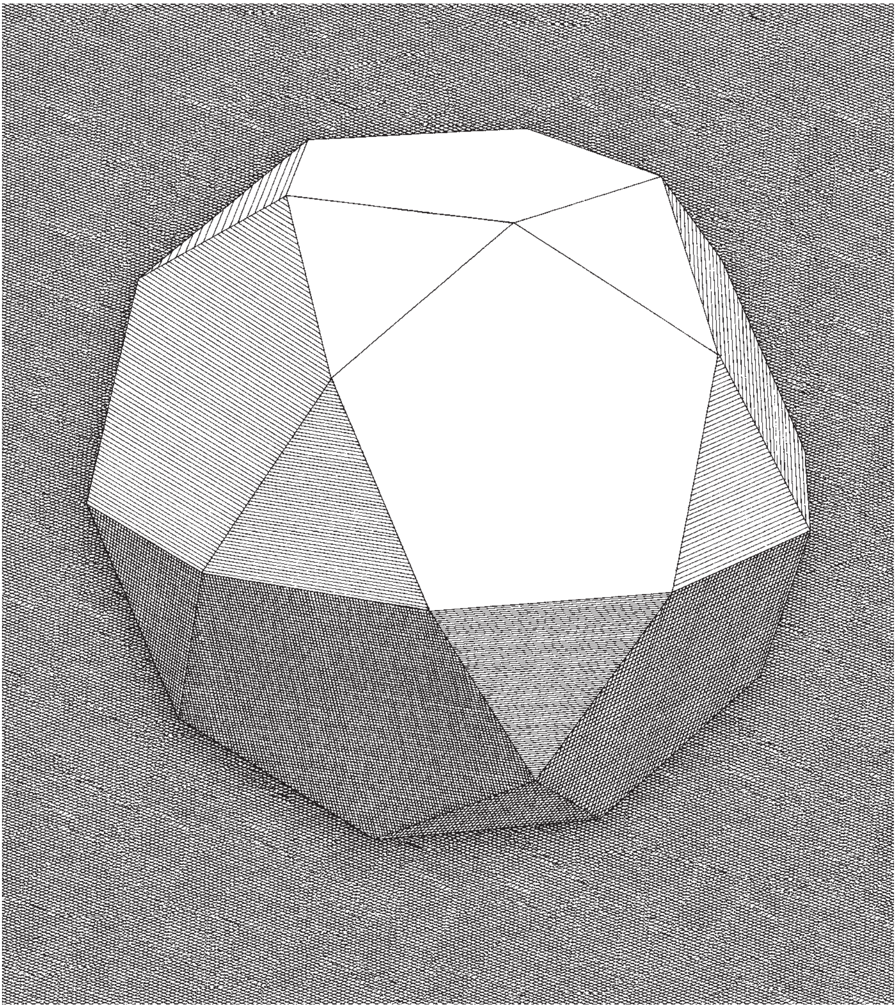
32 грани : 60 ребер : 30 вершин

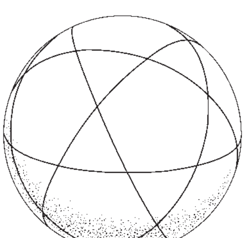
В икосододекаэдре сочетаются 12 пятиугольных граней додекаэдра и 20 треугольных граней икосаэдра. Чтобы получить квазиправильный икосододекаэдр, достаточно соединить центры ребер додекаэдра или икосаэдра (оба изображены *на стереограмме внизу*). Ребра квазиправильного икосододекаэдра формируют 6 экваториальных десятиугольников, а его проекция выглядит как 6 больших кругов (*напротив внизу слева*).

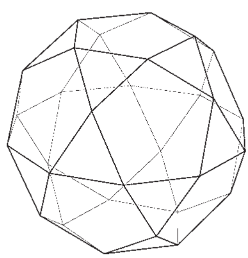
Самое раннее известное описание икосододекаэдра принадлежит Леонардо да Винчи (1452—1519), а также описано в трактате «О божественной пропорции» Фра Луки Пачоли (1445—1517). Основной темой этой работы является золотое сечение, которое проявляется в отношении ребра икосододекаэдра к радиусу описанной вокруг него окружности.

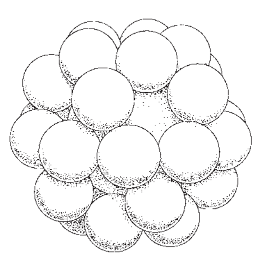
Если в вершинах икосододекаэдра разместить 30 одинаковых сфер, то внутри останется место для еще одной (*см. с. 377*), в $\sqrt{5}$ раз большей, чем все остальные (*напротив внизу справа*).











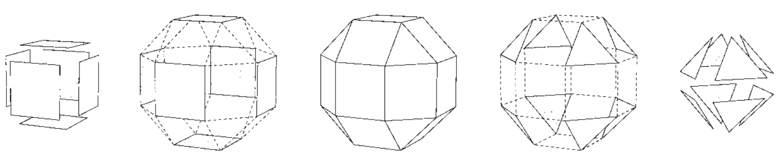
Четыре распадающихся многогранника

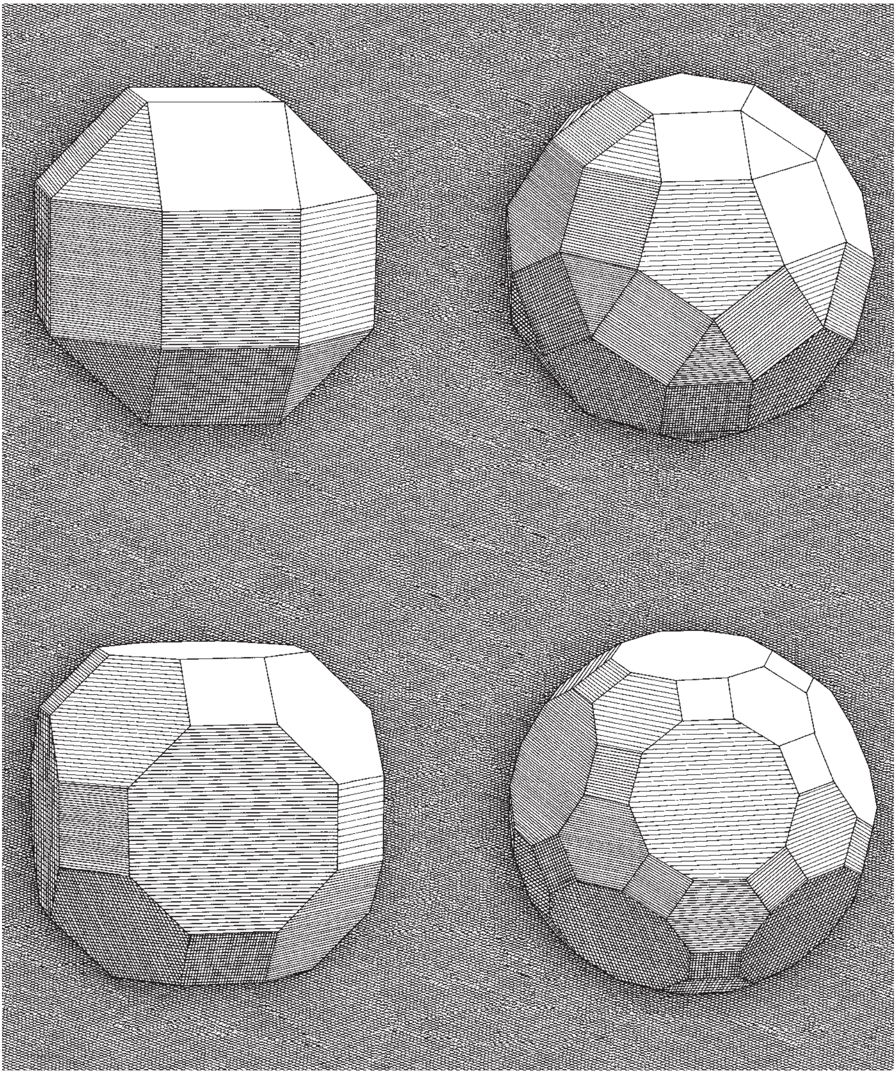
Отдаляясь от центра

Если развести грани куба или октаэдра на расстояние, равное длине ребра (*внизу*), то получится ромбокубоктаэдр (*напротив вверху слева*). Те же манипуляции, проделанные с додекаэдром или икосаэдром, позволят получить ромбоикосододекаэдр (*напротив вверху справа*). Восьмиугольные грани усеченного куба или шестиугольные грани усеченного октаэдра, распадаясь, создают большой ромбокубоктаэдр (*напротив внизу слева*). Десятиугольные грани усеченного додекаэдра или шестиугольные грани усеченного икосаэдра, расходясь из центра, формируют большой ромбоикосододекаэдр (*напротив внизу справа*).

Кеплер называл большой ромбокубоктаэдр усеченным кубоктаэдром, а большой ромбоикосододекаэдр — усеченным икосододекаэдром. Тем не менее два усечения, о которых говорил ученый, создают не квадратные грани, а прямоугольные грани со сторонами $\sqrt{2}$ и Φ.

Грани этих четырех полиэдров совпадают в плоскости с гранями куба, октаэдра и ромбического додекаэдра (*см. с. 179*) или икосаэдра, додекаэдра и ромбического триаконтаэдра (*см. с. 179*).





Грани куба или октаэдра дают ромбокубоктаэдр, додекаэдра или икосаэдра — ромбоикосододекаэдр, усеченного куба, октаэдра, додекаэдра или икосаэдра — большой ромбокубоктаэдр или ромбоикосододекаэдр

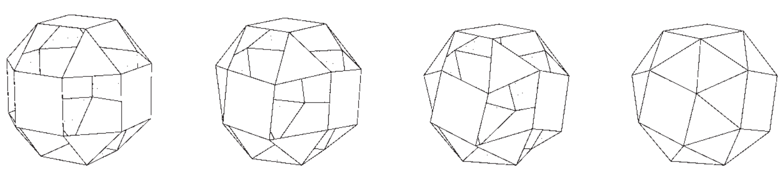
Скручивание

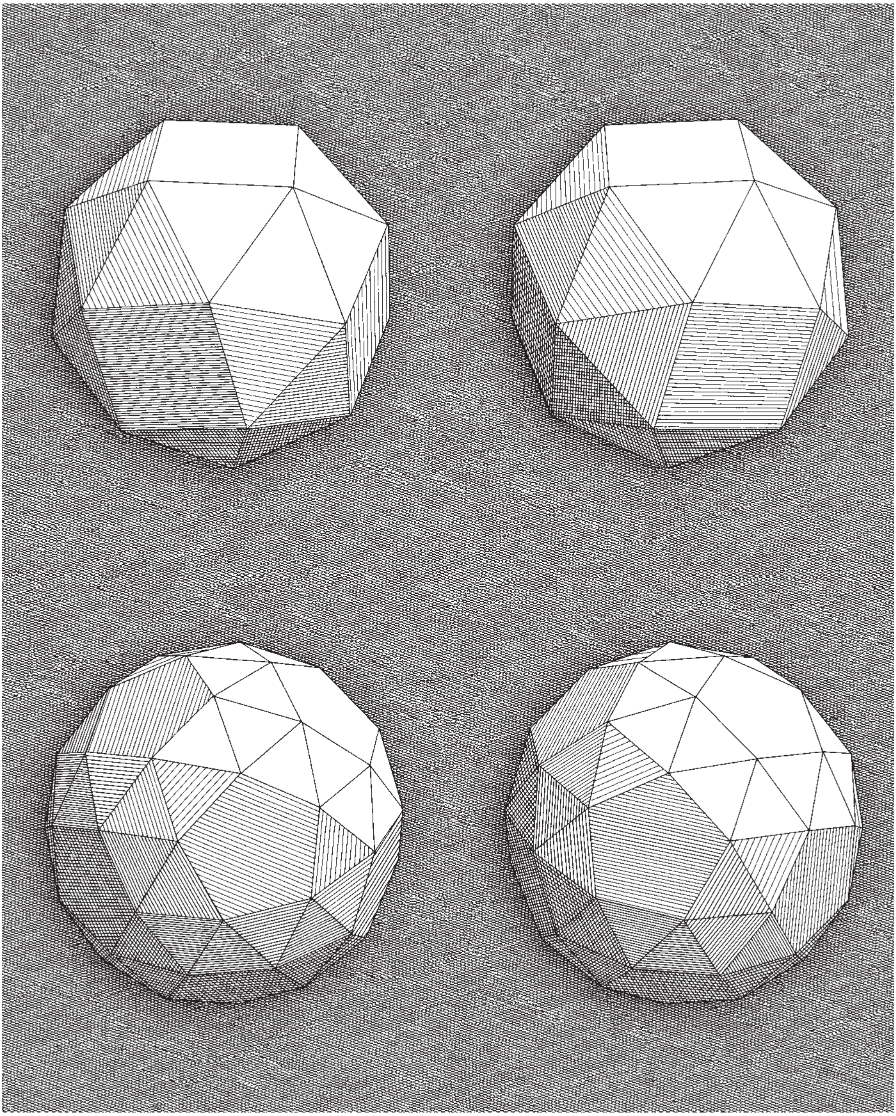
Курносый куб и курносый додекаэдр

Название «курносый куб» появилось в результате вольного перевода кеплеровского *cubus simus*, что дословно означает «расплющенный куб». И курносый куб, и курносый додекаэдр являются *киральными* многогранниками и могут быть построены как в правой (*dextro*), так и в левой (*laevo*) версии. Обе версии изображены *напротив*, версии *dextro* расположены *в правой колонке*. Курносый куб принадлежит к группе симметрий октаэдра, а курносый додекаэдр — к группе симметрий икосаэдра. Ни у одного из них нет зеркальных плоскостей симметрии. Из всех платоновых и архимедовых тел курносый додекаэдр ближе всех к сфере.

Ромбокубоктаэдр (*см. с. 173*) можно использовать для создания структуры, похожей на векторное равновесие (*см. с. 169*). Скручивая получившуюся структуру, мы создадим курносый куб (*внизу*). Крутим в одну сторону — получаем версию *dextro*, в другую — *laevo*. Между ромбоикосододекаэдром и курносым додекаэдром существует пространственная взаимосвязь.

Мы усекали, комбинировали, разводили от центра и скручивали 5 платоновых тел, но при этом только начали знакомиться со сложной структурой и изысканностью трехмерного пространства. Какие еще чудеса нас поджидают?





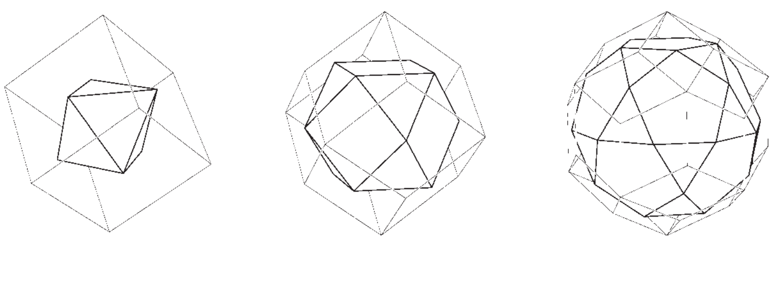
И курносый куб, и курносый додекаэдр являются киральными многогранниками и могут быть построены как в правой (dextro, справа на рисунке), так и в левой (laevo) версии

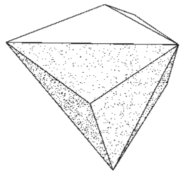
Архимедовы пары

Для всего существует противоположность

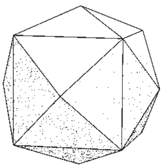
Двойственные архимедовым телам многогранники были впервые описаны математиком Эженом Шарлем Каталаном (1814—1894). *На странице напротив* они изображены в том же порядке, что и парные им тела на *с. 163*. Для того чтобы сформировать дуальную пару для архимедова тела, достаточно провести перпендикулярную линию из центра ребра, направленную по касательной к его средней сфере. Эти линии образуют ребра парного тела; точки, в которых они впервые пересекутся, будут вершинами нового многогранника. У архимедова тела одинаковые углы, но разные типы граней, у его противоположности, наоборот, одинаковые грани, но разные углы.

Два квазиправильных архимедовых тела, кубоктаэдр и икосододекаэдр, идут в паре с ромбовидными многогранниками, которые были открыты Кеплером. Сложносоставные дуальные пары платоновых тел (*см. с. 146, 166 и 170*) определяют диагонали граней этих ромбовидных фигур. Диагонали находятся в пропорции $\sqrt{2}$ для ромбовидного додекаэдра и Ф — для ромбовидного триаконтаэдра. Кеплер заметил, что пчелы заканчивают ряды своих шестиугольных медовых сот такими ромбами. Он также описал три дуальные пары для квазиправильных тел (*внизу*), где куб рассматривается как ромбовидное тело, а октаэдр — как квазиправильный многогранник.

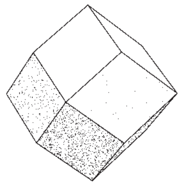




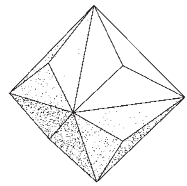
Триакистетраэдр



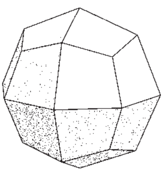
Тетракисгексаэдр



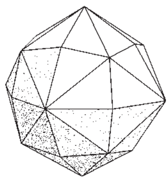
Ромбододекаэдр



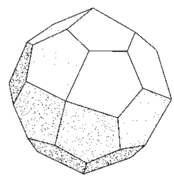
Триакисоктаэдр



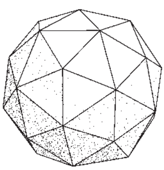
Дельтоидальный икоситетраэдр



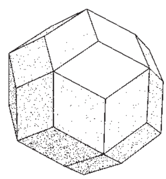
Гекзакисоктаэдр



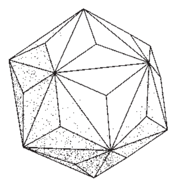
Пентагональный икоситетраэдр



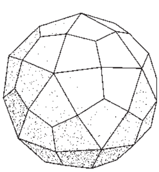
Пентакисдодекаэдр



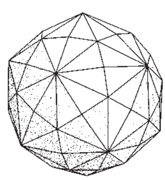
Ромботриаконтаэдр



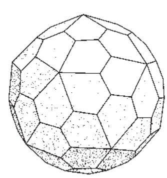
Триакисикосаэдр



Дельтоидальный гексеконтаэдр



Гекзакисикосаэдр



Пентагональный гексеконтаэдр

Новые трансформации

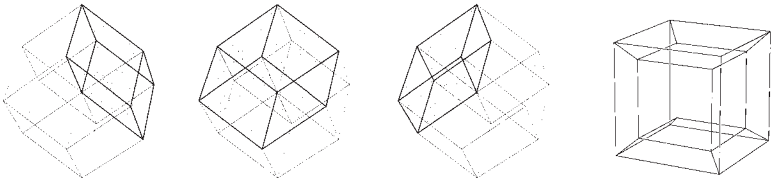
В неожиданном измерении

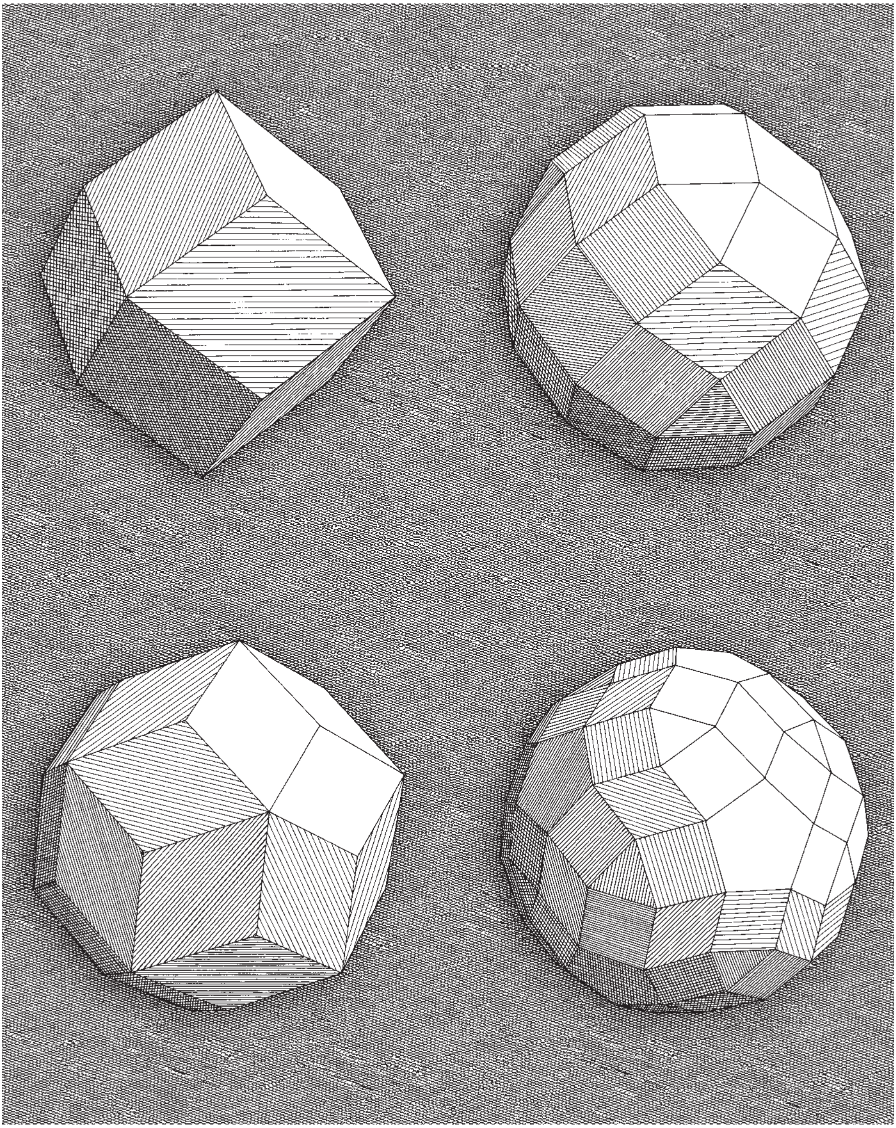
Если грани ромбододекаэдра или его двойственного многогранника распространить от центра на расстояние, равное длине ребра, то получится выпуклый многогранник с 50 гранями (*напротив вверху справа*). В то же время, если такой же трансформации подвергнуть ромботриаконтаэдр или двойственный ему икосододекаэдр, то получится фигура со 122 гранями (*напротив внизу справа*).

Людвиг Шлефли (1814—1895) доказал, что существует 6 правильных четырехмерных *политопов* (распространенных многогранников): пентахор из 5 тетраэдров, тессеракт из 8 кубов, гексадекахор из 16 тетраэдров, икоситетрахорон из 24 октаэдров, гекатоникосахор из 120 додекаэдров, гексакосизор из 600 тетраэдров.

Ромбододекаэдр — это трехмерная версия четырехмерного тессеракта, так же как гексагон — двухмерная версия куба. В кубе пересечение 2 квадратов формирует ребро. В тессеракте в одном ребре встречаются сразу 3 квадрата. Квадраты, проходящие через одно и то же ребро, формируют 3 куба (*заштрихованы внизу, с альтернативной проекцией тессеракта*).

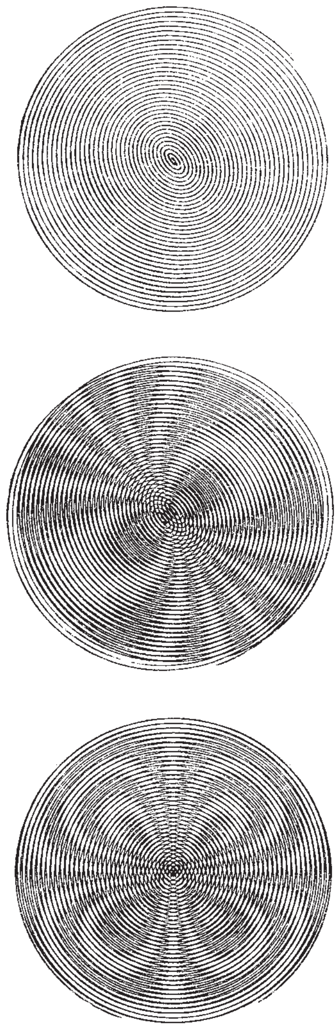
Шлефли также доказал, что в пространстве с пятью и более измерениями единственными возможными правильными политопами являются *симплекс*, или распространенный тетраэдр, *гиперкуб*, или распространенный куб, и *ортоплекс*, или распространенный октаэдр.





Если грани ромбододекаэдра распространить от центра на расстояние, равное длине ребра, то получится выпуклый многогранник с 50 гранями. Если такой же трансформации подвергнуть ромботриаконтаэдр или двойственный ему икосододекаэдр, то получится фигура со 122 гранями

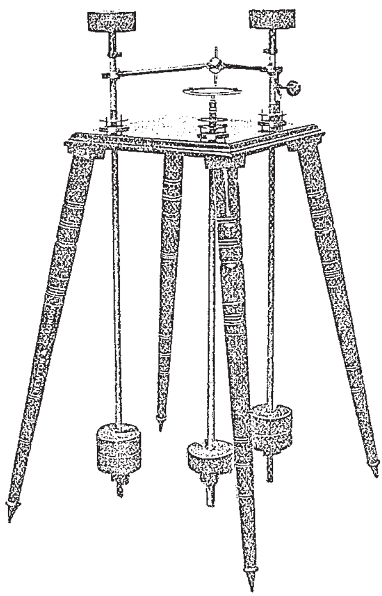
КНИГА IV



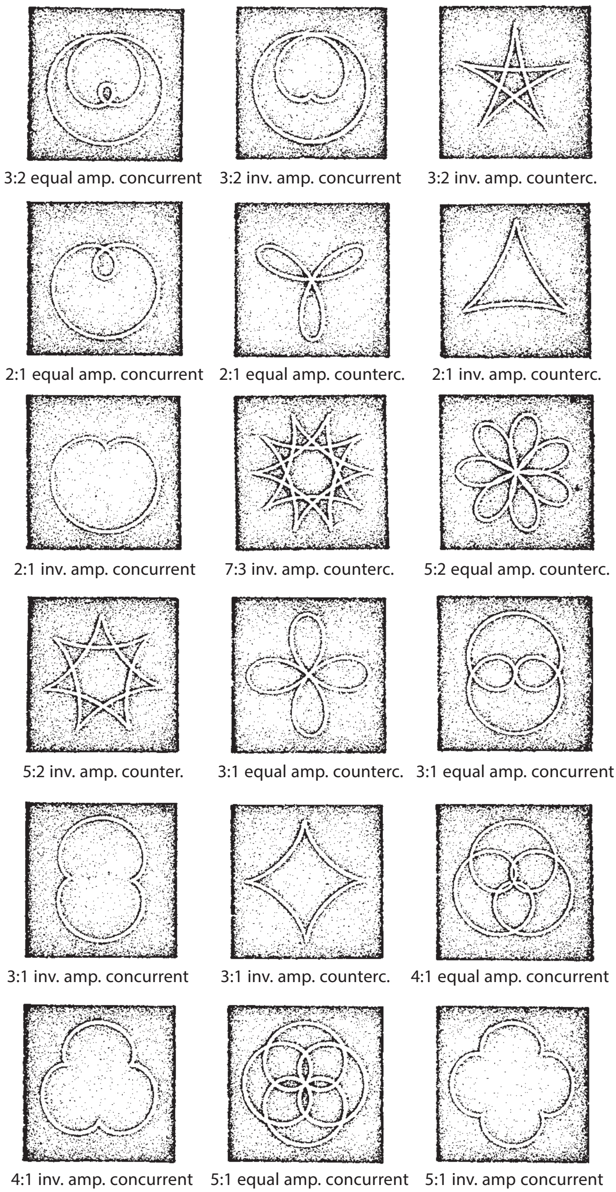
Унисон (1:1): спираль, спираль, закрученная в ту же сторону, поверх первой спирали и спираль, закрученная в противоположенную сторону, поверх исходной спирали

ГАРМОНОГРАФ

Визуальный гид
по музыкальной математике



Энтони Эштон



Гармонические узоры из книги сэра Томаса Базли «Разъяснения к геометрическому станку» (1875), на которых изображены согласованные (concurrent) и противостоящие (countercurrent) фазы с одинаковыми (equal) и «перевернутыми» (inverted) амплитудами

Введение

Многие иллюстрации к этой книге были сделаны при помощи простого научного инструмента под названием гармонограф. Считается, что его изобрел профессор Блэкберн в 1844 году. В конце XIX века мода на подобные инструменты была особенно велика. Викторианские леди и джентльмены любили приходить на литературные или музыкальные вечера, где собирались вокруг гармонографа и завороженно наблюдали за тем, как на белом листе бумаги появляются прекрасные и непостижимые узоры. Один магазин в Лондоне даже продавал портативные модели этого устройства, чтобы его можно было разместить в небольшом кейсе и взять с собой. Множество гармонографов тех времен и по сей день пылятся на заброшенных чердаках в Англии.

С того момента, как я впервые увидел эти рисунки, забыть о них было невозможно. Меня не только завораживала их странная красота: я чувствовал, что это не просто картинки — в них заложен глубокий смысл. Именно скрытое значение узоров я пытался распознать, изучая, как работает гармонограф. Теперь для меня очевидно — инструмент рисует музыкальные гармонии, делает звук видимым.

Тем не менее перед тем как двигаться дальше, я считаю себя обязанным сделать предупреждение. Если вы, так же как и я, чувствуете неодолимую тягу к изучению этой темы, будьте осторожны! Этот путь может увлечь вас настолько, что поглотит все ваше время без остатка.

Также я должен сказать о книге «Гармонические вибрации», которая во многом повлияла на мою работу. Я случайно наткнулся на нее в библиотеке вскоре после окончания Второй мировой войны, и именно она открыла мне дверь в мир визуализации звуков. Я заметил, что книгу издала компания с Уигмор-стрит, которая занимается производством высокотехнологичных инструментов. Однажды я решил зайти к ним, но, придя на место, выяснил, что дела у фирмы идут неважно и теперь они продают одни только проекторы.

Я зашел в магазин с библиотечной копией книги в руках и показал ее пожилому мужчине за стойкой.

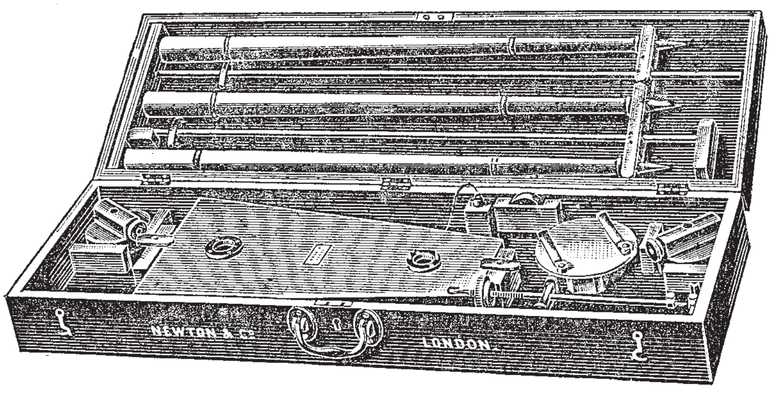
«У вас остались еще экземпляры этой книги?» — спросил я у него.

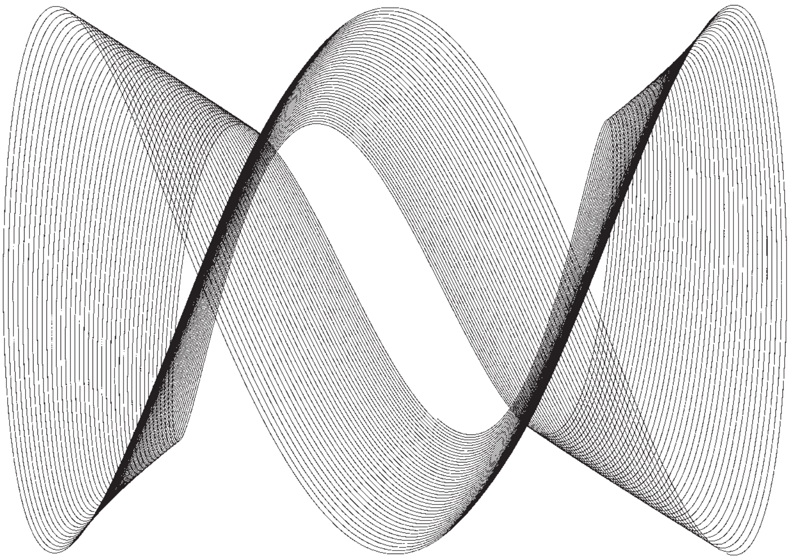
Он уставился на меня так, словно увидел привидение, а затем развернулся и вышел, не сказав ни слова. Через несколько минут он вернулся с пыльной непереплетенной книгой.

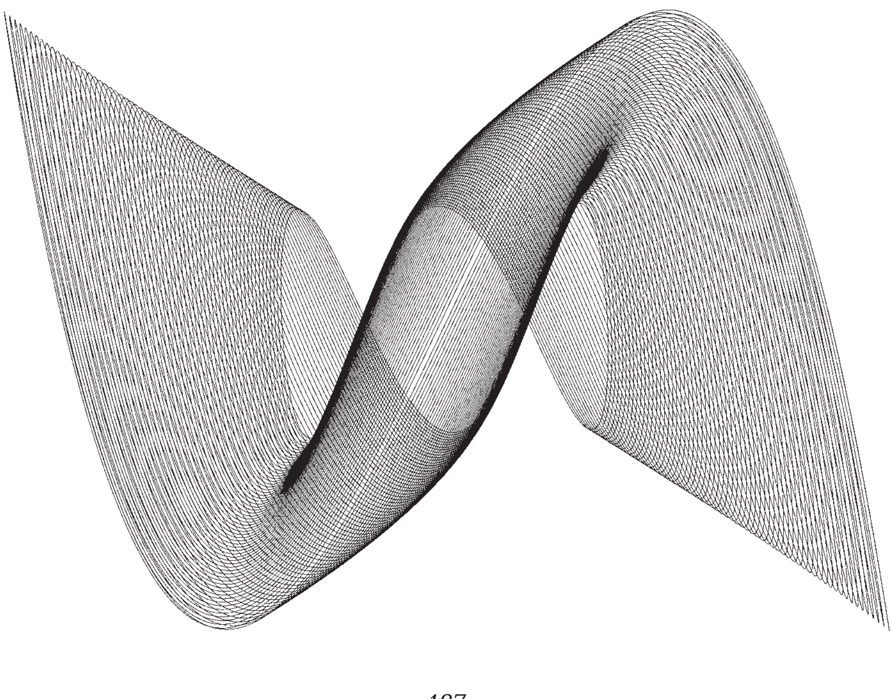
«Это потрясающе, — сказал я. — Сколько вы за нее хотите?»

«Возьмите ее, — ответил мне мужчина. — Это наш последний экземпляр, и завтра мы закрываемся».

С тех пор я чувствовал, что обязан однажды написать книгу, которую вы сейчас читаете.







Открытие гармонии

Проходя мимо кузни

Чтобы понять принцип действия гармонографа, нужно сначала немного углубиться в музыкальную теорию.

Считается, что именно Пифагор около 2500 лет назад понял, как создается музыкальная гармония. Он заметил, что приятным звучанием обладают комбинации нот с частотами, сочетающимися в той же пропорции, что и целые числа. Широко известна история о том, как он шел мимо кузницы и услышал гармоничный перестук молотов по наковальне. Он вошел внутрь и заметил, что интервалы между нотами, происходящими от ударов разных молотов, образуют пропорцию с тоном этих нот.

Молот с массой, равной половине массы второго звучавшего молота, издавал звуки вдвое выше, то есть с разницей в *октаву* (2:1). Пара молотов, массы которых соответствовали пропорции 3:2, звучала еще прекраснее, воссоздавая *квинту*. Простые пропорции создают самые трогательные звуки.

На рисунках напротив показаны дальнейшие эксперименты ученого (из «Теории музыки» Гафури, 1492). Так, Пифагор выяснил, что принцип звукоизвлечения в любых музыкальных инструментах по большому счету одинаков, вне зависимости от того, стучите вы по ним, дергаете за струны или дуете в них.

Глубоко впечатленный этой связью между музыкой и числами Пифагор сделал метафизический вывод о том, что все сущее подчиняется гармонии чисел. Современные физики уточнили это утверждение: природа подчиняется законам, которые можно выразить математическим способом. Если вы внимательно посмотрите на рисунок, то заметите, что в каждом примере, будь то молоты, колокола, стаканы, разновесы или трубки, фигурируют одни и те же числа: 16, 12, 9, 8, 6 и 4. Эти числа можно комбинировать между собой довольно небольшим количеством способов. Каждая комбинация приятна не только для слуха, но, как мы вскоре убедимся, и для глаз.

Считается, что именно Пифагор понял, как создается музыкальная гармония

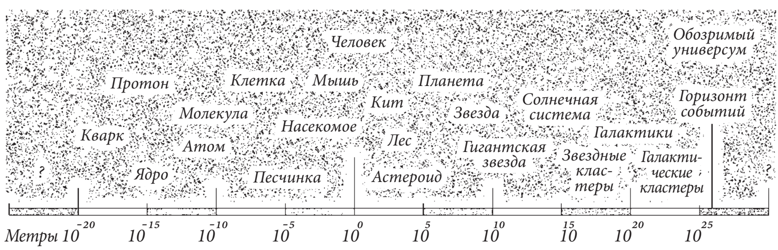
Монохорд Создателя

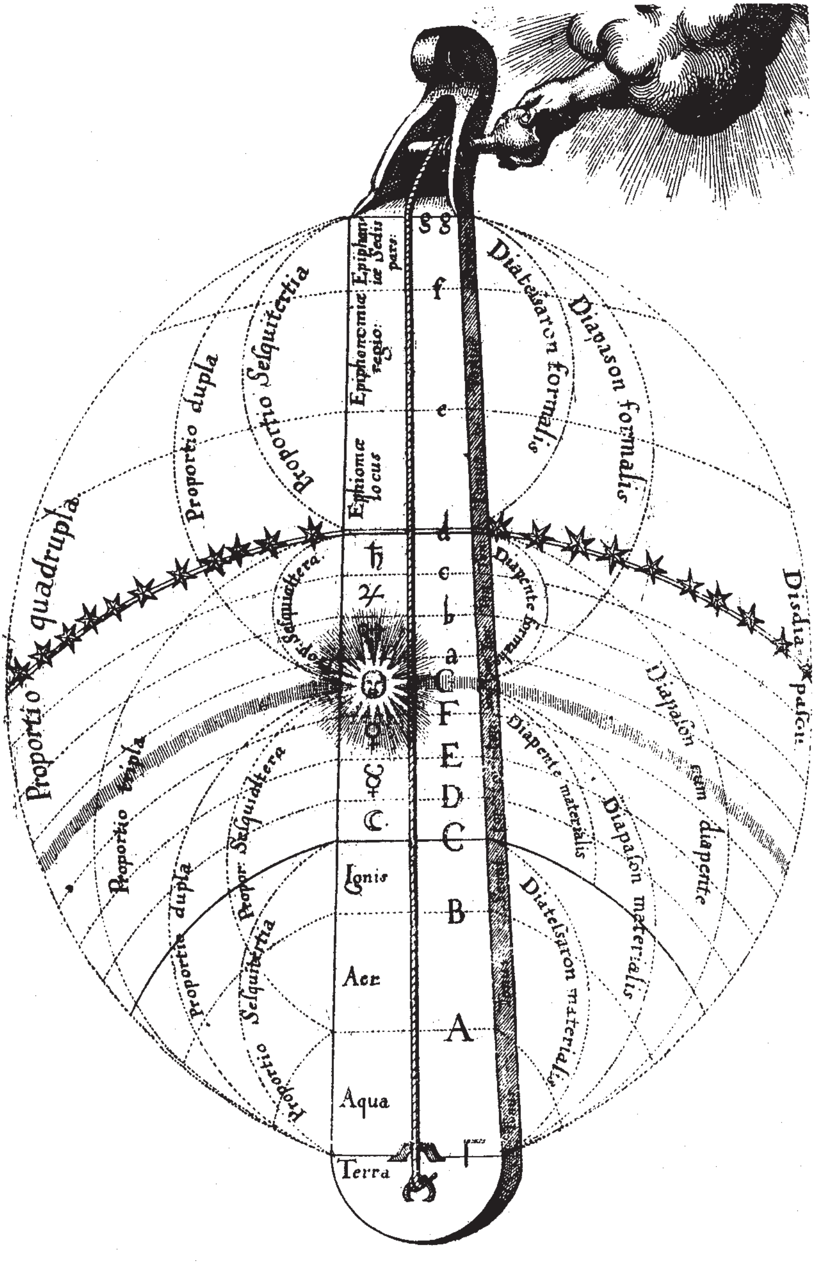
Теория единственной струны

Клаиватура фортепиано охватывает семь октав, а средний человек способен распознать около одиннадцати. Высшая нота каждой октавы имеет частоту вдвое большую, чем первая, таким образом, частотность звуков возрастает *экспоненциально*. Нотный строй начинается с самого низкого органного звука частотой 16 колебаний в секунду (16 Герц) и заканчивается высочайшей нотой с частотой около 20 000 Герц. Ниже 16 Герц мы распознаем только пульсирующий *ритм*. За десять октав частота звука возрастает почти в тысячу раз ($2^{10} \approx 10^3$).

Вы спросите, о каком же «монохорде Создателя» шла речь в заглавии? Вот вам намек. Нотный стан нашего универсума начинается с единственного колебания кванта внизу и простирается к необозримому космосу наверху, проходя сквозь «октавы» в виде атомов, молекул, огромного количества форм, жидких и твердых веществ, маленьких и больших созданий, планет, звезд и галактик. Как видите, эта шкала тоже экспоненциальная, только участвуют в ней числа совсем иных порядков, достигая 10^{40}.

Гравюра XVII века (*напротив*), созданная Робертом Фладдом, визуализирует ту же теорию: нотный стан, развивающийся по экспоненте, задает структуру мироздания.




Proportio quadrupla
Proportio dupla
Proportio Sesquitertia
Proportio tripla
Proportio dupla
Propor. Sesquialtera
Proportio Sesquitertia
Diatessaron formalis
Diapason formalis
Diapente materialis
Diapason materialis
Diatessaron materialis
Diapason cum diapente
Ignis
Aer
Aqua
Terra
A
B
C
D
E
F
G
a
b
c
d
e
f
g g

Обертоны и интервалы

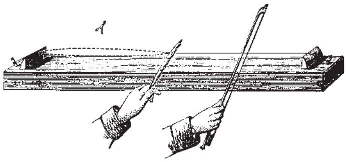
Гармония внутри и за пределами одной октавы

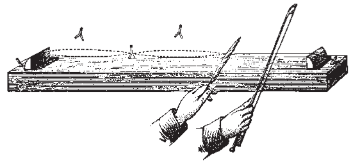
Из чего состоит музыкальная гамма? Прислушайтесь к звучанию струны. Слышите? Помимо главной ноты, или *тоники*, в ее пение вплетается множество иных гармоник, или *обертонов*.

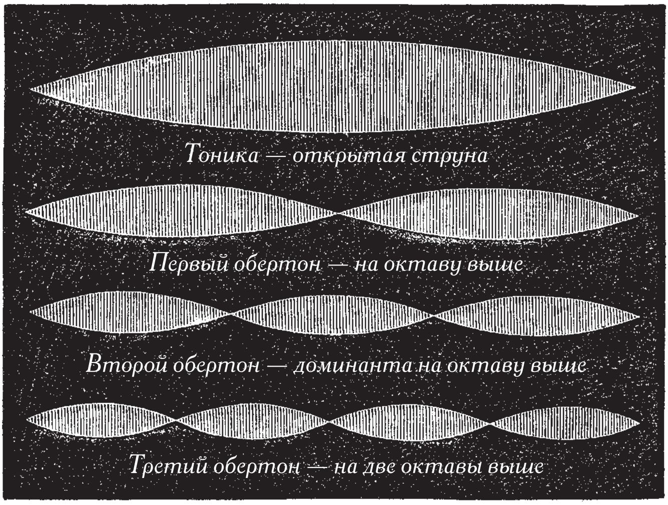
Этот принцип распространяется не только на струну, но также на столб воздуха, мембрану и т. п. Если тронуть струну посередине или на трети длины перышком, как показано на рисунке внизу, то, проведя смычком по короткой части струны, мы извлечем обертон. Такие точки, расположенные в определенных местах струны, называются *ладами*. Первые 3 обертона показаны *напротив*.

Тем не менее, музыкантам требуются также более близкие интервалы, которые в отличие от обертонов формируются *внутри* одной октавы. *На нижней схеме напротив* слева показаны обертоны, а справа — интервалы, построенные в рамках одной октавы. Интервалы расположены в порядке нарастания диссонанса, или, иначе говоря, усложнения звучания.

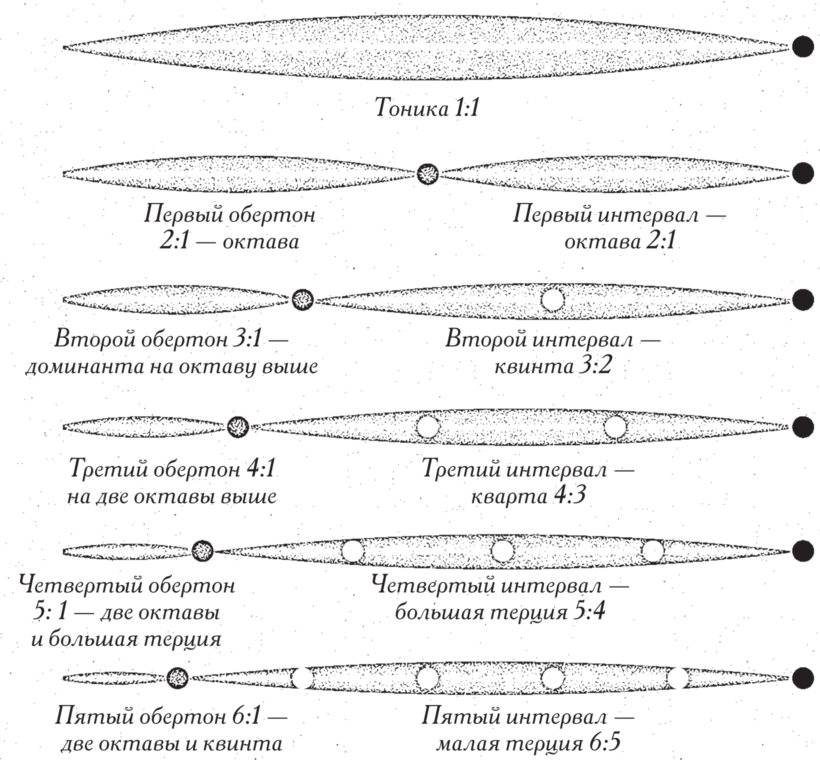
Александр Поуп (английский поэт XVIII века. — *Ред.*) писал: «Нам не понять всего неблагозвучия гармонии». Наш мозг легко воспринимает простые сочетания звуков, нам нравится слушать чистые интервалы; но чем сложнее становится гармония, тем сильнее напрягается наш мозг в попытках ее понять, он начинает «спотыкаться» и в конце концов терпит неудачу, а неудача — это всегда неприятно. Большинство людей не может наслаждаться диссонансной мелодией. Позднее мы убедимся в том, что гармонограф тоже рисует только красивые интервалы.







Тоника — открытая струна
Первый обертон — на октаву выше
Второй обертон — доминанта на октаву выше
Третий обертон — на две октавы выше



Тоника 1:1
Первый обертон 2:1 — октава
Первый интервал — октава 2:1
Второй обертон 3:1 — доминанта на октаву выше
Второй интервал — квинта 3:2
Третий обертон 4:1 на две октавы выше
Третий интервал — кварта 4:3
Четвертый обертон 5: 1 — две октавы и большая терция
Четвертый интервал — большая терция 5:4
Пятый обертон 6:1 — две октавы и квинта
Пятый интервал — малая терция 6:5

Тон и полутон

Доминанта и субдоминанта обретают свое имя

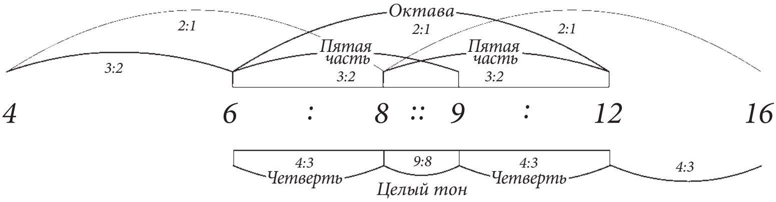
Кузнечные молоты Пифагора таят в себе целый набор звуковых сочетаний, которые формируют октавы (2:1), квинты (3:2) и кварты (4:3). Квинта и кварта, объединяясь, дают октаву (3:2 × 4:3 = 2:1), а разница между ними (3:2 / 4:3) составляет *тон* (9:8).

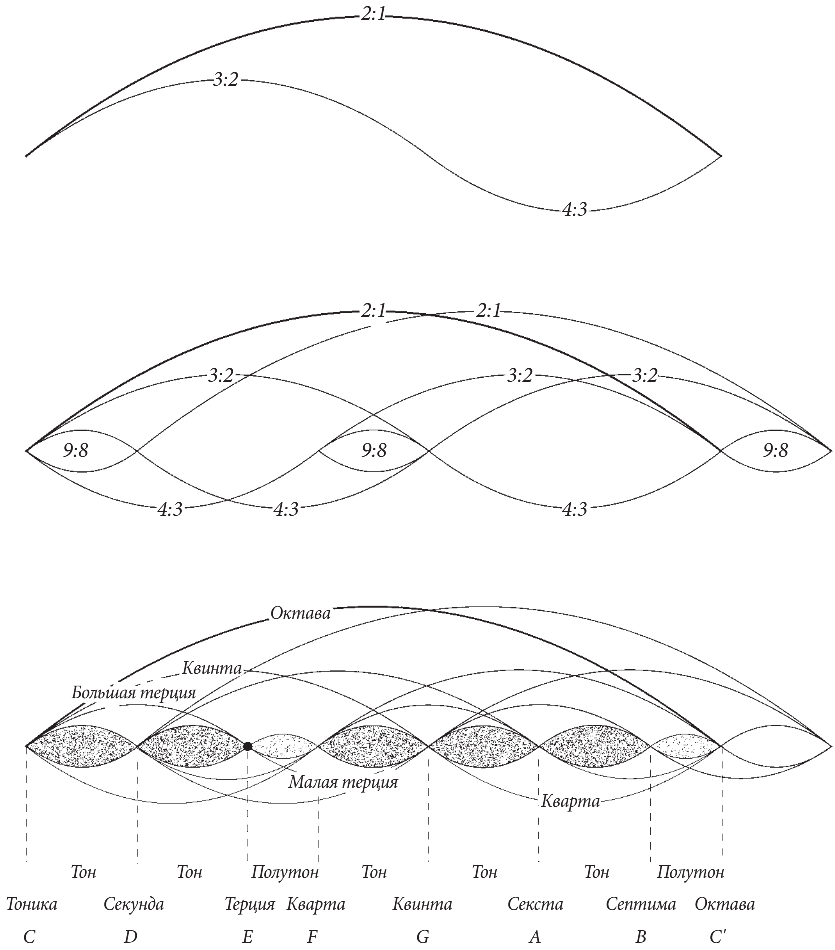
Натуральный строй начинается с тона (или *тоники*) и распадается на 7 отдельных *ладов* (или *нот*), разделенных 2 полутонами и 5 целыми тонами, как Солнце, Луна и 5 планет Древнего мира.

Квинта (3:2) — скачок от тоники к *доминанте*. Естественным образом она делится на большую и малую терции (3:2 = 5:4 × 6:5), большая терция соответственно состоит из двух тонов, а малая — из тона и полутона. Терции могут следовать в разном порядке: либо сначала большая, а затем малая (*тогда получится мажорная гамма, как на схеме напротив в третьем ряду*), либо наоборот.

Вслед за движением мелодии рождаются различные ее интонации, например первые два тона гаммы (9:8 × 9:8 = 81:64) на самом деле не являются большой терцией 5:4, они образуют слегка более высокий (всего на 81:80 долю) интервал (*синтоническая* или *синоптическая комма*, индийский *шрути* или *дидимова комма*). Подробнее об этом — чуть позже.

Чистые интервалы, октава и квинта, задают последовательность тонов и полутонов в *мажорной гамме*, при этом в зависимости от того, какую ноту мы считаем первой, возникают различные варианты гамм или *тональности*. Всего существует 7 таких тональностей (*см. с. 382*).





Основная структура мажорной гаммы (вверху): в пифагоровом строе каждый тон равен точно 9:8, поэтому между большой терцией (81:64) и чистой квартой (4:3) остается лимма, то есть полутон 256:243; секста и септима — это два следующих за доминантой чистых тона. В диатоническом строе мажорная терция 5:4 звучит идеально чисто, что уменьшает второй тон на 10:9 (малый тон) и доводит до кварты диатонический полутон 16:15. Диатоническая секста — это 5:3, на большую терцию выше субдоминанты и на малый тон выше доминанты. Диатоническая септима (15:8) на мажорный тон выше субдоминанты, на мажорную терцию выше доминанты и на полутон ниже октавы

Извлечение гаммы

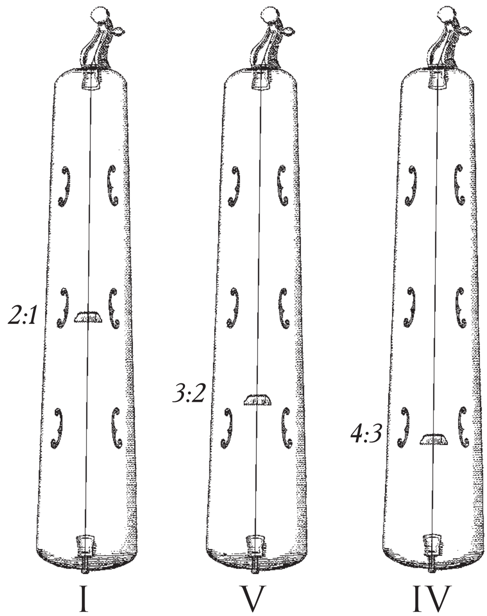
Монохорд, тетрахорд и мажорное трезвучие

Чистые интервалы — кварта, квинта и октава — составляют парадоксальное трио пифагорова тетрахорда. Удивительно в нем то, что 2 ноты его октавы звучат, как одна. Таким образом, доминанта верхней октавы является субдоминантой нижней, и наоборот (*см. рисунок на с. 194*). А 4 ноты внутри октавы превращаются в 3. Возвратная взаимосвязь этих чистых тонов легла в основу западной тональности, от нее же произошла мажорная тональность (*напротив вверху*).

Если субдоминанту понизить, то октава или тоника станут доминантой. Так образуется квинтовый круг, где каждый новый тон представляет собой второй обертон (то есть доминанту) своего предшественника (*напротив внизу*). По обе стороны от главной доминанты C располагаются субдоминанта F и доминанта G. Когда тоника и субдоминанта звучат вместе, тоника I размывается и практически включается в субдоминанту IV. То, как мы слышим и понимаем музыку, зависит от изысканного равновесия трех компонентов тетрахорда.

Гаммы могут формироваться на основе различных базовых принципов. Гармоническая гамма состоит из трех октав обертоновой серии, C D E F♯ G A B♭ B C. В индийской музыке Сарасвати, богине музыки и науки, посвящена *рага*, в которой присутствуют 7 из этих 8 нот. Тем не менее индийские тональности расширены до 22 тонов, или *шрути*, и включают в себя синтоническую комму 81:80 (*см. с. 194*). Из этих тонов выбраны 7. Персидский лад из 17 тонов включает 7 белых клавиш фортепиано плюс по 5 черных с каждой стороны, чтобы отделить диезы от бемолей (*внизу*).

G♭ D♭ A♭ E♭ B♭ F C G D A E B F♯ C♯ G♯ D♯ A♯

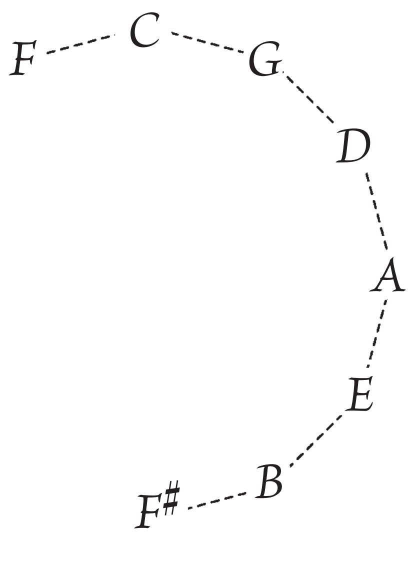


Слева: Для того чтобы продемонстрировать зависимость высоты звука от длины струны, Пифагор использовал монохорд с передвижным нижним порожком. Наиболее простыми тонами являются тоника, доминанта и субдоминанта, также известные как тетрахорд. Первые их обертоны составляют три мажорных аккорда, или трезвучия, I, IV и V (например, первые обертоны C — это C, G', C'', E''). Звучание октав сливается. Вот пример с исходным тоном C:

Аккорд I: C, E, G
Аккорд IV: F, A, C
Аккорд V: G, B, D

Комбинация этих нот в рамках одной октавы дает мажорную гамму: C, D, E, F, G, A, B, C

Справа: Для того чтобы построить мажорную гамму на основе квинтового круга, необходимо начинать с субдоминанты F. Квинтовый круг начинается с C и охватывает первые 7 нот одной октавы. Так звучит чистый лидийский лад: C D E F♯ G A B C, известный древним грекам как синтолидийский. В нем содержится «увеличенная» субдоминанта F♯. Интересно, что и в гармонической гамме (напротив), и в лидийском ладу присутствует сложный для восприятия тритон, «увеличенная кварта», известный средневековым музыкантам под названием «дьявол в музыке»



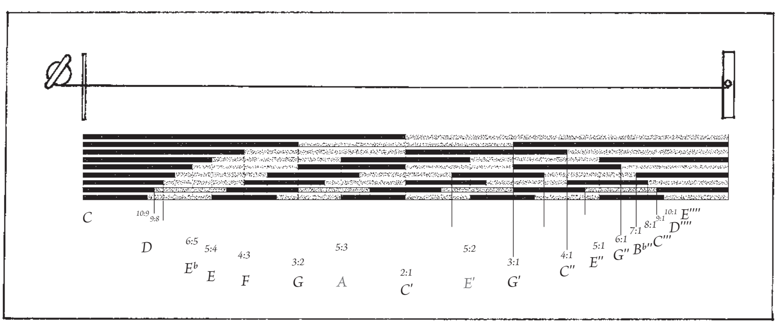
Выстраивание гармонии

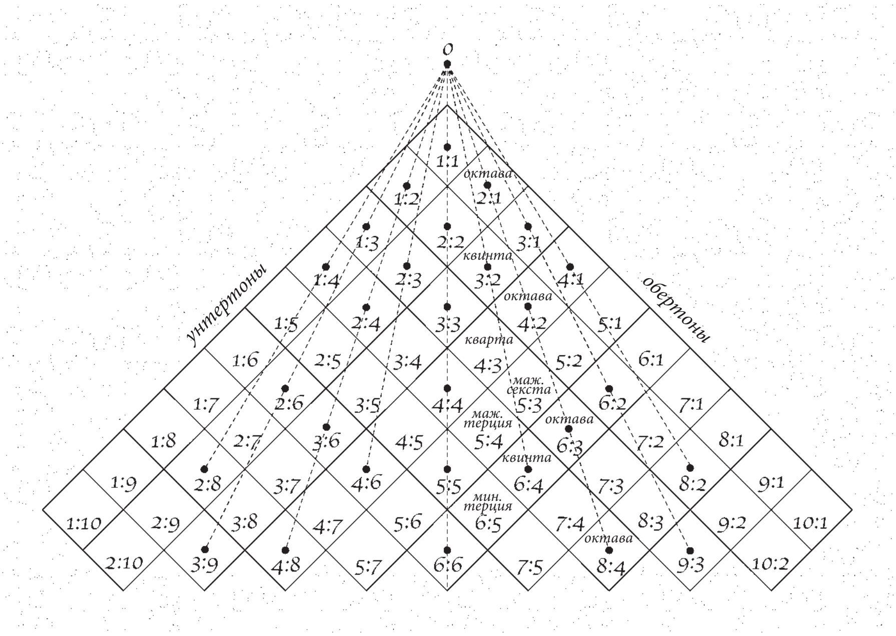
Сила тишины

Простые интервалы первичных обертонов и унтертонов можно нанести на древнюю шкалу, известную как *лямбдома* (*напротив вверху*), по названию греческой буквы λ. Некоторые интервалы имеют одинаковую величину (например, 8:4 = = 6:3 = 4:2 = 2:1), поэтому линии, проходящие через них, сходятся в загадочной точке тишины 0:0, которая расположена «за пределами схемы».

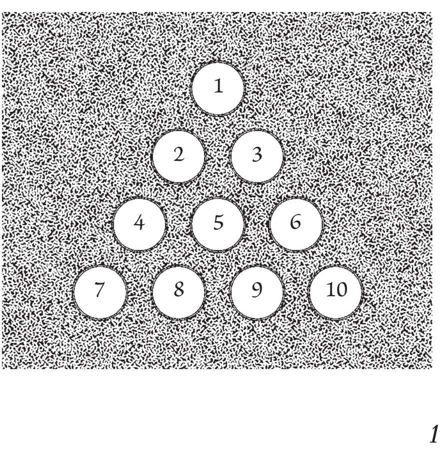
Другая наглядная схема, использовавшаяся пифагорейцами, называется *тетрактис*, треугольная фигура из 10 элементов, расположенных в 4 ряда (1 + 2 + 3 + 4 = = 10). Обычный тетрактис изображен *напротив внизу слева*. Первые 3 ряда формируют простые интервалы. В другой лямбдоме (*напротив внизу справа*) числа удваиваются сверху вниз по левой стороне и утраиваются — по правой, что создает тоны, горизонтально отделенные от соседних чистыми квинтами. Обратите внимание, какие числа следуют за троицей (1, 2 и 3) — 4, 6, 8, 9, 12, а теперь снова взгляните на рисунок *на с. 189*.

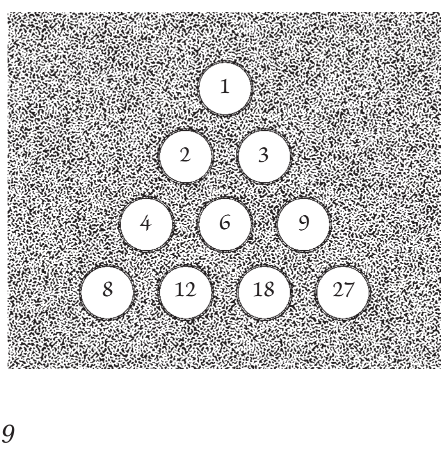
Внизу мы видим полный ряд позиций монохорда с обертонами с правой стороны и интервалами слева (*см. с. 193 и 195*).





Пифагоровы и средневековые лады, называемые трехграничными, не признают других правильных интервалов, кроме пропорций с числами 1, 2 и 3. Это отображено на лямбдоме внизу справа: каждый элемент относится к соседнему в пропорции 1, 2 или 3, так что мы можем двигаться по кругу из октав и квинт. Также здесь присутствуют квадратные ($4 = 2^2$, $9 = 3^2$) и кубические ($8 = 2^3$, $27 = 3^3$) величины. Добавьте следующий ряд — и появятся числа пифагорова лада, 19:8 64:81 4:3 3:2 27:16 16:9 2:1. Здесь присутствуют 4 квинты и 5 кварт, но ни одной чистой терции или сексты. Они появились позже, и в диатоническом ладу с его чистыми терциями (6:5:4) и в своем полифоническом и аккордовом звучании постепенно вытеснили ранние монофонические мелодии





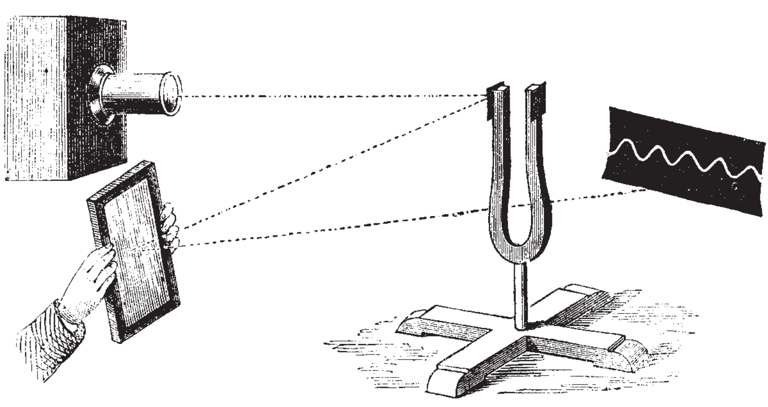
Фигуры Лиссажу

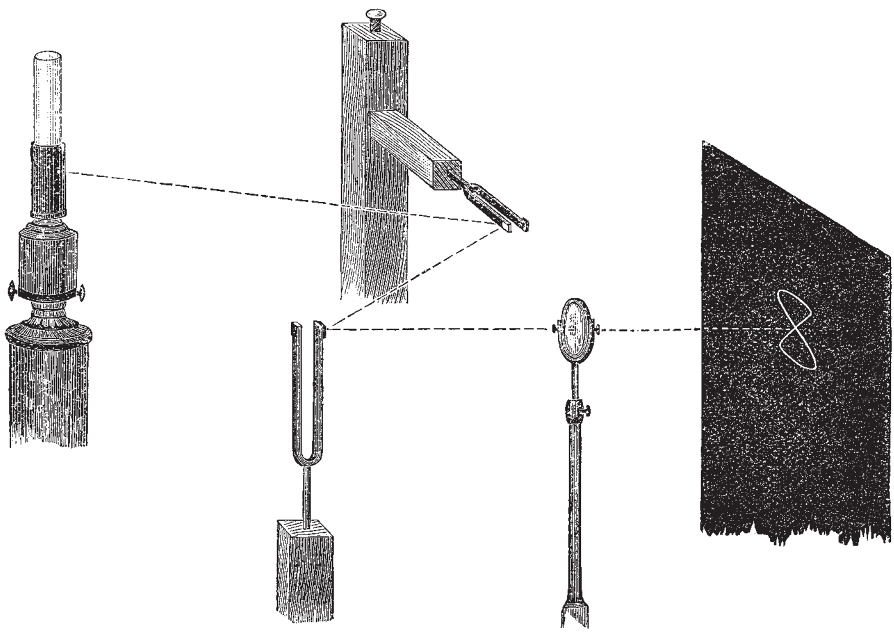
Форма звука

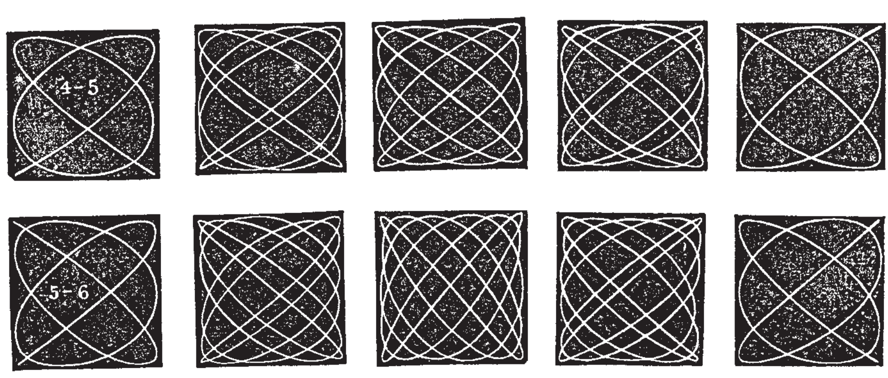
В середине XIX века французский математик Жюль Лиссажу провел эксперимент. Он закрепил на верхушке камертона зеркальце и направил на него луч света. Когда по камертону ударяли, на темном экране позади появлялась небольшая вертикальная линия, отражающая его вибрации. Если взять еще одно зеркало и быстро перенаправить световой луч в сторону, то на экране появится синусоида (*внизу*).

Лиссажу заинтересовался, что будет, если вместо перенаправления луча добавить в эксперимент еще один камертон, который будет закреплен под прямым углом к первому. Так он обнаружил, что камертоны, звучащие в простой интервал, создают на экране прекрасные фигуры, известные нам сегодня как фигуры Лиссажу.

На экране (*напротив вверху*) мы видим фигуру в форме восьмерки, иллюстрирующую интервал в октаву (2:1). *Ниже* изображены различные *фазы* мажорной и минорной терций. Фигуры Лиссажу — одни из первых попыток запечатлеть звук, и, конечно, они были очень хорошо знакомы профессору Хью Блэкберну, который изобрел гармонограф.







На экране мы видим фигуру в форме восьмерки, иллюстрирующую интервал в октаву (2:1). Ниже изображены различные фазы мажорной и минорной терций. Фигуры Лиссажу — одни из первых попыток запечатлеть звук, и, конечно, они были очень хорошо знакомы профессору Хью Блэкберну, который изобрел гармонограф

Маятник

Сохраняя время

Фундаментальный закон физики (в одной из формулировок) гласит, что любая замкнутая система, если на нее не воздействуют никакие внешние факторы, стремится к равновесию. Маятник — хороший тому пример.

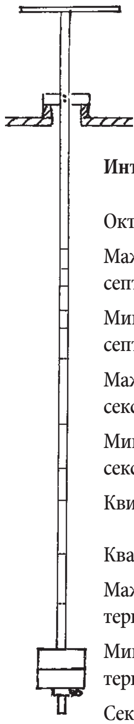
Оттянув маятник от центра, мы приводим его в состояние неустойчивости. В момент первого колебания маятник практически достигает точки, зеркально противоположной исходному положению неустойчивости. Но из-за силы трения с каждым новым колебанием он теряет все больше энергии, и в итоге маятник снова останавливается строго перпендикулярно поверхности, то есть в состоянии равновесия.

Вернемся на 500 лет назад, во времена Галилея. Он наблюдал за раскачивающейся в Пизанском соборе люстрой и понял, что частота колебаний маятника зависит от его длины: чем длиннее маятник, тем меньше частота. Значит, частоту колебаний можно изменять, подвешивая одинаковый груз на разной высоте. Крайне важно также то, что по мере затухания колебаний маятника их частота остается прежней.

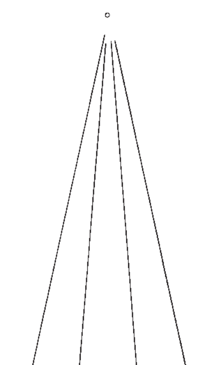
Таким образом, маятник — это отличный способ запечатлеть колебания музыкального тона, хотя и в сильно замедленном виде, чтобы его мог воспринять человеческий глаз. В простом гармонографе используются два маятника: один с грузом, подвешенным в самой низкой позиции, а второй — с возможностью вертикального перемещения груза, для того чтобы создать необходимую пропорцию.

Как мы вскоре убедимся, гармонограф совмещает эти 2 разнонаправленных колебания в одном рисунке, точно так же как 2 музыкальных тона производят единый сложный звук.

