В.А. СМИРНОВ

ТЕОРИЯ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

РОССПЭН

1999

Сборник содержит основные труды выдающегося отечественного логика профессора В.А.Смирнова по теории логического вывода, в том числе основополагающую монографию «Формальный вывод и логические исчисления». Книга предназначена для логиков, философов и всех интересующихся проблемами логической науки.

Издание сборника осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-06-87071

ПРЕДИСЛОВИЕ*

В данном томе представлена подборка работ выдающегося отечественного логика профессора В.А.Смирнова по теории логического вывода с учетом их внутренней взаимосвязи и научной значимости. Центральное место здесь занимает монография В.А.Смирнова «Формальный вывод и логические исчисления». Во вводной статье А.С.Карпенко «Некоторые логические идеи В.А.Смирнова» и в подготовленных комментариях к тому проведен сравнительный анализ идей и результатов профессора Смирнова в области теории логического вывода с трудами представителей других научных школ, уточняется смысл ряда утверждений, устраняются отдельные неточности. Обращается внимание на поставленные им проблемы, обсуждается роль новаторских идей В.А.Смирнова в развитии логики. Показано в частности, что впервые в мировой литературе В.А.Смирнов создал логики без правил сокращения и рассмотрел методы доказательства разрешимости подобных логик. Впоследствии логики без сокращений стали активно разрабатываться отечественными и зарубежными учеными. Для решения задач поиска вывода важное значение имели построенные В.А.Смирновым эпсилон-исчисления. Им же впервые было начато изучение вопросов классификации логических систем.

Переиздание основных трудов В.А.Смирнова по теории логического вывода, несомненно, привлечет внимание специалистов в области логики и смежных дисциплин, будет способствовать дальнейшему развитию логической науки, для которой так много сделал Владимир Александрович.

---

* Подбор работ В.А.Смирнова по теории логического вывода, их анализ и комментарии к ним подготовлены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97–06–80360.

НЕКОТОРЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ИДЕИ В. А. СМИРНОВА

Не умаляя вклада Владимира Александровича Смирнова в методологию и философию науки[1], хочу подчеркнуть, что в первую очередь В.А.Смирнов был логиком, причем логиком высочайшего класса. К тому же, что весьма редко встречается в логическом мире, он оставался *работающим* логиком до конца своей жизни. Последнее означает, что он постоянно интересовался новейшими достижениями в области современной символической логики и, самое главное, стремился получать новые технические результаты в избранных им областях.

Совершенно не вдаваясь здесь в логическую технику, я постараюсь передать атмосферу некоторых идей В.А.Смирнова, обозначив, в первую очередь, то место, которое эти идеи занимают в современном логическом мире.

В центре своего исследования я положу только три работы В.А.Смирнова:

(I). Логические взгляды Н.А.Васильева // Очерки по истории логики в России. М., 1962. С.242-257;

(II). Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972;

(III). Логические методы анализа научного знания. М., 1987.

Основные идеи этих трех работ, расходясь концентрическими кругами и накладываясь друг на друга, должны ввести нас в логический универсум В.А.Смирнова, который во многом предугадал некоторые тенденции развития современной логики.

I

О русском логике Н.А.Васильеве (1880-1940) писали и ранее[2], но этой работе В.А.Смирнова повезло более, чем какой-либо другой, по той простой причине, что на неё появилась обстоятельная рецензия на английском языке и не где-нибудь, а в главном международном журнале по логике[3].

Идеи о возможности конструирования неаристотелевских логик появились в начале нашего века в работе Л.Брауэра[4] о недостоверности

---

[1] См.: *Анисов А.М.* Концепция научной философии В.А.Смирнова // Философия науки. Вып. 2. ИФРАН. М., 1977. С. 5-27.

[2] См. предисловие и библиографию в сб.: *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избр. труды (ред. В.А.Смирнов). М.1989.

[3] См.: *Comey D.D.* Review of V.A.Smirnov 1962 // The Journal of Symbolic Logic. 1965. Vol. 30. P.368-370.

[4] См.: *Brouwer L.E.J.* De onbetrouwbaarheid der logische principles // Tijdschrift voor wijsbegeertre. 1908. Vol. 2. P. 152-158. (Англ. перевод: The unreliability of

закона исключенного третьего и одновременно в 1910 г. в работах Я.Лукасевича[5] и Н.А.Васильева[6], которые независимо друг от друга пришли к выводу, что пересмотр основных законов аристотелевской логики (и в особенности таких, как закон непротиворечия: *одно и то же суждение не может быть и истинным и ложным*, и закон исключенного третьего: *из двух противоречащих суждений, либо первое, либо второе должно быть истинным*) приводит к построению неаристотелевской логики, при этом оба ссылались на пример построения неэвклидовой геометрии. Но идеи Н.А.Васильева[7] были богаче и гораздо шире, и именно на их глубину обратил внимание в своей статье В.А.Смирнов.

Рецензию на указанную статью В.А.Смирнова сразу заметили уже в монографии Н.Решера[8] по многозначной логике, где Н.А.Васильев был назван, с одной стороны, одним из предшественников многозначных логик, а с другой - становится одним из предшественников паранепротиворечивой логики[9] (в таких логиках из А и отрицания А не всегда следует произвольное высказывание В). На следующем Международном Конгрессе приглашенным докладчиком о Н.А.Васильеве был уже В.А.Смирнов[10]. Наконец, в 1989 г.

---

the logical principles // Brouwer L.E.I. Collected works. Vol. I (ed. A.Heyting). Amsterdam, 1975. P. 107-111.)

[5] См.: *Łukasiewicz J.* Über den Satz des Widerspruchs bei Aristoteles // Bull. Intern. Acad. Sci. Cracov. Classe de Philosophie. 1910. P.15-38. (Англ. перевод в: Review of Metaphysics. 1971. Vol. 24).

[6] См.: *Васильев Н.А.* О частных суждениях, о треугольнике противоположностей и законе исключенного четвертого // Ученые Зап. Казанского ун-та. Год 77. 1910, октябрь. Кн. 10. С.1-47. (Переиздано: Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избр. труды (ред. В.А.Смирнов). М., 1989. С.12-53.)

[7] См. также: *Васильев Н.А.* Воображаемая (неаристотелева) логика // Журнал м-ва нар. Просвещения (Н.С.). 1912, август .Ч. 40. С.207-246; *Васильев Н.А.* Логика и металогика // Логос. 1912-1913, № 1-2. С.53-81. (Переиздано в: *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избр. труды (ред. В.А.Смирнов). М., 1989.)

[8] *Rescher N.* Many-valued logic. N.Y., 1969.

[9] См. приглашенный доклад А.Арруды: *Arruda A.I.* N.A.Vasil'ev: A forerunner of paraconsistent logic // VII-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Salsburg, 1983. Section 6. P.14-17. См. также: *Arruda A.I.* N.A.Vasil'ev: A forerunner of paraconsistent logic // Philosophia Naturalis. 1984. Vol. 21. P.472-491.

[10] *Smirnov V.A.* Logical ideas of N.A.Vasiliev and modern logic // Abstracts of 8-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Moscow, 1987. Vol. 5. P. 86-89. См. также: *Smirnov V.A.* The logical ideas of N.Vasiliev and modern logic // Logic, Methodology and Philosophy of Science. Amsterdam, 1989. P.625-640.

В.А.Смирнов подготавливает и издает не раз упоминаемые нами избранные труды Н.А.Васильева с обширным приложением, где также публикуется его статья о Н.А.Васильеве[11].

Логические взгляды Н.А.Васильева оказали большое влияние на В.А.Смирнова, и до конца своих дней он разрабатывал их в различных направлениях. Так возникла идея *комбинированных логик*, где вводятся операции над событиями, они играют роль внутренних логических знаков, в то время как обычные логические знаки играют роль внешних логических знаков, и эта часть логики является абстрактной логикой. С точки зрения В.А.Смирнова, возможен двоякий подход к неклассическим логикам. Либо абстрактная часть логики (логика истинности) не варьируется, а внутренняя, онтологическая часть, может быть отлична от классической (например, за счёт изменения онтологических предпосылок), либо онтологическая часть остается прежней, а меняется абстрактная часть (пересматриваются гносеологические предпосылки). Возможна комбинация этих двух подходов, когда неклассичность появляется за счёт пересмотра как онтологических, так и гносеологических предпосылок[12]. Вообще, стоит заметить, что идея разделения в одной и той же системе логических операций на внутренние (язык-объект) и внешние (метаязык) является весьма плодотворной и возникала независимым образом у разных логиков. Особенно здесь стоит выделить работу Д.А.Бочвара[13], где строится первая трехзначная логика бессмысленности для разрешения некоторых теоретико-множественных парадоксов. В свою очередь, идеи Д.А.Бочвара были развиты В.К.Финном и его учениками, что привело к оригинальным и эффективным методам аксиоматизации различных

[11] *Смирнов В.А.* Логические идеи Н.А.Васильева и современная логика // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избр. труды М., 1989. С.229-259.

[12] См.: *Smirnov V.A.* Assertion and predication. Combined calculus of propositions and situations // Abstracts of 8-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Moscow, 1987. Vol. 1. P.333-335; *Смирнов В.А.* Утверждение и предикация. Комбинированные исчисления высказываний и событий // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989. С.27-35; *Смирнов В.А.* Комбинирование исчислений предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989. С.16-29.

[13] *Бочвар Д. А.* Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. 1938. Т. 4. Вып. 2. С. 287-308. (Англ. перевод в: History and Philosophy of Logic. 1981. Vol. 2.)

классов конечнозначных предикатных логик[14]. Однако подход В.А.Смирнова отличался всё-таки необычайной широтой.

Другая идея В.А.Смирнова, а именно идея *многомерных логик*, восходит к предложенному Н.А.Васильевым подразделению логических законов на два уровня: внешний и внутренний, абстрактный и эмпирический. Первый уровень зависит от гносеологических установок, он не варьируется – это логика лжи и истины. На этом уровне верен закон непротиворечия и закон исключенного третьего. Второй уровень зависит от онтологических допущений о познаваемом мире, при этом в «одномерном» мире опыт даёт только позитивные атомарные утверждения, а отрицательные утверждения не атомарны, они являются результатом вывода. Двумерный случай В.А.Смирнов рассматривает на примере дважды алгебр Брауэра[15]. Первоначально В.А.Смирнов предложил аксиоматику N-мерных логик в форме силлогистики[16]. Позднее им было предложено построение логики N-измерений в виде алгебры классов[17], предполагая в дальнейшем сравнить её с N-мерными логиками в форме силлогистики.

Основная идея многомерных логик состоит в том, что опыт даёт нам атомарные утверждения "многих типов", а отсюда мы приходим к идее "многомерных" миров. В этих мирах имеет место своя логика. Можно предположить, что В.А.Смирнов подошел к идее обобщения логической семантики так называемых "возможных миров", или "точек соотнесения". Частные интересные случаи стали уже появляться в современной литературе. Например, у А.Н.Прайора[18] в каждом возможном мире имеет место трехзначная логика Лукасевича, и этим определяется се-

---

[14] См., напр., *Аншаков О. М., Рычков С. В.* Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Семиотика и информатика. 1984. Вып. 23. С. 78-106.

[15] *Смирнов В.А* Дважды алгебры и симметрические логики // Логические исследования. Вып. 1. М., 1993. С.46-54.

[16] *Смирнов В.А.* Аксиоматизация логических систем Н.А.Васильева // Современная логика и методология науки. М., 1987. С.143-151; *Смирнов В.А.* Логические идеи Н.А.Васильева и современная логика // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избр. труды М., 1989. С.229-259.

[17] *Smirnov V.A.* Multidimensional logics // Abstracts of the IX International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Uppsala, 1991. P.168; *Смирнов В.А.* Многомерные логики // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С.259-278.

[18] *Prior A.N.* Tense logic for non-permanent existence // Prior A. N. Papers on time and tense. Oxford, 1968. P. 145-160.

мантика для "логики случайного бытия". Р.Раутли[19] предложил семантику для релевантных и паранепротиворечивых логик, где в каждом возможном мире действует не алгебра Буля, а алгебра де Моргана; а В.Л.Васюков[20] вводит тернарное отношение на мирах, которые структурализованы специального вида *MV*-алгебрами Чэна, и таким образом строится точная модель для бесконечнозначной логики Лукасевича, и т.д.

К сожалению, В.А.Смирнов не успел осуществить свои разнообразные идеи относительно многомерных логик.

II

Книга В.А.Смирнова "Формальный вывод и логические исчисления", по которой он защитил докторскую диссертацию, исключительно богата совершенно новыми идеями и определенно является его наивысшим интеллектуальным взлетом. Идеи, высказанные и разработанные в этой книге, во многом опередили своё время и, что важно, интенсивно развиваются сейчас в мировой логической литературе. Я отмечу только две темы, заслуживающие особого внимания в связи с современным развитием логики. Сразу хочу подчеркнуть, что эта книга не только не была переведена на английский язык, но на неё не была сделана даже рецензия в каком-либо международном журнале; поэтому эта блестящая работа В.А.Смирнова осталась неизвестной для зарубежного читателя.

В этой книге впервые в мировой литературе было положено начало исследованиям логических систем без правила сокращения (гл. 5)[21]. Правило сокращения позволяет освобождаться от повторений одной и той же формулы, и это свойство логической системы оказывается связанным с проблемой разрешения самого исчисления, т.е. логики естественно заинтересованы в том, чтобы для каждой правильно построенной формулы данного исчисления можно было решить вопрос, является ли эта формула теоремой или нет.

В.А.Смирнов строит такое секвенциальное исчисление, результат расширения которого за счет добавления двух структурных правил сокращения (слева и справа) является секвенциальным вариантом класси-

[19] *Routley R.* American plan completed: alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics // Studia Logica. 1984. Vol. 43, N 1-2. P. 131-158.

[20] *Vasyukov V. L.* The completeness of the factor semantics for the Łukasiewicz's infinite-valued logics // Studia Logica. 1993. Vol. 52. P. 143-167.

[21] Если уж быть совсем точным, то первая работа на эту тему была опубликована годом раньше: *Smirnov V.A.* On decidability of decision problem for sequential calculus of predicates without contractions // IV-th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Bucharest, 1971.

ческой логики предикатов. Доказано, что пропозициональная часть этого исчисления совпадает с пропозициональной частью классической логики и что проблема разрешения для неё разрешима. Также получены другие результаты относительно данного исчисления.

Ради справедливости стоит сказать, что в 1972 г. независимо от В.А.Смирнова появляются краткие тезисы В.Н.Гришина[22], который заинтересовался работами о применении многозначных логик Лукасевича (заметим, что трехзначная логика Лукасевича является исторически первой логикой, в которой закон сокращения не имеет места) к теории множеств. Как раз работы В.Н.Гришина[23] стали доступными для зарубежных специалистов и привлекли к себе внимание.

В 1985 г. выходит обстоятельная работа японских ученых[24] о логиках без сокращений, после чего появляется уже целый ряд чисто логических работ в этой области[25], а затем - знаменитая работа Дж.Жирара[26], которая обозначила целое направление в применении логик без сокращений в компьютерных науках. Однако нигде в зарубежных работах ссылок на исходные идеи В.А.Смирнова нет.

Другая идея В.А.Смирнова, высказанная и получившая развитие в этой книге, является, по моему мнению его главным творческим достижением. Начнем с того, что В.А.Смирновым построена предикатная логическая система, названная им *абсолютной*; она лежит в основе целой иерархии логических систем. Абсолютная система является системой релевантной логики[27], а её импликативный фрагмент совпадает со "сла-

---

[22]*Гришин В.Н.* Об одной нестандартной логике и её применении к теории множеств // Вторая Всесоюзная конференция по математической логике (Тезисы кратких сообщений). М., 1972.

[23] См.: *Гришин В.Н.* Об одной нестандартной логике и её применении к теории множеств // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М., 1974. С.135-171; *Гришин В.Н.* Об алгебраической семантике логики без сокращений // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М., 1976. С.247-264.

[24] *Ono H., Komori Y.* Logics without the contraction rule // The Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. P. 169-201.

[25] См. в особенности: *Kiriyama E., Ono H.* The contraction rule and decision problems for logics without structural rules // Studia Logica. 1991. Vol. 50. N 2. P. 299-319.

[26] *Girard J.Y.* Linear logic // Theoretical computer science. 1987. Vol. 50. P. 1-102.

[27] См.: *Долгова Т.Н., Попов В.М.* Проблемы релевантной логики в работе В.А.Смирнова «Формальный вывод и логические исчисления» // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 79-93.

бой позитивной импликацией" Чёрча[28]. Таким образом, независимо от А.Чёрча был открыт импликативный фрагмент релевантной логики *R*. (В своё время В.А.Смирнов рассказывал автору этих строк, что когда он был в аспирантуре, для того, чтобы получить в читальном зале иностранную литературу, нужно было иметь *специальное* разрешение на это. Неудивительно, что большинство западных научных работ было вне досягаемости.)

Начиная с конца 80-х годов появляется целый ряд работ, где строятся различные иерархии логических систем[29]. Здесь в качестве исходной логической системы берется полное (full) исчисление синтаксических категорий Ламбека[30]. Но главная цель В.А.Смирнова – построить *классификацию логических исчислений*. В книге дается классификация сингулярных секвенциальных исчислений, в основе которой, в свою очередь, лежит классификация правил введения и удаления логических знаков слева и справа. Этот подход к классификации я бы назвал *внешним.* Предлагается еще один подход, *внутренний*, где за основу берется логическая связка импликации "если…, то…", что весьма естественно для логических исчислений, и тогда ставится вопрос о классификации импликативных логик, т.е. таких логик, в которых единственным логическим знаком является импликация. При этом подходе четко выделены два способа классификации:

1) так как формальные выводы различаются по своей структуре, то соответственно этому теорема дедукции принимает различный вид. Последнее позволяет классифицировать импликативные логики в зависимости от того, какая формулировка теоремы дедукции имеет место;

2) в основу классификации можно положить структурные правила в зависимости от соответствия между этими правилами и импликативными формулами.

---

[28] *Church A.* The weak theory of implication // Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkul und der Logik der Einzelwissenschaften. Munich, 1951. P. 22-37. (Abstract: The weak positive implicational propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic. 1951. Vol. 16, N 3. P. 238).

[29] См.: *Došen K.* Sequent-systems and groupoid models. I // Studia Logica. 1988. Vol. 47. N 4. P. 353-385; *Došen K.* Sequent-systems and groupoid models. II // Ibid. Vol. 48. N 1. P. 41-65; *Wansing H.* Formulas-as-types for a hierarchy of sublogics of intuitionistic propositional logic. Bericht N 9. (Preprint). 1990; и в особенности: *Ono H.* Structural rules and a logical hierarchy // Mathematical logic. N.Y., 1990. P. 95-104.

[30] *Lambek J.* The mathematics of sentence structure // American Mathematical Monthly. 1958. Vol. 65. P. 154-170. (Рус. перевод: Математическое исследование структуры предложений // Математическая лингвистика. М., 1964. С. 47-68).

Тема классификации импликативных логик была развита В.А.Смирновым в ещё одной работе[31], где обращено внимание на ту серьезную проблему, что оба способа классификации не охватывают классической логики. В первом случае, теорема дедукции, которая имеет место для интуиционистской логики, имеет место также и для классической, и поэтому не различает первую от второй. Во втором случае, нет такого структурного правила, которое отвечало бы за переход от интуиционистской импликации к классической. В гильбертовских исчислениях такой переход обычно осуществляется за счет добавления закона Пирса, но структурного правила, соответствующего этому закону, не существует.

К классификации импликативных логик можно подойти с совершенно иной стороны, используя свойства базисных (исходных) *комбинаторов* **I, B, C, W, K** и **S**, впервые введенных М.Шейнфинкелем[32], а затем Х.Карри[33]. Оказалось, что между комбинаторами и импликативными формулами существует однозначное соответствие. В силу указанного соответствия (оно еще называется *изоморфизмом Карри-Ховарда*), можно классифицировать импликативные логики посредством комбинаторов, и наоборот[34].

Однако эта классификация, как и классификация В.А.Смирнова, не охватывает классической импликативной логики, поскольку нет такого комбинатора, который соответствовал бы закону Пирса, и вообще, любой неинтуиционистской импликативной формуле. Поэтому в указанной работе конструируется весьма сложным образом такой “комбинатор” **P**, который соответствовал бы закону Пирса.

Итак, перед нами стоит следующая исходная проблема (назовем её *проблемой В.А.Смирнова*): найти единое основание для классификации импликативных логик, которая включала бы и классическую импликацию.

Решение данной проблемы предложено автором данной статьи[35] и основано на классификации *независимых* аксиоматик импликативных

---

[31] *Смирнов В.А.* Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М., 1979. С. 54-68.

[32] *Schönfinkel M.* Über die Bausteine der Mathematihschen Logik // Mathematischen Annalen, 1924. Bd. 92. S. 305-316. (Англ. перевод: From Frege to Gödel: a source - book in mathematical logic. Cambridge, 1967. P. 355-366.)

[33] *Curry H. B., Feys R.* Combinatory Logic. Vol. 1. Amsterdam, 1958.

[34] *Gabbay D.V., de Queiroz R. J. G. B.* Extending the Curry-Howard interpretation to linear, relevant and other resource logics // The Journal of Symbolic Logic.1992. Vol. 57. N 4. P. 1319-1365.

[35] См.: *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С.224-258; *Karpenko A.S.* Construction of classical propositional logic // Bulletin of the Section of Logic. 1993.

логик посредством конечных булевых решеток. В результате получаем картину взаимоотношений между различными неклассическими логиками, обнаруживаются естественные пути расширений исчислений до самой классической логики, ставятся и решаются многие другие вопросы.

Конечно, в каком-то *всеобъемлющем* виде классифицировать логики невозможно, уж слишком разнообразен мир логики и по своей сути даже континуален. Но построение различных иерархий родственных логических систем и классификация определенных классов исчислений привлекает и будет привлекать всё большее внимание специалистов.

III

Следующая книга В.А.Смирнова «Логические методы анализа научного знания» оказалась многострадальной. Вышла она с большим опазданием, и предшествовала этому напряженная борьба (конец 70-х – первая половина 80 годов.), которая шла в секторе логики Института философии РАН. И хотя лидерство В.А.Смирнова как логика было бесспорным, но тогдашняя дирекция Института поддержала противоборствующую сторону.

Из этой книги я выделю опять же только две темы, а именно результаты в области модально-временных логик и тему сравнения теорий. В книге (гл.5, §2) подводится как бы итог работы по модально-временным логикам. Первая статья была опубликована а 1978 г.[36], и одновременно и независимо (как это часто бывает в истории науки) начинает появляться целый ряд работ по этой же теме Дж.Бёрджеса[37]. Исходные идеи о логиках с модально-временными операторами как единых логических операций (типа "возможно будет, что…") впервые были высказаны А.Н.Прайором[38]. Им же в связи с этим были введены временные структуры с линейным временем в прошлое и ветвящимся в будущее.

А.Н.Прайор исходил из чисто философской проблематики, и именно уже в указанной работе В.А.Смирнова было предложено весьма оригинальное решение знаменитой аристотелевской проблемы о морском сражении[39] посредством введения метрических модально-временных

Vol. 22. N 3. P. 92-97; *Карпенко А.С.* Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 107-133.

[36] *В.А.Смирнов*. Логики с модальными временными операторами // Модальные и интенсиональные логики (Тезисы координационного совещания). М., 1978. С.145-148.

[37] *Burgess J.P.* The unreal future // Theoria. 1978. Vol. 44, part 3. P.157-179.

[38] См., в особенности: *Prior A.N.* Past, present and future. Oxford, 1967.

[39] Подробно о фаталистическом аргументе Аристотеля и логических реконструкциях этого аргумента, которые привели также и к появлению

операторов[40]. При таком подходе введение промежуточного истинностного значения, как это было сделано Я.Лукасевичем, не требуется.

Ещё одна важная идея, высказанная здесь В.А.Смирновым, состоит в новом понимании *сопряженности* между прошлым и будущим. В обычных временных логиках между прошлым и будущим существует зеркальная симметрия, или, как предложил А.Н.Прайор[41], операторы будущего времени могут быть трехзначными, и на этом пути опровергаются некоторые фаталистические утверждения. В.А.Смирнов[42] предлагает принять принцип, согласно которому *то, что реализовалось, было возможным в прошлом , но не обязательно в сколь угодно далеком прошлом*. Естественно, сразу же возникают вопросы о погружении известных модальных логик в новые временные системы, на решение которых всегда обращал внимание В.А.Смирнов.

Исследования по модально-временным логикам в дальнейшем стали приобретать всё более технический характер, поскольку требовалось решать проблемы о полноте и разрешимости логических систем, моделями которых являются древовидные структуры[43]. Однако вклад В.А.Смирнова в философскую логику несомненен.

Значительное место в данной книге занимает тема сравнения различных теорий и, в первую очередь, аксиоматических теорий. По существу этой проблематикой В.А.Смирнов интересовался весь свой зрелый период научной деятельности. На самом деле эта тема является продолжением исследований по *определимости*, в частности, определимости дескриптивных терминов. Результаты, полученные здесь, были доложены им (совместно с В.Н.Садовским) на V Международном Конгрессе по

модально-временных логик, см.: *Карпенко А.С.* Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М., 1990.

[40] См. также: *Смирнов В.А.* Логические системы с модальными временными операторами // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984. С. 49-58.

[41] *Prior A.N.* The syntax of time distinctions // Franciscan Studies. 1958. Vol. 18. N 2. P.105-120.

[42] См.: *Smirnov V.A.* Tense logics with nonstandard interconnections between past and future // VII-th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science. Salsburg, 1983. Section 5 and 12. P. 164-168.

[43] Начиная с 1985 г., появляется целая серия работ А.Занардо. См.: *Zanardo A*. A finite axiomatization of the set of strongly valid Ockhamist formulas // Journal of Philosophical Logic. 1985. Vol. 14. N 4. P.447-468; Branching-time logic with quantification over branches. The point of view of modal logic // The Journal of Symbolic Logic. 1996. Vol. 61. N 1. P. 1-39; см. также: *Gurevich Y., Shelah S.* The decision problem for branching-time logic // The Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. N 3. P.668-681.

логике, методологии и философии науки в 1975 г.[44]

Логическим отношениям между теориями посвящено несколько работ [45], и чтобы показать ту красоту результатов, которые могут быть здесь получены, я приведу весьма впечатляющий пример из области сравнения алгебраических теорий.

Известно, что теория групп первоначально возникла как теория конечных групп подстановок (C.Jordan, 1970). Однако очень скоро было осознано, что операция подстановки здесь не при чем, а главное – изучение свойств бинарной операции без предположения конечности множества элементов и без каких-либо предположений о природе элементов группы. Такой подход впервые оформился в самостоятельную область математики в 1916 г. с выходом книги О.Ю.Шмидта «Абстрактная теория групп».

В это же время начинает оформляться трехзначная логика Лукасевича как результат "борьбы за освобождение человеческого духа"[46]. В 1929 г. эта логика обобщается на бесконечнозначый случай[47], а в середине века происходит алгебраизация бесконечнозначной логики Лукасевича в виде *MV*-алгебр Чэна[48], т.е., как и в случае с теорией групп, происходит полное абстрагирование от природы элементов. В это же время сама теория групп обогащается решеточным порядком и начинает бурно развиваться как самостоятельный раздел математики в виде теории решеточно-упорядоченных групп[49].

Наконец, в 1986 г. выходит фундаментальная работа М.Мундичи [50], где доказывается эквивалентность целого ряда алгебраических теорий, возникших на совершенно различных основаниях и в разное время, с *MV*-алгеб-

---

[44] См.: *Sadovski V.N., Smirnov V.A.* Definability and indentifiability: certain problems and hypotheses // Basic problems in Methodology and linguistics. Dordrecht-Boston, 1977. P. 63-80.

[45] См.: *Smirnov V.A.* Logical relation between theories // Synthese. Dordrecht. 1986. Vol. 66. N 1. P.71-87.

[46] *Łukasiewicz J.* Farewell lecture by proffessor Jan Łukasiewicz, delivered in the Warsaw University Lecture Hall on March 7, 1918 // Łukasiewicz J. Selected works. Warszawa, 1970. P. 84-86.

[47] См.: *Łukasiewicz J., Tarski A.* Untersuchungen über den Aussagenkalkül // Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe III. 1930. Vol. 23. P. 1-21. (Англ. перевод: Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J. Selected works. Warszawa, 1970. P. 131-152).

[48] *Chang C. C.* Algebraic analysis of many-valued logics // Transactions of the American Mathematical Society. 1958. Vol. 88. P. 467-490.

[49] См.: *Копытов В. М.* Решеточно-упорядоченные группы. М., 1984.

[50] *Mundici M.* Interpretation of AFC*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus // Journal of Functional Analysis. 1986. Vol. 65. P. 15-63.

рами Чэна; в том числе доказывается эквивалентность решеточно-упорядоченных групп (со строгой единицей) с *MV*-алгебрами [51].

Имеются и другие интересные примеры эквивалентности различных и весьма несхожих теорий, но все эти примеры носят частный характер. В.А.Смирнов подходит к проблеме сравнения теорий гораздо шире, а именно разрабатывает *саму теорию* сравнения теорий. Он формулирует понятие несущественного расширения теории, переводимого расширения и анализирует с их помощью логические отношения между теориями, сформулированными в разных языках и на базе различных логик. Он рассматривает целый спектр различных типов отношений между теориями – погружающие операции, вложимость одной теории в другую, рекурсивную эквивалентность, относительную эквивалентность – и доказывает ряд теорем, описывающих их свойства. В дальнейшем В.А.Смирнов неоднократно использовал разработанные им методы в своих исследованиях взаимоотношения различных теорий. Одним из последних его результатов является доказательство эквивалентности онтологии Лесневского и оккамовской силлогистики[52].

Конечно, не все идеи В.А.Смирнова здесь рассмотрены[53], а только те, как говорилось вначале, которые представляют особый интерес в современном мире логики. Что-то, может быть, было и пропущено, но возьму на себя смелость сказать, проработав с В.А.Смирновым без малого четверть века (вначале в качестве его студента, затем аспиранта, и всё остальное время в одном секторе), что основная заслуга моего Учителя в логике не только в его результатах, но и в том, что им была создана удивительная атмосфера содружества логиков в нашей стране и за ее пределами. В этой атмосфере можно было работать, обмениваться идеями на многочисленных конференциях и получать новые результаты.

Многочисленные его ученики рассеялись по белу свету и с благодарностью вспоминают и рассказывают о Владимире Александровиче Смирнове. А придет ещё время личных воспоминаний его учеников, и тогда откроются поразительные черты его характера не только как логика, но и как *личности*.

А. С. Карпенко

---

[51] См. также: *Nola A. D., Lettieri A.* Perfect *MV*-algebras are categorilly equivalent to Abelian l groups // Studia Logica. 1994. Vol. 53. N 2.

[52] *Смирнов В.А.* Дефинициальная эквивалентность элементарной онтологии и обобщенной силлогистики оккамовского типа // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С.17-31; *Smirnov V.A.* Definitional equivalence of elementary ontology and generalized syllogistic of occamian type // Preprint 93-03. Institute for Logic, Cognitive Science and Development of Personality. M., 1993. P.1-17.

[53] См. аналитический обзор «Результыты В.А.Смирнова в области современной формальной логики» (под общей редакцией А.С.Карпенко) // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 40-69.

ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД И ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Техника натурального вывода и методы инференциального анализа благодаря своей простоте, близости к естественному рассуждению находят все более широкое распространение. Однако в литературе не всегда достаточно четко и верно подчеркивается различие между системами натурального вывода и другими способами формализации. Мы будем различать следующие типы формализмов: (1) системы гильбертовского типа; (2) системы натурального вывода, построенные методом субординатного вывода; (3) системы натурального вывода в секвенциальной форме и (4) логистические секвенциальные исчисления.

В свою очередь каждый из этих типов подразделяется на два вида: обычные исчисления и ε-исчисления, вообще говоря не эквивалентные друг другу.

В книге будет показано, что системы натурального вывода отличаются от систем гильбертовского типа особым понятием вывода. В них формальные выводы сопоставляются не только прямым рассуждениям, как это имеет место в системах гильбертовского типа, но и непрямым, косвенным способам рассуждения.

От принимаемого понятия вывода зависит не только тип формализации. В ряде случаев различие между логическими системами можно свести к различиям в структуре вывода.