Длину маятника для иллюстрации определенного тона легко вычислить математически, так как частота его колебаний находится в обратно пропорциональной зависимости от квадратного корня длины. Значит, если частота в пределах октавы удваивается, то длина маятника уменьшается в четыре раза. В таблице приведены числовые значения для маятника длиной 80 см, этого вполне достаточно для гармонографа. Для начала работы с гармонографом какие-либо другие измерения вам вряд ли понадобятся. Обратите внимание, что длина маятника отсчитывается от точки опоры до середины груза



Интервал	**Примерная нота**	**Диатонический интервал**	**Длина, см**	**Частота, c^{-1}**
Октава	C’	2:1	20	66.0
Мажорная септима	B	15:8	22.8	62.8
Минорная септима	B^7	9:5	24.7	59.4
Мажорная секста	A	5:3	28.8	55.8
Минорная секста	G^8	8:5	31.2	53.6
Квинта	G	3:2	35.6	50.3
Кварта	F	4:3	45.0	44.7
Мажорная терция	E	5:4	51.2	41.9
Минорная терция	E^7	6:5	55.6	40.2
Секунда	D	9:8	63.2	37.7
Полутон	C^8	16:15	70.3	35.7
Унисон	C	1:1	80	33



Если отвести маятник в сторону, а затем отпустить, его груз будет стремиться к центру Земли, при этом постепенно ускоряясь. По мере затухания колебаний коэффициент ускорения, а с ним и скорость движения падает, но остается в той же пропорции по отношению к пройденному расстоянию. В результате период (время, необходимое для совершения двух колебаний), то есть частота колебаний, остается неизменным. На рисунке слева частота колебаний x и y одинакова. Математическая формула маятника приведена на с. 383

Два гармонографа

Поперечный и вращающийся

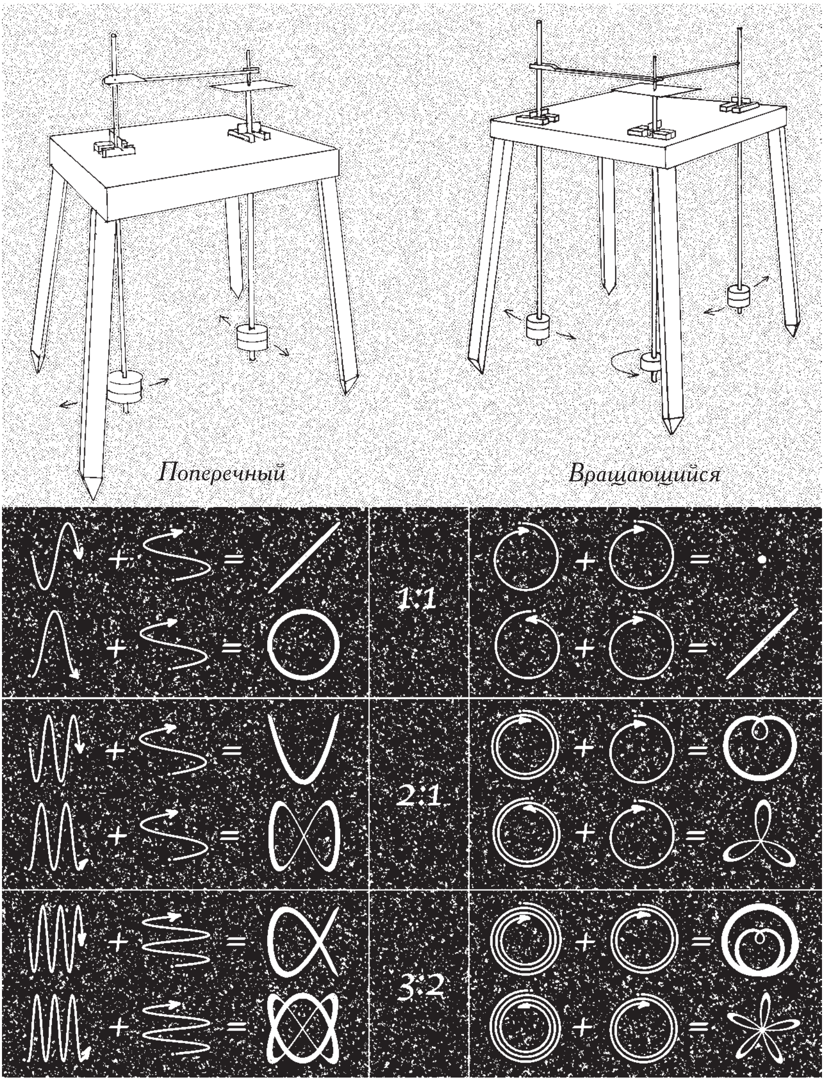
В простейшей версии гармонографа два маятника подвешиваются сквозь отверстия в столе, при этом траектории их колебаний находятся под прямым углом друг к другу. На древке одного маятника закрепляется лист бумаги, а на втором — ручка.

Во время колебаний маятников ручка рисует на бумаге узор их совместного движения (*напротив слева*). На первой схеме оба маятника имеют одинаковую длину, на других рисунках положение груза на одном из них меняется. Так получаются изображения гармонических интервалов.

Используя три маятника, два круговых или *вращающихся* движения можно совместить, в результате чего получаются восхитительные рисунки (*напротив справа*). Два одинаковых маятника, как и прежде, качаются под прямым углом друг к другу, но теперь оба они соединены с ручкой, вследствие чего она постоянно описывает простой круг.

Расположенный под пишущей ручкой третий маятник с изменяемой длиной приподнят на карданных шарнирах, знакомых любому, кто хоть раз пользовался морским циркулем. Третий маятник заставляет стол вращаться по второму кругу, и ручка зарисовывает одновременно два круговых движения.

Существует две вариации использования этого типа гармонографа: два круговых движения совершаются в одинаковом направлении (согласованно) или в противоположных (встречное движение). В результате получаются поистине потрясающие узоры с самыми разнообразными характеристиками (*см. приложения, с. 384, 385*).



Вверху: два гармонографа и некоторые запечатленные с их помощью простые интервалы. Слева — версии простого поперечного гармонографа (открытая и закрытая фазы); справа — трехмаятниковый вращающийся гармонограф и его фигуры (согласованные и встречные). Также см. изображение двуэллипсоидного гармонографа на с. 387

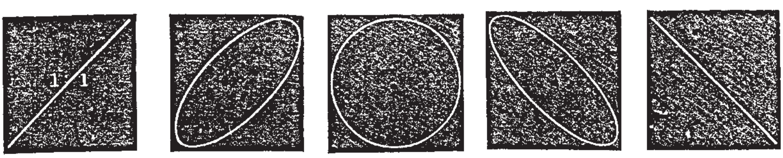
Простой унисон 1:1

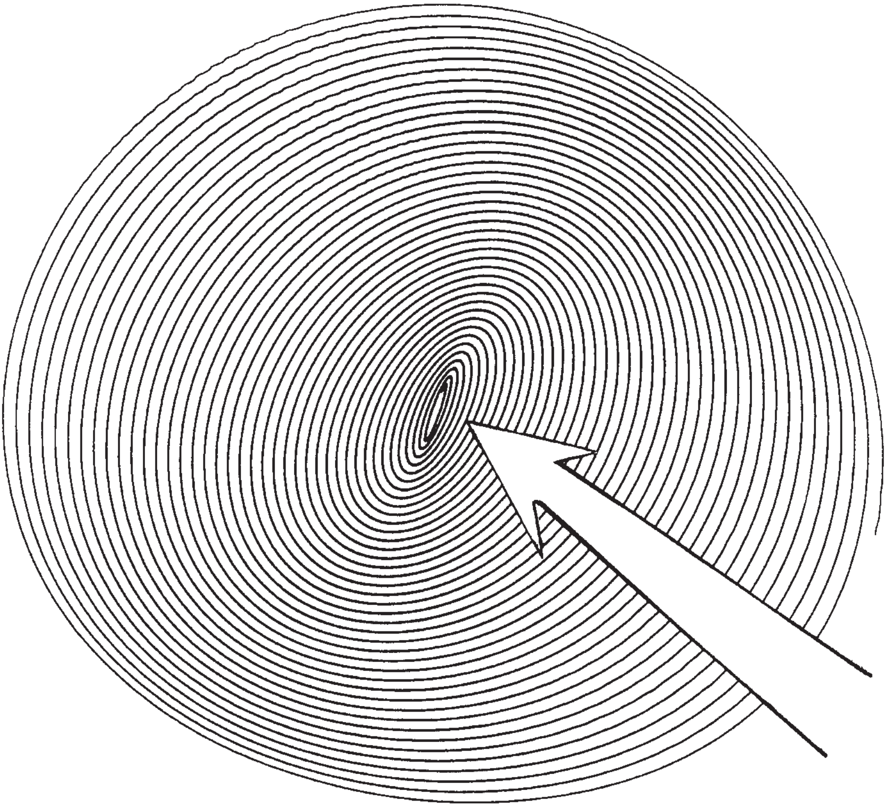
И стрела времени

Простейший узор гармонограф рисует, когда оба маятника имеют одинаковую длину, а стол неподвижен. Не опуская ручку на поверхность бумаги, маятники отводят в их высшую точку. Сначала отпускают первый. Когда он окажется в своей срединной позиции, отпускают второй. Затем опускают ручку на бумагу. Она движется по кругу, формируя фигуру в виде спирали.

Если два маятника отпустить одновременно, то в результате получится прямая диагональная линия, «закрытая» *фаза* гармонии, противоположность круговой, «открытой» фазе. В промежуточной фазе появляются узоры эллиптической формы (*внизу*).

Затухание колебаний маятников гармонографа очень точно иллюстрирует постепенное затихание пения струны музыкального инструмента. Такое изображение (*напротив*) можно назвать графическим воплощением так называемой стрелы времени, где неизменное значение частоты указывает на бесконечный характер естественного закона. Формы узоров зависят от характеристик естественного процесса затухания и заданной частоты колебаний. Музыка, как и весь мир, строится по неизменным математическим законам, развертывающимся во времени и тем самым создающим сложную и разнообразную красоту.





Естествоиспытатель Артур Эддингтон (1882—1944) очень метко назвал неумолимое изменение, заданное временной асимметрией (прежде-сейчас-после), стрелой времени. В ходе всеобщего процесса естественной деградации запас «полезной» энергии убывает в соответствии с вечными физическими законами, выраженными в математических формулах. И именно из взаимодействия этих непреложных законов со стрелой времени появляется удивительно изменчивый мир, полный красоты. Маятник, приведенный в состояние дисбаланса, стремится снова обрести равновесие. А как мы уже поняли, наша Вселенная — это такая же «закрытая система», как маятник. Так мы и раскачиваемся вместе с ней навстречу темному, холодному и бесконечному равновесию. А по ходу движения «полезная» энергия нашего мироздания формирует временные структуры и события и трансформируется в «бесполезную» и навсегда потерянную

Почти в унисон

Поперечные фазы и ритмические частоты

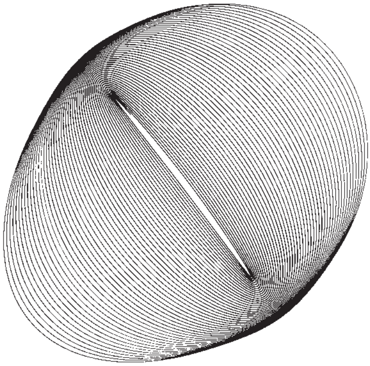
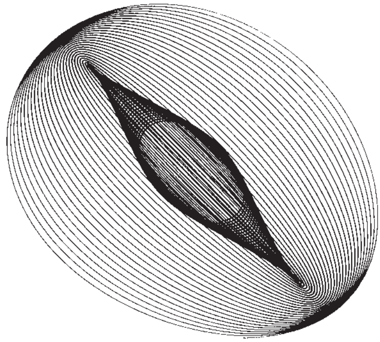
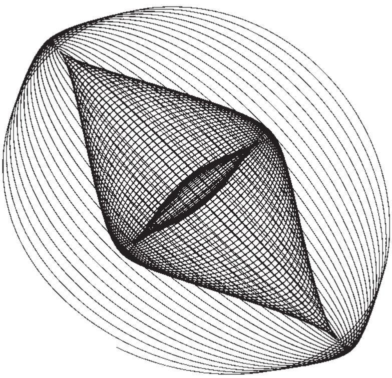
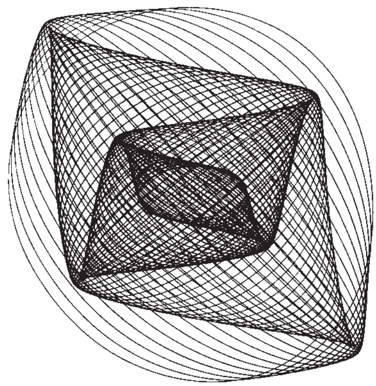
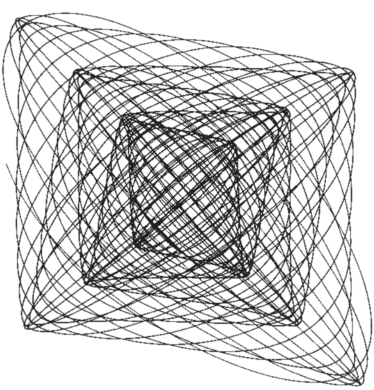
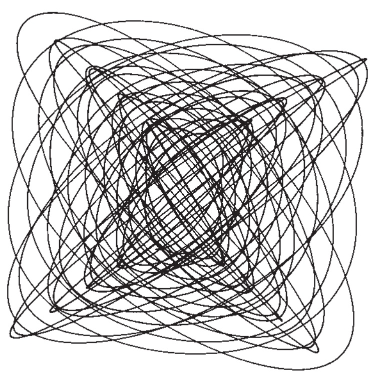
Особую прелесть узоры гармонографа обретают, когда мы слегка отходим от идеальной гармонии. Этот принцип широко распространен в природе и в работах многих талантливых художников. В таком едва уловимом отступлении от идеала есть определенный шарм.

Вот пример из области музыки. Когда две ноты звучат почти в унисон, почти не заметная разница между их частотами придает мелодии глубину, характер. Два язычка рояля, которые воспроизводят одну ноту, звучат на несколько различающихся частотах. Такое отклонение от унисона рождает «ритм», нежные трели или пульсирующий звук.

Установите грузы маятников в положение, соответствующее унисону, а затем слегка подвиньте подвижный груз. Тогда вращение маятников в открытой фазе создаст рисунок в форме круга, постепенно переходящего в эллипс и наконец в линию. Если после этого не прекращать работу прибора, линия начнет расширяться в эллипс, потом в круг, а затем снова в линию и т. д. Очевидно, инструмент проходит фазы, показанные *на с. 206*.

Рисунки *на странице напротив* получаются, если поэтапно менять длину одного из маятников. Повторяющийся узор отражает «частотный ритм», который возрастает по мере увеличения разницы между высотой звуков. В итоге рисунок становится похожим на небрежные каракули, что очень точно отражает природу диссонанса. Хотя даже в этом случае в узоре остается намек на определенный ритм.

Большинство людей отмечает увядание визуальной красоты гармонии примерно в тот же момент, когда звуковая гармония становится для них диссонансной.

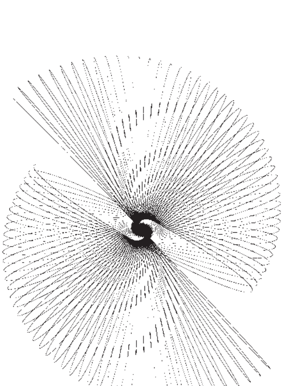
Вращательный унисон

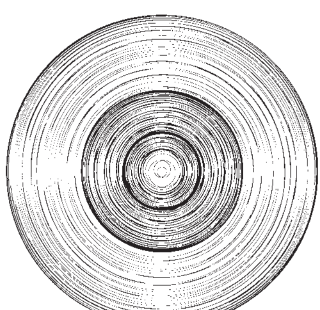
Яйца и ракушки

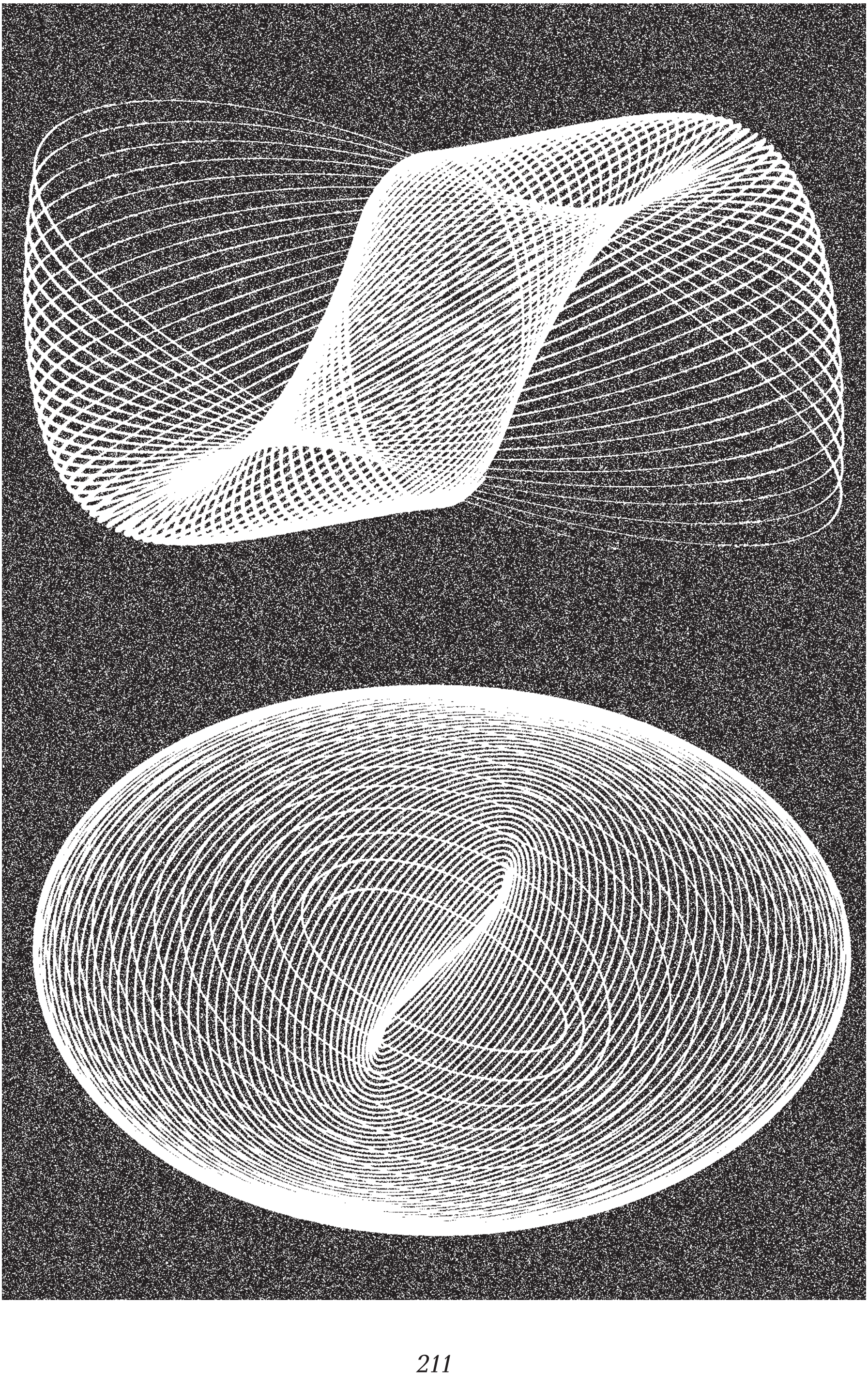
Поначалу унисон кажется довольно скучным — всего лишь прямая линия на бумаге. В варианте согласованного движения он выглядит чуть более выразительно, но все равно является лишь точкой, стремящейся по спирали к центру.

Тем не менее, добавив легкий диссонанс, мы получим поистине королевскую награду. Встречные колебания маятников гармонографа порождают ряд прекраснейших, часто похожих на ракушку, фигур. Для получения наилучшего результата уберите ручку с листа бумаги, до того как маятники достигнут равновесия.

Встречные колебания могут рисовать также необычные сферические или яйцеобразные фигуры. Чтобы получить такое «яйцо», нужно опустить ручку, когда она находится посередине. Тогда она пойдет по спирали на внешний круг и закончит чертеж до того, как маятник замедлится. Линии вдоль периметра рисунка постепенно сближаются, поэтому рисунок кажется трехмерным.







Поперечная октава 2:1

Фигуры в виде восьмерки и крыльев

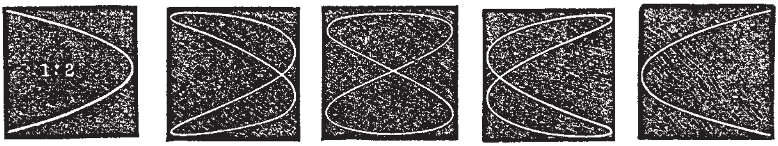
После унисона стоит поэкспериментировать с октавой. Здесь есть техническое затруднение. Регулируемый маятник должен быть очень коротким, и из-за большой силы сопротивления он быстро останавливается. Секрет в том, чтобы утяжелить верхушку нерегулируемого маятника и таким образом его замедлить (*см. с. 183*). Тогда длину регулируемого маятника можно сделать больше.

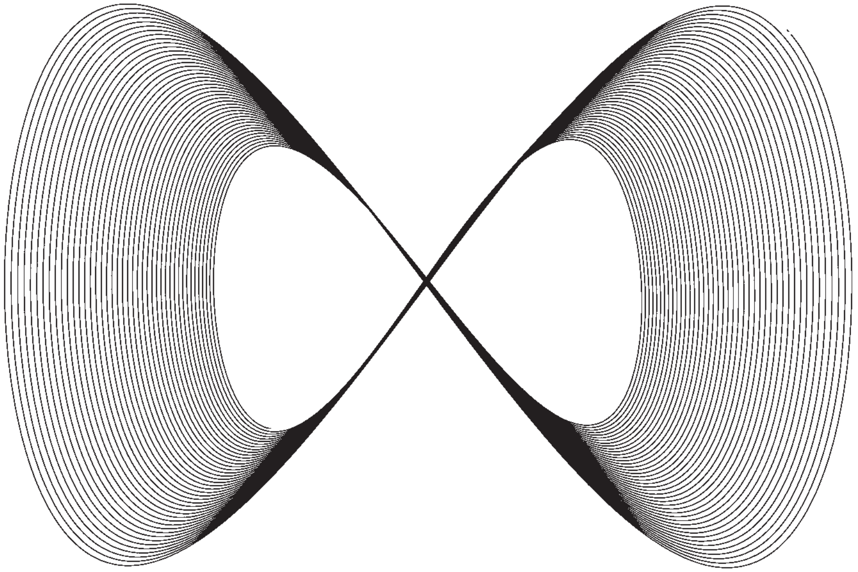
К сожалению, это значит, что для октавы и других интервалов, где один маятник движется гораздо быстрее другого, не существует математических измерений, и правильное положение придется искать методом проб и ошибок.

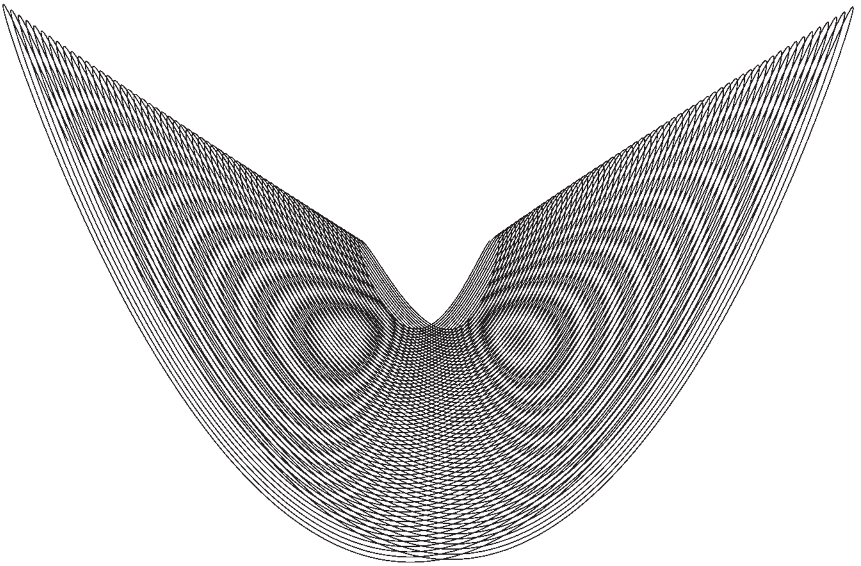
Если один маятник движется вдвое быстрее второго и его траектория находится под прямым углом к траектории первого маятника, то октава в открытой фазе принимает форму восьмерки (точное совпадение), уменьшающейся по мере затухания колебаний.

Если оба маятника отпустить одновременно (закрытая фаза), то ручка нарисует чашеобразную линию, которая по мере проявления рисунка расправляется в форме крыльев. Небольшая разница в настройках инструмента — и совсем разный результат.

Октава — это первый обертон (*см. с. 192*).







Вращательная октава 2:1

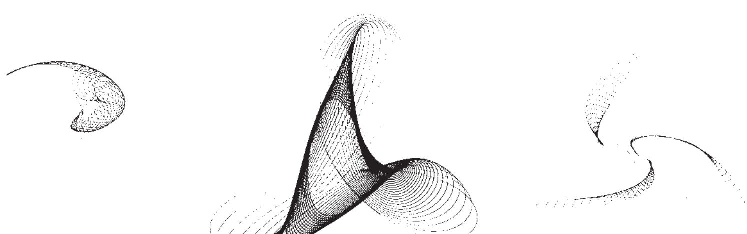
Сердца и треугольники

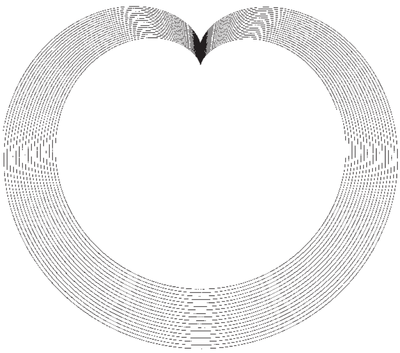
Гармонограф, настроенный на воспроизведение пропорции 2:1, рисует самые прекрасные свои фигуры — простые, но изящные и часто неожиданные. Помните: все, что здесь происходит, это лишь результат объединения двух вращательных движений — одно вдвое быстрее другого.

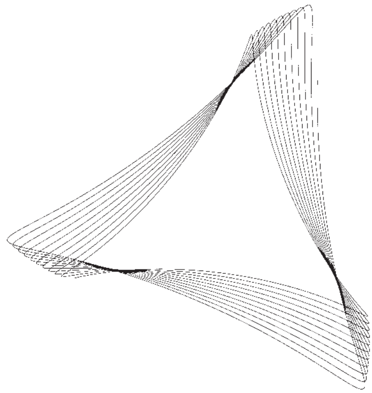
Встречное движение рождает различные вариации форм в виде трилистников (*напротив справа*). Чтобы получить треугольник или пирамиду, нужно задать меньшую *амплитуду* тому маятнику, который вращается быстрее.

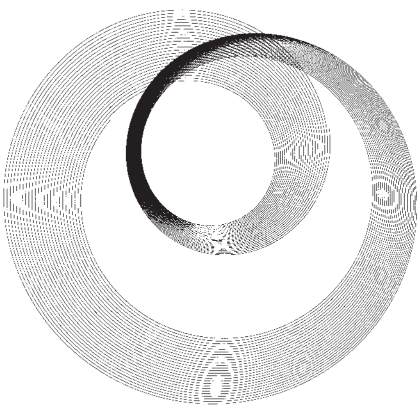
Октава в варианте согласованного движения выглядит как фигура в форме сердца с простой внутренней петлей (*внизу слева и напротив в левой колонке*). Эти фигуры прекрасно вписываются в древнейшую теорию о музыке мироздания, поскольку именно таким образом выглядит движение Нептуна относительно Урана и наоборот. Так происходит, потому что эти планеты вращаются вокруг Солнца согласованно, Уран — за 84 года, а Нептун — за 165 лет, составляя примерно октаву. Меркурий и вовсе поет чистую октаву сам по себе, так как солнечные сутки на планете длятся два года (*больше подобных соотношений см. в Книге VI этого издания*).

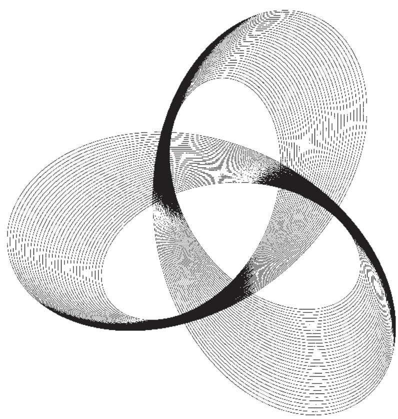
Легкое расхождение в пропорции этого интервала заставляет узоры вращаться (*напротив в нижнем ряду*).

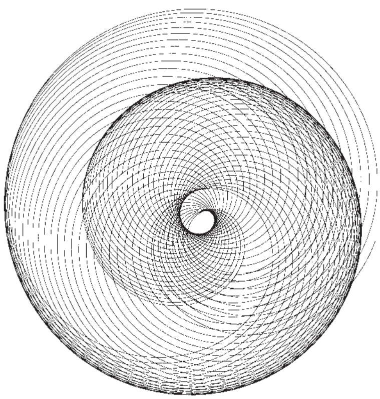


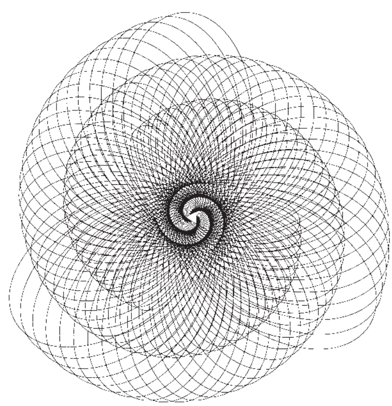












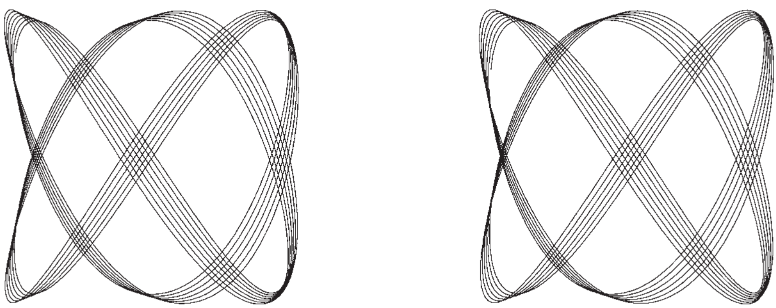
Поперечная квинта 3:2

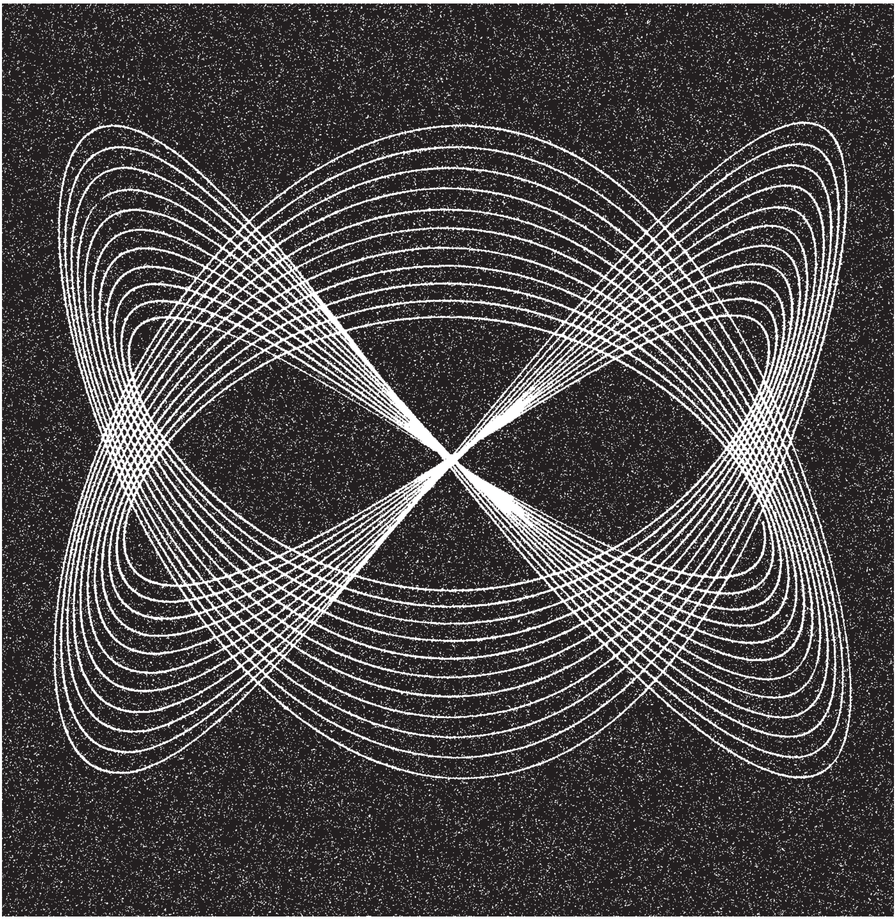
И второй обертон 3:1

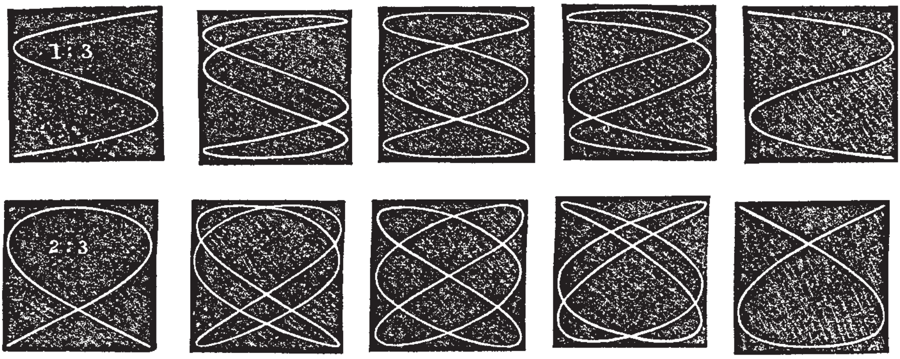
Теперь стоит приглядеться к гармонии квинты. Она является переходной ступенью от простоты унисона и октавы к более сложным гармониям, о которых мы еще будем говорить.

Напротив изображена квинта в открытой фазе, в ее узоре 3 петли по горизонтали и 2 по вертикали. Количество петель в каждом направлении дает пропорцию 3:2. Возвращаясь назад, вспомним, что количество петель октавы две и одна, а рисунок, соответствующий унисону, — одна-единственная петля. Так, общее для любых поперечных рисунков гармонографа правило: если гармония появилась случайно в результате экспериментов, вы всегда можете точно определить интервал, просто посчитав число петель в двух направлениях.

Квинта также может звучать как 3:1, второй обертон, доминанта на октаву выше (*см. открытую и закрытую фазы 3:1 на с. 187*). Для того чтобы запечатлеть интервалы за пределами одной октавы, может потребоваться двухэллипсоидный гармонограф (*см. с. 387*). *Два рисунка внизу* — стереограмма, постарайтесь увидеть этот узор в объеме.






1 : 3
2 : 3

Вращательная квинта 3:2

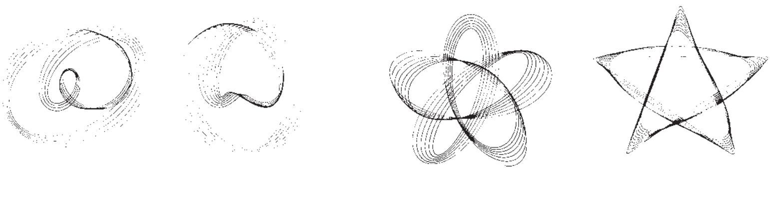
Сердца и пятерки в круге

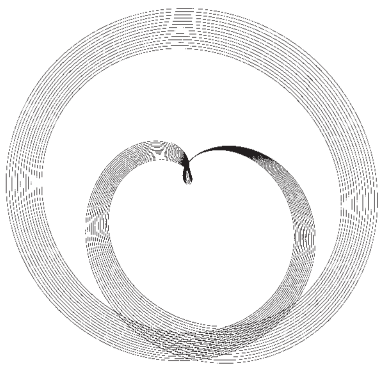
«Громкость» музыкального тона отражается на рисунках гармонографа при помощи *амплитуды*, то есть относительных размеров двух круговых движений. Во вращательных рисунках этот параметр даже важнее, чем фаза, которая просто задает ориентацию всего узора на бумаге.

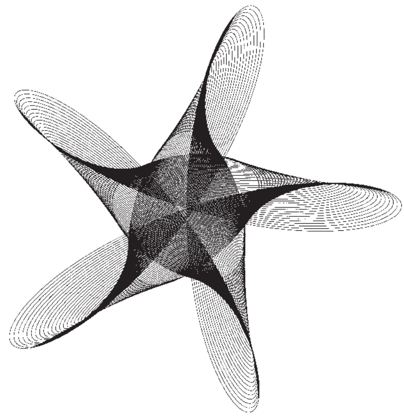
Третий рисунок внизу изображает вращательную квинту в согласованном движении. На самую высокую частоту здесь приходится самое широкое колебание маятника. *Крайний справа рисунок внизу* нарисован во встречном движении. При одинаковой амплитуде все линии проходят через центр (*см. таблицу на с. 385*).

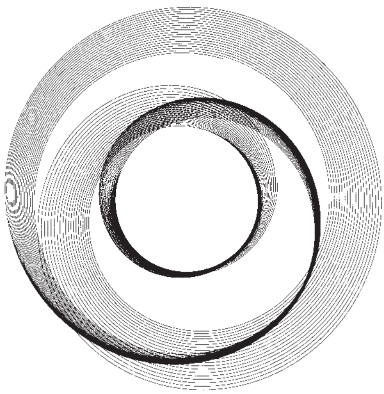
Четыре верхних рисунка *на странице напротив* показывают вращательные формы 3:2 в согласованном движении слева и встречном — справа. В рисунках *во втором ряду* присутствует легкий диссонанс, из-за чего фигуры скручиваются. Два *нижних* рисунка взяты из книги 1908 года «Гармонические вибрации». На них показан второй обертон 3:1, субдоминанта на октаву выше (3:1 = 2:1 × 3:2), согласованное движение слева и встречное — справа.

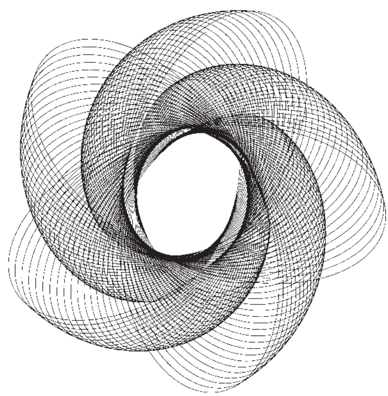
При согласованном движении количество завитков в центре равно разнице между двумя числами пропорции, которая составляет интервал. Так, в согласованных узорах для основных музыкальных интервалов 2:1, 3:2, 4:3, 5:4 и 5:6 в центре всего один завиток в форме сердца.

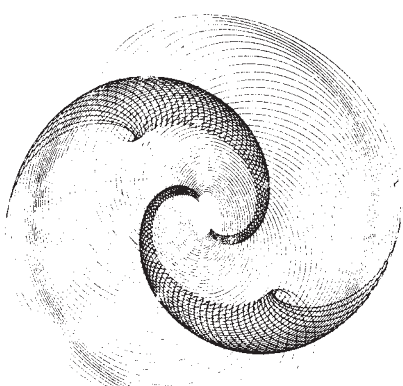


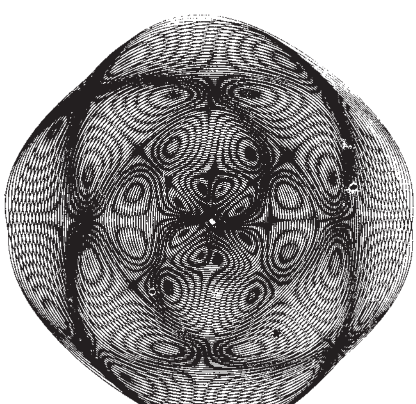












Кварта 4:3

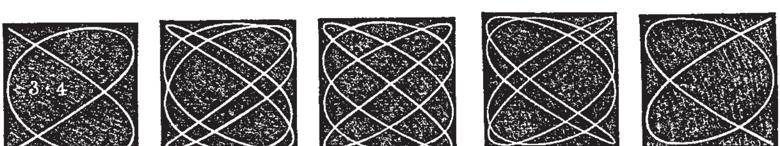
С терцией, секстой и септимой

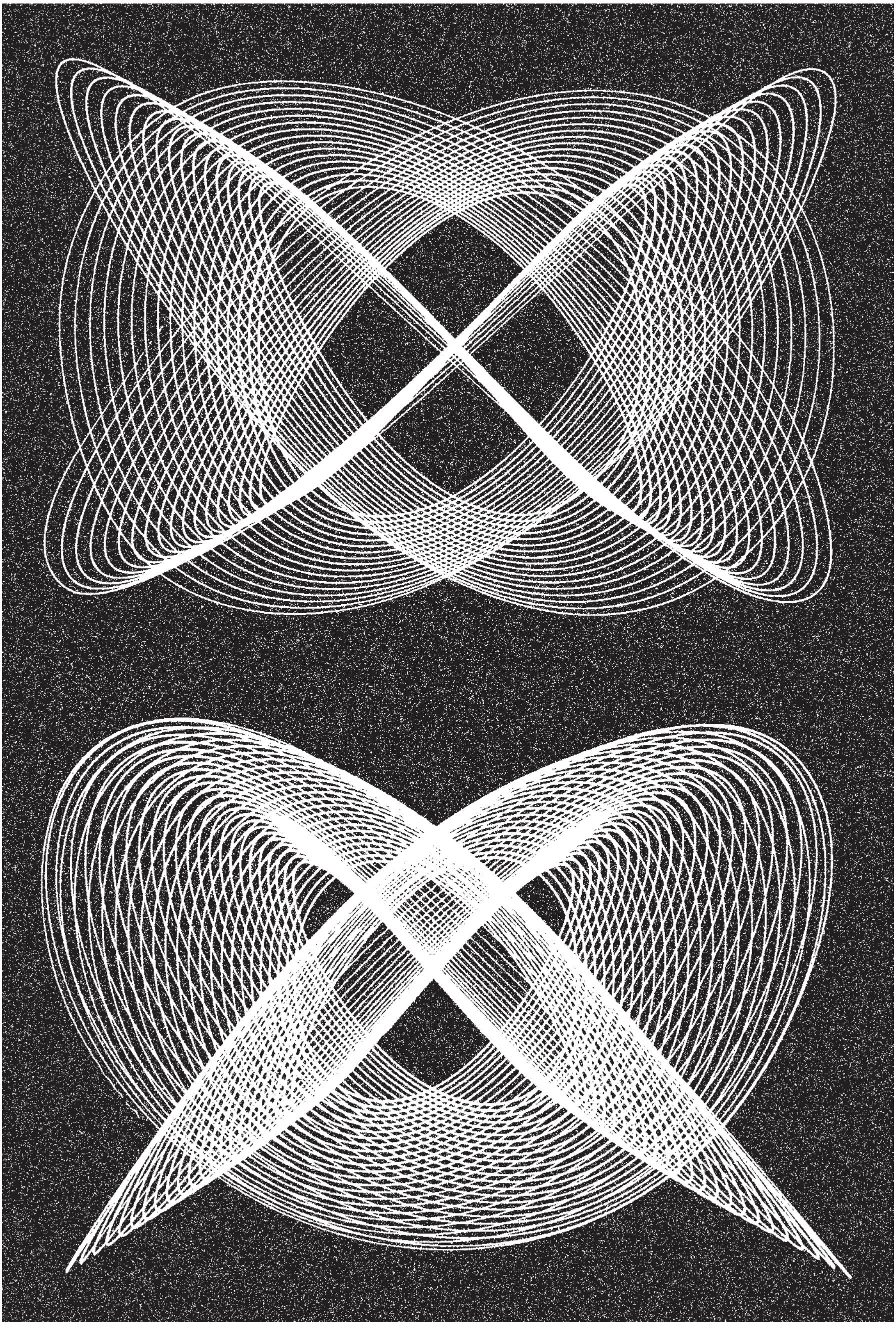
С этого момента у вас не останется сомнений в том, что визуальное изображение каждой гармонии очень точно передает особое, присущее именно ей звучание. Унисон звучит просто и утвердительно. Октава размашиста и экспрессивна, а квинта, хотя все так же мило проста, но уже более элегантна.

Начиная с кварты узор становится более сложным, хотя ее структура распознается довольно легко и посчитать петли не составляет никакого труда. *Верхний рисунок напротив* показывает кварту в открытой фазе, *нижний* — в закрытой. В линиях кварты видна изысканная сложность, а некоторые узоры в закрытой фазе или с добавлением легкого диссонанса получаются странными и даже экзотическими.

С появлением чистой терции в диатоническом строе возрастает комплексность. Мажорная терция (5:4) располагается ниже кварты, интервал между ними называется *диатоническим полутоном* и вычисляется как 4:3 / 5:4 = 16:15. Кварта и мажорная терция (4:3 × 5:4) создают *мажорную сексту*, 5:3, на минорную терцию (6:5) ниже октавы и на минорный тон (10:9) выше квинты. Подобным образом кварта и минорная терция (4:3 × 6:5) создают *минорную сексту* (8:5), а мажорная терция (5:4) ниже октавы и на полутон (16:15) выше квинты.

Квинта и мажорная терция (3:2 × 5:4) образуют *мажорную септиму* 15:8, в то время как квинта и минорная терция (3:2 × 6:5) составляют *минорную септиму* 9:5. Эти интервалы являются элементами диатонического, или *натурального* строя.





Другие гармоники

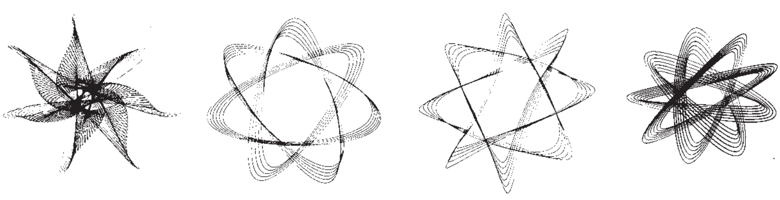
Семь пределов и пропорции высших чисел

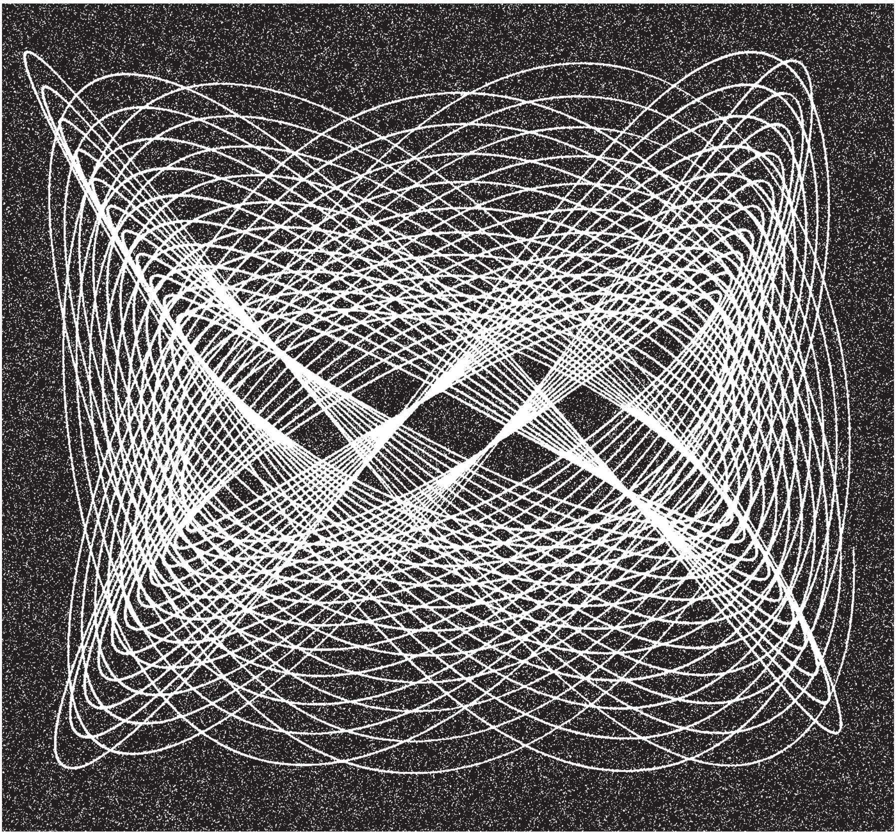
По мере увеличения чисел в пропорции становится практически невозможно отличить одну гармонию от другой с первого взгляда. Теперь нам придется очень внимательно считать петли и вглядываться в переплетение нитей узора. Типичный пример такого интервала 7:5 показан на рисунке *напротив вверху*.

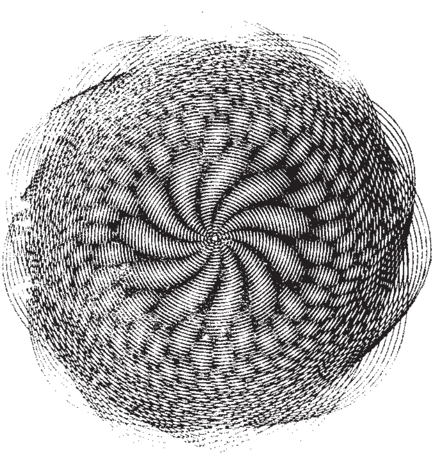
Вращающийся гармонограф рисует ряд узоров, постепенно усложняющихся в зависимости от относительной частоты, амплитуды и направления вращения. При встречном движении маятников общее количество петель равно сумме двух чисел, составляющих пропорцию интервала. При согласованном движении утолщения поворачиваются внутрь, поэтому их количество, напротив, равно разнице между двумя числами пропорции.

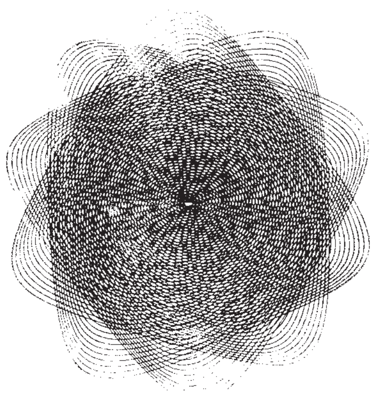
Узоры внизу показывают кварту 4:3 в согласованном движении, еще одну кварту, мажорную сексту (5:3) и мажорную терцию (5:4). Узоры, показанные *напротив внизу*, были нарисованы около 100 лет назад. Это чистая ундецима 8:3 (октава плюс кварта) и интервал 7:3 из джазовой настройки предела 7 (в этой книге мы не будем касаться данной темы).

Две октавы и мажорная терция (4:1 × 5:4) соответствуют 5:1, то есть четвертому обертону, который отличается от четырех квинт $(3:2)^4$ на знакомый нам интервал 80:81, иначе называемый синтонической коммой (*см. с. 194*). В *чистом строе*, популярном во времена Ренессанса, это расхождение было выравнено в угоду терциям и секстам за счет квинты, чей интервал слегка сдвинули до $5^{1/4}$ или 1,4953.









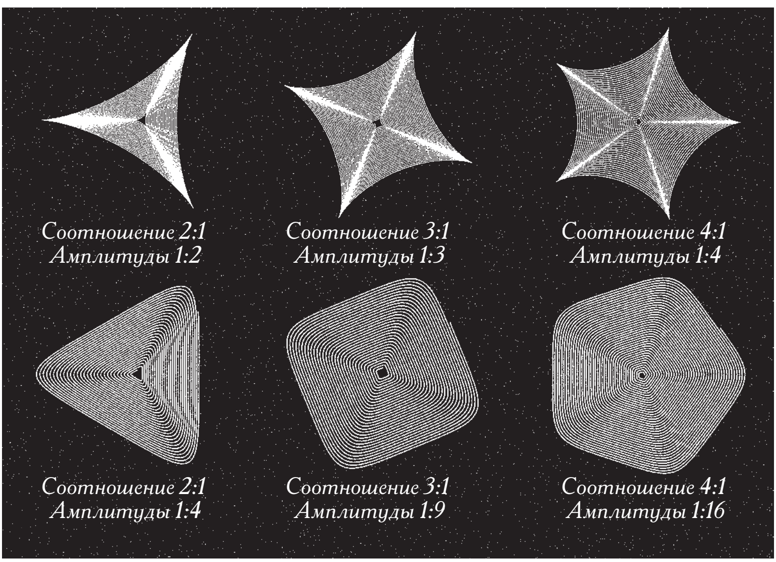
Амплитуда

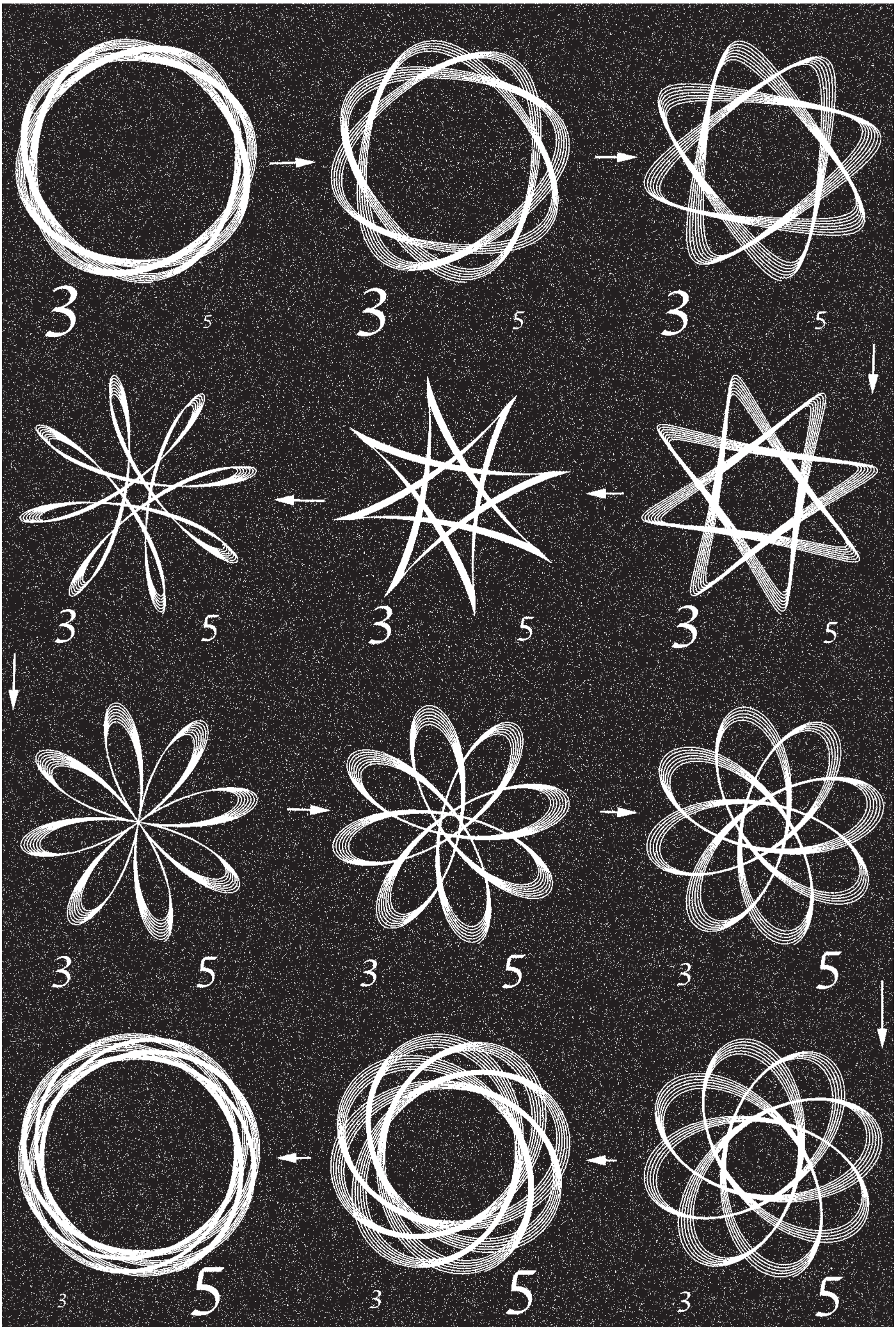
Круги, многоугольники, цветы и другие окружности

Множество вариаций рисунков можно получить, если изменять различные параметры вращающихся маятников. *Напротив* мы видим изображения мажорной сексты (5:3), они соответствуют различным комбинациям уровней громкости нижней и верхней нот интервала. Если две ноты звучат одинаково громко, то все линии проходят через центр (*см. с. 386, 387*). Обратите внимание, что последовательность несимметрична.

Внизу показаны 3 первых обертона. «Шипастые» фигуры получаются в результате инверсии амплитуд, полигоны — в результате их возведения во вторую степень.

Если вы когда-нибудь забавлялись со спирографом, то знаете, что гармонию задает соотношение размеров зубчатых колесиков, а вот узор формируется благодаря амплитуде, то есть дырочке, в которой вы расположите ручку или карандаш.




3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5

Проблемы настройки

Пифагорова комма

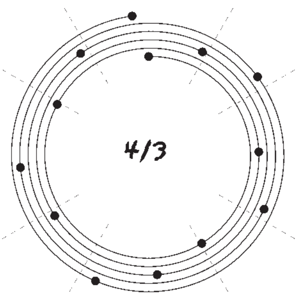
Оставим на время рисунки гармонографа и вернемся к теории музыки. Вы наверняка уже заметили, что музыкальные интервалы не всегда согласуются друг с другом. Самый известный пример касается взаимодействия между октавой и чистой квинтой (3:2).

На рисунке напротив в центре исходная нота звучит в центре, в точке 0, затем ее частота поднимается каждый раз на квинту выше, что рождает последовательность C, G, D, A, E и т. д. (*пронумерованы напротив, каждый виток спирали означает октаву*). После 12 квинт мы минуем 7 октав, но на рисунке видно, что мы слегка превысили необходимое количество тонов. Математически это объясняется так: $(^3/_2)^{12} \approx 129{,}75$, в то же время $(2)^7 = 128$. Это расхождение получило название *пифагорова комма*. Она примерно равна 74:73, или 1,013643.

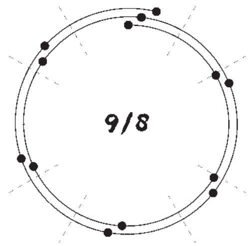
Если вы продолжите эту спираль, то в конце концов увидите, что 53 чистые квинты (или *Lü*) практически точно соответствуют 31 октаве. К слову сказать, китайцы обнаружили это много лет назад. Первые 5 квинт определяют расположение черных клавиш фортепиано и структуру восточного *пентатонного* звукоряда (*см. с. 272 и 380*).

Маленькие рисунки *напротив* демонстрируют повторяющиеся последовательности мажорной терции (5:4), минорной терции (6:5), кварты (4:3) и целого тона (9:8) в инвариантной октаве.

После всесторонней демонстрации гармоничной взаимосвязи чисел вы в полном праве были ожидать, что музыкальная система выглядит, как четко структурированное целое. Но она таковой не является. Эти небольшие расхождения представляют собой отражение мира приближенной симметрии, часть всеобъемлющей теории сущего. Может быть, поэтому легкий диссонанс часто более прекрасен, чем чистый тон?

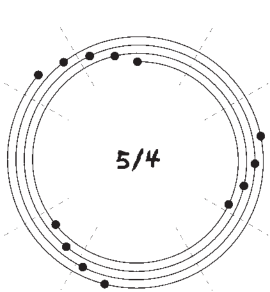


Чистая кварта

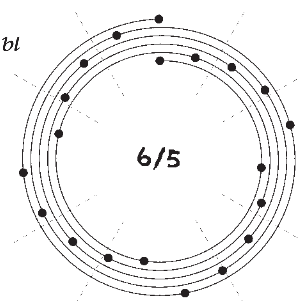


Главные тоны

Чистые квинты



Мажорные терции



Минорные терции

Равномерная темперация

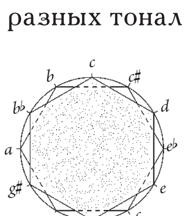
Легкая смена тональности

Хотя ранние системы настройки позволяли играть многие чистые гармонии, в их рамках было весьма сложно перейти из одной тональности в другую. Для этого требовалось в буквальном смысле переместиться в иную гамму (*см. с. 382*). Музыкантам часто приходилось перенастраивать свои инструменты или использовать дополнительные ноты, зарезервированные для специфических гамм (классический индийский строй использовал 22 ноты).

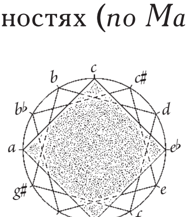
В XVI веке был изобретен новый способ настройки, который перевернул западный музыкальный мир и в большинстве случаев используется в наши дни. Октава здесь разделена на 12 фиксированных *равных* интервалов, где каждый *хроматический полутон* в 1,05946 раз выше соседнего ($2^{1/12}$, приблизительно 18:17).

12 нот равномерно распределены по кругу *на схемах внизу*. 6 (пониженных) целых тонов составляют октаву как 4 (пониженные еще сильнее) минорные терции или 3 (повышенные) мажорные терции. Пифагорова комма исчезает вместе со *всеми* чистыми интервалами, кроме октавы, — этот умный трюк позволяет с легкостью менять тональность. Такой строй слегка «фальшив», но мы слышим его каждый день.

Трезвучие — это аккорд из трех нот. *Напротив вверху* мы видим мажорные и минорные трезвучия с нотой C, в тональности C. Используйте карту (*напротив внизу*), чтобы разобраться в море равномерной темперации, и постройте какое-нибудь 3—4—5 трезвучие (аккорд из трех нот) в трех разных тональностях (*по Малкольму Стюарту*).

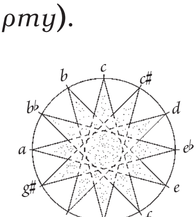


Целые тоны и септимы

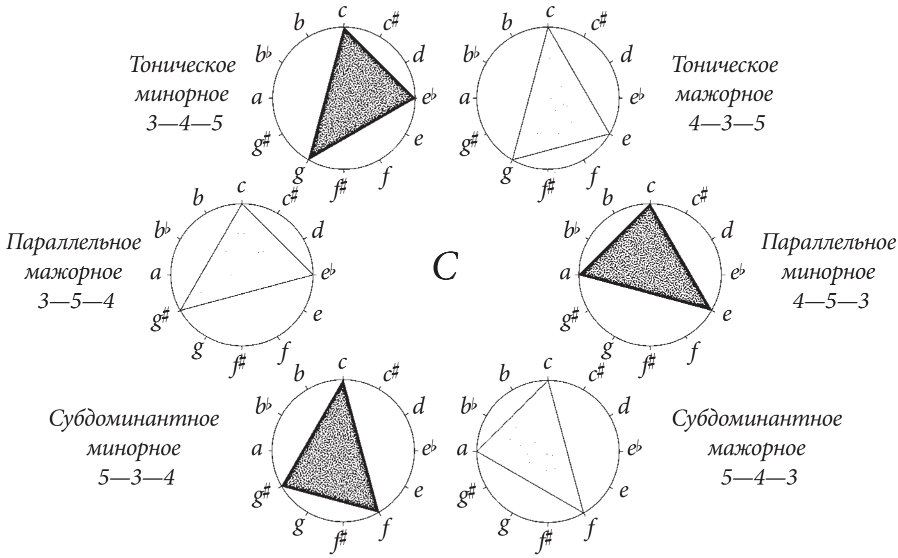


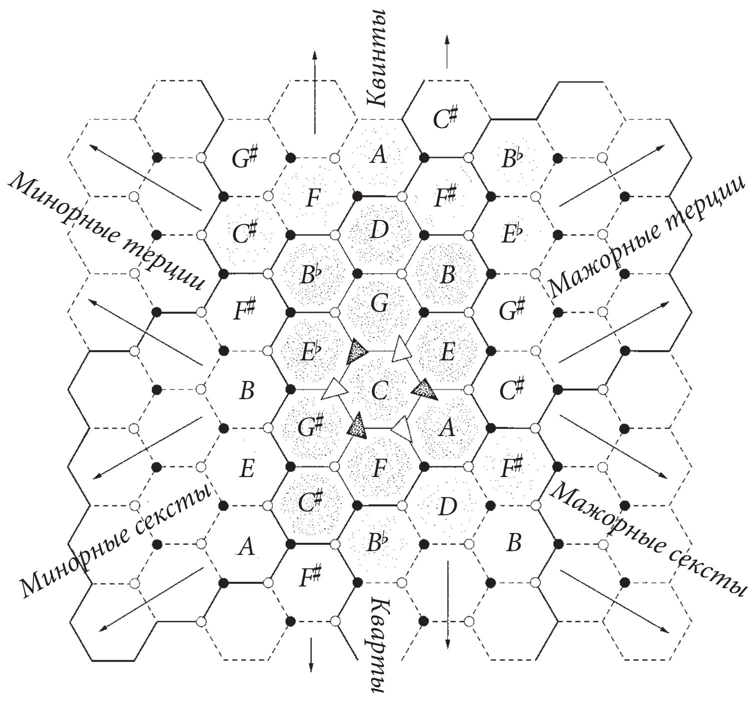
Минорные терции и мажорные сексты

Минорные терции и минорные сексты



Квинты и кварты


Тоническое
минорное
3—4—5
Тоническое
мажорное
4—3—5
Параллельное
мажорное
3—5—4
C
Параллельное
минорное
4—5—3
Субдоминантное
минорное
5—3—4
Субдоминантное
мажорное
5—4—3


Квинты
Минорные терции
Мажорные терции
Минорные сексты
Мажорные сексты
Кварты

Калейдофон

Завитки вибрирующего стержня

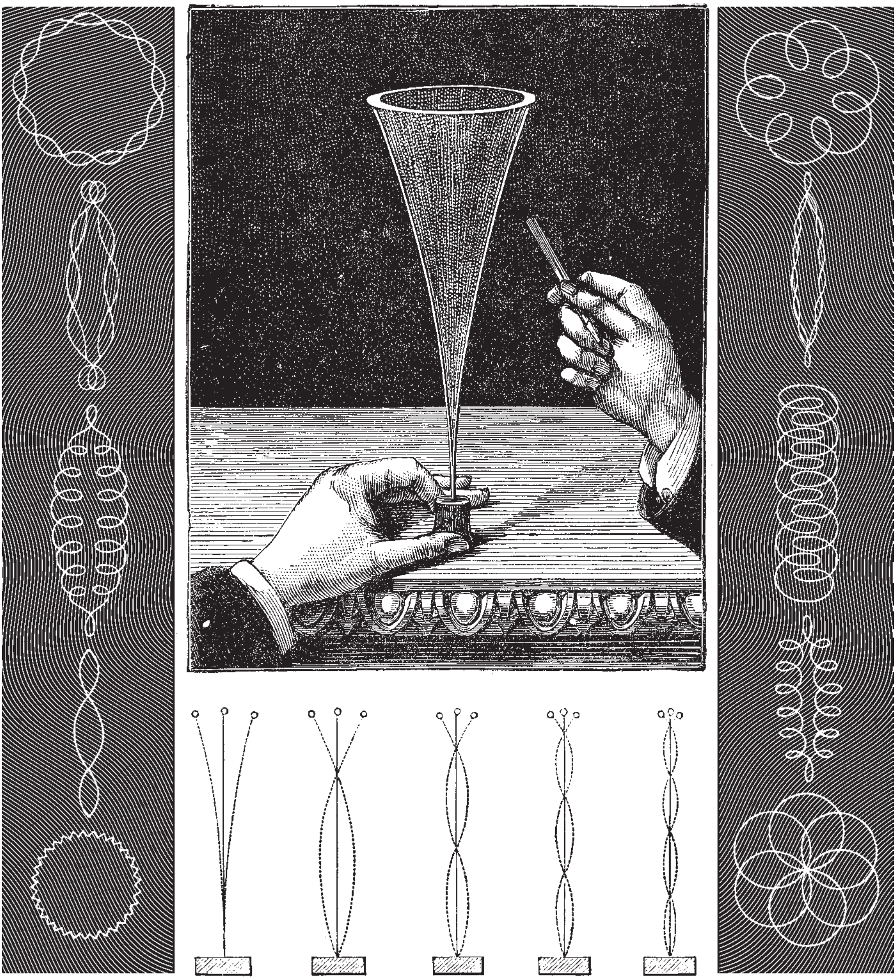
Несмотря на изобретение равномерно темперированного строя, ученые продолжали изучать чистые интервалы. Так, сэр Чарльз Уитстон в 1827 году изобрел интересный прибор, предшественник гармонографа, получивший название *калейдофон*. Как и гармонограф, он визуально отображает музыкальные созвучия.

Простейшая версия прибора состоит из стального стержня, одним концом крепко закрепленного в латунном основании, и маленького серебристого шарика, надетого на стержень с другого конца. В луче света этот шарик будет выглядеть заметной яркой точкой. Если по стержню сначала ударить, а затем провести смычком, то можно увидеть крайне любопытные узоры (*некоторые из них показаны напротив*).

Калейдофон ведет себя не как струна, поскольку он закреплен только с одной стороны. Как и у духовых инструментов, которые обычно открыты с одной стороны, математика гармоник и обертонов калейдофона слегка сложнее, чем у монохорда или гармонографа, поэтому расположение тонов здесь более изменчиво (*напротив внизу показаны несколько первых обертонов*).

В других версиях калейдофона используются стальные прутья с квадратным или овальным сечением, в результате чего формируются новые узоры. Уитстон называл свое изобретение философской игрушкой, и действительно, глядя на эти узоры, мы ощущаем чудо простой красоты.

Для того чтобы изготовить собственный калейдофон, постарайтесь зафиксировать вязальную спицу в тисках и закрепить на свободном конце серебристый шарик или кондитерскую бусину. Направьте на ваш калейдофон яркий свет.



Калейдофон визуально отображает музыкальные созвучия. Если по стержню сначала ударить, а затем провести смычком, то можно увидеть крайне любопытные узоры. Математика гармоник и обертонов калейдофона слегка сложнее, чем у монохорда или гармонографа, поэтому расположение тонов здесь более изменчиво

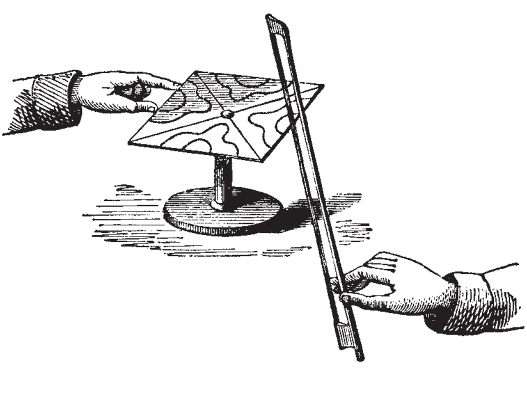
Фигуры Хладни

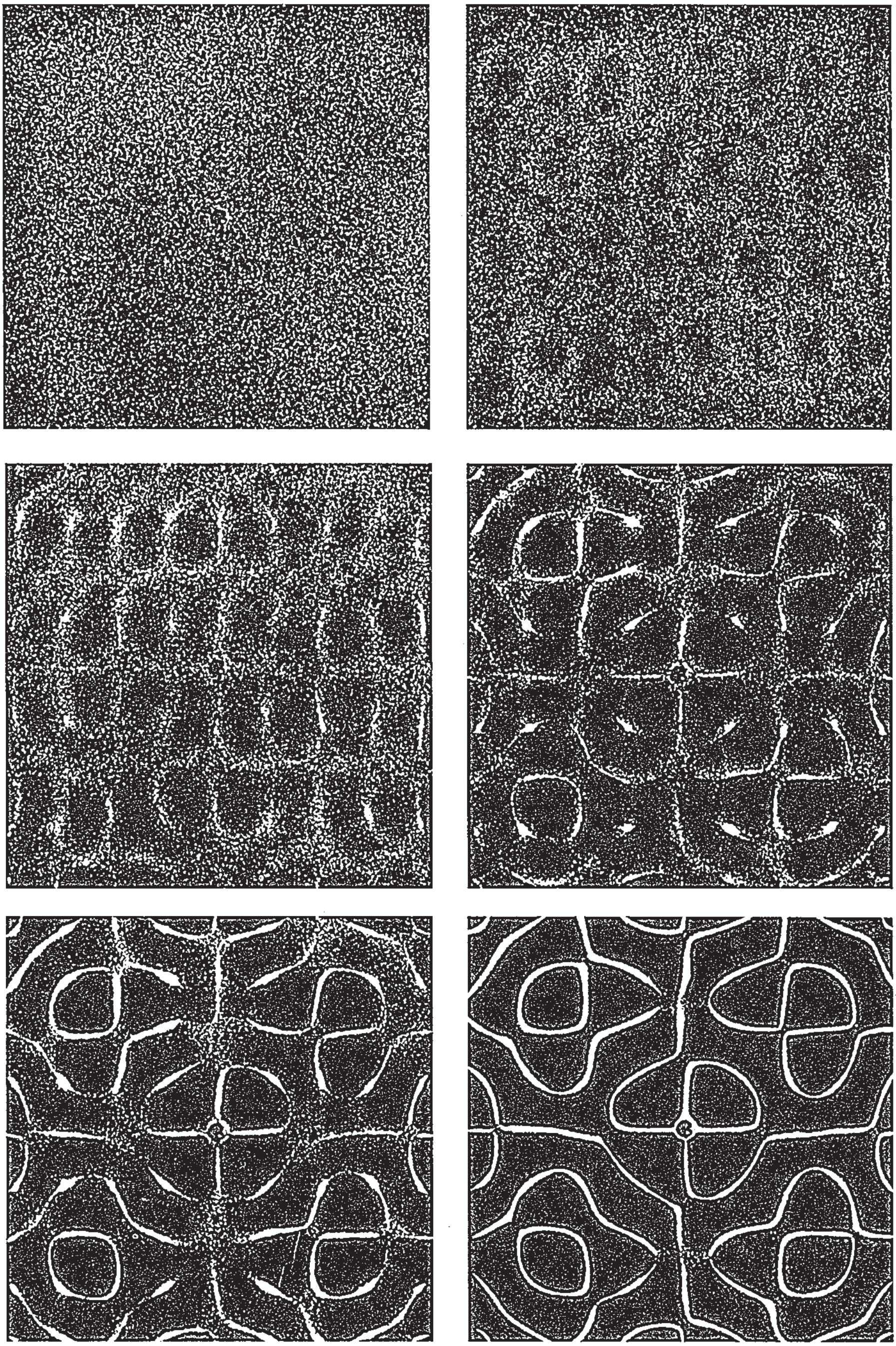
Вибрирующие поверхности

Мы уже познакомились с вибрирующими струнами и стержнями, но помимо них можно заставить вибрировать целую поверхность, и, как это ни удивительно, на такой поверхности тоже отображаются фигуры гармонии.

В 1787 году Эрнст Хладни обнаружил, что если на плоскую поверхность насыпать песок, а затем согнуть ее или вызвать вибрацию другим способом, на песке появятся четкие узоры. Как и в случае с гармонографом, диссонансные звучания выглядят на песке, как полная неразбериха, в то время как гармоничные созвучия создают удивительные картины, при этом каждой ноте соответствует свой неповторимый узор. Позднее Хладни понял, что можно получить более сложные узоры, если прикасаться к краю поверхности в точках, которые делят ее длину на гармоничные интервалы (*внизу*), создавая таким образом лады (*как в примере с пером на с. 192*). Дальнейшие опыты показали, что на круглых поверхностях появляются круглые узоры, на треугольных — треугольные и т. д.

Рисунки на странице напротив взяты из книги Ганса Дженни «Киматика», одного из основополагающих трудов на эту тему. Картина вибрации на песке проявляется постепенно, по мере того как песчинки перемещаются на неподвижные места плоскости.





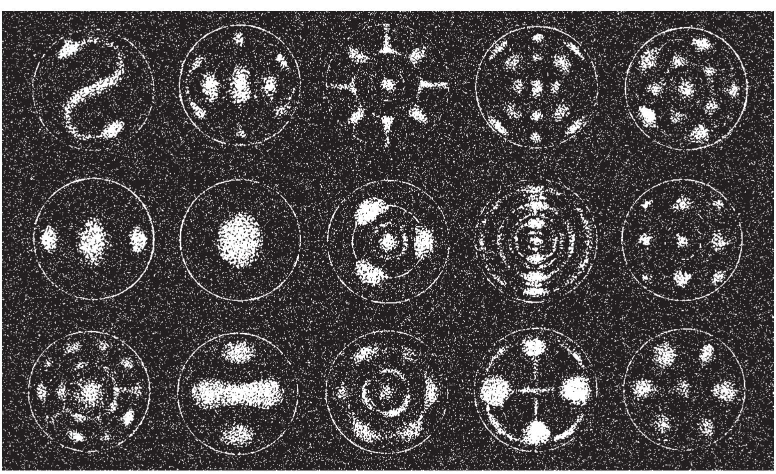
Фотографии резонанса

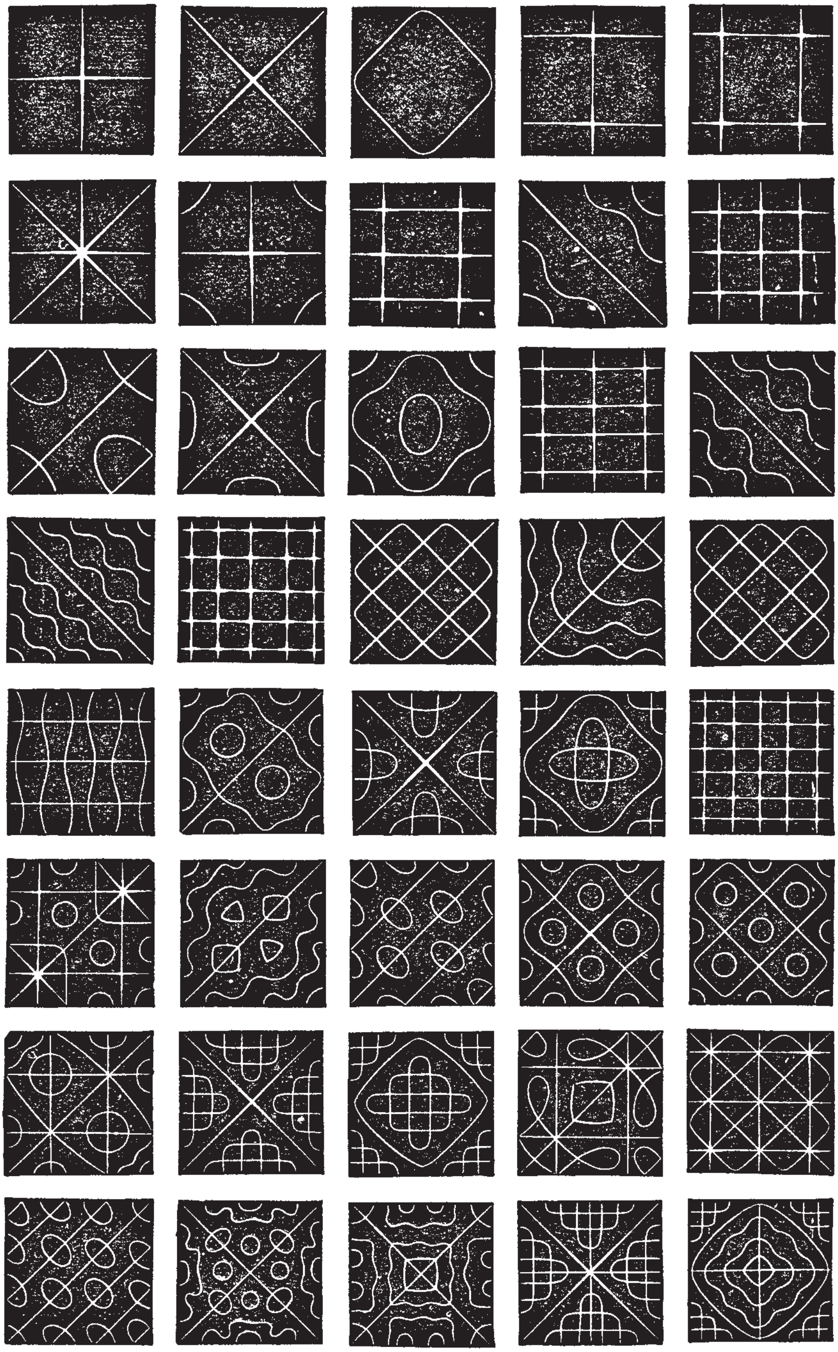
Как спеть ромашку

Ряд более сложных узоров Хладни показан *напротив*. Все они двух- или четырехсторонние, потому что были сделаны на квадратной плоскости.

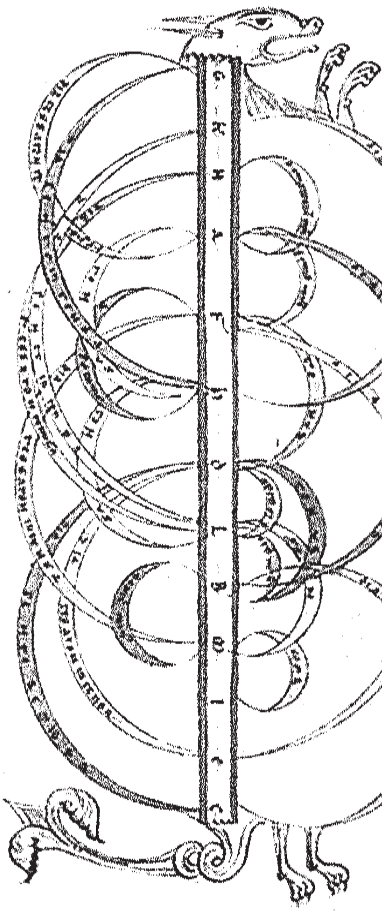
Внизу показано также несколько круговых изображений. Они были сфотографированы Маргарет Уоттс Хьюз, проницательной певицей, которая примерно в 1880 году изобрела занимательное устройство под названием *эйдофон*. Этот простой аппарат состоит из полой основы, на которую натянута мембрана, и прикрепленной к базе трубки с мундштуком на конце. Миссис Хьюз пела в трубку ноты диатонического звукоряда и наблюдала за тем, как мельчайшие семена плауна, рассыпанные на поверхности мембраны, внезапно обретали жизнь. Получавшиеся фигуры миссис Хьюз сравнивала с цветами.

И снова мы видим узнаваемые формы и фигуры простой гармонии.





КНИГА V

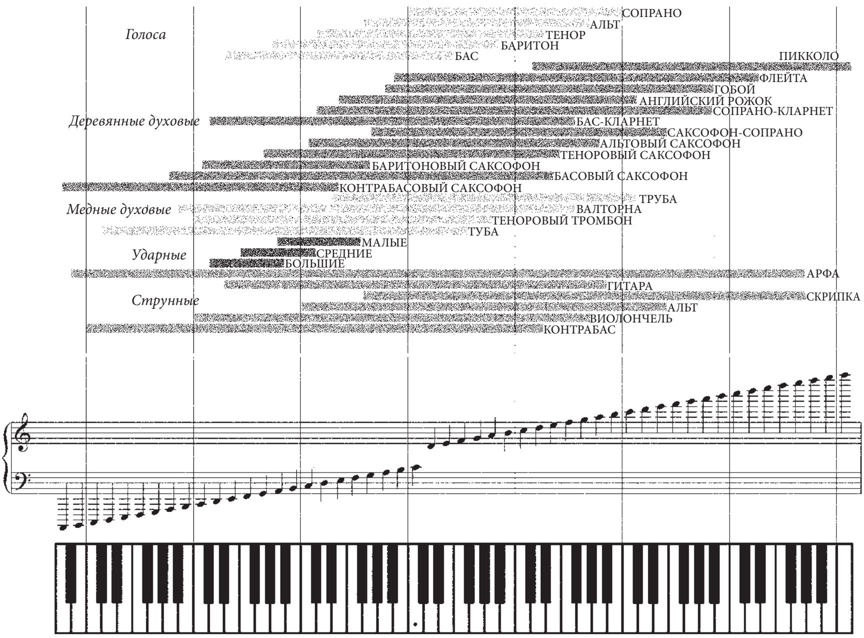


Зооморфная музыкальная диаграмма из книги «Основы музыки» Боэция (480—524 н. э.)

НАЧАЛА МУЗЫКИ

Мелодия, ритм и гармония

Джейсон Мартино



Название ноты	Номер MIDI-ноты	Частота Гц	Период мс
A0	21	27.500	36.36
	22	29.135	34.32
B0	23	30.868	32.40
C1	24	32.703	30.58
	25	34.648	28.86
D1	26	36.708	27.24
	27	38.891	25.71
E1	28	41.203	24.27
F1	29	43.654	22.91
	30	46.249	21.62
G1	31	48.999	20.41
	32	51.913	19.26
A1	33	55.000	18.18
	34	58.270	17.16
B1	35	61.735	16.20
C2	36	65.406	15.29
	37	69.296	14.29
D2	38	73.416	13.62
	39	77.782	12.86
E2	40	82.407	12.13
F2	41	87.307	11.45
	42	92.499	10.81
G2	43	97.999	10.20
	44	103.83	9.631
A2	45	110.00	9.091
	46	116.54	8.581
B2	47	123.47	8.099
C3	48	130.81	7.645
	49	138.59	7.216
D3	50	146.83	6.811
	51	155.56	6.428
E3	52	164.81	6.068
F3	53	174.61	5.727
	54	185.00	5.405
G3	55	196.00	5.102
	56	207.65	4.816
A3	57	220.00	4.545
	58	233.08	4.290
B3	59	246.94	4.050
C4	60	261.63	3.822
	61	277.18	3.608
D4	62	293.67	3.405
	63	311.13	3.214
E4	64	329.63	3.034
F4	65	349.23	2.863
	66	369.99	2.703
G4	67	392.00	2.551
	68	415.30	2.408
A4	69	440.00	2.273
	70	466.16	2.145
B4	71	493.88	2.025
C5	72	523.25	1.910
	73	554.37	1.804
D5	74	587.33	1.703
	75	622.25	1.607
E5	76	659.26	1.517
F5	77	698.46	1.432
	78	739.99	1.351
G5	79	783.99	1.276
	80	830.61	1.204
A5	81	880.00	1.136
	82	932.33	1.073
B5	83	987.77	1.012
C6	84	1046.5	0.9556
	85	1108.7	0.9020
D6	86	1174.7	0.8513
	87	1244.5	0.8034
E6	88	1318.5	0.7584
F6	89	1396.9	0.7159
	90	1480.0	0.6757
G6	91	1568.0	0.6378
	92	1661.2	0.6020
A6	93	1760.0	0.5682
	94	1864.7	0.5363
B6	95	1975.5	0.5062
C7	96	2093.0	0.4778
	97	2217.5	0.4510
D7	98	2349.3	0.4257
	99	2489.0	0.4018
E7	100	2637.0	0.3792
F7	101	2973.0	0.3580
	102	2960.0	0.3378
G7	103	3136.0	0.3189
	104	3322.4	0.3010
A7	105	3520.0	0.2841
	106	3729.3	0.2681
B7	107	3951.1	0.2531
C8	108	4186.0	0.2389

Вверху: чуть больше 7 октав слышимого спектра, с нотой C в центре. В таблице показано расположение различных инструментов на шкале звуковых частот. Данные о частоте и периоде приведены для нот одинаковой темперации

Введение

Музыка — это средство коммуникации, которое через слух, минуя зрение, воздействует сразу на самые глубинные пласты нашего сознания. При этом понимание музыки заключается отнюдь не в знании музыкальной теории. По сути, музыка не может рождаться в рамках рациональных предписаний. Ее анализ служит лишь для создания сравнительного описания и каталогизации, но не для выявления строгих законов. Лишь проходя через человеческое сердце и разум, гармонии и ритмы собираются в цельную, полную скрытого смысла музыкальную картину.

В целом представленная в этой книге теория музыки основана на европейской классической традиции, зародившейся в начале XVIII века. Эта книга составлена таким образом, чтобы дать читателю базовые представления о природе взаимодействий тона и ритма и о неотъемлемых свойствах звука, а затем, возможно, о природе музыки в целом.

Все приведенные в книге описания и факты даны для равномерно темперированного строя, так как именно эта система настройки преобладает в музыке последние 300 лет. Понятия «нота» и «тон» иногда могут быть взаимозаменяемыми, но чаще всего «тон» относится к звуку, а «нота» — к письменному обозначению этого звука. Уточнение значения прочих терминов ищите в глоссарии.

Надеюсь, эта книга поможет вам понять, как нотные партитуры превращаются в музыкальное произведение, рассказывающее неповторимую историю и зовущее в удивительное путешествие по волнам музыкальной гармонии.

Что такое музыка?

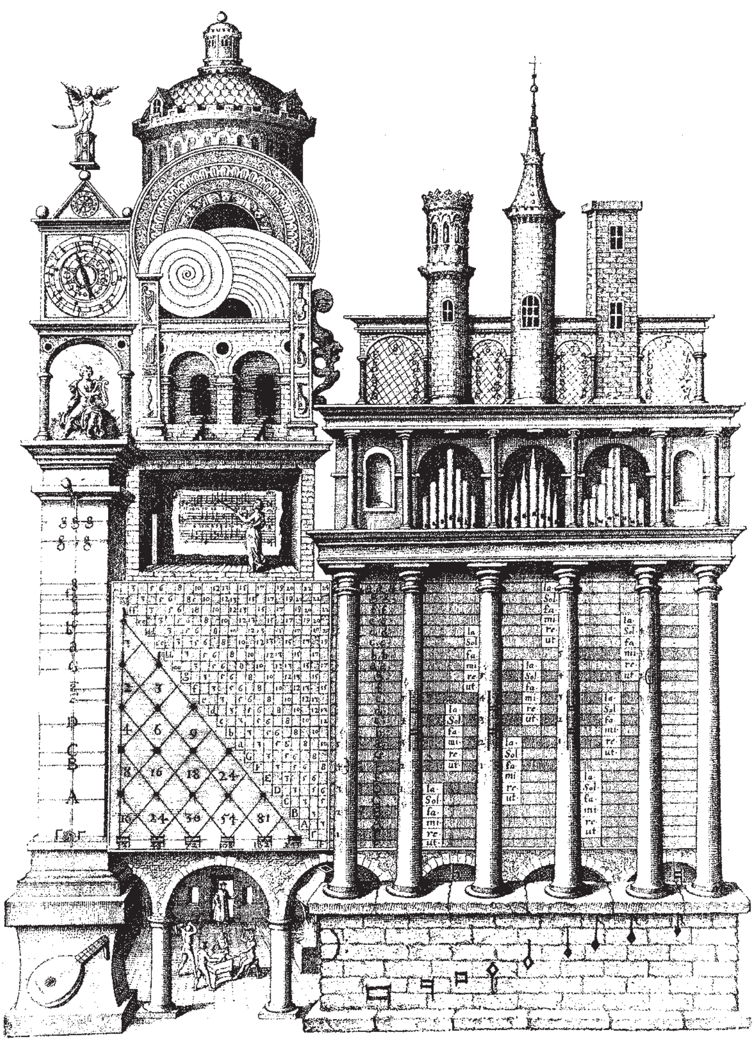
И весь этот джаз

Музыка — это... мамина колыбельная. Музыка — это воплощение молчания и тишины. В музыке мы прославляем, любим, надеемся и помним. Музыка — в дыхании души, во взмахе крыла колибри и легком пении ветра. Ее формы наполнены бесконечными оттенками и нюансами, они подвижны и вечно изменчивы. Музыка — это Душа, обретшая форму.

Музыка появляется вследствие вибраций молекул воздуха, похожим образом по поверхности океана распространяются волны. Музыка — это, пожалуй, единственный по-настоящему действенный способ передать чувства и ощущения одного человека другому или даже многим. В форме ноктюрнов, прелюдий и этюдов музыка способна передавать наши слезы и смех, боль и радость. Музыка — это отражение течения времени, настроения и смыслов. Она словно размышляет, колеблется, сравнивает и пробуждает.

В музыке мы творим и фантазируем, объединяя ее элементы — мелодию, ритм и гармонию — в выразительные формы и узоры. Музыка заставляет наши руки, ноги и тела двигаться в ритме Вселенной. Ее гармония дышит жаждой исследования, тягой к познанию пропорции, созвучия, диссонанса и резонанса. Ее гармония воспаряет к небесам в полете фантазии, провозглашая скорбь или чудо.

Когда музыка объединяется с речью, появляется песня. Тогда обыденные слова становятся священными, музыка заставляет прислушаться к ним. Музыка успокаивает души и усмиряет беспощадное зло. Песнь Сирены, исполненная Орфеем, давала ему власть над живыми существами, деревьями и могучими силами природы. Радха и Кришна играли на флейте и танцевали в ликовании.



Храм музыки Роберта Фладда (1574—1637). В нижнем левом углу Пифагор обнаруживает взаимосвязь между массой кузнечного молота и октавой, квинтой, квартой. На стене внизу справа на примере нот басового ключа показаны основные протяженности звуков в музыке. Выше изображены 3 вида гексахордов, средневековых шестиступенных гамм. Левее расположена лямбда — платонова таблица нот и интервалов. Над диагональю показаны интервальные расстояния между нотами звукоряда. Слева от таблицы изображен монохорд, а над ней — композиция, символизирующая объединение разрозненных частей музыкальной теории в законченное произведение

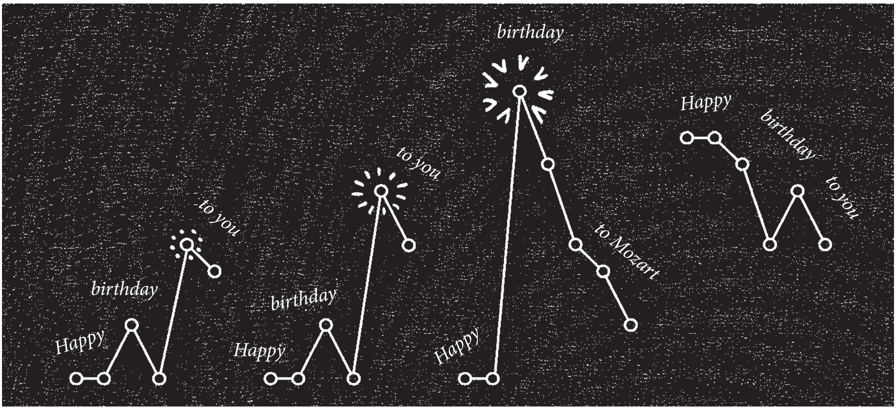
Слоганы и диалектика

Идеи в звуке

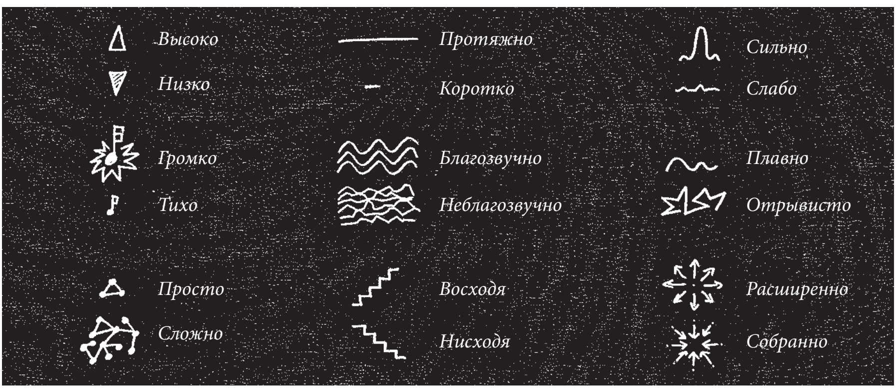
Объединение музыки и слов часто используют в различных приемах фонетической организации текста — его инструментовке. Возьмем, к примеру, известный слоган «Live, Love, Learn» («Живи, люби, учись»). Собранные вместе, эти слова усиливают значения друг друга. По отдельности они звучат совсем иначе. Обратите внимание на аллитерацию «L» и использование слова «Learn» в конце этой последовательности, чтобы разбить рифму первых двух слов, тем самым поставив красивую точку. Кроме того, эти три слова являются односложными и в английском языке могут использоваться и как абстрактные инфинитивы («жить», «любить», «учиться»), и в повелительном наклонении («живи!», «люби!», «учись!»).

Музыкальный и словесный компоненты слогана часто объединяются по принципу парадокса. Это качество необходимо для создания резонансной и запоминающейся фразы. Ноты в музыке могут идти по восходящей и нисходящей гаммам, могут быть созвучными и диссонансными, играться стаккато или легато. Подобные дуальности отражают парадоксальную природу действительности. Из отдельных смысловых единиц ноты складываются в большие законченные формы, отражающие единство противоположностей. Так музыка уводит слушателя от разрозненных дуальностей повседневной жизни в область их гармоничного объединения.

Напротив схематично изображена всем известная с детства песенка «С днем рожденья!» («Happy Birthday»). В ней несколько раз повторяется в разных вариациях одна мелодическая фраза, но ее основные свойства остаются прежними, и она вполне узнаваема до самого конца.



Вверху: Песня «С днем рожденья!» — мелодия начинается с доминанты мажорной гаммы, за длинной нотой следует повторная короткая, затем шестая ступень, она переходит в пятую, и скачок от пятой ступени к октаве, перед тем как опуститься на полтона. Первый раз эта фраза повторяется практически без изменений — только скачок вверх становится больше (квинта) и за ним следует нота на тон ниже. В третий раз во фразе появляется скачок вверх на целую октаву (маленький интервал становится большим), и если прежде мелодия делала один шаг вниз, то сейчас — два. При этом имя приходится на диссонантный тон и долгую сильную долю. Финальная фраза повторяет начальную мелодию в другой тональности со скачком вниз и другим шагом. Отлично построенная диалектика скачков и шагов, высоких и низких нот, смены акцентных и слабых тактов позволяет нам с легкостью следить за развитием мелодии и запомнить ее



Вверху: Многое в музыке зависит от объединения противоположностей. Хроматический — диатонический, скачок — шаг, повторение — контраст... Противоположности взаимодействуют друг с другом, создавая картину, понятную каждому с первых звуков музыки. И слушая ее, мы не перестаем сравнивать то, что уже было, с тем, что последует, как в короткой перспективе, так и в отдаленной. Так в музыке проявляется диалектика. Конфликт противоположностей рождает драму; противоположности в согласии прекрасны

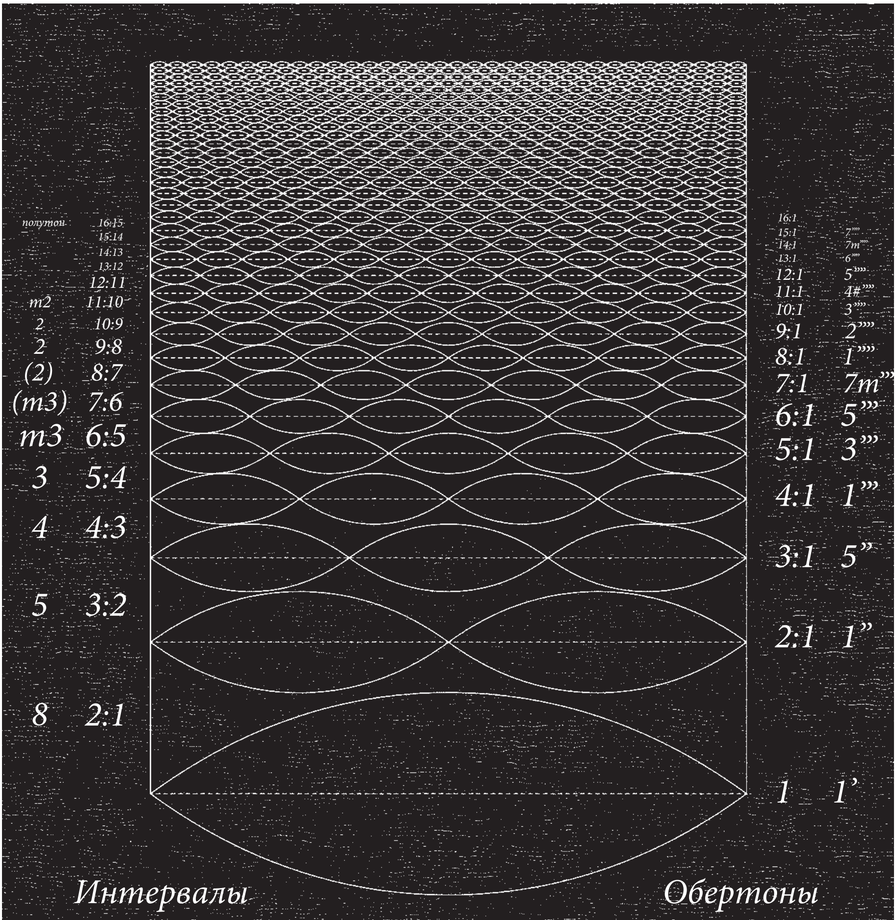
Акустика и обертоны

От одной ноты к семи и дальше

Любой звук, извлекаемый музыкальным инструментом, вибрирует с определенной частотой и особым, присущим именно данному звуку смешением обертонных амплитуд (*см. напротив*). Так создается специфический тембр звучания музыки. Гобой, ситар или фортепиано способны издавать звуки одной высоты, но их звучание будет сильно различаться. Гласные звуки нашей речи содержат обертоны, создаваемые речевым аппаратом человека.

Другим компонентом звука является шум. У него нет периодичности — молот стучит, палец перебирает струны, смычок поскрипывает, телевизор, который потерял сигнал, потрескивает. Диапазон шума характеризуют при помощи цветовых обозначений (белый шум, розовый шум, серый шум). Шум является неотъемлемой частью музыкальных звуков, извлекаемых любым музыкальным инструментом. Шум в музыке можно сравнить с согласными звуками в языке: барабаны — это взрывные звуки, шейкеры — фрикативные, а тарелки — шипящие.

По сути, музыкальные звуки можно описать так же, как звуки речи. Комбинация тонов, задающих обертон, включает в себя шум, который инициирует звук, иногда его продлевает, а иногда завершает, то есть выполняет функцию согласных звуков в речи, формируя структуру и ритм.



Вверху: Когда струна начинает вибрировать или труба наполняется воздухом, создавая интервал из простой пропорции, это провоцирует появление различных колебаний в звуковых волнах одинаковой длины. Единое разделяется на меньшие части. Каждый из этих обертонов — расположение гравитационного поля над другими расположенными рядом тонами

Слева: Историю западной музыки можно сравнить с обертоновым звукорядом, идущим по восходящей гамме и постепенно перетекающим в натуральный звукоряд. Относительные расстояния в интервалах также подталкивают нас к изучению музыки, приглашая совершить путешествие от канонической объективности к внутренней интеграции

Понимание звукоряда

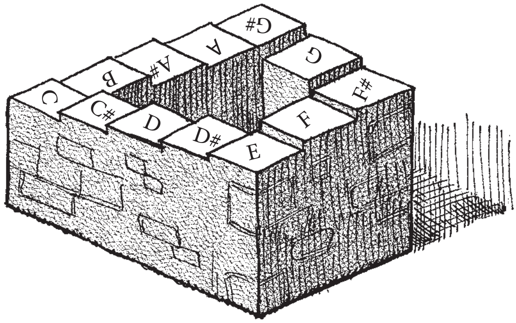
Улицы и лестницы

Звукоряд — это совокупность отдельных тонов (звуков), которые подразделяются по высоте звучания и за определенное количество шагов (часто за 7) формируют октаву. Большинство музыкальных шкал, использующихся по всему миру, восходят своими корнями к обертоновому звукоряду и применяют доминанту в качестве главного тона, с которого начинается настройка остальных тонов. Доминанты накапливаются, а затем транспонируются в единственную октаву. В основу звукоряда можно также положить терцию (например, в среднетоновой темперации) или использовать любой другой способ, каждым из которых пытаться решить одну и ту же проблему — как замкнуть исходную дугу или спираль звукоряда в круг. Звукоряд становится театром борьбы основных обертонов и промежуточных тонов.

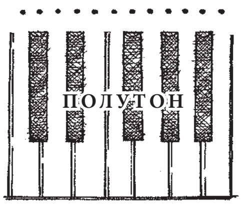
Основные ступени — это 1—3—5—1, мажорный аккорд, состоящий из тоники, терции и доминанты, образованный обертонами 2:1 (октава — единственная абсолютно созвучная тонике нота). Затем идет 3:1 — квинта, второй уровень созвучности, хотя на самом деле это совершенно другой тон. После квинты — 4:1, другая октава, затем 5:1, которая становится терцией, обычно передающей мажорную или минорную окраску аккорда, звукоряда или мелодии.

Многие 5-ступенные или 7-ступенные звукоряды используют такую структуру в различных вариациях. Базовая система выглядит так: 1—2—3—5—6 (пентатонная) и 1—2—3—4—5—6—7 (мажорная и другие). Семь рождается из пяти.

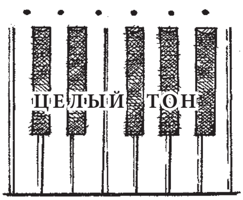
При этом 7-ступенный звукоряд в 12-ступенной системе означает, что пяти нот всегда будет не доставать. В ближневосточных системах из 17 нот выбрано 7; в Индии — 7 из 22.



Слева: Видоизмененная лестница Пенроуза («бесконечная лестница», «невозможная лестница», ведущая, казалось бы, вверх или вниз, но приводящая к началу пути. — Ред.) показывает парадокс музыкальной октавы. Неважно, преодолеваем мы звукоряд по восходящей или нисходящей гамме, мы одновременно возвращаемся и отдаляемся; мы уходим и приходим в одно и то же время



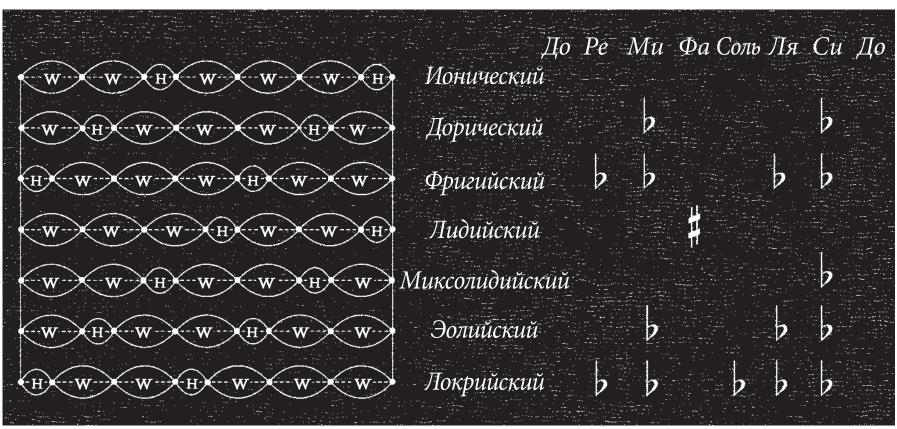
Полутон



Тон

Полутон: в хроматической настройке, например на клавишах, расстояние от одной ноты до другой (между белой и черной клавишами) равно половине ступени или полутону. В западной хроматической настройке 12 одинаковых полутонов в октаве:
C-C♯-D-D♯-E-F-F♯-G-A♭-A-B♭-B-C

Целый тон: целая ступень или целый тон включает в себя 2 полутона (это могут быть 2 белые или 2 черные клавиши, в зависимости от их места на клавиатуре). Пара взаимоисключающих звукорядов, составленных из целых ступеней, выглядит так:
C-D-E-F♯-G♯-B♭ и D♭-E♭-F-G-A-C♭



Вверху: 7 классических ладов с греческими названиями. Слева: Сдвигая исходную точку звукоряда, поместите справа одну ноту, все целые и половинные тоны переместятся влево и сформируют остальные шесть ладов семиступенного звукоряда. Справа: Способ получения мажорных (ионических) гамм путем добавления нескольких хроматических повышений или понижений

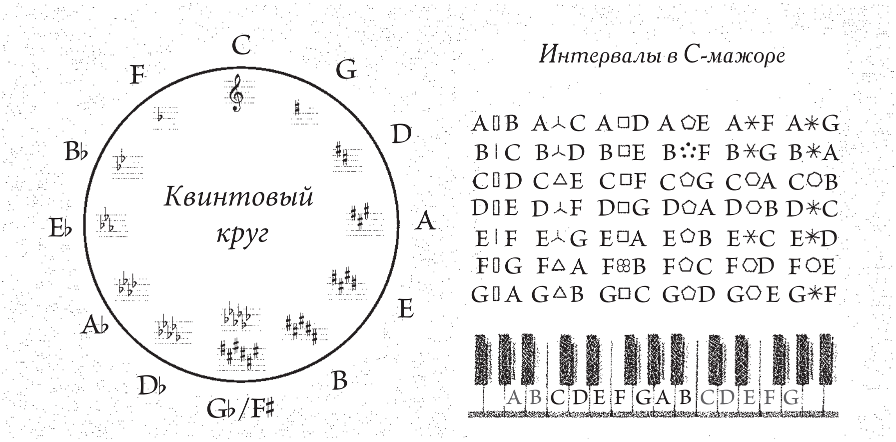
Знакомство с интервалами

И квинтовым кругом

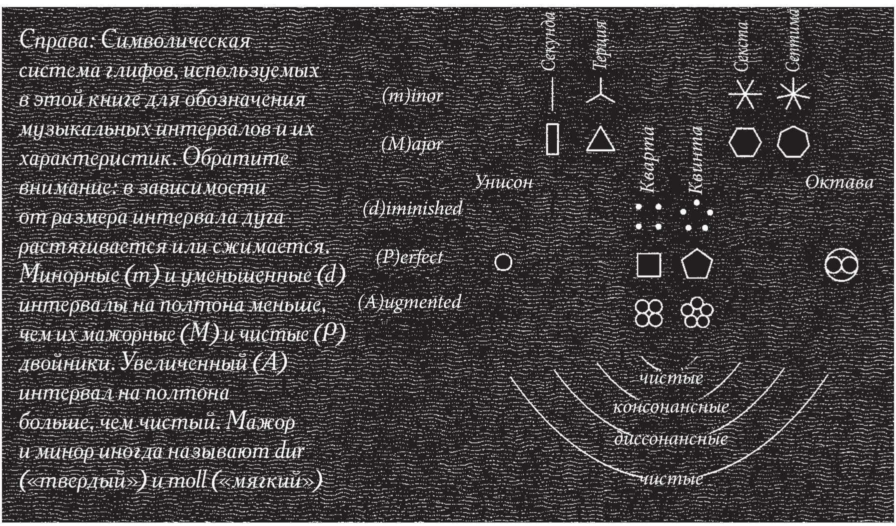
Музыкальный интервал — это расстояние между двумя тонами (здесь «тон» — в значении «нота». — *Ред.*), и хотя звучание многих интервалов в различных музыкальных традициях слегка различается, они вполне узнаваемы в любой культуре. Интервалы можно рассматривать с двух точек зрения: во-первых, это непрерывная цепочка из частот простых пропорций, *октава* — 2:1, *квинта* — 3:2, *кварта* — 4:3. Затем идут *мажорная терция* 5:4, *минорная терция* 6:5, *секунда* 9:8 или 10:9 и меньшие интервалы, в зависимости от культуры называемые так: *четверть тона*, *шрути*, *ли*, *комма*, *полутон* или *микротон*.

Кроме того, интервалы можно рассматривать как отношение нового тона к исходному. Так мы получаем последовательность из октавы (2:1), квинты (3:1), следующей октавы (4:1), мажорной терции (5:1), еще одной квинты (6:1), септимы (7:1), еще одной октавы (8:1), секунды (9:1), терции (10:1), тритона (11:1) и т. д. Если в первом случае каждый новый интервал строится относительно соседнего, то во втором — интервалы принимают абсолютное значение и строятся от исходной ноты. Оба метода могут быть полезны при изучении и анализе структуры музыкального звукоряда и мелодии, которая в итоге из него появляется.

Обратите внимание, что в обоих случаях фигурируют три интервала: октава, квинта и мажорная терция. Гаммы по всему миру в той или иной форме включают в себя эти интервалы, хотя их звучание зависит от легких вариаций и нюансов в конструкции музыкальных инструментов, а также от культурных традиций. Одни музыканты в настройке используют первый тон, а затем выстраивают новый обертон по предыдущему, в то время как другие предпочитают выстраивать весь звукоряд, основываясь на исходном тоне.



Вверху слева: Квинтовый круг — это схема общих тонов. Хроматические ноты (с диезами и бемолями) добавлены для того, чтобы чистые квинты сохранили взаимосвязи между целыми тонами и полутонами в любой мажорной гамме. 7 последовательных квинт по кругу создают все ноты в любой из 12 мажорных гамм. Периодически, для того чтобы сохранить логику синтаксиса, требуется применить альтерацию. Противоположные ноты формируют тритон, симметричный интервал, который делит октаву пополам. Вверху справа: таблица интервалов в до-мажоре (С), белые клавиши фортепиано



Нижняя часть схемы указывает на симметричную природу гармоний в интервалах. Унисон, кварта, квинта и октава — это чистые интервалы, терции и сексты — консонансные, а секунды и септимы — диссонансные

Базовые ритмы

Метр и большой бит

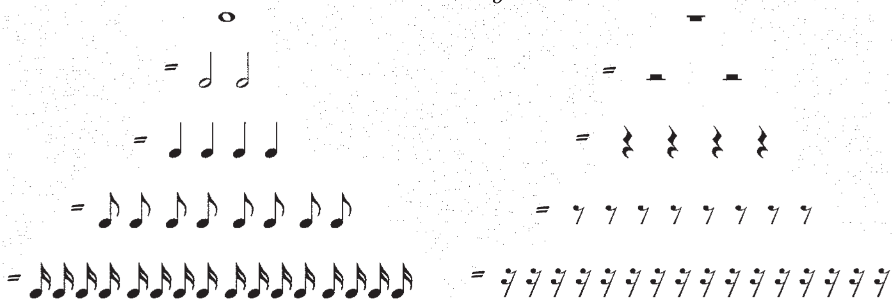
Ритм, или размер — это компонент музыки, который задает временные промежутки для каждой ноты звукоряда и ведет нас от одного такта к другому. Ритм, как и высота звука, подразделяется на простые интервалы. Даже сложные на первый взгляд ритмы можно структурно разделить на две или три доли. Марш и вальс для определения ритма — такие же отправные точки, как лад для высоты звука. *Полиритмия* и *синкопа* играют роль основных структурных элементов ритма, как отдельные ноты являются основными элементами гаммы. Ритм определяет временные рамки для музыкального произведения и приводит его мелодию «к общему знаменателю».

Ритмические структуры записываются при помощи тактов, которые помогают понять, сколько времени отводится для определенной группы звуков. В размере 4/4 каждый такт состоит из 4 долей, обозначаемых четверными нотами, которые часто появляются в группах из 4 тактов. В большинстве ритмов доли делятся на сильные и слабые, создавая равномерную пульсацию. *Аккорды* могут приходиться на сильные или слабые доли *такта* или *затакта*, совпадая или нет с ритмическим ударением, что создает движение гармонии и окраску музыкальной фразы. Распределение различных акцентов в музыкальном произведении и есть главная задача ритма.

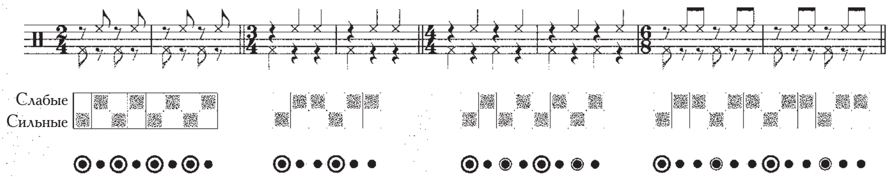
Темп — не менее важная характеристика, чем размер произведения. Обычно его измеряют в ударах в минуту (bits per minute, bpm). Если неизвестен *темп*, длительности размера отчасти лишаются смысла.

bpm: 40 largo 60 adagio 76 andante 108 moderato 120 allegro 168 presto 200

Ноты и паузы



Вверху: Основные длительности нот (слева) и пауз (справа). Сверху вниз: целая, половина, четверть, восьмая и шестнадцатая. Деление может продолжаться вплоть до стодвадцатьвосьмой. Пауза — это промежуток в мелодии, не заполненный нотой, она помогает отделить друг от друга смысловые части мелодии



Марш Вальс Рок Жига

Музыкальный стиль обычно легко определить по его ритмическому рисунку и музыкальному размеру (метру), то есть распределению сильных и слабых долей. Здесь приведены примеры основных размеров, основанных на 2 и 3

Верхнее число размера означает количество долей в такте, нижнее — длительность одной доли. В нотной записи такты как ритмические единицы разделяются вертикальной линией — тактовой чертой

Короткие и длинные

Два слога	**Три слога**
Ямб I —	**Трибрахий** I I I
Хорей — I	**Дактиль** — I I
Спондей — —	**Амфибрахий** I — I
Дибрахий I I	**Анапест** I I —
	Бакхий I — —
	Антибакхий — — I
	Амфимакр — I —
	Молосс — — —

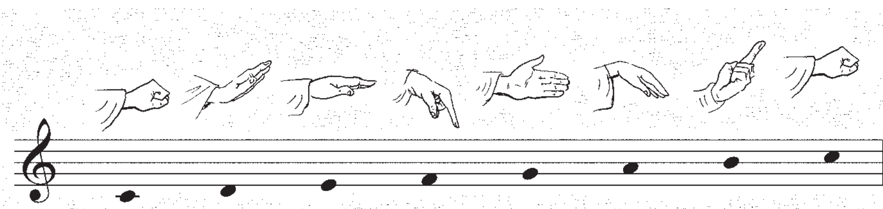
Стихотворные размеры — все возможные комбинации длинных и коротких слогов в группах по 2 или 3, всего 12

Взаимоотношения ступеней лада

Тяготение и разрешение

Устойчивые ступени являются центром притяжения для остальных, побочных ступеней лада, которые воспринимаются лишь как переходные звенья от одного опорного пункта к другому. Целые и половинные ступени и даже минорные и мажорные терции — все они обладают различными уровнями тяготения, которое нарастает по мере приближения к устойчивой ступени или к моменту встречи переходной ноты с менее динамичной побочной ступенью. Момент перехода побочной ступени лада в устойчивую называется *разрешением*. Кроме того, ноты, расположенные далеко от устойчивых ступеней, менее активны и драматичны во взаимоотношениях с другими, чем те, что расположены рядом с устойчивыми. Взаимоотношения между ступенями в минорной гамме распределяются точно так же, как в мажорной (*см. с. 274*).

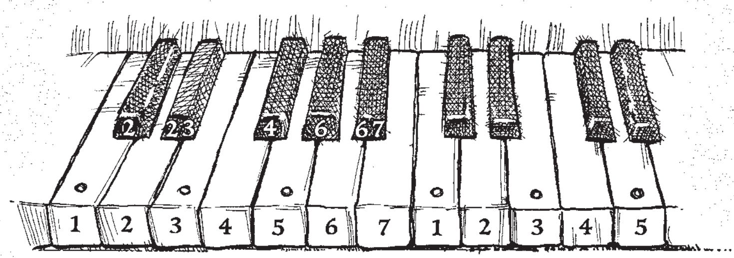
Новый уровень сложности возникает в мелодиях с последовательностями аккордов и модуляций, так как здесь набор устойчивых ступеней может изменяться. Устойчивые ступени аккорда (и гаммы) терция и квинта звучат одновременно, при этом неустойчивые ноты остаются между ними. Но когда аккорд меняется, появляются совершенно новые терция и квинта, побочное трезвучие. Тем не менее без действительной модуляции между первым (устойчивым) и вторым (побочным) аккордом возникают такие же взаимоотношения, как между простыми ступенями звукоряда. Аккорд можно построить от любой ноты звукоряда, и он будет обладать одновременно и тяготением, которым уже обладают ступени звукоряда, входящие в его состав, и собственным внутренним тяготением. Гениальность хорошей мелодии заключается в том, чтобы понять и согласовать эти два уровня тяготения, создав неповторимый узор из естественных взаимоотношений ступеней звукоряда.



Запад	*До*	*Ре*	*Ми*	*Фа*	*Соль*	*Ля*	*Си*	*До*
	Основной Устойчивый	*Воодушевляющий Обнадеживающий*	*Устойчивый Спокойный*	*Одинокий Трепетный*	*Величественный Светлый*	*Грустный Плачущий*	*Вводный тон Пронзительный*	
Индия	*Са*	*Ре*	*Га*	*Ма*	*Па*	*Дха*	*Ни*	*Са*
	Основной Сильный	*Радость Сексуальность*	*Злость Ярость*	*Очищение Инь*	*Речь Ян*	*Ночь Удовольствие*	*Взволнованный Усилие*	

Вверху: 7 тонов мажорной гаммы, соответствующие им положения рук из системы Карвена и ассоциативные качества. Горизонтальное положение руки указывает на устойчивую ступень, остальные знаки соответствуют направлению тяготения побочных ступеней

Вверху: Главная тема 2-й части «Патетической» сонаты Бетховена в ля-бемоль мажоре и соответствующие положения рук по системе Кодали. Неустойчивые ступени (ми-чистая в пятом такте и ля-чистая в седьмом такте) временно выступают в роли вводных, поэтому им соответствует рука в положении «си»



Вверху: У побочных ступеней есть свои особенности. Вторая ступень может понижаться, повышаться, а также оставаться чистой; четвертая может быть только чистой или повышенной. Если ее понизить, она станет третьей. Для шестой ступени возможны три положения, а седьмая снова имеет ограничение и может только понижаться или оставаться чистой. При повышении она становится октавой

Основные гармонии

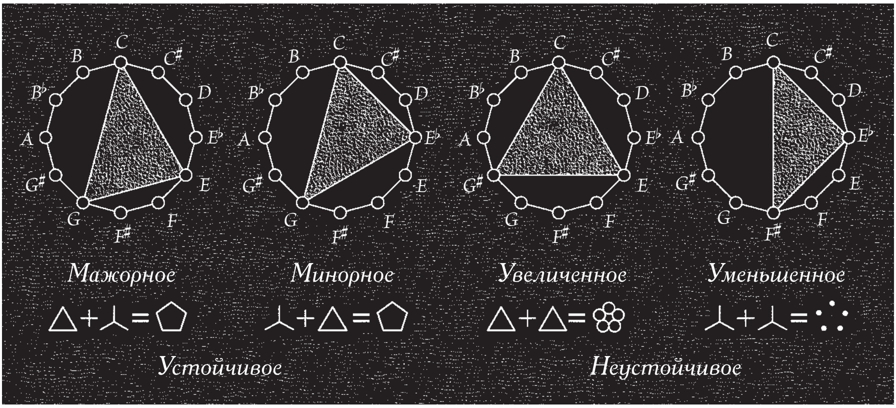
Треугольники и трезвучия

Мажорное трезвучие состоит из двух терций (мажорной и минорной, которая вместе с первой нотой образует квинту). Во всем мире чистая квинта и мажорная терция считаются самыми устойчивыми и резонансными интервалами после октавы.

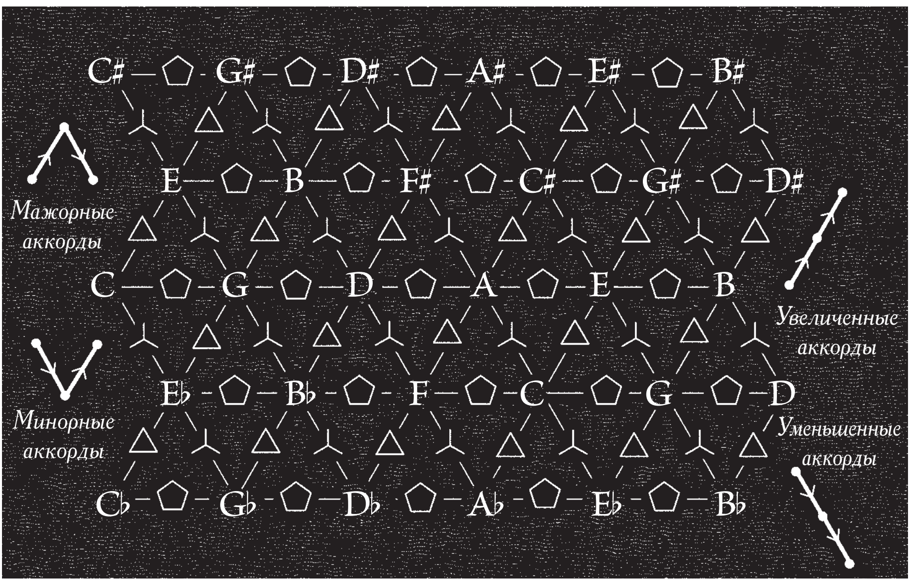
Перемещение нижней ноты трезвучия вверх называется *обращением* (*внизу*): ноты те же, но бас другой. Обратите внимание, что в первом обращении в мажорном трезвучии появляются два минорных интервала, придавая ему противоположную интонационную окраску. То же происходит с минорным аккордом, который в своем первом обращении состоит из двух мажорных интервалов и звучит как явственно мажорный аккорд. Уменьшенные и увеличенные аккорды часто считаются неустойчивыми, так как в них отсутствует доминанта или субдоминанта.

Обращение может усиливать или, наоборот, уменьшать значимость исходного аккорда. В устойчивой позиции ноты исходного интервала расположены так же, как в обертонном звукоряде, нижняя нота получает характеристики аккорда, построенного на ней. В первом обращении третья ступень аккорда оказывается на месте исходной ноты, но над ней уже нет сильных интервалов, которые могли бы подчеркнуть ее важность. Вместо этого устойчивая нота теперь наверху, а чистая кварта располагается ниже и поддерживает ее. То же происходит с квинтой, переместившейся вниз после второго обращения, в то время как чистая кварта снова подчеркивает важность устойчивой ступени.

Мажорное *Минорное* *Уменьшенное* *Увеличенное*



Вверху: 4 типа трезвучий, 2 устойчивых и 2 неустойчивых. Симметричные аккорды звучат нестабильно, а асимметричные обладают устойчивым звучанием благодаря чистой квинте, единственному интервалу (вместе с ее обращением — квартой), который делит октаву на неравные части. В ином случае квинта, смещенная на полтона, дает симметрию и неустойчивость. Чистые кварты и квинты лежат в основе системы, которая определяет подвижную симметрию всех остальных интервалов



Вверху: Схема построения 4 типов аккордов от определенной ноты и их энгармонические эквиваленты. Следуя подсказкам, расположенным слева и справа от схемы, можно получать соответствующие трезвучия

Основная мелодия

Шаги и скачки, контуры и жесты

Мелодия создается из последовательности звуков, распределенных во времени. Шаг за шагом, нота за нотой вырисовываются контуры движения мелодии. Музыкальные жесты играют для мелодии ту же роль, что интонирование в речи. Они воплощают в себе диалектику восходящих и нисходящих тонов или контраст между высокой и низкой нотой. Широкий скачок ощущается как нечто значительное и грандиозное, небольшой кажется более легким и нежным. Контуры мелодии могут быть плавными или рваными.

Мелодия обычно состоит из маленьких *шагов* и больших *скачков*, при этом скачок в одном направлении тяготеет к разрешению в виде маленького шага в обратном направлении, оставляя незаполненный пропуск. По своей природе мелодия является циклическим явлением, и слушателю нравится, когда нотный узор разворачивается, достигает своей устойчивой точки, а затем возвращается к истокам. Обычно это проявляется в ритмическом переплетении устойчивых и неустойчивых тонов звукоряда.

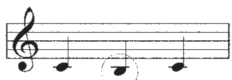
Экспрессивность мелодии складывается из тяготения и разрешения побочных нот звукоряда, при этом местоположение каждой ноты в общем ритмическом рисунке может усиливать или ослаблять первичную интонацию. Иногда мелодия раздваивается: скачки вверх и вниз создают две независимые линии, каждую на своей высоте (*или в своем регистре*). Другие мелодии выражают необходимое настроение при помощи восходящих или нисходящих последовательностей нот.

Вокальные мелодии (предназначенные для пения) могут быть либо *мелизматическими*, когда на один слог текста приходится несколько нот разной высоты, либо *силлабическими*, когда на одну ноту поется один слог.

Паузы (*цезуры*) очень важны для любой мелодии. Они дают время на вдох, размышление и взаимодействие с музыкой. Во время паузы слушатель настраивается на следующий акт музыкального действия. Правильно расположенная в узоре мелодии пауза может быть не менее сильным музыкальным моментом, чем та или иная нота.

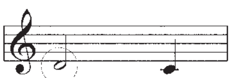
Вверху: Мелодию легко изобразить наглядно. Она вьется между устойчивыми, сильными и более слабыми, побочными ступенями звукоряда, что является основой напряжения и экспрессии любой мелодии

Верхний вводный тон
Украшает устойчивую ноту сверху, слабая доля



Нижний вводный тон
Украшает устойчивую ноту снизу, слабая доля

Проходящий тон
Служит мостом между двумя устойчивыми нотами, слабая доля

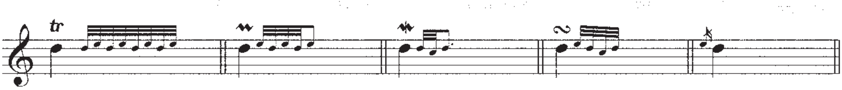


Апподжатура
Неустойчивая нота, которая опирается на устойчивую, сильная доля

Брошенный тон (éschappée)
Неустойчивая нота, которая разрешается через шаг в одном направлении и скачок в другом

Камбиата (обменная нота)
Ноты, расположенные рядом с устойчивой нотой (выше или ниже нее) для украшения, часто диссонирующие

Неустойчивые ноты могут быть акцентированными и нейтральными, приходиться на сильную или слабую долю (кроме форшлага, который всегда акцентируется). Когда такая нота приходится на сильную долю, она может заместить устойчивый тон в основном узоре гармонии



Трель *Трель* *Мордент* *Группетто* *Форшлаг*

Вверху: В мелодии также могут присутствовать различные орнаменты, то есть небольшие украшения: трели, морденты, группетто и форшлаги и др. (отображаются нотными знаками уменьшенного размера)

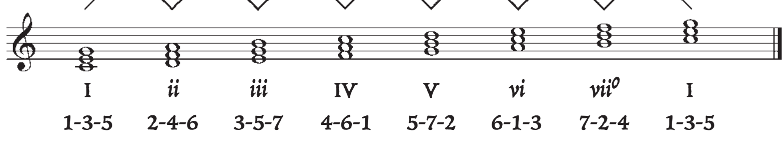
Аккордовые последовательности

Тоника, доминанта, субдоминанта

Аккорд наследует свойства устойчивой ноты, на которой он построен, и воспринимает влияние дополнительных тонов. В последовательности аккордов каждый аккорд влияет на соседние, воздействуя в итоге на исходный звукоряд. Так, если ноты в одном аккорде совместно работают на основную устойчивую ступень, то все вместе аккорды усиливают или ослабляют тонику.

Сильнее всего основной тон тяготеет к квинте, неважно, стоящей выше или ниже него. Этот факт дополнительно подчеркивает тесное родство и относительную устойчивость трех последовательных ступеней квинтового круга. Так, основное движение в аккорде происходит по направлению от *тоники* (I) к *субдоминанте* (IV), далее — к *доминанте* (V) и снова к тонике (V). Хотя некоторые трезвучия в звукоряде могут заменять три базовые ступени, при этом их основная функция остается неизменной (*внизу*). Третья и пятая ступени в I и iii одинаковые, поэтому эти аккорды взаимозаменяемы. Похожим образом ii и IV имеют две общие ступени, так же как vi и I и V и vii. Чем больше общих тонов, тем более плавно и последовательно развивается гармония.

Вот три основных состояния в тоновой гармонической последовательности: начало, отправление и возвращение. Они циклически повторяются для усиления тоники. Аккорды с симметричными интервалами (терциями) неустойчивы, требуют разрешения и несут доминантную функцию, в то время как гармонии из чистых кварт и квинт (единственные асимметричные интервалы) более устойчивы и недоминантны.



Слева: 7 основных тонов семи трезвучий. В пространстве каждый из них занимает особое положение по отношению к тонике. Тоника/исходная (Земля) имеет в музыке самый большой вес, сильно притягивая расположенные рядом ii и vii. Солнце и Луна, на квинту вверх и вниз, весят меньше и могут существовать как отдельные, но связанные сущности. V противостоит I, и в то же время подразумевает ее присутствие, тяготея к ней. IV уже содержит основной тон I в своем трезвучии, поэтому связана с тоникой сильнее, чем V. Медианта и субмедианта обладают умеренным притяжением и являются более слабыми опорными нотами, две из трех ступеней их аккордов повторяются в двух других аккордах.

ТЯГОТЕНИЯ ОСНОВНОГО ТОНА

2-й тон	Тяготеет вверх или вниз на секунду. Сильное тяготение, нет общих тонов.
3-й тон	Тяготеет вверх или вниз на терцию. Последовательное движение, 2 общих тона.
4-й *или* 5-й тон	Сильнейшее тяготение по квинтовому кругу. 1 общий тон.

КАНОН ПАХЕЛЬБЕЛЯ — I –4– V –2– vi –4– iii –2– IV –4– I –2– ii –4– V

«СЕРДЦЕ И ДУША» — I –3– vi –4– ii –5– V

«LET IT BE» — I –4– V –2– vi –3– IV –5– I –4– V –2– IV –4– I

Вверху: Движение основного тона вверх называется восходящим. Движение вниз называют нисходящим, оно имеет менее напряженную интонационную окраску. Большинство аккордовых последовательностей соблюдают циклический баланс восхождений и нисхождений. Если не принимать во внимание особые отношения между I, IV и V, то чем меньше общих ступеней, тем сильнее взаимное притяжение аккордов.

Слева: Заместив побочные аккорды главными, можно узнать, является ли последовательность восходящей или нисходящей, активной или пассивной, и таким образом понять энергию и направление движения

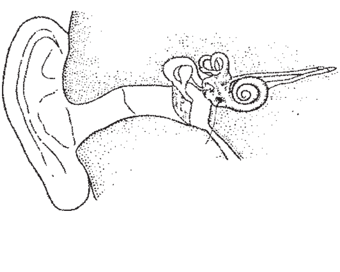
Инструменты

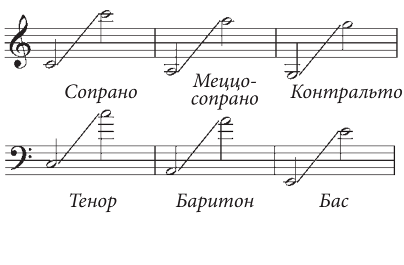
Текстуры тембра

Музыковеды выделяют 6 основных типов музыкальных инструментов: мембранофоны (мембранные), хордофоны (струнные), идиофоны (ударные), металлофоны (металлические), аэрофоны (духовые) и электрофоны (электронные).

В основном духовые инструменты изготавливают конической формы с одним открытым концом для эффективного звукоизвлечения. Духовые инструменты различаются по способу получения звука: воздух, попадая в полое пространство инструмента, колеблет один или два язычка, либо колебания могут создавать губы музыканта, как в медных инструментах. Струнные инструменты бывают смычковые и щипковые. В первом случае для звукоизвлечения используется специальный смычок, во втором — просто умелые пальцы музыканта. Одновременно звучащие струны создают аккорд. Ударные (перкуссионные) инструменты создают резкие, отрывистые и шумные звуки. Они отличаются устройством мембраны и способами по ней ударять. Эти инструменты образуют контраст с гладким и монотонным звучанием мелодии, расставляя в ней смысловые акценты различными шипящими, звенящими и рокочущими звуками. Перкуссия присутствует в музыке любой культуры. Некоторые народы также верят, что в музыкальном инструменте живет душа животного, которая общается с музыкантом во время его игры.

Многие музыкальные инструменты устроены наподобие человеческого уха. Происходит двусторонняя вибрация — инструмент извлекает звук, а ухо воспринимает. Голос может имитировать большинство музыкальных инструментов (*основные типы женских и мужских голосов показаны на схеме внизу*).





Вверху: образцы струнных, духовых и ударных инструментов разных времен и народов

Более сложные ритмы

Динамика, артикуляция, полиритмия и синкопирование

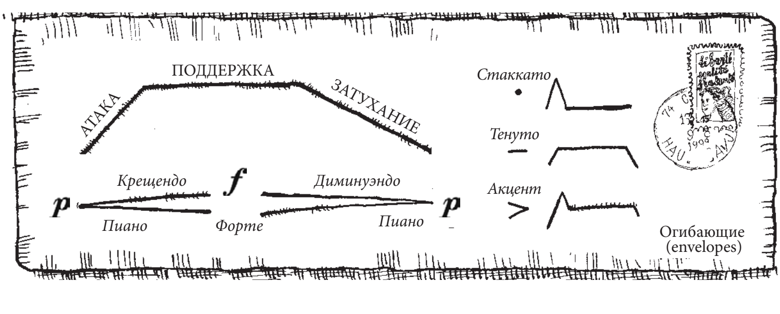
Звуки живут во времени, и в *огибающей звукового колебания* (*внизу*) выделяют 3 основные фазы (атака, поддержка и затухание), позволяющие охарактеризовать уровень звука в начале, середине и конце звучания. *Стаккато* — это отрывистый короткий звук. Ноты *тенуто* нужно играть чуть дольше, чтобы связать их (в случае *легато*) между собой. При этом переход к каждому новому тону обозначается *акцентом*.

Обозначения *пиано* и *форте* используются для указания на громкость звучания той или иной ноты, иными словами, они характеризуют амплитуду колебания. Фортепиано получило свое название как раз за способность одновременно производить громкие и тихие звуки, чего не умели ранние клавишные инструменты клавесин и клавикорд.

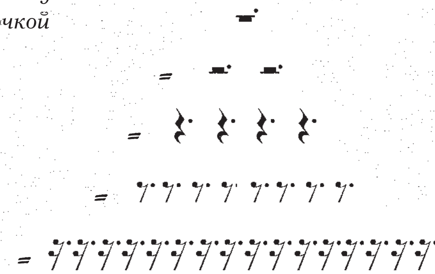
Артикуляция и динамика в музыкальной нотации служат для создания характера и настроения произведения (например, игриво, печально, причудливо или агрессивно). Артикуляция имеет непосредственное отношение к шуму, издаваемому инструментом, и играет роль согласных в музыкальной речи.

Напротив показаны ритмические рисунки с использованием нот увеличенной длительности (нот с точкой). Обратите внимание: удлиняющая ноту точка ставится справа, а не сверху или снизу, как при обозначении стаккато.

Синкопирование и полиритмия еще больше усложняют ритмический рисунок музыкального произведения (*см. с. 396*).



Ноты и паузы
с точкой

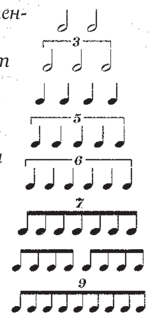


Вверху: Ноты (слева) и паузы (справа) с точкой. Точка увеличивает длительность ноты или паузы ровно в полтора раза. Этот прием весьма полезен в трехдольных ритмах

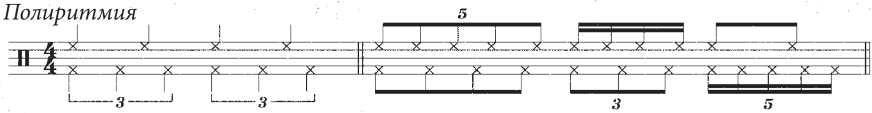
Вверху: Пример в басовом ключе, размер 3/4. Три четверти длятся столько же, сколько половинная нота с точкой

Вверху: Размер 3/8. Три восьмых по длительности равны двум восьмым с точкой или четверти с точкой, весь такт равен половине с точкой

Справа: Метрически обособленные группы длительностей (дуоли, триоли и т. д.) могут включать различное число нот. Эти ноты имеют одинаковую длительность, а время звучания всей группы равно количеству длительностей исходного размера, определяемому контекстом. Теоретически в нотации можно создать метрически обособленную группу любых длительностей



Полиритмия



Вверху: Полиритмия возникает, когда в рамках одного метрического размера появляется два разных независимых ритмических рисунка. Например, 2 против 3 или 5 против 4, 4 против 3, 2 против 5 и т. д.

Синкопирование

Вверху: Синкопой называют перенос акцента с сильной доли тата на слабую. Это меняет наше восприятие музыки, так как лишает ритмический рисунок предсказуемости и стабильности. Переизбыток синкоп нарушает общий ритмический рисунок произведения и мешает нам воспринимать его как единое целое. Недостаток синкоп делает мелодию скучной. В различных культурах за долгое время сложились уникальные приемы и традиции использования синкопы

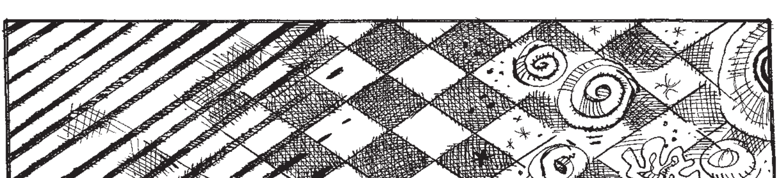
Форма и структура

Куда я иду и как я сюда попал?

Музыкальная структура склонна распадаться на части, или разделы. Вначале появляется общая тема, настроение или мотив, затем в структуру мелодии врезается контрастное пятно, которое, тем не менее, связано с исходной темой и пробуждает в нас желание замкнуть круг, вернуться к тому, с чего все начиналось. Такой неоднородный узор мелодии позволяет слушателю ориентироваться в звуковом пространстве, использовать память и внимание для распознавания музыкальной текстуры. Без этого мы попросту заблудились бы в море несвязанных обрывков тем. Такой прием, безусловно, можно использовать для определенных целей.

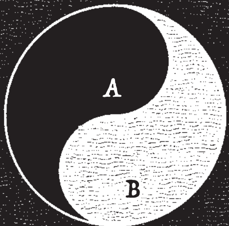
Большинство из нас живет в мире цикличных эмоций, уходит из дома, выходит во внешний мир, получает какой-то опыт и снова возвращается домой. Жизненный путь человека похож на путь музыкальной композиции. Музыка рождается из ничего, живет определенное время, следуя заданной форме и структуре, творит свой спонтанный танец на пике хаоса и порядка и в конце концов возвращается. Стоит отметить, что западная музыка больше склонна к линейности, восточная — к цикличности.

Течение музыки во времени можно нарисовать в виде раскадровки (*внизу*), где один кадр показывает характер, смысл, настроение или движение мелодии. Часто эти кадры располагаются с чередованием уровня сложности, чтобы внимание слушателя не ослабевало.