В секвенциальных исчислениях эти различия выявляются в структурных фигурах заключения. Такой подход, как нам представляется, дает некоторую естественную классификацию логических систем. Помимо классической, интуиционистской и минимальной систем в книге рассматривается система, которую мы назвали абсолютной. В абсолютной системе (так же как и в сильной) нет так называемых парадоксов материальной импликации. Однако независимо от возможностей хорошей интерпретации абсолютной системы ее изучение представляет интерес, так как она лежит в основе целой иерархии логических систем.

При изложении абсолютной системы (гл. 6) мы пошли на некоторые повторения, так чтобы эта глава могла читаться самостоятельно. В книге показывается, что методы натурального вывода с ε-термами применимы и к неклассическим системам, включая интуиционистскую. Главы первая и четвертая носят обзорный характер.

Результаты, изложенные в книге, докладывались на конгрессах, симпозиумах и семинарах: на III и IV Международных конгрессах по логике, методологии и философии науки, на конференциях по математической логике в Алма-Ате и Иванове, на V конференции по логике и методологии науки (Одесса), на симпозиуме по логическим исчислениям в Устроние (Польша), на семинаре сектора логики Института философии АН СССР. Я признателен всем коллегам за сделанные замечания и стимулирующие обсуждения. Я глубоко благодарен О.Ф.Серебрянникову, Ю. Ш. Гуревичу, Г. Э. Минцу и С. В. Попову за просмотр некоторых разделов рукописи и за сделанные замечания, а также за обсуждение ряда вопросов.

Я признателен Л. С. Савельевой, А. М. Фединой, В.Б. Родосу за большую помощь в подготовке рукописи к печати.

Глава первая

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ И ЕЕ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА

§ 1. ЯЗЫК ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Словарь языка логики предикатов первого порядка состоит из

1) конечного или потенциально-бесконечного перечня знаков, являющихся индивидными константами; в качестве индивидных констант будем употреблять малые буквы начала латинского алфавита ***a*, *Ь*, *c*** с индексами или без них;

2) потенциально-бесконечного перечня свободных индивидных переменных; в качестве свободных индивидных переменных будем употреблять буквы ***w*, *v*, *u*** – с индексами или без них;

3) потенциально-бесконечного перечня связанных индивидных переменных; в качестве связанных индивидных переменных будем употреблять буквы ***x*, *y*, *z*** – с индексами или без них;

4) потенциально-бесконечных перечней k-местных предикатных переменных ($k \geq 0$); в качестве k-местных предикатных переменных будем использовать буквы ***P*, *R*, *Q*** с верхними и нижними индексами или без них (верхний индекс показывает число мест предикатной переменной, если число мест предикатной переменной усматривается из контекста, то верхние индексы будут опускаться);

5) конечных или потенциально-бесконечных перечней k-местных предикатных констант (для $k > 0$);

6) пропозициональных связок: $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$;

7) кванторов: $\forall$ и $\exists$;

8) знаков пунктуации:), (.

Нульместные предикатные переменные будем называть пропозициональными переменными.

В метаязыковых контекстах в качестве имен выражений мы будем использовать сами эти выражения, т. е. мы допускаем автонимное употребление выражений.

Для того чтобы говорить о произвольных последовательностях знаков из словаря языка, будем использовать синтаксические переменные α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, **...**

В качестве синтаксических переменных, пробегающих по символам определенного типа, будем использовать соответственно те же знаки, но набранные не полужирным шрифтом, а курсивом. Так, синтаксические переменные a, b, c, a_1, b_1, c_1,… пробегают по индивидным константам ***a*, *b*, *c*, *a*₁, *b*₁, *c*₁,…**; область значения синтаксических переменных w, v, u,

$w_1, v_1, u_1, \ldots$– индивидные свободные переменные $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1, \ldots$', синтаксических переменных $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$– индивидные связанные переменные $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1$, ••.> синтаксических переменных $P^k, R^k, Q^k, P_1^k, R_1^k, Q_1^k, \ldots$– $\boldsymbol{P}^k, \boldsymbol{R}^k, \boldsymbol{Q}^k, \boldsymbol{P}_1^k, \boldsymbol{R}_1^k, \boldsymbol{Q}_1^k$

Определим, что мы будем понимать под индивидным термом и квазитермом.

Индивидные константы и индивидные свободные переменные будем называть индивидными термами.

Индивидные константы, свободные и связанные индивидные переменные суть квазитермы.

Если к словарю добавляются функциональные знаки или операторы дескрипции, то термины «терм» и «квазитерм» соответствующим образом переопределяются.

В качестве синтаксических переменных, пробегающих по квазитермам, будем использовать букву t с индексами или без них.

Элементарная квазиформула есть результат сочленения k-местного предикатного знака (т.е. k-местной предикатной константы или k -местной предикатной переменной) с k-кой квазитермов. Результат сочленения k-местного предикатного знака P^k *с* k-кой квазитермов $t_1, \ldots, t_k$ будем записывать посредством выражения $P^k\ t_1, \ldots, t_k$; иногда в виде $P^k(t_1, \ldots, t_k)$.

Предикат «быть квазиформулой» введем следующим индуктивным определением:

Если α – элементарная квазиформула, то α есть квазиформула.

Если α — квазиформула, то $\neg(\alpha)$ – квазиформула.

Если α и β – квазиформулы, то $(\alpha)\ \&\ (\beta)$, $(\alpha) \supset (\beta)$, $(\alpha) \vee (\beta)$ – квазиформулы.

Если α – квазиформула, x — связанная индивидная переменная, то $\forall x(\alpha)$ и $\exists x(\alpha)$ – квазиформулы.

Ничто другое не есть квазиформула.

В качестве синтаксических переменных, пробегающих по квазиформулам, будем употреблять буквы A, B, C, D, E с индексами или без них. Если надо принять во внимание вхождения некоторых термов или квазитермов в формулу, то будем писать $A(t_1, \ldots, t_k)$ или $A\ t_1, \ldots, t_k$ [1].

При записи квазиформул будем придерживаться следующих правил экономии скобок:

а) элементарную формулу в скобки не брать;

б) принимая по соглашению, что $\forall x$, $\exists x$; и $\neg$ связывают сильнее, чем &, & сильнее $\vee$, $\vee$ сильнее $\supset$, будем опускать скобки в подформуле,

[1] Если мы имеем запись *At,* то это еще не значит, что терм t входит в формулу *At.*

главный знак которой связывает сильнее, чем главный знак всего выражения.

Так вместо $((\exists x(Ax))\ \&\ (B)) \supset (\exists y((Ay) \vee (B)))$ пишем согласно соглашению $\exists xAx\ \&\ B \supset \exists y(Ay \vee B)$.

Определим, что означает, что квазиформула A входит в квазиформулу B.

Если A графически равна B, то A входит в B**.**

Если B графически равна $\forall x(C)$, $\exists x(C)$, $\neg\ (C)$ и A входит в C, то A входит в B.

Если B графически равна $(C) \supset (D)$, $(C)\&(D)$, $(C) \vee (D)$ и A входит в C или A входит в D, то A входит в B.

Будем говорить, что фиксированное вхождение связанной переменной в данную квазиформулу A является связанным вхождением, если элементарная квазиформула с этим фиксированным вхождением x входят в квазиформулу вида $\exists x(B)$ или $\forall x(B)$ и эта формула сама входит в A; в противном случае фиксированное вхождение связанной переменной x будем называть свободным вхождением связанной переменной x.

Заметим, что всякое вхождение свободной переменной свободно.

Квазиформулу, не содержащую ни одного свободного вхождения связанной переменной, будем называть формулой.

Определим операцию подстановки вместо каждого свободного вхождения фиксированной связанной переменной свободной переменной или константы.

Пусть x есть связанная индивидная переменная, t есть терм (т. е. свободная индивидная переменная или константа), A – квазиформула, $\mathrm{F}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{x}}$ – операция подстановки.

1. Если A имеет вид $Rt_1. . . .t_k$, то $\mathbf{F}_t^x A$ есть результат замещения каждого вхождения t_{i}, графически равного x, на терм t.

2. Если A есть $\neg B$, то $\mathbf{F}_t^x A$ есть $\neg(\mathbf{F}_t^x B)$.

3. Если A есть $(B)\ \&\ (C)$, $(B) \vee (C)$, $(B) \supset (C)$, то $\mathbf{F}_t^x A$ есть соответственно $(\mathbf{F}_t^x B)\&(\mathbf{F}_t^x C)$, $(\mathbf{F}_t^x B)\vee(\mathbf{F}_t^x C)$, $(\mathbf{F}_t^x B)\supset(\mathbf{F}_t^x C)$.

4. Если A есть $\forall xB$ или $\exists xB$, то $\mathbf{F}_t^x A$ есть соответственно $\forall xB$ и $\exists xB$.

5. Если A есть $\forall yB$ или $\exists yB$ и x отлично от y, то $\mathbf{F}_t^x A$ есть соответственно $\forall y(\mathbf{F}_t^x B)$ или $\exists y(\mathbf{F}_t^x B)$.

Аналогично определим подстановку вместо каждого вхождения некоторой свободной переменной квазитерма.

Подстановка вместо свободной переменной w квазитерма t правильна, если ни одно вхождение w не находится в области действия квантора по переменной, имеющей свободное вхождение в t. Более точно:

1. Всякая подстановка вместо вхождений свободной переменной в элементарную квазиформулу некоторого квазитерма правильна.

2. Если $\mathbf{F}_t^w$ есть правильная подстановка для B, то $\mathbf{F}_t^w$ есть правильная подстановка для $\neg B$.

3. Если $\mathbf{F}_t^w$ есть правильная подстановка для B и C, то она является правильной подстановкой для $B\&C$, $B \vee C$, $B \supset C$.

4. Если $\mathbf{F}_t^w$ является правильной подстановкой для B их не входит свободно в t (в нашем случае x отличен от t), то $\mathbf{F}_t^w$ есть правильная подстановка для $\forall xB$ и $\exists xB$.

Если A есть квазиформула, в которую свободно входит только связанная переменная x, то очевидно, что $\forall x(A)$, $\exists x(A)$ и $\mathbf{F}_v^x(A)$ есть формулы.

Формулу, не имеющую вхождений свободных переменных (как индивидных, так и предикатных) будем называть предложением.

Язык исчисления предикатов с пустым перечнем индивидных констант и пустыми перечнями предикатных констант будем называть языком чистого исчисления предикатов; язык исчисления предикатов, содержащий по крайней мере одну индивидную или предикатную константу – языком прикладного исчисления предикатов.

§ 2. СЕМАНТИКА КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть $\mathfrak{R}$ – некоторое непустое множество объектов достаточно большой мощности. Всякое непустое $\boldsymbol{R}$, являющееся подмножеством $\mathfrak{R}$, будем называть индивидной областью. Одноместный предикат будет отождествляться с подмножеством $\boldsymbol{R}$, k-местный предикат с подмножеством $\boldsymbol{R^k}$, где $\boldsymbol{R^k}$ есть множество всех k-ток из $\boldsymbol{R}$.

Если фиксировано $\boldsymbol{R}$, то будем считать что фиксировано и множество всех его подмножеств, множество всех подмножеств множества $\boldsymbol{R^k}$ для любого k.

Область изменения свободных индивидных переменных есть $\boldsymbol{R}$, k-местных предикатных переменных – множество всех подмножеств $\boldsymbol{R^k}$.

Под полумоделью языка $\mathbf{L}$ будем иметь в виду индивидную область $\boldsymbol{R}$ вместе с функцией $\mathbf{T}$, приписывающей каждой индивидной константе определенный объект из $\boldsymbol{R}$ и каждой предикатной константе P^k —

объект из множества подмножеств $\boldsymbol{R}^k$. Функцию **T** будем называть интерпретацией, а упорядоченную пару <***R*****, T**>– полумоделью L и обозначать буквой **M**.

Пусть A есть формула, $[A]$ – полный список всех свободных переменных [2], входящих в A. Пусть f есть набор значений списка переменных $[A]$, т. е. $f = \varphi([A])$, где φ есть функция, сопоставляющая каждой свободной переменной некоторое значение из соответствующей области (для индивидных переменных из $\boldsymbol{R}$, для k-местных предикатных переменных из $2^{\mathrm{R}^{\mathrm{k}}}$).

Будем говорить, что φ_2 есть расширение φ_1, если φ_1 определена на $[A]$, а φ_2 на $[B]$, $[A]$ есть подсписок $[B]$ и при этом φ_2 приписывает каждому элементу из $[A]$ тот же объект, что и φ_1.

Вместо того, чтобы писать, что «$f([A])$ выполняет формулу A в **M**», будем просто писать «f выполняет формулу A в **M**».

Определим теперь основное семантическое понятие «f выполняет формулу A в полумодели **M**».

1. f выполняет элементарную формулу $A = P^k t_1, \ldots t_k$ в $\mathbf{M} = <\boldsymbol{R}\mathbf{T}>$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t_1)\ldots\ \varphi(t_k) \in \varphi(P^k)$, где $\varphi(P^k)$ есть $\mathbf{T}(P^k)$, если P^k константа, и $f(P^k)$ – если P^k переменная и $\varphi(t_\mathrm{i})$ есть $\mathbf{T}(t_\mathrm{i})$ – если t_i константа, и $\varphi(t_\mathrm{i})$ есть $f(t_\mathrm{i})$ – если t_i, переменная.

2. f выполняет формулу $\neg A$ в **M** тогда и только тогда, когда f не выполняет формулу A в **M**.

3. f выполняет формулу A & B в **M** тогда и только тогда, когда f выполняет A в **M** и f выполняет A в **M**.

4. f выполняет формулу $A \vee B$ в **M** тогда и только тогда, когда f выполняет A в **M** или f выполняет B в **M**.

5. f выполняет формулу $A \supset B$ в **M** тогда и только тогда, когда f выполняет B в **M** или когда f не выполняет A в **M**.

6. f выполняет формулу $\forall xA$ в **M** тогда и только тогда, когда w не входит в $[A]$ и всякая функция q, определенная на $[A] \cup \{w\}$ и являющаяся расширением f, выполняет $F^x_w A$ в **M**.

7. f выполняет формулу $\exists xA$ в **M** тогда и только тогда, когда w не входит в $[A]$ и существует функция q**,** определенная на $[A, w]$ и являющаяся расширением f, такая, что q выполняет A в **M**.

Кратко обозначим предикат «f выполняет формулу A в **M**» посредством Вып (f, A, **M**).

[2] Все предикатные переменные являются свободными.

Будем говорить, что формула A общезначима в **M**, если всякая функция f, приписывающая значения свободным переменным формулы A, выполняет A в **M**. Символически:

Общ (A, **M**) $=_{Df}$ $\forall f$ Вып (f, A, **M**)

Здесь и в дальнейшем $\forall f$ есть квантор метаязыка, равным образом как и предикаты «Вып», «Общ» и т. д.

A универсально общезначима тогда и только тогда, когда A общезначима в каждой полумодели.

Символически:

Общ (A) $=_{Df}$ $\forall$**M** Общ (A, **M**)

Для предиката универсальной общезначимости мы не вводим нового обозначения, так как от общезначимости универсальная общезначимость отличается числом мест.

Если A предложение, т. е. A не содержит вхождений свободных переменных, то A истинно в **M** тогда и только тогда, когда A общезначима в **M**.

Введем семантические отношения логического следования в **M**– сокращенно ЛС(A, B, **M**) и следования в **M**–сокращенно С (A, B, **M**).

Из A логически следует в **M** формула B тогда и только тогда, когда всякий набор значений f свободных переменных формул A и B, выполняющий A в **M**, выполняет и B в **M**.

Символически:

ЛС(A, B, **M**) $=_{Df}$ $\forall f$ (Вып (f, A, **M**) $\supset$ Вып (f, B, **M**))

Из A следует в **M** формула B тогда и только тогда, когда при условии, что A общезначима в **M**, B также общезначима в **M**.

Символически:

С (A, B, **M**) $=_{Df}$ $\forall f$ Вып (f, A, **M**) $\supset$ $\forall f$ Вып (f, B, **M**)

Эти два семантических предиката могут быть переопределены так, чтобы вместо A рассматривать множество формул Г. Тогда

ЛС (Г, B, **M**) $=_{Df}$ $\forall f$ ($\forall A$ ($A \in$ Г $\supset$ Вып (f, A, **M**)) $\supset$ Вып (f, B, **M**))

С (Г, B, **M**) $=_{Df}$ $\forall f$ $\forall A$ ($A \in$ Г $\supset$ Вып (f, A, **M**)) $\supset$ $\forall f$ Вып (f, B, **M**)

Введем теперь три семантических отношения, которые связаны с интуитивным понятием логического следования [3].

Из Г логически следует B тогда и только тогда, когда для каждой полумодели **M** из Г логически следует B.

Символически:

[3] См. статью Е. Д. Смирновой [36]. Излагаемую классификацию мы заимствуем из этой работы. Кванторы по полумоделям, наборам значений, равно как и логические связки, в приводимых определениях, естественно, принадлежат метаязыку.

ЛС(Γ, B) $=_{Df}$ $\forall$МЛС(Γ, B, **M**)

Из Γ следует B тогда и только тогда, когда для каждого **M** из Γ следует B в **M**. Символически:

С (Γ, B) $=_{Df}$ $\forall$МС(Γ, B, **M**)

Наконец, введем еще одно семантическое отношение, которое назовем следованием относительно общезначимости (дедуктивным следованием).

Из Γ *следует относительно универсальной общезначимости* B тогда и только тогда, когда при условии, что универсально общезначима каждая из посылок Γ, B также универсально общезначима. Символически:

ОС (Γ, B) $=_{Df}$ $\forall A$ ($A \in$ Γ $\supset$ Общ (A)) $\supset$ Общ (B)

Из введенных определений легко усмотреть, что самым сильным отношением является отношение логического следования, а самым слабым - дедуктивное следование, т.е.

ЛС(Γ, B) $\supset$С(Γ, B) и С (Γ, B) $\supset$ ОС (Γ, B)

Так из $\{A, A \supset B\}$ логически следует B, и тем самым следует и дедуктивно следует.

Пусть терм w не входит в квазиформулу A_x, тогда из $F^x_w\, A_x$ логически не следует $\forall\, xAx$, но из $F^x_w\, A_x$ следует $\forall xAx$.

Из $F^x_a\, A_x$, где a – индивидная константа и a не входит в Ax, не следует $\forall xAx$ (и тем самым логически не следует), но из $F^x_a\, A_x$ дедуктивно следует $\forall xAx$.

Какое из трех семантических отношений соответствует интуитивному отношению логического следования?

Обычно мы говорим, что из посылок логически следует заключение, если при истинности посылок гарантирована истинность заключения. Поэтому кажется, что уточнением интуитивного понятия логического следования является отношение С (Γ, A). Это так, при условии, что свободные переменные в посылках берутся в интерпретации всеобщности, т. е. формула, содержащая свободные переменные, рассматривается как относящаяся ко всем значениям свободных переменных.

Однако в процедуры рассуждения могут входить не только утверждения, но и, например, уравнения, где свободные переменные не рассматриваются в интерпретации всеобщности. Если мы хотим охватить и эти случаи. то интуитивному понятию логического следования соответствует первое понятие ЛС (Γ, A), почему мы и назвали его отношением логического следования.

Можно обобщить рассмотренные выше семантические отношения, рассматривая их не как отношения между формулой и формулой или множеством формул и формулой, а как отношения между множествами формул.

ЛС (Г, Δ) $=_{Df}$ ∀**M**∀*f* [∀*A* (*A* ∈ Г ⊃ Вып (*f*, *A*, **M**)) ⊃ ∃*B* (*B* ∈ Δ & Вып (*f*, *B*, **M**))]

С (Г, Δ) $=_{Df}$ ∀**M** [∀*A* (*A* ∈ Г ⊃ ∀*f* Вып (*f*, *A*, **M**)) ⊃ ∃*B* (*B* ∈ Δ & ∀*f* Вып (*f*, *B*, **M**))]

ОС (Г, Δ) $=_{Df}$ ∀*A* (*A* ∈ Г ⊃ ∀**M**∀*f* *B*ып (*f*, *A*, **M**)) ⊃ ∃*B* (*B* ∈ Δ & ∀**M**∀*f* Вып (*f*, *B*, **M**))

Пусть Γ° есть конъюнкция всех формул из Г, Δ^{+}– дизъюнкция всех формул из Δ. Легко видеть, что ЛС(Г, Δ) тогда и только тогда, когда ЛС(Γ°, Δ^{+}); С(Г, Δ) тогда и только тогда, когда С(Γ°, Δ^{+}); ОС(Г, Δ) тогда и только тогда, когда ОС(Γ°, Δ^{+}).

Если речь идет о чистом исчислении предикатов, то **M** есть просто индивидная область *R*. И все введенные понятия могут быть переформулированы в терминах областей.

Легко доказать теорему: *Из A логически следует B тогда и только тогда, когда формула A ⊃ B общезначима; из* Г *логически следует* Δ *тогда и только тогда, когда формула* $\Gamma^{\circ} \supset \Delta^{+}$ *общезначима.*

*А*налогично отношениям логического следования, следования и следования относительно общезначимости вводятся отношения логической эквивалентности двух формул, отношение эквивалентности относительно общезначимости в данной области (модели) и отношение эквивалентности относительно (универсальной) общезначимости.

ЛЭ(*A*, *B*) $=_{Df}$ ∀**M**∀*f* (Вып (*f*, *A*, **M**) ~ Вып(*f*, *B*, **M**))

Э(*A*, *B*) $=_{Df}$ ∀**M** (∀*f* Вып (*f*, *A*, **M**) ~ ∀*f* Вып (*f*, *B*, **M**))

ОЭ(*A*, *B*) $=_{Df}$ ∀**M**∀*f* Вып (*f*, *A*, **M**) ~ ∀**M**∀*f* Вып (*f*, *B*, **M**)

Как и ранее, кванторы, а также ~ (эквиваленция) есть знаки метаязыка.

§ 3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ И АКСИОМАТИЗАЦИЯ

В предыдущем параграфе были определены для логики предикатов первого порядка такие семантические свойства, как общезначимость, логическое следование, следование, следование относительно общезначимости.

Возникает вопрос о возможности аксиоматизации и формализации этих свойств и отношений. Термины «аксиоматизация» и «формализация» стали столь употребительны и модны, что возникает опасность непонимания. Поэтому охарактеризуем, в каком смысле мы будем употреблять эти термины.

Под аксиоматизацией некоторого свойства или отношения *P,* заданного над конструктивно порожденной областью ***R***, мы будем иметь в виду нахождение рекурсивно-перечислимого предиката *Q,* заданного на той же области и эквивалентного *P*.

Так, класс общезначимых формул логики высказываний может быть аксиоматизирован., Искомым предикатом, осуществляющим эту аксиоматизацию, может быть предикат «доказуема», вводимый следующим нефундаментальным индуктивным определением над классом формул[4]:

$p \supset (q \supset p)$	есть доказуемая формула
$(p\supset(q\supset r))\supset(p\supset q)\supset(p\supset r))$	- “ -
$p\&q\supset p$	- “ -
$p\&q \supset q$	- “ -
$p\supset(g\supset p\&g)$	- “ -
$p \supset p\vee q$	- “ -
$q \supset p \vee q$	- “ -
$(p\supset r)\supset(((q\supset r)\supset(p\vee q\supset r))$	- “ -
$(p\supset q)\supset((p\supset\neg q)\supset\neg p)$	- “ -
¬¬p⊃p	- “ -

Если *A* и *B* доказуемые формулы и *B* имеет вид $A \supset E$*,* то формула *E* доказуема.

Если *A* доказуемая формула, *p* — пропозициональная переменная, то $F_B^p A$ доказуемая формула.

Известно, что определенный выше класс доказуемых формул совпадает с классом общезначимых формул логики высказываний [5]

*А*налогично может быть аксиоматизировано понятие логического следования для логики высказываний. Например, отношение «из Г выводимо *E*» может быть введено с помощью индуктивного определения следующим образом:

Из *A* & *B* выводимо *A*

Из *A* & *B* выводимо *B*

Из *A* и *B* выводимо *A* & *B*

Из *A* выводимо $A \vee B$

Из *B* выводимо $A \vee B$

Из $\neg\neg A$ выводимо *A*

Из *A* и $A \supset B$ выводимо *B*

---

[4] *p, q,* г... суть пропозициональные переменные, *A, B, E*— произвольные формулы логики высказываний.

[5] Мы не описываем аксиоматизацию класса доказуемых формул логики предикатов, чтобы не осложнять обсуждение вопросов аксиоматизации и формализации.

Если из Γ выводимо E, то из Γ, A выводимо E

Если из Γ, C, D, Δ выводимо E, то из Γ, D, C, Δ выводимо E

Если из Γ, C, C выводимо E, то из Γ, C выводимо E

Если из Γ выводимо C и из C, Δ выводимо E, то из Γ, Δ выводимо E

Если из Γ, A выводимо E, то из Γ выводимо $A \supset E$

Если из Γ, A выводимо E и из Γ, B выводимо E, то из Γ, $A \vee B$ выводимо E

Если из Γ, E выводимо B и из Γ, E выводимо $\neg B$, то из Γ выводимо $\neg E$.

Может быть показано, что из Γ выводимо E тогда и только тогда, когда из Γ логически следует E.

При построении рекурсивно-перечислимых (индуктивных) предикатов «доказуемая формула» и «из Γ выводимо E» мы пользуемся только синтаксическими предикатами. Поэтому аксиоматизацию в этом смысле можно называть синтаксической аксиоматизацией.

От введенного выше понятия аксиоматизации следует отличать семантическую аксиоматизацию. Множество формул Γ будем называть семантически замкнутым, если всякая формула, логически следующая из Γ, принадлежит Γ. Под семантической аксиоматизацией семантически замкнутого множества формул Γ будем иметь в виду нахождение такого множества формул Δ, что $\Delta \subseteq \Gamma$ и каждая формула, принадлежащая Γ, логически следует из Δ.

Если Δ конечно, то теорию – семантически замкнутое множество формул – Γ называют конечно-аксиоматизируемой.

Если Γ конечно-аксиоматизируема и отношение логического следования синтаксически аксиоматизируемо, то Γ также синтаксически аксиоматизируема.

Особый интерес представляют теории, сформулированные на языке логики предикатов первого порядка. Теории, сформулированные на языке логики предикатов первого порядка, называют элементарными, если они семантически аксиоматизируемы посредством Δ, где Δ конечно или рекурсивно-перечислимо. Согласно результату Геделя отношение логического следования логики предикатов первого порядка синтаксически аксиоматизируемо, поэтому элементарные теории синтаксически аксиоматизируемы.

Под формализацией в собственном смысле некоторого предиката P, заданного над конструктивно-порожденной областью $\boldsymbol{R}$, будем иметь в виду нахождение рекурсивного предиката Q (разрешимого относительно $\boldsymbol{R}$) такого, что Q эквивалентно P. Для логики исключительную важность представляет процесс формализации рассуждения. Под рассуждением имеется в виду процесс дедуцирования из посылок заключения. Формализовать рассуждение – это значит сопоставить ему некоторый объект, называемый формальным выводом. При этом предикат «быть формальным выводом» должен быть эффективным (рекурсивным) и при его определении используются только синтаксические понятия.

Чтобы внести стройность в терминологию, мы будем употреблять различные термины для семантических понятий и их синтаксических коррелатов. Так, «общезначимая формула», «логическое следование», «непосредственно следует из» и т. д.– семантические понятия, а «доказуемая формула», «выводимо», «непосредственно выводимо» и т.д. их синтаксические коррелаты. Формальное доказательство употребляется как частный случай формального вывода, это формальный вывод из пустого множества посылок.

Мы исходим из убеждения, что не только понятие формального вывода, но и понятие формулы (предложения) должно быть эффективным.

В настоящее время во многих работах по структурной лингвистике, особенно в работах Н. Хомского, выдвигается программа построения грамматик для естественных языков, в которых понятие предложения было бы рекурсивно-перечислимым.

Так, в работе Н. Хомского и М. П. Шютценбержа «Алгебраическая теория контекстно свободных языков» [38; 195] мы читаем: «Под языком мы будем понимать просто множество цепочек, состоящих из символов, принадлежащих некоторому конечному множеству **U**, называемому словарем языка; под грамматикой множество правил, которые рекурсивно перечисляют цепочки, принадлежащие языку». Из этой цитаты видно что к понятию предложения предъявляются требования, чтобы оно было рекурсивно-перечислимым, но не обязательно рекурсивным.

Требование, чтобы понятия формулы и формального вывода (доказательства) были бы эффективными, признается подавляющим большинством логиков. Поскольку предполагается, что носитель языка отличает предложение от непредложения, то естественно потребовать, чтобы уточнение понятия предложения было эффективным. Я думаю, что это более естественная для лингвиста точка зрения. И. И. Ревзин в своей работе «Метод моделирования и типология славянских языков» пишет: «Соответствующие свойства, как правило, распознаются носителями языка. Поэтому пока большинство исследователей как будто склоняется к гипотезе о том, что человек владеет общим алгоритмом проверки таких свойств. Этот вопрос требует еще изучения. Строя модели, мы будем во всяком случае стремиться к тому, чтобы формализируемые **в них** свойства соответствовали разрешимым множествам»[6] [29; 50].

Иногда говорят не только о формализации процесса рассуждения, но и о формализации свойства общезначимости, или о формализации отношения логического следования. Если под формализацией иметь в виду формализацию в собственном смысле, то уже отношение логического следования логики предикатов первого порядка не может быть формализовано (но процесс рассуждения может).

Введем понятие формализации в несобственном смысле. Под формализацией п-местного предиката P в несобственном смысле будем иметь в виду нахождение n + 1-местного рекурсивного предиката Q, такого, что P выразим в форме $\exists yQ(y)$. Тогда свойство общезначимости логики предикатов первого порядка формализуемо в несобственном смысле, так как можно построить исчисление предикатов с эффективным понятием доказательства, такое, что формула общезначима тогда и только тогда, когда существует формальное доказательство этой формулы. Аналогично формализуемо в несобственном смысле и свойство логического следования. *В* дальнейшем под формализацией мы, как правило, будем иметь в виду формализацию в несобственном смысле.

Синтаксическая аксиоматизация и формализация в несобственном смысле приводят к одному и тому же результату: к выработке рекурсивно-перечислимого предиката. Это ясно в силу теоремы: «Предикат P (x) рекурсивно-перечислим тогда и только тогда, когда он выразим в форме $\exists yR$ (x, y) с общерекурсивным R» [Клини, 272].

Однако процедура введения предиката $\exists yR(x, y)$ *с* рекурсивным R и введение рекурсивно-перечислимого предиката $P(x)$ различны.

Можно ли говорить о формализации теории и в каком смысле? Формализовать теорию **T** (семантически замкнутое множество формул) это значит найти исчисление C с эффективным понятием формального доказательства (или формального вывода), такое, что всякая формула, для которой существует доказательство в C, будет общезначима во всех моделях **T**, и наоборот.

В этой связи надо обратить внимание на понятие исчисления. Отождествлять ли исчисление с индуктивными предикатами, или с рекурсивными? Другими словами, считать ли исчисление заданным, если задана некоторая область конструктивно порожденных объектов, заданы некоторые исходные (взятые из указанной области) объекты и задана

[6] Однако двумя страницами ниже автор по существу отказывается от декларируемой программы. «Есть основания предполагать, что таково, например, понятие «предложения», которое, по-видимому, можно определить лишь индуктивно» [29; 52].

система эффективных функций (каждая из этих функций перерабатывает *k*-ку объектов в определенный объект). Это понятие исчисления соответствует индуктивному определению. Или же считать исчисление заданным, если (1) введена некоторая область конструктивно порожденных объектов, (2) над этой областью определена система эффективных функций, (3) конструктивно определены системы объектов, (4) наконец, определено понятие формального доказательства (вывода, деривата), разрешимого относительно области систем объектов. Это представление об исчислении соответствует рекурсивному предикату.

Мы будем придерживаться последнего понимания исчисления. Исчисления, специально приспособленные для формализации в них теорий, будем называть логистическими системами, которые являются как бы двухэтажными. С помощью первого исчисления вводится эффективное понятие формулы, а с помощью второго, надстраиваемого над первым, – эффективное понятие формального доказательства (или формального вывода).

§ 4. ЛОГИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА С ПОНЯТИЕМ ФОРМАЛЬНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. ФОРМАЛИЗАЦИЯ СВОЙСТВА УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ

Возникает вопрос, возможна ли полная формализация (в несобственном смысле) свойства универсальной общезначимости классической логики предикатов. Другими словами, возможно ли построить над формулами логики предикатов такое исчисление, чтобы каждая формула, доказуемая в этом исчислении, была универсально общезначимой, и, наоборот, всякая универсально общезначимая формула была бы доказуема в этом исчислении. На этот вопрос имеется положительный ответ.