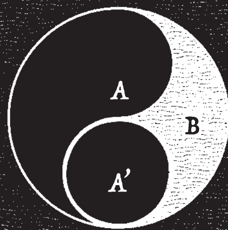
ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ФОРМ В ЗАПАДНОЙ МУЗЫКЕ

ДВУХЧАСТНАЯ



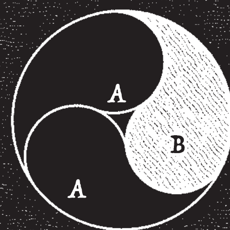
Вверху: Двухчастная форма — просто две контрастные части, объединенные в целое: AB

ДВУХЧАСТНАЯ ЗАКРУГЛЕННАЯ



Вверху: Двухчастная закругленная форма добавляет в конце усеченную форму A, обычно просто для того, чтобы напомнить слушателю, с чего все начиналось: ABA'

ТРЕХЧАСТНАЯ



Вверху: В репризе трехчастной формы снова звучит A. В целом такая структура выглядит как ABA

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ

Некоторые древние схемы показывают, как взаимосвязаны время, место и свойства

Вверху: Характеры, времена года и стихии. На схеме показана динамическая взаимосвязь времени, характера, типа личности

Вверху: Дальневосточная система элементов. Демонстрирует принципы баланса и дисбаланса, показывает, как течет время, где стихии взаимодействуют и влияют друг на друга

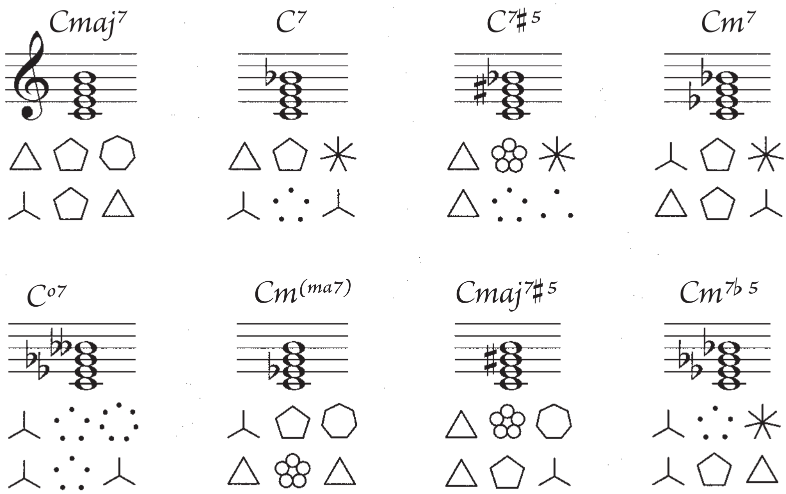
Более сложные гармонии

Септима и ее обращения создают напряжение

Добавив к трезвучию еще одну терцию, мы получим мажорную, минорную или уменьшенную септиму, интервал, который довольно сильно тяготеет к тонике. Если основной тон и квинта создают архитектурную структуру аккорда, то терция и септима задают настроение и оттенок, притяжение и отталкивание. Иногда их называют *ведущими тонами*, так как именно они направляют движение гармонии от аккорда к аккорду и играют роль локомотива для всего звукоряда. Присутствие двух ведущих тонов в аккорде усиливает этот эффект до максимума, например терция и септима в доминантсептаккорде часто разрешаются в основной тон и терцию тоники.

Аккорды, в которых 3-я ступень замещается 2-й или 4-й, называются *аккордами с задержанием* (sus). Примеры таких аккордов показаны *внизу*. Родственные им *аккорды с добавленными ступенями* (add) приобретают интонационную окраску за счет 2, 3 или 6-й ступени звукоряда, при этом теряя одну из базовых нот трезвучия.

Если нижняя нота остается неизменной, в то время как верхние голоса движутся, создавая новые аккорды, мы имеем дело с так называемым *органным пунктом*, т. к. именно на органе музыкант может легко при помощи ножной педали удерживать нижний бас и одновременно играть руками дополнительные изменяющиеся гармонии. При этом центральный неизменный тон может и не быть основным тоном новых аккордов. На самом деле, органный пункт не обязательно должен принадлежать аккорду, что отличает его от обращения.



Вверху: 8 основных септаккордов, полученных из трезвучий добавлением терции сверху. Обратите внимание: состав мажорных аккордов противоположен составу минорных. Аккорды с более чистыми и мажорными интервалами звучат более открыто и экспрессивно. Аккорды с уменьшенными и минорными интервалами, наоборот, звучат достаточно закрыто. Самые большие интервалы в большом мажорном, мажорном и увеличенном мажорном септаккордах. 7♯5 и m7 сбалансированы, а 7, °7 и m7♭5 составлены в основном из меньших интервалов

		$Cmaj^7$	C^7	$C^{7\sharp 5}$	Cm^7	C^{o7}	$Cm^{(ma7)}$	$Cmaj^{7\sharp 5}$	$Cm^{7\flat 5}$
3-е обр.	6 4 2	B	B♭	B♭	B♭	B♭♭	B	B	B♭
2-е обр.	6 4 3	G	G	G♯	G♭	G♭	G	G♯	G♭
1-е обр.	6 5 3	E	E	E	E♭	E♭	E♭	E	E♭
Исходно	7 5 3	C	C	C	C	C	C	C	C

Вверху: Обращения септаккордов. Во второй колонке указано расположение нот относительно нижнего баса, что, по сути, соответствует обращению; 1, 3 и 5-я ступени подразумеваются и не всегда указаны. Полученные аккорды по функциям и характеристикам близки к исходным, поэтому вполне узнаваемы. Мозг всегда собирает ноты в наиболее тесную структуру вне зависимости от того, как они звучат по отдельности, даже если они расположены в разных октавах (см. также с. 256)

Тональность и модуляция

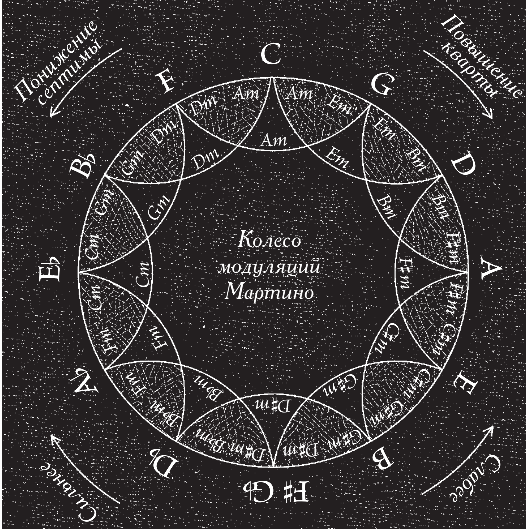
Нет места лучше дома

Тональность, или, иначе говоря, звучание мелодии в определенном ключе, проще всего задать при помощи схемы I—IV—V—I (*см. с. 260, 261*).

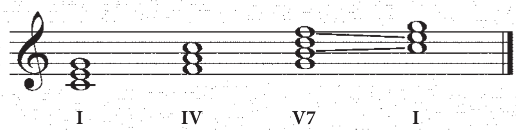
Тонический аккорд берет на себя ту же функцию, что и сама тоника. С него все начинается, на нем заканчивается, и все с ним связано. В тональной музыке вводный тон всегда указывает на тонику, и вследствие цикличности звукоряда остальные устойчивые ноты звукоряда и их аккорды увеличивают или уменьшают силу тяготения тоники, отдаляясь или возвращаясь.

Тем не менее даже весьма сильную тонику можно дестабилизировать. Аккорды в отличие от тоники могут усиливаться включением в их состав соответствующих вводных тонов (терция любого доминант-аккорда на полступени ниже основного тона). Ноты, не входящие в гамму, на какое-то время появляются, чтобы обозначить другие основные тона в качестве возможных тоник. Это может создать ощущение включения новой тональности. Если это происходит в течение достаточно продолжительного времени с повторением схемы I—IV—V—I новой тональности, мы имеем дело с полной *модуляцией* и формированием новой тоники. Если же эти переходы носят временный и непродолжительный характер, можно говорить лишь об *отклонении* от основной тональности.

Спустя некоторое время ухо достаточно привыкает к новой тональности, но тоновая музыка часто возвращается к началу, восстанавливая прежний основной тон и создавая впечатление, что тональность никогда по-настоящему не менялась. Взаимоотношения тональностей влияют на взаимоотношения аккордов, а те, в свою очередь, воздействуют на отдельные ноты звукоряда.



Слева: Квинтовый круг показывает не только общие ноты, но и общие аккорды, которые можно использовать для облегчения модуляции (смены тональности). Мажорные тональности расположены с внешней стороны окружности, а параллельные им минорные — внутри. Каждый мажорный аккорд также принадлежит двум тональностям, расположенным по обе стороны от него. Пример 1: До-мажор (C) имеет общие аккорды с ля-минором (Am), а ре-минор (Dm) — с фа-мажором (F), что хорошо видно на схеме.Пример 2: Ми-минор (Em) делит до-мажорный аккорд (C) с ре-минором (Dm). Повышение кварты дает тональность на квинту выше, понижение септимы — тональность на квинту ниже. В мажорном звукоряде только две пары наименее стабильных тональностей (3—4, 7—8). Они позволяют сменить тональность легче всего.



Справа: Обратите внимание, что в базовой последовательности I—IV—V—I трезвучие или уменьшенная квинта располагается между неустойчивым вводным тоном B и верхней F аккорда G7, сжимаясь внутрь к устойчивому основному тону и терции, связанным восходящим движением доминанты в басу. Это придает аккорду законченность и реалистичность позиции I.

Чтобы выполнить модуляцию из тональности X в тональность Y, найдите модулирующий аккорд, принадлежащий обеим тональностям, и подставьте вместо IV.
То есть на показанном выше круге (по часовой стрелке):
На 2 счета: vi в X — это ii в Y ИЛИ iii в X — это vi в Y
На 1 счет: iii в X — это ii в Y
(другие способы требуют заимствования из параллельного минора

В тональности X:	*1 — Модулирующий аккорд — V — 1*
В тональности X:	*1 — Модулирующий аккорд*
В тональности Y:	*Модулирующий аккорд — V — 1*

Примеры перехода из соль-мажора (G) в ля-мажор (A) и обратно (через си-минор, Bm):
G — Bm — D7 — G, G — Bm — E7 — A
A — Bm — E7 — A, A — Bm — D7 — G

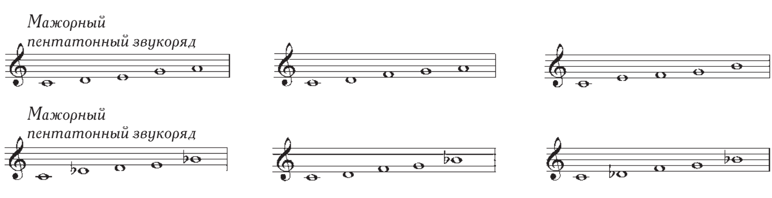
Слева: Каденция (окончание) в музыке играет роль пунктуации в языке. Правильная каденция создает сильный финал всего произведения за счет разрешения вводного тона в тонику. Плагальная каденция, лишенная активной напористости доминанты, звучит утонченно, ее еще называют церковной, потому что ее звучание очень торжественно, как «Аминь» во многих молитвенных пениях западной культуры. Прерванная каденция всегда преподносит сюрприз: любое окончание, кроме ожидаемого. Половинная каденция характеризуется открытым финалом, где в окончании используется доминанта, иногда вместе с тоническим аккордом во втором обращении для увеличения ожидания разрешения

Модальность, тональность, монотонность

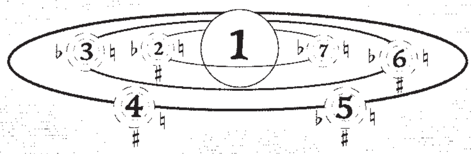
Мировые системы организации звуков

В любом музыкальном звукоряде можно выделить наиболее часто используемый ряд тонов и меньший второстепенный ряд, предназначенный для того, чтобы оттенить первый. Базовый первичный пентатонный звукоряд составляет основу многих ладов по всему миру (*внизу*), так как он наиболее близок к пяти последовательным квинтам. Иные гаммы следуют силе притяжения опорных нот и используют хроматическую альтерацию для придания звучанию напряжения и эмоциональности. Гаммы с большим количеством шагов в половину ступени звучат натянуто, интровертно и патетически, тогда как диатонические гаммы звучат просто, открыто и утверждающе.

По большому счету существует всего три системы организации звуков. *Модальная* музыка не применяет модуляции, свободно использует (а иногда не использует вовсе) вводные тоны; в ней встречаются гармонические перемещения и заимствования аккордов из других гамм. В *тональной* системе присутствует модуляция. Пять побочных тонов, отсутствующих в мажорной гамме, относительно плотно взаимодействуют с нотами основного ряда. Это обусловлено квинтовым кругом ♯4, ♭7, ♯5, ♯1, ♭3, который подразумевает, что каждая побочная нота может стать вводным тоном в родственной тональности. В третьем типе музыкальной организации — *монотонной* системе — гармония отсутствует вовсе. Все интервалы такого звукоряда связаны с единственным неподвижным опорным басовым тоном, при этом в распоряжении музыканта — полный набор хроматических тонов.

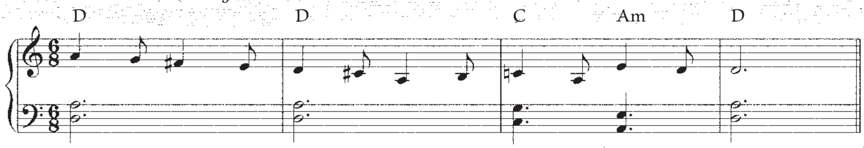


МОДАЛЬНОСТЬ

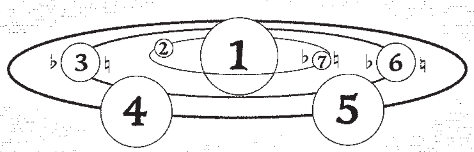


В модальной музыке доминантный аккорд не обязательно должен быть мажорным и может не использоваться в принципе, а вводные тоны могут появляться в позициях, отличных от стандартных мажорных/минорных. Это наиболее распространенный тип системы организации музыкальной гармонии, изменчивый и мягкий

«The Handsome Cabin Boy»



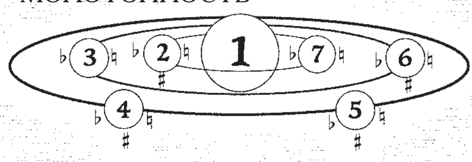
ТОНАЛЬНОСТЬ



Тональная музыка использует всего две модальности — мажорную и минорную. Позиции полутонов четко распределены. Доминантный аккорд всегда играется в мажоре, указывая на тонику с ее сильным вводным тоном (терция ее аккорда, также 7-я ступень гаммы)

Соната № 11 ля-мажор Моцарта

МОНОТОННОСТЬ



Монотонная музыка по своей природе мелодична, а не гармонична. Любая нота может играть здесь любую роль и выполнять разные функции. Тоны складываются в самые разнообразные интервалы и повторяются, при этом каждая нота связана с одним-единственным центральным и неизменным тоном

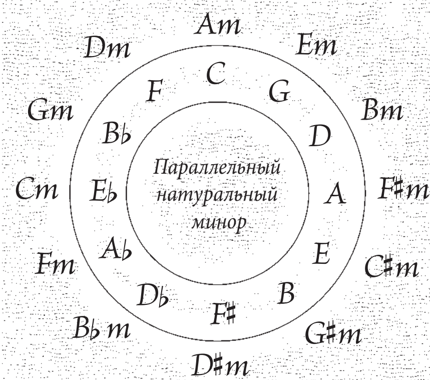
Рага Шивранджани

Три минора

Натуральный, гармонический и мелодический

Активная роль вводных тонов в гармонической музыке создает сложную структуру минорных тональностей. Чистый доминантный аккорд в минорной гамме не является мажорным, что неизбежно влечет за собой потребность в его изменении при помощи вводного тона.

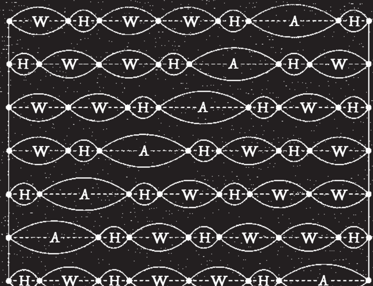
Натуральный минор, имеющий непосредственное отношение к эолийскому ладу, это родственный любой мажорной гамме минор с первой ступенью на терцию ниже мажорной. Поднимаем 3-ю ступень в доминантном аккорде, то есть 7-ю ступень гаммы, и получаем *гармонический* минор. Гармонические минорные гаммы характеризуются явно различимым разрывом между минорной, пониженной на полтона 6-й ступенью и чистой мажорной 7-й ступенью. Разрыв составляет увеличенную секунду, которая не всегда звучит мелодично и походит на интервал из незападной музыки. Чтобы сгладить этот мелодический разрыв, 6-я ступень гаммы была тоже изменена, поднята на полтона, так что восходящее движение минорной гаммы получило явное сходство с мажором в верхних четырех нотах. Это *мелодический* минор. Иногда говорят о двух формах мелодического минора: восходящей и нисходящей, поднимающей на полтона 6-ю ступень или опускающей 7-ю соответственно. На самом деле, нисходящий мелодический минор совершенно идентичен натуральному минору. Трезвучия трех видов минора показаны *внизу*.



Страница напротив: описанные три типа минорных гамм используются попеременно по желанию композитора в соответствии с основными правилами применения хроматизма в минорной гамме. Эти лады, как и мажорный/ионийский, могут быть исходными для создания других. Так, фактически существуют 7 мелодических минорных гамм и 7 гармонических (показаны внизу)

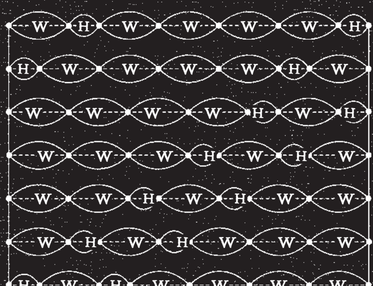
Слева: Звукоряд натурального минора идентичен параллельному мажорному, сдвинутому на терцию вниз. Так, ля-минор (Am) и до-мажор (C) — это фактически те же ноты, сдвинутые на терцию. Натуральный — эолийский — минор в своем составе имеет те же звуки, что и родственный ему ионийский мажор, поэтому для них применяется одинаковое обозначение (см. с. 251)

Семь гамм гармонического минора



	До	Ре	Ми	Фа	Соль	Ля	Си	До
1			♭			♭		
2		♭	♭		♭		♭	
3					♯			
4			♭	♯			♭	
5		♭				♭	♭	
6		♯		♯				
7		♭	♭	♭	♭	♭	♭♭	

Семь гамм мелодического минора



	До	Ре	Ми	Фа	Соль	Ля	Си	До
1			♭					
2		♭	♭				♭	
3				♯	♯			
4				♯			♭	
5						♭	♭	
6			♭		♭	♭	♭	
7		♭	♭	♭	♭	♭	♭	

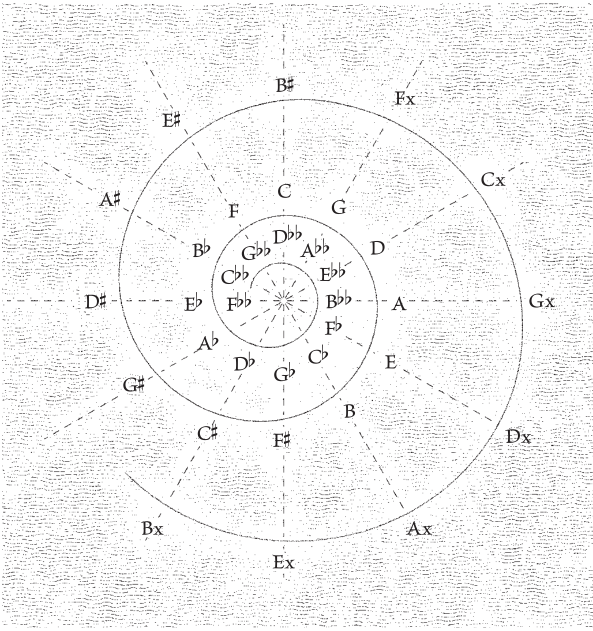
Больше интервалов

Большой увеличивается, малый уменьшается

Интервалы можно обращать так же, как аккорды. Обращенная терция превращается в сексту, септима становится секундой. Мажорные интервалы после обращения становятся минорными, увеличенные — уменьшенными, и наоборот. Обращенные интервалы выполняют те же базовые функции, что и их исходные версии, но звучат гораздо более неуверенно. Композиторы жонглируют обращенными интервалами для создания нужного эффекта, увеличивая или уменьшая их еще больше. Например, растягивание мажорной сексты дает увеличенную сексту, которая по звучанию идентична уменьшенной септиме, но в общей композиционной структуре выполняет иные функции. Так, увеличенная секста разрешается вовне, а уменьшенная — внутрь: большая становится больше, малая — меньше. Похожим образом взаимодействуют уменьшенная септима и мажорная секста. Они тоже звучат одинаково, но функционируют по-разному. Мажорная секста стремится либо на ступень ниже, к квинте, либо на шаг выше, к мажорной септиме, в то время как уменьшенная септима почти всегда уменьшается на полступени. Произношение и синтаксис определяют поведение и направленность интервала.

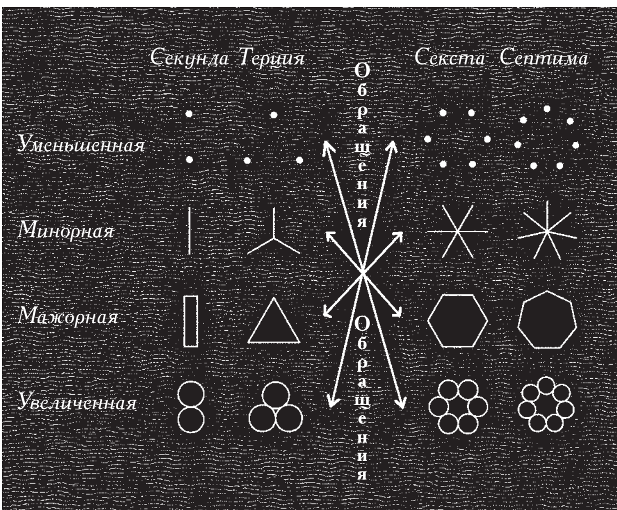
Внизу показаны три *уменьшенные* гаммы. Уменьшенная гамма представляет собой чередование тон — полутон или полутон — тон. Кроме того, в примере показаны две гаммы, в которых присутствуют только целые тоны. Такие гаммы могут вызывать у слушателя загадочное чувство неопределенности и неизвестности.

Три уменьшенные и две целотонные гаммы



Слева: Энгармонизм и хроматизм. Комбинация квинтового круга и квинтовой спирали показывает 35 возможных написаний для 12 нот. Помните, в гамме 7 нот (A B C D E F G) и пять цветов для каждой. Самые дальние и самые близкие написания используются реже всего (Bx, Ex, F♭♭, C♭♭). Тем не менее для гаммы должна существовать хроматическая альтерация, так как время от времени она все же используется (пониженный бемоль = = двойной бемоль, повышенный бемоль = чистая нота, пониженный диез = чистая нота, повышенная чистая = = диез, повышенный диез = = двойной диез).

Эта схема подразумевает равномерную темперацию. Ее не следует путать с диаграммой, демонстрирующей проблемы настройки и пифагорову комму (о чем шла речь в Книге IV).



Слева: Несовершенные консонансы (терции и сексты) и диссонансы (секунды и септимы) иногда появляются в двух крайних формах помимо мажорной и минорной. Хроматическое увеличение мажорного интервала перестраивает его в увеличенный интервал. Похожим образом дальнейшее уменьшение минорного интервала создает уменьшенный интервал, так же как чистый интервал становится уменьшенным в результате понижения верхней ступени.

В сложной и богатой хроматизмами музыке время от времени применяются подобные интервалы для создания еще большего тяготения и напряжения всей тоновой структуры

Структура музыкальной формы

Тезис, антитезис, синтез

Человеческое мышление по своей сути подвержено влиянию всевозможных шаблонов, художники и музыканты во всем мире веками используют этот факт, чтобы воздействовать на свою аудиторию. Идея формулируется, затем подвергается серии трансформаций и либо принимается, либо отвергается. Эта драма отречения и принятия воссоздается в музыке и может проявляться в трех основных элементах.

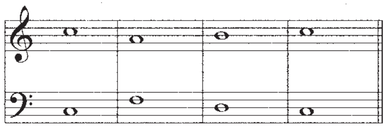
Повторение, или тезис. Любому мотиву проще всего утвердиться через повторение. Повторения работают прекрасно, потому что аудитория легко их воспринимает и хорошо в них ориентируется. Повторения выполняют функцию временны́х якорей.

Контраст, или антитезис. Драма начинается. Вводится новый мотив, возможно, полностью противоречащий исходному, создающий новые узоры тяготения и отторжения. Контрастный мотив без элементов переноса предыдущей мелодии — это отрицание.

Вариация, или синтез. Воссоединение двух противоположностей — повторения и контраста. Иногда изображается в виде точки опоры (*внизу*).

Мелодии, песни и симфонии — везде используются три описанных выше элемента музыкальной структуры; от целого (повторение) через разделение или трансформацию (вариация) к отрицанию (контраст). Наш мозг впитывает в себя каждую новую идею и сравнивает ее с предыдущим опытом. Подобные попытки порождают у наблюдателя ожидания, которые могут оправдаться или не оправдаться. Хороший художник использует это знание при создании книг, кинофильмов, мелодий и ритмов.

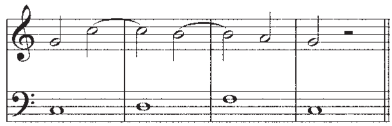
Виды контрапункта



1. Нота против ноты. Используются только консонансы. Осторожное уклонение от параллельных скачков и шагов, особенно к чистым интервалам, за исключением каденции

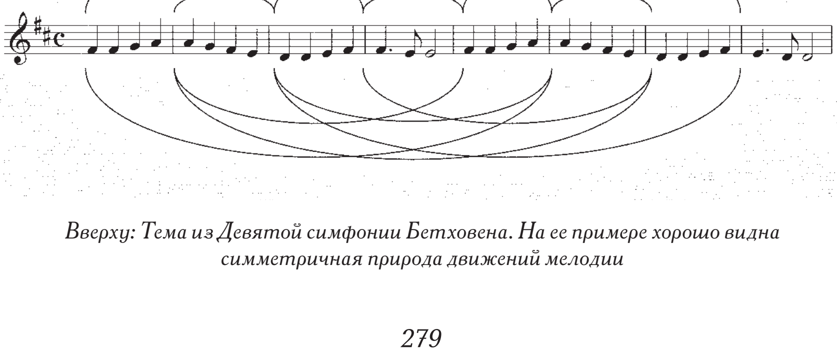
2. Две ноты против одной. Проходящие ноты участвуют в качестве диссонансов, звучащих только на слабую долю. Контрапунктная мелодия может начинаться во время паузы

3. Четыре (или три) ноты против одной. Здесь могут использоваться проходящие, вспомогательные и даже брошенные тоны — в качестве «довесков» к консонансам на сильных долях



4. Приостановка — контрастные ноты. Консонансы присутствуют на слабых долях, а когда ноты в главной теме меняются, звучит продолжительный диссонансный тон, который потом разрешается на шаг вниз

Вверху: Контрапункт — это система написания полифонической музыки, появившаяся в XVI веке. Cantus firmus, или главная тема, выделяется новой мелодической линией вверху. Пятый вид контрапункта представляет собой комбинацию из четырех предыдущих. Контрапункт — это смешение мелодий, где каждая линия развивается независимо от другой таким образом, чтобы создавалось объемное звучание (часто по сильным долям метра, чтобы подчеркнуть общую структуру гармонии). Четыре основных хоровых голоса (сопрано, альт, тенор и бас) в контрапункте становятся мелодией, аккомпанементом и «внутренними голосами». Верхний голос получает наибольшую значимость для мелодии, остальные берут на себя поддерживающую функцию, в итоге они составляют единые аккорды. Более гомофонная форма — это «мелодия и аккомпанемент», с которой мы все хорошо знакомы. Существует три типа контрапунктного движения: параллельное, противоположное и диагональное



Вверху: Тема из Девятой симфонии Бетховена. На ее примере хорошо видна симметричная природа движений мелодии

Сложные последовательности аккордов

Выходя за рамки привычного

Для создания богатой палитры гармоний следует отступить от привычной схемы I—IV—V—I и попробовать использовать новые, более сложные структуры при помощи заимствования аккордов из параллельных тональностей.

Так как именно основной тон аккорда задает его свойства, мы можем свободно замещать аккорды теми, что построены на той же ступени гаммы (*напротив вверху*), не нарушая тем самым общую гармонию. Так, мажорную субдоминанту (IV) можно заменить минорной (iv), а минорную медианту (iii) — мажорной (♭III) или ее обращением (♭III+). До тех пор пока базовые каденции время от времени появляются, чтобы усилить тонику, аккорды могут заимствоваться относительно свободно.

Доминантсептаккорд состоит из симметричных интервалов (*внизу*), поэтому идеально подходит для замещения. Когда основной тон смещается на три тона, 3-я и 7-я ступени каждого аккорда меняются местами. Название интервала меняется при помощи энгармонизма для сохранения исходного синтаксиса, но звучание остается прежним. По сути, когда мы перемещаем септаккорды по квинтовому кругу, 3-я и 7-я ступени каждого аккорда меняются местами и плавно скользят по ступеням, часто называемым ведущими тонами. Такое взаимодействие усиливает стремление гармонической линии. В большинстве аккордов гармоническую функцию задают основной тон, 3-я и 7-я ступени, поэтому в звучание аккорда часто не включается 5-я ступень, которая служит только для структурного усиления тоники. Тем не менее, если 5-я ступень изменяется (♯ или ♭, увеличивается или уменьшается), ее окраска также включается в общее звучание гармонии.

Подстановка тритонов *Ведущие тоны* *Изменение 5-й ступени*

Ступень гаммы	1	2	3	4	5	6	7	8
Мажор	C I	Dm ii	Em iii	F IV	G V	Am vi	B° vii°	C I
Натуральный минор	Cm i	D° ii°	E♭ ♭III	Fm iv	Gm v	A♭ ♭VI	B♭ ♭VII	Cm i
Гармонический минор	Cm i	D° ii°	E♭+ ♭III+	Fm iv	G V	A♭ ♭VI	B° vii°	Cm i
Мелодический минор	Cm i	Dm ii	E♭+ ♭III+	F IV	G V	A° vi°	B° vii°	Cm i
Побочные доминанты	C^7 V^7/IV	D^7 V^7/V	E^7 V^7/vi	F^7 V^7/♭VII	G^7	A^7 V^7/ii	B^7 V^7/iii	C^7 V^7/IV
Минорные побочные доминанты			$E^{\flat 7}$ V^7/♭VI			$A^{\flat 7}$ V^7/♭II	$B^{\flat 7}$ V^7/♭III	

Вверху: Таблица замещений. Побочные доминанты работают так же, как главные доминанты, и подразумевают разрешение в кварту выше или квинту ниже. Для них требуется хроматическая альтерация основной гаммы. Новый вводный тон временно предполагает альтернативную тональность, но обычно она сохраняется ненадолго, появляясь либо в виде переходного аккорда, либо как отклонение. Присутствие заимствованных аккордов ослабляет тонику, но часто придает звучанию прелестный оттенок, отчасти за счет разрушения ожиданий слушателя относительно звучания следующего аккорда и заданной тональности

«Изумительное благоволение»				«Зеленые рукава»			
I	V^7/IV	IV	I	i	♭VII	♭VI	V^7
I	I_6	V	V^7	i	♭VII	♭VI - V^7	i
I	V^7/IV	IV	I	♭III	♭VII	♭VI	V^7
I_4^6	V^7	IV_4^6	I	♭III	♭VII	♭VI - V^7	i

В известном песнопении «Изумительное благоволение» используются обращения и побочная доминанта, в данном случае 5-я ступень субдоминанты (IV). Она звучит очень схоже с первым аккордом, только с добавлением 7-й ступени. В ирландской народной песне «Зеленые рукава» присутствует настоящая модальная гармоническая последовательность со свободными заимствованиями из параллельного мажора и легким указанием на родственный мажор в третьей и четвертой фразах. Есть множество способов гармонизировать мелодии этих песен, в примерах выше приведен лишь один из возможных вариантов

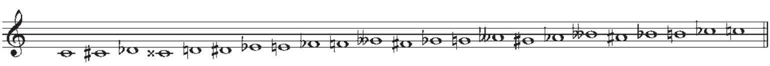
Вокруг света

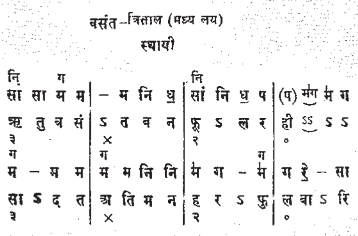
За четыре песни

Любая система музыкальной нотации, по сути, представляет собой набор инструкций по воспроизведению звуков на определенном отрезке времени. Она представляет собой что-то вроде временно́й линии с распределенными по ней акустическими эффектами, а если мы имеем дело с песней, то еще и словами. Линии, дуги, подчеркивания, числа, буквы, точки и круги — все эти знаки используются для того, чтобы донести до исполнителя авторское ви́дение внутренней сущности мелодии.

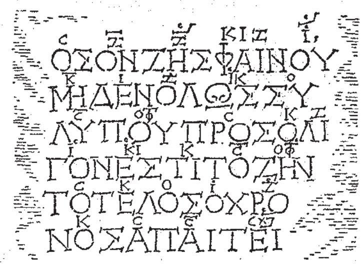
Раньше музыка была исключительно устной традицией, больше всего похожей на историю, передаваемую из уст в уста. По мере взросления человечества появилась потребность в способе, который позволил бы передавать музыку большему количеству людей. В результате появилась графическая система записи музыкальных звуков, которая сделала музыку доступной широкому кругу музыкантов и слушателей. Кроме того, музыкальная нотация сохраняла музыку в первозданном виде для последующих поколений. Примерно в то же время был изобретен печатный станок. В целом различные виды музыкальной нотации (четыре из них показаны *напротив*) весьма схожи, потому что человечество располагает одинаковыми музыкальными и речевыми звуками. Все они отражают ритмическую структуру, взаимосвязь нот со слогами текста, мелодические контуры и общую композицию.

В сложной традиционной индийской настройке возможны 22 тона, позволяющие создавать чистые акустические созвучия, где отношение высоты звуков составляет пропорцию целых чисел. Звукоряд соответствует выбранной *раге*. Каждые 7 нот в *тхаате* или *мелакарте* обладают индивидуальным звучанием, не похожим на западные лады. *Свары* (*Са*, *Ре*, *Га*, *Ма*, *Па*, *Дха*, *Ни*) образованы из 22 *шрути*.

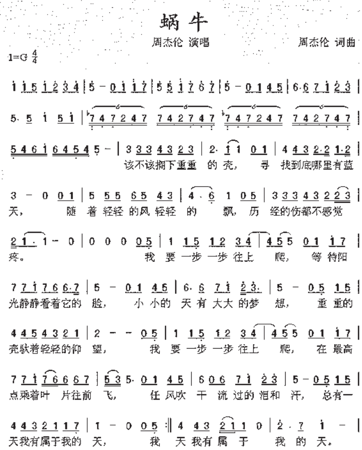




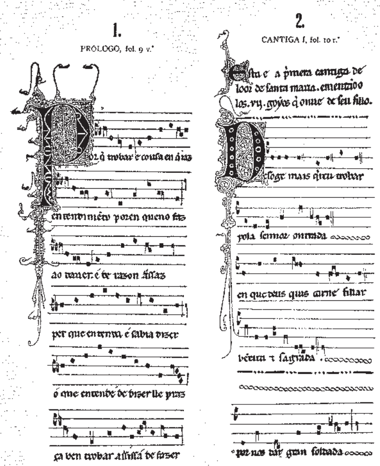
Нотация Бхаткханде (Индия), начало XX в. Используется для обозначения раги, тала и темпа, равно как и мелодии и текста песни в индийской музыке



«Эпитафия Сейкила» (Греция), ок. 200 г. до Р. Х. — 100 г. н. э. Это самое древнее из дошедших до наших дней музыкальных произведений. Здесь записаны мелодия и текст песни



Янпу — Китай, XVIII в. В этой системе для записи высоты ноты используются числа, а для обозначения длительности ноты и пауз — точки и линии. Слова песни записываются под нотами



Средневековая Европа, XIII в. Нотный стан, использованный здесь, очень напоминает тот, что мы привыкли видеть в современной западной нотной записи. Квадраты и линии кодируют ритм и высоту ноты, слова записываются под нотами

Расширенные гармонии

Украшения и дополнения

Доминантный аккорд — это аккорд надежды и предвкушения. Для придания этому аккорду большей сложности к звучанию добавляют хроматические ноты. Это к тому же усиливает тяготение к разрешению, с помощью которого композитор создает необходимые чувства у слушателя.

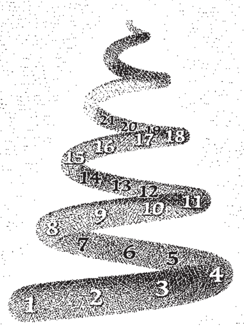
Дополнения можно применять в аккордах любых видов — мажорных и минорных, уменьшенных или увеличенных.

Именно неаккордовые или неустойчивые ноты придают окраску звучанию, присущему аккорду. Когда такое дополнение звучит в непосредственной близости от устойчивых нот, создается эффект «усиления». Если же оно на октаву выше, то становится ноной, ундецимой или терцдецимой, обычно такие звуки появляются одновременно с последовательно построенными друг над другом терциями. От основного тона мы проходим путь через 3, 5, 7, 9, 11, 13 ступени и, возможно, обратно (*напротив вверху*). Такая организация звуков может порождать поразительно сложные гармонии, хотя нижние три ноты из этой группы все еще сохраняют исходную идентичность и насыщают структуру основным оттенком. С XIX века изучались возможности подобных расширенных гармоний, в частности, в джазе.

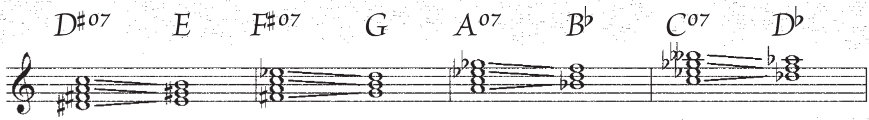
Есть 6 аккордов с хроматической альтерацией, которые не подходят под обычную схему параллельных заимствований из мажора/минора. Иногда их называют бродячими. Они являются альтерацией субдоминантаккорда, оттеняющего доминанту.

Примеры аккордов с дополнениями показаны *внизу*.

MISTY (A)	E♭maj7		| B♭m9	E♭13	| A♭maj7		| A♭m9	D♭13#11
	E♭maj7	C7#9	| Fm7	B♭7	| Gm7	C7♭9	| Fm7	B♭13♭9

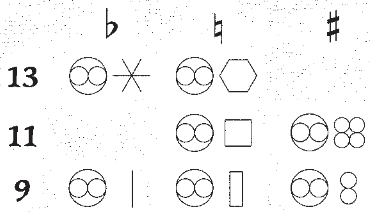


Слева: Ноты могут группироваться вверху аккорда над основным тоном в порядке 3, 5, 7-я ступени и октава, усложняя и обогащая таким образом его структуру и звучание. Чем эти ноты выше, тем меньше функциональной нагрузки они несут и тем более красочными становятся. Прибавляя новые ноты, мы оставляем в аккорде все основные нижние ноты. Если же с появлением верхней ноты исчезает одна из нижних, то мы имеем дело не с дополнениями, а с аккордом с добавленными ступенями (см. с. 268). Несколько примеров показаны выше



Вверху: Многократные разрешения уменьшенного септаккорда. Уменьшенный аккорд совершенно симметричен, в его составе только минорные терции, поэтому каждый из его звуков потенциально может функционировать как основной тон. В примерах выше показано, как 4 одинаковые ноты в каждом обращении дают слегка отличающееся энгармоническое написание одного и того же уменьшенного аккорда, сохраняя при этом синтаксис терций. У каждого тона есть возможность стать вводным тоном и разрешаться на полтона выше. Тем не менее разрешение возможно в 4 различных аккорда. В результате 4 основных тона поочередно составляют уменьшенный аккорд из последовательных минорных терций (E-G-B♭-D♭).

Вверху: Разрешения различных септаккордов. Итальянская, немецкая и французская версии функционируют как побочные доминаты, усиливающие главную. В итальянской версии увеличенная секста составлена из A♭ и F♯, которые разрешаются вовне. Немецкий аккорд опирается на чистую квинту, в то время как необычное звучание французской версии обеспечивается увеличенной квартой, составляющей аккорд с двумя мажорными терциями и двумя увеличенными квартами, или тритонами, — симметричный с точки зрения гармонии аккорд. Неаполитанская версия функционирует как субдоминанта, обычно это ♭II-аккорд, популярный в миноре



Слева: Промежуточные тоны 2, 4 и 6 соотносятся с родственными им тонами на октаву выше 9, 11 и 13, которые перенимают их окраску (пониженную, натуральную или повышенную). То же касается остальных тонов на октаву выше основных

Сложные формы

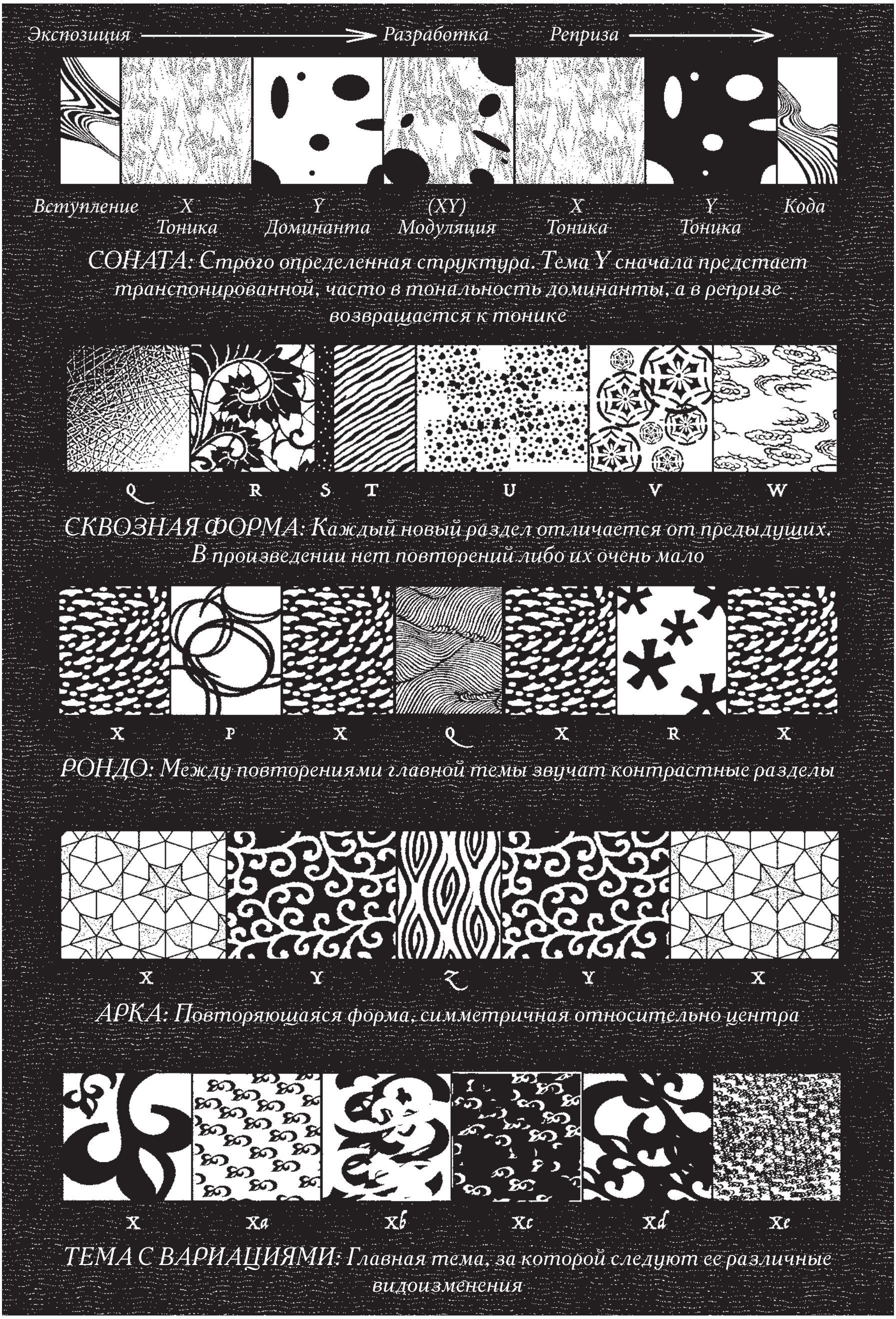
Объединение различных структур

Музыкальные структуры часто смешиваются и переплетаются, создавая новые, исторически устойчивые формы. При совмещении отдельных внутренне однородных элементов получаются более сложные и гибкие структуры. Визуально этот процесс легко передать при помощи раскадровки.

Слушатель наиболее внимателен в самом начале композиции, поэтому самая важная тема обычно содержится именно в первых тактах. Исходным темпом является *allegro* (живо), возможно, с чуть более медленным вступлением. Середина в отличие от начала звучит задумчиво, как пауза после насыщенного начала. Финал чаще всего бывает светлым, игривым и танцевальным. Этот распространенный шаблон происходит от сюит эпохи барокко, которые состояли из набора отрывков с разным настроением.

Существует общий формат развития сложной формы: экспозиция, противопоставление, разработка, подведение итогов и иногда трансформация. Часто в произведении есть высшая точка или ряд таких точек, которым предшествует нарастание напряжения и поступательное повышение частоты звучания. После достижения пика экспрессии накал ослабевает, мелодия сворачивается и успокаивается.

Расцвет сонатной формы пришелся на классический период, но она используется до сих пор. В этой форме закрепилась определенная взаимосвязь между тональностью и темой (партией). Главная тема звучит после вступления, после чего появляется контрастная побочная тема. В разделе разработки две темы смешиваются и видоизменяются, могут появиться тональная неустойчивость и двойственность. Затем обе темы возвращаются в репризе. Тем не менее вторая тема теперь звучит в тональности тоники, в то время как первая — в доминантном ключе (или иногда в другой родственной тональности). Так слияние и разделение рождают единое музыкальное повествование.


Экспозиция
Разработка
Реприза
Вступление
X
Тоника
Y
Доминанта
(XY)
Модуляция
X
Тоника
Y
Тоника
Кода
СОНАТА: Строго определенная структура. Тема Y сначала предстает транспонированной, часто в тональность доминанты, а в репризе возвращается к тонике
Q R S T U V W
СКВОЗНАЯ ФОРМА: Каждый новый раздел отличается от предыдущих. В произведении нет повторений либо их очень мало
X P X Q X R X
РОНДО: Между повторениями главной темы звучат контрастные разделы
X Y Z Y X
АРКА: Повторяющаяся форма, симметричная относительно центра
X Xa Xb Xc Xd Xe
ТЕМА С ВАРИАЦИЯМИ: Главная тема, за которой следуют ее различные видоизменения

Финальная компиляция

Задумка, создание и запись

Повествовательные возможности музыки практически безграничны. Талантливый композитор вкладывает в свое произведение множество смыслов и идей, нам остается лишь научиться их распознавать и принимать. В звучании музыки мы можем почувствовать или даже измерить глубину музыкальной драмы, наблюдая за механизмами взаимодействия нот и гармоний. Мы можем определить степень контраста, подсчитать число повторений и, что важнее, понять смысл вариаций и трансформаций в их эволюционном развитии.

Фразы мелодии, как и устойчивые ноты гаммы, обладают собственным тяготением, и в их взаимодействии разворачивается музыкальная история. Когда эта история создана руками мастера, наши души следуют за ней через все пики и падения.

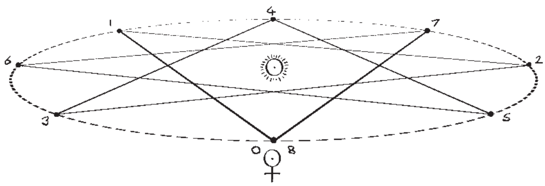
Самые разнообразные нюансы мелодии легче всего отыскать среди большого количества специфических гамм, созданных в мире. Хотя в каждой из них присутствует некая форма квинты и терции, именно ноты между ними передают действительное значение, отвечают за тяготение и разрешение. Ритм музыкального произведения часто довольно предсказуем, его сильные доли распределяются достаточно равномерно, в то время как происходящее вне основного ритмического рисунка гораздо сложнее и в некотором роде важнее для создания цельной картины. Два этих рисунка — мелодия и ритм — складываются в цельную завершенную композицию, где сплетаются противоположности. Так рождается музыка.

Наша любимая музыка — это драма взаимодействия противоположностей, разворачивающаяся на наших глазах, повторяющаяся, контрастная и, что важнее, изменчивая в мелодии, гармонии и ритме.

Chopin Prelude Op. 28, No. 7

Прелюдия Шопена, тональность ля-мажор (A), темп андантино (неспешно), размер 3/4, играть нежно и плавно. Дугообразные линии (лиги) объединяют фразы. Мелодия начинается из затакта на третий счет. Аккорд E7 подразумевает тональность A. Ступень C♯ в первом такте — это аподжатура, за ней следуют 3 повторяющихся аккорда, вместе они формируют основную интонацию этого маленького отрезка. На счет три во втором такте появляются два брошенных тона, за которыми следует пара аподжатур в третьем такте. Гармония следует от V к I, завершая одну полную фразу. В пятом такте снова проявляется первая интонация, с удвоенной аподжатурой на первый счет, на этот раз с доминантнонаккордом вместо доминантсептаккорда, стоящего ранее. Третья ступень G♯ теперь отсутствует. Вторая фраза завершается в восьмом такте, а в девятом начинается дословное повторение первой фразы. Одиннадцатый такт очень похож на третий, только в нем звучат чуть более высокие ноты. В следующем такте неожиданно появляется побочный доминантный F♯7, самый «плотный» в этом отрывке. Теперь пришло время возвращаться обратно. В тринадцатом такте на первый счет приходится проходящий тон, за которым следуют пониженная септима си-минора (B-moll) и снова доминантнонаккорд, но на этот раз в его составе терция G♯ (спасибо, Шопен). Последняя лига — это широкий финальный жест с тоникой вверху, которая подтверждает, что музыка действительно закончилась

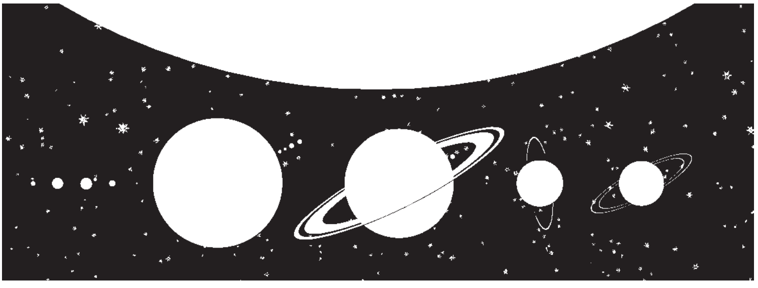
КНИГА VI



Поднимайтесь на холм каждый год в полдень в день своего рождения и наблюдайте за Солнцем. Каждый год Венера будет на $^3/_8$ дальше на своей околосолнечной орбите, которая раз в 8 лет описывает правильную октаграмму. Еще раз взгляните на рисунок на с. 43

Маленькая книга

ГАРМОНИИ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ



Джейсон Мартино

Набор полезных глифов от каллиграфа Марка Миллса. Эти знаки, составленные из символов Солнца, Луны и Земли, используются во всей книге

Введение

Сегодня принято считать, что биологическая жизнь появилась на нашей планете спустя совсем недолгое время после ее формирования. Есть вероятность того, что споры бактерий могли попасть на Землю на хвосте кометы или метеорита. Не утихают дискуссии о существовании жизни под поверхностью Марса, на ледяном спутнике Юпитера и везде, где доподлинно известно о наличии божественной жидкости под названием вода. Последние схемы, изображающие нашу Вселенную, по своей структуре удивительно напоминают громадную нейронную сеть, предполагающую возможность существования космического разума — древняя идея, которая сегодня переживает свое второе рождение.

Наука о космосе изменилась до неузнаваемости со времен Древней Греции и Средневековья. Однако несмотря на все научные открытия последних лет, Земля остается главной загадкой современности. До сих пор не существует достаточно убедительной теории, способной объяснить существование разумных форм жизни, а также бесчисленного количества копий нашей планеты в космосе. Возможно, эти два факта взаимосвязаны. Не следует воспринимать эту книгу как еще один карманный справочник по Солнечной системе, она скорее является попыткой приблизиться к разгадке основополагающих взаимоотношений между космосом, временем и жизнью.

Сегодня мы сканируем пространство в поисках разумных сигналов и ищем планеты, похожие по своим характеристикам на Землю. В то же время другие планеты Солнечной системы — наши ближайшие соседи — рисуют изящнейшие узоры вокруг нас, и ни один ученый не может точно объяснить природу этого явления. Неужели *все это* действительно *лишь совпадения*? Почему Луна и Солнце в небе кажутся одинакового размера? Почему планета Венера демонстрирует те же «арифметические» закономерности, что и растения на Земле? Приступайте к чтению — тогда сможете составить собственное мнение.

Галактическая пыль

Хорошо настроенная Вселенная

В нашей Вселенной постоянно что-то происходит. Сегодня мы можем увидеть столько звезд на небосклоне, сколько песчинок в пустынях Земли. Наша планета и мы сами состоим из преобразованной дымчатой звездной пыли — так считали наши предки много веков назад. Теперь мы знаем, что сама звездная пыль состоит просто из пузырьков, высокоорганизованных мерцающих вихрей света, миллионы лет назад спрессованных глубоко внутри звезд. А сами мы живем между бесконечно большим и бесконечно малым, в универсуме, где все постоянно сжимается, кристаллизуется, структурируется и наконец принимает законченную форму.

Только представьте, насколько наша Земля идеальна! Забавно, что до сих пор научно не обяснен тот факт, что вся *Вселенная* видится идеально организованной единой системой. В ней присутствует *ровно столько* вещества, сколько необходимо для стабильного функционирования, а пропорции между основными силами кажутся *специально подобранными*, чтобы сформировать потрясающе сложный, прекрасный и устойчивый универсум. Поиграйте хоть немного с любыми константами — и вы получите Вселенную черных дыр, нематериальных пузырьков и прочих неодушевленных структур. Это замысел или совпадение? Возможно, наша Вселенная — это детище успешных родителей, сформировавших ее структуру. Не исключено, что первопричина всего сущего, как считал Платон, есть идеальные субстанции, которые существуют объективно, независимо от сознания человека.

История поиска порядка, закономерностей и значений в космосе насчитывает тысячелетия. Человечество, наблюдая за планетами Солнечной системы, давно задумывается о наличии между ними таинственных связей. В античные времена студенты размышляли над *музыкой сфер*, сегодня они так же экспериментируют с законами Кеплера, Ньютона и Эйнштейна.

Кто знает, что будет дальше?


Мы —
здесь

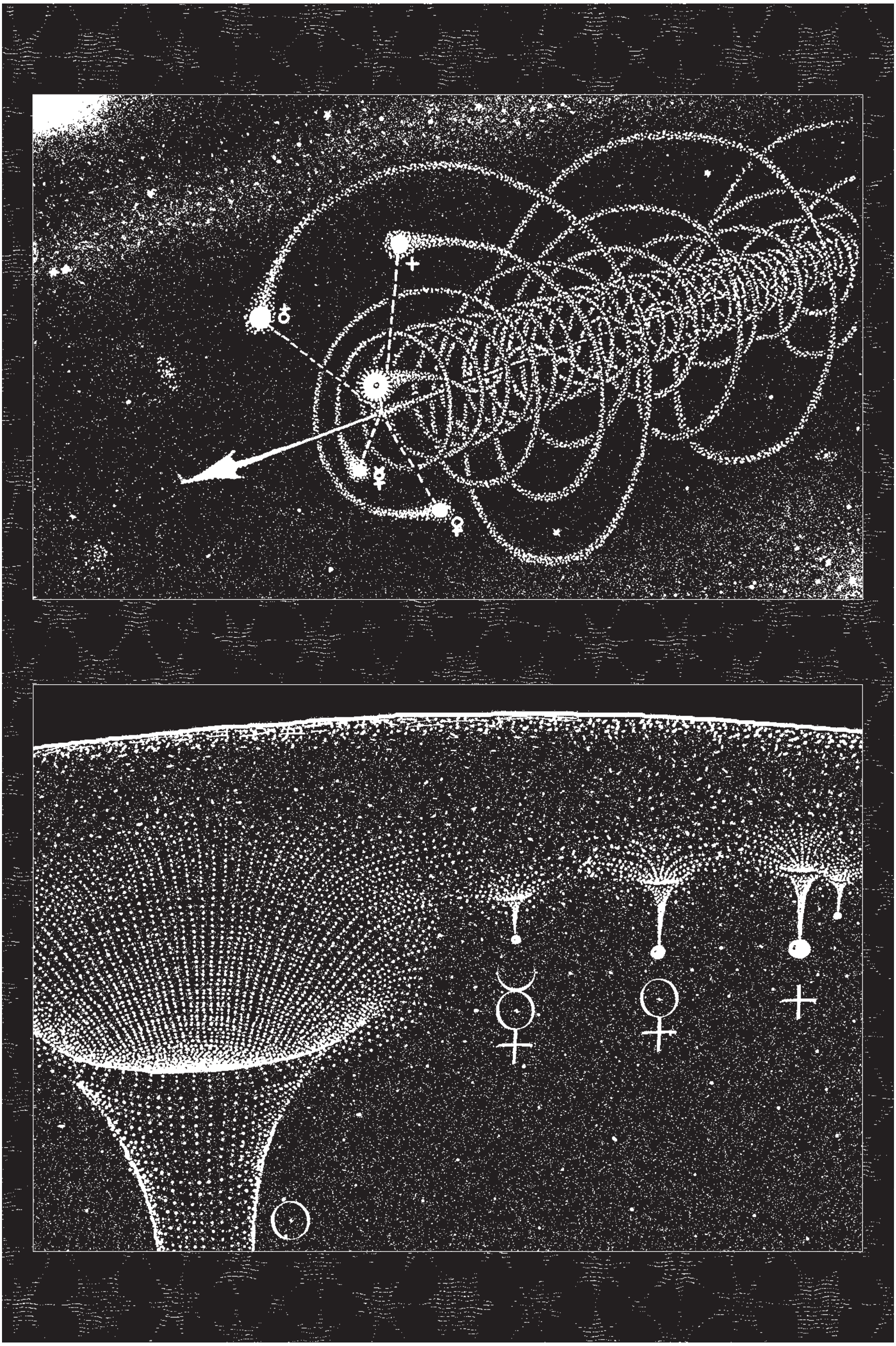
Солнечная система

Повсюду спирали

Вероятнее всего, Солнечная система образовалась около 5 миллиардов лет назад вследствие уплотнения осколков своей более ранней версии. В ее центре зажглось Солнце, а из оставшихся материалов сформировались небольшие твердые астероиды. Легкие газы под воздействием солнечного ветра были оттеснены к внешним границам и создали четыре газовых гиганта: Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун, в то время как ближе к центру системы астероиды, сталкиваясь, увеличивались и образовывали планеты. Эти планеты обладали огромным запасом энергии, тем большим, чем больше масса (до сих пор из-за этого у многих сохранилось раскаленное ядро). Находясь под взаимным воздействием, новые планеты меняли свои орбиты до тех пор, пока Солнечная система не обрела стабильность, которую сохраняет до сегодняшнего дня.

Плоскость Солнечной системы наклонена под углом примерно 30° к плоскости нашей Галактики, и она поворачивается по спирали вдоль Млечного пути. На рисунке (*напротив вверху, по Уинделиусу и Такеру*) схематично изображены траектории движения четырех внутренних планет (также называемых планетами земной группы. — *Ред.*).

Другой способ визуализации Солнечной системы в пространстве и времени заключается в том, чтобы представить себе резиновое полотно, на котором расположены тяжелый шар (Солнце) и маленькие стеклянные шарики (планеты) — *внизу напротив, по Марчи*. Эту модель создал Эйнштейн, чтобы наглядно показать взаимосвязь силы гравитации и массы. Если мы бросим на наше полотно маленькую горошинку, ее легко может притянуть к себе любой из стеклянных шариков-планет, или она покрутится немного и выпадет снова наружу, или она будет двигаться по быстро закручивающейся эллиптической орбите в одной из существующих канавок. Чем глубже в воронку помещается горошина, тем быстрее она вращается, опускаясь по трубе. Кроме того, чем быстрее она вращается, тем тяжелее становится и тем медленнее идут на ней часы.

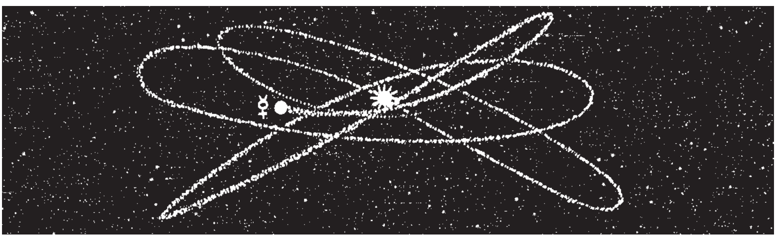


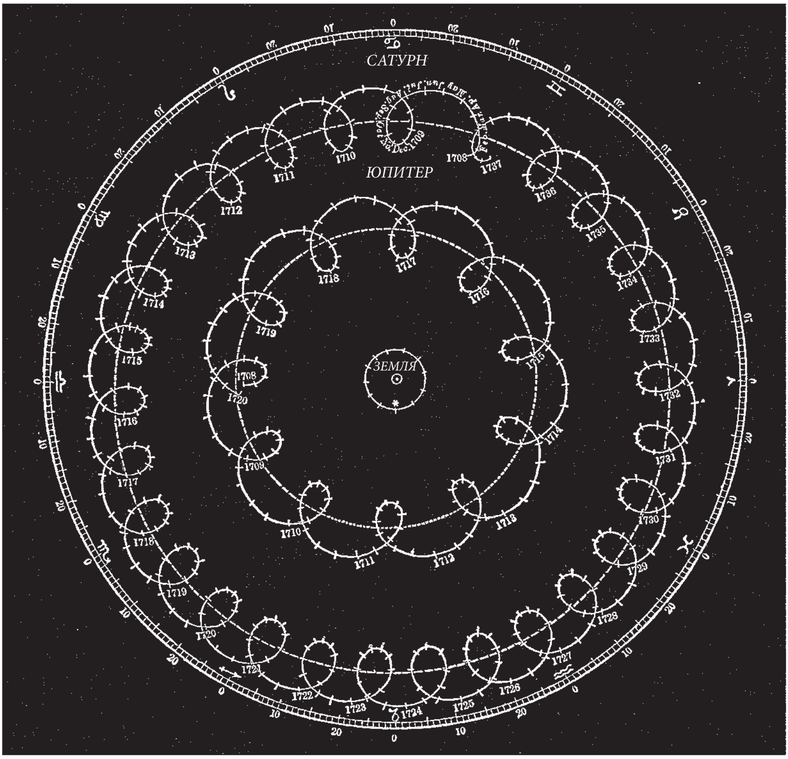
Обратное движение

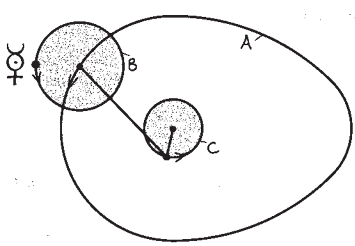
Кружение

Древние астрономы заметили, что помимо Солнца и Луны на земном небосводе присутствует еще пять легко различимых светящихся точек, которые движутся между звездами. Это планеты, которые, как и Земля, движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, отражая видимое движение Солнца по большому кругу, *эклиптике*. Но если бы все было так просто! Понаблюдайте за этими планетами достаточно продолжительное время — и увидите, что траектория их движения далеко не так проста. Они крутятся и вертятся, словно пьяные пчелы. Приближаясь друг к другу, две планеты отталкиваются, иными словами, на какое-то время начинают двигаться в обратную сторону.

На схеме внизу показана траектория движения Меркурия вокруг Солнца, как это видно с Земли (*по Шульцу*), а *напротив* — сделанный в XVIII веке набросок Кассини, изображающий перемещения Юпитера и Сатурна. В древние времена ученые создавали огромные и сложные системы из шаров и колес в попытках имитировать движение планет (*напротив внизу*). Одной из самых совершенных подобных систем стала геоцентрическая модель Птолемея из 39 *деферентов* и *эпициклов*; созданная более 2000 назад, она моделировала движения 7 небесных тел.







Вплоть до времени, отстоящего от нас на 400 лет, движение планет моделировалось при помощи деферентов A и эпициклов B. Также использовались всевозможные приспособления вроде коленчатого рычага C, названного передвижным эксцентриком и задававшего яйцеобразную траекторию движения для Меркурия

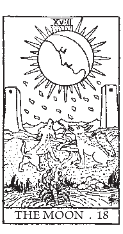
Календари

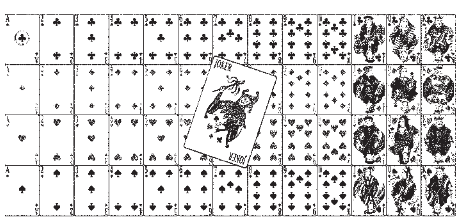
Синхронные движения Солнца и Луны

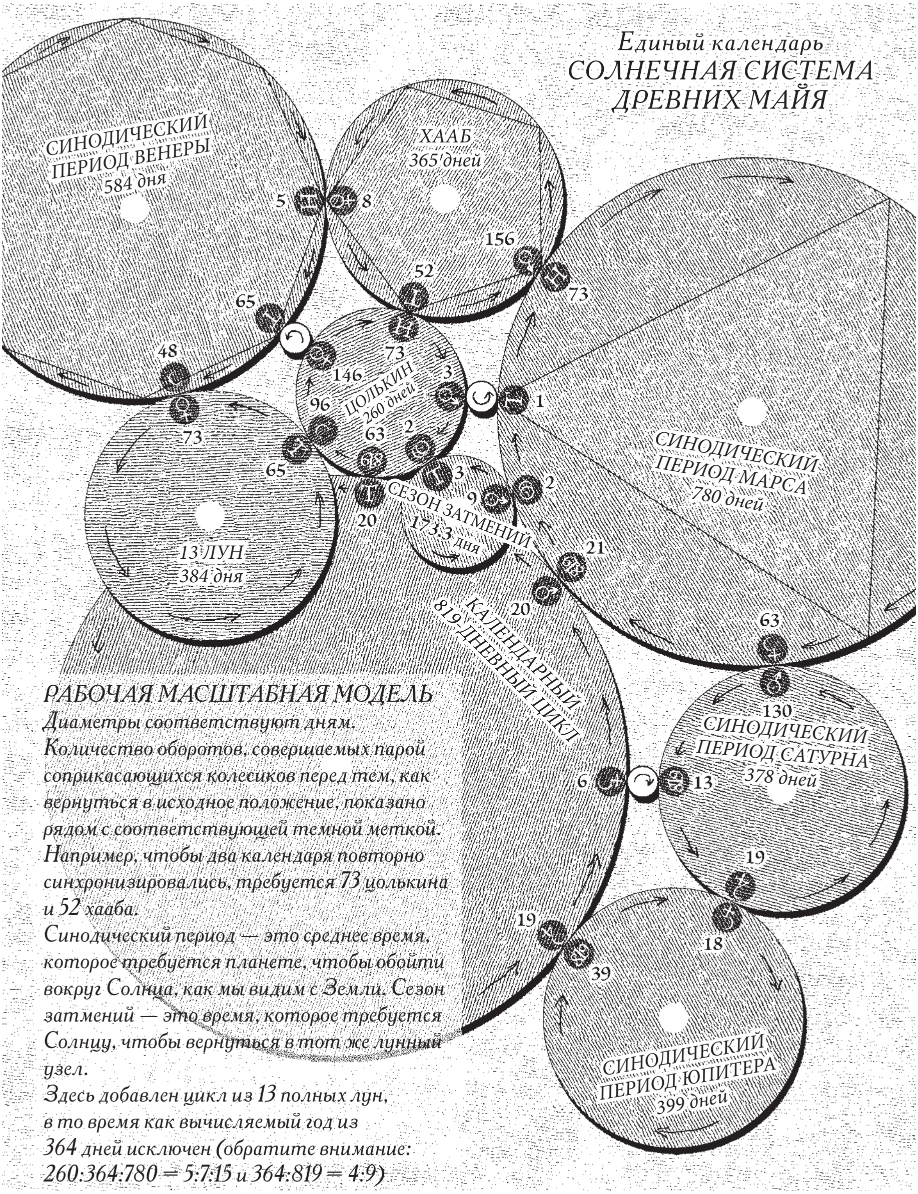
Движение Солнца и Луны на небосклоне Луны интересовало человечество с древних времен, но их взаимодействие гораздо сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Полный лунный цикл составляет 29,53 дня, поэтому китайцы установили переменную продолжительность месяца в своем календаре — 29 и 30 дней. В Стоунхендже 29 больших камней и один камень вполовину тоньше остальных, что также отражает цикл 29,5 дня.

Элементы календаря можно увидеть во многих окружающих нас предметах. Например, колода игральных карт напоминает о четырех временах года, в каждом по 1 + 2 + 3 + 4+ + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 91 дню, всего 364, и 365 с джокером. Карты Таро тоже хранят подобный секрет, ведь Луна и Солнце связаны с числами 18 и 19. *(См. с. 331.)*

Пожалуй, самая выдающаяся попытка объединить небесные циклы с земными была предпринята древними майя в целой серии связанных календарей. Около 900 года н. э. они смоделировали большую часть видимой Солнечной системы при помощи трех циклов: 365-дневного — хааба, 260-дневного — цолькина и загадочного 819-дневного. Невероятная схема Джеффа Стрея (*напротив*) — наглядный пример того, насколько далеко ученые готовы зайти, чтобы найти всему этому объяснение.







Около 900 года н. э. майя объединили небесные циклы с земными в целой серии связанных календарей, смоделировав бо́льшую часть видимой Солнечной системы

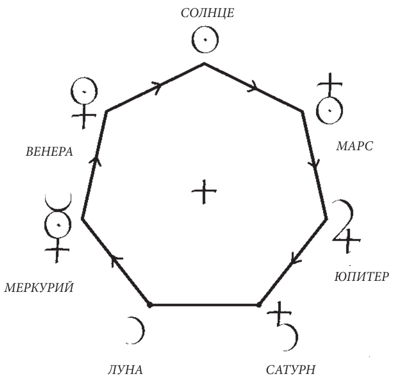
Тайна семерок

Планеты, металлы и дни недели

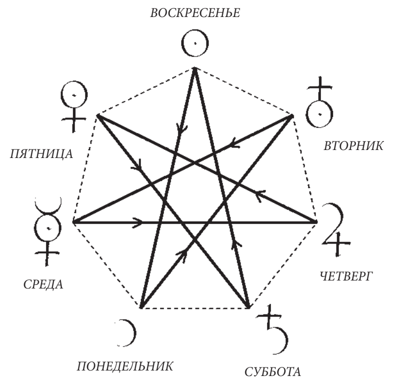
Схемы, которые вы видите *на странице напротив*, тысячелетиями, вплоть до XVII века, были краеугольным камнем всех научных и магических воззрений на космологию. Теперь они служат лишь напоминанием о семикратной системе античной космологии, потому что сегодня нам известно гораздо больше планет и физических элементов.

На земном небосклоне ровно семь отчетливо видимых движущихся небесных тел. Их можно расположить у вершин семиугольника в порядке возрастания скорости по отношению к «неподвижным» звездам. Луна движется быстрее остальных, далее следуют Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер и Сатурн (*вверху слева*). Планеты соотносятся с днями недели, что до сих пор прослеживается во многих языках. Названия дней распределены по семи лучам звезды, вписанной в гептагон (*вверху справа*). В английском языке для обозначения дней недели раньше использовались имена планет (или богов), например день Одина (Wotan's day), день Тора (Thor's day) и день Венеры (Freya's day).

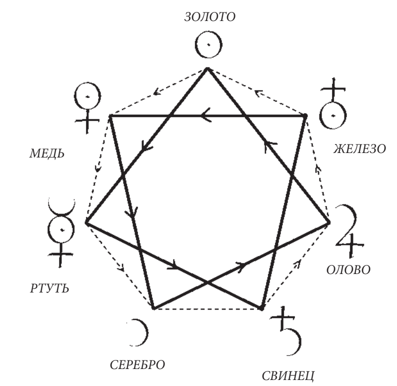
Во времена античности с планетами соотносили семь известных металлов. Пары планета — металл были образованы по цветовым ассоциациям. Венера, например, ассоциировалась с зеленым и голубым цветами карбонатов меди. Невероятно, но эта древняя система согласуется с *современными* познаниями о строении металлов! Проследите за стрелками на гептаграмме (*внизу слева, по Критчлоу и Хинце*) и увидите, что элементы расставлены по возрастанию порядкового номера в таблице Менделеева: *железо (26), медь (29), серебро (49), олово (50), золото (79), ртуть (80) и свинец (82).* По стрелкам внешнего круга, начиная со свинца, прослеживается такая же последовательность по удельной электропроводности.