Логистическая система гильбертовского типа с понятием формального доказательства задана, если указаны:

1) конечный список формул, называемых аксиомами,

2) конечный список правил вывода,

3) что является формальным доказательством.

Под формальным доказательством в системах гильбертовского типа имеется в виду конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или непосредственно выводима (т. е. получена поодному из правил вывода) из предшествующих в этой последовательности формул.

Формула А доказуема, если существует такое доказательство, что А является его последней формулой.

Прежде всего заметим, что если всякая аксиома логической системы универсально общезначима, каждое правило вывода этой системы воспроизводит отношение дедуктивного следования, то последняя формула формального доказательства также будет универсально общезначимой.

Эта теорема легко доказывается индукцией по длине формального доказательства.

При некоторых формализациях аксиом может не быть вовсе, но даны правила вывода из пустого множества посылок, так называемые схемы аксиом.

Полной формализацией свойства универсальной общезначимости классической логики предикатов будет логистическая система с понятием формального доказательства и следующими схемами аксиом (правил вывода из пустого множества посылок) и правилами вывода (из непустого множества посылок). Схемы аксиом:

1. $A \supset A$
2. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)$
3. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)$
4. $(A \supset (A \supset C)) \supset (A \supset C)$
5. $(A \& B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)$
6. $((A \supset B) \supset A) \supset A$
7. $A \& B \supset A$
8. $A \& B \supset B$
9. $(C \supset A) \& (C \supset B) \supset (C \supset A \& B)$
10. $A \supset A \vee B$
11. $B \supset A \vee B$
12. $(A \supset C) \& (B \supset 0 \supset (A \vee B \supset C)$
13. $(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$
14. $A \& \neg A \supset B$
15. $\forall x F_x^w A \supset F_t^w A$
16. $F_t^w A \supset \exists x F_x^w A$
17. $\forall x F_x^w (C \supset A) \supset (C \supset \forall x F_x^w A)$
18. $\forall x F_x^w (A \supset C) \supset (\exists x F_x^w A \supset C)$

В схемах 17и18 формула C не содержит переменной w. Правила вывода:

$$\frac{A A \supset B}{B}$$ m.p. – modus ponens

$$\frac{A}{\forall x F_x^w A}$$ O – правило обобщения

Подстановка везде правильна.

В дальнейшем мы будем выписывать индивидные переменные и термы, от которых зависит формула. Так, вместо $\forall xA$ будем писать $\forall xAx$. Отметим, что запись Aw или Ax еще не означает, что w и x обязательно входят в Aw и Ax; Aw и Ax включают и пустые вхождения w и x в Aw и Ax.

Правило обобщения мы будем использовать в виде $\dfrac{Aw}{\forall x\ Ax}$ имея в виду два условия: (1) w не обязательно входит в Aw и (2) $\forall xAx$ есть сокращенная запись $\forall xF_x^w Aw$, где F_x^w есть правильная подстановка.

Легко показать, что всякая формула, являющаяся аксиомой, т. е. имеющая вид (1) – (18), общезначима. Правила вывода воспроизводят отношение следования относительно общезначимости. Тем самым каждая доказуемая формула будет, общезначима.

Верно и обратное, т. е. всякая универсально-общезначимая формула логики предикатов первого порядка доказуема в сформулированной выше логистической системе.

Последнее предложение представляет известную теорему Геделя о полноте исчисления предикатов первого порядка.

Сформулированная выше логистическая система несущественно отличается от общепризнанных. Выбор обусловлен тем, что от этой системы (будем называть ее НС – классической системой гильбертовского типа) легко перейти к интуиционистской, минимальной и другим неклассическим системам.

Отбросив схему 6, мы получим интуиционистское исчисление предикатов. Далее, отбросив от интуиционистского исчисления схему аксиом 14, мы получим минимальное исчисление. Наконец, отбросив от минимального схему аксиом 5 и добавив правило $\dfrac{A\ B}{A\&\ B}$, получим логическую систему, которую мы будем называть абсолютным исчислением предикатов.

В случае классической, интуиционистской и минимальной систем (но не абсолютной) вместо аксиом 17 и 18 и правила обобщения можно принять два правила Бернайса

$$\frac{C \supset Aw}{C \supset \forall xF_x^w Aw} \quad \text{и} \quad \frac{Aw \supset C}{\forall xF_x^w Aw \supset C},$$

где формула C не содержит свободной переменной w.

§ 5. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА ОТНОШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Нельзя ли рассматривать сформулированную выше логистическую систему, если в ней понятие доказательства заменить на понятие формального вывода, как формализацию сформулированных выше отношений следования?

Под формальным выводом из посылок (допущений) Г будем иметь в виду последовательность формул, каждая из которых есть аксиома, или одна из посылок Г, или непосредственно выводима по одному из правил вывода из предшествующих формул.

Будем говорить, что из посылок Г выводима формула A (сокращенно: $\Gamma|\!-A$) тогда и только тогда, когда существует вывод из посылок Г, последней формулой которого является формула A.

Может быть доказано, что если из Г выводима A, каждая аксиома универсально общезначима (общезначима в данной области), каждое правило вывода воспроизводит[7] отношение логического следования, то из Г логически следует формула A.

Аналогичные утверждения верны, если мы заменим «логически следует» на «следует».

Тем самым логистическая система с понятием вывода и с аксиоматикой, сформулированной в § 4, является формализацией отношения следования и следования относительно общезначимости.

Но как обстоит дело с отношением логического следования?

Не является ли исчисление, построенное на основе схем аксиом (1) – (18), modus ponens, правила обобщения и со сформулированным выше понятием формального вывода, формализацией логического следования? На этот вопрос мы отвечаем отрицательно, так как схемы аксиом (1) – (18), modus ponens воспроизводят отношение логического следования, но правило обобщения не воспроизводит.

Действительно, формулу Pww выполняет в области $\boldsymbol{R}$i = {1,2}, например, следующий набор значений ее свободных переменных $\begin{matrix} Pw \\ \psi 1 \end{matrix}$, где

функция ψ определена следующей таблицей

	ψ

[7] Мы говорим, что правило вывода $\dfrac{A_1 \ldots A_k}{B}$ воспроизводит отношение логического следования, если из $A_1, \ldots, A_k$ логически следует B. Аналогично для следования и следования относительно общезначимости.

11	и
12	л
21	л
22	л

Но этот же набор значений не выполняет формулу $\forall xPxx$, так как ψ выполняет $\forall xPxx$ в $\mathbf{R}_{\mathrm{i}}$, тогда и только тогда, когда $\psi 1$ выполняет Pww в $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}$, и $\psi 2$ выполняет Pww в $\mathbf{R}_{\mathrm{i}}$. Однако $\psi 2$ не выполняет Pww.

Аналогично можно показать, что и правила Бернайса не воспроизводят отношение логического следования. Как поступить в этом случае?

Нельзя ли найти такое конечное множество аксиом и конечное множество правил вывода, воспроизводящих отношение логического следования, чтобы исчисление, построенное на них (при обычных правилах построения вывода), полностью формализовало бы отношение логического следования?

На этот вопрос мы не знаем ответа, ни положительного, ни отрицательного.

Но можно пойти и по другому пути. Схемы аксиом и правила вывода оставить прежними, но наложить некоторые ограничения на применимость правила обобщения.

Будем говорить, что вхождение формулы C в вывод формулы B из посылок $A_1, \ldots, A_{\mathrm{n}}$ (с данным анализом) зависит от посылки A_{i}, если 1) C есть A_{i} (т. е. посылка зависит от самой себя) или 2) C непосредственно следует из формул D и E (или из одной формулы D) и D или E зависят от A_{i}.

Например, в выводе

1. $A \supset (B \supset C)$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$
3. $B \supset (A \supset C)$
4. $A \supset B$
5. $(A \supset B) \supset ((B \supset (A \supset C)) \supset (A \supset (A \supset C)))$
6. $(B \supset (A \supset C)) \supset (A \supset (A \supset C))$
7. $A \supset (A \supset C)$
8. $(\mathrm{A} \supset (A \supset C)) \supset (A \supset C)$
9. $A \supset C$

От посылки $A \supset (A \supset C)$ зависят формулы, стоящие на 1, 3, 7 и 9 местах, а от посылки $A \supset B$ – на 4, 6, 7 и 9.

Теорема 1: *Если существует вывод формулы A из посылок* Γ *и по отношению к формулам, зависящим от посылок, не применяется правило обобщения* (*более общо — правила вывода, не воспроизводящие отношения логического следования*), *то из* Γ *логически следует A.*

Доказательство легко осуществляется индукцией по длине вывода; однако у нас эта метатеорема будет следствием другой метатеоремы. Легко видеть, что подобная формализация будет полной. Предположим, что уже доказано, что всякая универсально общезначимая формула доказуема (теорема Геделя). Доказательство есть вывод из пустого множества посылок и в нем тривиально не применяется правило обобщения к формулам, зависящим от посылок (так как посылок нет). Из Г логически следует A тогда и только тогда, когда $\Gamma^\circ \supset A$ универсально общезначима (Γ° – конъюнкция посылок Г). В силу теоремы Геделя $\Gamma^\circ \supset A$ будет доказуемой. Присоединив к доказательству каждую из посылок Г и используя правило введения конъюнкции и modus ponens, получим вывод формулы A из Г, в котором правило обобщения не применяется к формулам, зависящим от посылок.

Возможен второй вариант формализации отношения логического следования. Можно потребовать, чтобы правило обобщения не применялось по переменным, которые входят хотя бы в одну из посылок (по этому пути идет *А*. Черч), так как имеет место следующая

Теорема 2: *Если существует вывод A из* Г *и правило обобщения не применяется. относительно переменных, входящих в одну из посылок, то из* Г *логически следует A*.

Эта метатеорема также будет вытекать как следствие из метатеоремы, формулируемой ниже.

Как первый, так и второй вариант накладывают, пожалуй, слишком сильные требования и существенно ограничивают применение теоремы дедукции. Возможен третий вариант, который комбинирует ограничения первого и второго вариантов, но в более слабой форме.

Переменная w варьируется в данном выводе относительно посылки A_i, если w входит в A_i и в этом выводе к формуле, зависящей от A_i, применяется правило обобщения именно по отношению к этой переменной w.

В противном случае будем говорить, что w фиксирована в этом выводе для посылки A_i. Пусть имеется вывод

$Pv \supset Rv$	посылка
$Rv \supset Qvw$	посылка
$(Pv \supset Rv) \supset ((Rv \supset Qvw) \supset (Pv \supset Qvw)$	аксиома
$(Rv \supset Qvw) \supset (Pv \supset Qvw)$	*m.p.*; 1,3
$Pv \supset Qvx$	*m.p.*; 2,4
$\forall x(Pv \supset Qvx)$	O; 5
$\forall x(Pv \supset Qvx) \supset (Pv \supset \forall xQvx)$	аксиома
$Pv \supset \forall xQvx$	m.p.; 6,7

В этом выводе имеется только одно применение правила обобщения, именно к формуле, стоящей в 5-й строке по отношению к переменной

w; эта строка зависит от посылки $Rv \supset Qvw$ и w содержится в посылке, следовательно w варьируется в выводе относительно посылки $Rv \supset Qvw$.

Вывод формулы E из посылок Г, в котором ни одна переменная не варьируется ни для одной из посылок, будем называть выводом без варьирования. Утверждение, что можно построить вывод без варьирования формулы E из посылок Г сокращенно будем записывать: $\Gamma \models E$.

Имеет место

Теорема 3: *Если* $\Gamma \models E$, *то из* Г *логически следует* E.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы:

(1) пусть $\Delta' \cap \Delta'' = \varnothing$, $\Delta',\Delta'' \vdash E$ и E не зависит от Δ'', тогда $\Delta' \vdash E$ и длина этого вывода не будет превышать длину вывода E из Δ', Δ''.

(2) Если из Г логически следует Aw и ни одна из формул Г не содержит w, то из Г логически следует $\forall xAx$.

(3) Если из Г логически следует A, то из Δ,Γ логически следует A. Доказательство лемм тривиально.

Доказательство теоремы 3.

Доказательство будем вести индукцией по длине вывода.

Базис: длина вывода равна 1. Здесь возможны два случая: (1) E совпадает с одной из посылок Г и (2) E есть аксиома.

В первом случае мы будем иметь логическое следование, так как из E логически следует E (а тем самым и из большего числа посылок).

Во втором случае также будет иметь место логическое следование, так как если E универсально общезначима (а мы принимаем, что всякая аксиома универсально общезначима), то она логически следует из любого множества посылок, в том числе и из Г.

Индукционный шаг. Пусть длина вывода E из Г равна $n + 1$. Последняя формула этого вывода может быть (1) одной из посылок, (2) аксиомой, (3) получена на формул B *и* $B \supset E$ за номерами k и l, где $k \leq n$ *и* $l \leq n$, по правилу modus ponens, (4) получена по правилу обобщения из формулы вида Bw за номером k, где $k \leq n$ и E тождественна $\forall xBx$.

В первом и во втором случаях E логически следует из Г по соображениям, аналогичным соответствующим пунктам базиса.

В третьем случае в силу индуктивного предположения из Г логически следует B и из Г логически следует $B \supset E$. Но так как из B, $B \supset E$ логически следует E, то из Г логически следует E.

Рассмотрим четвертый случай. Поскольку в выводе формулы E из посылок Г ни одна переменная не варьируется, то формула Bw не зависит ни от одной из посылок, в которые входит w. Обозначим буквой Δ те формулы Г, от которых зависит Bw. Ни в одну формулу Δw не входит. Очевидно, что $\Delta \models Bw$. По индуктивному допущению из Δ

логически следует Bw и по лемме 2 из Δ логически следует $\forall xBx$. Наконец, согласно лемме 3 из Γ логически следует $\forall xBx$.

Две предыдущие теоремы являются следствием доказанной, так как если правило обобщения не применяется к формулам, зависящим от посылок, то ни одна переменная не варьируется; аналогично, если правила обобщения не применяются по отношению к переменным, встречающимся в посылках, то также нет варьирования в выводе.

Для выводимости без варьирования – как мы увидим ниже – верна теорема дедукции. В силу доказанных теорем открываются более широкие возможности для применения теоремы дедукции. Ведь можно применять теорему дедукции не по отношению ко всем посылкам, а только к некоторым. Не пройдет ли теорема дедукции, если мы потребуем, чтобы ни одна переменная не варьировалась не относительно всех посылок, а только относительно устраняемой? Ответ оказывается положительным. Поэтому в записи о существовании вывода необходимо отобразить, варьируются ли переменные или нет, если варьируются, то какие именно и по отношению к каким посылкам.

Если переменная w в выводе B из A_1 ,..., A_n варьируется по отношению к посылке A_i, то этот факт мы запишем следующим образом: будем подчеркивать эту посылку и под чертой писать ту переменную, которая варьируется относительно этой посылки, т. е. будем писать A_1 ,... $\dfrac{A_i}{w}$, …, $A_n \vdash B$. Эту процедуру будем реализовывать относительно варьирования каждой переменной.

С. К. Клини [19; § 24] предлагает писать те переменные, которые варьируются, над знаком выводимости. Этот способ записи, как отмечает сам Клини, является неполным, так как он не указывает, по отношению к какой посылке варьируется переменная. Данный факт явно не фиксируется.

Там, где не будет необходимости в подробной записи, мы будем пользоваться способом Клини, в некоторых же сложных случаях будем применять избыточную запись: и путем подчеркиваний с индексами и выписыванием варьируемых переменных над знаком выводимости.

Если надо отметить, что в выводе B из Γ, A ни одна переменная не варьируется относительно посылки A, то будем писать $\Gamma, \boxed{A} \vdash B$.

Теорема 4. *Если существует вывод формулы B из посылок A,* Γ *и ни одна переменная не варьируется относительно формулы A, то существует вывод формулы $A \supset B$ из посылок* Γ.

Символически:

$$\frac{\boxed{A}, \Gamma \mid - B}{\Gamma \mid - A \supset B}$$

Теорема доказывается обычным способом индукцией по длине данного вывода – вывода формулы B из посылок A, $Г$.

Базис. Длина вывода равна 1. т.е. вывод имеет вид:

1. B

Возможны три случая:

1) Данный вывод имеет вид:

1. B	аксиома

В этом случае результирующий вывод будет иметь вид:

1. B	аксиома
2. $B\&A \supset B$	
3. $(B\&A \supset B) \supset (B \supset (A \supset B))$	аксиома
4. $B \supset (A \supset B)$	*т. р.;* 2,3
5. $A \supset B$	*т.р.;* 1,4

Это вывод из произвольных посылок, в том числе и из посылок Г.

2) Данный вывод имеет вид:

1. B	посылка, B принадлежит Г

Результирующий вывод будет таким же, что и п. 1, но B будет входить в этот вывод в качестве одной из посылок Г.

3) Данный вывод имеет вид:

1. A	посылка, B есть A

Результирующим выводом будет доказательство формулы $A \supset A$. Но вывод формулы $A \supset A$ может быть построен из пустого списка посылок, поэтому и из посылок Г.

Индукционный шаг. Требуется доказать, что теорема дедукции имеет место для данного вывода длины $k + 1$ в предположении, что она верна для выводов длины меньшей или равной k.

Возможны 6 случаев. Три из них доказываются аналогично трем случаям базиса.

4) Данный вывод имеет вид:

1.		
l	P	
$k+l$	$P \supset B$	
$k+l+1$	B	*т.р.;l,k+1*

Это вывод из посылок A, Г.

По индуктивному допущению существует вывод формулы $A \supset P$ из посылок Г. Результирующий вывод теперь легко построить.

1.:	
n	$A \supset P$

⋮

n+k	$P \supset B$	
n+k+1	$(A \supset P) \supset ((P \supset B) \supset (A \supset B))$	*аксиома*
n+k+2	$(P \supset B) \supset (A \supset B)$	*т.р.; n, n+k+1*
n+k+3	$A \supset B$	*т.р.; n+k, n+k+2*

5) Данный вывод имеет вид

k	Bw	
k+1	$\forall xBx$	О, *k*

Это вывод из посылок *A,* Г и ни одна переменная, кроме, возможно, *w,* не варьируется относительно посылки *A*. Возможны два подслучая;

5.1) Формула *Bw* зависит от *A*. В этом случае *A* не содержит *w*. По индуктивному допущению получаем вывод формулы $A \supset Bw$ из посылок Г. Далее строим результирующий вывод следующим образом:

n.	$A \supset Bw$	
n+1	$\forall x(A \supset Bx)$	*O;n*
n+2	$\forall x(A \supset Bx) \supset \forall(A \supset \forall xBx)$	*аксиома*
n+3	$A \supset \forall xBx$	*т.р.;n+1,n+2*

5.2). Формула *Bw* не зависит от *A*. Тогда может быть построен вывод формулы *Bw* из посылок Г. И далее легко достраиваем результирующий вывод.

n		*Bw*
n+1	$\forall xBx$	О;*n*
n+2	$(\forall xBx \supset (A \supset \forall xBx))$	*аксиома*
n+3	$A \supset \forall xBx$	*т.р.;n*+1,*n*+2

Вывод формулы $\forall xBx$ может совпасть с данным выводом, когда *A* не используется в данном выводе, или является некоторой подпоследовательностью данного вывода.

Таким образом теорема дедукции доказана.

Теорема 5. *В* НС *производны следующие правила введения и удаления логических символов:*

ВИП $\dfrac{\boxed{A}, \Gamma \mid\!- B}{\Gamma \mid\!- A \supset B}$ УИП $\dfrac{\Gamma \mid\!- A \supset B}{A, \Gamma \mid\!- B}$

ВКП $\dfrac{\Gamma \mid\!- A \quad \Gamma \mid\!- B}{\Gamma \mid\!- A \,\&\, B}$ УКП $\dfrac{\Gamma \mid\!- A \,\&\, B}{\Gamma \mid\!- A \text{ и } \Gamma \mid\!- B}$

ВДП $\dfrac{\Gamma \vdash A \text{ или } \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$ УДП $\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B}{\neg A, \Gamma \vdash B}$

ВОП $\dfrac{\boxed{A}, \Gamma \vdash B \,\&\, \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$ УОП $\dfrac{\Gamma \vdash \neg A}{\boxed{A}, \Gamma \vdash B \,\&\, \neg B}$

В∀П $\dfrac{\Gamma \vdash Aw}{\Gamma \vdash \forall x F_x^w A}$ У∀П $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x F_x^w A}{\Gamma \vdash F_t^w A}$

В∃П $\dfrac{\Gamma \vdash F_t^w A}{\Gamma \vdash \exists x F_x^w A}$

ВИЛ $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad B, \Delta \vdash C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \vdash C}$ УИЛ $\dfrac{A \supset B, \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A}$

ВКЛ $\dfrac{A, \Gamma \vdash C \text{ или } B, \Gamma \vdash C}{A \,\&\, B, \Gamma \vdash C}$ УКЛ $\dfrac{A \,\&\, B, \Gamma \vdash C}{A, B, \Gamma \vdash C}$

ВДЛ $\dfrac{\boxed{A}, \Gamma \vdash C \quad \boxed{B}, \Gamma \vdash C}{A \vee B, \Gamma \vdash C}$ УДЛ $\dfrac{A \vee B, \Gamma \vdash C}{A, \Gamma \vdash C \text{ и } B, \Gamma \vdash C}$

ВОЛ $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\neg A, \Gamma \vdash B \,\&\, \neg B}$ УОЛ $\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash B \,\&\, \neg B}{\Gamma \vdash A}$

В∀Л $\dfrac{F_t^w A, \Gamma \vdash C}{\forall x F_x^w A, \Gamma \vdash C}$

В∃Л $\dfrac{Aw, \Gamma \vdash C}{\boxed{\exists x F_x^w Aw}, \Gamma \vdash C}$ У∃Л $\dfrac{\exists x F_x^w A, \Gamma \vdash C}{F_t^x A, \Gamma \vdash C}$

В правиле В∀П переменная *w* не встречается в формулах Γ; в правиле В∃Л переменная *w* не встречается в формулах Γ и *C*.

Доказательство теоремы элементарно. Поэтому докажем теорему для некоторых случаев, предоставив доказательство остальных читателю.

УИЛ. Пусть имеется вывод формулы A из посылок $A \supset B$**,** Γ. По теореме дедукции – если переменные формулы $A \supset B$ не варьируются – существует вывод формулы $(A \supset B) \supset A$ из посылок Γ. Но $((A \supset B) \supset A) \supset A$ аксиома, по modus ponens получаем вывод формулы A из посылок Γ.

ВКЛ. Пусть имеется вывод формулы C из посылок A*,* Γ. Заместив каждое вхождение A на последовательность

$A \,\&\, B$	посылка
$A \,\&\, B \supset A$	аксиома
A	*т. р.*,

получим вывод формулы C из посылок $A \mathbin{\&} B$, Г.

УДП. Результирующий вывод строим, присоединяя к данному выводу следующие формулы:

n	$A \vee B$	последняя формула данного вывода
$n+1$	$A \supset (\neg A \supset B)$	доказуемая формула
$n+2$	$(A \supset (\neg A \supset B)) \supset ((B \supset (\neg A \supset B)) \supset (A \vee B \supset (\neg A \supset B)))$	аксиома
$n+3$	$(B \supset (\neg A \supset B)) \supset (A \vee B \supset (\neg A \supset B)$	*т.р.;* $n+1$, $n+2$
$n+4$	$B \supset (\neg A \supset B)$	доказуемая формула
$n+5$	$(A \vee B \supset (\neg A \supset B)))$	*т.р.;* $n+3$, $n+4$
$n+6$	$\neg A \supset B$	*т.р.;* n, $n+5$
$n+7$	$\neg A$	посылка
$n+8$	B	*т.р.;* $n+7$, $n+6$

В формулировке теоремы дедукции и других производных правил мы допускали некоторую неопределенность. Мы говорили о выводе из посылок Г, не уточняя, что понимается под посылками Г. Возможно несколько уточнений: под Г можно иметь в виду конечное множество формул, последовательность формул и последовательность формул с точностью до перестановки – список формул.

При той формулировке исчисления предикатов, которую мы избрали выше, выбор одной из этих формулировок не влияет на запас доказуемых формул и производных правил вывода.

Однако при иных формулировках, в частности при формулировках с иным понятием вывода, указанные различия оказываются существенными.

Глава вторая

ФОРМЫ ВЫВОДОВ И ТЕОРЕМЫ ДЕДУКЦИИ ДЛЯ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Возможны логистические системы гильбертовского типа с различными понятиями вывода. Может оказаться, что две системы с одинаковыми аксиомами и правилами вывода, но с различными понятиями вывода, будут неэквивалентными. Поэтому кроме правил вывода и аксиом необходимо указывать, какого рода объект является формальным выводом.

Ниже будут определены различные по своей структуре формальные выводы. В общем случае будут определяться не формальные выводы фиксированных логистических систем, а скорее схемы таких выводов с нефиксированными аксиомами и правилами вывода. Мы предполагаем, что для каждой логистической системы определено, что есть формула. Для каждой логистической системы фиксировано некоторое число эффективных правил вывода $R_1,\ldots,R_k$. Каждое правило вывода имеет вид $\frac{A_1,\ldots,A_l}{B}$; для каждого правила l конечно и фиксировано, при l= 0 правило вывода будем называть схемой аксиом. Будем говорить, что из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима B тогда и только тогда, когда существует правило вывода, имеющее вид $\frac{A_1,\ldots,A_l}{B}$. В дальнейшем будут сформулированы понятия выводов из множества посылок, списка[1] посылок и последовательности посылок. Множество формул будем обозначать буквами X, Y, списки – Γ, Δ, Θ, последовательности – π, φ, …[2].

Объединение множеств X и Y будем обозначать посредством $X \cup Y$; Γ, Δ – обозначение результата сочленения списков Γ и Δ; наконец, πφ обозначает результат сочленения последовательностей π и φ.

Пусть $X - \{A\}$ есть теоретико-множественная разность, Γ_A есть список формул Γ, в котором вычеркнуты некоторые или все вхождения

---

[1] Список есть последовательность формул, рассматриваемая с точностью до перестановок. В дальнейшем это понятие будет точно определено.

[2] Мы не всегда будем выдерживать это соглашение и будем употреблять буквы Γ, Δ ,...и в том случае, когда будем иметь дело в множествами и последовательностями формул. Контекст позволит установить, о чем идет речь.

формулы A, аналогично π_A. Тогда теорема дедукции примет различный вид:

(1) $\dfrac{X \mid\!- B}{X-\{A\} \mid\!- A \supset B}$ (3) $\dfrac{\Gamma \mid\!- B}{\Gamma_A \mid\!- A \supset B}$ (6) $\dfrac{\pi \mid\!- B}{\pi_A \mid\!- A \supset B}$

(2) $\dfrac{\{A\} \bigcup X \mid\!- B}{X \mid\!- A \supset B}$ (4) $\dfrac{A, \Gamma \mid\!- B}{\Gamma_A \mid\!- A \supset B}$ (7) $\dfrac{\pi A \quad \mid\!- B}{\pi_A \quad _A \mid\!- A \supset B}$

(5) $\dfrac{A, \Gamma \mid\!- B}{\Gamma_A \mid\!- A \supset B}$ (8) $\dfrac{\pi A \quad \mid\!- B}{\pi \quad \mid\!- A \supset B}$

(9) $\dfrac{A \quad \mid\!- B}{\mid\!- A \supset B}$

Относительно логистических систем с фиксированным понятием вывода могут иметь место некоторые теоремы, которые называют структурными правилами.

Сформулируем их для случая логистических систем с понятием вывода из множества посылок.

$\dfrac{X \bigcup \{A\} \bigcup \{B\} \bigcup Y \mid\!- C}{X \bigcup \{B\} \bigcup \{A\} \bigcup Y \mid\!- C}$ перестановка посылок

$\dfrac{\{A\} \bigcup \{A\} \bigcup X \mid\!- C}{\{A\} \bigcup X \mid\!- C}$ сокращение посылок

$\dfrac{\{A\} \bigcup X \mid\!- C}{\{A\} \bigcup \{A\} \bigcup X \mid\!- C}$ размножение посылок

$\dfrac{X \mid\!- C}{\{A\} \bigcup X \mid\!- C}$ добавление посылок

$\{A\} \mid\!- A$ рефлексивность отношения выводимости

$\dfrac{X \mid\!- B \quad \{B\} \bigcup Y \mid\!- C}{X \bigcup Y \mid\!- C}$ сечение (обобщенная транзитивность отношения выводимости)

$\dfrac{X \mid\!- B \quad \{B\} \mid\!- C}{X \mid\!- C}$ транзитивность отношения выводимости

Размножение есть частный случай добавления и транзитивность – частный случай сечения.

Аналогичные структурные правила формулируются для логистических систем с понятием вывода из списка посылок и из последовательности посылок.

Для логистической системы с понятием вывода из множества посылок, независимо от специфических правил вывода и даже самого понятия вывода, могут быть доказаны правила перестановки посылок, сокращения и их обращения – размножения. Это очевидно в силу того, что $X \cup Y = Y \cup X$ и $X \cup X \cup Y = X \cup X$

Для логистических систем с modus ponens, для которых верна теорема дедукции в форме (1), имеет место и правило добавления посылки (утончение).

Теорема дедукции в форме (2) не гарантирует верности правила добавления посылки.

Для логистических систем с понятием вывода из списка посылок, независимо от специфических правил вывода и даже самого понятия вывода, из всех структурных теорем верна теорема о перестановке посылок.

Теорема дедукции в форме (3) для логистических систем с modus ponens гарантирует верность теоремы о добавлении посылок, сокращении посылок и размножении посылок.

Теорема дедукции в форме (4) – сокращение посылок; в форме (5) не гарантирует ни добавления, ни сокращения, ни размножения.

Для логистических систем с понятием вывода из последовательности посылок, независимо от специфических привил вывода, не могут быть доказаны теоремы о добавлении, сокращении, размножении и перестановке посылок.

Для логистических систем с modus ponens верность теоремы дедукции в форме (6) гарантирует верность теорем о добавлении сокращении, размножении и добавлении посылок; теорема дедукции в форме (7) – перестановку и сокращение; в форме (8) – перестановку.

Сам вывод в системах гильбертовского типа может иметь различный вид. Структурные правила – если не учитывать правил вывода – будут существенно зависеть от понятия вывода.

§ 2. ВЫВОД КАК ЛИНЕЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ

Чаще всего формальный вывод определяется следующим образом:

(1) Вывод из посылок Г есть последовательность формул, каждая из которых есть или одна из посылок Г, или аксиома, или непосредственно выводима из предшествующих в этой последовательности формул по одному из правил вывода $R_1, \ldots, R_n$.

Если α есть вывод из посылок Г и формула *E* есть последняя формула α, то говорят, что α есть вывод формулы *E* из посылок Г. Говорят также, что из посылок Г выводима *E* (сокращенно: $\Gamma \vdash E$) тогда и только тогда, когда можно построить α, такое, что α есть вывод формулы *E* из посылок Г.

Попробуем уточнить сформулированное выше понятие вывода. Прежде всего нам необходимо знать, что такое последовательность формул.

Можно считать, что дано эффективно порожденное множество формул (счетный алфавит) и дана двуместная порождающая операция, которая из последовательности формул и формулы порождает последовательность формул. Тогда понятие последовательности формул вводится с помощью следующего фундаментального индуктивного определения.

Пустая последовательность есть последовательность формул.

Если α есть последовательность формул и *E* формула, то α*E* есть последовательность формул.

Ничто другое не есть последовательность формул.

Предикат «последовательность формул» может быть введен и относительно конечного алфавита примитивных знаков, но уже не путем фундаментального индуктивного определения, а с помощью рекурсии или нефундаментального индуктивного определения (преобразуемого в рекурсивное). Фиксируется конечный алфавит *A*, элементами которого являются некоторые примитивные знаки и скобки. С помощью фундаментального индуктивного определения вводится понятие слова в *A*. Предикаты «формула» и «последовательность формул» вводятся с помощью рекурсии как особого рода слова в *A*.

Однако мы будем исходить из определения последовательности формул как слова в счетном алфавите формул. Но принципиально можно избежать счетного алфавита, поэтому выражение «слово в счетном алфавите» можно рассматривать всего лишь как способ речи.

С помощью примитивной рекурсии определим операцию сочленения последовательностей:

$$\begin{cases} \alpha * \wedge \approx \alpha \\ \alpha * \beta E \approx (\alpha * \beta) E \end{cases}$$

«/\» есть знак пустой последовательности и « ≈ » есть знак графического равенства.

Нам нужны предикаты «формула *E* входит в последовательность α » и «формула *E* есть последняя формула последовательности α ». Эти определения легко дать. В качестве сокращения для «входит» будет использоваться «Вх»; «есть последняя формула» – «Пф».

$$\begin{cases} \text{Вх}(E, E) \\ \text{Вх}(E, \alpha A) \equiv E \approx A \vee \text{Вх}(E, \alpha) \end{cases}$$

$$\text{Пф}(E, \alpha) \equiv \exists \beta (\alpha \approx \beta E)$$

Чтобы исключить известную неопределенность во вводимом определением вида (I) понятии вывода, следует прежде всего уточнить, что имеется в виду под посылками Г. Мы рассмотрим три возможности:
под Г имеется в виду множество формул,
Г рассматривается как последовательность формул,
Г есть список формул.

Множество формул, даже конечное, отличается от последовательности формул рядом свойств. Для множества безразлично, в каком порядке рассматриваются его члены, для последовательности нет: $\{A, B\} = \{B, A\}$, но $AB \not\approx BA$ [3]. Далее, каждое вхождение формулы в последовательность рассматривается как самостоятельный член последовательности, в то время как два графически равных элемента множества отождествляются: $ABB \not\approx AB$, но $\{A, B, B\} = \{A, B\}$.

Под списком формул будем иметь в виду последовательность формул, рассматриваемую с точностью до перестановки ее членов.

Введем понятие списка более точно. Последовательности формул α_1 и α_2 будем называть эквивалентными относительно перестановки членов тогда и только тогда, когда число вхождений каждой буквы в последовательность α_1 равно числу вхождений этой же буквы в последовательность α_2, и наоборот. Функцию «число вхождений буквы A в последовательность α » легко определить рекурсивно:

$$\begin{cases} \text{Ч}(A,\wedge) = 0 \\ \text{Ч}(A, A) = 1 \\ \text{если Ч}(A,\alpha) = k, \text{ т о Ч}(A,\alpha A) = k+1 \\ \text{если Ч}(A,\alpha) = k \text{ и } B \text{ отлична от } A, \text{ т о Ч}(A,\alpha B) = k \end{cases}$$

Отношение эквивалентности относительно перестановки членов есть отношение типа эквивалентности.

Под списком формул будем иметь в виду класс последовательностей, эквивалентных друг другу относительно перестановки членов. Будем говорить, что формула входит в список, если она входит в последовательности, определяющие список. Список формул будет задаваться одной из соответствующих ему последовательностей формул. Список будет записываться взятием в квадратные скобки одной из последовательностей, задающих этот список.

Под сочленением списков формул Γ_1 и Γ_2, задаваемых последовательностями α_1 и α_2, будем иметь в виду список, задаваемый последовательностью $\alpha_1 * \alpha_2$,; операцию сочленения списков будем изображать запятой: Γ_1, Γ_2.

---

[3] «$\not\approx$» читается «графически не равно».

Обращаем внимание на важное для дальнейшего изложения различие между множествами формул и списками формул: для множеств имеет место закон идемпотентности $\mathbf{X} \cup \mathbf{X} = \mathbf{X}$, для списков неверно, что Г, Г = Г.

В дальнейшем мы будем использовать буквы Г, Δ в качестве синтаксических переменных, пробегающих как по множествам, так и по последовательностям и спискам формул. Контекст и специальные оговорки будут указывать, что в каждом случае имеется в виду.

Заменив в (I) неопределенное выражение «из посылок Г» на «из множества посылок Г», «из последовательности посылок Г» и «из списка посылок Г», мы получим различные понятия вывода.

Проведя указанное уточнение, мы еще не освобождаемся от неопределенностей определения (I). Это определение естественно переформулировать как нефундаментальное индуктивное определение. Неопределенность же состоит в том, рассматривать ли определение предиката « α есть вывод из множества посылок Г» (соответственно α есть вывод из последовательности посылок Г» и « α есть вывод из списка посылок Г») как индуктивное определение по одной переменной α с параметром Г или же как определение по двум переменным. Та же неопределенность остается, если это понятие вводится рекурсией.

Таким образом, вместо определения (I) мы будем иметь шесть различных определений вывода. Сформулируем каждое из них и выясним, какие из структурных правил будут верны в качестве метатеорем относительно логистических систем с соответствующим понятием вывода, без обращения к специальным свойствам аксиом и правил вывода.

Рассмотрим первое понятие вывода в виде последовательности формул из множества посылок, введенное индукцией по построению вывода, сокращенно: ВПМ1. Оно вводится следующим нефундаментальным индуктивным определением [4]:

1. Если $E \in \Gamma$, то E– вывод из множества посылок Г.

2. Если E – аксиома, то E – вывод из множества посылок Г.

3. Если α – вывод из множества посылок Г и $E \in \Gamma$, то αE– вывод из множества посылок Г.

4. Если α – вывод из множества посылок Г и E– аксиома, то aE – вывод из множества посылок Г.

[4] «∈» есть отношение включения элемента в множество; вместо X,Y,. . . в качестве переменных, пробегающих по множествам формул, здесь и ниже мы используем буквы Г, Δ, ...

5. Если α– вывод из множества посылок Г; A_1 входит в α, . .., A_k входит в α и из $A_1, \dots, A_k$ непосредственно выводима формула E, то αE – вывод из множества посылок Г.

6. Ничто другое не есть вывод из множества посылок Г.

Поскольку порядок, в котором выводы «порождаются» этим нефундаментальным определением тот же самый, в котором появляются объекты, порождаемые фундаментальным индуктивным определением, то это нефундаментальное индуктивное определение преобразуется в следующее примитивно рекурсивное

$$\begin{cases} \text{Выв}(E,\Gamma) \sim E \in \Gamma \vee \text{Акс}(E) \\ \text{Выв}(\alpha E,\Gamma) \sim \text{Выв}(\alpha,\Gamma)\,\&\,(E \in \Gamma \vee \text{Акс}(E) \vee \\ \exists A_1 \ldots \exists A_k [Bx(A_1,\alpha)\,\&\ldots\&\,Bx(A^k,\alpha)\,\& \\ \text{Нв}(E, A_1,\ldots, A_k)]) \end{cases}$$

Здесь: Aкс (E) = E аксиома, Выв (α, Г) = α есть вывод из множества посылок Г, Нв $(E, A_1, \dots, A_k)$ = E непосредственно выводима из $A_1, \dots, A_k$.

Обратим внимание, что при указанном понятии вывода не обязательно всякая формула, являющаяся элементом Г, входит в вывод α из множества посылок Г. Более того, этим определением не накладывается никаких ограничений на мощность Г.

Из данного определения вывода тривиально следуют – независимо от специального вида аксиом и правил вывода теоремы[5]:

$$\frac{\Gamma \vdash E}{\{A\} \cup \Gamma \vdash E}$$ правило добавления посылки (другое название: утончение).

Действительно, если Выв (α, Г) и Г $\subseteq$ Δ, то Выв (α, Δ).

[5] При формулировке теорем вместо $\frac{\Gamma \vdash E}{\{A\} \cup \Gamma \vdash E}$ следовало бы писать $\frac{\Gamma \vdash E}{\overline{\{A\} \cup \Gamma \vdash E}}$, так как мы черту использовали при формулировке правил вывода. Черта в правилах вывода означает отношение выводимости между формулами; двойная черта (или как у нас одна черта) в теоремах выражает отношение между выводами или записями о выводимости. Двойная черта означает: существует алгорифм, преобразующий выводы, утверждение о существовании которых стоит над чертой, в вывод, запись о существовании которого стоит под чертой. Мы не будем писать двойной черты, так как контекст (наличие знака « |– ») всегда будет показывать, в каком смысле черта употребляется.

$$\frac{\Gamma\bigcup\{C\}\bigcup\{D\}\bigcup\Delta\,|-E}{\Gamma\bigcup\{D\}\bigcup\{C\}\bigcup\Delta\,|-E}$$ – правило перестановки посылок – в силу коммутативности и ассоциативности теоретико-множественного объединения ∪.

$$\frac{\Gamma\bigcup\{C\}\bigcup\{C\}\,|-E}{\Gamma\bigcup\{C\}\,|-E}$$ – правило опускания повторяющейся посылки – в силу закона идемпотентности для ∪ .

Имеют место также $\{A\} \mid\!- A$ – рефлексивность « |– » и

$$\frac{\Gamma\,|-C \quad \{C\}\bigcup\Delta\,|-E}{\Gamma\bigcup\Delta\,|-E}$$ – правило сечения**.**

Рефлексивность отношения выводимости « |– » имеет место, так как $A \in \{A\}$ и отсюда на основании пункта 1 определения Выв (A, $\{A\}$). Доказательство правила сечения легко осуществить, использовав идею замены каждого вхождения формулы C в выводе E из $\{C\}$ ∪ Δ на вывод формулы C из Г. Если формула C не входит в вывод E из $\{C\}$ ∪ Δ, то этот вывод можно считать выводом E из Δ и на основании правила добавления посылки – выводом E из Г ∪ Δ.

Выше мы использовали выражение « α есть вывод формулы E из множества посылок Г». Это трехместный предикат в отличие от двуместного « α есть вывод из множества посылок Г». Но этот трехместный предикат вводится следующим определением

Выв (α, E,Г)$=_{Df}$ Выв(α, Г) & Пф(E,A).

Второе понятие вывода в виде последовательности формул из последовательности посылок, введенное, как и первое понятие, индукцией по построению вывода – сокращенно ВПП1 – мы получим, заменив в определении ВПМ1 выражение «множество посылок» на выражение «последовательность посылок» и «есть элемент множества» на «входит в».

Аналогично третье понятие вывода из списка посылок ВПС1 – получим, заменив в определении ВПМ1 выражение «множество посылок» и «есть элемент множества» соответственно на «список посылок» и «входит в список».

Для логистических систем с понятиями ВПП1 и ВПС1, так же как и для систем с понятием ВПМ1, будут иметь место в качестве теорем все структурные правила (добавления посылки, перестановки посылок, опускания повторяющейся посылки, рефлексивность отношения выводимости, сечение) независимо от вида аксиом и правил вывода.

В структурных правилах теоретико-множественное объединение множеств посылок заменяется соответственно на сочленение последовательностей и списков посылок.

Доказательство тривиально, оно основано на свойствах вхождения формулы в последовательность формул и список формул:

если A входит в α и α есть подпоследовательность β, то A входит в β;

если A входит в β и α эквивалентна β относительно перестановки членов, то A входит в β;

A входит в A.

Рассмотрим теперь понятия выводов, вводимые индукцией по двум переменным: длине вывода и числу посылок.

Понятие вывода в виде последовательности формул из множества посылок, введенное индукцией по длине вывода и числу посылок – сокращенно ВПМ2 – определим следующим образом:

1. E есть вывод из множества посылок $\{E\}$**,**

2. Если E – аксиома, то E – вывод из пустого множества посылок $\varnothing$.

3. Если α – вывод из Г и E– формула, то aE – вывод из $\Gamma \cup \{E\}$.

4. Если α – вывод из множества посылок Г и E – аксиома, то aE – вывод из множества посылок Г.

5. Если α – вывод из Г, A_1 входит в α, ..., A_k входит в α и из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима $E,$ то αE – вывод из множества посылок Г.

Соответствующее рекурсивное определение будет уже иметь вид не обычной примитивной рекурсии, а примитивной рекурсии по двум переменным (без вставок).

$$\begin{cases} \text{Выв}(E,\{E\}) \\ \text{Выв}(E,\varnothing) \sim \text{Акс}(E) \\ \text{Выв}(\alpha E,\Gamma \bigcup \{A\}) \sim \text{Выв}(\alpha,\Gamma)\ \&\ E \approx A \vee \\ \text{Выв}(\alpha,\Gamma \bigcup \{A\})\ \&\ \text{Акс}(E) \vee \text{Выв}(\alpha,\Gamma \bigcup \{A\})\ \& \\ \exists A_1 \ldots \exists A_k\,(Bx(A_1,\alpha)\ \&\ \ldots\ \&\ Bx(A_k,\alpha)\ \&\ \text{Нв}(E, A_1,\ldots,A_k) \end{cases}$$

Если α есть вывод из Г, то всякая формула, являющаяся элементом Г, имеет по крайней мере одно вхождение в α. Это утверждение непосредственно следует из определения.

Для логических систем с понятием ВПМ2 имеют место в качестве метатеорем все структурные правила (перестановка посылок, опускание повторяющейся посылки, добавление посылки, рефлексивность, сечение), причем данные правила, кроме правила добавления посылки, имеют место в силу тех же оснований, что и для логистических систем с понятием ВПМ1. С правилом добавления посылки дело обстоит иначе.

Однако легко доказать и это правило, основываясь на следующей идее. Если α есть вывод из множества посылок Г некоторой формулы $E,$ то $A * \alpha$ будет выводом этой же формулы E из множества посылок

$\Gamma \cup \{A\}$. Данное утверждение нетрудно аккуратно доказать индукцией по длине вывода α и числу посылок Γ.

Между ВПМ1 и ВПМ2 имеет место следующее соотношение:

Если α есть ВПМ1 из множества посылок Γ и всякая формула, принадлежащая Γ, входит в α, то α есть ВПМ2. Заменив в определении *В*ПМ2 выражения «из множества посылок», $\varnothing$, $\cup$, $\{E\}$, $\{A\}$ соответственно на «из последовательности посылок», $\Lambda, *, E, A,$ получим определение вывода из последовательности посылок, вводимого индукцией до построению вывода и числу посылок – ВПП2; заменив же указанные выражения соответственно на «из списка посылок», Λ, , , E, A, получим определение ВПС2.

Какие структурные правила верны для логистических систем с понятием ВПП2, с понятием ВПС2?

Для логистических систем с понятием ВПП2 имеют место следующие структурные правила:

левостороннего добавления посылки $\dfrac{\Gamma \mid -E}{A * \Gamma \mid -E}$,

сечения $\dfrac{\Gamma \mid -C \quad C * \Delta \mid -E}{\Gamma * \Delta \mid -E}$,

рефлексивности отношения выводимости $A \mid\!- A$.

Но правило добавления посылки в общем виде, правило перестановки посылок, правило опускания тождественной посылки не имеют места для логистических систем с понятием ВПП2 без ссылки на особый характер аксиом и правил вывода. Однако если среди правил вывода есть правило тождественной выводимости $\dfrac{A}{A}$ (назовем его правилом Т), то для логистической системы с правилом вывода (Т) имеет место правило опускания повторяющейся посылки $\dfrac{C * C * \Gamma \mid -E}{C * \Gamma \mid -E}$.

Действительно, пусть α есть вывод формулы E из последовательности посылок $C * C * \Gamma$. Посылка C дважды встречается в к ранее вхождений всех других посылок. При наличии правила (Т) второе вхождение формулы C в α можно рассматривать уже не как посылку, а как формулу, непосредственно выводимую из предшествующих.

При наличии правила (Т) верно и правило перестановки посылок. Пусть α есть вывод из последовательности посылок Γ, пусть Γ' последовательность формул, отличающаяся от Γ только порядком вхождения. Тогда последовательность Γ' ∗ α будет выводом из посылок Γ', все вхождения формул из Γ в α мы рассматриваем в новом выводе как полученные из предшествующих по правилу (T).

При наличии (T) имеет место и правило добавления посылки в общем виде, так как из правила левостороннего добавления посылки и правила перестановки посылок мы получаем правило добавления посылки в общем виде.

Для логистических систем с понятием ВПС2 безотносительно к специальному виду аксиом и правил вывода имеют место следующие структурные правила:

сечения $\dfrac{\Gamma \mid -C \quad C,\Delta \mid -E}{\Gamma,\Delta \mid -E}$,

рефлексивности отношения выводимости $A \mid\!- A$,

перестановки посылок $\dfrac{\Gamma, C, D, \Delta \mid -E}{\Gamma, D, C, \Delta \mid -E}$

Правила добавления посылки $\dfrac{\Gamma \mid -E}{C,\Gamma \mid -E}$ и опускания повторяющейся посылки не имеют места.

§ 3. ВЫВОД С АНАЛИЗОМ

Под выводом с анализом из множества посылок Γ (соответственно из последовательности посылок и списка посылок) будем иметь в виду вывод из множества посылок Γ вместе с указанием, на каком основании каждая формула входит в вывод: как такая-то посылка, как такая-то аксиома, как формула, непосредственно выводимая по такому-то правилу вывода из формул, занимающих такое-то и такое-то место в выводе.

Каждому выводу *без анализа* можно поставить в соответствие *конечное* число выводов с анализом. Действительно, первая формула может быть или посылкой, или аксиомой. Может возникнуть случай, когда возможны оба толкования. Тогда мы рассматриваем обе эти возможности. Пусть мы дошли до формулы за номером l и имеется k возможных толкований отрезков вывода, ей предшествующих. Если возможно только одно толкование вхождения формулы за номером l, то она не увеличивает число возможных толкований. Может быть два, три или s толкований (как посылки, как аксиомы, как непосредственно выводимой из таких-то формул, или непосредственно выводимой из таких-то); s конечно. Тогда число толкований отрезка вывода длины l увеличивается до $s \cdot k$. Поскольку длина вывода конечна, то мы будем иметь лишь конечное число его толковании.

Очевидно, что выводу с анализом может быть поставлен в соответствие один-единственный вывод без анализа. Вывод с фиксированным анализом позволяет установить, от каких формул, входящих в вывод, зависит последняя формула вывода. Если из вывода удалить все формулы, от которых не зависит последняя формула, то мы вновь получим вывод.

§ 4. ЛОГИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ВЫВОДОМ В ВИДЕ ДЕРЕВА

Рассмотрим логистические системы с формальными выводами в виде деревьев. Для этого вместо последовательности формул введем иную систему объектов. Систему формул в виде дерева мы введем также с помощью фундаментального индуктивного определения. Алфавитом является совокупность формул. Имеется совокупность операций, порождающих из формул систему объектов: одна нульарная и одна унарная операции, порождающие из формул систему формул. Имеется также система k-арных ($k \geq 2$) операций, порождающих из k-1 систем объектов и формулы новую систему объектов. Результат применения порождающей операции будем изображать, заключая в угловые скобки исходные объекты.

Система формул, называемая деревом, вводится следующим индуктивным определением. Одновременно определяем и что есть последняя формула системы формул.

1. $< >$ есть система формул без последней формулы.

2. Если A формула, то $<A>$ есть система формул и A ее последняя формула.

3. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ системы формул и E формула, то $< \alpha_1, \ldots, \alpha_k E>$ есть система формул и E ее последняя формула.

4. Ничто другое не есть система формул.

Введенные системы формул могут изображаться двумерно: системе $< >$ сопоставляется пустое слово, системе $<A>$ – объект A, системе $< \alpha_1, \ldots, \alpha_k E>$ – объект $\dfrac{\alpha_1,\ldots,\alpha_k E}{E}$.

Определенную выше систему будем называть деревом.

Определим высоту дерева h:

$$\begin{cases} h(<>) = 0 \\ h(<A>) = 0 \\ h(<\alpha_1,...,\alpha_k E>) = \max(h(\alpha_1),...,h(\alpha_k)) + 1 \end{cases}$$

Ниже мы определим различные понятия вывода в зависимости от того, будет ли минимальная высота вывода равна 0 или 1, определяем ли мы вывод из множества, списка и последовательности посылок, а также введем понятие вывода по одной или двум переменным.

Каждое понятие вывода мы будем обозначать согласно схеме ВДnТm , где n = 0,1 указывает минимальную допустимую высоту вывода, Т = М, *С,* П и m = 1,2 показывает, вводится данное понятие индукцией по одной или двум переменным.

Определение ВД0М1

1. Если A аксиома, то $<< > A>$ есть вывод из множества посылок Г.

2. Если $A \in$ Г, то $<A>$ есть вывод из множества посылок Г.

3. Если $< \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ суть выводы из множества посылок Г, $A_1 \ldots, A_k$ – последние формулы выводов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ соответственно и из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула *E,* то $< \alpha_1, \ldots, \alpha_k E >$ есть вывод из множества посылок Г.

Заменив в этом определении «множество» на «список» и «последовательность» и отношение «∈» на «входит», получим соответственно определения ВД0С1 и ВД0П1.

Определение ВД0С2

1. Если A аксиома, то $<< > A>$ есть вывод из пустого списка посылок.

2. Если $<A>$ есть вывод из списка посылок $[A]$.

3. Если α_1 есть вывод формулы A_1 из списка посылок $\Gamma_1, \ldots, \alpha_k$ есть вывод формулы A_k из списка посылок Γ_k и E непосредственно выводима из формул $A_1, \ldots, A_k$, то $< \alpha_1 \ldots \alpha_k E>$ есть вывод из списка посылок $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

Заменив в этом определении термин «список» на «множество» и «последовательность» и «,» на «∪» и «*» соответственно, получим определение ВД0М2 и ВД0П2.

Определение ВД1П1

1. Если A аксиома, то $<< > A>$ есть вывод из последовательности посылок Г.

2. Если $A_1, \ldots, A_k$ входят в последовательность Г и из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула *E,* то $<<A_1> \ldots <A_k>E>$ есть вывод из последовательности посылок Г.

3. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ выводы из последовательности посылок Г, $A_1, \ldots, A_k$ – последние формулы выводов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ соответственно и из

$A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула E, то $<\alpha_1, \ldots, \alpha_k E>$ есть вывод из последовательности посылок Г.

Аналогично получаем определение ВД1М1 и ВД1С1.

Определение ВД1С2

1. Если A аксиома, то $<< > A>$ есть вывод из пустого списка посылок.

2. Если из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула E, то $<<A_1> \ldots <A_k>E>$ есть вывод из списка посылок $[A_1 \ldots A_k]$.

3. Если α_1 есть вывод формулы A_1 из списка посылок $\Gamma_1, \ldots, \alpha_k$ есть вывод формулы A_k из списка посылок Γ_k и E непосредственно выводима из формул $A_1, \ldots, A_k$, то $<\alpha_1, \ldots, \alpha_k\ E>$ есть вывод из списка посылок $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

Аналогично определяем ВД1М2 и ВД1П2.

Какие структурные правила вывода будут иметь место относительно логистической системы с соответствующим понятием вывода, безотносительно к специальному характеру аксиом и правил вывода?

Структурное правило сечения или в форме $\dfrac{\Gamma|-C\{C\}\bigcup\Delta|-E}{\Gamma\bigcup\Delta|-E}$, или в форме $\dfrac{\Gamma|-C\ \ C*\Delta|-E}{\Gamma*\Delta|-E}$, или в форме $\dfrac{\Gamma|-C\ [C],\Delta|-E}{\Gamma,\Delta|-E}$ имеет место для логистической системы с любым из перечисленных понятий вывода. Доказательство основывается на возможности замены вхождения посылки C в выводе E из $\{C\} \cup \Delta(C*\Delta, [C], \Delta)$ на вывод формулы C из Г.

Правило перестановки посылок верно для всех логистических систем с понятием вывода из множества посылок, из списка посылок и всех логистических систем, вводимых индукцией по одной переменной.

В этих случаях правило перестановки посылок имеет место в силу коммутативности операции объединения множеств или свойств списка посылок и независимости выбора посылки из последовательности и списка посылок.

Структурное правило опускания повторяющейся посылки имеет место относительно всех систем с понятием вывода из множества посылок и с понятием вывода, введенных индукцией по одной переменной – в силу идемпотентности $\cup$ ($\Gamma \cup \{A\} \cup \{A\}=\Gamma \cup \{A\}$) и в силу того, что если A входит в последовательность $\Gamma_1*A*\Gamma_2*A*\Gamma_3$, то A входит и в последовательность $\Gamma_1*\Gamma_2*A*\Gamma_3$ (аналогично для списков).

Правило добавления посылки имеет место относительно всех логистических систем с выводом, введенным индукцией по одной переменной – в силу свойства, что если α есть вывод из посылок Г, то α есть вывод ив $\Gamma \cup \Delta$ ($\Gamma*\Delta$; $\Gamma\Delta$).

Правило размножения имеет место относительно всех логистических систем с выводом, введенным индукцией по одной переменной и понятием вывода из множества посылок; в первом случае по тем же основаниям, что и правило добавления, во втором – в силу идемпотентности теоретико-множественного объединения.

Рефлексивность имеет место относительно всех логистических систем, в которых допустима минимальная высота вывода 0.

Суммируем полученные результаты в следующей таблице:

	Рефл.	П	С	Р	Д
ВД0М1	+	+	+	+	+
ВД0С1	+	+	+	+	+
ВД0П1	+	+	+	+	+
ВД0М2	+	+	+	+	
ВД0С2	+	+			
ВД0П2	+				
ВД1М1		+	+	+	+
ВД1С1		+	+	+	+
ВД11П		+	+	+	+
ВД1М2		+	+	+	
ВД1С2		+			
ВД1П2					

Из таблицы видно, что относительно значимости структурных правил для определения вывода индукцией по одной переменной несущественно различие между выводом из множества, списка и последовательности посылок.

Случаи ВД0М1, ВД0С1 и ВД0П1 можно объединить в один: обозначим его посредством ВД0Т1. Поэтому результаты можно суммировать для выводов с высотой 0 в следующей таблице (мы получим таблицу для выводов с высотой 1, если укажем, что ни в одном из случаев рефлексивность не имеет места):

	Рефл.	П	С	Р	Д
ВД0Т1	+	+	+	+	+
ВД0М2	+	+	+	+	
ВД0С2	+	+			
ВД0П2	+				

§ 5. ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ ДЛЯ ИМПЛИКАТИВНЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим логистические системы с единственным правилом вывода из непустой последовательности посылок – modus ponens $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ *{m.p.*) и одним из понятий вывода в виде дерева.

Возникает вопрос о необходимых и достаточных условиях верности теоремы дедукции в одной из формулировок § 1.

Теорема 1. *Теорема дедукции* $\dfrac{X \mid -B}{X - \{A\} \mid - A \supset B}$ (1) , $\dfrac{\Gamma \mid -B}{\Gamma_A \mid - A \supset B}$ (3) , $\dfrac{\Pi \mid -B}{\Pi_A \mid - A \supset B}$ (7) , *справедлива относительно исчисления* Н *с единственным правилом вывода modus ponens и* ВД0М1 (ВД0С1, ВД0П1) *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуемы формулы вида*

$A\supset(B\supset A)$

$(A\supset(B\supset C)) \supset ((A\supset B) \supset(A\supset C))$

Доказательство.

Необходимость. Пусть относительно Н верна теорема дедукции. Из определения ВД0М1 следует, что $\{B\} \mid\!- B$.

По теореме дедукции $B \mid\!- A\supset B$ и $\mid\!-B\supset(A\supset B)$. $<<<A> <A\supset B> B> <<A> <A\supset(B\supset C)> B\supset C>C>$ есть вывод формулы C из посылок $\{A, A\supset B, A\supset(B\supset C)\}$. Трижды применяя теорему дедукции (1), получаем

$\mid\!- (A\supset(B\supset C)) \supset ((A\supset B) \supset(A\supset C))$.

Достаточность. Пусть в Н доказуемы формулы вида $A\supset(B\supset A)$ и $(A\supset(B\supset C)) \supset ((A\supset B)\supset(A\supset C))$ и в Н имеется одно правило вывода *m.p.*. Тогда относительно Н верна теорема дедукции вида (1).

Это утверждение доказываем индукцией по высоте данного вывода h $(h \geq 0)$.

Базис. (1) Высота данного вывода равна 0, т. е. вывод имеет вид $<B>$ и $B\in\mathbf{X}$.

Возможны два случая

B отлична от A

Строим результирующий вывод

$<<B> << > B \supset (A\supset B)> A\supset B>$

Единственная встречающаяся посылка в этом выводе – формула B, но $B \in X$. Поэтому $B \in (X-\{A\}) \cup \{A\}$, т. е. $B \in X-\{A\}$ или $B \in \{A\}$. Но последнее невозможно, так как по условию B отлична от A. Следовательно, $B \in X-\{A\}$ и результирующий вывод есть вывод из множества посылок $X-\{A\}$.

(1.2) B совпадает с A.

Строим результирующий вывод формулы $B \supset B$. Это вывод из пустого множества посылок, поэтому из любого, в частности из **X.**

(2) Высота данного вывода равна 1, т. е. вывод имеет вид $<< > B>$ или $<<C> <C \supset B> B>$, где $C \in X$ и $C \supset B \in X$.

(2.1) В первом случае строим результирующий вывод $<<< > B> << > B \supset (A \supset B)> A \supset B>$ из пустого множества посылок и тем самым из множества посылок $X - \{A\}$.

(2.2) *Р* ассмотрим второй случай. Здесь возможны три подслучая:

(2.2.1) A не совпадает ни с C, ни с $C \supset B$.

Строим результирующий вывод

$<<<C><C \supset B>B>$« $> B \supset (A \supset B)>A \supset B>$

$C \in X$ и C отлична от A, следовательно $C \in X-\{A\}$, аналогично $C \supset B \in X-\{A\}$. Поэтому построенный вывод есть вывод из множества посылок $X - \{A\}$.

(2.2.2) A совпадает с C

По условию $C \supset B \in X$ и $C \supset B$ отлично от C. Поэтому $<C \supset B>$ есть вывод из посылок $X - \{C\}$, т. е. $X- \{A\}$.

(2.2.3) A совпадает с $C \supset B$.

С помощью формул 1и 2 и *т.р.* может быть доказана формула $C \supset ((C \supset B) \supset B)$. Пусть α – ее вывод из пустого множества посылок. Теперь строим результирующий вывод $<<C > \alpha\ (C \supset B) \supset B>$. В выводе встречается только одна посылка C, по условию $B \in X$, но $C \supset B$ отлична от C, поэтому $C \in X-\{C \supset B\}$, т. е. $X-\{A\}$. Таким образом, построенный вывод есть вывод из множества посылок $X-\{A\}$.

Индукционный шаг. Пусть теорема дедукции справедлива для выводов высоты $\leq h$ (где $h \geq 1$). Докажем, что она имеет место для выводов высоты $h+1$.

По условию вывод имеет вид $<\alpha\beta E>$, где α есть вывод формулы B, а β есть вывод формулы $B \supset E$. Высота по крайней мере одного из этих выводов равна h $(h \geq 1)$, а другого не превосходит h. Все посылки, встречающиеся в выводе, входят в X.

По индуктивному допущению может быть построен вывод α' с последней формулой $A \supset B$ из множества посылок $X-\{A\}$, равным образом может быть построен вывод β' формулы $A\supset(B\supset E)$ из посылок X – $\{A\}$. На основании этих допущений строим результирующий вывод

$<\alpha'<\beta'<<>(A\supset(B\supset E))\supset(A\supset B)\supset(A\supset E))>(A\supset B)\supset(A\supset E)>A\supset E>$.

Это искомый вывод с последней формулой $A\supset E$ и все его посылки принадлежат множеству X–$\{A\}$. На основании принципа индукции с двойным базисом теорема 1 доказана.

Для логистических систем с ВД0С1 и ВД0П1 соответствующие теоремы дедукции вида (3) и (7) доказываются аналогично.

В формулировке теоремы 1 формулы вида

1. $A \supset (B\supset A)$ и 2. $(A\supset (B\supset C)) \supset ((A\supset B) \supset (A\supset C))$ могут быть заменены на формулы вида

(1) $A\supset A$

(2) $(A \supset (B\supset C)) \supset (B \supset (A\supset C))$

(3) $(A\supset B) \supset ((B\supset C)\supset(A\supset C))$

(4) $(A\supset(A\supset B)) \supset (A\supset B)$

(5) $(A\supset B) \supset(C\supset(A\supset B))$

Как с помощью 1 и 2 и *т.р.* доказать (1)–(5), хорошо известно.

Покажем, что с помощью (1)–(5) и *т. р*. доказываются 1 и 2.