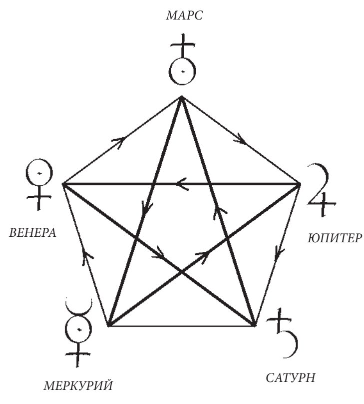
СЕМЬ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ
«Халдейский порядок» небесных тел начинается с Луны и следует вдоль стрелок



СЕМЬ ДНЕЙ НЕДЕЛИ
Французский: Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi… снова следуйте вдоль стрелок



СЕМЬ МЕТАЛЛОВ АНТИЧНОСТИ
Начиная с железа и далее вдоль стрелок, элементы располагаются по возрастанию атомного числа



ПЯТЬ «БЛУЖДАЮЩИХ ЗВЕЗД»
Начиная с Меркурия — по внешнему кругу пентаграммы — возрастает расстояние от Солнца

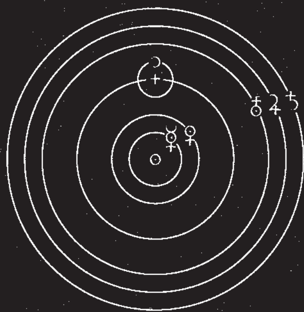
Геоцентрическая или гелиоцентрическая система

Что в центре: Солнце или Земля?

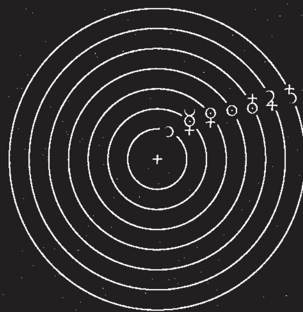
Геоцентрическая система мира с ее необычными эпициклами и деферентами оставалась актуальной удивительно долгое время. Несмотря на свою сложность, эта модель «соблюдала приличия» и не мешала «спасению души». В действительности эллипсы изучали еще первые математики Древней Греции, такие как Аполлоний, и в 250 году до Р. Х. Аристарх Самосский предложил модель системы планет, вращающихся вокруг Солнца. Однако она не прижилась, и полтора тысячелетия во всех учениях Земля оставалась в центре Вселенной. От греков эта модель мироустройства перешла к арабам, а затем вернулась на Запад.

Четыре из ранних космологических систем изображены *напротив* (*по Кестлеру*). Предполагается, что каждая сфера в схеме снабжена собственной системой эпициклов и эксцентриков. В 1543 году Коперник модернизировал модель Птолемея, добавив к 39 невидимым колесикам еще 9. Как верующий, он все же поместил Солнце в центре (*вверху слева*). В конце XVI века Тихо Браге упорствовал в заблуждении о геоцентричности Вселенной *(внизу слева)*, а модель Гераклида, жившего в Древней Греции, и ее более поздняя версия, созданная Эриугеной, предполагала компромиссное решение.

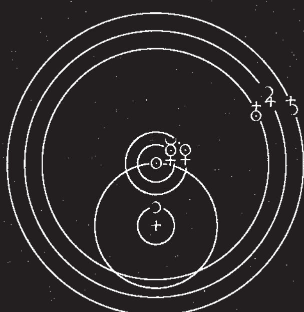
В XVII веке Солнце наконец утвердилось в центре нашей Галактики, и люди постепенно стали забывать ранние космологические модели. Современная модель Солнечной системы (*напротив внизу*) предполагает движение планет (включая карликовую планету Церера) по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. Каждый эллипс медленно закручивается, со временем образуя орбитальную «раковину». Первым эту модель предложил Иоганн Кеплер в 1596 году, и именно она дала толчок развитию современной науки о строении космоса.



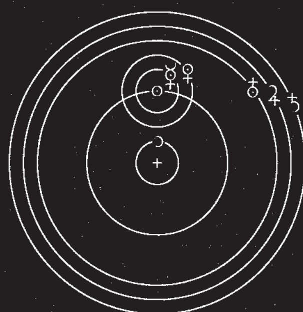
Аристарх и Коперник



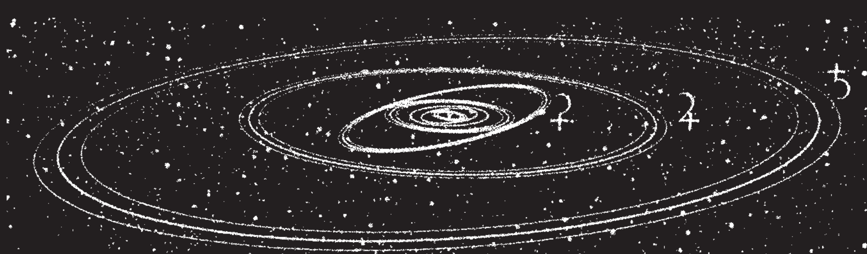
Птолемей



Тихо Браге



Гераклид



Кеплер

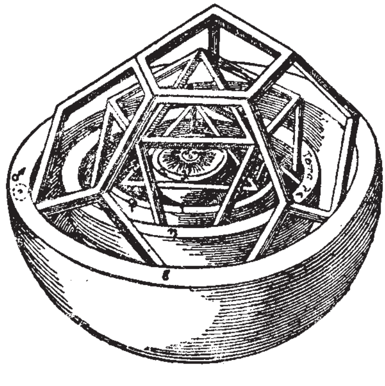
Взгляды Кеплера

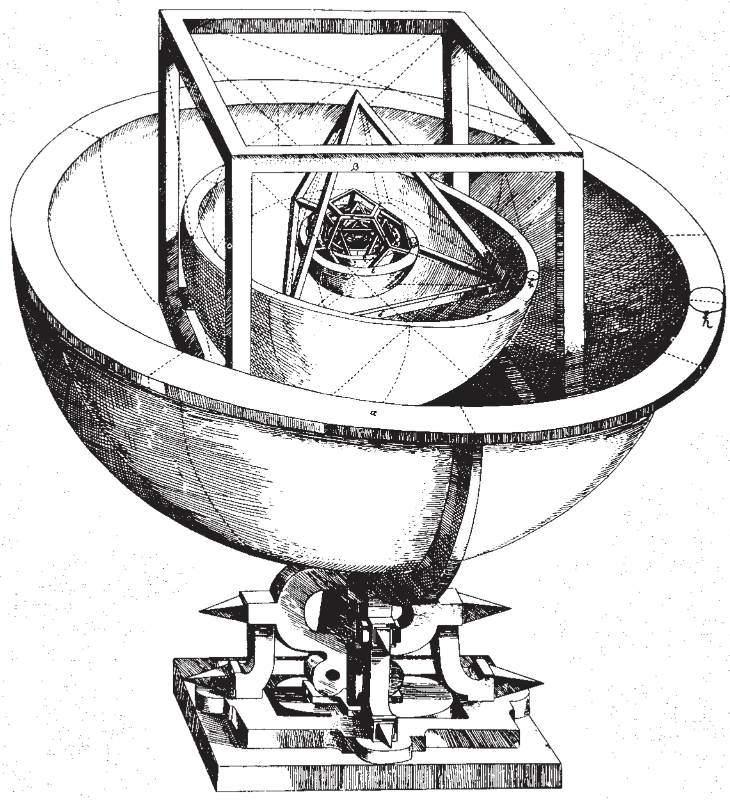
Эллипсы и вложенные тела

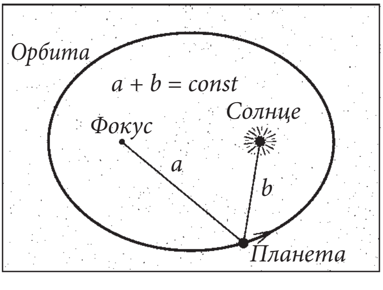
Кеплер заметил три свойства планетарных орбит. Во-первых, они представляют собой эллипсы (*так что* $a + b = const$, *напротив внизу*) с Солнцем в качестве фокусной точки. Во-вторых, *расстояние*, которое планета проходит за определенный промежуток времени, всегда неизменно. В-третьих, период T планеты связан с ее большой полуосью R (или «средней» орбитой), так что T^2/R^3 является постоянной величиной для всей Солнечной системы.

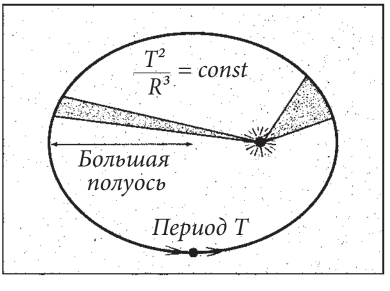
В поисках геометрического или музыкального объяснения для планетарных орбит Кеплер заметил, что шесть планет, вращающихся вокруг Солнца, создают пять интервалов. Знаменитое геометрическое обоснование Кеплера заключалось в соотнесении планетарных орбит с пятью *платоновыми телами* (*напротив; подробнее — внизу*).

Подчеркивая правильность основных воззрений Кеплера, в частности его орбитальных «раковин», современную модель мироустройства дополняют законы Эйнштейна. Речь идет о том, что небольшие пространственно-временные изменения, которые являются следствием особенностей движения Меркурия (более замедленного, когда он подходит ближе к Солнцу), создают прецессионное вращение орбитального эллипса.






Орбита
a + b = const
Фокус
Солнце
a
b
Планета

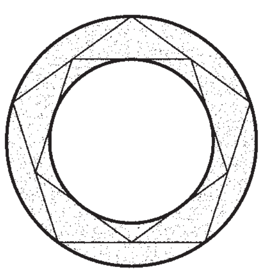

$\frac{T^2}{R^3} = const$
Большая
полуось
Период T

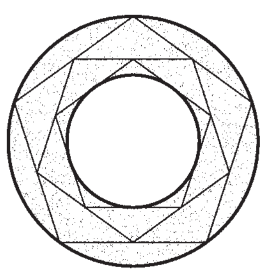
Музыка сфер

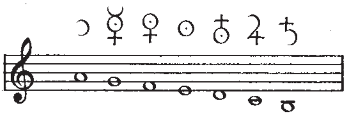
Созвучия планет

В древние времена наши предки различными способами соотносили семь музыкальных нот с семью небесными телами (*напротив вверху*). Кеплер, получив подробные данные, смог произвести точные расчеты для своего «Учения о гармонии мира». Он зафиксировал, что отношения между предельными угловыми скоростями планет представляют собой гармонические интервалы (*напротив в центре, по Годвину*). Не так давно профессор Молчанов (А. М. Молчанов, 1928—2011, выдающийся советский российский математик. — *Ред.*) в своих работах показал, что Солнечную систему можно рассматривать как хорошо «настроенную» квантовую структуру, где Юпитер выступает в качестве дирижера оркестра.

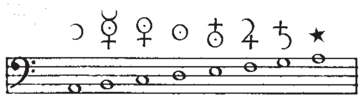
Геометрия и музыка — близкие партнеры, и теория Вайцзекера, которая объясняет не только возникновение планетной системы из газового образования, но также величину, плотность, взаимосвязь планет и их расстояние от Солнца (*напротив, по Марчи и Уоршеллу*), проливает чуть больше света на неуловимые орбиты. Это может показаться выдумкой, но с фактами не поспоришь: два вложенных пентагона (*внизу слева*) моделируют орбитальную раковину Меркурия (99,4%), пустое пространство между Меркурием и Венерой (99,2%), относительные средние орбиты Земли и Марса (99,7%) и пространство между Марсом и Церерой (99,8%). При этом три вложенных пентагона (*внизу справа*) моделируют пространство между Венерой и Марсом (99,6%) и относительные средние орбиты Цереры и Юпитера (99,6%).



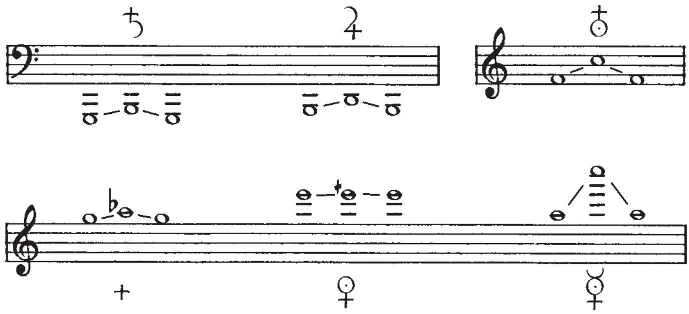




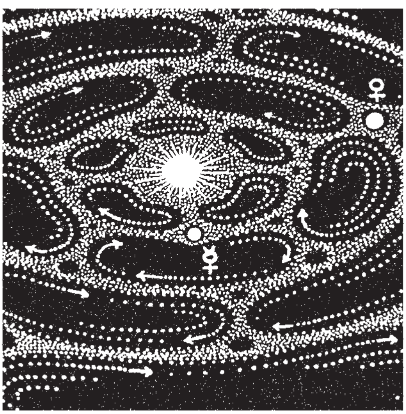
Система Древнего Египта

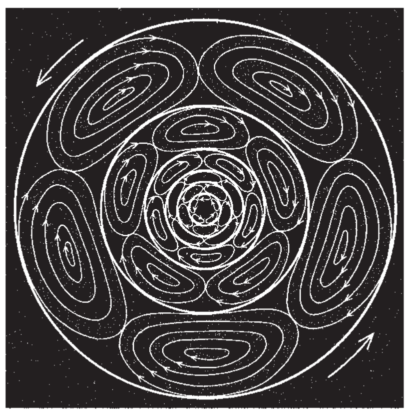


Цицерон, «Сон Сципиона»



Небесные гармонии Кеплера





Наши предки соотносили 7 небесных тел и 7 нот. Современная наука соотносит скорости планет с гармоническими интервалами и рассматривает Солнечную систему как хорошо настроенный оркестр с Юпитером в качестве дирижера, считая геометрию и музыку близкими партнерами

Закон Боде и сближения

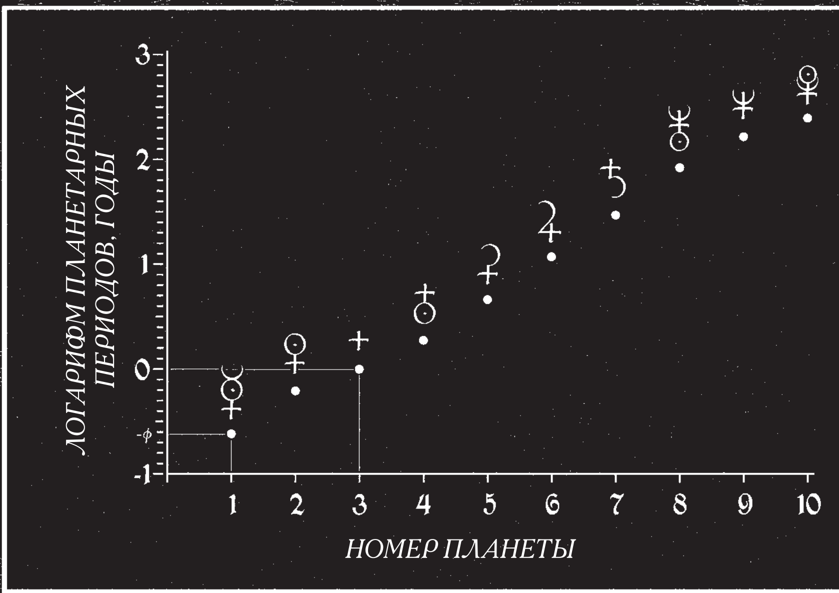
Гармонические и ритмические движения

За всю историю изучения космоса было предпринято бесчисленное количество попыток зафиксировать закономерности перемещения небесных тел. Логарифмический график (*напротив вверху*) отражает основополагающий порядок (*по Овендону и Рою*).

В 1750 году было открыто *правило Тициуса — Боде*: к числам последовательности 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 прибавляем четыре и получаем 4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388 — числа, которые довольно точно соответствуют радиусам орбит планет (за исключением Нептуна). Эта формула предсказала открытие недостающей планеты между Марсом и Юпитером. Так, в 1801 году Пиацци на правильной орбите обнаружил Цереру (в 1802 году Церера была классифицирована как астероид, но после уточнения понятия «планета» Международным астрономическим союзом 24 августа 2006 года была отнесена к карликовым планетам. — *Ред.*).

Время, которое требуется планете для того, чтобы завершить один виток вокруг Солнца, называется *периодом обращения*. Иногда соотношения периодов планет составляют простую пропорцию, например периоды Юпитера и Сатурна соотносятся как 2:5 (99,3%). Уран, Нептун и крошечный Плутон движутся с особой гармонией и своеобразным ритмом, их периоды соотносятся как 1:2:3, а периоды обращения Урана и Нептуна при сложении дают период обращения Плутона (99,8%).

По принципу воронки внутренние планеты за одинаковый промежуток времени успевают сделать гораздо больше оборотов вокруг Солнца, чем внешние. В таблице (*напротив внизу*) отражено количество дней, которое проходит между соприкосновениями орбит двух планет, то есть период, необходимый одной планете для того, чтобы вновь оказаться в точке наибольшего сближения с другой планетой. Участвует ли Земля в подобных гармоничных проявлениях? Для наших ближайших планетарных соседей Венеры (со стороны Солнца) и Марса (со стороны космоса) оказывается: Земля сближается с Марсом *три* раза за каждые *четыре* сближения с Венерой (99,8%). Так вокруг нас постоянно проигрывается 4:3 — музыкальная кварта.



	☿	♀	+	♂	⚳	♃	♄	♅	♆	♇
☿	∞	144.6	115.9	100.9	92.83	89.79	88.70	88.22	88.10	88.05
♀	144.6	∞	583.9	333.9	259.4	237.0	229.5	226.4	225.5	225.3
+	115.9	583.9	∞	779.9	466.7	398.9	378.1	369.7	367.5	366.7
♂	100.9	333.9	779.9	∞	1,162	816.5	733.9	702.7	694.9	692.2
⚳	92.83	259.4	466.7	1,162	∞	2,744	1,991	1,777	1,728	1,712
♃	89.79	237.0	398.9	816.5	2,744	∞	7,252	5,045	4,669	4,551
♄	88.70	229.5	378.1	733.9	1,991	7,252	∞	16,570	13,100	12,210
♅	88.22	226.4	369.7	702.7	1,777	5,045	16,569	∞	62,890	46,440
♆	88.10	225.5	367.5	694.9	1,728	4,669	13,100	62,890	∞	179,800
♇	88.05	225.3	366.7	692.2	1,712	4,551	12,210	46,440	179,800	∞

Внутренние планеты

Меркурий, Венера, Земля и Марс

Нашу Солнечную систему можно представить в виде ряда тонких вращающихся колец, медленно оседающих вниз. Солнечная система поделена на две половины поясом астероидов, внутреннюю ее часть занимают небольшие твердые планеты, быстро вращающиеся вокруг Солнца, в то время как во внешней половине вращаются медленные газовые гиганты и ледяные планеты.

Солнце до сих пор не раскрыло нам всех своих секретов. По большей части оно состоит из водорода и гелия и является гигантским текучим магнитом, температура в центре Солнца — около 15 миллионов градусов Цельсия, на поверхности — 6000 °С. Солнце испускает мощный поток элементарных частиц — нейтрино — и распространяет их по всей системе, а вспышки на его поверхности влияют на электронику на Земле.

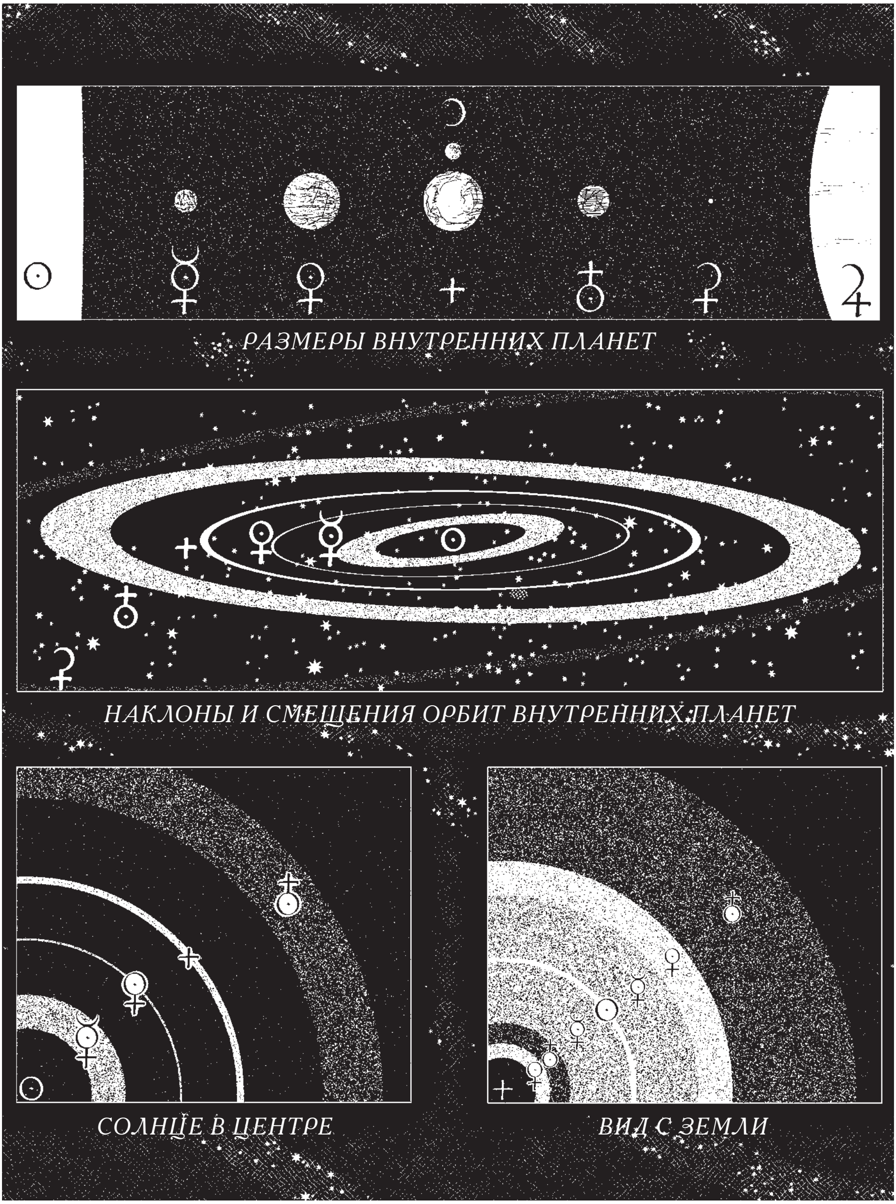
Меркурий — это первая от Солнца планета. Его ядро состоит преимущественно из железа с приличной добавкой серы. Испещрен кратерами, атмосфера отсутствует. Температура на солнце достигает 400 °С и –170 °С в тени.

Венера — вторая по счету планета — постоянно скрыта за слоем облаков, это «планета-теплица». Температура на ее поверхности — около 480 °С, а насыщенная углекислотой атмосфера в 90 раз плотнее земной. От жары яблоко бы здесь мгновенно превратилось в пепел, а потом расщепилось в плотной атмосфере и выпало в виде серно-кислотного дождя.

Земля — третья от Солнца планета, на ней есть жизнь, и она обладает собственным спутником — Луной.

Марс — четвертая планета: скалистый, красный, почти замерзший мир под тонким слоем разреженной атмосферы. Ледяные шапки покрывают его полюса. Русла рек, сохранившиеся на поверхности планеты, говорят о том, что в далеком прошлом на Марсе, возможно, были океаны. Сегодня же на поверхности планеты постоянно бушуют пылевые вихри. Огромные мертвые вулканы, один из которых втрое выше земного Эвереста, стоят молчаливыми свидетелями прошлых эпох. Марс сопровождают два маленьких спутника, две луны.

За Марсом следует пояс астероидов, а за ним — планеты-гиганты.



Внутреннюю часть Солнечной системы занимают небольшие твердые быстрые планеты, внешнюю часть — медленные газовые гиганты и ледяные планеты

Разгадывая рисунки

Несколько подсказок

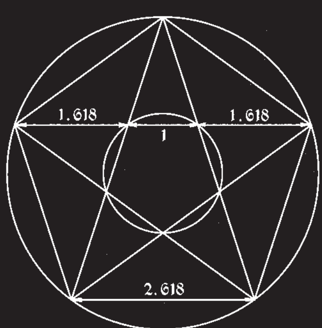
С Земли мы видим, что Солнце днем и ночью медленно движется слева направо относительно звезд (в Северном полушарии Земли). Ему требуется ровно год, чтобы вернуться к исходной точке. Луна быстро вращается в том же направлении, но ей требуется всего месяц, чтобы занять исходную позицию. Венера и Меркурий «покачиваются» вокруг Солнца, то приближаясь, то отдаляясь от него, пока Солнце неспешно совершает свой ежегодный цикл. Если бы мы смотрели с Венеры, то увидели бы, что относительно звезд Солнце двигается быстрее, а Меркурий «вальсирует» вокруг него, словно ярмарочный шут.

Каждая *пара* планет создает *единственный* танец. Неважно, на какой из двух планет вы находитесь, танец партнера вокруг вас всегда будет оставаться прежним. Это совместный опыт. Вращение Меркурия относительно Земли и Венеры показано на рисунке *напротив вверху*. Земля и Меркурий сближаются 22 раза за 7 лет. Древним грекам были известны даже более точные данные — 145 сближений за 46 лет. Меркурий и Венера возвращаются в исходные точки относительно друг друга после 14 сближений.

Напротив внизу изображено *золотое сечение* φ. Оно присутствует в любой пентаграмме и в последовательности чисел Фибоначчи (*напротив*), которая начинается следующим образом: 1, 2, 3, 5, 8, 13 — все эти числа мы позже встретим в планетах внутренней части Солнечной системы. Золотое сечение численно приблизительно равно 0,618, но если на него разделить единицу, получим 1,618 (если *прибавить* 1, получим то же самое). А 1,618 × 1,618 = 2,618 (получим это число, если прибавим 1 еще раз). Золотое сечение часто проявляется в органических формах жизни; как мы убедимся позднее, именно это число очень часто встречается во внутренней части Солнечной системы.

«Танец» Меркурия и Венеры

«Танец» Меркурия и Земли



Золотое сечение

1	
0 + 1 = 1	1 ÷ 1 = 1
1 + 1 = 2	1 ÷ 2 = 0.5
1 + 2 = 3	2 ÷ 3 = 0.6667
2 + 3 = 5	3 ÷ 5 = 0.6
3 + 5 = 8	5 ÷ 8 = 0.625
5 + 8 = 13	8 ÷ 13 = 0.6154
8 + 13 = 21	13 ÷ 21 = 0.6190
13 + 21 = 34	21 ÷ 34 = 0.6176
21 + 34 = 55	34 ÷ 55 = 0.6182
34 + 55 = 89	55 ÷ 89 = 0.6180
1 2 3 5 8 13 …	ϕ = 0.61803399…

Числа Фибоначчи

Орбиты Меркурия и Венеры

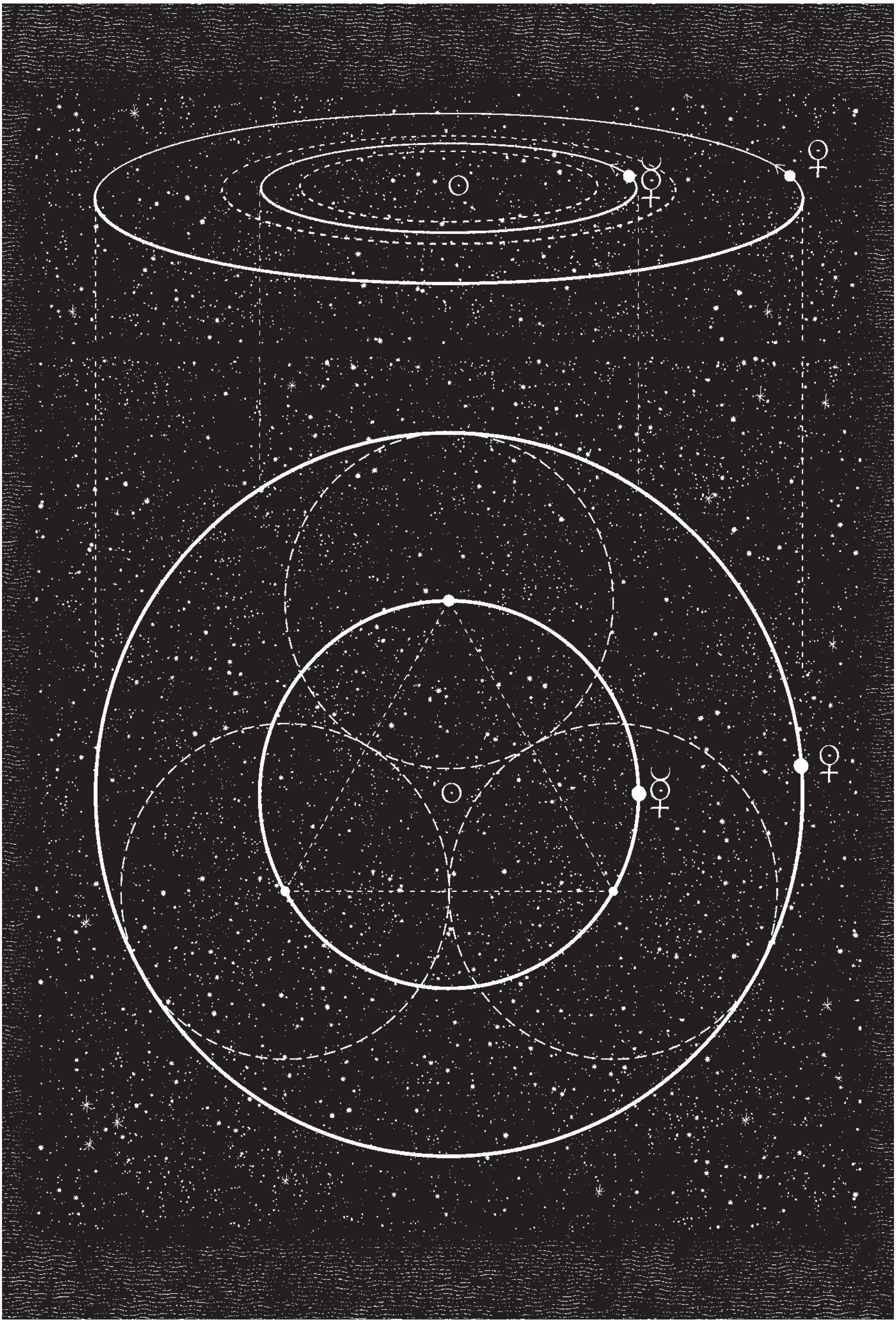
Очень простая памятка

Что может быть проще круга? Кеплер понял, что планеты движутся по эллиптической орбите, Ньютон и Эйнштейн установили, что помимо прочего эти орбиты вращаются. Сегодня мы воспринимаем планетарные орбиты как слегка сплюснутые «круги» с Солнцем в качестве центра (*см. схему Кеплера на с. 307*).

Одна из первых геометрических манипуляций, которая приходит на ум относительно кругов, заключается в том, чтобы разместить три соприкасающихся окружности рядом. Удивительно, что именно в этом простом чертеже зашифрованы орбиты первых двух планет Солнечной системы. Если принять окружность, проходящую через центры трех кругов, за среднюю орбиту Меркурия, то орбитой Венеры будет окружность, описывающая фигуру (99,9%).

Это очень просто запомнить, ведь такие фигуры окружают нас повсеместно и постоянно: дома, в архитектуре, в искусстве и природе. Каждый раз, когда вы ставите вместе три стакана или кладете рядом три теннисных мяча, вы с невероятной точностью задаете орбиты первых двух планет. Определенно, должна существовать очень веская причина для такого идеального совпадения. К сожалению, на данный момент нам ничего не известно доподлинно, и сама эта проблема на какое-то время вышла из моды. Наверняка в XXI веке появится гений, который сумеет найти ответы на поставленные вопросы, а до тех пор все эти соотношения будут оставаться лишь «совпадениями».

Треугольник служит символом музыкальной октавы 2:1, а Меркурий играет крайне впечатляющее соло именно на эту тему. Солнечные сутки на Меркурии длятся 176 земных суток, то есть ровно 2 меркурианских года. За это время Меркурий совершает ровно 3 витка вокруг собственной оси. Так, ближайшая к Солнцу планета соответствует первой гармонии и рисует одну из простейших геометрических фигур. Мы начали с 1, услышали 2, а увидели 3.



Поцелуй Венеры

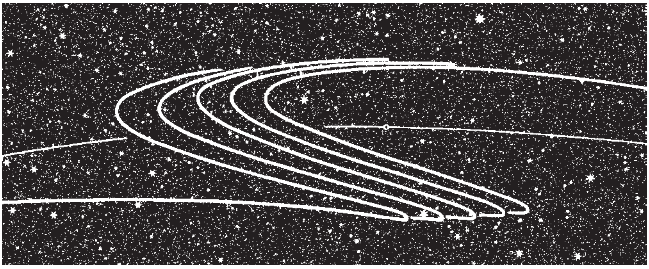
Наш самый красивый небесный цветок

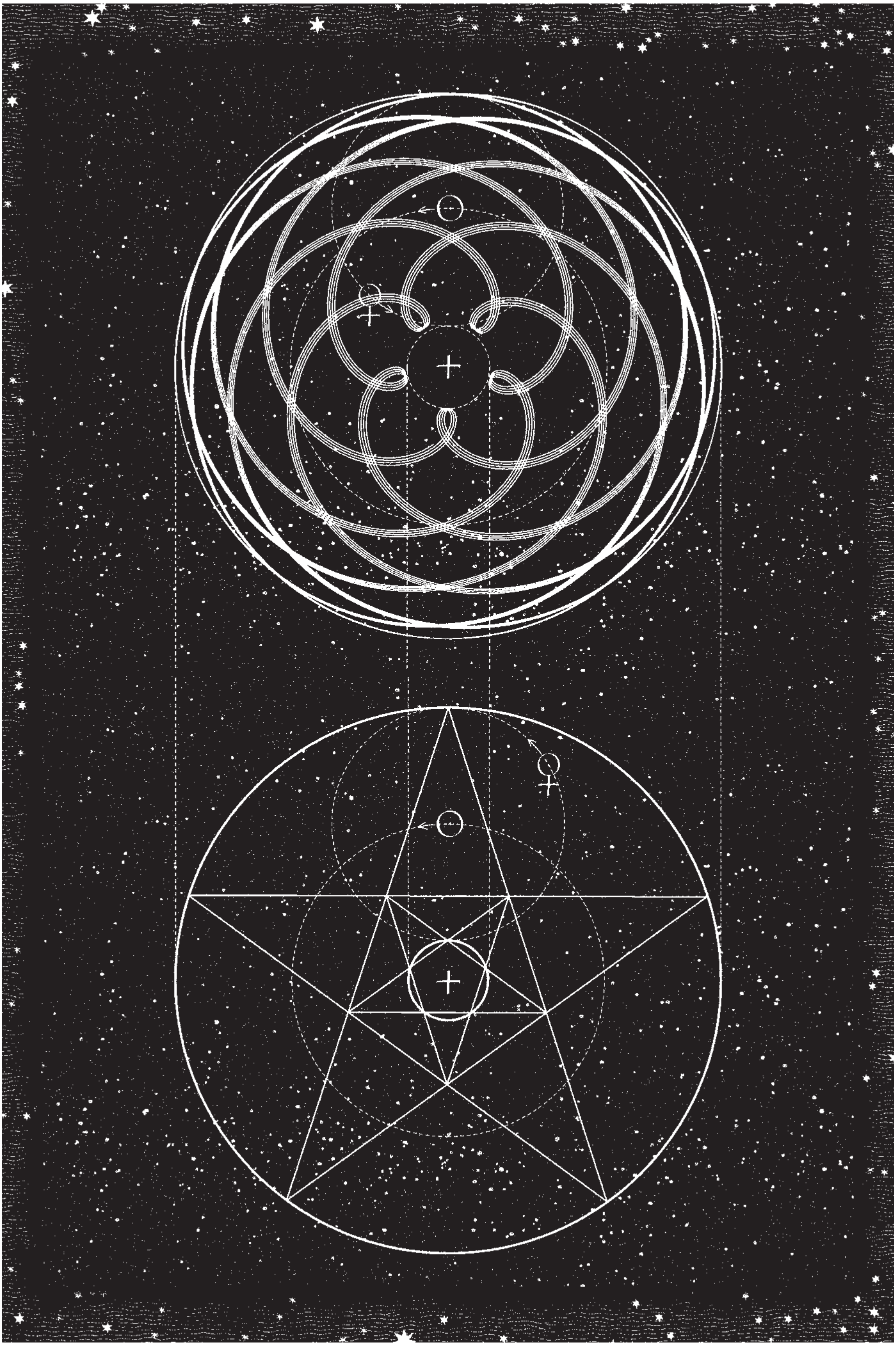
Венера, так называемая утренняя и вечерняя звезда и наш ближайший сосед, — самая яркая точка на земном небосклоне после Луны и Солнца. Венера сближается с Землей каждые 584 дня, проходя между ней и Солнцем. Каждый раз во время сближения Солнце, Венера и Земля проходят две пятых круга, то есть все пять лепестков узора складываются в течение восьми земных лет (99,9%) или тринадцати лет Венеры (99,9%). И снова обратите внимание на числа Фибоначчи 5, 8, 13, управляющие ростом большинства растений на Земле. Периоды Земли и Венеры соотносятся как φ:1 (99,6%).

Наблюдая за перемещениями Венеры с Земли, мы можем увидеть прекрасный узор, напоминающий распустившийся цветок. На рисунке *напротив вверху* отображены четыре восьмилетних цикла, то есть 32 года. Небольшие петли формируются в тот момент, когда Венера подходит к Земле на самое близкое расстояние, и кажется, что она на некоторое время меняет направление своего движения (*внизу показано, как это видно с Земли*).

Пятикратная природа «танца» Венеры и Земли проявляется также в расстояниях между ними, так самое маленькое и самое большое расстояние между нашей планетой и Венерой, перигей и апогей Венеры, формируются двумя пентаграммами (*напротив внизу*).

Все схемы также применимы к «танцу» Земли, наблюдаемому с Венеры.





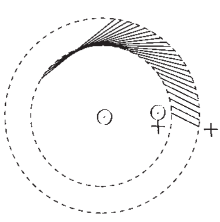
Идеальная красота Венеры

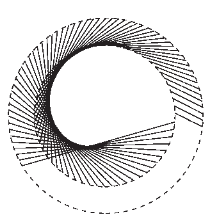
То, о чем вам не рассказывали в школе

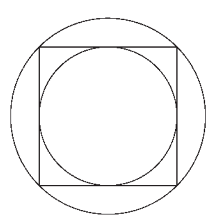
Давайте понаблюдаем за орбитами Земли и Венеры из центра, с позиции Солнца. Каждые пару дней между двумя планетами вырисовывается линия (*внизу слева*). Так происходит потому, что Венера вращается по своей орбите быстрее, она успевает завершить целый виток, пока Земля делает около половины (*внизу в центре*). Если продолжать наблюдения в течение восьми лет (или 13 лет Венеры), то появится узор, изображенный *напротив*, — тот же пятилистник, что и на предыдущей странице, но с позиции Солнца.

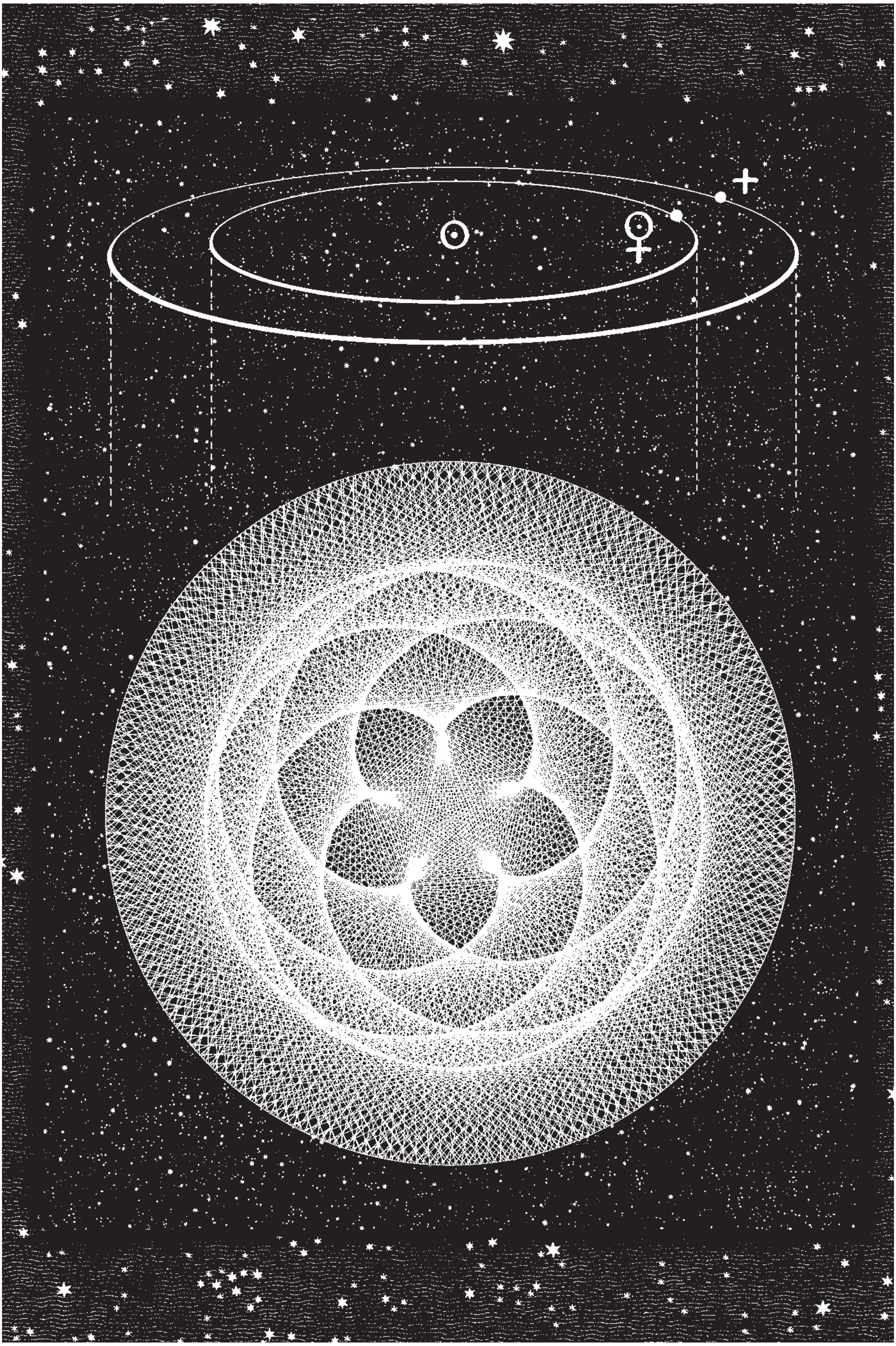
Соотношение внешней орбиты Земли и внутренней орбиты Венеры, то есть их *дом*, интригующим образом задается при помощи квадрата (*внизу справа*) (99,9%).

Вокруг своей оси Венера вращается крайне медленно, причем в сторону, противоположную направлению вращения большинства тел Солнечной системы. Ее период вращения равен точно двум третьим земного года, музыкальная квинта. Это число очень гармонично вписывается в структуру совместного танца Земли и Венеры. Так, каждый раз, сближаясь с нашей планетой, Венера поворачивается *одной и той же стороной*. Если бы мы сделали отметку на поверхности Венеры, когда она проходит между Солнцем и Землей, каждый следующий раз, дефилируя перед нами на фоне светила, она демонстрировала бы нашу метку. 5 сближений за 8 лет, Венера делает оборот вокруг своей оси 12 раз за 13 своих лет (*по Коллерстрому*). Всё это прекрасные музыкальные числа.









Филлотаксис

Спираль жизни

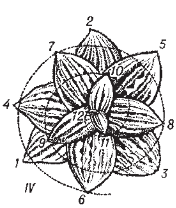
Жизнь на Земле любит использовать одни числа гораздо больше других. Филлотаксис — это порядок расположения листьев вдоль стебля и прочие интересные особенности цветов, семенных шапок и фруктов. Ключом филлотаксиса является последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и т. д. Соседние числа здесь с возрастающей точностью соответствуют пропорции золотого сечения. Такую пропорцию мы уже встречали в пентаграммах.

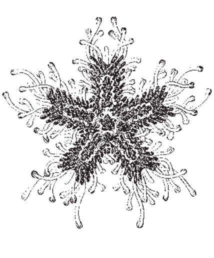
Известно, что большинство растений на Земле растут по спирали. Например, листья некоторых растений размещаются вдоль стебля через каждые $^1/_2$ оборота, в ореховых и буковых деревьях — через $^1/_3$, в абрикосовых древьях и дубах — через $^2/_5$, у груши и тополя — через $^3/_8$, у миндаля и ивы — через $^5/_{13}$ оборота. Ананасовые деревья демонстрируют 5-, 8- и 13-витковые спирали. Посчитав количество почек вдоль ростка вербы, вы обнаружите 13 почек на спирали из 5 витков.

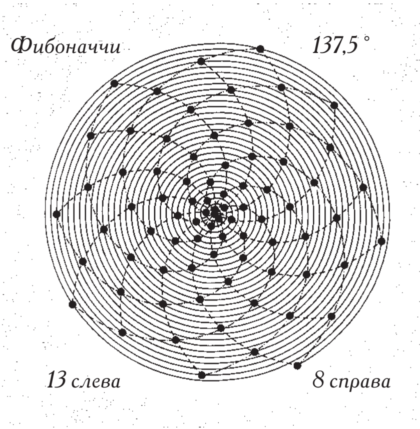
Люди используют те же числа (в четырехкратной системе). У нас пять пальцев на каждой из четырех конечностей. Кроме того, у нас по пять молочных зубов вверху и внизу с каждой стороны челюсти, которые затем сменяются 8 коренными зубами — в целом по 13 с каждой стороны.

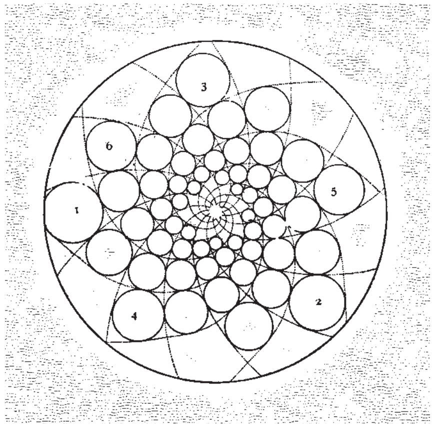
Как правило у цветов по пять лепестков, а наиболее часто встречающиеся в филлотаксисе числа — это 5, 8 и 13.

Вверху и внизу на этом развороте обратите внимание на знакомые узоры — ощущаете присутствие Венеры?

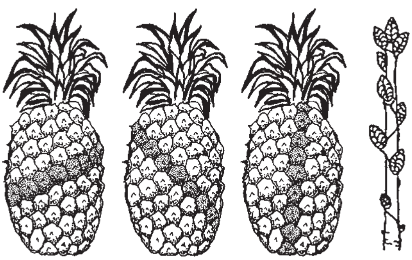


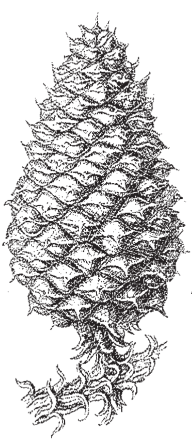


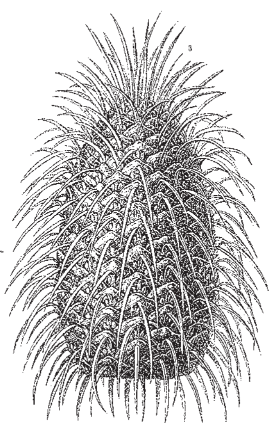


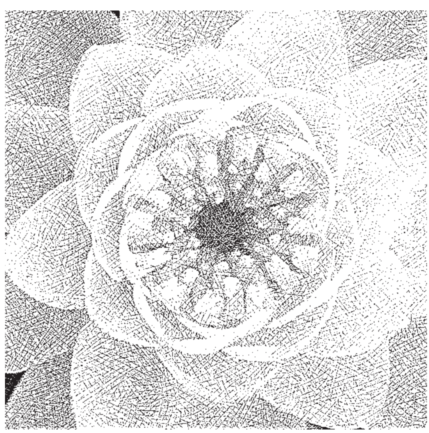


Вверху слева: 8:13 — проявление филлотаксиса. Новые ростки появляются вдоль архимедовой спирали через каждые 137,5°
Вверху справа: Модель разграничения пространства филлотаксиса, созданная В. Хофмейстером, по следам предположения Леонардо да Винчи о том, что филлотаксис оптимизирует доступ растения к росе и солнечному свету
Слева: Ананасы демонстрируют прелестные пропорции 5:8:13 в виде 5 почти горизонтальных спиралей, 8 спиралей под углом 45° и 13 вертикальных
Внизу: В растениях с семенными шапками филлотаксис чаще всего проявляется в росте лепестков их цветков









Меркурий и Земля

Еще больше пятерок и восьмерок

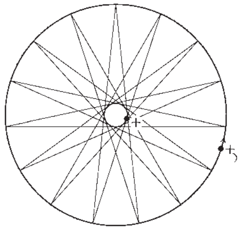
Физические размеры Земли и Меркурия соотносятся между собой в той же пропорции, что и их средние орбиты! Различные схемы на следующей странице показывают пяти- и восьмикратные пропорции орбит и размеров этих двух планет.

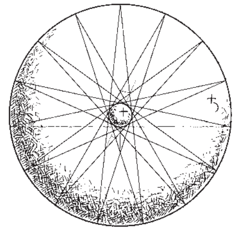
Диаметр *внутренней* орбиты Меркурия соответствует внутреннему кругу пентаграммы (*вверху слева*) (99,5%) и, кроме того, равен расстоянию между средними орбитами Земли и Меркурия (99,7%).

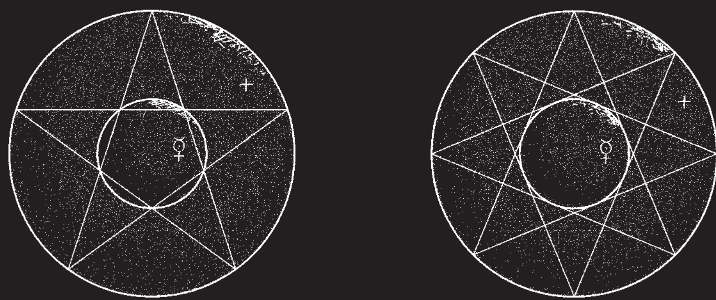
Схема *внизу справа* распространяется на 3 соприкасающихся круга, показанных на странице. 8 окружностей, расположенных на орбите Венеры, формируют среднюю орбиту Земли (99,99%) — возможно, 8 лет на 5 сближений?

Меркурий, Венера и Земля демонстрируют специфические совпадения: если принять за единицу радиус орбиты и период обращения Меркурия, то период обращения Венеры, умноженный на 2,618, равен орбитальному радиусу Земли в квадрате (99,8%). «Танец» Меркурия вокруг Земли формирует ее синодический период из 115,9 дней. Ричард Хит недавно обнаружил, что это число соответствует 2,618, умноженному на музыкальную квинту, умноженному на полный лунный цикл (99,9%) — музыкальная квинта 3:2; 2,618 это Φ^2 (или $1{,}618 \times 1{,}618$), а лунный цикл длится 29,53 дня.

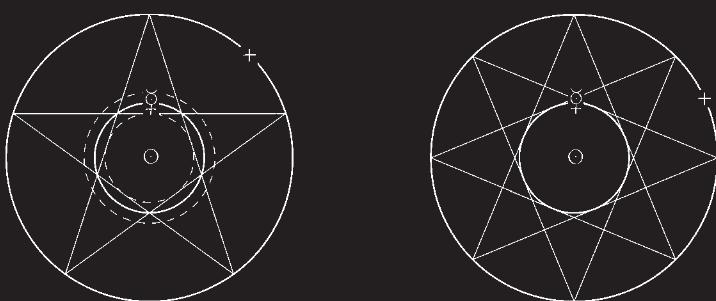
Относительные орбиты и размеры Земли и Сатурна представлены в 15-конечной звезде (*внизу*), которая также задает наклон Земли.



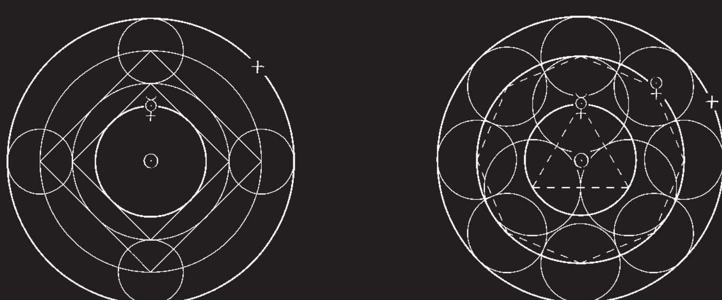




Относительные размеры Меркурия и Земли определяются пентаграммой или октаграммой (99%)



Относительные диаметры орбит Меркурия и Земли определяются такой же пентаграммой или октаграммой (99%)



Другие, более точные способы начертания внутренних орбит (99,9%)

Небесная алхимия

Три и одиннадцать

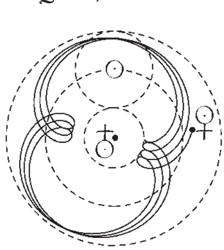
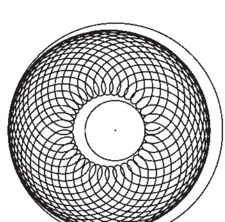
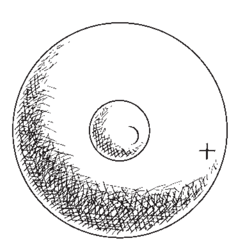
С поверхности Земли Луна и Солнце кажутся *одинакового размера*. Согласно космологии современных маглов, это всего лишь «совпадение», но любой хороший волшебник подтвердит, что подобное равновесие между ночным и дневным светилами есть проявление очень древней магии.

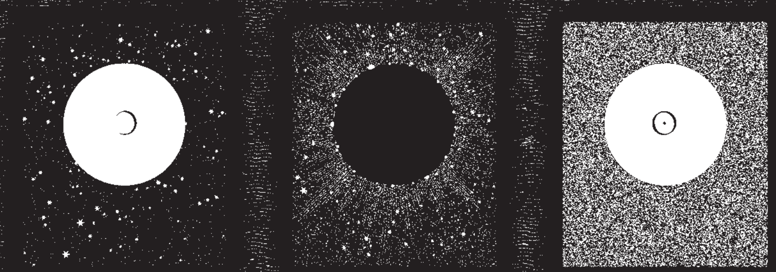
Размер Луны составляет $^{3}/_{11}$ земного (99,9%). Это значит, что если вы начертите схему, где Луна соприкасается с Землей, то длина окружности, проведенной через центр Луны, будет равна периметру квадрата, описанного вокруг Земли. *На с. 78* вы уже могли убедиться, что эта пропорция встречается в любой двойной радуге. Наши далекие предки наверняка знали об этом факте и зашифровали его в длине мили (*напротив, по Мичеллу и Уорду*).

Соотношения Земля — Луна также проявляются в свойствах наших ближайших соседей, Марса и Венеры (*внизу показан «танец» Венеры вокруг Марса*). Например, соотношение наибольшего расстояния, на которое эти две планеты отходят друг от друга, равно 3:11 (99,9%), а Земля и Луна, находясь между ними, подражают этому прекрасному пространственному соотношению.

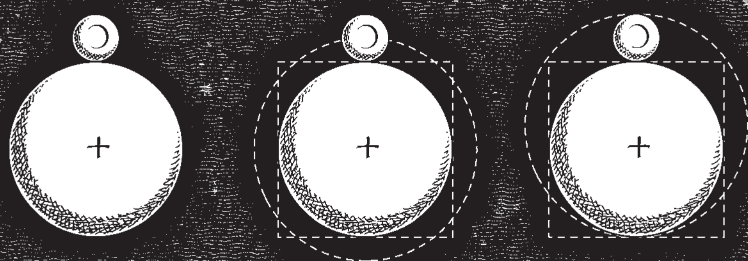
Отношение 3:11 соответствует 27,3%. Луна совершает полный оборот вокруг Земли относительно звезд за 27,3 дня, и столько же составляет средний синодический период вращения солнечного пятна.

Солнце и Луна в действительности имеют гораздо больше общего, чем может показаться на первый взгляд.



Луна, полное солнечное затмение и Солнце. Вид с Земли



Квадратура круга. Размеры Земли и Луны. Окружность и квадрат, обозначенные пунктирными линиями, имеют одинаковый периметр

Размеры Луны и Земли

Радиус Луны = 1080 миль = 3 × 360 миль

Радиус Земли = 3960 миль = 11 × 360 миль

Диаметр Луны = 2160 миль = 3 × 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 миль

Радиус Земли + радиус Луны = 5040 миль =

= 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 = 7 × 8 × 9 × 10 миль

Диаметр Земли = 7920 миль = 8 × 9 × 10 × 11 миль

В одной миле 5280 футов =

= (10 × 11 × 12 × 13) – (9 × 10 × 11 × 12)

Любой хороший волшебник подтвердит, что равновесие между ночным и дневным светилами есть проявление очень древней магии

Магия календаря

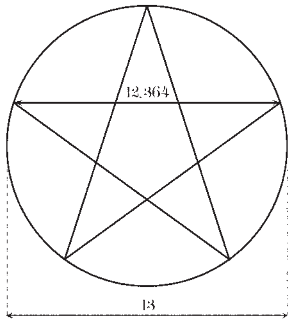
Всего три числа в основе

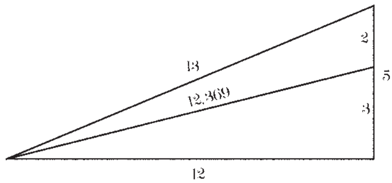
Робин Хит в своей недавней работе использовал простые математические и геометрические способы для определения закономерностей в системе Солнце — Луна — Земля. Представьте, что нам, к примеру, нужно вычислить количество полных лун в году (что-то между 12 и 13). Начертите окружность диаметром, равным 13, внутрь поместите пентаграмму. Длина луча пентаграммы составит 12,364 — число полных лун в году (99,95%).

Еще более точный способ заключается в том, чтобы начертить пифагоров треугольник со сторонами 5, 12 и 13 — числа Венеры (*см. с. 320*). Длина линии, которая делит сторону 5 в гармонической пропорции 2:3, равна квадратному корню из 153, то есть 12 369 — числу полных лун в году (99,999%).

Луна так и манит нас копать все глубже и глубже в поисках ответов. Нам хорошо известно, что на плоской поверхности 6 окружностей идеально окружают седьмую (6 и 7). В знакомом нам трехмерном пространстве вокруг одной сферы идеально умещаются уже 12 сфер (снова 12 и 13). Кажется, мы движемся с шагом, кратным 6. В таком случае, возможно, в четырехмерном временно́м пространстве вокруг одной сферы расположатся *18* временны́х сфер. Невероятно, но все значительные продолжительности циклов в системе Солнце — Луна — Земля оказываются простыми комбинациями чисел 18, 19 и золотого сечения.

Золотое сечение наблюдается в пентаграмме, икосаэдре, додекаэдре и во всех живых существах. Орбиты 4 внутренних планет также отражают его присутствие. Связанные с ним числа 0,618; 1; 1,618; 2,618, прибавленные к магическому числу 18, дают значения: 18,618; 19; 19,618; 20,618, которые при перемножении показывают интересные результаты (*напротив*).





Два древних способа определения числа полных лун в году

18 лет = цикл сароса (99,83%) (сарос — период повторения солнечных и лунных затмений. — Ред.); схожие затмения происходят раз в 18 лет

18,618 лет = цикл лунных узлов (99,99%). Лунные узлы — это положения, где орбита Луны пересекается с большим небесным кругом Солнца)

19 лет = метонов цикл (99,99%) (промежуток времени, служащий для согласования продолжительности лунного месяца и солнечного года в лунно-солнечном календаре. — Ред.); если в ваш день рождения в небе стояла полная Луна, то в следующий раз на ваш день рождения она будет полной через 19 лет

Затменный год = 18,618 × 18,618 дней (99,99%). Затменный год — период, который необходим Солнцу, чтобы вернуться в тот же узел Луны. Он короче солнечного года на 18,618 дня (99,99%). В саросе 19 затменных годов

12 полных Лун = 18,618 × 19 дней (99,82%) — лунный, или исламский, год

Солнечный год = 18,618 × 19,618 дней (99,99%). Солнечный год составляет 365,242 дня

13 полных лун = 18,618 × 20,618 дней (99,99%) — на 18,618 дней больше солнечного года

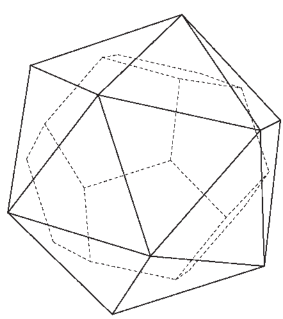
Космический футбол

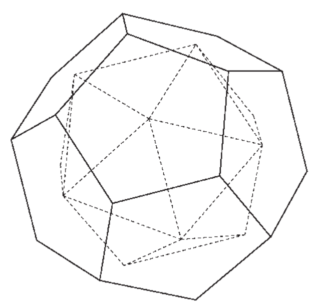
Расстояния между Марсом, Землей и Венерой

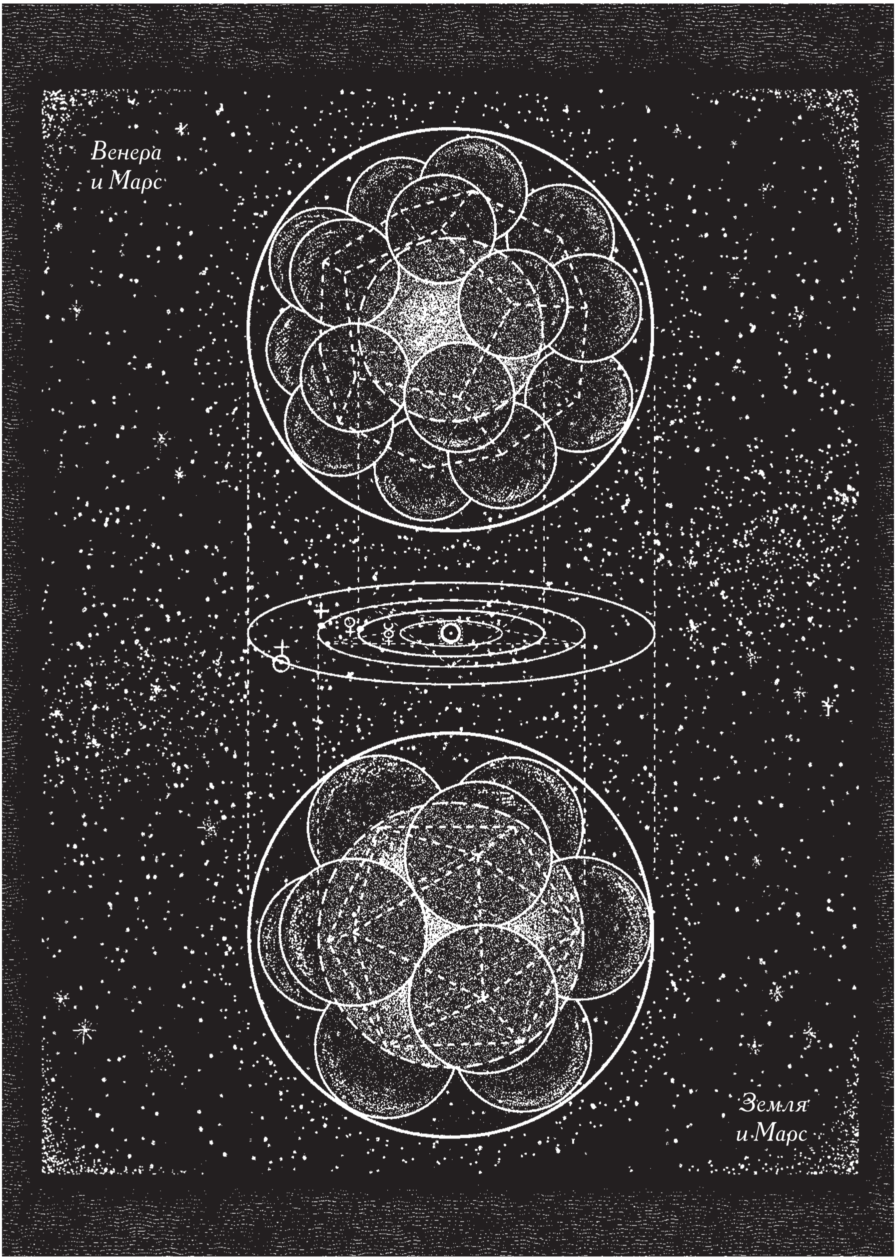
Следующая после Земли по порядку от Солнца планета — это Марс. Кеплер пытался определять расстояние между орбитами Марса и Земли при помощи *додекаэдра* и расстояние между Венерой и Землей при помощи *икосаэдра* (*см. с. 306*); по случайности выяснилось, что он был не слишком далек от истины.

Додекаэдр (состоящий из двенадцати пятиугольников) и икосаэдр (состоящий из двадцати равносторонних треугольников) являются последними из 5 платоновых тел (*см. Книгу III этого издания*). Они формируют пару, так как путем соединения центров их граней из одного получается другой (*внизу*). Напротив они изображены в форме пузырьков внутри сферической средней орбиты Марса. Додекаэдр магическим образом соответствует орбите Венеры (*напротив вверху*) (99,9%).

В древности икосаэдр ассоциировался со стихией Воды, поэтому вполне естественно видеть его взаимодействие с нашей полной воды планетой. Додекаэдр символизирует *эфир*, силу жизни, которая окутывает живую Землю.






Венера
и Марс
Земля
и Марс

Пояс астероидов

Сквозь зеркало

Мы достигли границы внутренней части Солнечной системы. За Марсом простирается сравнительно большое пространство, по другую сторону которого располагается один из гигантов — Юпитер. В этом пространстве был обнаружен пояс астероидов, состоящий из тысяч больших и маленьких сталкивающихся друг с другом кремниевых, металлических, углеродистых и прочих булыжников. В поясе есть пространства, где астероиды практически отсутствуют, — *щели Кирквуда*. Они возникают вследствие резонансного воздействия Юпитера. Самая обширная щель Кирквуда находится на орбите, соответствующей периоду в $^1/_3$ периода Юпитера.

Самым большим астероидом считалась Церера (теперь ее причисляют к карликовым планетам) с массой, равной $^1/_3$ суммарной массы всех остальных астероидов пояса. По размеру она примерно равна британским островам и по отношению к Земле рисует *правильный* восемнадцатилистник (*см. с. 403*).

Закон Тициуса — Боде предсказал обнаружение небесного тела на расстоянии пояса астероидов (*см. с. 310*), но сверхъестественную математическую связь между 4 маленькими внутренними планетами и 4 внешними газовыми гигантами обнаружил Алекс Геддес. Оказывается, радиусы их орбит магическим образом соответствуют поясу астероидов и в результате перемножения, как показано *внизу* и *напротив*, дают загадочные константы.

Венера × Уран = 1,204 Меркурий × Нептун
Меркурий × Нептун = 1,208 Земля × Сатурн
Земля × Сатурн = 1,206 Марс × Юпитер
Венера × Марс = 2,872 Меркурий × Земля
Сатурн × Нептун = 2,876 Юпитер × Уран
(Венера × Марс × Юпитер × Уран =
= Меркурий × Земля × Сатурн × Нептун)

Маловероятно, что пояс астероидов — это осколки небольшой планеты, потому что тело хоть сколько-нибудь значительного размера не могло сформироваться так близко от Юпитера.

ПОЯС АСТЕРОИДОВ ОТДЕЛЯЕТ 4 МАЛЕНЬКИЕ ВНУТРЕННИЕ ТВЕРДЫЕ ПЛАНЕТЫ ОТ 4 ВНЕШНИХ ГИГАНТОВ

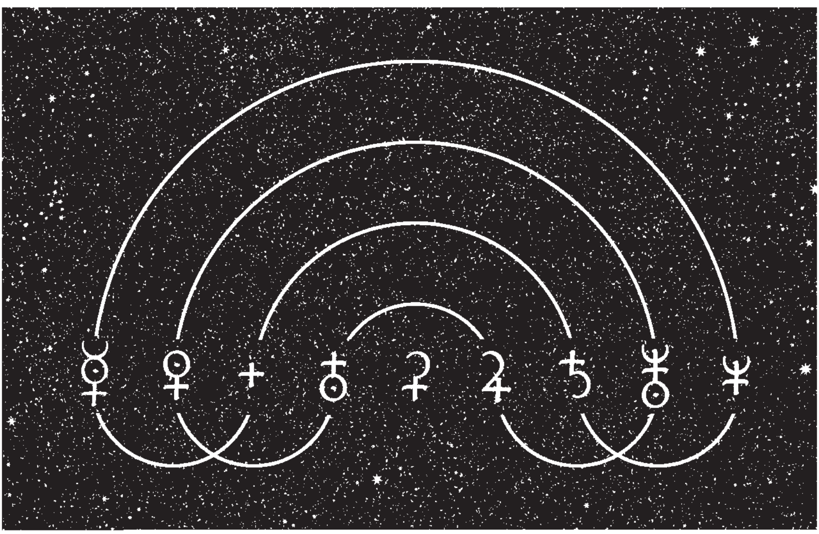


СХЕМА МАГИЧЕСКИХ УМНОЖЕНИЙ ГЕДДЕСА

Алекс Геддес обнаружил сверхъестественную математическую связь между внутренними и внешними планетами: радиусы их орбит соответствуют поясу астероидов и в результате перемножения дают загадочные константы

Внешние планеты

Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун

За поясом астероидов мы попадаем в мир газовых и ледяных гигантов: Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна.