При доказательстве 2 используем (2), (3) и (4)

1. $(A\supset B) \supset ((B\supset(A\supset C)) \supset (A\supset (A\supset C)))$ 3; $C/A\supset C$
2. $(B\supset (A\supset C)) \supset ((A\supset B) \supset (A\supset (A\supset C)))$ 2; m. p.; 3
3. $((A \supset B) \supset (A\supset (A\supset C))) \supset (((A\supset (A\supset C)) \supset (A\supset C)) \supset ((A \supset B) \supset$ $\supset(A\supset C)))$ 3; $A/A\supset B$, $B/A\supset(A\supset C)$; $C/A\supset C$
4. $(B\supset (A \supset C)) \supset (((A\supset (A \supset C)) \supset (A\supset C)) \supset ((A\supset B)\supset(A\supset C)))$ 3; m. p.; 2, 3
5. $((A\supset(A\supset C)) \supset (A\supset C)) \supset ((B\supset(A\supset C)) \supset ((A\supset B)\supset(A\supset C)))$ 2 m.p.; 4
6. $(A\supset(A\supset C)) \supset (A\supset C)$ 4; B/C
7. $(B\supset(A\supset C)) \supset ((A\supset B)\supset(A\supset C))$ m.p.; 6, 5
8. $(A \supset (B\supset C)) \supset (B \supset (A\supset C))$ 2
9. $(A\supset (B\supset C)) \supset ((A\supset B) \supset (A\supset C))$ 3 m.p.; 7, 8

При доказательстве 1 используем схемы (1), (2), (5)

1. $(A\supset A) \supset(B\supset(A\supset A))$ 5; B/A, C/B
2. $A\supset A$ 1
3. $B\supset(A\supset A)$ m.p.;1, 2
4. $(B \supset (A\supset A)) \supset (A \supset (B\supset A))$ 2; A/B, B/A, C/A
5. $A\supset(B\supset A)$ m.p.; 3,4

Теорема 2. *Относительно логистической системы* H *с единственным правилом вывода т.р. и* ВД1М1 (ВД1С1, ВД1П1) *справедлива тео-*

рема дедукции вида $\dfrac{\mathrm{X}|-B}{\mathrm{X}-\{A\}|-A\supset B}$ $\left(\dfrac{\Gamma|-B}{\Gamma_A -|-A\supset B}\ ,\ \dfrac{\pi|-B}{\pi_A|-A\supset B}\right)$ *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуемы формулы вида*

1a $(A\supset B)\supset(A\supset B)$

2 $(A\supset(B\supset C))\supset(B\supset(A\supset C))$

3 $(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$

4 $(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$

5 $(A\supset B)\supset(C\supset(A\supset B))$

Необходимость. Пусть относительно Н верна теорема дедукции. В Н строим выводы:

$<<A>\ <A\supset B>\ B>$ из посылок $\{A, A\supset B\}$,

$<<B>\ <<A>\ <A\supset(B\supset C)>\ B\supset C>\ C>$ из посылок $\{B, A, A\supset(B\supset C)\}$,

$<<<A>\ <A\supset B>B>\ <B\supset C>\ C>$ из посылок $\{A, A\supset B, B\supset C)$,

$<<A>\ <<A>\ <A\supset(A\supset B)>\ A\supset B>\ B>$ из посылок $\{A, A\supset(A\supset B)\}$,

$<<A>\ <A\supset B>\ B>$ из посылок $\{A, A\supset B\}$ и поэтому из посылок $\{A, A\supset B, C\}$.

Применяя теорему дедукции необходимое число раз, получаем доказательства формул вида 1а – 5.

Достаточность. Пусть в Н доказуемы формулы вида 1а – 5. Тогда относительно Н имеет место теорема дедукции.

Базис. Высота данного вывода равна 1, т. е. вывод имеет вид $<<>\ B>$ или $<<C>\ <C\supset B>\ B>$.

Рассмотрим первый случай. В не может быть элементарной формулой. Поэтому B имеет вид $E\supset F$. Но теперь результирующий вывод легко построить, используя схему 5:

$<<<>\ E\supset F>\ <<>\ (E\supset F)\supset(A\supset(E\supset F))>\ A\supset(E\supset F)>$

Рассмотрим второй случай. Он разбивается на 3 подслучая:

a) A совпадает с C

Тогда строим результирующий вывод

$<<C\supset B>\ <<>\ (C\supset B)\supset(C\supset B)>\ C\supset B>$

из множества посылок $\{C\supset B\}$ и поэтому из $\mathrm{X}-\{A\}$

b) A совпадает с $C\supset B$

Строим результирующий вывод

$<<C><<>(C\supset B)\supset(C\supset B)>\ <<>\ ((C\supset B)\supset(C\supset B))\supset(C\supset((C\supset B)\supset B))>$
$>C\supset((C\supset B)\supset B)>\ (C\supset B)\supset B>$

из множества посылок $\{C\}$, и так как A совпадает с $C\supset B$, то из $\mathrm{X}-\{A\}$

c) A отлично от C и $C\supset B$

Строим вывод из посылок $\{(C, C\supset B\}$

$<<C> <<<C\supset B> << >(C\supset B) \supset (A\supset(C\supset B))> A\supset(C\supset B)>$
$<< > (A\supset(C\supset B))\supset(C\supset(A\supset B))> C\supset(A\supset B)> A\supset B>$

Так как A отлично от C и $C\supset B$, то построенный вывод есть вывод из множества посылок $X - \{A\}$.

Индукционный шаг доказывается так же, как в теореме 1.

Для систем с понятием ВД1С1 и ВД1П1 и соответствующих формулировок теорем дедукции доказательства аналогичны.

Теорема 3. *Относительно логистической системы* Н *с единственным правилом вывода т.р. и* ВД0М2 *справедлива теорема дедукции вида* $\dfrac{\{A\}\cup X \mid\!- B}{X \mid\!- A\supset B}$ *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуемы формулы вида*

1. $A\supset A$
2. $(A \supset (B\supset C)) \supset (B \supset (A\supset C))$
3. $(A\supset B) \supset ((B\supset C)\supset(A\supset C))$
4. $(A\supset(A\supset B)) \supset (A\supset B)$

5а. $(A\supset B) \supset (A\supset(A\supset B))$

Доказательство.

Пусть относительно логистической системы с ВД0М2 и modus ponens имеет место теорема дедукции. Тогда в этой системе доказуемы формулы вида (1) – (5а). Действительно, из определения вывода $\{A\} \mid\!- A$ применение ТД дает (1). С использованием m.p. $\{A\supset B, B\supset C, A\} \mid\!- C$ и $\{A\supset (B\supset C), B, A\} \mid\!- C$.

Применяя правило перестановки посылок и ТД, получаем (3) и (2). $\{A\} \cup \{A\} \cup \{A\supset(A\supset B)\} \mid\!- B$, но $\{A\} = \{A\} \cup \{A\}$, отсюда $\{A\} \cup \{A\supset(A\supset B)\} \mid\!- B$ и по ТД получаем (4). $\{A\} \cup \{A\supset B\} \mid\!- B$, следовательно $\{A\} \cup \{A\} \cup \{A\supset B\} \mid\!- B$; трижды применяя ТД, получаем (5а).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть в логистической системе с ВД0М2 и единственным правилом вывода m.p. доказуемы формулы вида (1)–(5а); тогда относительно этой системы имеет место теорема дедукции.

Доказательство будем проводить индукцией по высоте данного вывода.

Базис. Высота данного вывода равна 0, поэтому данный вывод из посылок $X \cup \{E\}$ имеет вид $<E>$ и $X = \varnothing$ или $X = \{E\}$.

Пусть $X = \varnothing$; тогда надо найти результирующий вывод формулы $E\supset E$ из пустого множества посылок. Это легко осуществить на основе (1): $<< > E\supset E>$.

Пусть X = $\{E\}$. Тогда надо найти результирующий вывод формулы $E\supset E$ из $\{E\}$, что легко сделать:

$$<<E> <<< > E\supset E) << > (E\supset E) \supset (E\supset(E\supset E))> (E\supset(E\supset E)> E\supset E>$$

Высота данного вывода равна 1. Очевидно, что представление данного вывода в виде $<< >E>$, где E аксиома, невозможно, так как хотя он и имеет высоту $h = 1$, но из определения вывода следует, что $<< > E)$ не есть вывод формулы E из множества посылок X ∪ $\{A\}$. Поэтому остается рассмотреть возможность, когда данный вывод имеет вид $<<C> <C\supset E> E>$, где X ∪ $\{A\}$= =$\{C, C\supset E\}$.

Возможны четыре подслучая.
A совпадает с C, X = $\{C \supset E\}$.
В этом случае строим результирующий вывод $<C\supset E>$ из посылок X = $\{C\supset E\}$
2. A совпадает с $C \supset E$ и X = $\{C\}$.
Из (1) получаем доказательство формулы вида $(C\supset E) \supset (C\supset E)$. Из последней и 2 – доказательство формулы $C \supset ((C\supset E)\supset E)$. Обозначим доказательство последней α. Тогда результирующий вывод будет иметь вид $<<C>\alpha(C\supset E)\supset E>$. Это вывод из множества посылок X = $\{C\}$.
3. A совпадает с C, X = $\{C, C \supset E\}$.
В H доказуема формула $C \supset ((C \supset E) \supset (C \supset E))$:
$<<< >(C\supset E)\supset(C\supset(C\supset E))> << > ((C\supset E) \supset (C\supset(C\supset E)) \supset$
$\supset (C\supset((C\supset E)\supset(C\supset E)))> C\supset ((C\supset E)\supset(C\supset E))>$.

Обозначим это доказательство буквой α. *Р* езультирующий вывод имеет вид $<<C\supset E> <<C> \alpha\ (C\supset E)\supset(C\supset E)>> C\supset E>$

Это вывод из множества посылок X = $\{C, C\supset E\}$.
4. A совпадает с $C\supset E$, X = $\{C, C\supset E\}$.
Искомый результирующий вывод имеет вид

$$<<C \supset E> <<<C>\beta\ (C \supset E \supset E) > << > ((C \supset E) \supset E) \supset ((C \supset E) \supset$$
$$\supset((C \supset E) \supset E))> (C \supset E) \supset ((C\supset E) \supset E)> (C \supset E) \supset E>$$

где β есть вывод формулы $C \supset ((C \supset E) \supset E)$.

Индукционный шаг. Пусть высота данного вывода формулы E из X ∪ $\{A\}$ равна $k + 1$, где $k \geq 1$. Тогда формула E может быть получена из формул P и $P \supset E$, при этом высота вывода формулы P и высота вывода формулы $P \supset E$ не превышают k.. Возможны три случая:

1. вывод формулы P есть вывод из посылок $\{A\}$ ∪ $\mathbf{X}_1$, а вывод формулы $P \supset E$ есть вывод из посылок $\{A\}$ ∪ $\mathbf{X}_2$, где $\mathbf{X}_1$ ∪ $\mathbf{X}_2$ = $\mathbf{X}$;

2. вывод формулы P есть вывод из посылок $\{A\}$∪ X_1 и формулы $P \supset E$ – из посылок X_2, где X_1 ∪ X_2 = X;

3. вывод формулы P есть вывод из посылок $\{A\} \cup X_1$, а формулы $P \supset E$ из посылок $\{A\} \cup X_2$, где $X_1 \cup X_2 = X$.

Случай, когда вывод формулы P есть вывод из X_1, а $P \supset E$ – из X_2, где $X_1 \cup X_2 = X$, невозможен, если $A \notin X$, тАк как согласно определению вывода каждая посылка используется в выводе. Если же $A \in X$, то $A \in X_1$ или $A \in X_2$ или $A \in X_1$ и $A \in X_2$, тогда эти случаи сводятся к указанным трем выше (так как если $A \in X_1$, то $X_1 = X_1 \cup \{A\}$ и т. п.).

Пусть имеет место первый случай. Тогда по индуктивному предположению может быть построен вывод α_2 формулы $A \supset (P \supset E)$ из посылок X_2. Пусть α_1 есть вывод формулы P из посылок X_1. По условию теоремы существует вывод формулы $(A \supset (P \supset E)) \supset (P \supset (A \supset E))$ из пустого множества посылок – пусть это вывод α_3. Отсюда легко находим результирующий вывод формулы $A \supset E$ из посылок $X = X_1 \cup X_2$:

$<\alpha_1<\alpha_2\alpha_3 \mathrm{P} \supset (A \supset E)>A \supset E>$

Пусть имеет место второй случай. Тогда по индуктивному предположению может быть построен вывод β_1 формулы $A \supset P$ из посылок X_2. Пусть β_2 есть вывод формулы $P \supset E$ из посылок X_2. По условию теоремы существует вывод формулы $(A \supset P) \supset ((P \supset E) \supset (A \supset E))$ из пустого множества посылок – пусть это вывод β_3. Искомым результирующим выводом из посылок $X = X_1 \cup X_2$ будет вывод вида:

$<\beta_2 <\beta_1\beta_3 (P \supset E) \supset (A \supset E)> A \supset E>$

Пусть имеет место третий случай. Тогда по индуктивному предположению могут быть построены вывод γ_1 формулы $A \supset P$ из посылок X_1 и вывод γ_2 формулы $A \supset (P \supset E)$ из посылок X_2. По условию теоремы существуют доказательства формул вида (2), (3) и (4); тогда существует и доказательство формулы вида $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (B \supset C)$.

Обозначим доказательство формулы $(A \supset (P \supset E)) \supset ((A \supset P) \supset (A \supset E))$ посредством γ_3. Тогда $<\gamma_1<\gamma_2\gamma_3 (A \supset P) \supset (A \supset E)> A \supset E>$ есть искомый результирующий вывод формулы $A \supset E$ из посылок $X = X_1 \cup X_2$.

Теорема 4. *Относительно логистической системы* H *с единственным правилом вывода т.р. и* ВД1М2 *справедлива теорема дедукции, вида* $\dfrac{\{A\} \cup X \mid - B}{X \mid -\supset B}$ *тогда и только тогда, когда в* H *доказуемы формулы вида*

1a. $(A \supset B) \supset (A \supset B)$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$
3. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
4. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$

5a. $(A \supset B) \supset (A \supset (A \supset B))$

Необходимость доказываем так же, как в теореме 2 (опуская доказательство схемы 5, которое для ВД1М2 не проходит). Доказательство 5а: $<<A> <A \supset B> B>$ есть вывод из $\{A \supset B\} \cup \{A\}$, следовательно и из $\{A \supset B\} \cup \{A\} \cup \{A\}$.

Достаточность. Пусть в Н доказуемы формулы вида 1а–5а; тогда относительно Н имеет место теорема дедукции $\dfrac{\{A \bigcup X \mid -B}{X \mid -A \supset B}$.

Базис. Высота данного вывода равна 1, т. е. вывод имеет вид $<< > B>$ или $<<C> <C \supset B> B>$.

Первый случай невозможен, так как $<< > B>$ не есть вывод из $\{A\} \cup$ X.

Второй случай распадается на 4 подслучая.

1. A совпадает с C, X = $\{C \supset B\}$. P езультирующий вывод имеет вид $<<C \supset B> << > (C \supset B) \supset (C \supset B) > C \supset B>$.

Это вывод из множества посылок X = $\{C \supset B\}$.

2. A совпадает с $C \supset B$, X = $\{C\}$. P езультирующий вывод имеет вид $<<C <<< > (C \supset B) \supset (C \supset B)> << > ((C \supset B) \supset (C \supset B)) \supset (C \supset$ $\supset((C \supset B) \supset B))> C \supset ((C \supset B) \supset B) > ((C \supset B) \supset B>$

3. A совпадает с C, X = $\{C \supset B, C\}$.

В Н доказуема формула $C \supset ((C \supset B) \supset (C \supset B))$:

$<<< > 5a> << > 2 > C \supset ((C \supset B) \supset (C \supset B))>$.

Обозначим этот вывод буквой α. Тогда результирующий вывод имеет вид

$<<C \supset B> <<C> \alpha\ (C \supset B) \supset (C \supset B)> C \supset B>$

Это вывод из множества посылок X = $\{C \supset B, C\}$.

4. A совпадает с $C \supset B$, X = $\{C \supset B, C\}$.

Пусть β есть доказательство формулы $C \supset \{(C \supset B) \supset B)$. Результирующий вывод имеет вид

$<<C \supset B> <<<C> \beta\ (C \supset B) \supset B> << >5a>(C \supset B) \supset ((C \supset B) \supset B) >$
$> (C \supset B) \supset B>$.

Индукционный шаг доказывается так же, как в теореме 3.

Теорема 5. *Относительно логистической системы* Н с *единственным правилом вывода т.р. и* ВД0С2 *справедлива теорема дедукции вида* $\dfrac{A, \Gamma \mid -B}{\Gamma_A \mid -A \supset B}$ *тогда и только тогда, когда в Н доказуемы формулы вида*

1. $A \supset A$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$
3. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
4. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$

Доказательство.

Необходимость. В Н $[A] \vdash A$, $[A, B, A \supset (B \supset C)] \vdash C$, $[A, A \supset B, B \supset C] \vdash C$ и $[A, A, A \supset (A \supset B)] \vdash B$.

Применяя необходимое число раз теорему дедукции, получаем доказательства формул 1–4.

Достаточность.

Базис. Высота вывода равна 0 или 1. Пусть высота вывода равна 0. Тогда вывод имеет вид $<B>$. В этом случае A совпадает с B и Γ пусто, так как каждая посылка должна использоваться в выводе.

В этом случае результирующий вывод будет иметь вид $<< >A \supset A>$.

Пусть высота вывода равна 1. Тогда вывод имеет вид $<<C> <C \supset B > B>$. Возможны два случая: (1) A есть C а $\Gamma = [C \supset B]$ и (2) A есть $C \supset B$ и $\Gamma = [C]$.

Первый результирующий вывод имеет вид $(C \supset B>$, второй –
$<<C> <<(C \supset B) \supset (C \supset B)> << > 3> C \supset ((C \supset B) \supset B> (C \supset B) \supset B>$

Индукционный шаг доказываем аналогично индукционному шагу теоремы 3.

Теорема 6. *Относительно логистической системы* Н *с единственным правилом вывода т.р. и* ВД1С2 *справедлива теорема дедукции вида* $\dfrac{A, \Gamma \mid -B}{\Gamma_A \mid -A \supset B}$ *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуемы формулы вида*

1. $(A \supset B) \supset (A \supset B)$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$
3. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)$
4. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$.

Базис доказывается аналогично пунктам 1 и 2 базиса теоремы 4.

Индукционный шаг доказывается так же, как в теореме 3.

Теорема 7. *Относительно логистической системы* Н с *единственным правилом вывода т.р. и* ВД0С2 *справедлива теорема дедукции вида* $\dfrac{A, \Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \supset B}$ *тогда и только тогда, когда в Н доказуемы формулы вида*

1. $A \supset A$
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$

3. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

Доказательство.

Пусть относительно логистической системы с ВД0С2 и m. p. имеет место теорема дедукции $\dfrac{\Gamma, A \mid -E}{\Gamma \mid -A \supset E}$. Тогда в этой системе доказуемы формулы (1) – (3), так как $[A] \vdash A$, $[A \supset B*B \supset C*A] \vdash C$ и $[A \supset (B \supset C)*A*B] \vdash C$. Применяя ТД, получаем доказуемость (1) – (3).

Пусть в логистической системе с ВД0С2 с единственным правилом вывода m.p. доказуемы формулы (1) – (3), тогда имеет место ТД.

Базис. Высота данного вывода равна 0, данный вывод формулы E из списка посылок Γ, A имеет вид $\langle E \rangle$, $\Gamma = \wedge$ и $A \approx$ E. Искомым результирующим выводом для вывода E из $[E]$ будет вывод формулы $E \supset E$, который может быть построен согласно условию теоремы.

Высота данного вывода равна 1. Вывод высоты 1 из посылок Γ, A не может иметь вид $\langle\langle\ \rangle E\rangle$, так как он не является выводом из непустого списка посылок. Остается рассмотреть случай, когда вывод имеет вид $\langle\langle C\rangle (C \supset E)\rangle E\rangle$.

Возможны два подслучая:

1. A есть C, Γ есть $C \supset E$. Результирующий вывод имеет вид $\langle\langle C \supset E) \langle\langle\ \rangle (C \supset E) \supset (C \supset E)\rangle\ C \supset E\rangle$

2. A есть $C \supset E$, Γ есть C. Результирующий вывод имеет вид $\langle\langle C\rangle \langle\langle\langle\ \rangle (C \supset E) \supset (C \supset E)\rangle \langle\langle\ \rangle ((C \supset E) \supset (C \supset E)) \supset (C \supset$
$\supset ((C \supset E) \supset E)\rangle\ C \supset ((C \supset E) \supset E)\rangle\ (C \supset E) \supset E\rangle$

Индукционный шаг. Пусть высота данного вывода формулы E из Γ, A равна k + I $(k \geq 1)$. Формула E получается из формулы P и $P \supset E$ и высоты выводов этих формул не превышают k.

Возможны два случая:

1. вывод формулы P есть вывод из списка посылок Δ_1, а формулы $P \supset E$ – из списка посылок Δ_2, A, где Δ_1, Δ_2 = Γ;

2. вывод формулы P есть вывод из списка посылок Δ_1, A, а вывод формулы $P \supset E$ – из списка посылок Δ_2, где Δ_1, Δ_2 = Γ.

Два других случая (вывод P из Δ_1 и вывод $P \supset E$ из Δ_1; вывод P из Δ_1, A и $P \supset E$ из Δ_2, A) исключаются, так как согласно определению вывода каждое вхождение формулы в список посылок должно использоваться в выводе и притом только один раз. Оба случая рассматриваются аналогично соответствующим случаям индукционного шага теоремы 3.

Теорема 8. *Относительно логистической системы* Н *с единственным правилом вывода т.р.* ВД1С2 *справедлива теорема дедукции вида* $\dfrac{A,\Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \supset B}$ *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуемы формулы вида*

1. $(A \supset B) \supset (A \supset B)$
2. $(A \supset (B \supset C) \supset (B \supset (A \supset \mathrm{C}))$
3. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

Доказательство.

Пусть относительно Н с ВД1С2 имеет место теорема дедукции вида $\dfrac{A,\Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \supset B}$. Тогда в Н можно построить выводы $<<A> <A \supset B>B>$, $<<B> <<A> <A \supset (B \supset C)>B \supset C>C>$, $<<<A> <A \supset B>B> <B \supset \mathrm{C}>\mathrm{C}>$, применяя ТД, получаем доказательства формул вида 1–3.

Пусть в Н с m.р. и ВД1С2 доказаны формулы вида 1–3, тогда имеет место теорема дедукции.

Базис доказываем так же, как вторую половину базиса теоремы 7 (с $h = 1$); индукционный шаг также, как в теореме 7.

Попытка найти необходимые и достаточные условия справедливости теоремы дедукции формы $\dfrac{A,\Pi \mid -B}{\Pi \mid -A \supset B}$ не увенчалась успехом. Если для логистической системы с ВД0П2 такие условия видеть в доказательстве формул вида $A \supset A$ и $(B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$, то доказательство проваливается в индукционном шаге при условии, что P выводима из пустой последовательности посылок, а $P \supset B$ из $A\Pi$.

Однако попытка такого доказательства наталкивает на следующую теорему 9.

Теорема 9. *Относительно логистической системы* Н с *единственным правилом вывода т.р. и* ВД0П2 *справедлива теорема дедукции вида* $\dfrac{A,\Pi \mid -B}{\Pi \mid -A \supset B}$ *тогда и только тогда в* Н *доказуемы формулы вида*

1. $A \supset A$
2. $(B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset B)$

и относительно Н *имеет место теорема* (М): «*если существует доказательство формулы* D, *то существует доказательство формулы* $(A \supset (D \supset B)) \supset (A \supset B)$»[6].

[6] Последнее условие мы не рискуем писать

Доказательство

Пусть относительно Н имеет место ТД вида $\dfrac{A, \Pi \mid -B}{\Pi \mid -A \supset B}$,

тогда в Н доказуемы формулы вида 1–2 и имеет место утверждение М.

Действительно следующие фигуры являются выводами в Н: <*A*> есть вывод из *A*, <<<*A*> <*A* ⊃ *B*>*B*> <*B* ⊃ C>C> есть вывод из *A* *A* ⊃ *B* *B* ⊃ C.

Применяя ТД, получаем доказательства формул 1–2. Пусть α есть доказательство формулы *D*. При этом условии может быть построен вывод <α <<*A*<*A* ⊃ (*D* ⊃ *B*)>*D* ⊃ *B*>*B*> из посылок *A* *A* ⊃ *B* *B* ⊃ *C*). Применяя дважды ТД, получаем доказательство формулы (*A* ⊃ (*D* ⊃ *B*)) ⊃ ⊃(*A* ⊃ *B*).

Пусть в Н с m.p. и ВД0П2 доказуемы формулы вида 1–2 и справедлива теорема М, тогда относительно Н справедлива теорема дедукции.

Базис. Высота данного доказательства равна 0. Вывод имеет вид <*B*>. В этом случае *B* есть *A* и П – пустая последовательность. Результирующий вывод имеет вид << >*B* ⊃ *B*>.

Высота данного доказательства равна 1. Данный вывод имеет вид <<*C*> <*C* ⊃ *B*>*B*>. Возможен только один случай.

A есть *C*, П есть *C* ⊃ *B*. Результирующим выводом будет вывод <*C* ⊃ *B*>.

Случай, когда *A* есть *C* ⊃ *B* и П есть *A*, невозможен, так как не имеет места правило перестановки посылок.

Индукционный шаг. Пусть высота данного вывода формулы *B* из последовательности посылок *A* П равна k+1 (*k* ≥ 1). Тогда формула *B* может быть получена из формул *P* и *P* ⊃ *B* по m.p. Возможны два случая

1. *P* есть последняя формула вывода из последовательности посылок $A\psi_1$, *P* ⊃ *B* есть последняя формула вывода из последовательности посылок ψ_2, где $\Pi = \psi_1\psi_2$.

2. *P* выводима из пустой последовательности посылок, *P* ⊃ *B* выводима из последовательности посылок *A* П.

Рассмотрим первый случай. По индуктивному допущению может быть построен вывод формулы *A* ⊃ *P* из последовательности посылок ψ_1, пусть это будет вывод α. Обозначим вывод формулы *P* ⊃ *B* из последовательности посылок ψ_2 буквой β.

Результирующий вывод будет иметь вид

3.(*A* ⊃ (*D* ⊃ *B*)) ⊃ (*A* ⊃ *B*), где *D* доказуемая формула, во избежание круга в определении.

$<\alpha< \beta<< > (P \supset B) \supset ((A \supset P) \supset (A \supset B)) > (A \supset P) \supset (A \supset B)> A \supset B >$

Рассмотрим второй случай. По индуктивному допущению может быть построен вывод формулы $A \supset (P \supset B)$ из последовательности посылок П; пусть α есть доказательство формулы P , а β есть вывод формулы $A \supset (P \supset B)$ из посылок П. Так как существует доказательство α формулы P , то согласно метатеореме М существует доказательство формулы $(A \supset (P \supset B)) \supset (A \supset B)$; обозначим доказательство последней формулы α′. Теперь легко построить результирующий вывод

$< \beta\alpha' A \supset B >$

Теорема 10. *Относительно логистической системы* Н *с единственным правилом вывода т.р. и* ВД1П2 *справедлива теорема дедукции вида* $\dfrac{A, \Pi \mid - B}{\Pi \mid - A \supset B}$ *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуемы формулы вида*

1. $(A \supset B) \supset (A \supset B)$
2. $(B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

и имеет место теорема М.

Доказательство получим из доказательства теоремы 9, отбросив первую часть доказательства базиса.

Легко видеть, что если относительно системы Н с выводом в виде дерева из последовательности посылок справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{A, \Pi \mid - B}{\Pi \mid - A \supset B}$ и в Н доказуемы формулы вида $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$, то относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\Pi A_{\psi} \mid - B}{\Pi_{\psi} \mid - A \supset B}$.

Если относительно системы Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\Pi A_{\psi} \mid - B}{\Pi_{\psi} \mid - A \supset B}$ и в Н доказуемы формулы вида $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$, то относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\Pi A_{\psi} \mid - B}{\Pi_{A}\psi_{\mathrm{A}} \mid - A \supset B}$.

Если относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\Pi A_{\psi} \mid - B}{\Pi_{A}\psi_{\mathrm{A}} \mid - A \supset B}$ и в Н доказуемы формулы вида $(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$, то относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\Pi \mid -B}{\Pi_A \mid -A \supset B}$.

Верны и обращения сформулированных выше утверждений.

Если относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\mathrm{A}, \Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \supset B}$ и в Н доказуемы формулы вида $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$, то относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\mathrm{A}, \Gamma \mid -B}{\Gamma_{\mathrm{A}} \mid -A \supset B}$.

Если относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\mathrm{A}, \Gamma \mid -B}{\Gamma_{\mathrm{A}} \mid -A \supset B}$ и в Н доказуемы формулы вида $(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$, то относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\Gamma \mid -B}{\Gamma_{\mathrm{A}} \mid -A \supset B}$.

Верны и обращения сформулированных теорем.

Наконец относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\mathrm{X} \mid -B}{\mathrm{X} - \{A\} \mid -A \supset B}$ тогда и только тогда, когда относительно Н справедлива теорема дедукции вида $\dfrac{\{A\} \cup \mathrm{X} \mid -B}{\mathrm{X} \mid -A \supset B}$ и в Н доказуемы формулы вида $(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$.

Систематизируем полученные результаты в таблице на следующей странице для выводов в форме дерева с минимальной высотой $h = 0$, введенных индукцией по двум переменным.

Для выводов с минимальной высотой $h = 1$ мы получим соответствующую таблицу, заменив $A \supset A$ на $(A \supset B) \supset (A \supset B)$.

$\dfrac{X \vdash B}{X - \{A\} \vdash A \supset B}$ 1.$A \supset A$ 2.$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)$ 3.$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ 4.$(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$ 5.$(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$	$\dfrac{\{A\} \cup X \vdash B}{X \vdash A \supset B}$ 1.$A \supset A$ 2.$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)$ 3.$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ 4.$(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$ 5A.$(A \supset B) \supset (A \supset (A \supset B))$	
$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma_{A} \vdash A \supset B}$ $\dfrac{\Pi \vdash B}{\Pi_{A} \vdash A \supset B}$ 1.$A \supset A$ 2.$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)$ 3.$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ 4.$(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$ 5.$(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma_{A} \vdash A \supset B}$ $\dfrac{\Pi A_{\psi} \vdash B}{\Pi_{A} \psi_{A} \vdash A \supset B}$ 1.$A \supset A$ 2.$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)$ 3.$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ 4.$(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$	$\dfrac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$ $\dfrac{\Pi A_{\psi} \vdash B}{\Pi \psi \vdash A \supset B}$ 1.$A \supset A$ 2.$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)$ 3.$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

§ 6. ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ ДЛЯ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРАВИЛОМ ОБОБЩЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали логистические системы с единственным правилом вывода modus ponens. Если относительно системы Н верна теорема дедукции в одной из приведенных формулировок, то теорема дедукции будет справедлива и для расширения системы Н – если расширение осуществляется за счет добавления новых аксиом и схем аксиом.

При расширении системы за счет добавления новых правил вывода – в общем случае теорема дедукции может и не сохраниться. Теорема дедукции не нарушается, если новые правила таковы, что применяются лишь к формулам, не зависящим от посылок.

Для нас представляют особый интерес логистические системы, содержащие правило обобщения наряду с modus ponens. Напоминаем, что правило обобщения имеет вид $\dfrac{A}{\forall x F_x^w A}$. Мы будем просто писать $\dfrac{Aw}{\forall x A x}$ имея в виду, что w не обязательно входит в Aw.

При формулировке теорем дедукции мы потребуем, чтобы ни одна переменная в устраняемой посылке не варьировалась.

Теорема 1. *Если относительно* Н *с единственным правилом вывода т.р. справедлива теорема дедукции (некоторого вида), то относительно расширения* Н *путем добавления правила обобщения справедлива теорема дедукции (того же вида) тогда и только тогда, когда в расширении* Н *доказуемы формулы вида* $\forall x F_x^w (C \supset Aw) \supset (C \supset \forall x F_x^w Aw)$, где C не содержит свободной переменной w.

Если мы рассматриваем теорему дедукции для логистических систем с понятием вывода, введенном индукцией по двум нереmenным, то в индукционный шаг доказательства следует добавить дополнительный случай:

Данный вывод имеет вид <$\alpha\forall x Bx$> где α есть вывод из посылок A, Г формулы Bw.

По условию ни одна переменная посылки A не варьируется в данном выводе, поэтому A не содержит w. По индуктивному допущению мы можем построить вывод формулы $A \supset Bw$ из посылок Г (Γ_A); пусть это будет вывод β. Теперь легко строим результирующий вывод

<< $\beta\forall x\,(A \supset Bx)$> << > $\forall x\,(A \supset Bx) \supset (A \supset \forall x Bx)$> $A \supset \forall \boldsymbol{x} B\boldsymbol{x}$)

Если доказывается теорема дедукции для логистических систем с понятием вывода по одной переменной и теорема дедукции имеет вид $\dfrac{\Gamma \mid -B}{\Gamma_{\text{A}} \mid -A \supset B} \left(\dfrac{X \mid -B}{X - \{A\} \mid -A \supset B} \right)$, то дополнительный пункт разбиваем на два подпункта, (а) A входит в данный вывод; в этом случае результирующий вывод строим так же, как было сделано выше; (в) A не входит в данный вывод. Тогда данный вывод есть вывод из посылок $\Gamma_A(\text{X} - \{A\})$. Результирующий вывод будет иметь вид

$<<\alpha\forall xBx> << > \forall xBx \supset (A \supset \forall xBx)> \forall xBx>$

Легко видеть, что если относительно Н с m.p. и правилом обобщения справедлива теорема дедукции, то в Н доказуема формула вида С $\forall xF_x^w (C \supset Aw) \supset (C \ \supset \ \forall xF_x^w Aw)$, где C не содержит w. Строим вывод

$<<<C> << \ \forall xF_x^w (C \supset Aw)> < \ \forall xF_x^w (C \supset Aw) \supset (C \ \supset Aw)> (C \ \supset Aw)>$
$>Aw> \forall xAx>$

из посылок C и $\forall x \ (C \supset Ax)$. Дважды применяя теорему дедукции, получаем доказательство формулы $\forall x \ (C \supset Ax) \supset (C \ \supset \forall xAx)$.

Если правило обобщения применять только по переменным, не входящим в посылки, то, как было отмечено выше, теорему дедукции можно формулировать и применять без всяких ограничений, связанных с варьированием.

§ 7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом параграфе мы затронем два круга вопросов.

Первый из них относится к некоторым дополнительным модификациям теоремы дедукции. Рассматривая выше различные виды теоремы дедукции, мы на множество, список и последовательность формул накладывали лишь одно ограничение – требовали, чтобы они были конечны (возможно и пусты).

Если различные виды импликации характеризовать правилом modus ponens и теоремой дедукции определенной формулы, то имеет смысл рассмотреть такие формы теоремы дедукции, которые накладывают более сильные требования на мощность посылок Г. Можно потребовать, чтобы Г была пустой, состояла бы не более чем из 1 элемента, 2 элементов, вообще не более чем из k элементов. А. В. Кузнецов предложил дедукционные теоремы с требованием, чтобы в Г было не более k членов, называть k -дедукционными теоремами.

Легко видеть, что если имеет место 2-дедукционная теорема, то имеет место и соответствующая теорема без дополнительных ограничений на Г.

Поэтому представляет некоторый интерес рассмотреть 1-дедукционные и 0-дедукционные теоремы. Однако здесь мы этого делать не будем.

Второй вопрос относится к одной форме вывода, не рассмотренной в предыдущих параграфах. Это так называемые системы линейного рассуждения.

Приведем логистическую систему с понятием вывода в виде последовательности формул, в которой каждая формула непосредственно выводима из непосредственной ей предшествующей в этой последовательности. *А*ксиом нет; все правила вывода имеют вид $\frac{A}{B}$. Тогда формальный вывод определяется следующим образом:

1. если A формула, то A вывод;

2. если αA вывод и из A непосредственно выводима B, то αAB есть вывод.

Если α есть вывод, A – первая и B последняя формулы, то α есть вывод формулы A из формулы B**.**

Приведем пример логистической системы с указанным понятием вывода, формализующей классическую логику высказываний.

Язык обычный, пропозициональными связками являются &, V, ⊃, ¬. Пусть C формула; A формула, входящая в С. Тогда C_A есть формула C с фиксированным вхождением в нее формулы A.

Понятие фиксированного вхождения формулы A в С легко определить индукцией по построению формулы (тем самым это определение преобразуется в рекурсивное).

1. A есть формула с фиксированным вхождением в нее A.

2. Если D есть формула с фиксированным вхождением в нее A, то $\neg D$ есть формула с фиксированным вхождением в нее A.

3. Если D есть формула с фиксированным вхождением в нее формулы A и B произвольная формула, то $D\&B$, $B\&D$, $D\vee B$, $B\vee D$, $D\supset B$, $B\supset D$ есть формулы с фиксированным вхождением в них формулы A.

Все правила имеют вид $\frac{C_A}{C_B}$, где C_B есть результат замещения фиксированного вхождения формулы A на формулу B.

В качестве правил вывода примем следующие:

$$R_1\,\frac{C_{A\vee B}}{C_{B\vee A}}, \qquad R_2\,\frac{C_{A\&(B\vee D)}}{C_{A\&B\vee A\&D}}, \qquad R_3\,\frac{C_{A\&B\vee A\&D}}{C_{A\&(B\&D)}},$$

$R_4 \dfrac{C_{A\vee\neg A}}{C_{B\vee\neg B}}$, $R_5 \dfrac{C_{A\vee B\&D}}{C_{(A\vee B)\&(A\vee D)}}$, $R_6 \dfrac{C_{(A\vee B)\&(A\vee D)}}{C_{A\vee B\&D}}$,

$R_7 \dfrac{C_{A\&\neg A}}{C_{B\&\neg B}}$, $R_8 \dfrac{C_A}{C_{A\vee A\&\neg A}}$, $R_9 \dfrac{C_{A\vee A\&\neg A}}{C_A}$,

$R_{10} \dfrac{C_{A\supset B}}{C_{\neg A\vee B}}$, $R_{11} \dfrac{C_{\neg A\vee B}}{C_{A\supset B}}$.

Относительно построенного исчисления могут быть доказаны теоремы:

1. Если α есть вывод формулы B из формулы A, то A логически эквивалентно B;

2. Если A логически эквивалентно B, то существует последовательность формул α, такая, что α есть вывод формулы B из формулы A.

Построенная система не есть алгебра, хотя ее правила и копируют эквивалентности булевой алгебры. (Аксиоматика заимствована из [32; 190–191].) Отличие в том, что построенная система есть логистическая система и она не предполагает классическое исчисление предикатов. Булева алгебра (в том числе булева алгебра высказываний), строится внутри исчисления предикатов первого порядка и предполагает теоретико-множественную (классическую) семантику.

§ 8. ПРОИЗВОДНЫЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА ДЛЯ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА

Относительно систем гильбертскоовгo типа могут быть доказаны некоторые производные правила вывода. Производные правила вывода могут быть двух видов: прямые и непрямые (косвенные) правила.

Прямые правила вывода суть не что иное, как метатеоремы, утверждающие, что из таких-то посылок всегда может быть построен вывод с конечной формулой такого-то типа. Прямые правила будем записывать посредством выражения Г $\vdash B$.

Примеры прямых правил: $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset$ C; $A \supset B \vdash \neg B \supset \vdash A$; $\neg\neg A \vdash A$.

Прямые правила вывода позволяют сокращать выводы, их можно использовать при построении вывода, так как их всегда можно заменить готовыми блоками-выводами.

Непрямые правила вывода (или правила косвенного рассуждения) суть не что иное, как метатеоремы, утверждающие, что если могут быть построены такие-то и такие-то выводы (которые называют данными выводами), то может быть построен такой-то вывод, называемый результирующим. Непрямые правила мы будем записывать в виде

$$\frac{\Gamma_1 B_{1 \ldots} \Gamma_k \mid - B_k}{\Delta \mid - A}$$

Примером непрямого правила вывода может служить теорема дедукции.

Непрямые правила вывода всегда могут быть сформулированы как алгорифмы, преобразующие данные выводы в результирующий.

Так, если относительно исчисления Н верна теорема дедукции $\frac{\mathrm{A}, \Gamma \mid - B}{\Gamma_{\mathrm{A}} \mid - A \supset B}$, то из доказательства теоремы дедукции мы можем извлечь все необходимое для формулировки алгорифма, преобразующего вывод формулы B из посылок A, Г (в этом выводе ни одна переменная не варьируется относительно A) в вывод формулы $A \supset B$ из посылок Γ_{A}.

Отметим, что если относительно исчисления Н имеет место некоторое производное прямое правило вывода $\Gamma \models B$, то исчисление Н, возникшее из A за счет добавления дополнительного основного правила вывода вида $\frac{\Gamma}{B}$, эквивалентно исчислению Н.

Представляет интерес рассмотреть производные правила, носящие название правил введения и удаления логических знаков.

Теорема1. *Если правилами вывода логистической системы* Н *является modus ponens и правило обобщения и относительно* Н *имеет место теорема дедукции вида* $\frac{\boxed{A}, \Gamma \mid - B}{\Gamma \mid - A \supset B}$, *то*

(1) $\frac{\boxed{A}, \Gamma \mid - C \boxed{B}, \Gamma \mid - C}{A \vee B, \Gamma \mid - C}$ *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуема формула вида* $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

(2_1) $A \models A \vee B$ *тогда и только тогда, когда* $\models A \supset A \vee B$

(2_2) $B \models A \vee B$ » $\models B \supset A \vee B$

(3) $A, B \models A \& B$ » $\models A \supset (B \supset A \& B)$

(4) $A \& B \models A$ *тогда и только тогда, когда* $\models A \,\&\, B \supset A$

(5) $A \& B \models B$ » $\models A \& B \supset B$

(6) $\frac{\boxed{A}, \Gamma \mid - B \boxed{A}, \Gamma \mid - \neg B}{\Gamma \mid - \neg A}$ » $\models (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

(7) $\dfrac{\Gamma \mid - \neg A}{A, \Gamma \mid - B \,\&\, \neg B}$ » $\mid\!- \neg A \supset (A \supset B \,\&\, \neg B)$

(8) $\dfrac{\boxed{Aw}, \Gamma \mid - A}{\exists x A x, \Gamma \mid\!-^{w} B}$ *тогда и только тогда, когда в* Н *доказуема формула вида* $\forall x F_x^w (Aw \supset B) \supset \left(\exists x F_x^w Aw \supset B\right)$, *где B не содержит w*

(9) $F_t^w Aw \mid - \exists x F_x^w Aw$ *тогда и только тогда, когда* $\mid - F_t^w Aw \supset \exists x F_x^w Aw$

(10) $\forall x F_t^w Aw \mid - F_t^w Aw$ » $\mid\!- \forall x F_x^w Aw \supset F_t^w Aw$

(11) $\dfrac{\boxed{A}, \Gamma \mid - \neg B}{B, \Gamma \mid - \neg A}$ » $\mid\!-(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$

Доказательство тривиально.

В дальнейшем для нас будут представлять интерес логистические системы, понятие вывода которых не дает оснований для доказательства теоремы о добавлении посылок. Этому требованию удовлетворяют логистические системы с понятием вывода из списка посылок (последовательности посылок), введенным индукцией по двум переменным. Логистические системы такого типа мы будем называть логистическими исчислениями с понятием сильного вывода.

Однако если относительно логистической системы доказуемы правила (3) – (5) предыдущей теоремы, то относительно этой логистической системы имеет место и правило добавления.

Рассмотрим исчисление Н с тремя правилами вывода: modus ponens, обобщения и ВК $\dfrac{AB}{A \,\&\, B}$ *. Последнее правило применяется, если формулы A и B не зависят от посылок. Правило обобщения применяем лишь по тем свободным переменным, которые не входят в посылки. Поэтому никаких дополнительных ограничений на варьирование для теоремы дедукции и других непрямых правил не требуется. Вывод рассматривается как дерево, он есть вывод из списка посылок и вводится индукцией по двум переменным.

Теорема 2. *Если правилами вывода логистической системы* Н *являются modus ponens, правило обобщения и* ВК *и в* Н *теорема дедукции* $\dfrac{\Gamma, A \mid - B}{\Gamma \mid - A \supset B}$ *и прямые правила* $A \,\&\, B \mid\!- A$ *и* $A \,\&\, B \mid\!- B$ *производны, то*

(3°) $\dfrac{\Gamma \mid - A \Gamma \mid - B}{\Gamma \mid - A \,\&\, B}$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\mid\!- (C \supset A) \,\&\, (C \supset B) \supset (C \supset A \,\&\, B)$

(1º) $\dfrac{A,\Gamma \mid - C B,\Gamma \mid - C}{A \vee B,\Gamma \mid - C}$ » $|-(A \supset C)\&(B \supset C) \supset\supset (A \vee B \supset C)$

(6º) $\dfrac{A,\Gamma \mid - B A,\Gamma \mid -\neg B}{\Gamma \mid -\neg A}$ » $|- (A \supset B)\&(A \supset \neg B) \supset \neg A$

Доказательство. Пусть в Н производно ВКП. По условию теоремы имеем

$(C \supset A)\ \&\ (C \supset B) \mid\!- C \supset A$ (1)

$C,\ C \supset A \mid\!- A$ (2)

Из (1), (2) по правилу сечения получаем

$C,\ (C \supset A)\ \&\ (C \supset B) \mid\!- A$ (3)

*А*налогично устанавливаем

$C,\ (C \supset A)\ \&\ (C \supset B) \mid\!- B$ (4)

Далее, применяя *В*КП к (3) и (4), получаем

$C,(C \supset A)\ \&\ (C \supset B) \mid\!- A\&B$ (5)

Отсюда по теореме дедукции

$\mid\!- (C \supset A)\ \&\ (C \supset B) \supset (C \supset A\&\ B)$ (6)

Правило ВКП доказываем индукцией по числу элементов в Г. Для пустого списка Г утверждение очевидно. Пусть правило ВКП имеет место для числа *k* посылок Г; требуется доказать правило для посылок *k* + 1, т.е. требуется доказать

$$\frac{C,\Gamma \mid - A C,\Gamma \mid - B}{C,\Gamma \mid - A\,\&\,B}$$

Из (C, Г $\mid\!- A$ по ТД получаем Г $\mid\!- C \supset A$ и из $C,$ Г $\mid\!- B$ получаем Г $\mid\!- C \supset B$. По индуктивному допущению получаем Г $\mid\!- (C \supset A)\ \&\ (C \supset B)$. Используя условие $\mid\!- (C \supset A)\ \&\ (C \supset B) \supset (C \supset A\ \&\ B)$, получаем Г $\mid\!- C \supset A\ \&\ B$ и так как $C,\ C \supset A\ \&\ B \mid\!- A\ \&\ B$, имеем $C,$ Г $\mid\!- A\ \&\ B$.

Утверждения (1º) и (6º) доказываются просто. Для каждого логического знака могут быть сформулированы четыре непрямых правила вывода: введение и удаление логического знака слева и справа. Исключение представляют кванторы, пока мы сформулируем по три правила для кванторов, два остальных можно будет сформулировать после обогащения языка ε-термами.

Вводятся две классификации непрямых правил введения и удаления. Первая классификация

I

ВИП $\dfrac{A, \Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \supset B}$

ВКП $\dfrac{\Gamma \mid -A \quad \Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \,\&\, B}$

В∀П $\dfrac{\Gamma \mid -Aw}{\Gamma \mid -\forall x F_x^w Aw}$

ВОП $\dfrac{A, \Gamma \mid -f}{\Gamma \mid -\neg A}$

ВДЛ $\dfrac{A, \Gamma \mid -\Theta \quad B, \Gamma \mid -\Theta}{A \vee B, \Gamma \mid -\Theta}$

В∃Л $\dfrac{Aw, \Gamma \mid -\Theta}{\forall x F_x^w Aw, \Gamma \mid -\Theta}$

В*f*Л $\dfrac{\neg A, \Gamma \mid -\Theta}{A \supset f, \Gamma \mid -\Theta}$

II

УИП $\dfrac{\Gamma \mid -A \supset B}{A, \Gamma \mid -B}$

УКП $\dfrac{\Gamma \mid -A \,\&\, B}{\Gamma \mid -A \text{ и } \Gamma \mid -B}$

У∀П $\dfrac{\Gamma \mid -\forall x F_x^w Aw}{\Gamma \mid -F_t^w Aw}$

УОП $\dfrac{\Gamma \mid -\neg A}{A, \Gamma \mid -f}$

УДЛ $\dfrac{A \vee B, \Gamma \mid -\Theta}{A, \Gamma \mid -\Theta \text{ и } B, \Gamma \mid -\Theta}$

У∃Л $\dfrac{\exists x F_x^w Aw, \Gamma \mid -\Theta}{F_t^w Aw, \Gamma \mid -\Theta}$

У*f*Л $\dfrac{A \supset f, \Gamma \mid -\Theta}{\neg A, \Gamma \mid -\Theta}$

III

ВИЛ $\dfrac{\Gamma \mid -A \quad B, \Gamma \mid -\Theta}{A \supset B, \Gamma \mid -\Theta}$

ВКЛ $\dfrac{A, \Gamma \mid -\Theta \text{ или } B, \Gamma \mid -\Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \mid -\Theta}$

В∀Л $\dfrac{F_t^w Aw, \Gamma \mid -\Theta}{\forall x F_t^w Aw, \Gamma \mid -\Theta}$

ВОЛ $\dfrac{\Gamma \mid -A}{\neg A, \Gamma \mid -f}$

ВДП $\dfrac{\Gamma \mid -A \text{ или } \Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \vee B}$

В∃П $\dfrac{\Gamma \mid -F_t^w Aw}{\Gamma \mid -\exists x F_x^w Aw}$

IV

УИЛ $\dfrac{A \supset B, \Gamma \mid -A}{\Gamma \mid -A}$

УКЛ $\dfrac{A \,\&\, B, \Gamma \mid -\Theta}{A, B, \Gamma \mid -\Theta}$

УОЛ $\dfrac{\neg A, \Gamma \mid -f}{\Gamma \mid -A}$

УДП $\dfrac{\Gamma \mid -A \vee B \quad A, \Delta \mid -f}{\Gamma, \Delta \mid -B}$

У*f*П $\dfrac{\Gamma \mid -f}{\Gamma \mid -B}$

ВfП $\dfrac{\Gamma \mid -A \quad \Gamma \mid -\neg A}{\Gamma \mid -f}$

На правила В∀П и В∃Л накладывается ограничение: w не входит в формулы Г,C. Правило с «или» над чертой и «и» под чертой рассматривается как два правила.

При второй классификации в первом столбце располагаются правила введения справа, во втором – удаления справа, в третьем – введения слева и в четвертом – удаления слева. Вторая классификация будет рассматриваться, начиная с главы 7.

В главе 4 будет показано, что каждое правило группы 11 имеет место тогда и только тогда, когда имеет место соответствующее правило группы III (первой классификации). Будет также показано, что каждое правило группы II (и группы III) имеет место тогда и только тогда, когда имеет место ему соответствующее прямое правило; для импликации это A, $A \supset B \mid\!- B$, конъюнкции $A \,\&\, B \mid\!- A$ и $A \,\&\, B \mid\!- B$, квантора общности $\forall x F_x^w Aw \mid\!- F_t^w Aw$, отрицания A, $\neg A \mid\!- f$, дизъюнкции $A \mid\!- A \vee B$ и $B \mid\!- A \vee B$, квантора существования $F_t^w Aw \mid\!- \exists x F_x^w Aw$, константы $f - \neg A \mid\!- A \supset f$. Пусть Н логистическая система с понятием сильного вывода (*В*Д0С2). Встает вопрос, каковы должны быть системы и правила вывода, чтобы в Н были производны правила группы I и II. Ответ дает следующая теорема.

Теорема 3. *Если* Н *логистическая система с понятием сильного вывода* (ВД0С2)*, то относительно* Н *имеют место в качестве теорем правила групп* I *и* II *тогда и только тогда, когда правилами вывода* Н *являются* $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ *т. р,* $\dfrac{A B}{A \,\&\, B}$ * ВК *и* $\dfrac{Aw}{\forall x A x}$ О *(Для* ВК *и* О *с соответствующими ограничениями*) *и в* Н *доказуемы формулы вида*

$A \supset A$

$(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$

$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

$(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$

$A \,\&\, B \supset A$

$A \,\&\, B \supset B$

$(C \supset A) \,\&\, (C \supset B) \supset (C \supset A \,\&\, B)$

$A \supset A \vee B$

$B \supset A \vee B$

$(A \supset C) \,\&\, (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$

$\neg A \supset (A \supset f)$

$(A \supset f) \supset \neg A$

$\forall x F_x^w Aw \supset F_t^w Aw$

$\forall x F_x^w (C \supset Aw) \supset (C \supset \forall x F_x^w Aw)$, *где C не содержит w*

$F_t^w Aw \supset \exists x F_x^w Aw$

$\forall x F_x^w (Aw \supset C) \supset (\exists x F_x^w Aw \supset C)$, *где C не содержит w*

Доказательство тривиально вытекает из теорем 2 и 1.

Систему со схемами аксиома 1 – 16 и правилами вывода m.p., ВК, О будем называть абсолютным исчислением и обозначим НА. В НА не доказуемы формулы $(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$ (17), $f \supset B$ (18) и $((A \supset B) \supset A) \supset A$ (19), $\neg\neg A \supset A$ (20). *А*ксиомы (11) и (12) являются определением отрицания, поэтому интерпретация $\neg$ определяется $\supset$ и *f*.

Для доказательства невыводимости (17)–(20) в НА достаточно построить 8-значные матрицы *А*ккермана с выделенными значениями 4, 5, 6, 7.

$p\,(A \,\&\, B) = \min\,(p\,(A), p\,(B))$

$p\,(A \vee B) = \max\,(p\,(A), p\,(B))$

$p\,(f) = 1$

$\supset$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	7	7	7	7	7	7	7	7
1	0	6	0	6	0	0	6	7
2	0	0	5	5	0	5	0	7
3	0	0	0	4	0	0	0	7
4	0	1	2	3	4	5	6	7
5	0	0	2	2	0	5	0	7
6	0	1	0	1	0	0	6	7
7	0	0	0	0	0	0	0	7

Добавляя в качестве схем (17) – (20) к НА, будем иметь 8 неэквивалентных друг другу исчислений

НА – абсолютное

НМ = НА + 17 – минимальное

НД = НА + 18 – исчисление, двойственное минимальному

НП = НА + 19 – полусильное

HS = НА + 20 – сильное

HI = HA +17+18– интуиционистское

HQ = HA + 17 + 19 – квазиминимальное

HC = HA + 17 + 18 + 19 = HA + 17 + 20 = HA + 18 + + 20 = HA + 19 + 20 – классическое.

Для доказательства невыводимости (17), (18) и (19) в HS используем 8-значную логику Аккермана, полагая $p\ (f) = 3$.

Для доказательства невыводимости в HI (19) и (20) используем трехзначные матрицы Гейтинга с 2 в качестве выделенного значения.

$p\ (A\ \&\ B) = \min\ (p\ (A), p\ (B))$

$p\ (A \vee B) = \max\ (p\ (A), p\ (B))$

Импликация и отрицание определяются таблицами

⊃	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

A	$\neg A$
0	2
1	0
2	0

$p(f) = 0$

Для доказательства невыводимости (18) и (20) в HQ импликации, конъюнкции и дизъюнкции даем обычную классическую двузначную интерпретацию, а f приписываем значение «истина».

Для доказательства невыводимости (18), (19) и (20) в HM полагаем $p\ (f) = 2$ и остальным знакам даем гейтинговскую интерпретацию.

Система, образованная из HA добавлением (19) и (20), является классической системой.

Действительно, в этой системе доказуема $f \supset B$ (18)

1. $(((f \supset B) \supset f) \supset f) \supset (f \supset B)$ (20)
2. $((f \supset B) \supset f) \supset f$ (19)
3. $f \supset B$ m.p.; 1,2

Но в системе HA + (18) + (20) нетрудно вывести $A \supset (B \supset A)$ и тем самым (17):

1. $A, A \supset f \vdash f$
2. $f \vdash B \supset f$ (18)
3. $A, A \supset f \vdash B \supset f$ |–тр.; 1, 2
4. $A \vdash (A \supset f) \supset (B \supset f)$ ТД; 3
5. $B, B \supset ((A \supset f) \supset f) \vdash (A \supset f) \supset f$ m. p.
6. $\vdash ((A \supset f) \supset f) \supset A$ (20)
7. $B, B \supset ((A \supset f) \supset f) \vdash A$ |–тр.; 5,6
8. $B \supset ((A \supset f) \supset f) \vdash B \supset A$ ТД;7

9. $(A \supset f) \supset (B \supset f) \vdash B \supset ((A \supset f) \supset f)$ Акс.2

10. $(A \supset f) \supset (B \supset f) \vdash B \supset A$ ⊢тр.; 9,8

11. $A \supset (B \supset A)$ ⊢тр.;4,10

Таким образом, HA+19+20 есть классическая система так же как HA+18+20. Обогащение HS аксиомой 17 также дает классическую логику.

Глава третья

СУБОРДИНАТНЫЙ ВЫВОД. СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНОГО ВЫВОДА ПЕРВОГО ТИПА

§ 1. КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАЗЛИЧИЯХ МЕЖДУ ИСЧИСЛЕНИЯМИ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА И СИСТЕМАМИ НАТУРАЛЬНОГО ВЫВОДА

Обычно переход от систем гильбертовского типа к системам натурального вывода совершается следующим образом. Относительно системы гильбертовского типа в качестве метатеорем доказываются правила введения и удаления логических символов, прямые и непрямые. Затем утверждается, что если эти правила принять в качестве основных, то мы получим как раз ту систему, которая называется системой натурального вывода. Это утверждение часто сопровождается дополнительным утвер-ждением: в исчислении гильбертовского типа имеются аксиомы и правила вывода, в системах натурального вывода нет аксиом.

Но верно ли, что в системах гильбертовского типа наряду с правилами вывода должны быть аксиомы? Учитывая, что схемы аксиом могут рассматриваться как правила вывода из пустого множества посылок, вопрос можно переформулировать: возможны ли гильбертовские системы, в которых нет аксиом и правил вывода из пустого множества посылок? Если не требовать, чтобы логистическая система гильбертовского типа была полной формализацией некоторой логики, то ответ тривиален и утвердителен. Действительно, если из аксиоматики клас-ческого или интуиционистского исчисления высказываний гильбертовского типа отбросить все аксиомы, то получится частичная система только с правилами вывода.

Нет никаких разумных оснований частичную систему относить к другому типу, чем та, частью которой она является. Ведь и классическое, и интуиционистское, и минимальное и абсолютное исчисления высказываний в равной мере можно считать гильбертовскими, если они отличаются принятием или непринятием тех или иных аксиом.

Можно поставить вопрос и иначе: возможна ли система гильбертовского типа без аксиом (и правил вывода из пустого множества посылок), полностью формализующая, например, классическую логику высказываний, классическую логику предикатов первого порядка, интуиционистскую логику высказываний и т. д.?

В таких системах невозможно получить доказуемые формулы – формулы, выводимые из пустого множества (списка) посылок. И тем самым

самым не существует системы гильбертовского типа без аксиом и правил вывода из пустого множества (списка) посылок, полностью формализующих классическую логику высказываний.

Но в общем возможны логистические системы гильбертовского типа, не содержащие аксиом и правил вывода из пустого множества посылок.

Примером такого исчисления может служить следующее исчисление HP

1. <*A*> есть вывод формулы *A* из списка посылок [*A*].

2. Если α есть вывод формулы *A* из списка посылок Γ и β есть вывод формулы $A \supset E$ из списка посылок Δ, то <αβE> есть вывод из списка посылок Γ, Δ.

В этом исчислении $A \mid\!- A$; $A, A \supset B \mid\!- B$; $A, A \supset B, B \supset C \mid\!- C$; $A, A \supset \supset(B \supset C), B \mid\!- C$ и т.д.

После того, как будет уточнено, что мы понимаем под системами натурального вывода, мы построим систему натурального вывода со схемами аксиом.

Полагают, что в системах гильбертовского типа правила вывода являются правилами прямого вывода, т. е. имеют вид $\dfrac{A_1 \ldots A_k}{B}$, а в системах натурального вывода основными являются также правила непрямого (косвенного) вывода, т. е. имеющие вид $\dfrac{\Gamma_1 \mid -A_1, \ldots, \Gamma_k \mid -A_k}{\Delta \mid -B}$.[1]

Если мы в качестве основных примем правила введения и удаления логических символов, а также структурные правила, но не сформулируем, что понимается под формальным выводом (доказательством), то в результате мы не будем иметь логистическую систему. Сформулированная указанным образом система является лишь аксиоматизацией, но не формализацией отношения логического следования.

Если системами натурального вывода считать такого рода системы, то и в этом случае тезис «в системах натурального вывода нет аксиом, в гильбертовских есть» несостоятелен. Действительно, логистическая система со сформулированным выше понятием формального вывода, без аксиом, с единственным правилом вывода – modus ponens не есть

[1] Правила вывода в логистических системах гильбертоского типа рассматриваются чисто синтаксически, мы не требуем, чтобы каждое из них воспроизводило отношение логического следования. Так, хотя правило обобщения и не воспроизводит отношения логического следования, но тем не менее является правилом, разрешающим перейти от формулы к формуле (а не от вывода к выводу, или от записи о выводимости к записи о выводимости).

система натурального вывода, так как в системах, являющихся аксиоматизациями отношения логического следования, вообще нет понятия формального вывода. С другой стороны, в системе, определенной указанным выше способом, есть аксиомы – это утверждения типа A, $B \mid\!- A$ & B, $A \mid\!- A \vee B$ и т. д. $A \mid\!- A \vee B$ отличается от $\mid\!- A \supset A \supset B$ только тем, что первое есть утверждение с двуместным, второе с одноместным предикатом. Логическую систему с аксиомами вида $A \mid\!- A \vee B$ и т.д. и правилами вида $\dfrac{\Gamma, A \mid -B}{\Gamma \mid -A \supset B}$ мы не рассматриваем как исчисление натурального вывода, а рассматриваем как аксиоматизацию (в указанном выше смысле) отношения логического следования.

Можно построить логическую систему, являющуюся формализацией класса верных записей о выводимости. В качестве записей о выводимости рассматриваются утверждения метаязыка вида Г |– Е. Относительно записей о выводимостях строится логистическая система с понятием формального доказательства обычного типа (в виде дерева), в качестве ее аксиом принимаются записи о выводимости, соответствующие прямым правилам введения и удаления логических символов и рефлексивности «|–», в качестве правил вывода – правила перехода от одних записей о выводимости к другим. Такого рода системы называют вполне правомерно системами генценовского типа. Действительно, Генцен был одним из первых, систематически изучивший такого рода системы. Но это не есть системы натурального вывода. Это так называемые исчисления секвенций. (Последние будут подразделяться на секвенциальные натуральные исчисления и секвенциальные логистические исчисления.)

Нельзя ли рассматривать системы натурального вывода как логистические системы с тем же самым понятием формального вывода, что в гильбертовских системах, различие же свести к тому, что и в гильбертовских системах все правила, соответствующие непрямым (косвенным) рассуждениям, являются производными правилами, а в системах натурального вывода – основными? На этот вопрос мы отвечаем отрицательно.

Действительно, если сохранить то же понятие вывода, что и в гильбертовских системах (приняв лишь во внимание отсутствие аксиом) и добавить помимо обычных правил вывода еще правила, разрешающие от одних выводов переходить к другим выводам и доказательствам, то мы столкнемся с серьезными трудностями. Пусть правилами вывода исчисления высказываний будут следующие:

$$\supset_y \frac{A, A \supset B,}{B} \qquad \&_B \frac{A, B}{A \,\&\, B} \qquad \neg_B \frac{A \supset B, A \supset \neg B,}{\neg A}$$

$\&_y \dfrac{A \,\&\, B}{A}$ $\qquad$ $\&_y \dfrac{A \,\&\, B}{B}$ $\qquad$ $\neg_y \dfrac{\neg\neg A}{A}$

К этим правилам вывода добавим правило преобразования записей о выводимостях (или правило преобразования выводов)

$$\supset_B \frac{A, \Gamma \mid\!- B}{\Gamma \mid\!- A \supset B}$$

Вывод из множества посылок Г есть последовательность формул, каждая из которых есть или одна из формул Г или непосредственно выводима из формул, предшествующих ей в этой последовательности. Из множества посылок $\{A, B\}$ выводима формула B. По $\supset_B$ заключаем, что существует вывод формулы $A \supset B$ из множества посылок $\{B\}$. Но предъявить этот вывод мы не в состоянии.

Более того, правило $\supset_B$ носит иной характер, чем все остальные из перечисленных правил ($\supset_y$, $\&_B$, $\&_y$, $\neg_B$). Последние применяются к формулам, а $\supset_B$ – к записям о выводимостях (или к выводам). Различие между системами гильбертовского типа и системами натурального вывода мы усматриваем в том, что это системы с различными понятиями вывода.

Интуитивно ясно различие между прямыми и непрямыми (косвенными) способами рассуждения. Прямой способ рассуждения состоит в переходе от посылок или формул, выведенных из посылок, к формуле, непосредственно следующей из них. При непрямом (косвенном) способе рассуждения мы заключаем о выводимости формулы B из посылок Г на основании знания, что некоторые формулы выводимы из таких-то посылок. Переход от знания выводимости B из A, Г к утверждению, что из Г выводима формула $A \supset B$, представляет собой типичный пример непрямого (косвенного) способа рассуждения.