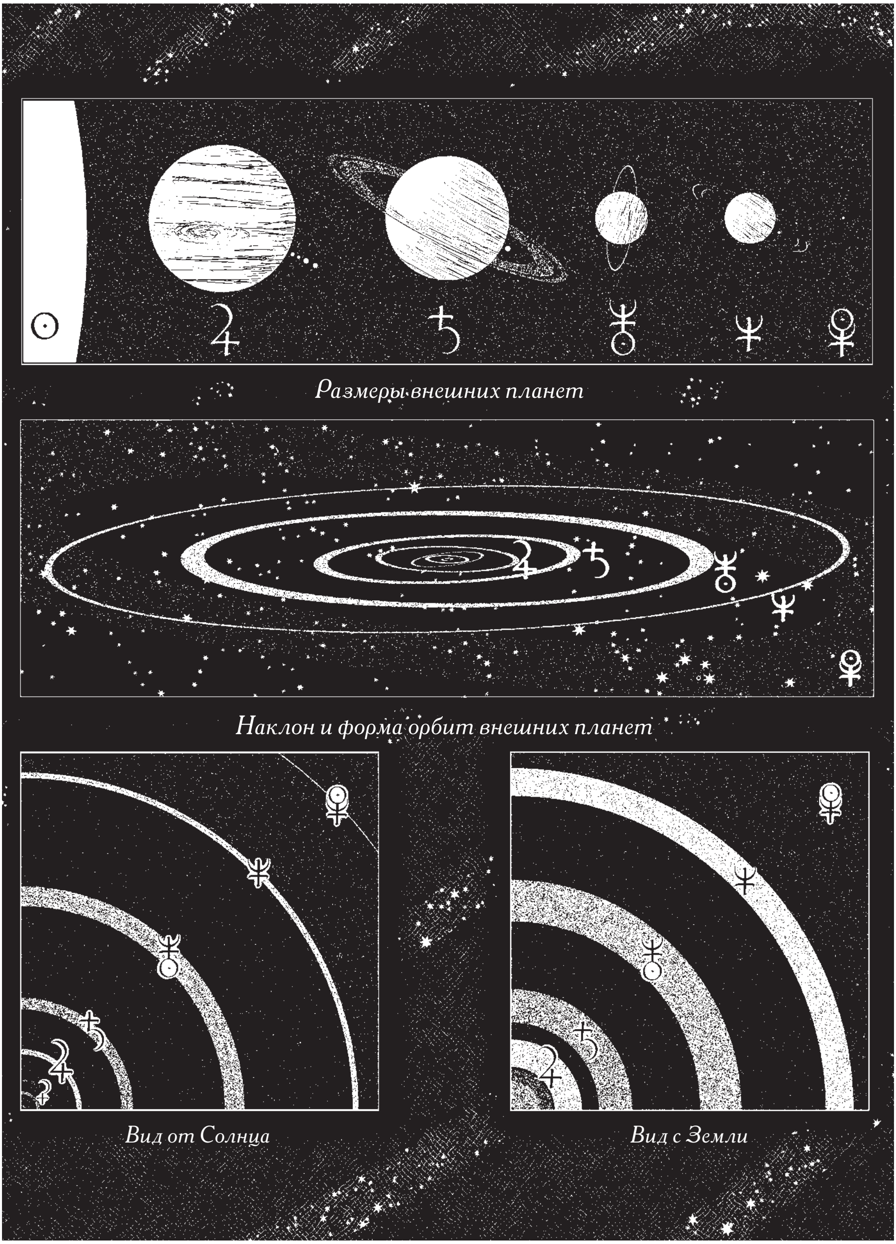
Юпитер — самая большая планета, а ее магнитное поле — самый большой объект в Солнечной системе. Хотя на 90% Юпитер состоит из водорода, его ядро твердое, как и у остальных газовых гигантов. Ядро окружено атомарным и жидким водородом. Знаменитое Красное Пятно представляет собой огромный, больше Земли, ураганный вихрь, веками бушующий на поверхности гиганта. Спутники Юпитера многочисленны и примечательны. Один носит название Ио и является самым вулканически активным объектом в Солнечной системе; другой — Европа — предположительно располагает океанами теплой воды под ледяной коркой поверхности.

Следующая планета — Сатурн — знаменита своей системой красивейших колец. Ее поверхность скрыта под плотным слоем облаков. По составу Сатурн похож на Юпитер, в его основе — все те же водород и гелий. Открыто большое количество спутников Сатурна. Самый большой — Титан — размером с Меркурий обладает всеми необходимыми структурными элементами для существования жизни.

За Сатурном следует Уран, который вращается, лежа на боку. Скорость ветров, бушующих в районе его экватора, в шесть тысяч раз превышает скорость звука.

Следующая по счету планета — Нептун, ледяной мир из воды, аммиака и метана. Поверхность Тритона, самого большого из его спутников, покрыта коркой ледяного азота и усыпана гейзерами, извергающими высоко в атмосферу жидкий азот.

Завершает Солнечную стстему крошечный Плутон, за ним идет пояс Койпера и далее, растянувшись на треть пути до ближайшей звезды, — сфера ледяных осколков и комет облака Оорта.



Размеры внешних планет

Наклон и форма орбит внешних планет

Вид от Солнца

Вид с Земли

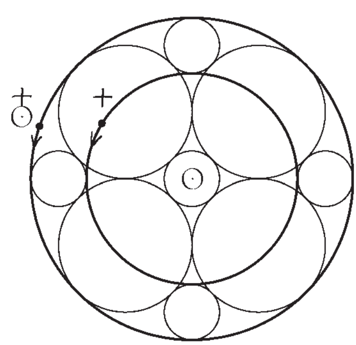
Четверки

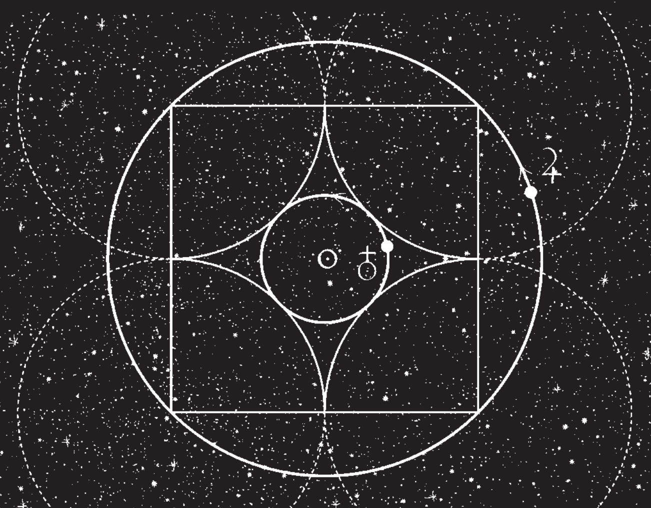
Марс, Юпитер и крупные луны

Орбиты Юпитера и Марса разделяют пояс астероидов и 550 миллионов километров; это больше расстояния от Земли до Солнца. Юпитер — первый и самый большой из газовых гигантов, «пылесос» Солнечной системы. Если бы Юпитер собрал незначительно больше вещества в ходе своего долгого и непрекращающегося формирования, его внутреннее давление превратило бы его в звезду, и у нас появилось бы второе Солнце.

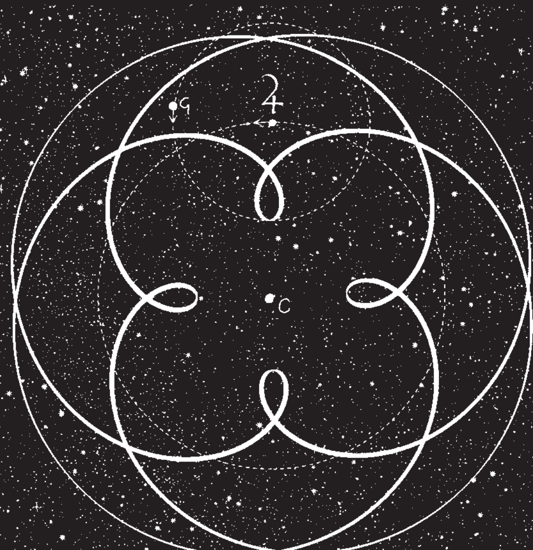
На схеме вверху напротив показан простой способ начертить орбиты Марса и Юпитера при помощи четырех соприкасающихся окружностей и квадрата (99,98%). Такой узор можно довольно часто встретить в церковных витражах и на вокзалах. *Внизу* приведен чертеж из того же разряда, очень точно иллюстрирующий пропорции орбит Земли и Марса (99,9%).

У Юпитера 4 необычайно больших спутника, луны. Самые большие — Ганимед и Каллисто — достигают размеров Меркурия и рисуют один из самых правильных пространственно-временных узоров в Солнечной системе. Астроном на одном из этих спутников смог бы наблюдать узор перемещений второго в виде прекрасного четырехлепесткового цветка, изображенного *напротив внизу*.





Как точно начертить средние орбиты Марса и Юпитера



Прекрасный «танец» Ганимеда и Каллисто

Внешние луны

Гармоничные узоры

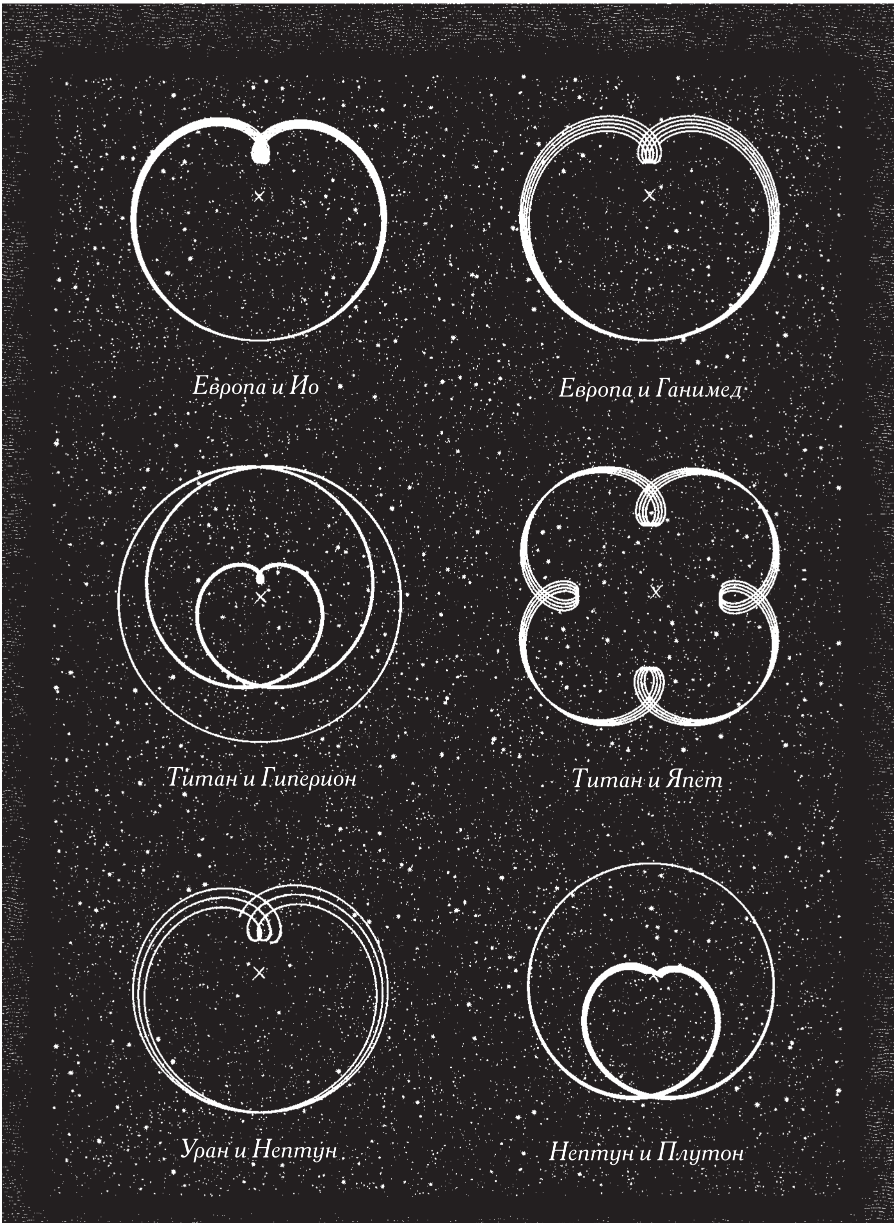
Вокруг Юпитера вращаются 4 группы лун, спутников. В первые 2 группы входят по 4 спутника, что очень напоминает модель Солнечной системы: 4 маленьких внутренних тела, за которыми следуют 4 больших внешних. Вторая группа из 4 необычайно больших спутников (*галилеевых*) включает в себя 2 небольшие твердые луны — Ио и Европа, и 2 луны из газа и льда размером с планету — Ганимед и Каллисто.

Эти группы из 4 небесных тел удивительны. В каждую из 4 групп входят спутники с одинаковыми размерами, плоскостями орбит, периодами вращения и расстояниями от Юпитера (углы наклона 4 орбитальных плоскостей 4 групп, расположенных на одном уровне, с точностью 99,9% в сумме дают 90°, или четверть круга).

У Сатурна около 30 спутников, большинство из которых расположено в пределах его знаменитых колец. Тем не менее далеко за их пределами вращаются 3 примечательных спутника — гигантский Титан, небольшой Гиперион и безмолвный Япет.

Напротив показаны некоторые гармоничные узоры: 2 созданы самыми большими спутниками Юпитера, 2 — гигантским спутником Сатурна Титаном и 2 — Нептуном, внешней планетой Солнечной системы.

Диссонансы в Солнечной системе встречаются редко, она создана для гармонии.


Европа и Ио
Европа и Ганимед
Титан и Гиперион
Титан и Япет
Уран и Нептун
Нептун и Плутон

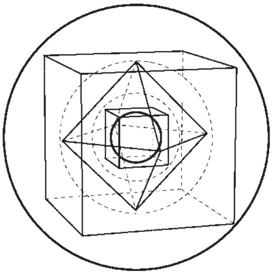
Гигантская печать Юпитера

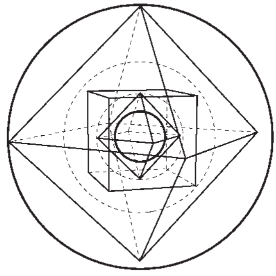
Огромные гексаграммы и зафиксированные астероиды

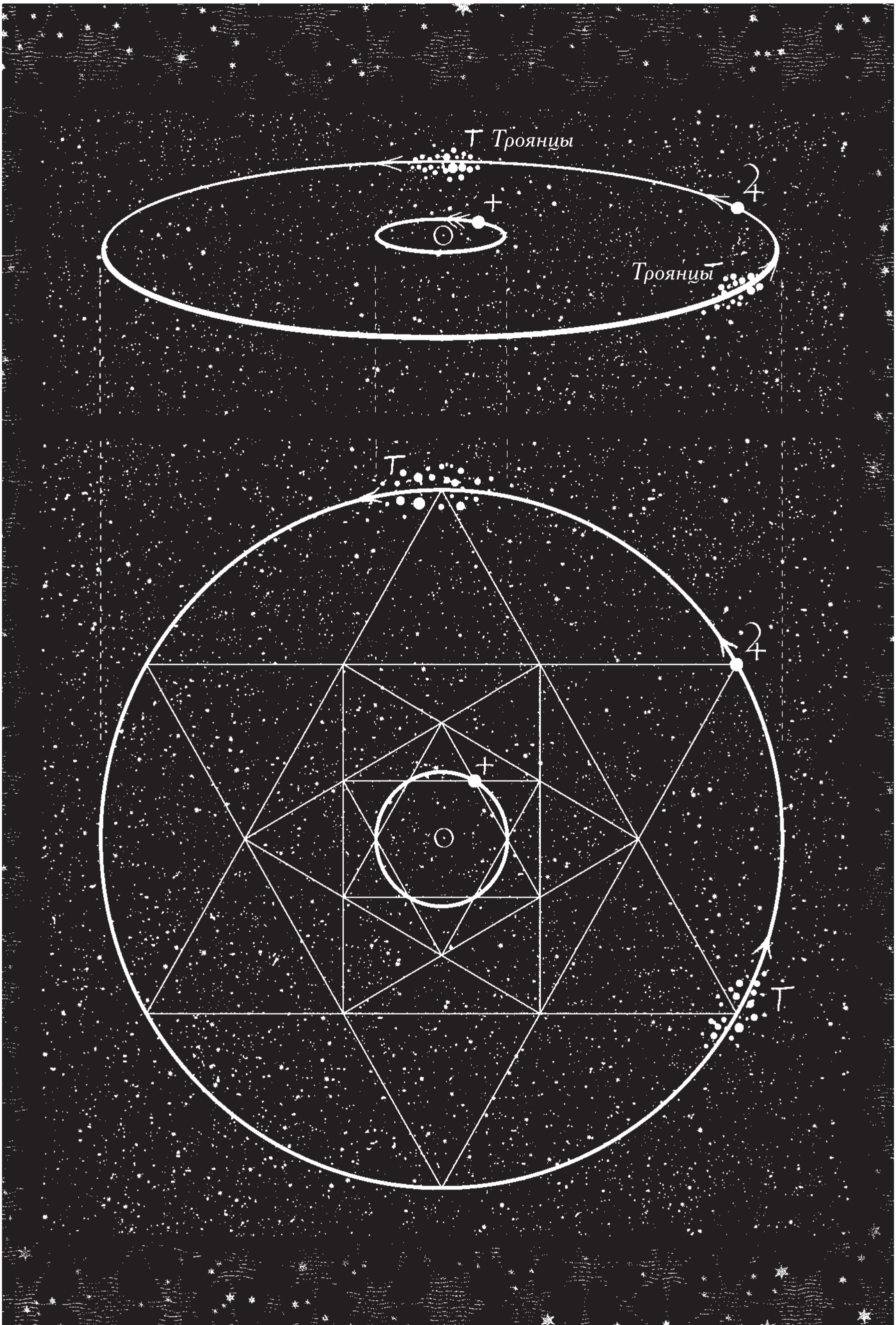
Юпитер — самая большая планета Солнечной системы — названа по имени главного древнего греческого бога, Зевса. Очаровательной особенностью его орбиты является присутствие на ней двух астероидных кластеров. *Троянцы* — это две группы астероидов, которые движутся по орбите Юпитера на 60° перед ним и на 60° после него (*напротив*). Эта компания движется вокруг Солнца постоянно и неизменно, словно насаженные на спицы колеса. Позиции астероидных кластеров Троянцев называют *точками Лапласа*, где Солнце, Юпитер и Троянцы образуют сбалансированные гравитационные равносторонние треугольники.

В качестве развлечения: если соединить спицы, как показано *напротив*, получатся три гексаграммы, которые покажут среднюю орбиту Земли по отношению к Юпитеру (99,8%) — этот прием довольно легко запомнить. Так, в любом кристалле прячутся орбиты Земли и Юпитера. Другие названия шестиконечной звезды, сформированной из двух треугольников, — *звезда Давида* или *печать Соломона*.

Ту же пропорцию Земля — Юпитер можно получить, если последовательно вложить друг в друга три куба или три октаэдра либо комбинацию из этих фигур (*см. пример внизу*). Если внешняя сфера отображает среднюю орбиту Юпитера, то внутренняя сфера будет соответствовать средней орбите Земли. Удивительно!







Троянцы
Троянцы

Золотые часы

Юпитер и Сатурн, вид с Земли

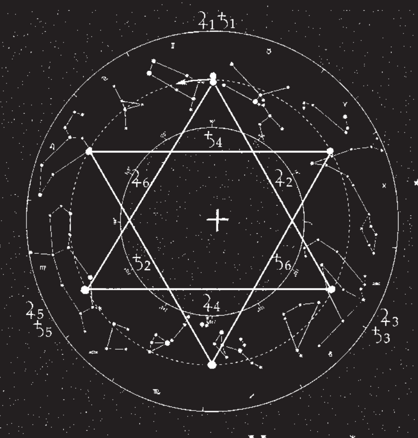
Юпитер и Сатурн — две самые большие планеты Солнечной системы. В древней мифологии Сатурн называли Хроносом, повелителем времени.

На схемах *напротив* видно, что периоды этих двух планет составляют пропорцию, близкую к 5:2. *Вверху слева* изображен их «танец»; красивая трехчастная гармония в нем очевидна. Из-за легкого расхождения их гармоний узор медленно закручивается. С Земли можно наблюдать последовательность важных соединений и противостояний Юпитера и Сатурна, которые сближаются каждые 20 лет. *Вверху справа* мы видим гексаграмму, созданную этими позициями: соединения отмечены на внешней стороне зодиакального круга, а противостояния — на внутренней. Планеты движутся против часовой стрелки вдоль большого небесного круга, обозначенного пунктирной линией, начиная с 12 часов, при этом Юпитер движется быстрее Сатурна.

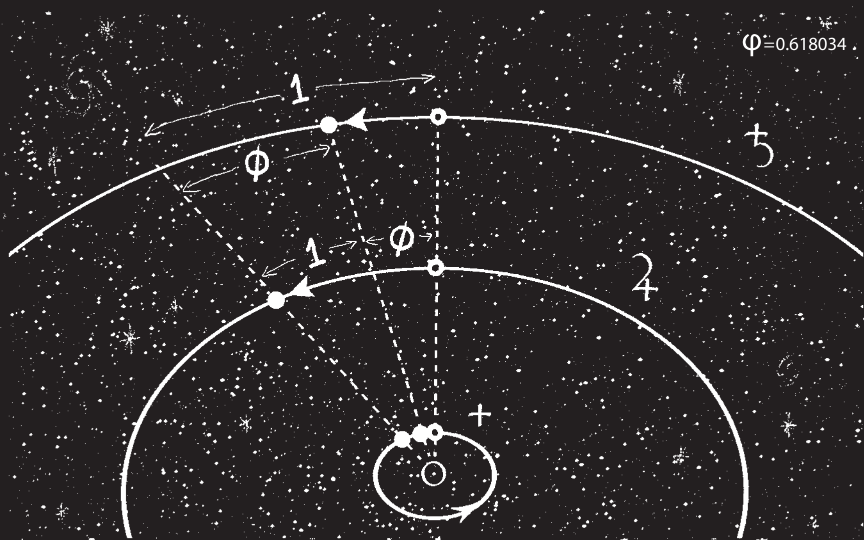
Нижняя схема показывает относительные скорости орбит Земли, Юпитера и Сатурна. За начало принимаем позицию на синодической линии на 12 часах. Земля вращается намного быстрее внешних планет, она успевает пройти полный круг вокруг Солнца (365,242 дня) и еще немного, перед тем как через 378,1 дня снова встретится с медлительным Юпитером. Тремя неделями позже (через 398,9 дней) она догонит Юпитер. Ричард Хит недавно обнаружил, что эти пространственно-временные отношения соответствуют золотому сечению с *ошеломительной* точностью — 99,99%! Так, два гиганта Солнечной системы направляют на нас золотое сечение в пространстве и времени, усиливая геометрию жизни на Земле.

Интересно, что для завершения одного витка вокруг Солнца Сатурну требуется столько же лет, сколько дней между двумя полными лунами (99,8%).

«Танец» Юпитера и Сатурна



Соединения и противостояния



Синодические периоды Юпитера и Сатурна образуют золотое сечение

Октавы в космосе

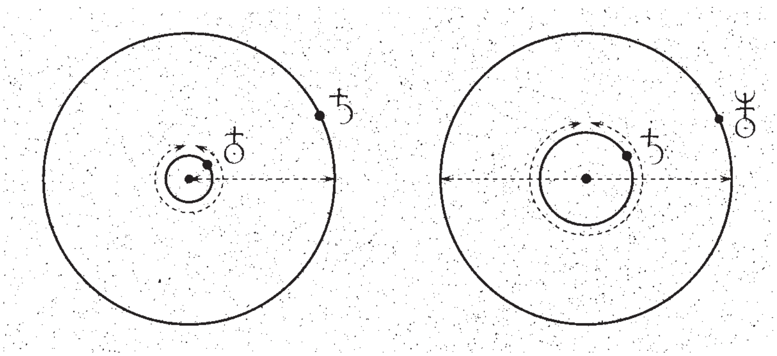
Снова тройки и восьмерки

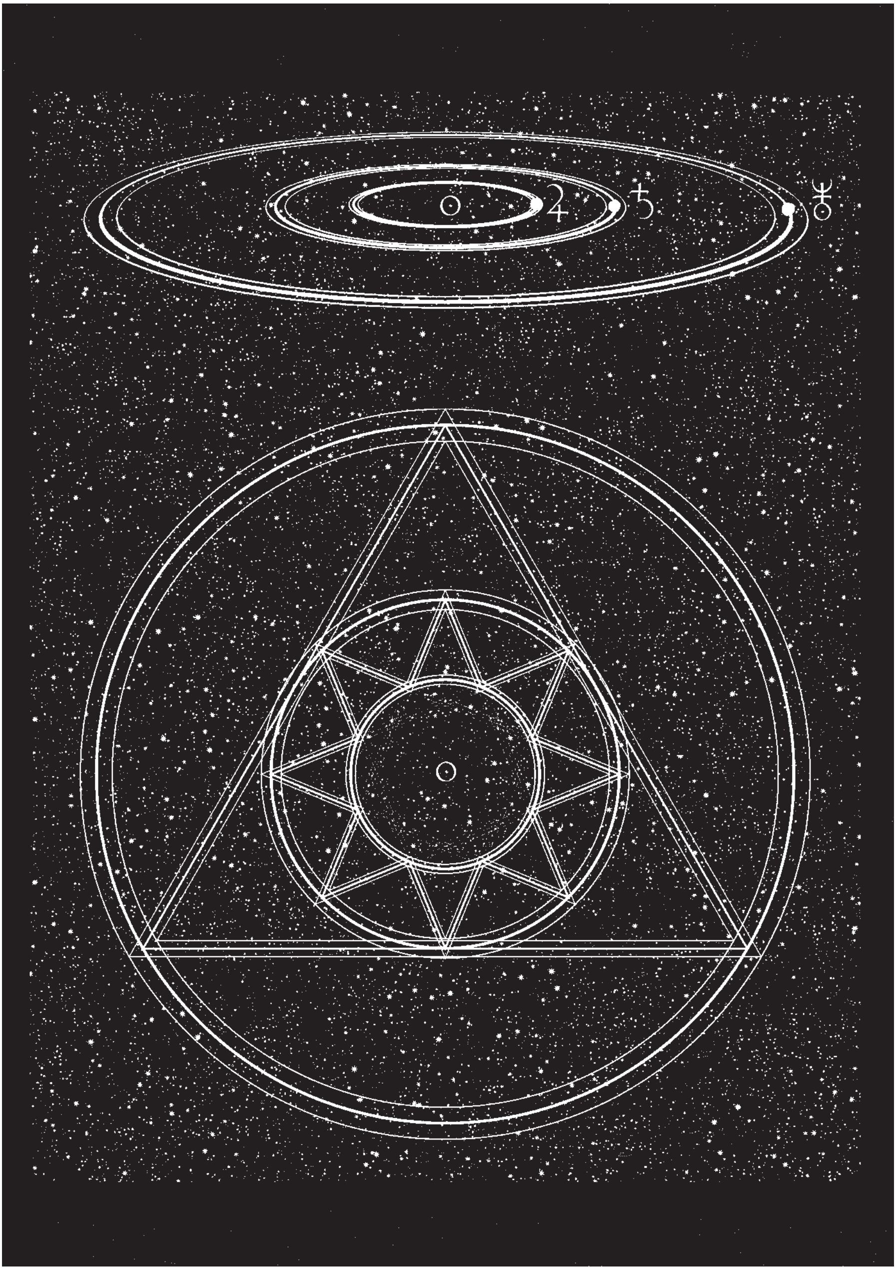
На схеме *напротив* показана взаимосвязь между орбитами Юпитера, Сатурна и Урана. Равносторонний треугольник и октаграмма задают пропорции внешней, средней и внутренней орбит трех самых больших планет. Незначительные расхождения все же можно заметить, но в целом соответствие практически точное. Кроме того, этот прием легко запомнить и использовать для решения самых разнообразных практических задач. Полученная схема похожа на «звездчатую» версию соприкасающихся кругов, при помощи которых мы определяли орбиты первых трех планет (*см. с. 325, внизу справа*).

Один из способов изображения музыкальной октавы (разделение пополам либо удваивание частоты или длины волны) основан на использовании равностороннего треугольника, так как диаметр окружности, описанной вокруг него, ровно вдвое больше диаметра вписанной окружности.

Еще стоит запомнить правило: если орбита Юпитера соответствует 6, то орбита Сатурна — 11 (99,9%), пропорция Луна:Земля, умноженная на 2 (*см. с. 326*).

Орбита Сатурна также имеет отношение к числу π (*внизу*): ее радиус равен длине орбиты Марса (99,9%), а ее длина — диаметру орбиты Нептуна (99,9%).



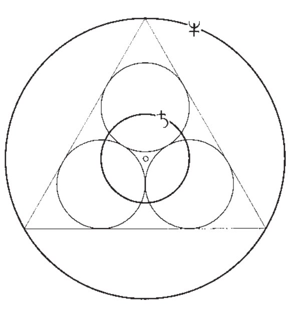


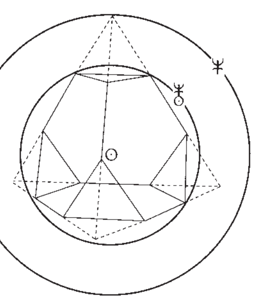
Галактическая геометрия

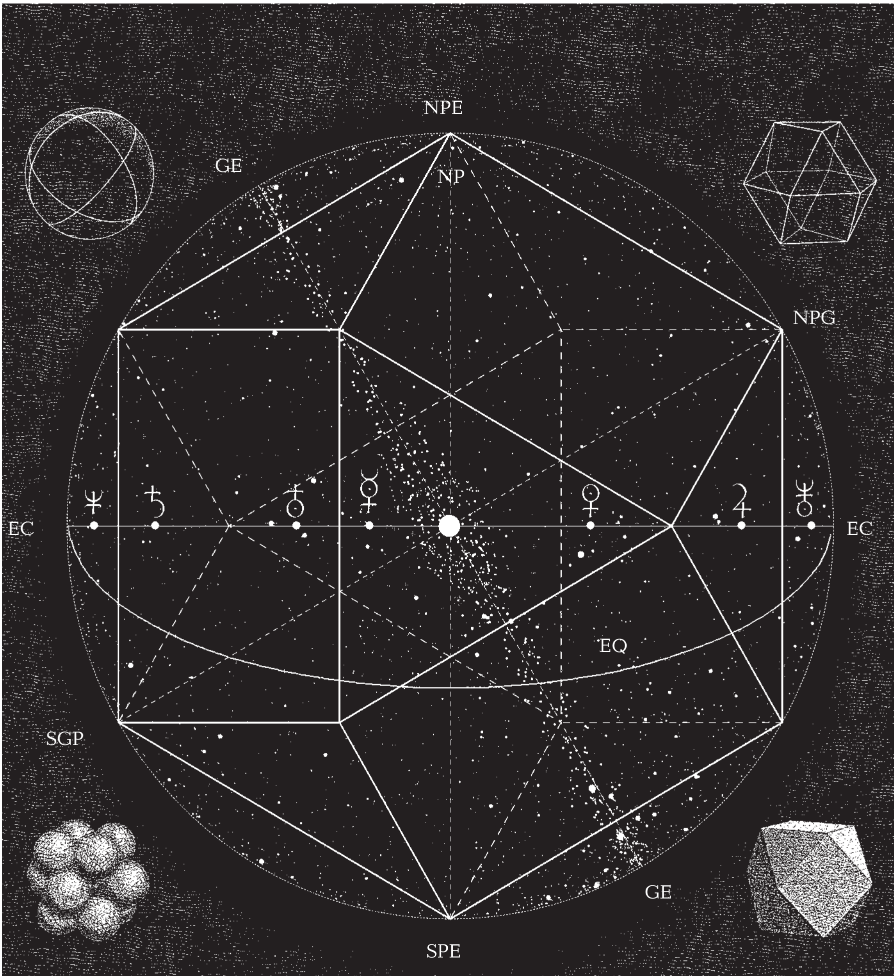
Навстречу звездам и дальше

Дальше от центра Солнечной системы в геометрии космоса преобладают треугольники (*два примера показаны внизу, с точностью 99,9%*). Как и у Сатурна, у Нептуна и Урана есть загадочная система колец с пустыми пространствами — щелями Кирквуда, где период вращения частиц согласуется с одной или большим количеством спутников, лун. Диаметр светлого внешнего кольца Урана в два раза больше, чем диаметро самого Урана (99,9%). Размер внутреннего кольца Нептуна соответствует двум третям его внешнего кольца (99,9%). Эти пропорции замечательным образом отражаются на периодах вращения планет. Так, период вращения Нептуна в два раза больше периода Урана, а период Урана соответствует двум третьим периода Плутона — подчинение внешних планет гармонии 1:2:3, которую мы уже встречали во внутреннем пространстве Солнечной системы у Меркурия.

Одну из наиболее очевидных симметрий современной космологии формирует Млечный Путь — пересекающую звездное небо неярко светящуюся полосу, огромное количество визуально неразличимых звезд, концентрирующихся к основной плоскости Галактики. Он наклонен к эклиптике или плоскости Солнечной системы под углом, практически равным (99,7%) 60° (*напротив*). Более того, каждый год Солнце пересекает Галактику через ее экватор. Конечно, это происходит в день зимнего солнцестояния. Как и со многими изображениями в этой книге, возможно, вам придется внимательно изучить эту схему, чтобы понять ее!







NPE — Северный полюс эклиптики
GE — галактический экватор
NP — Северный полюс Земли
NPG — Северный полюс Галактики
EC — эклиптика, путь Солнца
EQ — экватор Земли
SGP — Южный полюс Галактики
SPE — Южный полюс эклиптики

Точка зимнего солнцестояния и Северный полюс Земли наклонены в сторону от Солнца, которое расположено прямо напротив центра нашей Галактики. Полюса эклиптики и Галактики формируют вершины шестиугольника, охватывающего космическое пространство вокруг нас

Ледяное гало

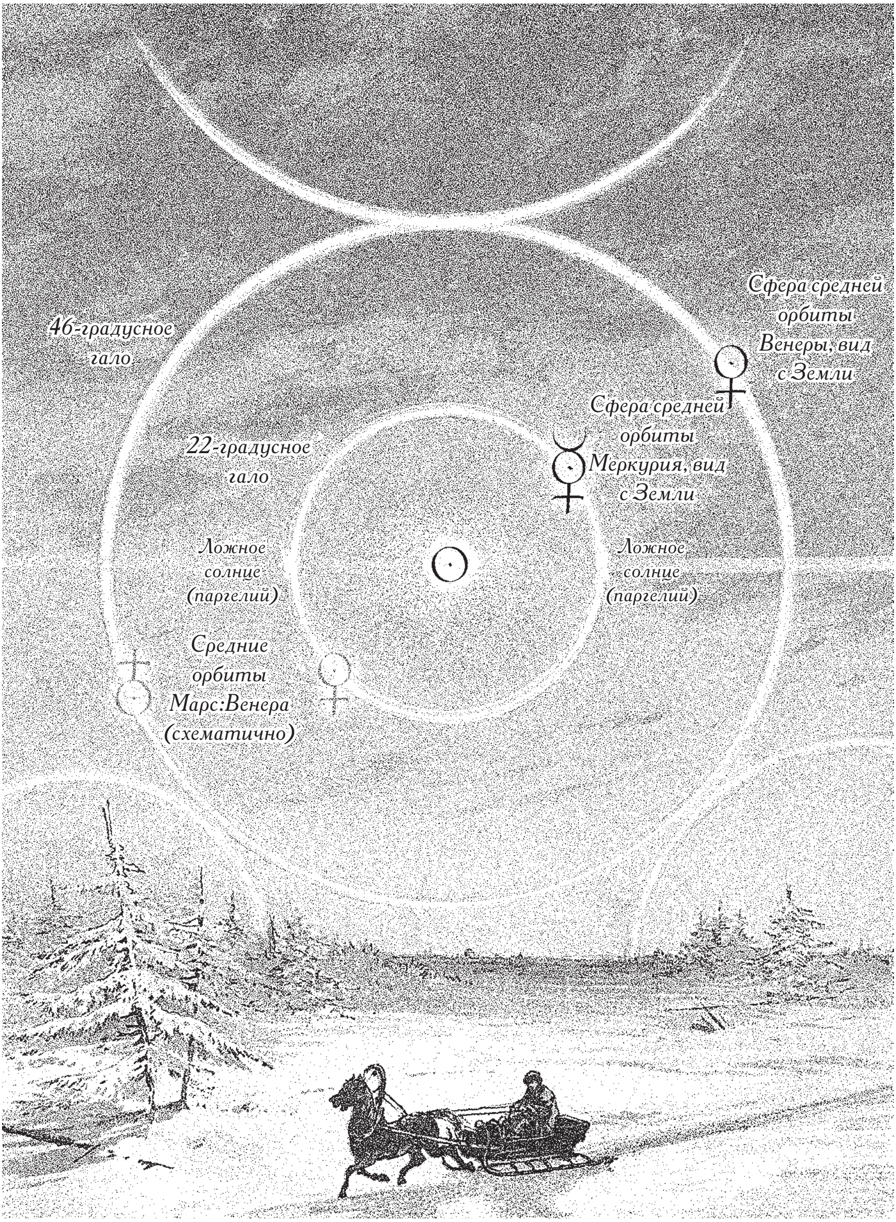
Радуги вокруг планет

Если вам повезет, одним ясным вечером вы сможете увидеть пару радужных пятен слева и справа от Солнца. Известные как ложные солнца, эти пятна являются первыми предвестниками ледяного гало — тонкого радужного кольца вокруг Солнца. Ложные солнца появляются под углом 22,5° слева и справа от Солнца, на границе 22-градусного гало, в результате преломления солнечных лучей в кристаллах льда высоко в атмосфере. Иногда вокруг Солнца возникает большое гало, с угловым радиусом 46°, отличительной особенностью которого является характерная арка вверху — в результате получается структура, до странности напоминающая древний глиф Меркурия.

Удивительным образом эти два ледяных гало соответствуют средним орбитам двух внутренних планет — Меркурия и Венеры — при наблюдении с Земли. Это означает, что, если вы смотрите на двойное ледяное гало, то на самом деле видите сферы средних орбит Меркурия и Венеры, нависшие над земным небом. Более того, те же два ледяных гало *также* работают как схема относительных орбит Венеры и Марса.

Это крайне необычно. Каждый круг — в точном соответствии со схемой. Солнечный свет и ледяной туман рисуют радужные орбиты, в то время как лунный и солнечный диски в земном небе имеют одинаковый размер. Наш ближайший сосед исполняет вокруг нас пятикратный «танец» с периодом 8 или 13 лет, причем растения на Земле тоже развиваются с шагом 5, 8 или 13. Эти «совпадения» указывают именно на Землю — планету, населенную разумными наблюдателями. Возможно, разум имеет отношение к этим «совпадениям». Мог ли факт сознательного наблюдения каким-то образом повлиять на окружающую нас реальность? Встречаются ли немыслимые совпадения на других планетах, населенных наблюдателями?

Платон писал, что все сущее организовано более совершенно, чем мы можем вообразить. Как «*уравновесить*» Солнце и Луну на небе? Может быть, мы на самом деле живем в разумной Вселенной, имеющей голографическую структуру?



Вверху: два круга, которые мы чаще всего видим вокруг Солнца, отображают средние орбиты двух планет, которые отделяют Землю от Солнца. Эти многочисленные совпадения заметны только для наблюдателей с Земли (использована гравюра из книги французского астронома XIX века Камиля Фламмариона, 1885)

Звездная подпись

Косвенное доказательство существования жизни на Земле

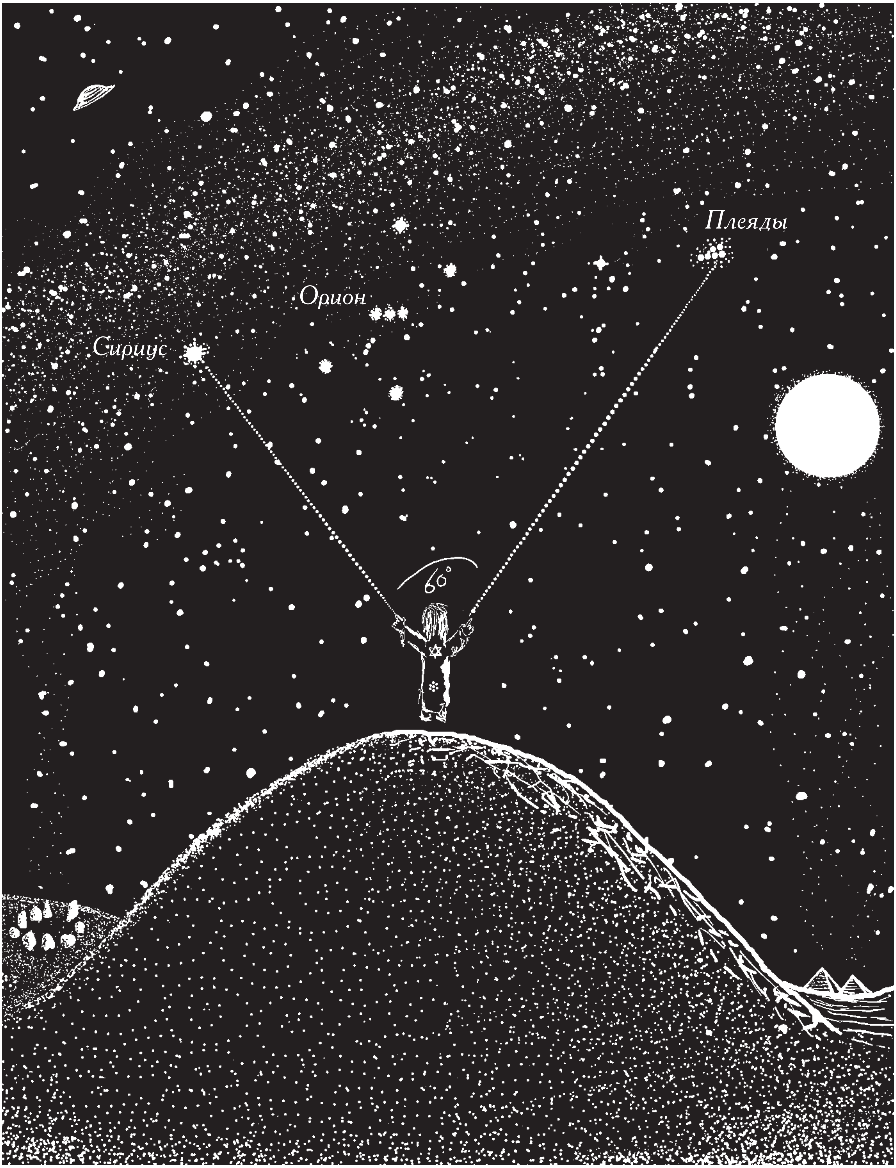
Несмотря на научные открытия последних веков, сегодня мы так же далеки от понимания того, зачем мы здесь, как древние люди были далеки от создания карманного калькулятора. Тем не менее наши далекие предки очень глубоко размышляли над природой человеческого сознания и считали, что душа в особой степени наполняется при использовании прикладной геометрии и занятиях музыкой. В этих искусствах они досконально исследовали отношения между «одним» и «несколькими», ведь в геометрии множество подходящих совпадающих фигур, а в музыке — созвучных нот.

Эта книга познакомила вас с некоторыми простыми и прекрасными примерами гармонии и геометрии в Солнечной системе. Золотое сечение, долгое время ассоциировавшееся с жизнью и, очевидно, отсутствующее в современных уравнениях, любовно окутывает Землю плотным ковром «совпадений». Может быть, в какой-то степени этот факт имеет отношение к ответу на вопрос: «Почему мы здесь?» Возможно, в таком случае рассмотренные техники можно использовать для распознавания наличия разумной жизни за пределами нашей Солнечной системы?

Надеюсь, «Квадривиум» вам понравился. Не исключено, что эта книга даже переменила что-то в ваших представлениях об окружающем мире и космосе. И если в какой-то момент вам потребуется напоминание о том, что в мире гораздо больше магии, чем принято считать в рамках современной космологии, просто вспомните о небесном цветке Венеры и о словах Джона Донна (английский поэт, младший современник Шекспира. — *Ред.*):

Лишь сеть, что человек на небосклон
Набросил, крикнув: «Мой отныне он!»
Лентяи — ввысь мы сами не восходим,
А небеса к себе на Землю сводим.

(Джон Донн «Анатомия мира», 1611,
пер. Д. Щедровицкого)

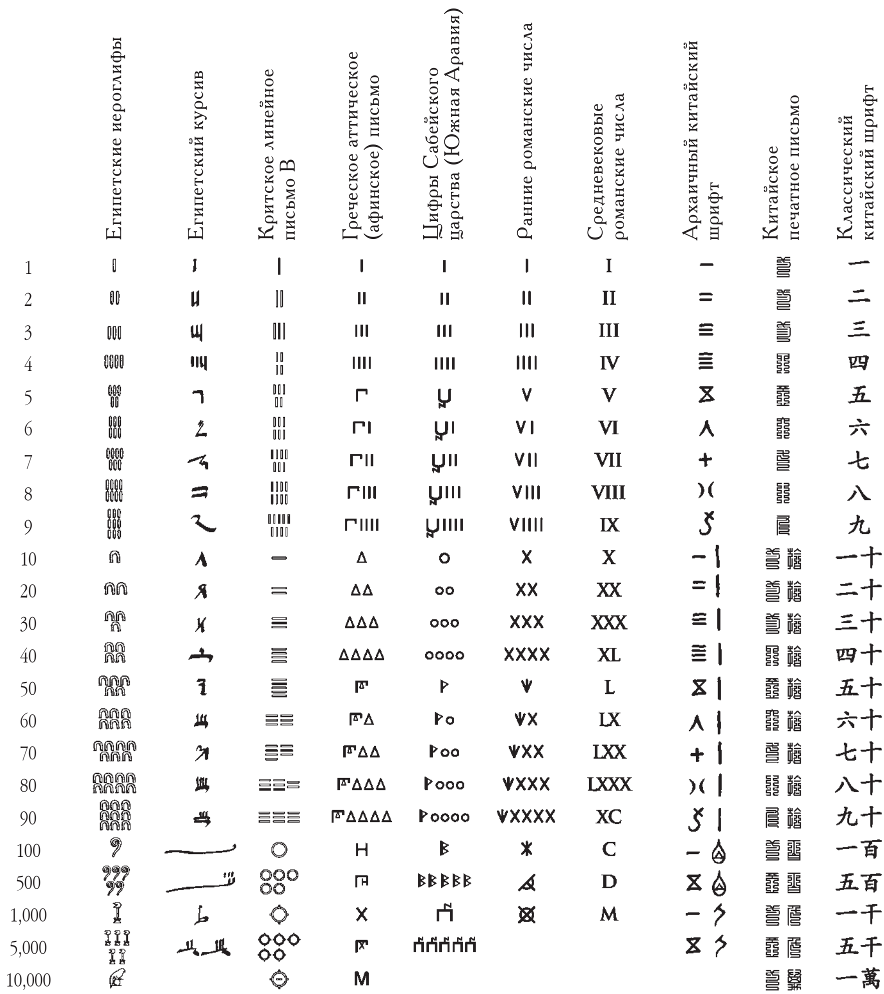


Наши далекие предки очень глубоко размышляли над природой человеческого сознания и считали, что душа в особой степени наполняется при использовании прикладной геометрии и занятиях музыкой

ПРИЛОЖЕНИЯ

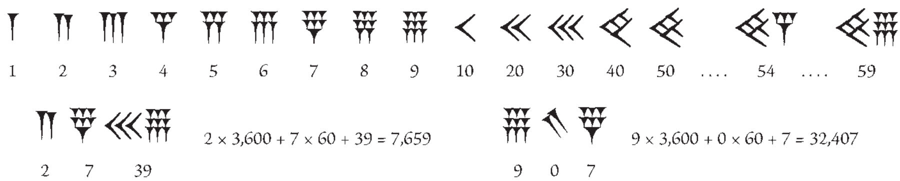
Ранние системы счета

В таблице приведены примеры древних систем счета. Все они используют ограниченное количество символов для обозначения определенного ряда чисел. В средиземноморских системах счета цифры похожи на счетные палочки. В китайской системе символы, обозначающие числа от одного до девяти, комбинируются с числами 10, 100, 1000 и 10 000. Во всех системах число, к примеру 57, будет записываться как символ 50, за которым следует символ 7, без использования веса разряда.

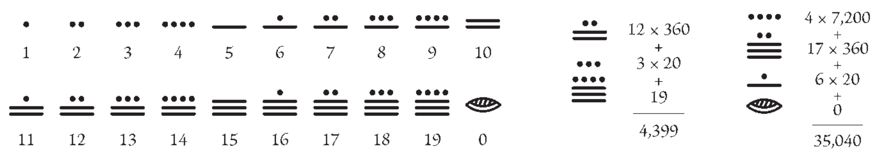


Позиционные системы счисления

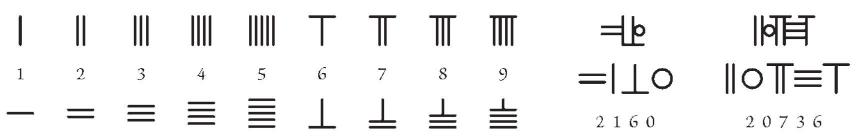
Системы счисления, которые используют вес разряда, или позицию цифры, для обозначения ее значимости, называются позиционными. Самой ранней подобной системой считается шумерская клинопись. Оттиски пишущего стилуса на глине повторяются для обозначения чисел от 1 до 59, при этом для обозначения разряда изменяется позиция оттиска. Позднее жители Вавилона ввели понятие «пустое место», то есть изобрели первый ноль



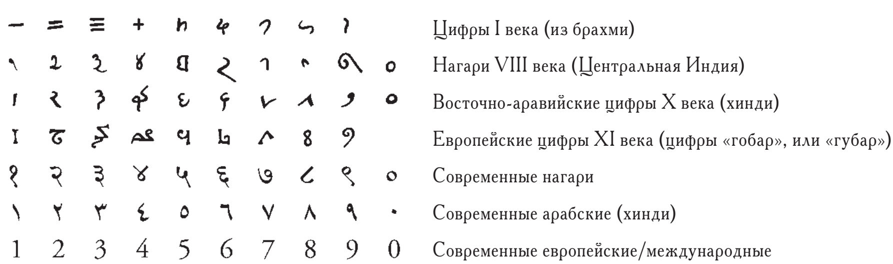
Майя открыли ноль и вес разряда независимо от других цивилизаций. Их двадцатеричная система счисления подразумевала вертикальное письмо. Цифра в третьем разряде умножается не на 20, как во втором, а на 18. Возможно, это связано с использованием числа 360 в основе календаря



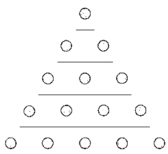
На Дальнем Востоке использовались два набора из девяти глифов. Индийский ноль добавился к ним в XIX веке



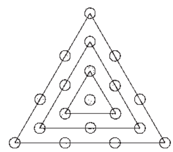
Наша система счета восходит своими корнями к индийским брахми. Начиная с VI века наши предки использовали различные наборы символов для обозначения цифр от 1 до 9, знали ноль и умели присваивать разряды



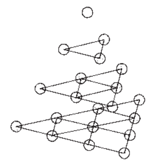
Пифагоровы числа



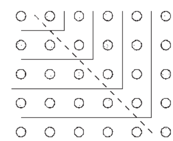
*Треугольные числа,
сумма чисел
1 + 2 + 3 + 4 ...
1, 3, 6, 10, 15 ...*



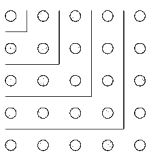
*Треугольные числа
от центра, треугольники
увеличиваются на три
1 + 3 + 6 + 9 ...
1, 4, 10, 19 ...*



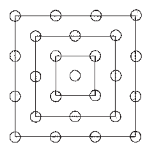
*Тетраэдральные числа,
сумма треугольных чисел
1 + 3 + 6 + 10 ...
1, 4, 10, 20 ...*



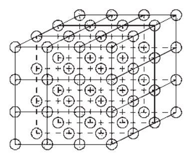
*Прямоугольные числа,
треугольные числа,
умноженные на два
2 + 4 + 6 + 8 ...
2, 6, 12, 20 ...*



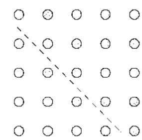
*Квадратные числа,
сумма нечетных чисел
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ...
1, 4, 9, 16, 25 ...*



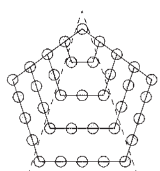
*Квадратные числа
от центра, квадраты
увеличиваются на четыре
1 + 4 + 8 + 12 + ...
1, 5, 13, 25 ...*



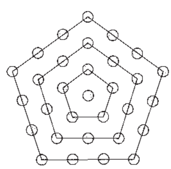
*Кубические числа
1 x 1 x 1, 2 x 2 x 2,
3 x 3 x 3, 4 x 4 x 4 ...
1, 8, 27, 64 ...*



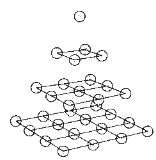
*Квадратные числа
как сумма двух
смежных чисел.
Здесь: 10 + 15 = 25*



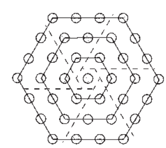
*Пятиугольные числа,
делятся на три
1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ...
1, 5, 12, 22, 35, ...*



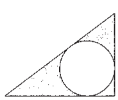
*Пятиугольные числа
от центра, увеличиваются
на пять
1 + 5 + 10 + 15 + ...
1, 6, 16, 31, 61 ...*



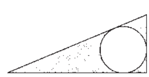
*Квадратные пирамидальные
числа, квадрат
за квадратом
1 + 4 + 9 + 16 + ...
1, 5, 14, 30, 55 ...*



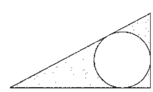
*Шестиугольные числа
от центра. Центр
и шесть треугольников
1 + 6 + 12 + 18 + ...
1, 7, 19, 37, 61 ...*



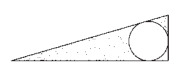
*Треугольник
со сторонами 3, 4, 5,
площадь 6, периметр 12,
диаметр вписанной
окружности 2*



*Треугольник
со сторонами 5, 12, 13,
площадь 30, периметр 30,
диаметр вписанной
окружности 4*



*Треугольник
со сторонами 8, 15, 17,
площадь 60, периметр 40,
диаметр вписанной
окружности 6*



*Треугольник
со сторонами 7, 24, 25,
площадь 84, периметр 56,
диаметр вписанной
окружности 6*

Примеры гематрии

Христианская и древнегреческая гематрия

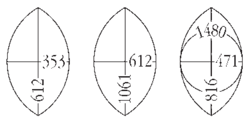
ΙΗΣΟΥΣ (Иисус) 888 + ΧΡΙΣΤΟΣ (Христос) 1480 = 2368

888 : 1480 : 2368 = 3 : 5 : 8

ΚΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΥΤΟΥ ΧΞΣ = 2368
(и его номер 666)

ΤΟ ΑΥΙΟΝ ΠΝΕΥΜΑ (Святой дух) 1080 + ΠΑΡΑ ΘΕΟΥ (от Бога) 666 = 1746

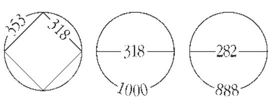
Η ΔΟΞΑ ΤΟΥ ΘΕΟΥ ΙΣΡΑΗΑ = 1746
(Слава Господу Израильскому)



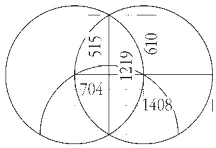
ΕΡΜΗΣ (Гермес) 353 ⇒ ΖΕΥΣ (Зевс) 612

ΖΕΥΣ (Зевс) 612 ⇒ ΑΠΟΛΛΩΝ (Аполлон) 1061

ΚΑΡΠΟΣ (Плод) 471 ⇒ ΖΩΗ (Жизнь) 815



ΗΛΙΟΣ (Солнце) = 318 ΒΙΟΣ (Жизнь) = 282
1000 как увеличенная Единица



ΠΑΡΘΕΝΟΣ (Дева) = 515
ΞΥΛΟΝ (Крест) = 610
Ο ΘΕΟΣ ΙΣΡΑΗΑ
(Господь Израильский) = 703
ΙΧΘΟΣ (Рыба) = 1219
ΣΩΤΗΡ (Спаситель) = 1408

Божественные имена ЯХВЕ (YHWH) как тетрактис

י = 10
יה = 10 + 5 = 15
יהו = 10 + 5 + 6 = 21
יהוה = 10 + 5 + 6 + 5 = 26

היה HaYaH (он был) = 25
הוה HoWeH (он есть) = 16
יהיה YiHYeH (он будет) = 30

Некоторые соответствия из иврита:

אחד EKHAD (Один) = 13 = אהבה AHAVAH (Любовь)
Их сумма = 26 = YHWH

אדם חוה ADAM – KHAWAH (Адам) (Хава) = 26 = יהוה YHWH

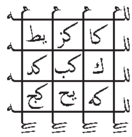
יין YAYIN (Вино) = 70 = סוד SOD (Тайна)
Или «Истина — в вине!»

Гематрии названий букв иврита:

אלף	111	Алеф	למד	74	Ламед
בית	412	Бет	מים	90	Мем
גמל	73	Гимел	נון	110	Нун
דלת	434	Далет	סמך	120	Самех
הא	6	Хе	עין	130	Аин
וו	12	Вав	פה	85	Пе
זין	67	Заин	צדי	104	Цади
חית	418	Хет	קוף	104	Коф
טית	419	Тет	ריש	510	Реш
יוד	20	Йод	שין	360	Шин
כף	100	Каф	תו	406	Тав

В каждом числе содержится зерно последующего, поэтому правила гематрии разрешают расхождение в единицу при сопоставлениях. Иррациональные числа в геометрических измерениях и соотношениях также можно округлять

Талисман с магическим числом 66 — сумма божественного имени Аллаха в арабской письменности



21	26	19
20	22	24
25	18	23

Некоторые имена Господа в арабском языке:

الله	66	Аллах
باقي	113	Баки (Бессмертный)
جامع	114	Ями (Собирающий)
ديان	65	Дайан (Судья)
هادي	20	Хади (Проводник)
ولي	46	Вали (Друг)
زكي	37	Заки (Очиститель)
حق	108	Хак (Истина)
طاهر	215	Тахир (Чистота)
يسين	130	Йассин (Правитель)
كافي	111	Кафи (Достаточный)
لطيف	129	Латиф (Изысканный)
ملك	90	Малик (Король)
نور	256	Нур (Свет)
سميع	180	Сами (Всеслышащий)
علي	110	‘Али (Всевышний)
فتاح	489	Фатах (Разоблачающий)
صمد	134	Самад (Вечный)
قادر	305	Кадир (Могучий)
رب	202	Раб (Властелин)
شفيع	460	Шафи (Целитель)
توب	408	Таваб (Часто прощающий)
ثابت	903	Тхабит (Неизменный)
خالق	731	Халик (Создатель)
ذاكر	921	Дхакир (Помнящий)
ضار	1,001	Дар (Карающий)
ظاهر	1,106	Дхахир (Явный)
غفور	1,285	Гхафур (Прощающий)

Более сложные магические квадраты

Магический квадрат считается *нормальным*, если в нем используются числа от единицы до числа, равного квадрату общего количества клеток. Магический квадрат считается *простым*, если суммы цифр в рядах, колонках и по главным диагоналям соответствуют магическому числу. Существует только один нормальный магический квадрат третьего порядка и 8 возможных вариаций с использованием *отражения* и вращения (4 приведены *ниже*).

2	7	6
9	5	1
4	3	8

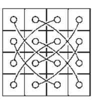
6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

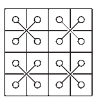
Если суммы магического квадрата симметричны относительно центра, например 2 + 8, 7 + 3…, квадрат считается *ассоциативным* (не простым), а пары чисел *комплементарными*.

Существует 880 нормальных магических квадратов четвертого порядка. Чтобы посчитать магические квадраты, математики вращают/отражают их так, чтобы верхняя левая ячейка содержала наименьшее возможное число, а ячейка справа от нее была меньше, чем ячейка внизу. Комплементарные числа в нормальном магическом квадрате четвертого порядка формируют 12 типов *квадратов Дьюдени* (4 приведены *ниже*).



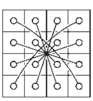
2	11	14	7
13	8	1	12
3	10	15	6
16	5	4	9

Группа I



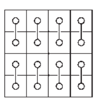
1	4	15	14
13	16	3	2
8	5	10	11
12	9	6	7

Группа II



4	14	5	11
15	1	10	8
9	7	16	2
6	12	3	13

Группа III



1	10	8	15
16	7	9	2
11	4	14	5
6	13	3	12

Группа IV

48 квадратов первой группы *пандиагональны*, шесть разломанных диагоналей, сформированных с противоположных сторон, складываются в магическую сумму (*внизу слева и в центре*).

Пандиагональные магические квадраты четвертого порядка *наиболее правильные*.

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Каждый квадрат 2 × 2 в нем складывается в магическую сумму (*справа*). Таким свойством обладают только нормальные пандиагональные магические квадраты двойной четности (4, 8, 12…).

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

Существует 275 305 224 нормальных магических квадратов пятого порядка. Пятый порядок — это наименьший порядок магических квадратов, которые могут быть одновременно и ассоциативными, и пандиагональными (см. пример). Существует 36 разных пандиагональных магических квадратов пятого порядка, каждый из которых имеет 99 вариаций с различными последовательностями рядов, колонок и диагоналей. Всего существует 3600 пандиагональных квадратов пятого порядка. Неизвестно, сколько существует магических квадратов шестого порядка. Шестой порядок — это первый порядок, кратный двум, но не кратный четырем. Он считается самым сложным для составления квадратом. Не существует пандиагональных или ассоциативных магических квадратов шестого порядка.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Чтобы сконструировать магический квадрат порядка, кратного двум, но не кратного четырем, расположите числа в последовательности, начиная с верхней левой ячейки, как это показано внизу. Используя пример, замените каждое число на выделенной диагонали на комплементарное, и у вас получится магический квадрат.

Чтобы сделать магический квадрат любого порядка, расположите 1 в верхней ячейке по центру и последовательно расставляйте следующие числа, двигаясь вправо, вращайте вверх/вниз и вправо/влево при необходимости. Когда вы достигнете предыдущей заполненной ячейки, переместитесь на одну ячейку вниз. В центральной ячейке окажется среднее число последовательности, а диагонали будут складываться в магическую сумму (альтернативный способ заполнения ячеек — внизу).

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

13	23	40	1	18	35	45
21	31	48	9	26	36	4
22	39	7	17	34	44	12
30	47	8	25	42	3	20
38	6	16	33	43	11	28
46	14	24	41	2	19	29
5	15	32	49	10	27	37

Два магических квадрата комбинируются, образуя *составной магический квадрат* порядка, равного произведению двух исходных порядков.

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

2	7	6
9	5	1
4	3	8

16	96	80
128	64	0
48	32	112

Сделайте копии первого квадрата (*слева*), как если бы он был ячейкой второго квадрата (*в центре*). Уберите 1 из каждой ячейки второго квадрата и умножьте на количество ячеек в первом квадрате (*справа*). Добавьте это число к каждой ячейке большого квадрата.

17	30	23	28	97	110	103	108	81	94	87	92
31	20	25	22	111	100	105	102	95	84	89	86
26	21	32	19	106	101	112	99	90	85	96	83
24	27	18	29	104	107	98	109	88	91	82	93
129	142	135	140	65	78	71	76	1	14	7	12
143	132	137	134	79	68	73	70	15	4	9	6
138	133	144	131	74	69	80	67	10	5	16	3
136	139	130	141	72	75	66	77	8	11	2	13
49	62	55	60	33	46	39	44	113	126	119	124
63	52	57	54	47	36	41	38	127	116	121	118
58	53	64	51	42	37	48	35	122	117	128	115
56	59	50	61	40	43	34	45	120	123	114	125

Чтобы составить *окаймленный магический квадрат*, прибавьте порядок, умноженный на два плюс два, к каждой ячейке нормального магического квадрата и сделайте рамку из наибольших/наименьших чисел новой последовательности.

5	4	24	25	7
3	12	17	10	23
18	11	13	15	8
20	16	9	14	6
19	22	2	1	21

Окаймленный квадрат

14	10	17	6	18
2	11	25	3	24
19	5	13	21	7
22	23	1	15	4
8	16	9	20	12

Мозаичный квадрат

2	10	19	14	20
22	3	21	11	8
17	25	13	1	9
18	15	5	23	4
6	12	7	16	24

Мозаичный ромб

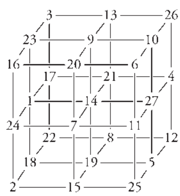
Магический квадрат внутри другого, который не соответствует правилу рамки из наибольших/наименьших чисел, называется *мозаичным* магическим квадратом. Также возможны мозаичные магические ромбы и вставленные магические квадраты (квадраты третьего и четвертого порядков в квадрате седьмого порядка, *см. внизу*).

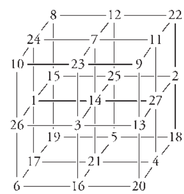
9	1	37	48	38	26	16
49	10	23	47	4	18	24
15	22	36	11	29	42	20
7	33	44	25	43	17	6
35	46	14	2	21	27	30
19	32	8	3	28	40	45
41	31	13	39	12	5	34

Бимагический квадрат останется магическим, если все его числа возвести в квадрат. В примере использован квадрат с магической суммой 369. Каждый квадрат 3×3 также складывается в магическую сумму. Магическая сумма в квадрате равна 20 049.

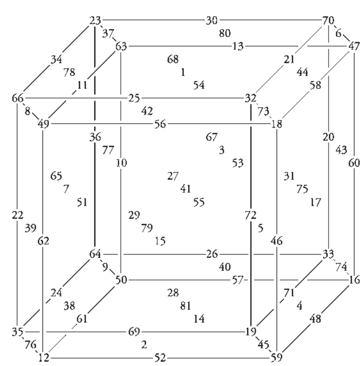
1	23	18	33	52	38	62	75	67
48	40	35	77	72	55	25	11	6
65	60	79	13	8	21	45	28	50
43	29	51	66	58	80	14	9	19
63	73	68	2	24	16	31	53	39
26	12	4	46	41	36	78	70	56
76	71	57	27	10	5	47	42	34
15	7	20	44	30	49	64	59	81
32	54	37	61	74	69	3	22	17

В трехмерном измерении существуют удивительные варианты магических кубов. Известно 4 нормальных магических куба третьего порядка (*2 показаны ниже*), в каждом 48 сложений. Ряды и колонки во всех направлениях, а также четыре длинные диагонали дают в сумме 42.





В 1950 году Джон Р. Хендрикс изобрел магический тессеракт, или 4D-куб, обнаружив примечательные возможности для магических фигур в четырехмерном пространстве. *Внизу* приведен пример одного из 58 нормальных магических тессерактов.



Некоторые числа

1

Один, Единица (универсальное)

2

Два начала (даосизм): чувствующее (инь), активное (ян)
Два ракурса (универсальное): субъект, объект
Два полюса (география): Северный, Южный
Два полюса (физика): положительный, отрицательный
Два принципа (метафизика): сущность, материя
Два правителя (алхимия): королева, король
Две стороны: лево, право
Два племенных строя (антропология): кочевники, оседлые
Две истины (логика): аналитическая (априори), синтетическая (апостериори)
Два способа познания (религия): эзотерический, экзотерический

3

Великая Триада (даосизм): Небеса, Человек, Земля
Святая Троица (христианство): Бог Отец, Бог Сын и Бог Святой Дух
Три алхимические стадии (алхимия): черная (нигредо), белая (альбедо), красная (рубедо)
Три аспекта познания (Греция): познающий, познание и познаваемое
Три фазы диалектики: тезис, антитезис, синтез
Три измерения (физика): вдоль, поперек и вверх
Три мойры (Греция): пряха (Клото), отмеряющая длину нити (Лахесис), перерезающая нить (Атропос)
Три фурии (Греция): мстящая убийца (Тисифона), зависть (Мегера), бесконечная злоба (Алекто)
Три поколения кварков (физика): нижний/верхний, странный/очарованный, прелестный/истинный
Три грации (Греция): величие (Аглая), веселье (Ефросинья), жизнерадостность (Талия)
Три гуны (Индия): огонь (красный), вода (белый), земля (черный)
Три царства (Средневековье): животные, растения и минералы
Три состояния (астрология): исходное, неизменное, изменяющееся
Три части атома (XX век): протон, нейтрон, электрон
Три части силлогизма (Аристотель): предпосылка, универсальный принцип, заключение
Три основных цвета (свет): красный, зеленый, синий
Три первоосновы (алхимия): сера, ртуть и соль
Три качества (христианство): вера, надежда, любовь
Три правильных мощения (геометрия): треугольники, квадраты, шестиугольники
Три революционные добродетели (Франция): свобода, равенство, братство
Три стадии (Индия): создание (Брахма), стагнация (Вишну), разрушение (Шива)
Три зоны сознания (джайнизм): внешняя, внутренняя, верховная

4

Четыре чистые гармонии (музыка): унисон, октава, квинта, кварта. Все возникают из пропорций, включающих первые четыре цифры
Четыре касты (Индия): священнослужители (брахманы), воины (кшатрии), рабочие (вайшья), слуги (шудры)
Четыре причины (Аристотель): формальная, материальная, рациональная, решающая
Четыре направления (общее): север, юг, запад, восток
Четыре стихии (западная традиция): огонь, вода, воздух, земля
Четыре вида взаимодействия (современная физика): электромагнитное, сильное ядерное, слабое ядерное, гравитационное
Четыре характера (западная традиция): сангвиник, холерик, флегматик, меланхолик
Четыре составляющие психики (Юнг): тень, анима, персона, эго
Четыре психические функции (Юнг): мышление, чувства, ощущения, интуиция
Четыре благородные истины (буддизм): страдание, причина, прекращение страдания, путь к прекращению страдания
Четыре времени года (западная традиция): весна, лето, осень, зима
Четыре типа литературы (западная традиция): роман, трагедия, сатира, комедия

5

Пять животных (Китай): чешуйчатые, крылатые, бесшерстные, покрытые мехом, имеющие раковину
Пять направлений и цветов (Китай): восток (зеленый), юг (красный), центр (желтый), запад (белый), север (черный)
Пять элементов (Китай): Огонь, Земля, Металл, Вода, Дерево
Пять элементов (буддизм): Пустота, Вода, Земля, Огонь, Воздух
Пять нот (Китай): черные клавиши фортепиано
Пять архитектурных ордеров (западная традиция): тосканский, дорический, ионический, коринфский, сложный
Пять частей личности (Египет): имя, тень, сила жизни (Ка), характер (Ба), душа (Кха = Ка + Ба)
Пять платоновых тел (универсальное): тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр
Пять «ядов» (буддизм): смущение, гордость, зависть, ненависть, вожделение
Пять заповедей (буддизм): уважение жизни, уважение собственности, целомудрие, трезвость, правдолюбие
Пять чувств (общее): зрение, слух, осязание, обоняние, вкус
Пять звуков (Китай): зов, смех, пение, завывание, стон
Пять запахов (Китай): мочи, гари, благовоний, сырого мяса или рыбы, гнили

Пять вкусов (Китай): кислый, горький, сладкий, острый, соленый
Пять добродетелей (буддизм): доброта, великодушие, уважительность, экономия, альтруизм
Пять добродетелей (Китай): благожелательность, пристойность, добросовестность, праведность, знание

6

Шесть дней Создания (Авраамов завет): свет; небесный свод; суша и вода, растения; небесные тела; рыбы, птицы, пресмыкающиеся, животные и человек
Шесть направлений (общее): вверх, вниз, влево, вправо, назад, вперед
Шесть царств (общее): архебактерии и бактерии, протисты, грибки, растения и животные
Шесть совершенств (буддизм): жертвование, нравственность, терпение, энергия, медитация, мудрость
Шесть реакций (химия): синтез и разложение, горение, единичное и двойное замещение, кислотно-щелочная
Шесть миров (Индия и буддизм): богов, демонов, людей, животных, голодных духов, ад
Шесть правильных политопов (4-мерные тела): симплекс, тессеракт, 16-клеточник, 24-клеточник, 120-клеточник, 600-клеточник

7

Семь типов симметричных бордюров (универсальное): существует семь возможных типов симметричных бордюров
Семь чакр (Индия): копчик (4 лепестка), крестец (6), солнечное сплетение (10), сердце (12), горло (16), лоб (2), макушка (100)
Семь смертных грехов и противоположные им добродетели (христианство): смирение против гордости, доброта против зависти, воздержание против чревоугодия, целомудрие против похоти, терпение против злости, щедрость против зависти, старание против праздности
Семь эндокринных желез (медицина): шишковидная, гипофиз, щитовидная, тимус, надпочечники, поджелудочная, гонады
Семь небесных тел и соответствующие им дни (древнее): Луна (понедельник), Меркурий (среда), Венера (пятница), Солнце (воскресенье), Марс (вторник), Юпитер (четверг), Сатурн (суббота)
Семь тонких тел (антропософия): физическое, эфирное, астральное, эго, манас, буддхи, атма
Семь свободных искусств (западная традиция): логика, риторика, грамматика (тривиум), арифметика, музыка, геометрия, астрономия (квадривиум)
Семь металлов (древнее): серебро, ртуть, медь, золото, железо, олово, свинец
Семь звукорядов (Греция): ионический, дорический, фригийский, лидийский, миксолидийский, эолийский, локрийский; они используют только белые клавиши фортепиано и согласуются с семинотным звукорядом от нот C, D, E, F, G, A соответственно.
Семь ступеней души (суфизм): насилие, совесть, вдохновение, порядок, покорность, служение, безупречность

Семь добродетелей (христианство): вера, надежда, благотворительность, стойкость, справедливость, рассудительность, сдержанность

8

Восемь полуправильных мощений (геометрия): в плоскости
Восемь бессмертных (даосизм): молодость, старость, нищета, богатство, чернь, знать, мужской, женский
Восемь частей йоги (веды): мораль (яма), обряд (нияма), поза (асана), дыхание (пранаяма), концентрация (дхарана), молитва (дхяна), единение (смадхи)
Восемь триграмм («Книга перемен»): Цянь (небо), Дуй (Озеро), Ли (Огонь), Чжэнь (Гром), Сюнь (Ветер), Кань (Вода), Гэнь (Гора), Кунь (Земля)
Восьмеричный путь (буддизм): правильное воззрение, правильное намерение, правильная речь, правильное поведение, правильный образ жизни, правильное усилие, правильное памятование, правильное сосредоточение

9

Девять муз (Греция): история (Клио), астрономия (Урания), трагедия (Мельпомена), комедия (Талия), танец (Терпсихора), песнь богам (Полигимния), эпическая поэзия (Каллиопа), лирическая поэзия (Эвтерпа)
Девять ангельских чинов (западная традиция): серафимы, херувимы, престолы, господства, силы, власти, архонты, архангелы, ангелы
Девять типов личности (Ближний Восток): перфекционист, альтруист, стяжатель, трагический романтик, наблюдатель, спорщик, энтузиаст, лидер, посредник
Девять правильных полиэдров (универсальное): пять платоновых тел плюс четыре звездчатых тела: большой и звездчатый полиэдры, большой звездчатый додекаэдр и большой икосаэдр
Девять полуправильных мощений (универсальное): хотя существует восемь стандартных узоров, один из них имеет правую и левую версии, поэтому в общей сложности получается девять мощений

10

Десять заповедей (христианство): почитай мать и отца; чти субботу; не сотвори себе иного Бога или кумира; не произноси имени Господа Бога твоего напрасно; не богохульствуй; не убивай; не прелюбодействуй; не кради; не лжесвидетельствуй; не завидуй
Десять уровней (буддизм): Радостный, Незапятнанный, Озаряющий, Лучезарный, Трудный для очищения, Проявляющий, Далекого продвижения, Незыблемый, Обладающий превосходной мудростью, Облако Дхармы
Десять противоположностей (Пифагор): предел — беспредельный, нечетное — четное, одно — многое, правое — левое, мужское — женское, покой — движение, прямое — кривое, свет — тьма, добро — зло, квадрат — вытянутый прямоугольник
Десять сфирот (Каббала): Кетер, Хохма, Бина, Хесед, Гвура, Тиферет, Нецах, Ход, Йесод, Малхут

Глоссарий избранных чисел

1 — первое треугольное, квадратное, пятиугольное, шестиугольное, четырехгранное, восьмигранное, кубическое число; первое число в последовательностях Фибоначчи, Лукаса.