В системах гильбертовского типа непосредственно формализуются лишь прямые способы рассуждения. Каждому прямому способу рассуждения сопоставляется некоторый формальный объект – формальный вывод в виде последовательности формул или дерева формул. В системах гильбертовского типа можно обосновать непрямые, косвенные способы рассуждения. Так, рассуждению по случаям соответствует метатеорема, гласящая, что если построены выводы формулы E из посылок Г, A и Г, B, то может быть построен и вывод формулы E из посылок Г, $A \vee B$. Более того, метод доказательства этой метатеоремы дает эффективную процедуру построения по первым двум выводам результирующего. Аналогично обстоит дело с рассуждением от противного, рассуждением со вспомогательной гипотезой ($\supset_B$) и рядом других. Но в логистических системах гильбертовского типа мы не можем непрямым (косвенным) способам рассуждений сопоставить некий формальный объект. Например, мы не можем предъявить последовательность формул или дерево формул, которые соответствовали бы рассуждению по случаям.

Возможны ли логистические системы, непосредственно формализующие косвенные способы рассуждений, сопоставляющие им некоторые формальные объекты?

Системы натурального вывода и есть системы, формализующие не только прямые, но и непрямые (косвенные) способы рассуждения. Не только прямым, но и непрямым (косвенным) рассуждениям в них сопоставляется некоторый объект – формальный вывод.

§ 2. СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНОГО ВЫВОДА КАК ЛОГИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СУБОРДИНАТНЫМ ВЫВОДОМ

Указанные в § 1 трудности исчезают, если под системами натурального вывода мы будем иметь в виду логистические системы с особым понятием вывода. В этих системах вывод является более сложным объектом, чем последовательность формул или дерево формул. Благодаря этому в системах натурального вывода не только прямым, но и непрямым способам рассуждения сопоставляется определенный объект – формальный вывод.

В этом параграфе мы рассмотрим системы натурального вывода, понятие формального вывода для которых является некоторым обобщением понятия вывода в виде дерева.

В последующих параграфах будут рассмотрены системы натурального вывода с понятием вывода, являющегося обобщением понятия вывода как последовательности формул. Определим систему объектов, называя ее лесом формул.

1. $< >$ есть лес формул.

2. Если A формула, то $<A>$ лес формул.

3. Если α лес формул, то $[\alpha]$ есть квазилес формул.

4. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_к$ суть леса или квазилеса формул и E есть формула, то $< \alpha_1, \ldots, \alpha_к\ E>$ есть лес формул.

Последней формулой леса вида $< \alpha_1, \ldots, \alpha_к\ E>$ является формула E, леса вида $<A>$ – формула A, $< >$ есть лес без последней формулы; последней формулой квазилеса $[\alpha]$ является последняя формула леса α.

Под высотой леса будем иметь в виду порядковое число h, вводимое следующим определением:

$$\begin{cases} h(<>)=0 \\ h(<A>)=0 \\ h(<\alpha_1...\alpha_k E>)=\max(h(\alpha_1),...,h(\alpha_k))+1 \\ h([\alpha])=\omega\cdot h(\alpha) \end{cases}$$

Например, высота леса $<<<A> <A \supset B> B> <B \supset C> C>$ равна 2; обозначим этот лес буквой α. Тогда h $(<[\alpha]\ A \supset C>) = 2\omega + 1$,

$h(<[<[\alpha]\ A \supset C)]\ (B \supset C) \supset (A \supset C)>) = 2\omega^2 + \omega + 1$,

$h(<[<[\alpha]\ A \supset C>]\ (B \supset C) \supset (A \supset C)>]\ (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset$ $\supset C))>) = 2\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$

В системах натурального вывода вывод является лесом формул. Имеются правила вывода двух типов: (1) правила прямого вывода и (2) правила непрямого (косвенного, вспомогательного) вывода. Первые имеют вид $\dfrac{A_1...A_k}{B}$, т. е. правило прямого вывода есть разрешение перейти от формул A_1, . . ., $A_к$ к формуле B. Правила непрямого вывода есть правила, разрешающие строить искомый вывод с помощью ранее построенных вспомогательных выводов.

В системах натурального вывода среди непрямых правил обязательно имеются правила, позволяющие с помощью вспомогательных выводов строить выводы из меньшего числа посылок, чем эти вспомогательные. С помощью непрямых правил происходит элиминация) исключение некоторых допущений.

При построении систем натурального вывода прямые и непрямые правила классифицируются на правила введения и удаления логических знаков.

Ниже мы увидим, что среди правил систем натурального вывода могут быть правила, не укладывающиеся в эту классификацию. Могут быть также аксиомы и схемы аксиом.

Обязательным для систем натурального вывода является наличие но крайней мере одного прямого и одного непрямого правила вывода.

Ранее было отмечено, что возможны две классификации правил введения и удаления логических знаков слева и справа.

Правила, соответствующие I и II группам первой классификации, образуют правила вывода натуральных систем первого типа. Мы их будем обозначать символом N. Например, NC – классическая система натурального вывода первого типа, NI – интуиционистская система натурального вывода первого типа и т. д.

Правила, соответствующие метатеоремам введения н удаления логических знаков справа, т. е. соответствующие группам A и B второй классификации, образуют правила вывода для систем натурального вывода второго типа. Мы их будем обозначать символом Nε.

Построим абсолютную систему натурального вывода первого типа NA. Правила вывода

$$\supset_B \frac{A, \Gamma \mid -B}{\Gamma_A \mid -A \supset B} \qquad \supset_y \frac{A \; A \supset B}{B}$$

$$\&_B \frac{\Gamma \mid -A \; \Gamma \mid -B}{\Gamma \mid -A \,\&\, B} \qquad \&_y \frac{A \,\&\, B}{A} \qquad \&_y \frac{A \,\&\, B}{B}$$

$$\vee_B \frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B} \qquad \vee_y \frac{\Delta \mid -A \vee B \; A, \Gamma \mid -C \; B, \Gamma \mid -C}{\Delta, \Gamma \mid -C}$$

$$\forall_B \frac{Aw}{\forall x F_x^w Aw} \qquad \forall_y \frac{\forall x F_x^w Aw}{F_t^w Aw}$$

$$\exists_B \frac{F_t^w Aw}{\exists x F_x^w Aw} \qquad \exists_y \frac{\Delta \mid -\exists x F_x^w Ax \; Aw, \Gamma \mid -C}{\Gamma \mid -C},$$

где Γ и C не содержат свободной переменной w. Отрицание вводим определением

$\neg A =_{Df} A \supset f$

Мы получим эквивалентную систему, если отрицание введем не определением, а постулируем два дополнительных правила

$$\neg_B \frac{A, \Gamma \mid -f}{\Gamma \mid -\neg A} \qquad \neg_y \frac{A \neg A}{f}$$

Правила : $\supset_y$, $\&_y$, $\vee_B$, $\forall_B$, $\forall_y$ и $\exists_B$ – правила прямого вывода, $\supset_B$, $\vee_y$, $\exists_y$ – правила непрямого вывода. Будем говорить, что из A (A, B) непосредственно выводима формула E, если $\frac{A}{E}\left(\frac{AB}{E}\right)$ есть правило прямого вывода. Определим, что есть вывод системы NA.

1. <A> есть вывод из списка посылок A.

2. Если α есть вывод из списка посылок Γ, A есть последняя формула α, из A непосредственно выводима формула B (по любому правилу, кроме $\forall_B$), то <αB> есть вывод из посылок Γ.

3. Если α есть вывод из посылок Γ, Aw есть последняя формула α. и ни одна из посылок Γ не содержит переменной w, то <α$\forall x F_x^w Aw$> есть вывод из списка посылок Γ.

4. Если α есть вывод из списка посылок Γ, β есть вывод из списка посылок Δ, A есть последняя формула α, B – β и из A и B непосредственно выводима E, то <αβE> есть вывод из списка посылок Γ, Δ.

5_1. Если α есть вывод из списка посылок *A*,Г, формула *B* есть последняя формула α, то <[α] *A* ⊃ *B*> есть вывод из списка посылок Γ_A.

5_2. Если α и β суть выводы из посылок Г, и формулы *A* и *B* соответственно их последние формулы, то <αβ *A* & *B*> есть вывод из посылок Г.

5_3. Если α есть вывод из посылок Δ, β_1 – из посылок *A*, Г и β_2 – из посылок *B*, Г, последняя формула α есть *A* ∨ *B*, β_1 и β_2 – *C*, то <α[β_1] [β_2] *C*> есть вывод из списка посылок Δ, Г.

5_4. Если α есть вывод из списка посылок Δ, последняя формула α есть $\exists x F^{w}_{x} Aw$ и если β есть вывод формулы *C* из посылок *Aw,* Г, где Г и *C* не содержат *w*, то <α [β] *C*> есть вывод из списка посылок Δ, Г.

В качестве примера приведем вывод формулы (*A* ⊃ ¬ *B*) ⊃ (*B* ⊃ ¬ ¬*A*), т. е. (*A* ⊃ (*B* ⊃ *f*)) ⊃ (*B* ⊃ (*A* ⊃ *f*)):

<[<[<[<<*B*> <<*A*> <*A* ⊃ (*B* ⊃ *f*)> *B* ⊃ *f*> *f*>] *A* ⊃ *f*>] *B* ⊃ (*A* ⊃ *f*)>] (*A* ⊃ ⊃ (*B* ⊃ *f*)) ⊃ (*B* ⊃ (*A* ⊃ *f*))>

Если перейти к двумерной записи и вместо заключения в квадратные скобки заключить вывод в прямоугольник, то наш пример запишется следующим образом

$$\boxed{\begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\boxed{\dfrac{\mathrm{B} \qquad \dfrac{\mathrm{A} \quad \mathrm{A}\supset(\mathrm{B}\supset \mathrm{f})}{\mathrm{B}\supset \mathrm{f}}}{\mathrm{f}}} \\ \mathrm{A}\supset \mathrm{f}\end{array}} \\ \mathrm{B}\supset(\mathrm{A}\supset \mathrm{f})\end{array}}$$

(*A* ⊃ (*B* ⊃*f*)) ⊃ (*B* ⊃ (*A* ⊃ *f*))

Мы получим минимальную систему NM, если видоизменим пункт 5_1 – вместо непрямого правила $\dfrac{\Gamma \mid -A \; \Gamma \mid -B}{\Gamma, A \& B}$ примем $\dfrac{\Gamma \mid -A \; \Delta \mid -B}{\Gamma, \Delta \mid -A \& B}$. Для перехода от абсолютной системы к минимальной достаточно заменить непрямое правило $\&_B$ на прямое. Можно поступить и иначе: $\supset_B$ сформулировать в виде $\dfrac{\Gamma \mid -B}{\Gamma_A \mid -A \supset B}$. В последнем случае мы получаем следующее доказательство в NM формулы вида *B* ⊃ (*A* ⊃ *B*), не доказуемой в NA:

< [< [<*B*>] *A* ⊃ *B*>] *B* ⊃ (*A* ⊃ *B*)>

Для получения интуиционистского исчисления предикатов NI достаточно к минимальному исчислению добавить новое прямое правило $f_y\colon \dfrac{f}{B}$. Другая альтернатива – добавить $\vee_y \dfrac{A \vee B \neg A}{B}$.

Для построения классического исчисления предикатов N*C* достаточно к интуиционистскому исчислению предикатов присоединить в качестве схемы аксиом закон Пирса $((A \supset B) \supset A) \supset A$[2]. Другая альтернатива – добавить к минимальному исчислению правило прямого вывода – снятие двойного отрицания $\dfrac{\neg\neg A}{A}$.

В дальнейшем будут подробно рассмотрены натуральные исчисления предикатов второго типа. Их особенность в том, что они строятся на основе правил, соответствующих правилам введения и удаления логических знаков справа.

Второй их особенностью является возможность минимизировать правила непрямого вывода. Сейчас мы сформулируем только пропозициональную часть такого исчисления.

Правила вывода

$$\supset_B \frac{A, \Gamma \mid\!-B}{\Gamma_A \mid\!-A \supset B} \qquad \supset_y \frac{A \; A \supset B}{B}$$

$$\&_B \frac{AB}{A \,\&\, B} \qquad \&_y \frac{A \,\&\, B}{A} \qquad \frac{A \,\&\, B}{B}$$

$$\vee_B \frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B} \qquad \vee_y \frac{A \vee B \neg A}{B}$$

Отрицание вводится определением $\neg A =_{Df} A \supset f$.

Чтобы получить классическую систему, достаточно добавить правило $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ или принять в качестве аксиомы закон Пирса.

Вообще говоря исчисление NεC не эквивалентно NC, но пропозициональная часть NεC эквивалентна пропозициональной части NG в том смысле, что если $\Gamma \mid\!- E$ в NεC, то $\Gamma \mid\!- E$ в NC и наоборот.

Понятие вывода для пропозициональной части NεC строится аналогично понятию вывода для NC с опусканием пунктов 5_2–5_4.

Покажем, что пропозициональные части NC и NεC эквивалентны.

В NC может быть построен вывод формулы B из посылок $A \vee B$ и $A \supset f$.

[2] Это дает нам пример системы натурального вывоза со схемой аксиом.

$<A \vee B\ [<<<A> <A \supset f> f> B>]\ [<B>]\ B>$

Заменяя в NεC каждое применение $\vee_y$ на построенный выше вывод, мы превратим каждый вывод пропозициональной части NεC в вывод NC.

В NεC может быть построен вывод формулы B из посылки f:

$<<<f> f \vee B> <[<f>]\ f \supset f> B>$

Мы можем заменить каждое применение правила f_y на построенную выше фигуру.

Пусть α есть вывод формулы $A \vee B$ из посылок Δ, β_1 есть вывод формулы C из посылок A, Δ и β_1 есть вывод формулы C из списка посылок B, Г. Тогда часть вывода, заканчивающаяся применением $\vee_y$, будет иметь вид $<\alpha\ [\beta_1]\ [\beta_2]\ C>$.

Этот вывод может быть заменен на следующий вывод NεC

$<<[<<\alpha<[<\beta_1<C \supset f>B> <[\beta_2]B \supset C>C>]$

$(C \supset f) \supset C> << > ((C \supset f) \supset C) \supset C> C>$

Таким образом пропозициональные части исчислений NC и NεC эквивалентны.

§ 3. МОДИФИКАЦИЯ ПОНЯТИЯ ВЫВОДА В ВИДЕ ЛЕСА ДЕРЕВЬЕВ

В следующих параграфах мы перейдем к практически удобным формам записи выводов в натуральных исчислениях. Сейчас мы рассмотрим натуральные исчисления с понятием вывода, несколько отличающимся от выводов, рассмотренных в § 2.

Под выводом опять будем иметь в виду фигуру в виде леса деревьев. Пусть $R_1, ..., R_n$ – правила вывода.

1. $<A>$ есть вывод из множества посылок $\{A\}$.

2. Если A аксиома, то $<< > A>$ есть вывод из пустого множества посылок.

3. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ есть выводы из множеств посылок $X_1, \ldots, X_k$ соответственно, $A_1, \ldots, A_k$ – последние формулы $\alpha_1, ..., \alpha_k$ и из $A_1, ..., A_k$ непосредственно выводима формула B, то $<\alpha_1, \ldots, \alpha_k B>$ есть вывод из множества посылок $X_1 \cup \ldots \cup X_k>$.

4_1. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ есть выводы из множества посылок $X_1, ..., X_k$ с последними формулами $A_k, \ldots, A_k$ соответственно и β есть вывод формулы E из множества посылок $\{B\} \cup \{A_1, ..., A_k\}$, то $<\alpha_1 \ldots \alpha_k\ [\beta]\ B \supset \supset E>$ есть вывод из множества посылок $X_1 \cup \ldots \cup X_k$.

4_2. Если α. есть вывод из множества посылок X, β есть вывод из множества посылок X, A и B– последние формулы α и β соответственно, то $<\alpha\beta A \,\&\, B>$ есть вывод из множества посылок X.

4_3. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ суть выводы формул $A_1, \ldots, A_k$ из множеств посылок $X_1, \ldots, X_k$ соответственно, β есть вывод формулы E из множества посылок $\{C\} \cup \{A_1, \ldots, A_к\}$, γ есть вывод формулы E из множества посылок $\{D\} \cup \{A_1, \ldots, A_k\}$, то

$<<C \vee D> \alpha_1, \ldots, \alpha_k [\beta]\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k [\gamma]\ E>$

вывод из множества посылок $\{C \vee D\} \cup X_1 \cup \ldots \cup X_k$.

4_4. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ есть выводы формул $A_1, \ldots, A_k$ из множества посылок $X_1, \ldots, X_k$ соответственно, формулы из $X_1, \ldots, X_k$ не содержат переменной w и β есть вывод формулы E, где E не содержит w, из множества посылок $\{Bw\} \cup \{A_1, \ldots, A_k\}$, то $<\alpha_1, \ldots, \alpha_k(\exists xBx)[\beta]\ E>$ есть вывод из множества посылок $X_1 \cup \ldots \cup X_k \cup \{\exists\, xBx\}$.

4_5. Если α есть вывод формулы Bw из множества посылок X и формулы из X не содержат переменной w, то $<\alpha\forall x\mathrm{F}_x^w\, Bw>$ есть вывод из множества посылок X.

Обратим внимание, что каждый вспомогательный[3] вывод содержит только одну дополнительную гипотезу, которая и устраняется, хотя эта гипотеза и может входить в качестве посылки несколько раз во вспомогательный вывод. Вспомогательные выводы, встречающиеся в выводах § 2, могут содержать несколько графически отличных друг от друга гипотез.

Для сформулированного понятия вывода безотносительно к принимаемым правилам вывода верна теорема о сокращении посылок, а также ее обращение – размножение. Если в качестве правил вывода избрать прямые правила, соответствующие второму столбцу первой классификации правил введения и удаления справа и слева (т. е. $\supset_у$, $\&_у$, $\vee_B$, $\vee_у$, $\exists_B$), то мы получим логическую систему, более богатую, чем абсолютная система. Обозначим ее NA+P. Чтобы получить минимальное исчисление, достаточно принять в качестве дополнительного правила вывода $\dfrac{A \quad B}{A \,\&\, B}$, (отбросив в определении пункт 4_2). Если к минимальнои системе добавить правило $\dfrac{f}{B}$ (или $\dfrac{A \vee B \neg A}{B}$), то получим интуиционистскую систему; наконец, добавив к минимальному исчислению $\dfrac{\neg\neg A}{A}$, получим классическое исчисление предикатов.

---

[3] Выводы $\beta_1, \ldots, \beta_l$; будем называть вспомогательными для α, если α имеет вид $<\alpha_1 \ldots \alpha_k\ [\beta_1]\ \alpha_{1+k} \ldots \alpha_n\ [\beta_l]\ \alpha_{n+1} \ldots \alpha_m\ E>$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_m$ суть выводы.

Если мы в определении вывода заменим термин «множество» на «список» и теоретико-множественное объединение на сочленение списков, то получим логическую систему с существенно иным понятием вывода; для логических систем с этим понятием вывода – безотносительно к прямым правилам вывода – не будет иметь место теорема о сокращении посылок. Чтобы получить абсолютную систему с выводом из списка посылок, достаточно заменить в выше приведенном определении пункт 4_1, сформулировав его таким образом, чтобы он соответствовал правилу $\dfrac{A, \Gamma \mid -B}{\Gamma_A \mid -A \supset B}$ и принять в качестве прямых правил вывода $\supset_{\text{у}}$, $\&_{\text{у}}$, $\vee_B$, $\forall_{\text{у}}$ и $\exists_B$.

§ 4. НАТУРАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ С СУБОРДИНАТНЫМ ВЫВОДОМ В ВИДЕ ЛЕСА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Нередко вывод из посылок $A_1, \ldots, A_k$ в натуральном исчислении определяют как. последовательность формул, каждая из которых есть или одна из посылок, или *ранее доказанная* формула, или непосредственно выводима из предшествующих формул по одному из правил вывода.

Если существует вывод формулы B из посылок $A_1, \ldots, A_k$ и ни одна переменная не варьируется, то формулу $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_k \supset B)\ldots)$ называют доказанной формулой [32], [31; 43].

При таком понимании вывода, чтобы установить, является нечто выводом или нет, надо иметь непрерывно растущий перечень уже доказанных формул.

Подобное понятие вывода эффективно, но построение процедур поиска доказательства на основе такого понятия вывода встречается с трудностями, т. к. порядок получения «ранее доказанных формул» достаточно произволен.

Указанное понятие вывода можно уточнить, введя понятие вывода уровня n[4].

1. Система А.

Формальный вывод определяется индуктивно:

1. Вывод нулевого уровня формулы B из посылок $A_1, \ldots, A_k$ есть последовательность формул, каждая из которых есть или одна из по-

---

[4] Или доказуемой формулы ранга *n* [32; 27], см. также нашу работу [34].

сылок или непосредственно выводима по одному из правил вывода $R_1, \dots, R_m$ из предшествующих формул и последняя формула этой последовательности есть B.

2. Если $B_1, \dots, B_m$ есть вывод уровня n формулы B, графически равной B_m, из посылок $A_1, \dots, A_k$ и на применение правил вывода, не воспроизводящих отношение семантического следования, наложены необходимые ограничения (например, что ни одна переменная относительно посылок $A_1, \dots, A_k$ не варьируется), то формула $A_1 \supset (A_2 \supset \dots \supset (A_k \supset B) \dots)$ доказуема на уровне $n + 1$.

3. Вывод уровня n ($n > 0$) формулы B из посылок $A_1, \dots, A_k$ есть последовательность формул, каждая из которых есть или одна из посылок $A_1, \dots, A_k$ или формула, доказуемая на уровне $\geq n$ (и при этом в последовательность входит по крайней мере одна формула, доказуемая на уровне n и не доказуемая на уровне $< n$), или непосредственно выводима из предшествующих по одному из правил $R_1, \dots, R_m$ и последняя формула этой последовательности есть B.

Если существует вывод уровня n формулы B из посылок Γ, то будем говорить, что B выводима из Γ на уровне n: $\Gamma \vdash^n B$.

Будем говорить, что из Γ выводима B ($\Gamma \vdash B$), если существует такое n ($n \geq 0$), что $\Gamma \vdash^n B$.

Исходя из указанного определения вывода естественно прямым выводом считать вывод нулевого уровня, а косвенным – вывод уровня $n \geq 1$.

В качестве правил вывода при таком подходе, чтобы получить классическое исчисление предикатов, в котором были бы доказуемы все универсально-общезначимые формулы, достаточно принять, например, следующие правила вывода:

$$\supset_y \frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$$\&_B \frac{A, B}{A \& B} \qquad \&_{y_1} \frac{A \& B}{A} \qquad \&_{y_2} \frac{A \& B}{B}$$

$$\vee_{B_1} \frac{A}{A \vee B} \qquad \vee_{B_2} \frac{B}{A \vee B} \qquad \vee_y \frac{A \supset C, B \supset C}{A \vee B \supset C}$$

$$\neg_B \frac{A \supset B \& \neg B}{\neg A} \qquad \neg_y \frac{\neg\neg A}{A}$$

$$\forall_A \frac{A(w)}{\forall x A(x)} \qquad \forall_y \frac{\forall x A(x)}{A(t)}$$

$$\exists_B \frac{\neg\forall x \neg A(x)}{\exists x A(x)} \qquad \exists_y \frac{\exists x A(x)}{\neg\forall x \neg A(x)}$$

Будем говорить, что последовательность α есть вывод из посылок Г, если существует такое *n,* что α есть вывод уровня *n* из посылок Г.

Очевидно, что введенное понятие вывода для исчисления предикатов заведомо не рекурсивно.

Если мы будем каждой формуле, входящей в вывод в качестве доказуемой формулы, сопоставлять ее доказательство, то получим фигуру в виде леса последовательностей; проблема распознавания того, является ли эта фигура выводом или нет, будет решаться эффективно.

Мы будем записывать выводы различных уровней следующим образом:

Вывод нулевого уровня будем изображать в виде столбца формул с анализом, т. е. справа от каждой формулы указывать или что это посылка, или что она получена из формул, стоящих на местах за такими-то номерами по такому-то правилу. Вывод *n*-го уровня также будем изображать в виде столбца, но от каждой формулы *A*, принимаемой в качестве доказуемой на уровне *n,* будет отходить линия (ветвь), другой конец которой заканчивается поперечной линией, упирающейся в последнюю формулу вывода *n* – 1-го уровня, обеспечивающего принятие формулы *A* в качестве доказуемой на уровне *n.*

Примером формального вывода исчисления *A* может служить следующая фигура:

1. $A\&B$ посылка	1. $A\&B \vee A\&C$ посылка
2. A $\&_{у}$; 1	
$\vert$____________	2. $A\&B \supset A$ $\&_{у}$; 1
1. $A \& C$ посылка	
2. A $\&_{у}$; 1	
$\vert$____________	3. $A\&C \supset A$
	4. $(A\&B \vee A\&C) \supset A$ $\vee_{у}$; 2,3
1. $A\&B$ посылка	5. A $\supset_{у}$; 1,4
2. B $\&_{у}$; 1	
3. $B \vee C$ $\vee_{B}$; 2	
$\vert$____________	6. $A\&B \supset B \vee C$
1. $A\&C$ посылка	
2. C $\&_{у}$; 1	
3. $B \vee C$ $\vee_{B}$; 2	
$\vert$____________	7. $A\&C \supset B \vee C$
	8. $A\&B\vee A\&C \supset B\vee C$ $\vee_{у}$; 6,7
	9. $B \vee C$ $\supset_{у}$; 1,8
	10. $A\&(B \vee C)$ $\&_{B}$; 5,9

Мы построили формальный вывод уровня 1 формулы $A\& (B\vee C)$ из посылки $A\&B \vee A\&C$.

Введем фигуру, которую мы будем называть лесом последовательностей[5].

1. Если α есть формула, то α есть лес последовательностей.

2. Если β есть лес последовательностей и A формула, то $\overset{\beta}{A}$ есть лес последовательностей.

3. Если α и β суть леса последовательностей и A формула, то

$$\overset{\underline{\alpha}}{|}\_\_\_\_\_\_ \overset{\beta}{A}$$ есть лес последовательностей.

4. Если α_1, α_2 и β суть леса последовательностей и A формула, то

$$\overset{\underline{\alpha 1}}{|}\_\_\_\_\_\_ \overset{\beta}{A}\_\_\_\_\_\_ \overset{\underline{\alpha 2}}{|}$$ есть лес последовательностей.

5. Ничто другое не есть лес последовательностей. A есть *последняя формула* леса последовательностей γ, если γ имеет вид одной из следующих фигур:

---

[5] Собственно это дерево столбцов, но ради единообразия мы его будем называть лесом последовательностей по аналогии с лесом деревьев.

$$A,\ \overset{\beta}{A},\qquad \overset{\underline{\alpha}}{|}\underline{\qquad\quad}\overset{\beta}{A},\qquad \overset{\underline{\alpha 1}}{|}\underline{\qquad\quad}\overset{\beta}{A}\underline{\qquad\quad}\overset{\underline{\alpha 2}}{|}$$

где α, β, α_1 и α_2 леса последовательностей. Леса последовательностей α, α_1 и α_2 будем называть *вспомогательными* относительно γ, а *A* в первом случае и $\overset{\beta}{A}$ – в остальных трех – основными.

Будем говорить, что формула *A входит* в лес последовательностей γ тогда и только тогда, когда *A* есть последняя формула γ или γ имеет вид

$\overset{\beta}{B}$, или $\overset{\underline{\alpha}}{|}\underline{\qquad\quad}\overset{\beta}{B}$, или

$\overset{\underline{\alpha 1}}{|}\underline{\qquad\quad}\overset{\beta}{B}\underline{\qquad\quad}\overset{\underline{\alpha 2}}{|}$ и *A* входит в β.

Теперь нетрудно дать определение вывода в виде леса последовательностей для системы *A*:

1. *A* есть вывод из множества посылок Х, если $A \in$ Х.

2. Если β есть вывод из множества посылок Х и $A \in$ Х,

то $\overset{\beta}{A}$ есть вывод из множества посылок Х.

3. Если β есть вывод из множества посылок Х, формулы $A_1,...,A_к$ входят в β и из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула Е*,* то $\overset{\beta}{\mathrm{E}}$ есть вывод из множества посылок Г.

4. Если α есть вывод из множества посылок $\{A_1, \ldots, A_n\}$, *B* есть последняя формула α, ни одна переменная в выводе α не варьируется и β есть вывод из множества Х, то $\overset{\underline{\alpha}}{|}\underline{\qquad\quad}\ \ A_1 \supset (A_2\ \overset{\beta}{.}\ .\ .\ (A_n \supset B)...)$ есть вывод из множества посылок Х.

II. Система В.

Можно принять в качестве правил построения вывода не правила, соответствующие теореме дедукции, а правила, соответствующие способу рассуждения, называемому доказательством от противного (в той или иной форме:

$$\frac{\Gamma, A \mid -B; \Gamma, A \mid -\neg B}{\Gamma \mid -\neg A}; \qquad \frac{\Gamma, A \mid -B \mathbin{\&} \neg B}{\Gamma \mid -\neg A};\ \frac{\Gamma, A \mid -B}{\Gamma, \neg B \mid -\neg A})$$

или доказательство от противного, включающего в свою структуру частный случай теоремы дедукции:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, \neg B \mid -C \mathbin{\&} \neg C}{\mid -A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_n \supset B)\ldots)}$$

Слупецкий [32] строит исчисление натурального вывода как на основе только последнего принципа, так и на основе этого принципа, скомбинированного с принципом варианта *A*.

Слупецкий называет построение, основанное на понятии вывода, сформулированного для системы *A*, прямым доказательством посредством допущений, а на основе вывода противоречия – косвенным доказательством посредством допущений. Мы не принимаем его терминологию, так как под прямым выводом мы имеем в виду последовательность формул, каждая из которых или посылка или получена из предыдущих по одному из правил вывода; непрямым (косвенным) выводом мы называем всякое построение, которое позволяет принять ту или иную формулу в качестве доказуемой или принять, что из Г выводима *A*, не в силу факта прямого дедуцирования искомого заключения, а в силу наличия другого вывода. Поэтому с нашей точки зрения и вывод, основанный на принципе доказательства от противного, и вывод, основанный на правиле введения импликации, являются непрямыми (косвенными). В системе без аксиом, естественно, всякое доказательство (вывод из пустого множества посылок) не может быть прямым, а только косвенным.

III. Система C.

Сформулируем классическую систему натурального вывода с таким понятием вывода, в котором из вспомогательного вывода устраняются не все посылки, а только некоторые, и в качестве правил непрямого вывода принимаются не только правила введения импликации и введения отрицания, но и удаления дизъюнкции и квантора существования. Правила вывода:

$$\supset_y \frac{A, A \supset B}{B}, \qquad \&_B \frac{A, B}{A \& B}, \qquad \&_{y_1} \frac{A \& B}{A},$$

$$\&_{y_2} \frac{A \& B}{B}, \qquad \vee_{B_1} \frac{A}{A \vee B}, \qquad \vee_{B_2} \frac{B}{A \vee B},$$

$$\neg_y \frac{\neg\neg A}{A}, \qquad \forall_B \frac{Aw}{\forall x F_x^w Aw}, \qquad \forall_y \frac{\forall x Ax}{At},$$

$$\exists_B \frac{F_t^w Aw}{\exists x F_x^w Aw}.$$

Правило $\forall_B$ приводит к варьированию переменной *w* относительно посылки *A*, если *A* содержит *w* и $\forall_B$ применяется к формуле, зависящей от *A* по переменной *w*.

Определим формальный вывод для системы *C*.

1. Если $A \in$ X, то *A* есть вывод из множества посылок X.

2. Если β есть вывод из множества посылок X и $A \in$ X, то $\overset{\beta}{A}$ есть вывод из множества посылок X.

3. Если β есть вывод из множества посылок X, A и B входят в β и из A и B непосредственно выводима формула E, то $\overset{\beta}{E}$ есть вывод из множества посылок X.

4. Если β есть вывод из множества посылок X, A входит в β и из A непосредственно. выводима формула E, то $\overset{\beta}{E}$ есть вывод из множества посылок X.

5. Если α есть вывод из множества посылок $\{A_1, \ldots, A_n, B\}$, E есть последняя формула α и ни одна переменная не варьируется относительно посылки B, и если β есть вывод из множества посылок X и формулы $A_1, \ldots, A_n$ входят в β, то

$$\overset{\alpha}{|}\underline{\qquad}\overset{\beta}{B \supset E}$$

есть вывод из множества посылок X.