2 — первое четное (женское) число. День Меркурия соответствует ровно двум его годам. Радиус орбиты Урана равен двум радиусам Сатурна. Период Нептуна вдвое больше периода Урана.

3 — первое греческое нечетное (мужское) число, $1 + 2$. Существует три правильных мощения плоскости. Луна близко повторяет свои фазы каждый три года. В инженерии треугольники создают стабильность.

4 — второе квадратное число, $2^2 = 2 \times 2 = 2 + 2$. Количество вершин и граней тетраэдра. Каждое целое число является суммой максимум четырех квадратов.

5 — сумма первого женского и мужского чисел, $1^2 + 2^2$. Пять нот в пентатонной гамме. Пять платоновых тел. Пятое число в последовательности Фибоначчи и второе пятиугольное число.

6 — третье треугольное число, так как $6 = 1 + 2 + 3$. Факториал 3, то есть $3! = 1 \times 2 \times 3$. Площадь и полупериметр треугольника со сторонами 3, 4, 5. Первое идеальное число (сумма своих множителей). Ребра тетраэдра, грани куба, вершины октаэдра. Шесть правильных 4D-политопов.

7 — существует семь видов симметричных бордюров. Семь нот в традиционном звукоряде. Семь эндокринных желез человека. Сумма точек на противоположных сторонах игральной кости. Семь геометрических фигур в тетрисе; четвертое число в последовательности Люка́.

8 — второе кубическое число, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Грани октаэдра, вершины куба. Шестое число Фибоначчи. Восемь полуправильных мощений. Количество битов в байте.

9 — квадрат трех: $3^2 = 3 \times 3 = 1^3 + 2^3$. Существует девять правильных полиэдров и девять полуправильных мощений плоскости, если включить зеркальную пару. Если любое из первых десяти чисел умножить на девять, то при сложении цифр получившегося числа всегда получается девять.

10 — четвертое треугольное число и третье четырехгранное, $1^2 + 3^2$.

11 — 11 измерений объединяют четыре физические силы. Пятое число в последовательности Люка́. Цикл солнечных пятен в годах.

12 — 12 нот составляют равномерно темперированный строй. Третье пятиугольное число. 12 сфер вокруг одной формируют кубоктаэдр. Количество вершин икосаэдра, граней додекаэдра и ребер куба и октаэдра. 12 лепестков сердечной чакры.

13 — седьмое число в последовательности Фибоначчи. Тринадцать архимедовых полиэдров. Проявляется как октава (13-я нота) и в треугольнике со сторонами 5, 12, 13. Саранча роится каждые 13 лет.

14 — третье квадратное пирамидальное число, $14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$. Число строк в сонете (октава, квартет, куплет).

15 — треугольное число. Сумма строк в магическом квадрате третьего порядка. Количество шаров в снукере.

16 — 2^4 и 4^2. Периметр и площадь квадрата 4×4. Число лепестков чакры горла. Также $5^2 - 3^2$, то есть 16 монет можно расположить в виде квадрата 5×5.

17 — количество групп 2D-симметрии, $1^4 + 2^4$. Количество слогов в японском хокку $(5 + 7 + 5)$. Количество тонов в арабской темперации.

18 — количество лет в затменном цикле сароса, то есть время, необходимое, чтобы увидеть такое же затмение примерно в том же месте.

19 — количество лет в метоновом цикле. Спустя 19 лет полнолуния приходятся на те же даты календаря. В игре го используется решетка 19×19.

20 — сумма первых четырех треугольных чисел. Число граней икосаэдра и вершин додекаэдра. Число дней в месяце майя. Число аминокислот в человеческом организме.

21 — шестое треугольное число и восьмое число в последовательности Фибоначчи. $21 = 3 \times 7$. Число букв в итальянском алфавите.

22 — максимальное количество долек, на которое можно шестью разрезами поделить пирог. Каналы в каббале. Число букв в ивритском алфавите. Число старших арканов в картах Таро. Число тонов в индийской настройке.

23 — число пар хромосом в человеческих клетках.

24 — число сфер, способных соприкасаться с одной в 4D-пространстве. Число букв в греческом алфавите. $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.

25 — $5^2 = 3^2 + 4^2$. 25, умноженное на любое число, дает число, оканчивающееся на 25.

26 — единственное число, располагающееся между квадратом и кубом. Количество букв в латинском и английском алфавитах.

27 — $3^3 = 3 \times 3 \times 3$. Количество накшатр, на которые делится эклиптика в индийской лунной космологии.

28 — второе по старшинству совершенное число, сумма своих множителей $(28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$. Треугольное число. Число букв в арабском и испанском алфавитах.

29 — седьмое число из последовательности Люка́: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 и т. д. Число букв в норвежском алфавите.

30 — количество ребер додекаэдра и икосаэдра. Площадь и периметр пифагорова треугольника со сторонами 5, 12, 13. Луна вращается вокруг Земли на расстоянии, равном 30 диаметрам Земли.

31 — планы бытия в буддизме. Простое число Мерсенна формы $2n - 1$, где n — простое число.

32 — 2^5. Число групп кристаллов. Число диаметров Земли, необходимое, чтобы достичь Луны.

33 — $1! + 2! + 3! + 4!$. Число позвонков в позвоночнике человека с 33 парами нервов. 12 053 восходов за 33 года. Самое большое число, которое не может быть представлено как сумма отдельных треугольных чисел.

34 — сумма в строке магического квадрата 4×4.

35 — сумма пифагоровой гармонической последовательности 12, 9, 8, 6. Также сумма первых пяти треугольных чисел.

36 — $1^3 + 2^3 + 3^3$. Восьмое треугольное и шестое квадратное число. Первое число, которое является и квадратным, и треугольным.

37 — «сердце» последовательности 111, 222…666, 777, 888. 37 полных лун за три года. 37 уровней индийской бодхисаттвы.

38 — можно записать как сумму двух нечетных чисел десятью различными способами. В каждой паре содержится простое число. Самое большое число с таким свойством.

39 — количество раскладов мастей, если колода раздается на четырех человек, как в бридже.

40 — количество пальцев на руках и ногах вместе у пары мужчина — женщина. 40 сфер могут соприкасаться с одной в пятимерном пространстве.

41 — выражение $x^2 - x + 41$ формирует последовательность из 40 простых чисел от 41 до 1681.

42 — сумма в строке трехмерного $3 \times 3 \times 3$ магического квадрата.

45 — треугольное число. Сумма чисел от 1 до 9. Сумма в строках судоку.

46 — общее число хромосом в ядре человеческой клетки, 23 от матери и 23 от отца.

50 — количество букв в санскрите. Число лепестков всех чакр, за исключением лобной.

52 — количество карт в игральной колоде. Количество зубов у человека за всю жизнь: (4×5) детских + + (4×8) взрослых. Круг календаря майя состоял из 52 лет с 365-дневным хаабом и 260-дневный цолькином.

55 — наибольшее треугольное число Фибоначчи (другие 1, 3, 21). Также квадратное пирамидальное: $1 + 4 + 9 + 16 + 25$.

56 — число камней Стоунхенджа. Используются для предсказания затмений. $7 \times 8 = (1 + 2 + 4) \times (1 \times 2 \times 4)$. Четырехгранное число. Число младших арканов в колоде Таро.

58 — существует одна звездчатая форма пятиугольника или шестиугольника, две — семиугольника или восьмиугольника, три — девятиугольника. Нет звездчатых форм у куба или тетраэдра, одна у октаэдра, три у додекаэдра … но у икосаэдра 58 звездчатых форм.

59 — на каждые 59 дней приходится две полные луны. Простое число.

60 — $3 \times 4 \times 5$. Основа шумерской и вавилонской системы счета.

61 — число кодонов в аминокислотах человеческой РНК.

64 — 8^2, 4^3 и 2^6. Число шестиконечных звезд в китайской «Книге Перемен». 64 кодона в аминокислотах человеческой ДНК.

65 — сумма в строках магического квадрата 5×5. Первое число, получаемое как сумма двух квадратов двумя способами: $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$.

71 — индийский бог Индра живет 71-ю эру.

72 — количество сфер, которые могут соприкасаться с одной в шестимерном пространстве. 360/5. 72 имени бога в каббале. Прецессионный год, период прецессии точки равноденствия, приблизительно 1 градус за 72 года. Один день Великого года Платона теоретически равен 72 нашим годам. Правило 72: «Сколько потребуется времени, чтобы мои деньги удвоились?» Если банковский процент равен 6% годовых, то потребуется 72 / 3 = 12 лет. Также можно использовать 70 и 71.

73 — 73 цолькин = 52 хааба в календаре майя. 73 = = 365 / 5, что отражено в древних годичных часах.

73 — время между появлениями кометы Галлея.

78 — полная колода карт Таро: 22 старших аркана и 56 младших. Треугольное число, сумма чисел от 1 до 12. Количество подарков в 12-дневном Рождественском календаре.

81 — 9^9 или 3^4. Существует 81 стабильный элемент.

89 — число Фибоначчи. Часто проявляется в подсолнухах.

91 — четверть года, 7×13. Квадратное пирамидальное число, сумма первых шести квадратов.

92 — число элементов в природе, остальные могут быть получены только в лабораторных условиях.

97 — на каждые 400 лет приходится 97 високосных по григорианскому календарю. Количество карт в Таро Минчиате: 78 карт (см. 78) плюс 4 стихии, 4 элемента и 12 знаков зодиака.

99 — число имен Аллаха. 99 полных лун за 8 лет.

100 — 10×10 в любой системе счисления.

108 — трижды $1^1 \times 2^2 \times 3^3$. Диаметр Солнца в 109 раз больше диаметра Земли, а расстояние между ними равно 107 диаметрам Солнца. Количество индийских и буддийских молитвенных четок.

111 — сумма в строках магического квадрата 6×6. Количество диаметров Луны между Землей и Луной.

120 — $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Треугольное и тетраэдральное число.

121 — 11^2.

125 — 5^3.

128 — 2^7. Самое большое число, которое нельзя представить в виде суммы отдельных квадратов.

144 — 12^2. Единственное квадратное число Фибоначчи.

153 — количество рыб в неводе в Евангелии от Иоанна, глава XXI; $1^3 + 3^3 + 5^3 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! =$ = квадрат количества полных лун в году. Приблизительное архимедово вычисление $\sqrt{3}$ дает 265/153.

169 — 13^2.

175 — сумма в строках магического квадрата 7×7.

206 — количество костей в теле взрослого человека.

216 — платоново число. Самый маленький куб, который можно представить в виде суммы трех кубов; $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$; 2×108.

219 — существует 219 трехмерных групп симметрии.

220 — как и число 284, является членом наименьшей пары дружественных чисел, чьи множители при сложении дают парное число.

235 — количество полных лун в 19-летнем цикле Метона.

243 — 3^5. Присутствует в ли́мме — музыкальном интервале, соответствующем диатоническому полутону пифагорова строя, пифагоров полутон 256:243 между терцией и квартой.

256 — 2^8. Максимальное значение байта (на самом деле максимальное значение байта — 255 = $= 2^8 - 1$. — *Ред.*).
260 — цолькин у майя. 20 × 13 = 260 дней. Магическая сумма магического квадрата 8 × 8.
284 — дружественное число к 220, в сумме дают 504.
300 — число костей у новорожденных детей.
343 — 7^3.
354 — число дней в 12 полных лунных циклах. Лунный, или исламский год.
360 — 3 × 4 × 5 × 6. Число градусов в окружности. Число дней в туне майя.
361 — 19^2. Доска для китайской игры го имеет решетку 19 × 19.
364 — сумма значений всех карт игральной колоды: валет = 11, королева = 12, король = 13. Также 4 × 7 × 13.
365 — хааб майя состоял из 18 месяцев по 20 дней плюс пяти дополнительных дней (вайеб). Всего 365 дней.
369 — магическая сумма магического квадрата 9 × 9.
384 — исходное число пифагорейского музыкального звукоряда.
400 — Солнце в 400 раз больше Луны и в 400 раз дальше от нас.
432 — 72 × 6, или 108 × 4. Вторая нота пифагорова звукоряда, 9/8 вверх от 384.
486 — пифагорейская мажорная терция, на два тона выше 384.
496 — третье идеальное число, сумма собственных множителей.
504 — 7 × 8 × 9.
512 — 2^9; кварта, 4:3 (или 9/8 × 9/8 × 256/243) выше 384; 8^3.
540 — в Валгаллу ведут 540 двустворчатых дверей. Половина 1080.
576 — чистая квинта, на 3:2 выше 384; 24^2.
584 — синодический период Венеры в днях; 8 × 73.
648 — пифагорова секста, 3:2 вверх от секунды (432).
666 — сумма чисел от 1 до 36. Принцип ян в гематрии. Сумма шести римских цифр (I V X L C D).
720 — 6! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 = 8 × 9 × 10; 720 = = 2 × 360.
729 — пифагорова септима, 3:2 вверх от терции (486). 729 = 9^3, или 3^6, или 27^2. Упоминается в «Республике» Платона.
780 — синодический период Марса в днях; 780 = = 13 × 60.
873 — 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6!
880 — число существенно различающихся магических квадратов 4 × 4.
1000 — 10^3 в любой системе счисления.
1080 — $2^3 \times 3^3 \times 5$. Каноническое число. Принцип инь в гематрии. Радиус Луны в милях.
1225 — второе треугольное и квадратное число; 35^2.
1331 — 11^3.
1461 — в четырех годах 1461 день.
1540 — одно из пяти треугольных и тетраэдральных чисел.
1728 — 12^3. Число кубических дюймов в кубическом футе.
1746 — каноническое число. Сумма 666 и 1080.
2160 — 720 × 3; каноническое число; диаметр Луны в милях; число лет в прецессионном «Великом месяце» или астрологическом периоде.
2187 — 3^7.
2392 — 8 × 13 × 23; майя с потрясающей точностью доказали, что за 2392 дня появляется $3^4 = 81$ полная луна.
2920 = 584 × 5 = 365 × 8. Количество дней, которое требуется Венере, чтобы завершить свой узор вокруг Земли.
3168 — $2^5 \times 3^2 \times 11$; каноническое число, множители в сумме дают 6660.
3600 — 60^2; число секунд в часе или градусе.
5040 — радиус Земли в милях; 7! = = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 = 7 × 8 × 9 × 10. Совмещенные радиусы Земли и Луны.
5913 — 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7!
7140 — самое большое треугольное и тетраэдральное число.
7200 — катун у древних майя, или 20 тунов по 360 дней.
7920 — диаметр Земли в милях; 720 × 11.
8128 — четвертое идеальное число, сумма собственных множителей.
10 000 — мириада.
20 736 — 12 × 12 × 12 × 12.
25 770 — текущее значение прецессии (вероятнее всего, замедляется, так как Солнце формирует двоичную систему с Сириусом).
25 920 — 12 × 2160. Число лет в древнем западном расчете прецессионного цикла астрологического периода.
26 000 — прецессионное число у майя.
31 680 — периметр квадрата, описанного вокруг Земли, в милях.
40 320 — 8! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8.
45 045 — первое треугольное, пятиугольное и шестиугольное число.
86 400 — число секунд в одном дне.
108 000 — один период в кали-юге.
142 857 — повторяющаяся группа цифр во всех делениях на семь.
144 000 — число дней в бактуне из 20 катунов у майя.
248 832 — 12^5.
362 880 — 9!, а также 2! × 3! × 3! × 7!.
365 242 — число дней в 1000 годах; число футов в одном экваториальном градусе.
432 000 — у индусов завершающий период кали-юга в годах, характеризуется падением нравственности.
864 000 — у индусов третья фаза создания, полуиспорченный век двапара-юга, в годах.
1 296 000 — у индусов второй период трета-юга, в годах; = 3 × 432 000.
1 728 000 — у индусов начальный и высокодуховный период сатья-юга, в годах; 4! × 432 000.
1 872 000 — число лет в длинном счете майя (закончилось в декабре 2012 г.).
3 628 800 — 10!, также 6! × 7! или 3! × 5! × 7!.
4 320 000 — у индусов маха-юга полный цикл юг, буддийская кальпа.
39 916 800 — 11! также 5040 × 7920.

Типы чисел

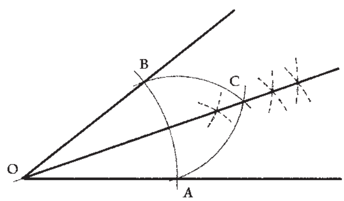
	Треугольные	Квадратные	Пятиугольные	Центрированные треугольные	Центрированные квадратные	Центрированные пятиугольные	Прямоугольные	Тетраэдральные	Восьмигранные	Кубические	Центрированные кубические	Квадратные пирамидальные	Фибоначчи	Лукаса
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	4	5	5	2	4	6	8	9	5	1	3
3	6	9	12	10	13	13	6	10	19	27	35	14	2	4
4	10	16	22	19	25	25	12	20	44	64	91	30	3	7
5	15	25	35	31	41	41	20	35	85	125	189	55	5	11
6	21	36	51	46	61	61	30	56	146	216	341	91	8	18
7	28	49	70	64	85	85	42	84	231	343	559	140	13	29
8	36	64	92	85	113	113	56	120	344	512	855	204	21	47
9	45	81	117	109	145	145	72	165	489	729	1241	285	34	76
10	55	100	145	136	181	181	90	220	670	1000	1729	385	55	123
11	66	121	176	166	221	221	110	286	891	1331	2331	506	89	199
12	78	144	210	199	265	265	132	364	1156	1728	3059	650	144	322
13	91	169	247	235	313	313	156	455	1469	2197	3925	819	233	521
14	105	196	287	274	365	365	182	560	1834	2744	4941	1015	377	843
15	120	225	330	316	421	421	210	680	2255	3375	6119	1240	610	1364
16	136	256	376	361	481	481	240	816	2736	4096	7471	1496	987	2207
17	153	289	425	409	545	545	272	969	3281	4913	9009	1785	1597	3571
18	171	324	477	460	613	613	306	1140	3894	5832	10745	2109	2584	5778
19	190	361	532	514	685	685	342	1330	4579	6859	12691	2470	4181	9349
20	210	400	590	571	761	761	380	1540	5340	8000	14859	2870	6765	15127
21	231	441	651	631	841	841	420	1771	6181	9261	17261	3311	10946	24476
22	253	484	715	694	925	925	462	2024	7106	10648	19909	3795	17711	39603
23	276	529	782	760	1013	1013	506	2300	8119	12167	22815	4324	28657	64079
24	300	576	852	829	1105	1105	552	2600	9224	13824	25991	4900	46368	103682
25	325	625	925	901	1201	1201	600	2925	10425	15625	29449	5525	75025	167761
26	351	676	1001	976	1301	1301	650	3276	11726	17576	33201	6201	121393	271443
27	378	729	1080	1054	1405	1405	702	3654	13131	19683	37259	6930	196418	439204
28	406	784	1162	1135	1513	1513	756	4060	14644	21952	41635	7714	317811	710647
29	435	841	1247	1219	1625	1625	812	4495	16269	24389	46341	8555	514229	1149851
30	465	900	1335	1306	1741	1741	870	4960	18010	27000	51389	9455	832040	1860498
21	496	961	1426	1396	1861	1861	930	5456	19871	29791	56791	10416	1346269	3010349
32	528	1024	1520	1489	1985	1985	992	5984	21856	32768	62559	11440	2178309	4870847
33	561	1089	1617	1585	2113	2113	1056	6545	23969	35937	68705	12529	3524578	7881196
34	595	1156	1717	1684	2245	2245	1122	7140	26214	39304	75241	13685	5702887	12752043
35	630	1225	1820	1786	2381	2381	1190	7770	28595	42875	82179	14910	9227465	20633239
36	666	1296	1926	1891	2521	2521	1260	8436	31116	46656	89531	16206	14930352	33385282

Простые

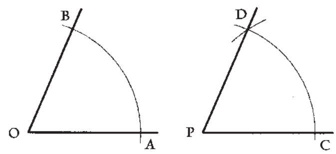
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179
181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367
373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 559 571
577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773
787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997 1009

Построения при помощи циркуля и линейки

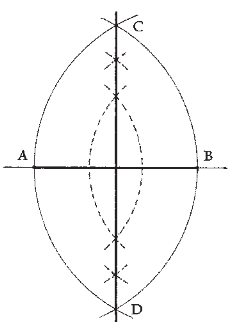
Небольшая подборка построений, приведенная здесь, взята из книги Эндрю Саттона «Линейка и компас». Проницательным студентам она поможет в постижении сакральной геометрии. *Линия AB* означает: *начертите прямую линию, проходящую через точки A и B*. *Отрезок* — это часть прямой *линии*, ограниченная с концов точками. *Окружность O-A* означает: *начертите окружность с центром в точке O, проходящую через точку A*. *Окружность радиуса AB с центром O* означает: *начертите окружность с помощью циркуля, открытого на расстояние AB, с центром в точке O*. *Дуга* — это часть окружности. Иногда для большей точности построения используются дополнительные точки, например линия *ACB* или окружность *O-AB*. Полученные в результате построений точки записаны в скобках.



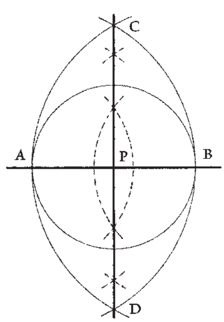
Деление угла пополам:
1. Дуга центр O (A, B). 2. Дуга A-B, B-A (C), альтернативные варианты показаны пунктиром. 3. Линия OC;
∠AOC = ∠BOC= ½∠AOB



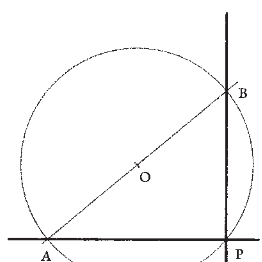
Копирование угла на заданной линии:
1. Дуга, центр O (A, B). 2. Дуга, радиус OA, центр Р (C). 3. Дуга, радиус AB, центр C (D). 4. Линия РD. ∠CРD = ∠AOB



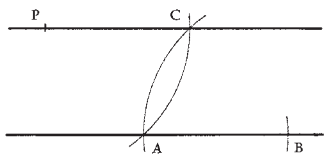
Разделение пополам заданного отрезка AB перпендикулярной линией:
Дуги одинакового радиуса, центры A, B (C, D).
2. Линия CD



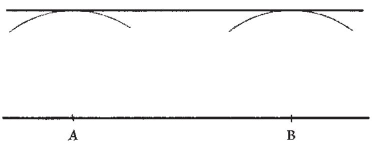
Перпендикуляр к линии через заданную точку Р:
1. Окружность, центр Р (A, B)
2. Дуги с одинаковым радиусом, центры A и B (C, D).
3. Линия CРD



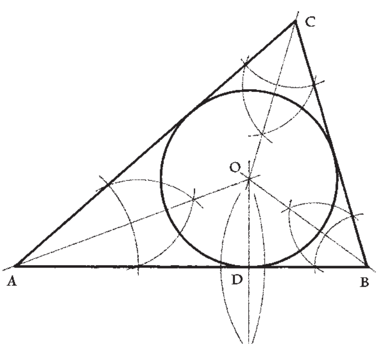
Перпендикуляр к линии через заданную точку Р:
1. Возьмем любую точку O за пределами линии, окружность O-Р (A). 2. Окружность AO (B). Линия РB является перпендикуляром к линии AР



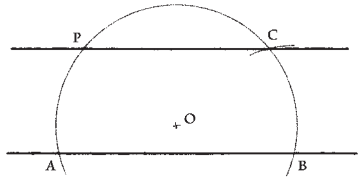
Параллельная прямая через заданную точку Р:
1. Дуга любого удобного радиуса, центр Р (А). 2. Дуга того же радиуса, центр А (В). 3. Дуга того же радиуса, центр В (С). Линия РС параллельна линии АВ



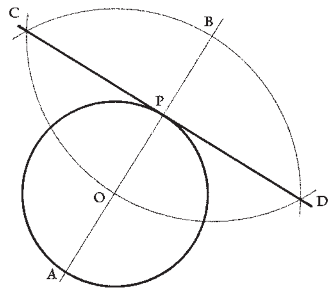
Параллельная прямая на заданном расстоянии:
1. Дуга, радиус равен заданному расстоянию, центры — любые две точки А, В на линии. 2. Линия, касающаяся дуг, как показано, будет параллельна АВ



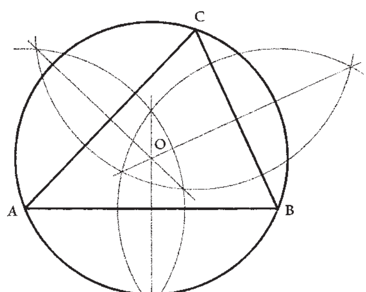
Окружность, вписанная в треугольник:
1. Разделите пополам углы САВ, АВС, ВСА (О).
2. Перпендикуляр к ВС через О (D).
3. Окружность О-D



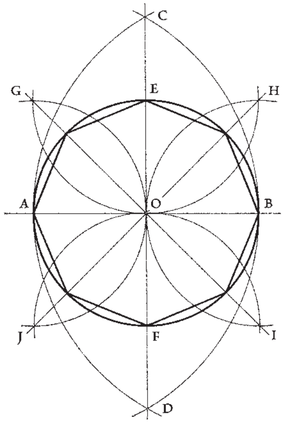
Параллельная прямая через заданную точку Р:
1. Дуга О-Р с любым удобным центром О (А, В). 2. Дуга, радиус АР, центр В (С). Линия РС параллельна линии АВ



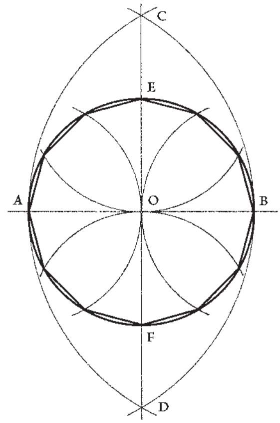
Касательная к окружности:
1. Линия ОР (А). 2. Дуга, радиус РА, центр О (В). 3. Дуга В-О (линия СРD). Линия СРD будет касаться окружности в точке Р



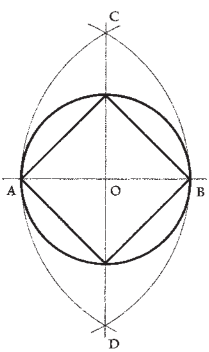
Окружность, описанная около треугольника:
1. Поделите пополам отрезки АВ, ВС, СА при помощи перпендикуляров (О).
Окружность О-АВС



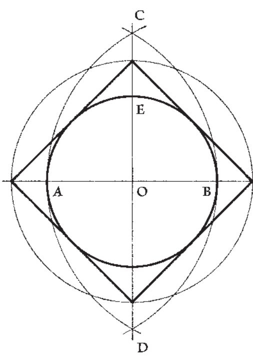
Правильный восьмиугольник в окружности:
1. Линия через центр O (A,B). 2. Дуги A-B B-A (линия CEFD). 3. Дуги A-O, E-O, B-O, F-O (G, H, I, J). Линии GI, HJ и завершить восьмиугольник



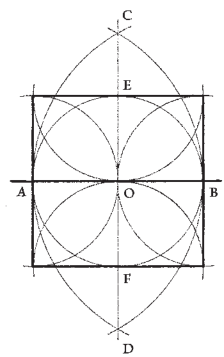
Правильный двенадцатиугольник в окружности:
1. Линия через центр O (A, B). 2. Дуги A-B, B-A (линия CEFD). 3. Дуги A-O, E-O, B-O, F-O и завершить двенадцатиугольник



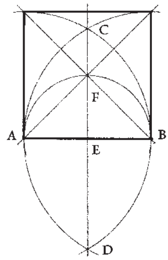
Квадрат в окружности:
1. Линия через центр O (A, B). Дуги A-B, B-A. 3. Линия CD и завершить квадрат



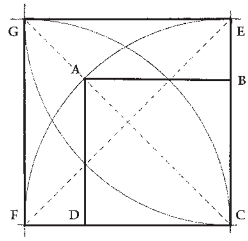
Окружность, вписанная в квадрат:
1. Линия через центр O (A, B). 2. Дуги A-B, B-A (линия CED). 3. Окружность, радиус AE, центр O и завершить квадрат



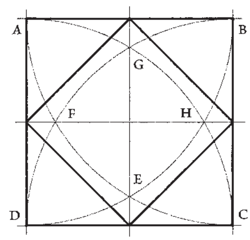
Группа квадратов перпендикулярно к заданной линии:
1. Окружность, центр O на линии A, B. 2. Дуги A-B, B-A (линия CEFD). 3. Дуги A-O, B-O, E-O, F-O и завершить квадраты



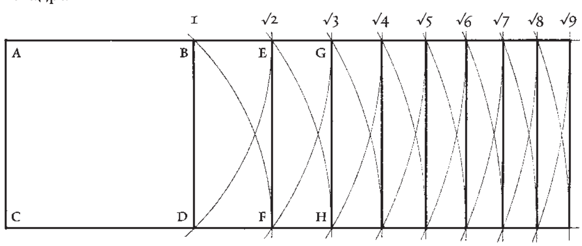
Квадрат с заданной стороной:
1. Дуга A-B, B-A (линия CED). 2. Дуга E-AB (F).
3. Линии AF, BF
и завершить квадрат



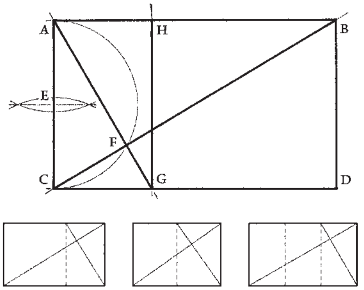
Удвоение квадрата:
1. Продлить CB, CD. 2. Дуги C-A (E, F). 3. Дуги F-C, E-C (G) и завершить квадрат. Чтобы уменьшить квадрат GECF вдвое, добавьте пунктирные линии



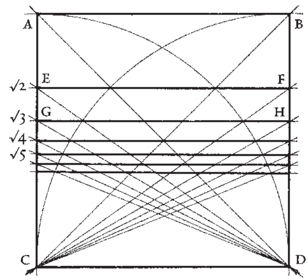
Уменьшение квадрата вдвое:
1. Дуги A-BD, B-AC, C-BD, D-AC (E к H). Линии EG, FH и завершить квадрат



Пропорциональные прямоугольники от заданного квадрата:
1. Продолжить AB, CD. Дуги A-D, B-C (E, F и прямоугольник √2). 3. Дуги A-F, B-E (G,*H* и √3) … и т. д.



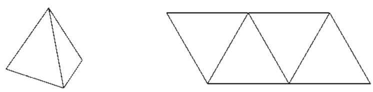
Диагональ и обратный прямоугольник:
1. Линия BC. 2. Найти середину AC (E).
3. Дуга E-AC (F). 4. Линия AF (G).
5. Дуга, радиус CG, центр A (линия GH)



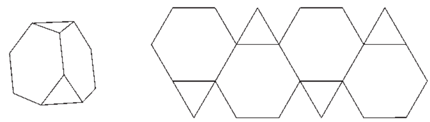
Пропорциональные прямоугольники
в заданном квадрате:
1. Линии AD, BC. 2. Дуга C-AD, D-BC (линия EF и прямоугольник √2). Линии ED, FC (линия GH и прямоугольник √3) … и т. д.

Развертки многогранников

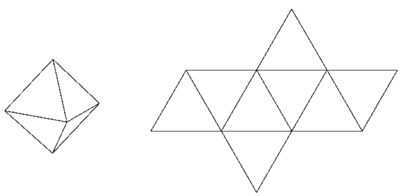
Если развернуть многогранник и расположить все его грани на одной плоскости, получится так называемая развертка. Самый ранний пример подобной развертки был найден в книге Альбрехта Дюрера «Руководство к измерению циркулем и линейкой» (1525). Размер приведенных ниже разверток согласован таким образом, что сферы, описанные вокруг получившихся из них многогранников, будут одинаковыми.



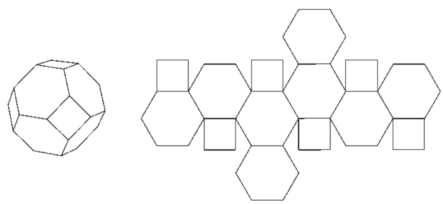
Тетраэдр



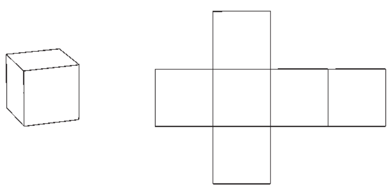
Усеченный тетраэдр



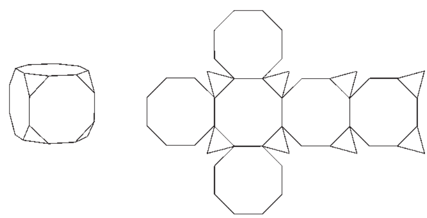
Октаэдр



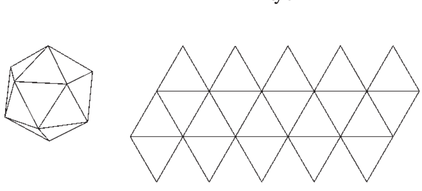
Усеченный октаэдр



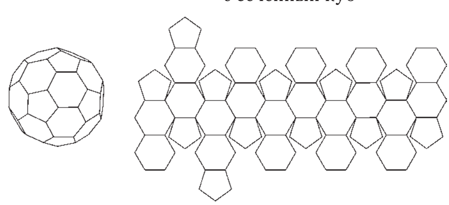
Куб



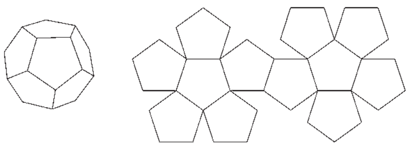
Усеченный куб



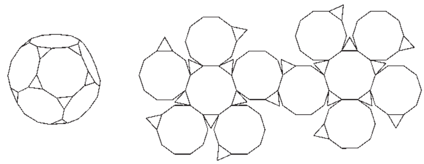
Икосаэдр



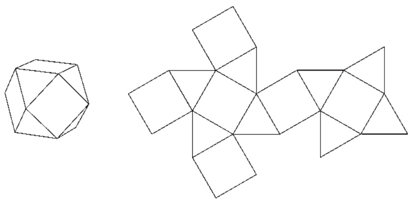
Усеченный икосаэдр



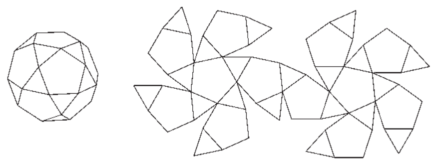
Додекаэдр



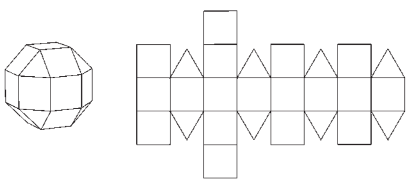
Усеченный додекаэдр



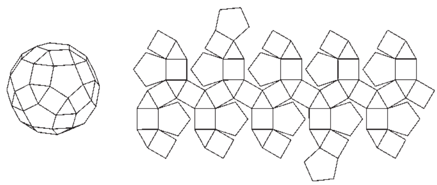
Кубоктаэдр



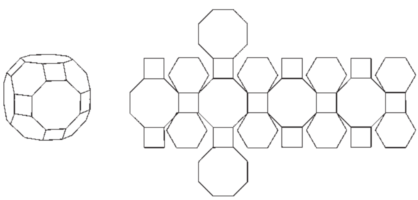
Икосододекаэдр



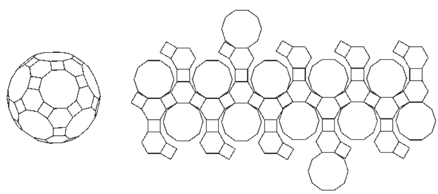
Ромбокубоктаэдр



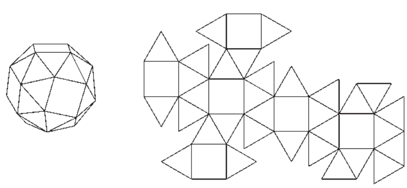
Ромбоикосододекаэдр



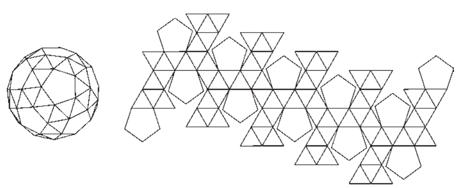
Большой ромбокубоктаэдр



Большой ромбоикосододекаэдр



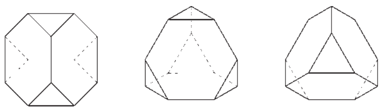
Курносый куб



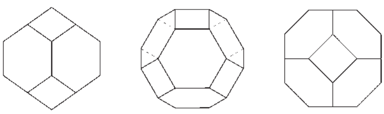
Курносый додекаэдр

Архимедовы симметрии

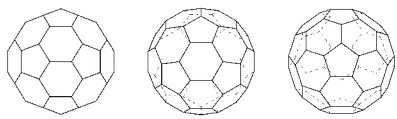
На схемах внизу показаны вращательные симметрии архимедовых тел и двух ромбических архимедовых двойников.



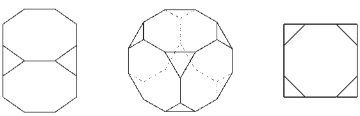
Усеченный тетраэдр



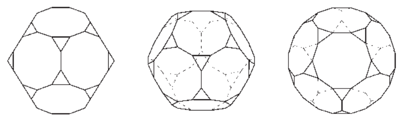
Усеченный октаэдр



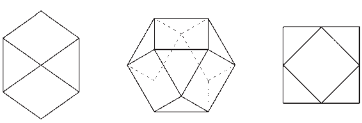
Усеченный икосаэдр



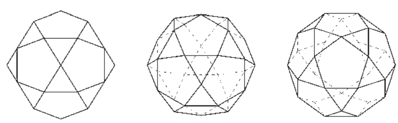
Усеченный куб



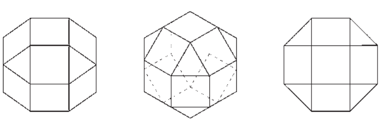
Усеченный додекаэдр



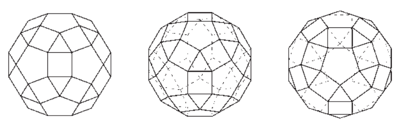
Кубоктаэдр



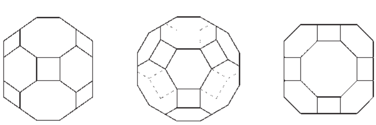
Икосододекаэдр



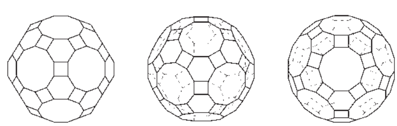
Ромбокубоктаэдр



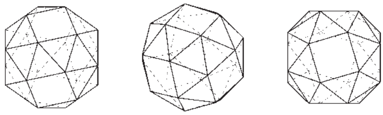
Ромбоикосододекаэдр



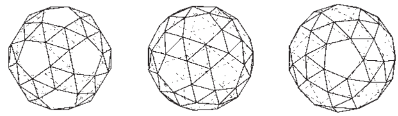
Большой ромбокубоктаэдр



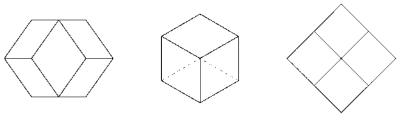
Большой ромбоикосододекаэдр



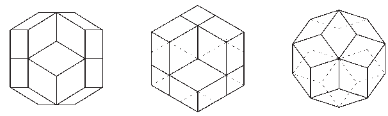
Курносый куб



Курносый додекаэдр



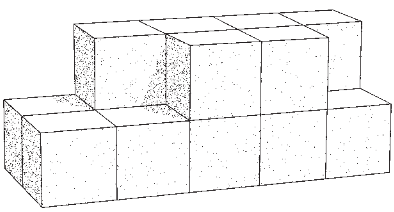
Ромбический додекаэдр



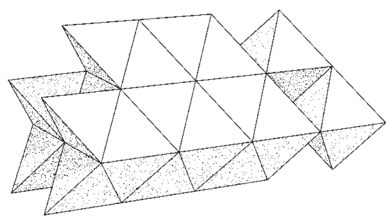
Ромбический триаконтаэдр

Трехмерные мощения

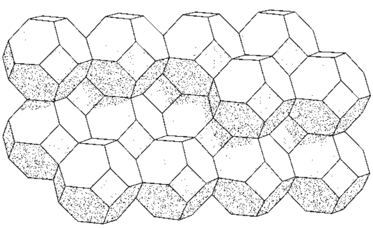
Из всех платоновых тел только куб может создавать сплошное мощение. Два других платоновых тела — тетраэдр и октаэдр — могут заполнять пространство, работая в паре. Из архимедовых тел и архимедовых двойников способны создавать сплошное мощение только усеченный октаэдр и ромбический додекаэдр.



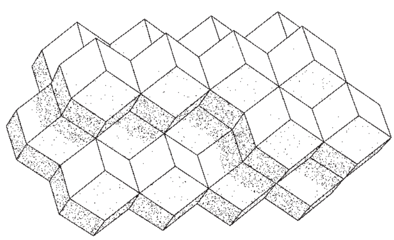
Кубы



Тетраэдр и октаэдр

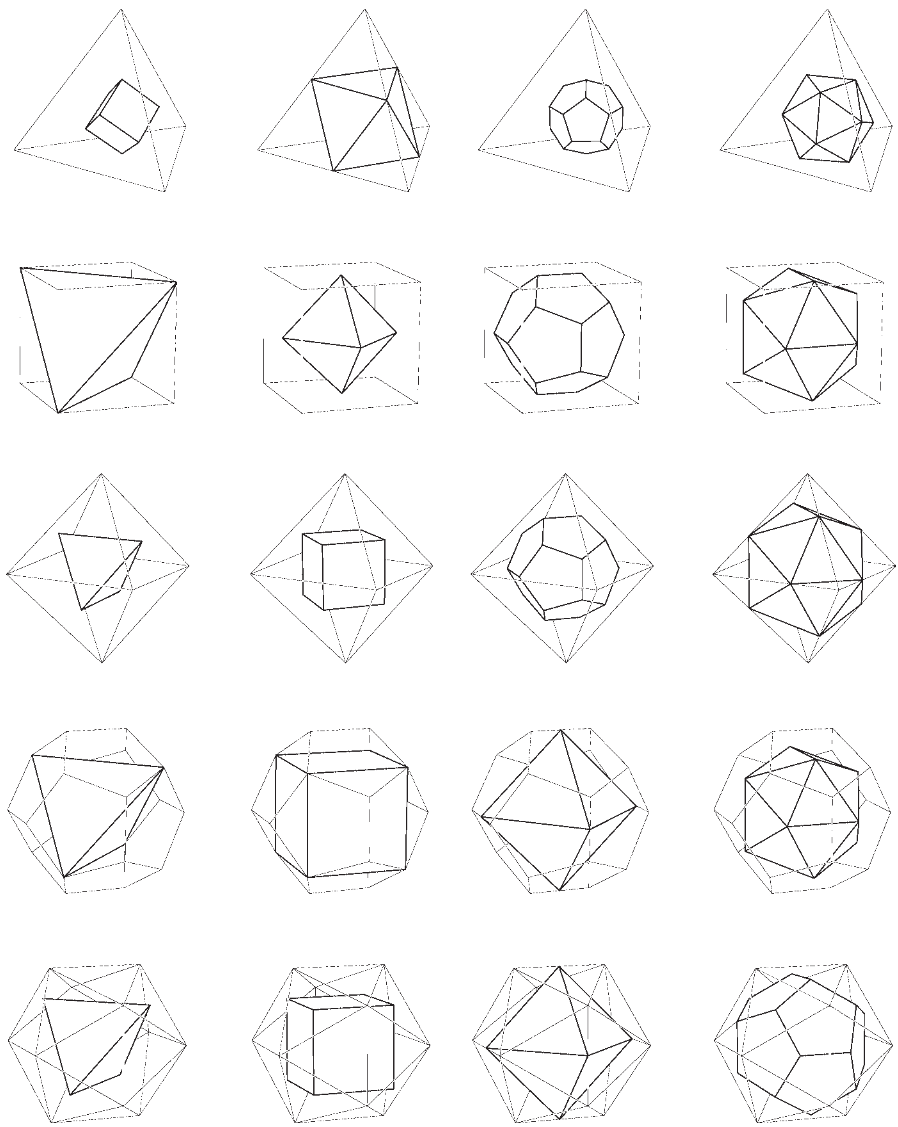


Усеченный октаэдр



Ромбический додекаэдр

Один в другом



Формулы платоновых тел

Периодическим явлением в свойствах платоновых тел является присутствие иррациональных чисел *А* (золотого сечения) и квадратных корней √2, √3 и √5. Они выглядят на удивление элегантно в виде бесконечной дроби:

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}} \qquad \sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}} \qquad \sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}} \qquad \sqrt{5} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}}}$$

Ниже — эти числа и π в десятичной записи (12 знаков после запятой).

$$\Phi = 1{,}618033988750 \quad \sqrt{2} = 1{,}414213562373 \quad \sqrt{3} = 1{,}732050807569$$

$$\sqrt{5} = 2{,}236067977500 \quad \pi = 3{,}141592653590$$

В таблице ниже указаны объемы и площади поверхности для сферы радиусом *r* и платоновых тел с длиной ребра *s*. Также в таблице приведены значения пропорциональных направляющих, объединяющих вершины платонова тела друг с другом.

	Объем	*Площадь поверхности*	*Количество направляющих, длина*
Сфера	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$	нет
Тетраэдр	$\frac{\sqrt{2}}{12}s^3$	$\sqrt{3}s^2$	6 ребер, *s*
Октаэдр	$\frac{\sqrt{2}}{3}s^3$	$2\sqrt{3}s^2$	12 ребер, *s* 3 осевые диагонали, √2*s*
Куб	s^3	$6s^2$	12 ребер, *s* 12 диагоналей граней (вписанный тетраэдр), √2*s* 4 осевые диагонали, √3*s*
Икосаэдр	$\frac{5}{6}\Phi^2 s^3$	$5\sqrt{3}s^2$	30 ребер, *s* 30 диагоналей граней, Φ*s* 6 осевых диагоналей, $\sqrt{(\Phi^2+1)}\,s$
Додекаэдр	$\frac{\sqrt{5}}{2}\Phi^4 s^3$	$3\sqrt{(25+10\sqrt{5})}s^2$	30 ребер, *s* 60 диагоналей граней (вписанные кубы), Φ*s* 60 внутренних диагоналей (вписанные тетраэдры), √2 Φ*s* 30 внутренних диагоналей, $\Phi^2 s$ 10 осевых диагоналей, √3 Φ*s*

Свойства полиэдров

	*Симметрия**	*Вершины*	*Ребра*	*Грани (всего)*	*Грани (типы)*
Тетраэдр	Тетр.	4	6	4	4 треугольные
Куб	Окт.	8	12	6	6 квадратных
Октаэдр	Окт.	6	12	8	8 треугольных
Додекаэдр	Икос.	20	30	12	12 пятиугольных
Икосаэдр	Икос.	12	30	20	20 треугольных
Звездчатый додекаэдр	Икос.	12	30	12	12 пентаграмм
Большой додекаэдр	Икос.	12	30	12	12 пятиугольных
Большой звездчатый додекаэдр	Икос.	20	30	12	12 пентаграмм
Большой икосаэдр	Икос.	12	30	20	20 треугольных
Кубоктаэдр	Окт.	12	24	14	8 треугольных 6 квадратных
Икосододекаэдр	Икос.	30	60	32	20 треугольных 12 пятиугольных
Усеченный тетраэдр	Тетр.	12	18	8	4 треугольные 4 шестиугольные
Усеченный куб	Окт.	24	36	14	8 треугольных 6 восьмиугольных
Усеченный октаэдр	Окт.	24	36	14	6 квадратных 8 шестиугольных
Усеченный додекаэдр	Икос.	60	90	32	20 треугольных 12 десятиугольных
Усеченный икосаэдр	Икос.	60	90	32	12 пятиугольных 20 шестиугольных
Ромбокубоктаэдр	Окт.	24	48	26	8 треугольных 18 квадратных
Большой ромбокубоктаэдр	Окт.	48	72	26	12 квадратных 8 шестиугольных 6 восьмиугольных
Ромбоикосододекаэдр	Икос.	60	120	62	20 треугольных 30 квадратных 12 пятиугольных
Большой ромбоикосододекаэдр	Икос.	120	180	62	30 квадратных 20 шестиугольных 12 десятиугольных
Курносый куб	Окт.-**	24	60	38	32 треугольные 6 квадратных
Курносый додекаэдр	Икос.-**	60	150	92	80 треугольных 12 пятиугольных

** Симметрии: группа тетраэдра: 4 оси третьего порядка, 3 оси второго порядка, 6 зеркальных плоскостей; группа октаэдра: 3 оси четвертого порядка, 4 оси третьего порядка, 6 осей второго порядка, 9 зеркальных плоскостей; группа икосаэдра: 6 осей пятого порядка, 10 осей третьего порядка, 15 осей второго порядка, 15 зеркальных плоскостей.*

*** У курносых тел нет зеркальных плоскостей.*

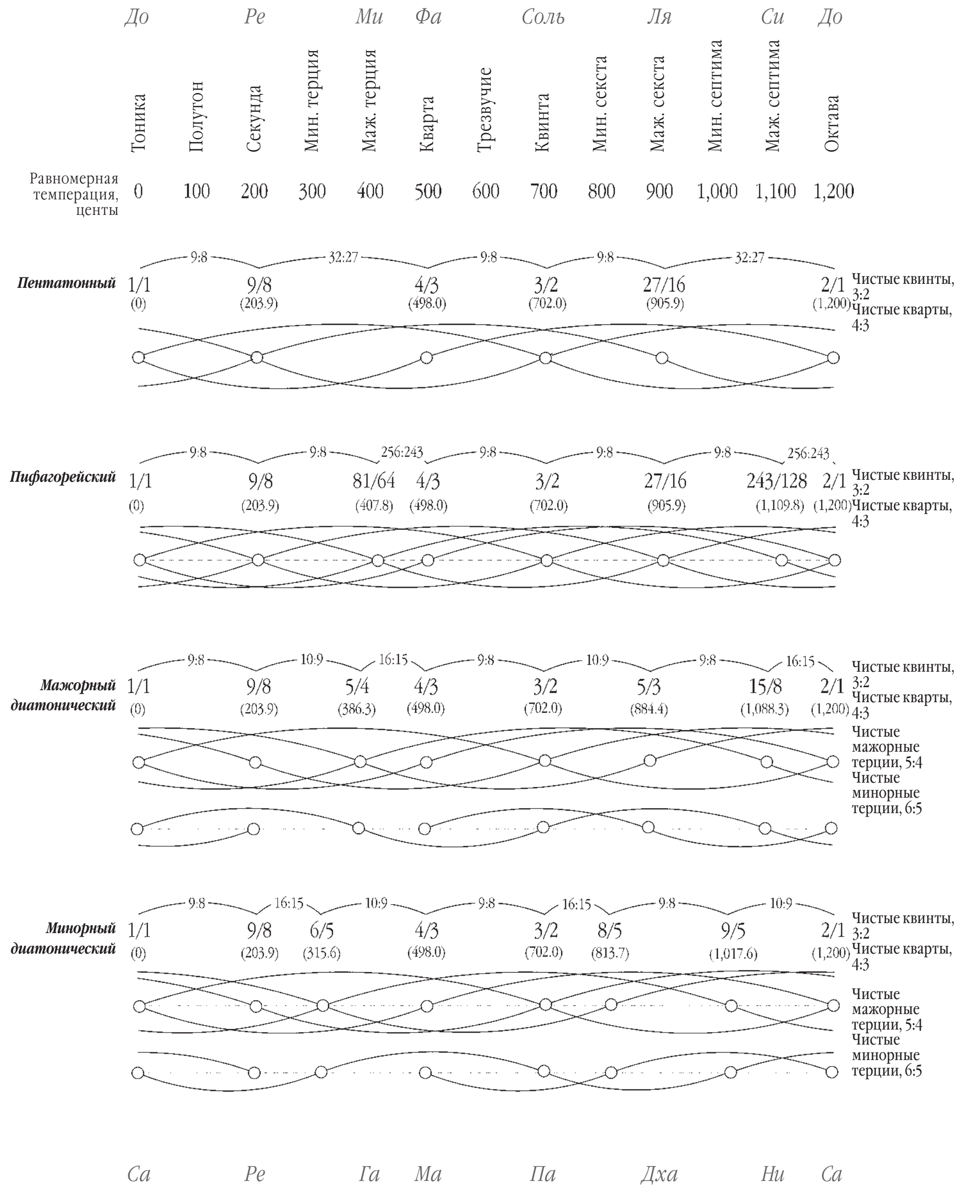
Радиус внутренней сферы*** / Радиус внешней сферы	Радиус внутренней сферы*** / Радиус внешней сферы	Длина ребра*** / Радиус внешней сферы	Диэдральный угол****	Центральный угол*****
0.3333333333	0.5773502692	1.6329931619	70°31'44"	109°28'16"
0.5773502692	0.8164965809	1.1547005384	90°00'00"	70°31'44"
0.5773502692	0.7071067812	1.4142135624	109°28'16"	90°00'00"
0.7946544723	0.9341723590	0.7136441795	116°33'54"	41°48'37"
0.7946544723	0.8506508084	1.0514622242	138°11'23"	63°26'06"
0.4472135955	0.5257311121	1.7013016167	116°33'54"	116°33'54"
0.4472135955	0.8506508084	1.0514622242	63°26'06"	63°26'06"
0.1875924741	0.3568220898	1.8683447179	63°26'06"	138°11'23"
0.1875924741	0.5257311121	1.7013016167	41°48'37"	116°33'54"
0.8164965809 0.7071067812	0.8660254038	1.0000000000	125°15'52"	60°00'00"
0.9341723590 0.8506508084	0.9510565163	0.6180339887	142°37'21"	36°00'00"
0.8703882798 0.5222329679	0.9045340337	0.8528028654	70°31'44" 109°28'16"	50°28'44"
0.9458621650 0.6785983445	0.9596829823	0.5621692754	90°00'00" 125°15'52"	32°39'00"
0.8944271910 0.7745966692	0.9486832981	0.6324555320	109°28'16" 125°15'52"	36°52'12"
0.9809163757 0.8385051474	0.9857219193	0.3367628118	116°33'54" 142°37'21"	19°23'15"
0.9392336205 0.9149583817	0.9794320855	0.4035482123	138°11'23" 142°37'21"	23°16'53"
0.9108680249 0.8628562095	0.9339488311	0.7148134887	135°00'00" 144°44'08"	41°52'55"
0.9523198087 0.9021230715 0.8259425910	0.9764509762	0.4314788105	125°15'52" 135°00'00" 144°44'08"	24°55'04"
0.9659953695 0.9485360199 0.9245941063	0.9746077624	0.4478379596	148°16'57" 159°05'41"	25°52'43"
0.9825566436 0.9647979663 0.9049441875	0.9913166895	0.2629921751	142°37'21" 148°16'57" 159°05'41"	15°06'44"
0.9029870683 0.8503402074	0.9281913780	0.7442063312	142°59'00" 153°14'05"	43°41'27"
0.9634723304 0.9188614921	0.9727328506	0.4638568806	152°55'48" 164°10'31"	26°49'17"

**** Радиус вписанной сферы измеряется из центра многогранника до середины любой грани, радиус средней сферы — до середины ребра. Радиус внешней сферы — до вершины.*

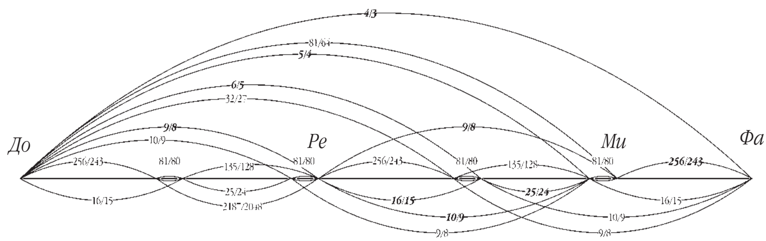
***** В архимедовых телах большие диэдральные углы расположены между парами меньших граней.*

****** Центральный угол формируется при соединении центра многогранника с концами ребра.*

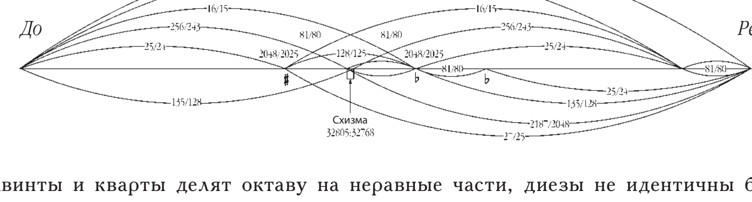
Несколько особых музыкальных ладов



Некоторые музыкальные интервалы

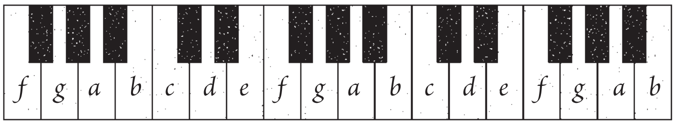


Интервал	Центы	Название
1:1	0	*Унисон*
32 805:32 768	2.0	*Схизма*
2048:2025	19.6	*Диасхизма*
81:80	21.5	*Синотоническая комма*
53 1441:52 4288	23.5	*Пифагорова комма*
128:125	41.1	*Диеса*
25:24	70.7	*Минорный диатонический полутон*
256:243	90.2	*Лимма, пифагоров полутон*
135:128	92.2	*Мажорная хрома*
16:15	111.7	*Мажорный диатонический полутон*
2187:2048	113.7	*Апотома*
27:25	133.2	*Большая лимма*
10:9	182.4	*Минорный тон*
9:8	203.9	*Мажорный тон*
8:7	231.2	*Септ-тон*
7:6	266.9	*Септ-минорная терция*
32:27	294.1	*Пифагорова минорная терция*
6:5	315.6	*Чистая минорная терция*
5:4	386.3	*Чистая мажорная терция*
81:64	407.8	*Пифагорова мажорная терция*
4:3	498.0	*Чистая кварта*
7:5	582.5	*Септ-трезвучие*
45:32	590.2	*Диатоническое трезвучие*
729:512	611.7	*Пифагорово трезвучие*
3:2	702.0	*Чистая квинта*
128:81	792.2	*Пифагорова минорная секста*
8:5	813.7	*Диатоническая минорная секста*
5:3	884.4	*Чистая минорная секста*
27:16	905.9	*Пифагорова мажорная секста*
7:4	968.8	*Гармоническая септима*
16:9	996.1	*Пифагорова минорная септима*
9:5	1,017.6	*Диатоническая минорная септима*
15:8	1,088.3	*Диатоническая мажорная септима*
243:128	1,109.8	*Пифагорова мажорная септима*
2:1	1,200	*Октава*



Квинты и кварты делят октаву на неравные части, диезы не идентичны бемолям и создают 5 новых нот, что в результате дает 17 (встречается в ближневосточных ладах). Более завершенную картину формирует представление о том, что 7 нот гаммы двигаются через 12 «областей» октавы, попадая в одну из 22 позиций индийского лада.

Греческие лады



Современные названия	*Семь ладов античности*		*Древнегреческие названия*
Ионийский *мажор*	1 1 ½ 1 1 1 ½ *до ре ми фа соль ля си до*	*c d e f g a b c* *1 2 3 4 5 6 7 8*	*Лидийский*
Дорийский	1 ½ 1 1 1 ½ 1 *ре ми фа соль ля си до ре*	*d e f g a b c d* *1 2 3♭ 4 5 6 7♭ 8*	*Фригийский*
Фригийский	½ 1 1 1 ½ 1 1 *ми фа соль ля си до ре ми*	*e f g a b c d e* *1 2♭ 3♭ 4 5 6♭ 7♭ 8*	*Дорийский*
Лидийский	1 1 1 ½ 1 1 ½ *фа соль ля си до ре ми фа*	*f g a b c d e f* *1 2 3 4♯ 5 6 7 8*	*Синтолидийский*
Миксолидийский	1 1 ½ 1 1 ½ 1 *соль ля си до ре ми фа соль*	*g a b c d e f g* *1 2 3 4 5 6 7♭ 8*	*Ионийский*
Эолийский *натуральный минор*	1 ½ 1 1 ½ 1 1 *ля си до ре ми фа соль ля*	*a b c d e f g a* *1 2 3♭ 4 5 6♭ 7♭ 8*	*Эолийский*
Локрийский	½ 1 1 ½ 1 1 1 *си до ре ми фа соль ля си*	*b c d e f g a b* *1 2♭ 3♭ 4 5♭ 6♭ 7♭ 8*	*Миксолидийский*

Белые клавиши фортепиано соответствуют 7 нотам 7 ладов Древней Греции. Ошибочная средневековая транскрипция греческих ладов оставила нам в наследство названия, которые не соответствуют исходным. Каждый лад представляет собой особую систему взаимодействий тонов и полутонов. Лишь 2 из них используются в наше время как мажорные и минорные гаммы.

Иные лады включат в себя модальные лады 5 ступеней, исключающих полутоны, гармонический минор с его малыми терцией и секстой 1 2 3♭ 4 5 6♭ 7 8 и многие другие.

Гармонические константы и уравнения

Пропорции и интервалы в этой книге относятся к частотам, которые обычно выражаются в оборотах в секунду, или герцах. В классической настройке C соответствует 265 Гц. Современная настройка выше и располагает A на уровне 440 Гц. Период волны T обратно пропорционален ее частоте f: $T = 1/f$.

Скорость звука в сухом воздухе примерно равна $331{,}4 + 0{,}6T_c$ м/с, где T_c — температура в градусах Цельсия. Его значение при комнатной температуре около 20 °C равно 343,4 м/с.

Ускорение свободного падения g на Земле равно 9,807 м/с^2.

Частота колебаний маятника	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\textit{ускорение свободного падения}}{\textit{длина маятника}}}$
Базовая частота колебаний натянутой струны	$\frac{1}{2 \times \textit{длина струны}}\sqrt{\frac{\textit{напряжение струны}}{\textit{масса струны} + \textit{длина струны}}}$
Резонансная частота резонатора с отверстием	$\frac{\textit{скорость звука}}{2\pi}\sqrt{\frac{\textit{площадь отверстия}}{\textit{объем резонатора} \times \textit{длина отверстия}}}$
Базовая частота открытой трубы или цилиндра	$\frac{\textit{скорость звука}}{2 \times \textit{длина цилиндра}}$

Частота биений между f_1 и f_2 равна их разнице, $f_b = f_2 - f_3$.

Отношение $a{:}b$ конвертируется в центы (где $a > b$): $(\log(a) - \log(b)) \times (1200 \div \log 2)$.

Чтобы конвертировать центы в градусы, следует умножить их значение на 0,3.

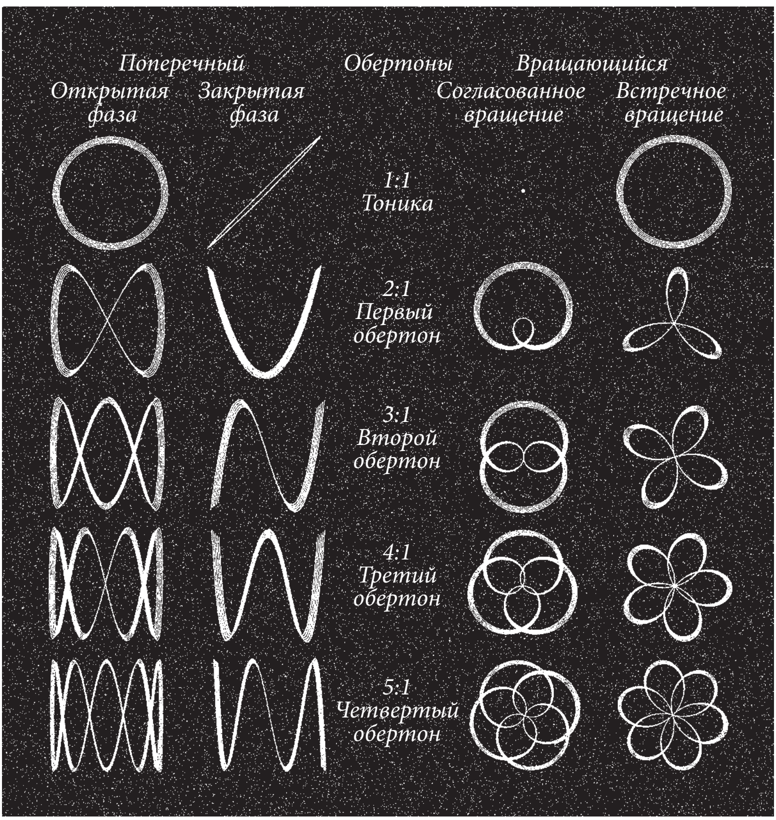
Хлопки перед восходящей лестницей формируют серию эхо с воспринимаемой частотой $v/2d$, где v — скорость звука, а d — глубина каждой ступени. Хлопки в маленьком коридоре шириной w создают частоту v/w.

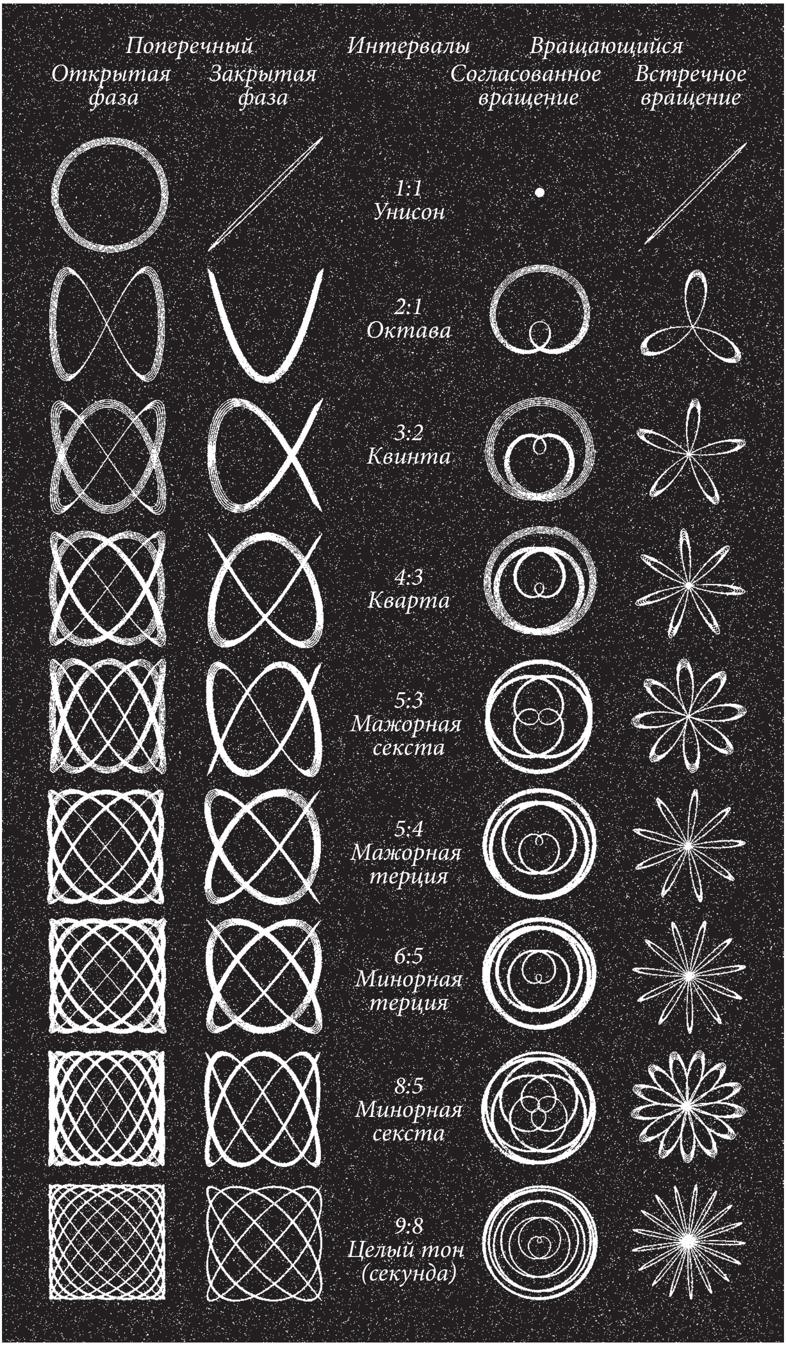
Средние арифметические и *гармонические* являются центральным звеном пифагоровой теории музыки. Среднее арифметическое двух частот, разделенных октавой, дает между ними квинту (3:2), среднее гармоническое дает кварту (4:3).

6	:	8	::	9	:	12
A	:	$\frac{2AB}{A+B}$	::	$\frac{A+B}{2}$	:	B
A	:	*Среднее гармоническое*	::	*Среднее арифметическое*	:	B

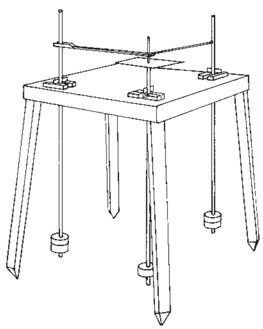
Таблицы узоров гармонографа

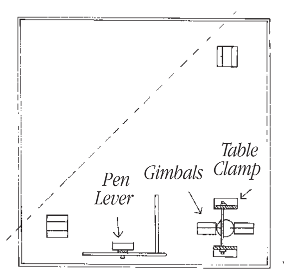
На этой и следующей страницах представлены изображения обертонов и простых интервалов, сделанные при помощи гармонографа. Гармонии расположены по степени нарастания диссонанса в звучании. На рисунках открытой фазы легко распознать гармонию, сосчитав вертикальные и горизонтальные петли. Чтобы определить, какой интервал изображен вращательным маятником, нужно зарисовать обе формы согласованно (обе окружности в одном направлении) и во встречном движении (в противоположных направлениях), затем посчитать петли в каждом рисунке, сложить получившиеся цифры и разделить сумму на два. При этом мы получим большее число пропорции. Если вычесть это число из исходной суммы, то получится меньшее число пропорции. Так, вращательные изображения для интервала a:b будут состоять из $b - a$ петель, если мы имеем дело с согласованным движением, и $a + b$, если речь идет о встречном вращении. Узоры, приведенные в этой таблице, были сделаны с одинаковой амплитудой маятника.

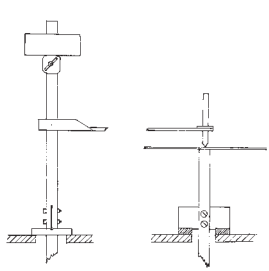


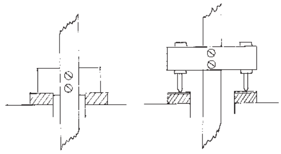

Поперечный
Интервалы
Вращающийся
Открытая фаза
Закрытая фаза
Согласованное вращение
Встречное вращение
1:1 Унисон
2:1 Октава
3:2 Квинта
4:3 Кварта
5:3 Мажорная секста
5:4 Мажорная терция
6:5 Минорная терция
8:5 Минорная секста
9:8 Целый тон (секунда)

Конструирование гармонографа









Если вы действительно намерены построить свой собственный гармонограф, то вам следует обратить внимание именно на модель с тремя маятниками.

Стол должен быть очень жестким и устойчивым, иначе работа маятников может быть нарушена. Подходящей высотой, по моему мнению, является 90 см над полом, размеры столешницы 60 × 30 см для двух маятников и 60 × 60 см — для трех, толщина — около 2 см плюс высота бортика около 8 см.

Ножки должны быть квадратного сечения толщиной около 6 см, скошены наружу и установлены острым концом на пол. Чтобы придать ножкам наклон, можно установить в углах под столом кронштейны и закрепить ножки в них. Затем нужно привинтить ножки к бортику.

Для экономии места можно отпилить часть стола, обозначенную пунктирной линией. Три ножки не так устойчивы, но все же справляются неплохо.

Плоскость, на которой будет лежать бумага, должна быть легкой и жесткой. Ее нужно прикрепить к маятнику шурупом с утопленной головкой. Подойдет размер 22 × 16 см, то есть примерно половина листа А4. Прикрепите лист к держателю скотчем или небольшой скрепкой.

Приведенные здесь размеры являются максимальными. Однако, если вы тщательно и аккуратно сделаете гармонограф с меньшими параметрами, он будет работать так же хорошо.

Теперь необходимо подобрать подходящие грузы. Гармонограф будет работать только при условии, что они действительно достаточно тяжелы и в то же время легко поддаются регулировке. Например, хорошим вариантом будет, если вы найдете, скажем, десять грузов по 2 кг каждый. Каждый груз должен быть около 8 см в диаметре и по центру иметь отверстие или желобок для удобства. Если найти ничего подходящего не удалось, попробуйте отлить грузы самостоятельно из свинца или цемента. Еще можно попробовать пообщаться с продавцами мелких металлических изделий или знакомым слесарем.

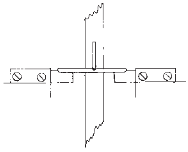
Рукоятки делаются из деревянных брусков круглого сечения диаметром около 1,5 см (металлические склонны гнуться и тем самым портить рисунки). Нанесите на бруски шкалу в сантиметрах.

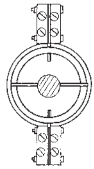
Зажимы можно купить у поставщиков лабораторного оборудования. Для некоторых рисунков понадобится верхний груз, который как раз и будут удерживать эти зажимы. Кроме того, можно дополнять гармонограф грузами для более точной настройки, тогда верхние зажимы удерживают одну или несколько шайб-разновесов.

Самый простой подшипник состоит из латунной полосы, вкрученной в бороздку на маятнике и подпиленной по краям так, чтобы войти в прорези с каждой стороны.

Подшипник создает меньшее трение. Маятник при помощи острых вертикальных болтов помещается в ось горизонтального блока, сделанного из твердых пород древесины. Если сверлить большое отверстие в блоке слишком тяжело, его можно сделать из двух частей, соединенных друг с другом.

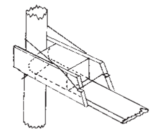
Вращающемуся гармонографу нужны карданные шарниры. Вырезы для маятников вытачиваются в верхней части кольца (например, кольца для ключей), а снизу делаются отверстия под прямым углом к верхним.



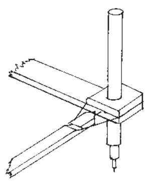


Нижние отверстия должны подходить к двум острым концам латунной полосы, которые зафиксированы между двумя деревянными брусками, соединенными со столом. В другом варианте можно использовать большую плоскую шайбу.

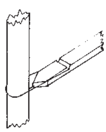
Деревянные рукоятки, которые будут держать ручку, должны быть как можно легче. Их легко сделать из пробкового дерева, которое всегда продается в магазинах для моделистов. В двухмаятниковом гармонографе рукоятку можно закрепить при помощи игл, а ручку вставить в отверстие на другом конце. Для таких маятников рукоятки нужно закреплять надежно, но не слишком туго. В одну из рукояток вставляется ручка, а другая фиксируется при помощи игл и с двух концов закрепляется (аккуратно) резинкой.



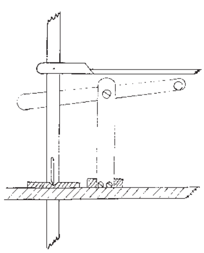
Наверняка существуют более продвинутые способы смастерить эту конструкцию, так что любые предложения приветствуются.

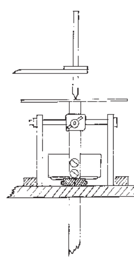


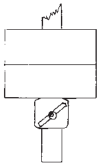
Дополнительная подгонка требуется для того, чтобы иметь возможность блокировать третий маятник и использовать инструмент только с двумя маятниками. Это можно сделать, расположив на столе рядом с вращающимся маятником две скобы с отверстиями и в них просунув длинный стержень, который и будет при необходимости фиксировать маятник.

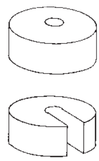


Ручка для нашего прибора должна легко скользить по бумаге и быть тонкой и легкой. В любом канцелярском магазине представлен широчайший выбор, и вы всегда можете подобрать что-то подходящее (сразу исключайте шариковые ручки и фломастеры). Для получения наилучшего результата используйте глянцевую художественную бумагу, а обычные листы — для предварительных экспериментов.



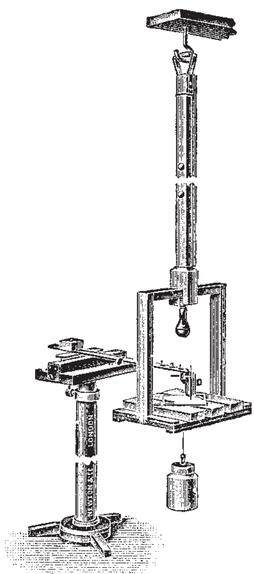






Если оставить ручку на бумаге до тех пор, пока колебания маятника полностью не угаснут, в конце получится уродливая клякса. Чтобы этого избежать, стоит предусмотреть возможность мгновенного и плавного поднятия ручки над листком бумаги. Для этого необходимо снабдить держатель ручки вертикальным рычагом. С его помощью также удобно опускать ручку на бумагу. Наблюдая за тем, как появляются рисунки, со временем вы научитесь менять их характеристики по своему усмотрению, различным образом воздействуя на маятники.

Для рисования интервалов за пределами октавы, например 4:1, вам потребуется другой гармонограф — такой, как двойной эллиптический маятник Гулда (*справа*).



Глоссарий музыкальных терминов

Аккорд — три и более нот, звучащих одновременно, как независимая музыкальная единица. Аккорд, состоящий из 3 нот, расположенных по терциям, называется трезвучием.

Аподжатура — диссонантный тон, звучащий на сильной доле такта и затем разрешающийся в консонанту или аккордовый тон.

Бемоль — знак понижения ноты на полтона. Также используется для обозначения тона, настроенного немного ниже исходной высоты звучания.

Брошенный тон — диссонанс на слабой доле такта, за которым следует нота, предшествующая скачку к консонанте в противоположном направлении.

Вводный тон — нижний — седьмая ступень гаммы, обычно на полтона ниже тоники, верхний — вторая ступень.

Ведущий тон — обычно третья или седьмая ступень аккорда, усиливает продвижение вперед гармонического ряда.

Взрывные звуки — замыкательные согласные звуки в разговорной речи («б», «д», «п», «т», «к»).

Восьмитонный — звукоряд из 8 тонов, обычно его относят к уменьшенным гаммам.

Вспомогательный тон — неаккордовый тон, звучащий выше или ниже аккордового тона для создания временно́го диссонанса или украшения, обычно на слабую долю такта.

Гамма — набор звуков, которые формируются вокруг тоники и усиливают ее. В западной музыкальной традиции существуют 12 мажорных и 12 минорных гамм, каждая их них построена от одной из 12 нот. Для соблюдения заданной структуры тонов и полутонов к нотам добавляются бемоли и диезы.

Гармоники — все тоны обертонного ряда. Придают нижнему основному тону тембр и окраску, при этом частотные характеристики каждого из них состоят в математической пропорции из целых чисел по отношению к нижней ноте. Многие струнные и духовые музыкальные инструменты могут играть таким образом, чтобы были слышны эти мягкие верхние тоны.

Гармонический минор — один из трех типов минорной гаммы.

Гармония — вертикальная взаимосвязь между тонами, звучащими одновременно, а также аккорд и способ, которым организована взаимосвязь аккордов во времени, где шестая ступень понижена, а седьмая повышена, в результате чего доминантный аккорд приобретает мажорную окраску. Так, между шестой и седьмой ступенями образуется увеличенная секунда.

Двухчастная закругленная форма — музыкальная форма структуры ABA, где вторая А является усеченной версией первой.

Двухчастная форма — одна из основных музыкальных форм — AB, обычно повторяется каждая контрастная фраза.

Диатонический звукоряд — звукоряд из 7 смежных нот со специфическим рисунком целых тонов и полутонов, часто используется для описания мажора или минора. Противоположен хроматическому. Характеризует мелодию, написанную в рамках этого звукоряда.

Диез — знак повышения натуральной (чистой) ноты на полтона. Также используется для описания тона, настроенного немного выше исходной высоты звучания.

Диминуэндо, или *декрещендо* — постепенное уменьшение громкости и интенсивности звучания, обозначается сужающейся шпилькой.

Диссонанс — один или несколько музыкальных интервалов неустойчивого звучания. Обычно относится к секундам или септимам. Требует разрешения в консонанс.

Добавочная нота — промежуточная или неаккордовая нота, добавленная к аккорду для придания дополнительного окраса. Обычно вторая, четвертая, шестая, девятая или тринадцатая ступень.

Доминанта — пятая ступень звукоряда. Сильная устойчивая позиция звукоряда, обычно предполагает разрешение в тонику. Часто присутствует в каденциях.

Дополнительные ноты — ноты над октавой, добавленные к аккорду для обогащения его звучания в целом, не изменяющие его основных характеристик. Всегда девятая, одиннадцатая или тринадцатая ступени. Также иногда называются усилением.

Задержание — аккорд, в котором терция не разрешается до тех пор, пока не разрешатся все остальные тоны, подготавливается в предыдущем аккорде. В современной музыке задержание не нуждается ни в подготовке, ни в разрешении.

Затакт — несколько нот перед началом основной темы или слабая доля такта, предшествующая метрически сильной доле.

Знаки альтерации — 5 знаков (бемоль, двойной бемоль, диез, двойной диез, бекар). Первые 4 повышают или понижают высоту звука на один или два полутона (обычно чтобы сменить или вернуть исходную тональность). Бекар отменяет действие остальных знаков.

Икт — метрическое ударение, часто сильная доля такта.

Интервал — расстояние между двумя звуками.

Исходная нота — самый нижний звук трезвучия или аккорда, который задает его характеристики и специфику в контексте конкретной гармонической последовательности.

Каденция — знак или группа нот и ритмов, обеспечивающая ощущение завершенности или паузы в конце музыкальной фразы или произведения.

Камбиата — элемент фигурации, неакордовый звук, разрешается на терцию или кварту с одной или другой стороны тона.

Ключ — знак, помещаемый в начале нотной записи для обозначения высоты звучания нот, расположенных на 5 линейках нотного стана. Существует три основных музыкальных ключа: ключ соль, ключ фа, ключ до.

Ключевые знаки — глобальная инструкция относительно того, какие ноты должны быть понижены или повышены для сохранения общего строя в рамках заданной гаммы. Располагаются в начале нотного стана после ключа и до размера.

Консонанс — относительная устойчивость музыкального интервала, обычно не подразумевающая разрешения, противоположность диссонанса. Наиболее распространенные: октава, кварта, терция и секста.

Контрапункт — способ записи одновременного звучания нескольких мелодических линий, переплетающихся горизонтально и вертикально. Система подчиняется строгим правилам консонанса и диссонанса с различными историческими вариациями.

Крещендо — постепенное усиление громкости и интенсивности звучания, в музыкальной нотации обозначается расширяющейся шпилькой.

Легато — инструкция играть ноты связно и однородно, исключая паузы между ними.

Мажор — в описании музыкальных интервалов характеризует вторую, третью, шестую и седьмую ступени, которые присутствуют в том же виде, что и в мажорной гамме. В описании аккордов — это трезвучие, состоящее из расположенной над исходной нотой мажорной терции и чистой квинты. Противоположность минора. Также описывает общие характеристики гаммы или тональности.

Медианта — третья ступень любой гаммы.

Мелизматический стиль — вокальная музыка с двумя или более звуками, приходящимися на один слог.

Мелодический минор — один из трех видов минорной гаммы. В такой гамме шестая и седьмая ступени изменены и присутствуют в том виде, в каком они встречаются в мажорной гамме, усиливая таким образом восходящее движение к тонике. В нисходящей гамме обычно используется неизменный натуральный минор.

Мелодия — развернутая во времени последовательность нот, обладающая выразительностью и набором специфических характеристик.

Минор — в описании музыкальных интервалов означает мажорный интервал, пониженный на полтона. В гармонии это аккорд, состоящий из чистой квинты и минорной терции, расположенной над исходным тоном. Противоположность мажору. Также описывает общие характеристики гаммы или тональности. В западной музыкальной традиции принято выделять три типа миноров: натуральный, гармонический и мелодический.

Модальная музыка — музыка, которая использует не минорные или мажорные лады, а такие как фригийский, дорийский, лидийский лады и т. п. (*см. с. 8, 9*). Обычно не предусматривает возможность перехода из одной тональности в другую.

Модуляция — изменение тональности со смещением тоновых центров и заменой знаков альтерации. Простейшая гармоническая формула модуляции: I-IV-V-I.

Монотонная музыка — музыка, преимущественно мелодическая и ритмическая, без гармонических перемещений. Все ноты связаны с единственным басовым тоном.

Мотив — музыкальная мелодия, или тема, обладающая достаточной степенью индивидуальности, чтобы сформировать запоминающийся неповторимый музыкальный узор, часто являющийся основным элементом всей композиции.

Натуральный минор — эолийский строй, минорная гамма без изменения шестой и седьмой ступеней.

Обертонный ряд — естественный акустический феномен, возникающий в результате вибрирования струны или прохождения воздуха сквозь трубку. Его суть заключается в том, что к звучанию основной ноты прибавляется звук с более высокой частотой. Вместе основной и обертонный звуки формируют тембр и индивидуальность звучания. Также имеет отношение к гласным звукам в речи.

Обращение — в случае музыкального интервала имеется в виду перенесение вверх нижней ноты, то есть вторая ступень становится седьмой, третья — шестой, четвертая — пятой и т. д. В гармонии обращение означает, что внизу находится нота, отличная от исходной.

Отклонение — временное перемещение тонового центра к ноте, не являющейся тоникой. В отличие от модуляции это явление мимолетное и неустойчивое.

Пентатонный звукоряд — звукоряд из 5 нот, чаще всего обозначает 5 первых доминант, идущих последовательно: 1-2-3-5-6. Также обозначает черные клавиши фортепиано.

Пиано — музыкальная инструкция, предписывающая играть тихо. Противоположность форте.

Полиритмия — одновременное использование двух ритмических рисунков, напрямую не связанных друг с другом, также носит название «пересекающиеся ритмы».

Половинная ступень — см. *Полутон*.

Полутон — половинная ступень, самый маленький интервал в западной музыкальной традиции. Две смежные ноты на фортепиано (считая и черные, и белые клавиши).

Проходящий тон — переходный тон между двумя аккордовыми тонами, обычно диссонантный, приходится на слабую долю такта.

Размер — количество долей определенной длительности, образующих такт, записывается в виде «дроби»: «числитель» — количество долей в такте, «знаменатель» — длительность одной доли (четверть, восьмая, шестнадцатая и т. д.). Базовые размеры — двухдольный и трехдольный.

Регистр — область в пределах диапазона инструмента, голоса или музыкального произведения.

Ритм — времення́я организация движения мелодии или музыкальных элементов.

Силлабическая музыка — вокальная музыка, где на один слог приходится одна нота.

Синкопа — перенос акцента с сильной доли на слабую, временно разбивающий привычный ритмический рисунок. Применение синкоп — один из самых распространенных признаков разных музыкальных стилей.

Соната — в этой книге обозначает формальный алгоритм, включающий две контрастные темы, где вторая (побочная) исполняется в тональности, отличной от основной (обычно в тональности доминанты), затем следуют модулирующая часть, разработка и реприза, в которой снова звучат обе темы, при этом вторая тема приведена к основной тональности.

Стаккато — музыкальная инструкция, предписывающая играть ноты отрывисто, в нотной записи обычно обозначается точкой над или под нотой.

Субдоминанта — четвертая ступень гаммы, на квинту ниже тоники и на целую ступень ниже доминанты. Часто играет роль отправной точки от тоники и подготовки к доминанте.

Субмедианта — шестая ступень гаммы, на терцию ниже тоники.

Субтоника — седьмая ступень гаммы, обычно располагается на тон ниже тоники (см. *Вводный тон*).

Такт — единица музыкального времени, поделенная на доли одинаковой длительности. В музыкальной нотации такты разделяются вертикальной чертой.

Темп — скорость исполнения музыкального произведения.

Тенуто — музыкальная инструкция, предписывающая продлить звучание определенной ноты, обычно в нотной записи обозначается линией (тире) над или под нотой.

Тоника — устойчивая или начальная точка гаммы, нота с самым сильным притяжением, с которой связаны все остальные ноты гаммы, первая ступень гаммы.

Тоновая музыка — музыка, использующая принцип взаимоотношений тоники и доминанты, преимущественно относится к мажорным и минорным системам, распространенным в западной музыке.

Транспозиция — перенос нот композиции из одной тональности в другую, выше или ниже, с сохранением относительных интервалов.

Трезвучие — 3 ноты, расположенные по терциям. Может быть мажорным, минорным, уменьшенным или увеличенным.

Трехчастная форма — музыкальная форма структуры ABA, где вторая A повторяет первую.

Тритон — уменьшенная квинта или увеличенная кварта, состоит из 3 тонов (6 полутонов). Самый большой симметричный интервал в западной музыкальной традиции, является собственным обращением. Часто присутствует в малом мажорном септаккорде (доминантсептаккорде, в виде четвертой и седьмой ступеней мажорной гаммы). Обладает значительным стремлением к разрешению через увеличение или уменьшение. Облегчает переход из одной тональности в другую.

Увеличенный (Aug) — термин, используемый для описания интервала или аккорда. В случае интервала означает чистый или мажорный интервал, расширенный на полтона. С аккордом означает мажорное трезвучие с повышенной на полтона квинтой.

Уменьшенный (Dim) — термин, используемый для описания интервала или аккорда. В случае интервала означает уменьшение чистого интервала на полтона. С аккордом означает трезвучие из минорной терции и уменьшенной квинты.

Форте — музыкальная инструкция, предписывающая играть громко, противоположность пиано.

Фрикативный звук — в разговорной речи — согласный звук, который формируется при практически закрытой полости рта.

Хроматический («полноцветный») — испльзуется для обозначения музыки, содержащей полутоны, знаки альтерации, или 12-тонного звукоряда, в отличие от диатонического.

Цезура — пауза (тишина).

Целый тон — также целая ступень, состоит из двух полутонов.

Чистые — музыкальные интервалы октава, квинта, кварта (и унисон), наиболее приближенные к первому акустическому интервалу обертонного ряда.

Шипящие — вид фрикативных согласных звуков в разговорной речи, звучат на высоких частотах, часто имеют сходство со свистящими звуками, такими как «с» и «з».

Сольфеджио и мнемоника

СОЛЬФЕДЖИО/СОЛЬМИЗАЦИЯ

Ut Re Mi Fa Sol La Si Ut
Gamma-Ut = Gamut

Ut queant laxis, Re-sonare fibris, Mi-ra gestorum
Fa-muli tuorom, Sol-ve polluti, La-bii reatum,
Sa-ncte Iohannes

Чтобы в полный голос
Смогли воспеть рабы
Твоих деяний чудеса,
Сними грех с их уст,

Святой Иоанн
(песнопение св. Иоанну, VIII век, пер. М. Катунян)

На Западе установились и используются
на сегодняшний день три системы:

Закрепленная до:
Do Re Mi Fa So La Si Do
Преимущества: хороша для названий нот в гаммах
без повышенных или пониженных ступеней
Недостатки: каждый слог может означать
до 5 различных звуков
(♭♭, ♭, ♮, ♯, ♯♯)
7 различных слогоделений для тональностей

Подвижная до, хроматические слоги:
Восходящая: Do Di Re Ri Mi Fa Fi So Si La Li Ti Do
Нисходящая: Do Ti Te La Le So Se Fa Mi Me Re Ra Do
Преимущества: иллюстрирует взаимосвязь
между тоникой и доминантой Do-So через мажор
и параллельный минор, одно слогоделение для всех
гамм
Недостатки: скрывает взаимосвязь с родственным
минором, распадается на хроматические пассажи,
то есть теряет ув.3, ум.4

Подвижная до, ля минор, хроматические слоги:
МАЖОР:
Восходящая: Do Di Re Ri Mi Fa Fi So Si La Li Ti Do
Нисходящая: Do Ti Te La Le So Se Fa Mi Me Re Ra Do
МИНОР:
Восходящая: La Li Ti Do Di Re Ri Mi Fa Fi So Si La
Нисходящая: La Le So Se Fa Mi Me Re Ra Do Ti Te La
Преимущества: показывает ладовое
и историческое соотношение мажора и минора
Недостатки: маскирует взаимосвязь между
тоникой и доминантой Do-So, распадается на
минорные хроматические пассажи, то есть теряет
ув.5, ум.3, семь различных слогоделений для ладов

МНЕМОНИКА

ДЛЯ ТЕРЦИЙ:

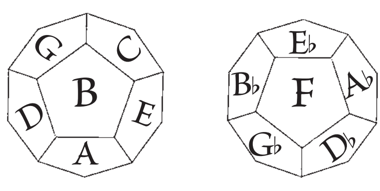
НОТЫ НА ЛИНЕЙКАХ
В СКРИПИЧНОМ КЛЮЧЕ:
E-G-B-D-F
Every Good Boy Does Fine
Every Good Boy Deserves Fudge
Elephants Got Big Dirty Feet
Empty Garbage Before Dad Flips

НОТЫ МЕЖДУ ЛИНЕЙКАМИ
В СКРИПИЧНОМ КЛЮЧЕ:
F-A-C-E
Fun Always Comes Easy

НОТЫ НА ЛИНЕЙКАХ
В БАСОВОМ КЛЮЧЕ:
G-B-D-F-A
Great Big Dandelions Fly Away
Good Boys Do Fine Always
Good Boys Deserve Fudge Always
Great Big Deer From Alaska
Great Big Dogs From America
Granny's Boots Don't Fit Aunty

НОТЫ МЕЖДУ ЛИНЕЙКАМИ
В БАСОВОМ КЛЮЧЕ:
A-C-E-G
All Cars Eat Gas
All Cows Eat Grass
All Children Eat Gum

ДЛЯ КВИНТ И КВАРТ:
G-D-A-E-B-F-C
Give Dorothy An Easter Basket For Christmas
For Christmas Give Dorothy An Easter Basket
Flying Birds Enjoy A Delightful Green
Countryside
Birds Enjoy A Delightful Green Countryside
Flying



12 нот, расположенных на гранях додекаэдра,
задают парные тритоны квинтового круга

Основные знаки музыкальной нотации

Нотный стан, или нотоносец — решетка, или матрица, на которой размещаются ноты и паузы

Скрипичный ключ — также известен как ключ соль, так как его начинают рисовать с линейки, на которой располагается нота соль

Басовый ключ — ключ фа, его начинают рисовать с линейки, на которой располагается нота фа

Альтовый ключ — ключ до, помещает ноту до первой октавы на третью (среднюю) линейку

Теноровый ключ — ключ до, помещает до первой октавы на терцию выше, чем альтовый ключ

Нейтральный ключ — примеяется при записи музыкального ритма для ударных инструментов, не имеющих определенной высоты звучания

Добавочные линейки — линейки над или под нотным станом для расширения нотного ряда, который может быть записан в рамках данного ключа

Кода — знак, указывающий на завершение музыкального произведения

Сэньо — знак, указывающий место (такт), с которого начинается повторение, обычно после начала, также записывается как D. S. (Da Segno)

Повторить — эти знаки, как круглые скобки, обозначают начало и конец фрагмента, который нужно повторить

Повторить предыдущий такт

Фермата — ставится над нотой или паузой и означает ее продление на неопределенное время

tr *Трель — орнамент, украшение ноты за счет многократного чередования основной ноты с дополнительной, на тон или полтона ниже или выше ее*

Трель — орнамент, украшение ноты за счет чередования ее один или два раза с нотой выше или ниже

Смычок вверх — для струнных инструментов, движение смычка вверх

Смычок вниз — для струнных инструментов, движение смычка вниз

Мартеллато (очень подчеркнуто) — сильный акцент

Стаккато — играть отрывисто

Гармония — указывает на необходимость добавления обертона к исходной ноте

Акцент/маркато — общий акцент, не настолько сильный, как мартеллато

Тенуто — указывает на необходимость продлить звучание ноты

8va / *8vb* *8va/8vb — играть ноты на октаву ниже или выше, чем написано*

15ma / *15mb* *15va/15vb — играть ноты на 2 октавы ниже или выше, чем написано*

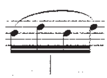

Нота с точкой — длительность ноты увеличивается в полтора раза


Нота с двумя точками — к ноте добавляется половина ее длительности, а затем еще половина полученной длительности

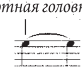

Арпеджиато — ноты аккорда следует исполнять последовательно

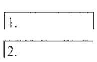

Форшлаг — очень короткая нота, украшение; встречаются и группы форшлагов


Тремоло — означает быстро повторяющуюся или вибрирующую ноту



Лига — означает, что эти ноты нужно исполнять приемом легато (связно). Для струнных: на одном направлении смычка. Для духовых: на одном дыхании


Залигованные ноты — длительности двух нот объединяются в пределах доли или такта



1 и 2 окончание — обозначения различных вариантов окончания для повторяющихся разделов композиции


Слэш-нотация — часто используется для обозначения музыкальной импровизации


Размер alla breve — размер 2/2

pp *Пианиссимо — очень тихо*

p *Пиано — тихо*

mp *Меццо пиано — умеренно тихо*

mf *Меццо форте — умеренно громко*

f *Форте — громко*

ff *Фортиссимо — очень громко*

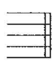
sfz *Сфорцандо — сильный акцент*


Крещендо — постепенное усиление громкости


Диминуэндо, декрещендо — постепенное снижение громкости

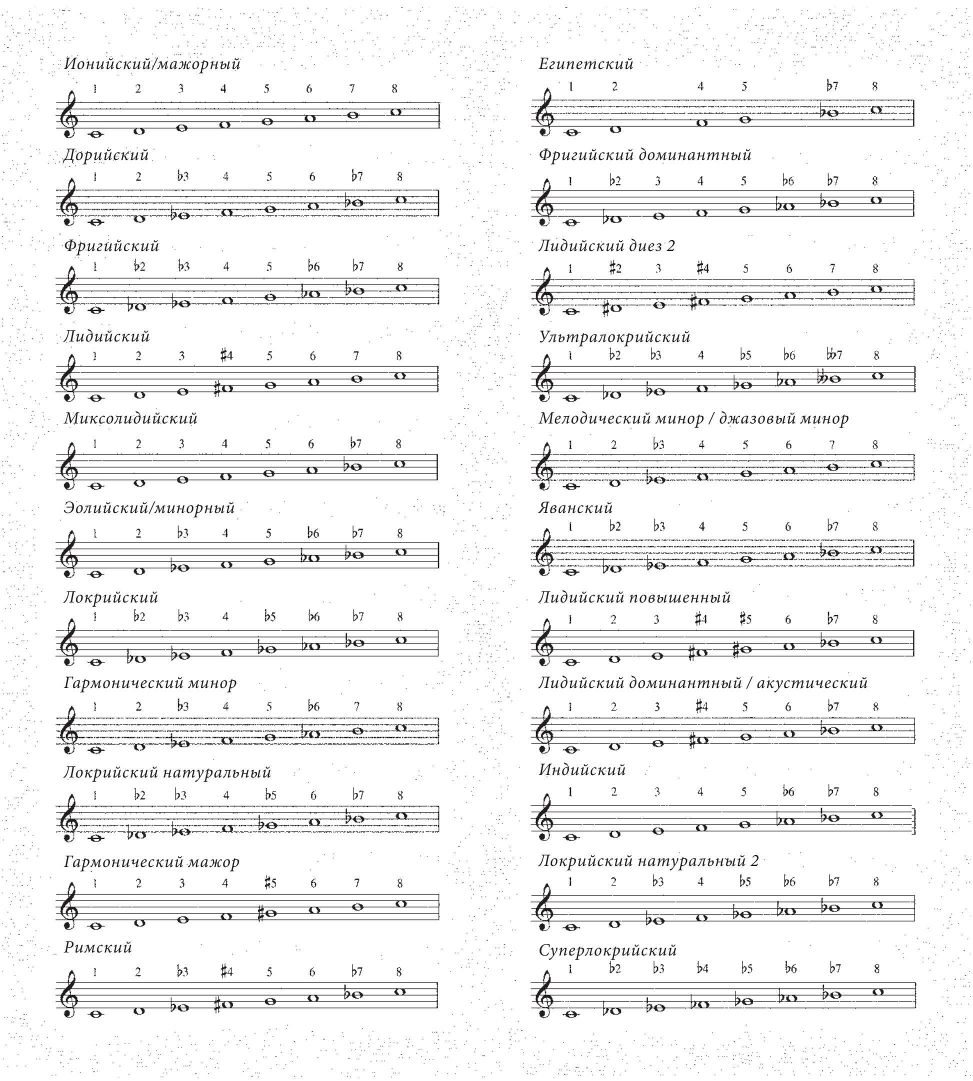
Ped. ❋ *Педаль — для фортепиано: указывает на момент нажатия и отпускания педали*


Двойная черта (финал) — означает окончание произведения

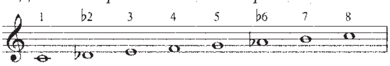

Двойная черта — означает окончание части


Размер 4/4

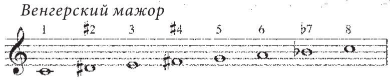
Музыкальные лады



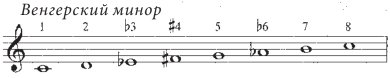
Двойной гармонический минор



Венгерский мажор

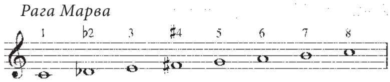


Венгерский минор

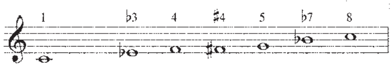


Рага Тоди

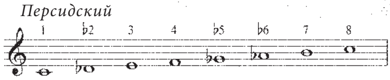
Рага Марва



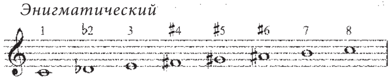
Блюз



Персидский

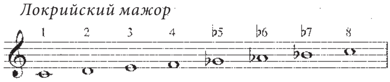


Энигматический



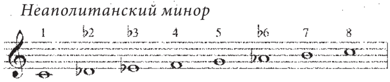
Лидийский минор

Локрийский мажор



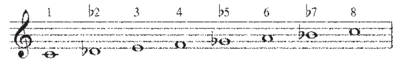
Неаполитанский мажор

Неаполитанский минор

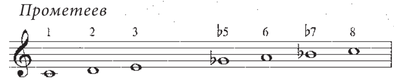


Миксолидийский увеличенный

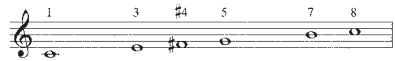
Восточный



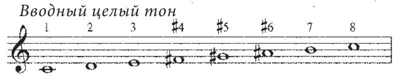
Прометеев



Китайский



Вводный целый тон



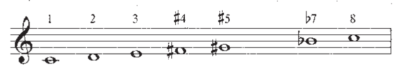
Балийский пелог

Японский

Мажорный пентатонный

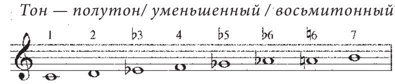
Минорный пентатонный

Целый тон

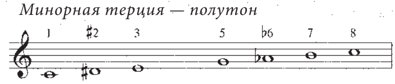


Полутон — тон/ уменьшенный / восьмитонный

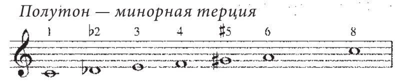
Тон — полутон/ уменьшенный / восьмитонный



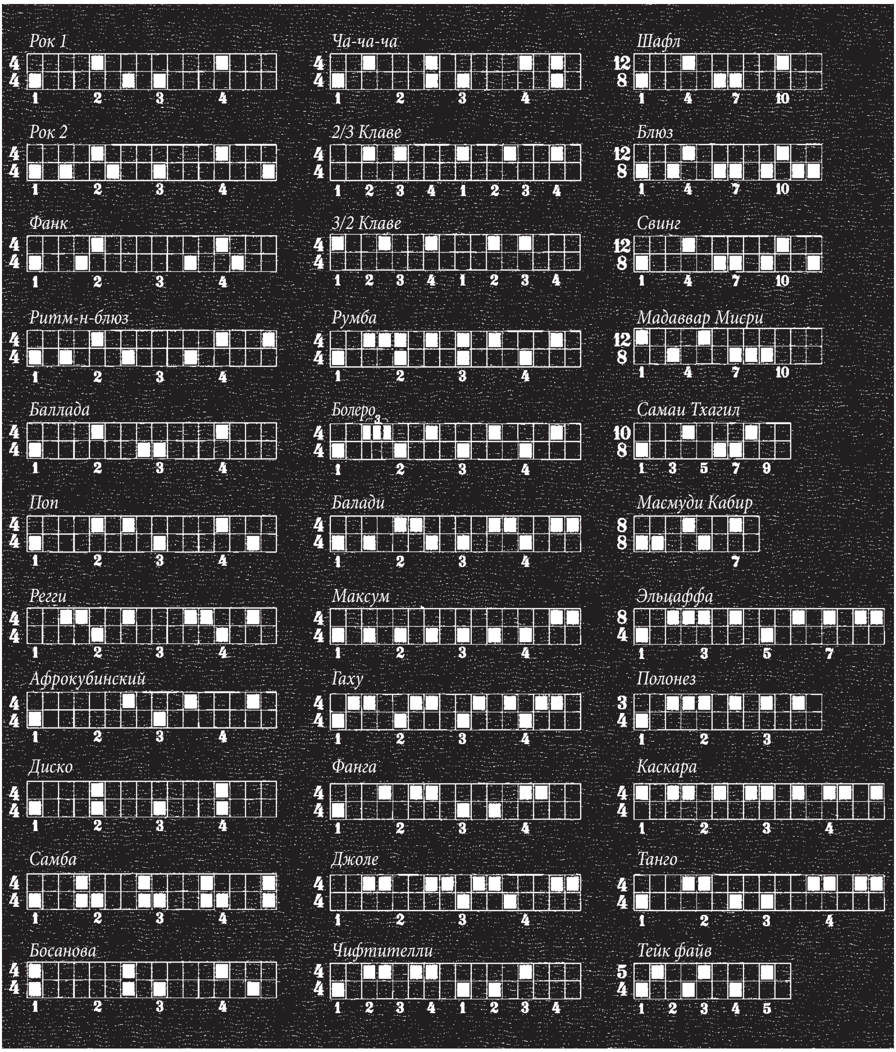
Минорная терция — полутон



Полутон — минорная терция



Некоторые ритмы



Гармонии


C C+ Cm C° Csus4 Csus2 C6 C(add9)
C6/9 C5 Cm6 Cm(add9) Cm6/9 Cmaj7 C7 Cm7
C7(♯5) Cm(ma7) Cm7♭5 C07 C0(ma7) Cmaj7(5) C7(♭5) Cmaj7(♭5)
C7sus C7(omit3) C7(omit5) Cmaj9 C9 Cm9 C9(♯5) Cm(ma9)
Cm9♭5 C°(ma9) Cmaj9(♯5) C9(♭5) Cmaj9(♭5) C9sus C7(♭9) C7(♯9)
C7(♭9 ♭5) C7(♯9 ♯5) C7(♭9 ♯5) C7sus(♭9) Cmaj7(♯11) Cmaj9(♯11) C7(♯11) C9(♯11)
Cm7(add11) Cm11 Cm11(♭5) C7(♯11 ♭9) C7(♯11 ♯9) Cmaj13 Cmaj13(♯11) C13
C13(♭9) C13(♯11) C13(♯11 ♭9) C13(♯11 ♯9) C13sus C13sus(♭9) Cm13 Cm13(♯11)
C/E C/G A/C B/C Bb/C C(add9)/E C7(add4) Dbmaj7♯5/C
Cmaj7sus G7♯5/C C(add♭6) Abmaj/Cmaj C7sus4-3 /C Cbass N.C.

Солнце и планеты

	Перигелий, 10^6 км	*Средняя орбита, 10^6 км*	*Афелий, 10^6 км*	*Эксцентриситет*	*Наклон орбиты, град.*	*Долгота перигелия, град.*	*Орбитальный период, дни*	*Тропический год, дни*
Солнце ☉	–	–	–	–	–	–	–	–
Меркурий ☿	46.00	57.91	69.82	0.205631	7.0049	77.456	87.969	87.968
Венера ♀	107.48	108.21	108.94	0.006773	3.3947	131.53	224.701	224.695
Земля ♁	147.09	149.60	152.10	0.016710	0	102.95	365.256	365.242
Марс ♂	206.62	227.92	249.23	0.093412	1.8506	336.04	686.980	686.973
Церера ⚳	446.60	413.94	381.28	0.0789	10.58	???	1680.1	1679.5
Юпитер ♃	740.52	778.57	816.62	0.048393	1.3053	14.753	4,332.6	4,330.6
Сатурн ♄	1,352.2	1,433.5	1,514.5	0.054151	2.4845	92.432	10,759.2	10,746.9
Хирон ⚷	1,266.2	2,050.1	2,833.9	0.38316	6.9352	339.58	18,518	18,512
Уран ♅	2,741.3	2,872.46	3,003.6	0.047168	0.76986	170.96	30,685	30.589
Нептун ♆	4,444.4	4,495.1	4,545.7	0.0085859	1.7692	44.971	60,190	59,800
Плутон ♇	4,435.0	5,869.7	7,304.3	0.24881	17.142	224.07	90,465	90,588

Спутники планет

Планета	*Название спутника*	*Средний орбитальный радиус, 10^3 км*	*Орбитальный период, дни*	*Эксцентриситет орбиты*	*Наклон орбиты, град.*	*Средний диаметр, км*	*Масса, 10^{18} кг*
Земля ♁	*Луна*	384.8	27.3217	0.0549	5.145	3,475	73,490
Марс ♂	*Фобос*	9,378	0.31891	0.0151	1.08	22.4	0.0106
	Деймос	23,459	1.26244	0.0005	1.79	12.2	0.0024
Юпитер ♃	*Ио*	421.6	1.7691	0.004	0.04	3,643	89,330
	Европа	670.9	3.5512	0.009	0.47	3,130	47,970
	Ганимед	1,070	7.1546	0.002	0.21	5,268	148,200
	Каллисто	1,883	16.689	0.007	0.51	4,806	107,600
Сатурн ♄	*Тетис*	294.66	1.8878	<0.001	1.86	1,060	622
	Диона	377.40	2.7369	0.0022	0.02	1,120	1,100
	Рея	527.04	4.5175	0.0010	0.35	1,528	2,310
	Титан	1,221.8	15.945	0.33	0.33	5,150	134,550
	Япет	3,561.3	79.330	0.0283	14.7	1,436	1,590

Период вращения, часы	*Средняя длина дня, часы*	*Экваториальный диаметр, км*	*Полярный диаметр, км*	*Наклон оси, град.*	*Масса, 10^{24} кг*	*Объем, 10^{12} км^3*	*Ускорение свободного падения, м/с^2*	*Поверхностное давление, бар*	*Средняя температура, °C*
600 - 816	-	1,392,000	1,392,000	7.25	1,989,100	1,412,000	274.0	0.000868	5505
1407.6	4222.6	4,879.4	4,879.4	0.01	0.3302	0.06083	3.70	пренебр.	167
-5832.5	280.20	12,103.6	12,103.6	177.36	4.8685	0.92843	8.87	92	464
23.934	24.000	12,756.2	12,713.6	23.45	5.9736	1.08321	9.78	1.014	15
24.623	24.660	6794	6750	25.19	0.64185	0.16318	3.69	0.007	-65
9.0744	9.0864	960	932	перемен.	0.00087	0.000443	пренебр.	пренебр.	-90
9.9250	9.9259	142,984	133,708	3.13	1,898.6	1,431.28	23.12	100+	-110
10.656	10.656	120,536	108,728	26.73	568.46	827.13	8.96	100+	-140
5.8992	5.8992	208	148	???	0.000006	0.000024	пренебр.	пренебр.	???
-17.239	17.239	51,118	49,946	97.77	86.832	68.33	8.69	100+	-195
16.11	16.11	49,528	48,682	28.32	102.43	62.54	11.00	100+	-215
-153.29	153.28	2390	2390	122.53	0.0125	0.00715	0.58	пренебр.	-223

Спутники планет

(продолжение)	*Название спутника*	*Средний орбитальный радиус, 10^3 км*	*Орбитальный период, дней*	*Эксцентриситет орбиты*	*Наклон орбиты, град.*	*Средний диаметр, км*	*Масса, 10^{18} кг*
Уран ♅	*Миранда*	129.39	1.4135	0.0027	4.22	235.7	66
	Ариэль	191.02	2.5204	0.0034	0.31	578.9	1,340
	Умбриэль	266.30	4.1442	0.0050	0.36	584.7	1,170
	Титания	435.91	8.7059	0.0022	0.14	788.9	3,520
	Оберон	583.52	13.463	0.0008	0.10	761.4	3,010
Нептун ♆	*Протей*	117.65	1.1223	0.0004	0.55	193	3
	Тритон	354.76	-5.8769	0.000016	157.35	2,705	21,470
	Нереида	5,5413	360.14	0.7512	7.23	340	20
Плутон ♇	*Харон*	19.6	6.3873	<0.001	<0.01	1,186	1,900

Приведены только главные спутники газовых гигантов. В 2001 году было известно 28 спутников Юпитера, 30 — Сатурна, 21 — Урана и 8 —Нептуна. Вероятнее всего, на самом деле их много больше. Между полными лунами на Земле проходит 29,5306 суток. Космология может серьезно поправить ваше здоровье

Планетарные настройки

	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон	Луна	Луна Сид	День
Период, годы	0.24085	0.6152	1	1.8809	11.862	29.458	84.013	164.79	247.69	0.08085	0.07480	0.00274
Слышимая частота, Гц	141.27	221.23	136.10	144.72	183.58	147.85	207.36	211.44	140.25	210.42	227.43	194.18
Октава, номер	30	32	32	33	36	37	39	40	40	29	29	24
Слышимый тон	D	A	C♯	D	F♯	D	G♯	A	C♯	G♯	A♯	G
Настроенная высота звука, Гц	423.34	442.46	432.10	433.67	436.62	443.04	439.37	422.87	445.26	445.86	429.33	435.92
Видимая частота, 1014 Гц	6.213	4.865	5.986	6.365	4.037	6.502	4.559	4.650	6.168	4.627	5.001	4.270
Октавы света номер	72	73	74	75	77	79	80	81	82	70	70	65
Длина волны, нм	0.483	0.616	0.501	0.471	0.743	0.461	0.685	0.645	0.486	0.648	0.599	0.702
Цвет	*Синий*	*Оранжевый*	*Сине-зеленый*	*Синий*	*Красный*	*Синий*	*Оранжево-красный*	*Оранжево-красный*	*Синий*	*Оранжево-красный*	*Желто-оранжевый*	*Оранжево-красный*

По мотивам книги «Космическая октава» Ганса Кусто
(Hans Cousto. The Cosmic Octave — Origin of Harmony. LifeRhythm, 2000)

Таблица древних мер

	Английский фут	*Ассирийский*	*Иберийский*	*Римский*	*Обычный египетский*	*Английский*	*Греческий*	*Персидский*	*Бельгийский*	*Шумерский*	*Устаревший английский*	*Устаревший египетский*	*Русский*
Ассирийский	0.9	1	63/64	15/16		9/10	7/8	6/7					
Иберийский	0.91429	64/63	1	20/21	14/15		8/9			5/6		4/5	
Римский	0.96	16/15	21/20	1	49/50	24/25	14/15			7/8			
Обычный египетский	0.97959		15/14	50/49	1	48/49	20/21					6/7	
Английский	1	10/9		25/24	49/48	1	35/36	20/21	14/15		9/10	7/8	6/7
Греческий	1.02857	8/7	9/8	15/14	21/20	36/35	1	48/49	24/25	15/16		9/10	
Персидский	1.05	7/6				21/20	49/48	1	49/50				9/10
Бельгийский	1.07143					15/14	25/24	50/49	1		27/28	15/16	
Шумерский	1.09714		6/5	8/7			16/15			1		24/25	
Устаревший английский	1.11111					10/9			28/27		1	35/36	20/21
Устаревший египетский	1.14286		5/4		7/6	8/7	10/9		16/15	25/24	36/35	1	48/49
Русский	1.16667					7/6		10/9			21/20	49/48	1

Древняя метрология

Геометрия означает «измерять землю». Единицы измерения древних греков сформировали единую глобальную систему, настроенную на размеры Земли и Луны. Эти измерительные единицы пропорционально делятся и умножаются между собой (*см. таблицу внизу*). Кроме того, существуют пропорциональные взаимоотношения между различными исторически сложившимися системами *(см. таблицу Джона Нила внизу напротив)*. Например, ассирийские и греческие единицы измерения находятся в пропорции 9:10, римские и греческие соотносятся как 24:25, а ассирийские и римские — как 15:16. Бельгийский фут относится к ассирийскому как 6:5 и к римскому — как 9:8. Названия единиц измерения могут ввести в заблуждение, так как в различных системах часто используются одни и те же названия. Обратите внимание на использование гармонических интервалов.

Исаак Ньютон возродил интерес к древней метрологии. В поисках точного значения размера Земли он обнаружил, что древние иудеи в качестве единицы измерения использовали «священный» локоть, равный 10-миллионной части радиуса Земли. В последующие годы эту тему исследовали Джон Гривс, Фрэнсис Пенроуз и Уиллиам Флиндерс Петри. Они обнаружили незначительные, но регулярные отклонения в отдельных единицах измерения. Петри, а позднее Ливио Стечини установили, что измерения обычно варьируются на 170-ю или 450-ю часть. Джон Митчелл и Джон Нил усовершенствовали и объяснили эти подсчеты.

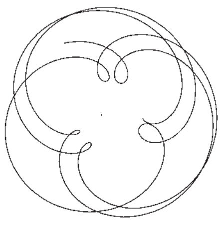
Первое отклонение в 175/176 появляется из разницы между двумя значениями ϖ в Древнем мире, 25/8 и 22/7. Витрувий описывает римский одометр как прибор с четырьмя колесами диаметром четыре фута, которые за один поворот отмеряют 12,5 футов. Так, даже при измерении в коротких римских футах, получается то же расстояние, что и в длинных, но на 175/176 длиннее. Эта дробь появляется еще во многих местах, например традиционный индийский фут относится к английскому футу как 175:176.

Второе отклонение можно связать с несферичностью формы Земли. Наши далекие предки знали о том, что экваториальный радиус Земли больше полярного. Это означает, что деления широт уменьшаются по мере приближения к полюсам. Отношение между полярными:средними:экваториальными широтами было обозначено как 880:882:223, что объясняет часто встречающееся отклонение в 440:441 (иногда его называют «коротким» и «длинным» футом). Средний радиус отсчитывается на широте около 51°, известной как меридианный градус.

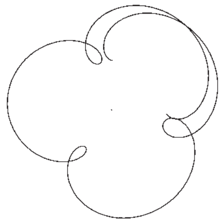
Линейные измерения гармонично соотносятся с угловыми. Например, одна секунда дуги на поверхности Земли на меридианной широте равна 100 греческим футам. Английская (и американская) миля тоже связана с геодезией (*см. с. 327*).

		Палец	Дюйм	Ладонь	Рука	Пядь	Фут	Локоть	Шаг	Ярд	Пейс	Фатом
Палец	=	1	3/4	1/4	3/16	1/12	1/16	1/24	1/40	1/48	1/80	1/96
Дюйм	=	4/3	1	1/3	1/4	1/9	1/12	1/18	1/30	1/36	1/60	1/72
Ладонь	=	4	3	1	3/4	1/3	1/4	1/6	1/10	1/12	1/20	1/24
Рука	=	16/3	4	4/3	1	4/9	1/3	2/9	2/15	1/9	1/15	1/18
Пядь	=	12	9	3	9/4	1	3/4	1/2	3/10	1/4	3/20	1/8
Фут	=	16	12	4	3	4/3	1	2/3	2/5	1/3	1/5	1/6
Локоть	=	24	18	6	9/2	2	3/2	1	3/5	1/2	3/10	1/4
Шаг	=	40	30	10	15/2	10/3	5/2	5/3	1	5/6	1/2	5/12
Ярд	=	48	36	12	9	4	3	2	6/5	1	3/5	1/2
Пейс	=	80	60	20	15	20/3	5	10/3	2	5/3	1	5/6
Фатом	=	96	72	24	18	8	6	4	12/5	2	6/5	1

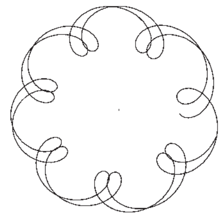
«Танцы» планет



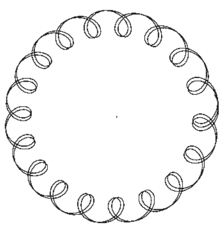
МЕРКУРИЙ — ВЕНЕРА



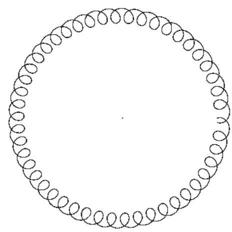
МЕРКУРИЙ — ЗЕМЛЯ



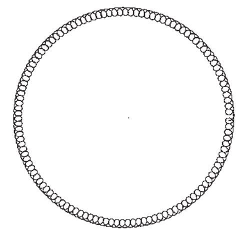
МЕРКУРИЙ — МАРС



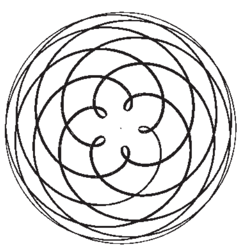
МЕРКУРИЙ — ЦЕРЕРА



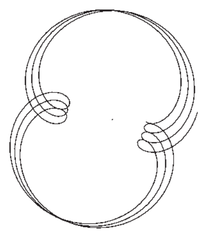
МЕРКУРИЙ — ЮПИТЕР



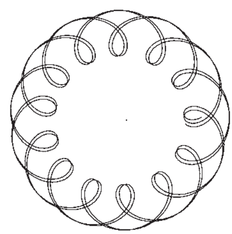
МЕРКУРИЙ — САТУРН



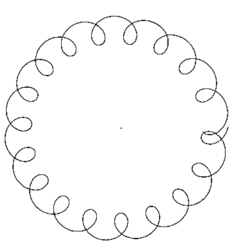
ВЕНЕРА — ЗЕМЛЯ



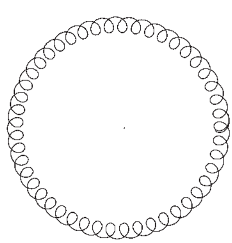
ВЕНЕРА — МАРС



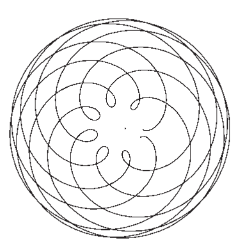
ВЕНЕРА — ЦЕРЕРА



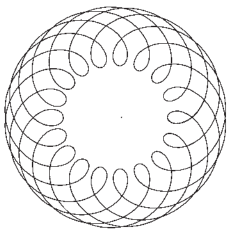
ВЕНЕРА — ЮПИТЕР



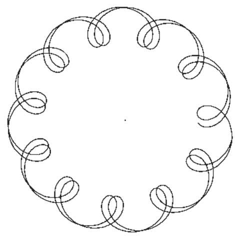
ВЕНЕРА — САТУРН



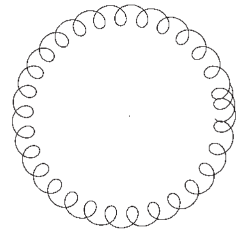
ЗЕМЛЯ — МАРС



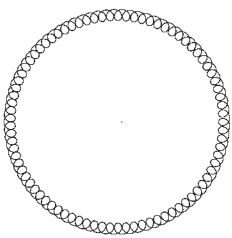
ЗЕМЛЯ — ЦЕРЕРА



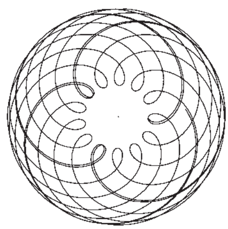
ЗЕМЛЯ — ЮПИТЕР



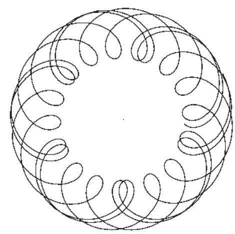
ЗЕМЛЯ — САТУРН



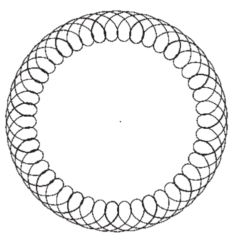
ЗЕМЛЯ — УРАН



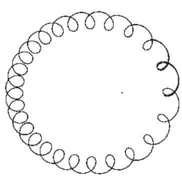
МАРС — ЦЕРЕРА



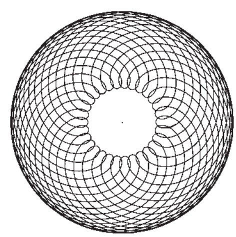
МАРС — ЮПИТЕР



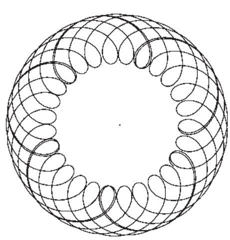
МАРС — САТУРН



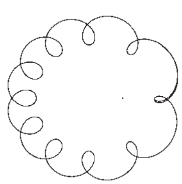
МАРС — ХИРОН



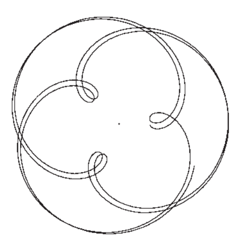
ЦЕРЕРА — ЮПИТЕР



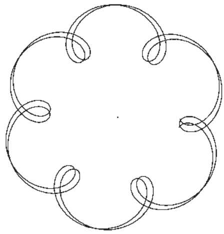
ЦЕРЕРА — САТУРН



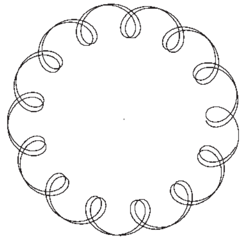
ЦЕРЕРА — ХИРОН



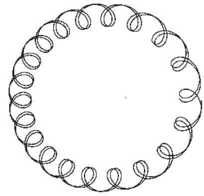
ЮПИТЕР — САТУРН



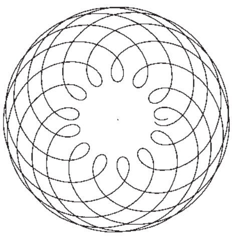
ЮПИТЕР — УРАН



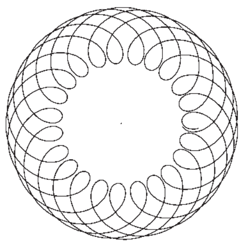
ЮПИТЕР — НЕПТУН



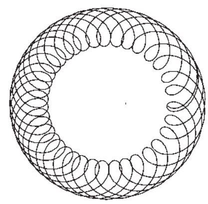
ЮПИТЕР — ПЛУТОН



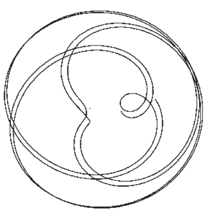
САТУРН — УРАН



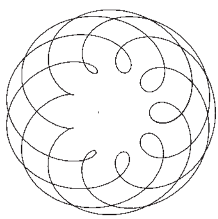
САТУРН — НЕПТУН



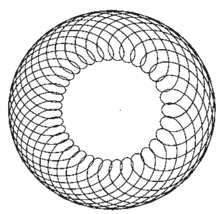
САТУРН — ПЛУТОН



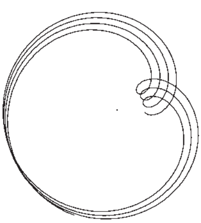
ХИРОН — УРАН



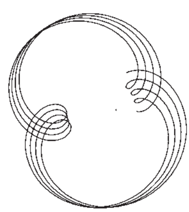
ХИРОН — НЕПТУН



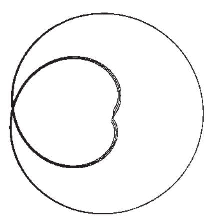
ХИРОН — ПЛУТОН



УРАН — НЕПТУН



УРАН — ПЛУТОН

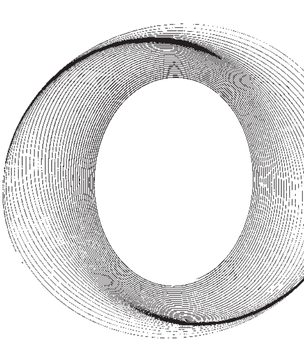


НЕПТУН — ПЛУТОН

Предметно-именной указатель

Библиография и книги для дополнительного чтения

Cooke D. The Language of Music. — London: Oxford University Press, 1959. («Язык музыки»)
Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. — N. Y.: Dover Publications, 1974. («Правильные политопы»)
Critchlow K. Islamic Patterns. — London: Thames & Hudson, 1983. («Исламские узоры»)
Critchlow K. Order in Space: A Design Source Book. — London: Thames & Hudson, 1969. («Порядок в космосе»)
Critchlow K. Time Stands Still. — Edinburgh: Floris Books, 2007. («Время неподвижно»)
Cromwell P. Polyhedra. — Cambridge University Press, 1999. («Полиэдры»)
Crow M. J. Theories of the World from Antiquity to the Copernican Revolution. — N. Y.: Dover Publications, 1990. («Теории мира от Античности до революции Коперника»)
Daniélou A. Music and the Power of Sound. — Rochester, Vermont: Inner Traditions, 1995. («Музыка и власть звуков»)
Fideler D. R. Jesus Christ, Sun of God. — Quest Books, 1996. («Иисус Христос, Солнце Бога»)
Fleming W. Art, Music and Ideas. — Holt, 1970. («Искусство, музыка и идеи»)
Godwin J. Cosmic Music: Musical Keys to the Interpretation of Reality. — Rochester, Vermont: Inner Traditions International, 1989. («Космическая музыка»)
Godwin J. Harmonies of Heaven and Earth. — Rochester, Vermont: Inner Traditions International, 1995. («Гармонии небес и земли»)
Goold J., Benham C. E., Kerr R., Wilberforce L. R. Harmonic Vibrations and Vibration Figures. — London: Newton and Co., 1909. («Гармонические вибрации»)
Guthrie K. S, Fideler D. R. Pythagorean Source Book and Library. — Phanes Press, 1987. («Пифагорейские первоисточники»)
Hart G. Everythings polyhedrals. www.georgehart.com. («Все из полиэдров»)
Heath R. Sacred Number. — Rochester, Vermont: Inner Traditions International, 2007. («Священное число»)
Heath R. Sun, Moon and Earth. — Wooden Books / Walker & Co, 2006.
Heath R. The Matrix of Creation. — Rochester, Vermont: Inner Traditions International, 2004. («Матрица мироздания»)
Helmholtz H. On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music. — N. Y.: Dover Publications, 1954. («О восприятии звука как психологической основы теории музыки»)
Holden A. Shapes, Space and Symmetry. — N. Y.: Dover Publications, 1992. («Фигуры, пространство и симметрия»)
Ifrah G. The Universal History of Numbers. — London: Harvill Press, 1998. («Универсальная история чисел»)
James J. The Music of the Spheres. — N. Y.: Grove Press / Little Brown, 1993. («Музыка сфер»)
Jeans J. Science and Music. — University Press, 1937. («Наука и музыка»)
Jenny H. Cymatics: A Study of Wave Phenomena & Vibration. — Macromedia Press, 2001. («Киматика: Изучение волновых явлений и вибраций»)
Kanigel R. The Man Who Knew Infinity. — Abacus, 1992. («Человек, который знал вечность»)
Khan H. I. The Mysticism of Sound and Music. — Shambhala, 1996. («Мистицизм музыкального звука»)
Koestler A. The Sleepwalkers. — London: Pengiun, 1989. («Лунатики»)
Lawlor R. Sacred Geometry. — London: Thames & Hudson, 1982. («Сакральная геометрия»)
McClain E. The Myth of Invariance. — Shambhala, 1998. («Миф об инвариантности»)
Michell J. The Dimensions of Paradise. — Rochester, Vermont: Inner Traditions International, 2008. («Измерения рая»)
Michell J. The New View Over Atlantis. — London: Thames & Hudson, 1986. («Новый взгляд через Атлантику»)
Michell J., Brown A. How the World is Made. — London: Thames & Hudson, 2009. («Как устроен мир»)
Moore A. In Love with Venus. — Squeeze Press, 2009. («Влюбленная в Венеру»)
Murchie G. Music of the Spheres. — N. Y.: Dover Publications, 1961. («Музыка сфер»)
Neal J. All Done with Mirrors. — London: Secret Academy, 2000. («Все создано при помощи зеркал»)
Olsen S. The Golden Section. — Wooden Books / Walker & Co, 2006. («Золотое сечение»)
Playfair G. L., Hill S. Cycles of Heaven. — London: Souvenir Press, 1978. («Небесные циклы»)
Rees M. Just Six Numbers. — London: Phoenix, 2000. («Всего шесть чисел»)
Schneider M. A Beginner's Guide to Constructing the Universe: The Mathematical Archetypes Of Nature, Art and Science. — Harper Perennial / Avon, 1995. («Руководство для чайников по конструированию Вселенной»)
Schoenberg A. Fundamentals of Musical Composition. — London: Faber, 1973. («Основы музыкальной композиции»)
Schultz J. Movements and Rhythms of the Stars. — Edinburgh: Floris Books, 1986. («Движения и ритмы звезд»)
Stewart M. Patterns of Eternity: Sacred Geometry and the Starcut Diagram. — Edinburgh: Floris Books, 2009. («Узоры вечности»)
Stirling W. The Canon. — London: Elkin Matthews, 1897. («Канон»)
Strachan G. Jesus the Master Builder. — Edinburgh: Floris Books, 2000. («Иисус — мастер-строитель»)
Sutton D. Ruler and Compass. — Wooden Books / Walker & Co, 2009. («Линейка и компас»)
Wade D. Symmetry. — Wooden Books / Walker & Co, 2006. («Симметрия»)
Wenniger M. Dual Models. — Cambridge University Press, 2003. («Дуальные модели»)
Wenniger M. Polyhedron Models. — Cambridge University Press, 1974. («Модели полиэдров»)
Wenniger M. Spherical Models. — Cambridge University Press, 1979. («Сферические модели»)
и… www.woodenbooks.com.



С 15 **Сакральная** геометрия, нумерология, музыка, космология, или КВАДРИВИУМ : от Пифагора до наших дней / Джон Мартино, Миранда Ланди, Джейсон Мартино и др. ; [пер. с англ. М. С. Мкртычевой]. — Москва : Эксмо, 2015. — 416 с. : ил. — (Золотой фонд эзотерики).

Данное уникальное издание является одновременно иллюстрированным справочником, исследованием древних книг и произведений искусства, сборником научно-популярных статей и духовно-философских эссе. По широте и глубине охвата темы эта книга, созданная трудом интернационального коллектива авторов, не имеет себе равных среди изданных на русском языке за последние 100 лет.

Впервые принципы Квадривиума сформулировал древнегреческий мыслитель Пифагор Самосский в шестом столетии до Рождества Христова. Школа Пифагора была первой в Европе, где преподавались семь дисциплин, названные позднее семью свободными науками. Семь этих дисциплин являются необходимыми ступенями на пути к познанию Истины, Добра и Красоты, что, в свою очередь, ведет к пониманию изначального понятия Единства. Четыре из этих наук (Квадривиум), основанные на понятии о Числе: Нумерология (Арифметика), Геометрия, Музыка (Гармония), Космология, — представлены в книге. Квадривиум дает искреннему искателю проверенную временем и мудростью возможность обрести понимание мироустройства и осознать себя его неотъемлемой частью. Цель изучения свободных дисциплин — это возврат к Гармонии через упрощения, основанные на понимании каждой из областей Квадривиума. И наконец, цель изучения свободных искусств — в стремлении к первооснове, которой традиционно считается потребность человеческой души в познании.

Книга содержит более 2000 изображений, сгруппированных по тематическому принципу. Многие иллюстрации не публиковались более 150—200 лет, поскольку взяты из старинных книг, многие изображения специально созданы для данного издания с помощью научных компьютерных программ.

УДК 133.3
ББК 86.42

ISBN 978-5-699-73573-0

Издание для досуга

ЗОЛОТОЙ ФОНД ЭЗОТЕРИКИ

Джон Мартино, Миранда Ланди, Джейсон Мартино, Дауд Саттон, Энтони Эштон

САКРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, НУМЕРОЛОГИЯ, МУЗЫКА, КОСМОЛОГИЯ, или КВАДРИВИУМ
(орыс тілінде)

Директор редакции *Е. Капьёв.* Ответственный редактор *А. Серов*
Художественный редактор *В. Терещенко.* Научный редактор *Е. Сатарова*

В коллаже на обложке использованы фото: kidstudio852; ChristopherBrewer; tschitscherin; Photojope; cherezoff; bestdesigns; Robyn Mackenzie / iStock / Thinkstock / Fotobank.ru

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86, 8 (495) 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86, 8 (495) 956-39-21
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ
о техническом регулировании можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылмаған

Подписано в печать 22.12.2014. Формат 60x90$^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-73573-0
9 785699 735730 >

16+
Знак информационной продукции согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. N 436-ФЗ

Оптовая торговля книгами «Эксмо»:
ООО «ТД «Эксмо». 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное,
Белокаменное ш., д. 1, многоканальный тел. 411-50-74.
E-mail: **reception@eksmo-sale.ru**

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми
покупателями *обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»*
E-mail: **international@eksmo-sale.ru**
*International Sales: International wholesale customers should contact
Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.*
international@eksmo-sale.ru

По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном
оформлении, *обращаться по тел. +7 (495) 411-68-59, доб. 2261, 1257.*
E-mail: **ivanova.ey@eksmo.ru**

Оптовая торговля бумажно-беловыми и канцелярскими товарами для школы и офиса
«Канц-Эксмо»: Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2,
Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).
e-mail: **kanc@eksmo-sale.ru**, сайт: www.**kanc-eksmo.ru**

В Санкт-Петербурге: в магазине «Парк Культуры и Чтения БУКВОЕД», Невский пр-т, д.46.
Тел.: +7(812)601-0-601, www.bookvoed.ru/

Полный ассортимент книг издательства «Эксмо» для оптовых покупателей:
В Санкт-Петербурге: ООО СЗКО, пр-т Обуховской Обороны, д. 84Е. Тел. (812) 365-46-03/04.
В Нижнем Новгороде: Филиал ООО ТД «Эксмо» в г. Н. Новгороде, 603094, г. Нижний Новгород, ул.
Карпинского, д. 29, бизнес-парк «Грин Плаза». Тел. (831) 216-15-91 (92, 93, 94).
В Ростове-на-Дону: Филиал ООО «Издательство «Эксмо», пр. Стачки, 243А. Тел. (863) 305-09-13/14.
В Самаре: ООО «РДЦ-Самара», пр-т Кирова, д. 75/1, литера «Е». Тел. (846) 207-55-56.
В Екатеринбурге: Филиал ООО «Издательство «Эксмо» в г. Екатеринбурге, ул. Прибалтийская, д. 24а.
Тел. +7 (343) 272-72-01/02/03/04/05/06/07/08.
В Новосибирске: ООО «РДЦ-Новосибирск», Комбинатский пер., д. 3.
Тел. +7 (383) 289-91-42. E-mail: **eksmo-nsk@yandex.ru**
В Киеве: ООО «РДЦ Эксмо-Украина», Московский пр-т, д. 9. Тел./факс: (044) 500-88-23.
В Донецке: ул. Складская, 5В, оф. 107. Тел. +38 (032) 381-81-05/06.
В Харькове: ул. Гвардейцев Железнодорожников, д. 8. Тел. +38 (057) 724-11-56.
Во Львове: ТП ООО «Эксмо-Запад», ул. Бузкова, д. 2. Тел./факс (032) 245-01-71.
В Симферополе: ООО «Эксмо-Крым», ул. Киевская, д. 153. Тел./факс (0652) 22-90-03, 54-32-99.
В Казахстане: ТОО «РДЦ-Алматы», ул. Домбровского, д. 3а.
Тел./факс (727) 251-59-90/91. **rdc-almaty@mail.ru**
Интернет-магазин ООО «Издательство «Эксмо»
www.fiction.eksmo.ru
Розничная продажа книг с доставкой по всему миру.
Тел.: +7 (495) 745-89-14. E-mail: **imarket@eksmo-sale.ru**

ЗОЛОТОЙ ФОНД ЭЗОТЕРИКИ

В Квадривиум входят
следующие древние науки:
Нумерология (Арифметика),
Геометрия — или Число в Пространстве,
Музыка (Гармония) — Число во Времени,
Космология — Число во Времени и Пространстве.

Впервые принципы Квадривиума сформулировал Пифагор в шестом столетии до Рождества Христова. Эти принципы являются необходимыми ступенями на пути к познанию Истины, Добра и Красоты, что, в свою очередь, ведет к пониманию изначального понятия Единства.

эксмо

ISBN 978-5-699-73573-0

9 785699 735730 >