6. Если α_1 есть вывод формулы E из множества посылок $\{A_1, \ldots, A_n, C\}$, α_2 есть вывод формулы $\neg E$ из множества посылок $\{B_1, \ldots, B_m, C\}$, ни одна переменная не варьируется относительно C в α_1 и α_2, β есть вывод из множества посылок X и формулы $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m$ входят в β, то $\overset{\alpha 1}{|}\underline{\qquad}\overset{\beta}{\neg C}\underline{\qquad}\overset{\alpha 2}{|}$ есть вывод из множества посылок X.

7. Если α_1 есть вывод формулы E из множества посылок $\{A\} \cup$ Yi, α_2 есть вывод формулы E из можества посылок $\{B\} \cup Y_2$, ни одна переменная в выводах α_1 и α_2 не варьируется относительно посылок A и B соответственно, и если β есть вывод из множества посылок X, формулы из Y_1 и Y_2 и формула $A \vee B$ входят в β, то

$$\overset{\alpha 1}{|}\underline{\qquad}\overset{\beta}{E}\underline{\qquad}\overset{\alpha 2}{|}$$

есть вывод из множества посылок X.

8. Если α есть вывод из множества посылок $\{Aw\} \cup$ Y формулы C, формула C не содержит w и ни одна переменная не варьируется относительно посылки Aw, и если β есть вывод из множества посылок X, каждая формула из Y и формула $\exists x F^{w}_{x} Ax$ входят в β, то

$\overset{\alpha}{|}\underline{\qquad}\overset{\beta}{C}$ есть вывод из множества посылок X.

Примерами формальных выводов системы C могут служить следующие фигуры.

Вывод формулы $\forall xA(x) \supset \exists xB(x)$ из посылки $\exists x(A(x) \supset B(x))$

1. $A(w) \supset B(w)$ посылка
2. $\forall xA(x)$ посылка
3. $A(w)$ $\forall_y$; 2
4. $B(w)$ *m.p.;* 1,3
5. $\exists xB(x)$ $\exists_B$; 4

| 1. $A(w) \supset B(w)$ посылка
|___2. $\forall(x)A(x) \supset \exists xB(x)$ 5; 1

| 1. $\exists xA(x) \supset B(x))$ посылка
|___2. $\forall xA(x) \supset \exists xB(x)$ 8; 1

Вывод формулы $\forall xA(x) \vee B(x))$ из $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

$\forall xA(x)$ посылка	$\forall xB(x)$ посылка
$A(w)$ $\forall_y$; 1	$B(w)$ $\forall_y$; 1
$A(w) \vee B(w)$ $\vee_B$; 2	$A(w) \vee B(w)$ $\vee_B$; 2
$\forall x(A(x) \vee B(x))$ $\forall_B$; 3	$\forall x(A(x) \vee B(x))$ $\forall_B$; 3

| 1. $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ посылка |
|__2. $\forall xA(x) \vee B(x))$ 7; I ___|

§ 5. СИСТЕМА ЗАПИСИ СУБОРДИНАТНОГО ВЫВОДА ПО МЕТОДУ ЯСЬКОВСКОГО – ФИТЧА

Запись субординатного вывода в виде леса деревьев или леса последовательностей мало удобна. Такая форма записи громоздка и проводить в подобной форме рассуждения неудобно. Но эта форма записи и не претендует на удобство. Предложенный способ изображения вывода имеет лишь теоретическую ценность, в частности он помогает уяснению других, более компактных форм записи. Пусть у нас имеется, например, следующий вывод:

1. $A \supset B$ пос.
2. $B \supset C$ пос.
3. A пос.
4. B *m. p.*; 1, 3.

5. $\underline{C}$ *т. р.*; 2, 4

| 1. $A \supset B$ пос.
| 2. $B \supset C$ пос.
|___3. $А \supset C \supset_{\Gamma_B}$; 1,2

Мы получим более компактную запись, если вывод, стоящий на ветви, вгоним в основной ствол между той строкой, куда входит ветвь и вышестоящими. Чтобы оставить след от этой операции, от начала и до конца каждого вывода, стоящего па ветвях, слева от него проведем вертикальную черту.

Тогда мы для нашего примера получим:

1. $A \supset B$ пос.
2. $B \supset C$ пос.

|1. $A \supset B$	пос.
|2. $B \supset C$	пос.
|3. A	пос.
|4. B	*т. р.;* 1,3
|5. C	*т. р;* 2,4
3. $A \supset C$	$\supset_{\Gamma_B}$; 1,2

Теперь дадим сплошную нумерацию формул. Соответственно изменяем и анализ. Те посылки вспомогательного вывода, которые совпадают с формулами основного (стержневого вывода), снабжаем указанием, что это такие-то формулы, взятые из основного вывода. Указание о переносе формулы за номером *n* будем кратко записывать: пер. *n.* В итоге мы получим для рассматриваемого примера следующую запись

1. $A \& (B \vee C)$	пос.
2. $B \supset C$	пос.
3. |$A \supset B$	пер. 1
4. |$B \supset C$	пер. 2
5. |A	пос.
6. |B	*т.р.;* 3,5
7. |C	*т.р.;* 4,6
8. |$A \supset C$	$\supset_B$; 3-7

Легко видеть, что каждому косвенному выводу в виде дерева столбцов может быть сопоставлен вывод в указанной форме и наоборот. Например, вывод

1. $A \& (B \vee C)$	пос.
2. A	$\&_у$; 1
3. $B \vee C$	$\&_у$; 1
4. |B	пос.
5. |A	пер.; 2

6.	$\|A \& B$	$\&_B$; 5, 4
7.	$\|A \& B \vee A \& C$	$\vee_B$; 6
8.	$\|C$	пос.
9.	$\|A$	пер.; 2
10.	$\|A \& C$	$\&_B$; 9, 8
11.	$\|A \& B \vee A \& C$	$\vee_B$; 10
12.	$A \& B \vee A \& C$	$\vee_у$; 3, 4–7, 8–11

запишется в виде дерева столбцов

A	пос.	A	пос.
B	пос.	C	пос.
$A \& B$	$\&_B$; 1, 2	$A \& C$	$\&_B$; 1, 2
$A \& B \vee A \& C$	$\vee_B$; 3	$A \& B \vee A \& C$	$\vee_B$; 3

$A \& (B \vee C)$	пос.
A	$\&_у$; 1
$B \vee C$	$\&_у$; 1
$A \& B \vee A \& C$	

Запись вывода в виде столбца формул с вертикальными чертами носит название метода субординатного доказательства (вывода). В той форме, о которой мы говорили выше, способ записи субординатного вывода развит Фитчем. В его книге «Simbolic logic» (1952) этим методом изложены основные системы логики. Однако, по существу аналогичная форма записи была развита Яськовским еще в 1926 году. Об этом он пишет в основополагающей работе 1934 года «On the rules of suppositions in formal logic». У Яськовского вспомогательный вывод не отчеркивается чертой, а берется в прямоугольник. Например,

A

$A \supset B$

A

B

$(A \supset B) \supset B$

$A \supset ((A \supset B) \supset B)$

Вывод в виде леса последовательностей аналогичен выводу в виде леса деревьев § 3. Введем это понятие вывода более точно.

Прежде всего определим, что мы имеем в виду под лесом и псевдолесом последовательностей.

1. Пустое слово есть лес последовательностей.
2. Если A формула, то A есть лес последовательностей.

3. Если α есть лес последовательностей, то $|\alpha$ (или в другой форме записи $\boxed{\alpha}$ есть псевдолес последовательностей.

4. Если α лес или псевдолес последовательностей и A формула, то $\begin{matrix}\alpha\\ A\end{matrix}$ есть лес последовательностей.

5. Если α есть лес или псевдолес последовательностей и β псевдолес последовательностей, то $\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}$ есть псевдолес последовательностей.

Будем говорить, что формула *A входит* в лес последовательностей α, тогда и только тогда, когда α можно представить в виде $\begin{matrix}\beta_1\\ A\\ \beta_2\end{matrix}$, где β_1 лес или псевдолес последовательностей и β_2 лес последовательностей. Если в этом представлении β_2 пуста, то будем говорить, что формула A есть *последняя формула* леса последовательностей α.

Будем говорить, что β есть *непосредственный подлес* леса последовательностей α, если α представим в виде $\begin{matrix}\gamma_1\\ |\,\beta\\ \gamma_2\end{matrix}$, где γ_1 есть лес или псевдолес последовательностей, а γ_2 лес последовательностей.

Заметим, что формула, входящая в непосредственный подлес леса последовательностей, не входит в сам лес последовательностей.

Теперь нетрудно дать точное определение вывода в виде леса последовательностей.

1. A есть вывод из множества посылок $\{A\}$.

2. Если α есть вывод из множества посылок X и A формула, то $\begin{matrix}\alpha\\ A\end{matrix}$ есть вывод из множества посылок $\{A\}\cup X$.

3. Если α есть вывод множества посылок X и A аксиома, то $\begin{matrix}\alpha\\ A\end{matrix}$ есть вывод из множества посылок X.

4. Если α есть вывод из множества посылок X, формулы $A_1, \ldots, A_k$ входят в α и из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула B, то $\begin{matrix}\alpha\\ B\end{matrix}$ есть вывод из множества посылок X.

5_1. Если α есть вывод из множества посылок X, β есть вывод формулы E из множества посылок $\{B\} \cup Y$ и каждая формула из Y входит в α, то $\begin{matrix}\alpha\\ |\,\beta\\ B\supset E\end{matrix}$ есть вывод из множества посылок X.

5_2. Если α есть вывод из множества посылок X, β_1 есть вывод формулы E из $\{B\} \cup Y_1$ и β_2 есть вывод формулы E из $\{C\} \cup Y_2$, где каждая формула Y_1 и Y_2 входит в α, то

α
$B \vee C$
$|\beta_1$
$|\beta_2$
E

есть вывод из множества посылок X.

Аналогично даются пункты, соответствующие другим правилам косвенного вывода. В пункте 5 даются соответствующие ограничения (на варьируемость переменной в устраняемой посылке и т. п.).

Для логических систем с введенным понятием вывода верны теоремы о добавлении посылок, перестановке посылок, сокращении и сечении.

При рассмотрении логических систем, для которых нежелательно иметь правило добавления, рассматриваются выводы с анализом, в которых последняя формула зависит от каждой посылки. Понятие зависимости вводится по аналогии с понятием зависимости для систем гильбертовского типа.

При определении вывода из списка посылок – если мы желаем, чтобы правило сокращения посылок подразумевалось структурой вывода – нужно пункт 5 вводить следующим образом:

5_1. Если α есть вывод из списка посылок Г, β есть вывод формулы E из списка посылок Δ, формула B входит в Δ и каждая формула из Δ_B входит в α, то $\begin{array}{l} \alpha \\ |\ \beta \\ B \supset E \end{array}$ есть вывод из списка посылок Г.

Вводятся аналогичные поправки для остальных случаев.

§ 6. СУБОРДИНАТНЫЙ ВЫВОД В НОТАЦИИ ЯСЬКОВСКОГО – КУАЙНА

В этом параграфе мы рассмотрим субординатный вывод в виде леса последовательностей, соответствующий выводу в виде леса деревьев из параграфа 2.

Впервые системы с понятием вывода, анализируемым в этом параграфе, были построены Яськовским в работе [48] в 1934 году. Позже Куайн строит логические системы с аналогичным понятием вывода 155].

Мы излагаем способ записи Яськовского для исчисления высказываний с двумя пропозициональными связками – импликацией и отрицанием. Мы сохраняем бесскобочную символику, принятую в польской школе логики: $C\alpha\beta$ – это $\alpha \supset \beta$, $N\alpha$ – это $\neg\ \alpha$; α и β суть ситаксические переменные, пробегающие по формулам. В качестве пропозициональных переменных используются буквы p, q, r…

При анализе рассуждения из допущений Яськовский предлагает рассматривать все утверждения, входящие в рассуждения, вместе с приписываемыми им префиксами. Префиксы – это последовательности чисел, разделенных точками. Например, 1·1, 1·1·2·1 и т. д. Возможны выражения с пустым префиксом. Префиксы пишутся впереди формул. Если некоторая формула принимается в качестве допущения, то это фиксируется наличием буквы S, расположенной между префиксом и формулой.

Класс, составленный из допущения α и всех формул, начальная часть префиксов которых графически равна (в терминологии Яськовского эквиформна) *префиксу допущения* α, Яськовский называет *областью допущения* α.. Область формул с пустым префиксом называется *абсолютной областью.*

D есть подобласть D^1, если D есть область допущения α, *А* D^1 есть область допущения β и начальная часть префикса α эквиформна с префиксом допущения β или если D^1 есть абсолютная область.

D есть *непосредственная подобласть* D^1, если D есть подобласть D^1, но D не является подобластью подобласти D^1.

Предложение α *значимо в области* D, если D есть подобласть D^1 и α принадлежит D^1. Т. е. предложения, принадлежащие области, значимы в каждой ее подобласти.

Области расширяются. Исходя из пустой абсолютной области, можно шаг за шагом ее расширять, следуя определенным правилам. Эти правила следующие:

Правило 1. Для каждой области D разрешается присоединить выражение, составленное из следующих друг за другом выражений:

1. числа, не эквиформного с начальным номером любого другого элемента области D,
2. точки,
3. символа «S»,
4. предложения.

Т. е. разрешается присоединить допущение, символ «S» и означает, что формула присоединяется в качестве допущения.

Правило II. Если в области D допущения α значимо предложение β, то разрешается присоединить предложение формы «Cαβ» к области, относительно которой D есть непосредственная подобласть.

Правило III. Если дана область D, в которой значимы два предложения, одно из которых есть α, а другое состоит из следующих друг за другом

1. символа «C»,
2. предложения, эквиформного α,
3. предложения β,

то разрешается присоединить к области D предложение, эквиформное β.

Правило IV. Если дана область D допущения, составленного из символа «N» и предложения α, и если два предложения β и γ значимы в D и γ составлено из символа «N» и предложения, эквиформного β, то разрешается присоединить предложение, эквиформное с α к области, относительно которой D есть непосредственная подобласть. Приведем пример вывода в нотации Яськовского

td 1	$1{\cdot}Sp$	I
td 2	$1{\cdot}1{\cdot}SCpq$	I
td 3	$1{\cdot}1{\cdot}q$	III 2,1
td 4	$1{\cdot}CCpqq$	II 2,3
td 5	$CpCCpqq$	II 1,4

Заметим, что правила II–IV формулируются в виде правил непрямого вывода.

Другой формой записи выводов, эквивалентных записи в виде дерева столбцов и субординатного вывода, является форма записи, предложенная Куайном. Я пока абстрагируюсь от нововведений, вносимых Куайном в теорию квантификации. Об этом речь пойдет ниже. Понятие вывода в смысле Куайна четко формулируется Гудстейном. Гудстейн, излагая куайновский вариант системы натурального вывода, под выводом имеет в виду конечную последовательность формул, но эта последовательность должна удовлетворять дополнительным требованиям сравнительно с обычным, гильбертовским выводом. Эти требования следующие:

«В дедукции с помощью естественного вывода всякая введенная гипотеза может быть устранена применением схемы введения импликации (II)

$$\frac{\varphi \mid\!- \psi}{\varphi \supset \psi}$$

В применении этой схемы φ есть гипотеза и всякая новая гипотеза, введенная между той строкой, на которой стоит φ, и той строкой, на которой стоит ψ, должна быть устранена прежде той строки, на которой стоит ψ. Гипотезы нумеруются и рядом с той строкой, где устраняется гипотеза номер *n,* мы пишем – *n.* В правильном применении схемы (II) сумма номеров всех строк от φ до $\varphi \supset \psi$ должна быть равна нулю. В дедукции предложение $\varphi \supset \psi$ из $\varphi \mid\!- \psi$ называется последней строкой дедукции, а φ называют посылкой» [15].

Практически Куайн строит выводы, где все гипотезы устранены, вывод со всеми устраненными гипотезами есть доказательство.

Приведем примеры последовательности формул, являющихся выводами в смысле Куайна и последовательностей, не удовлетворяющих сформулированным выше требованиям:

(I)	1	$p \supset q$
	2	$q \supset r$
	3	p
		q
		r
	–3	$p \supset r$
	–2	$(q \supset r) \supset (p \supset r)$
	–1	$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$

(I) есть доказательство последней строки в смысле Куайна.

(II)	1.	p
	2.	$p \supset q$
	3.	$q \supset r$
		q
		r
	–1.	$p \supset r$
	–2.	$(q \supset r) \supset (p \supset r)$
	–3.	$(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$

(II) не есть доказательство, так как сумма строк от $q \supset r$ до $p \supset r$ не равна 0; аналогично для $p \supset r$ и $(q \supset r) \supset (p \supset r)$.

Существует однозначное соответствие между выводом, представленным в виде дерева столбцов с единственным правилом косвенного вывода «если существует вывод формулы B из посылок Г, A уровня n, то из Г непосредственно выводима на уровне $n + 1$ формула $A \supset B$», и выводом в смысле Куайна (с анализом). Каждому выводу в виде дерева столбцов может быть сопоставлен один и только один вывод в смысле Куайна. Но каждому выводу в смысле Куайна без анализа может быть сопоставлено конечное множество выводов в виде дерева столбцов.

На содержательном уровне сформулированное выше утверждение обосновывается следующим образом. Все ветви вгоняются в ствол. Чтобы отличить строки вспомогательных выводов от главных, перед началом вспомогательного вывода будем вставлять строки, состоящие из знака $\sqcap$, а после конца вспомогательного вывода вставлять строку, состоящую из знака $\sqcup$

A_1	A_1	A_1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
A_n	A_n –>	A_n
.	.	
.	.	.
.	.	.
B		A_1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\underline{C}$		A_n
|		.
|____	$B \supset C$	B
		.
		$\boxed{C}$
		$B \supset C$

Каким-то образом (с помощью индексов, или другим способом) фиксируются сопряженные скобки. Роль сопряженных скобок могут играть и вертикальные черты, как это имеет место у Фитча.

Затем те посылки вспомогательного вывода, которые являются формулами, входящими в основной вывод выше вспомогательного, вычеркиваются (если вывод сопровождается анализом, то соответственно меняется анализ).

Изложенное выше рассуждение не является строгим доказательством. Чтобы строго доказать сформулированное соотношение между понятием вывода в виде дерева столбцов и выводом в смысле Куайна, необходимо уточнить оба понятия. Понятию вывода в виде дерева столбцов было сопоставлено понятие вывода, сформулированное в § 3 гл. 3.

Попытаемся найти аналогичное уточнение для формального вывода в смысле Куайна. Вывод в смысле Куайпа будем рассматривать как линейную последовательность формул и выражений [и], где [и] не являются элементами, из которых составлены формулы. Последовательность есть не что иное, как слова в алфавите $A = \{[,], X_1, \ldots, X_i, \ldots\}$, где X_i есть формула.

Нам нужны понятия: A входит в последовательность α и A заключена (не заключена) в парные скобки в α.

Т есть упорядоченная последовательность формул (не множество формул!). Тогда понятие вывода в смысле Куайна может быть уточнено следующим образом:

1. Если E посылка (гипотеза), то [E есть вывод из E.

2. Если E аксиома, то E есть вывод из $\wedge$.

3. Если α есть вывод из **Т** и E гипотеза, то α [E есть вывод из **Т**E

4. Если α есть вывод из **Т** и E аксиома, то αE есть вывод из **Т**.

5. Если α есть вывод из **Т**, формулы $A_1, \ldots, A_к$ входят в α, каждая из $A_1, \ldots, A_„$ не заключена внутри парных скобок и из Ai, . . ., A_k непосредственно выводима формула Е, то αE есть вывод из **Т**.

6. Если α есть вывод из **Т**A, формула E есть последний член последовательности α, то α$A \supset E$] есть вывод из **Т.**

Определим более точно понятие вывода в виде леса последовательностей из списка формул.

1. A есть вывод из списка формул A.

2. Если α есть вывод из списка формул Г и A есть формула, то $\overset{\alpha}{\mathrm{A}}$ есть вывод из списка формул A, Г.

3. Если α есть вывод из списка формул Г, формулы $A_1, \ldots, A_k$ входят в α и из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула E, то E есть вывод из списка посылок Г.

4_1. Если α есть вывод из списка посылок B, Г и если формула E есть последняя формула α, то $B \overset{|\alpha}{\supset} E$ есть вывод из списка посылок Γ_B[6].

Аналогично формулируются правила построения вывода и для других правил косвенного вывода.

При рассмотрении некоторых систем, например, абсолютной, мы можем потребовать, чтобы последняя формула вывода зависела от каждой посылки.

В заключение приведем доказательство транзитивности в записи § 5 (нотация Яськовского – Фитча) и § 6 (нотация Яськовского – Куайна).

[6] Вместо В $\overset{|\alpha}{\supset} E$ можно писать $\begin{array}{l} |\,\alpha \\ / \\ BB \supset E \end{array}$, указывая, какая формула элиминируется.

В нотации
Яськовского – Фитча

$\vert$	1. $A \supset B$	доп
$\Vert$	2. $A \supset B$	пер 1
$\Vert$	3. $B \supset C$	доп
$\Vert\vert$	4. A	доп
$\Vert\vert$	5. $A \supset B$	пер 2
$\Vert\vert$	6. B	m.p.; 4,5
$\Vert\vert$	7. $B \supset C$	пер 3
$\Vert\vert$		
$\Vert\vert$	8. C	m.p.; 6,7
$\Vert$		
$\Vert$		
$\Vert$	9. $A \supset C$	$\supset_B$; 4–8
$\vert$	10. $(B \supset C) \supset$ $\supset (A \supset C)$	$\supset_B$; 2–9
	11. $(A \supset B) \supset$ $\supset ((B \supset C) \supset$ $\supset (A \supset C))$	$\supset_B$; 1–10

В нотации
Яськовского – Куайна

$\vert\vert\vert$	1. A	доп
$\vert\vert\vert$	2. $A \supset B$	доп
$\vert\vert\vert$	3. B	m.p.; 1,2
$\vert\vert\vert$	4. $B \supset C$	доп
$\vert\vert\vert$	5. C	m.p.; 3,4
$\vert\vert$	6. $A \supset C$	$\supset_B$; 1–5
$\vert$	7. $(B \supset C) \supset$ $\supset (A \supset C)$	$\supset_B$; 1–6
	8. $(A \supset B) \supset$ $\supset ((B \supset C) \supset$ $\supset (A \supset C))$	$\supset_B$; 1–7

Пер (перенос)– это реитерация Фитча. В дальнейшем мы из-за типографских трудностей будем опускать вертикальные черты как в нотации Яськовского – Фитча, так и в нотации Яськовского – Куайна. Анализ позволяет восстановить эти вертикальные черты, так как в нем имеются ссылки на подпоследовательности (4–8, 2–9, 1–10 в первой записи и 1–5, 1–6, 1–7 во второй).

§7. КРАТКОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем некоторые итоги. Системы натурального вывода отличаются от систем гильбертовского типа понятием вывода; если для систем гильбертовского типа формальный вывод имеет вид дерева или последовательности формул, то для натуральных исчислений вывод имеет вид леса деревьев или леса последовательностей. Для натуральных исчислений обязательно не отсутствие аксиом (схем аксиом), а наличие по крайней мере одного правила непрямого вывода.

В этой связи встает проблема: охарактеризовать минимальные классы рекурсивных предикатов, к которым принадлежат предикаты «быть выводом» для исчислений гильбертовского типа и натуральных исчислений, например, в классификации рекурсивных функций Гжегорчика.

Формулировка правил вывода для систем натурального вывода проста и наглядна, однако эта простота покупается за счет усложнения понятия вывода в натуральных исчислениях по сравнению с понятием вывода для систем гильбертовского типа.

К сожалению, в большинстве изложений логических систем методом натурального вывода само понятие вывода остается неуточненным. Цель третьей главы и состояла прежде всего в уточнении понятия вывода для натуральных исчислений.

Глава четвертая

КЛАССИЧЕСКИЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

§ 1. СЕКВЕНЦИИ. ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗНАКОВ

Можно построить логическую систему, являющуюся формализацией класса верных записей о логическом следовании. Исходными объектами будут не формулы, а выражения вида $\Gamma\to\Delta$, где Γ и Δ суть последовательности (возможно пустые) формул. Эти выражения называют секвенциями. При интерпретации секвенция $\Gamma\to\Delta$ означает «из Γ логически следует Δ».

Сформулируем правила вывода, или фигуры заключения, соответствующие непрямым правилам введения и удаления логических знаков справа и слева.

I

ВИП $\dfrac{A,\Gamma\to\Theta,B}{\Gamma\to\Theta,A\supset B}$

ВКП $\dfrac{\Gamma\to\Theta,A\quad\Gamma\to\Theta,B}{\Gamma\to A\mathbin{\&}B}$

ВДЛ $\dfrac{A,\Gamma\to\Theta\quad B,\Gamma\to\Theta}{A\vee B,\Gamma\to\Theta}$

ВОП $\dfrac{A,\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,\neg A}$

В∀П $\dfrac{\Gamma\to\Theta,Aw}{\Gamma\to\Theta,\forall xAx}$

В∃Л $\dfrac{Aw,\Gamma\to\Theta}{\exists xAx,\Gamma\to\Theta}$

II

УИП $\dfrac{\Gamma\to\Theta,A\supset B}{A,\Gamma\to\Theta,B}$

УКП $\dfrac{\Gamma\to\Theta,A\mathbin{\&}B}{\Gamma\to\Theta,A\text{ и }\Gamma\to\Theta,B}$

УДЛ $\dfrac{A\vee B,\Gamma\to\Theta}{A,\Gamma\to\Theta\text{ и }B,\Gamma\to\Theta}$

УОП $\dfrac{\Gamma\to\Theta,\neg A}{A,\Gamma\to\Theta}$

У∀П $\dfrac{\Gamma\to\Theta,\forall xAx}{\Gamma\to\Theta,At}$

У∃Л $\dfrac{\exists xAx,\Gamma\to\Theta}{At,\Gamma\to\Theta}$

III

ВИЛ $\dfrac{\Gamma\to A\quad B,\Gamma\to\Theta}{A\supset B,\Gamma\to\Theta}$

ВКЛ $\dfrac{A,\Gamma\to\Theta\text{ или }B,\Gamma\to\Theta}{A\mathbin{\&}B,\Gamma\to\Theta}$

IV

УИЛ $\dfrac{A\supset B,\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,A\text{ и }B,\Gamma\to\Theta}$

УКЛ $\dfrac{A\mathbin{\&}B,\Gamma\to\Theta}{A,B,\Gamma\to\Theta}$

ВДП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \text{ или } \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}$ УДП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \vee B}{\Gamma \to \Theta, A, B}$

ВОЛ $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta}$ УОЛ $\dfrac{\neg A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A}$

В∀Л $\dfrac{At, \Gamma \to \Theta}{\forall x A x, \Gamma \to \Theta}$ У∀Л $\dfrac{\forall x F_x^w Aw, \Gamma \to \Theta}{F_{\varepsilon x \neg \mathrm{A} x}^w Aw, \Gamma \to \Theta}$

В∃П $\dfrac{\Gamma \mid -F_t^w Aw}{\Gamma \mid -\exists x F_x^w Aw}$ У∃П $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \exists x F_x^w Aw}{\Gamma \to \Theta, F_{\varepsilon x \mathrm{A} x}^w Aw}$

Фигуры заключения У∃П и У∀Л будут объяснены в главе седьмой. На фигуры В∀П и В∃Л, а также У∀Л и У∃П накладываются ограничения: w не входит в формулы из Γ и Θ.

Правило с «или» над чертой является сокращенной записью двух правил; например, $\dfrac{A, \Gamma -> \Theta \text{ или } B, \Gamma -> \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma -> \Theta}$ состоит из двух правил $\dfrac{A, \Gamma -> \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma -> \Theta}$ и $\dfrac{B, \Gamma -> \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma -> \Theta}$.

Аналогично правило с «и» под чертой состоит из двух правил, например, $\dfrac{A \vee B, \Gamma -> \Theta}{A, \Gamma -> \Theta \text{ и } B, \Gamma -> \Theta}$ из $\dfrac{A \vee B, \Gamma -> \Theta}{A, \Gamma -> \Theta}$ и $\dfrac{A \vee B, \Gamma -> \Theta}{B, \Gamma -> \Theta}$

В правилах секвенции, стоящие над чертой, будем называть *верхними*, а под чертой – *нижними* секвенциями этого правила.

Помимо логических фигур сформулируем структурные фигуры заключения:

$\dfrac{\Gamma -> \Theta}{A, \Gamma -> \Theta}$ ДЛ – добавление слева $\dfrac{\Gamma -> \Theta}{\Gamma -> \Theta, B}$ ДП – добавление справа

$\dfrac{A, A, \Gamma -> \Theta}{A, \Gamma -> \Theta}$ СЛ – сокращение слева $\dfrac{\Gamma -> \Theta, B, B}{\Gamma -> \Theta, B}$ СП – сокращение справа

$\dfrac{\Gamma, C, D, \Delta -> \Theta}{\Gamma, D, C, \Delta -> \Theta}$ ПЛ – перестановка слева $\dfrac{\Gamma -> \Theta, A, B, \lambda}{\Gamma -> \Theta, B, A, \lambda}$ ПП – перестановка справа

$\dfrac{\Gamma -> \Theta, MM, \Delta -> \lambda}{\Gamma, \Delta -> \Theta, \lambda}$ сечение.

Основной секвенцией является выражение вида $A \to A$.

Доказательство имеет вид дерева. Структурные фигуры и логические фигуры групп I и II образуют классическое секвенциальное натуральное исчисление SNC. Структурные фигуры и фигуры групп I и III образуют классическое секвенциальное логистическое исчисление SLC.

Легко видеть, что SNC эквивалентна SLC в том смысле, что каждая секвенция, доказуемая в одном исчислении, доказуема и в другом.

Для доказательства того, что каждая секвенция, доказуемая в SLC, доказуема в SNC, достаточно показать, что правила группы III производны в SNC.

Каждое применение ВИЛ можно заменить на

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \cfrac{A \supset B \to A \supset B}{A, A \supset B \to B}\text{УИП}}{\Gamma, A \supset B \to \Theta, B}\text{С} \qquad B, \Gamma \to \Theta}{\Gamma, A \supset B, \Gamma \to \Theta, \Theta}\text{С}}{A \supset B, \Gamma \to \Theta}\text{СЛ, П; СП}$$

Каждое применение ВКЛ заменяется на

$$\cfrac{\cfrac{A \& B \to A \& B}{A \& B \to A}\text{УКП} \quad A, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta}\text{С} \text{ или } \cfrac{\cfrac{A \& B \to A \& B}{A \& B \to B}\text{УКП} \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta}\text{С}$$

Каждое применение ВДП заменяется на

$$\cfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \cfrac{A \vee B \to A \vee B}{A \to A \vee B}\text{УДЛ}}{\Gamma \to \Theta}\text{С} \text{ или } \cfrac{\Gamma \to \Theta, B \quad \cfrac{A \vee B \to A \vee B}{B \to A \vee B}\text{УДЛ}}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}\text{С}$$

Каждое применение ВОЛ заменяется на

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \cfrac{\neg A \to \neg A}{A, \neg A \to}\text{УОП}}{\Gamma \neg A \to \Theta}\text{С}}{\neg A, \Gamma \to \Theta}\text{ПЛ}$$

Каждое применение В∀Л заменяется на

$$\cfrac{\cfrac{\forall x A x \to \forall x A x}{\forall x A x \to A t}\text{У}\forall\text{П} \quad At, \Gamma \to \Theta}{\forall x A x, \Gamma \to \Theta}\text{С}$$

Каждое применение В∃П заменяется на

$$\cfrac{\Gamma \to \Theta, At \quad \cfrac{\exists x A x \to \exists x A x}{\exists x A x}\text{У}\exists\text{Л}}{\Gamma \to \Theta, \exists x A x}\text{С}$$

Каждое из правил группы III было доказано с помощью основной секвенции, сечения, перестановки и соответствующих правил группы II.

Для доказательства того, что каждая секвенция, доказуемая в SNC, доказуема в SLC, достаточно показать, что каждое правило группы II производно в SLC. Действительно, каждое применение УИП заменяется на

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad \dfrac{\dfrac{B \to B}{A, B \to B}\,\text{ДЛ}}{B, A \to B}\,\text{ПЛ}}{\Gamma \to \Theta, A \supset B, A \to B}\,\text{ВИЛ}}{\Gamma, A \to \Theta, B}\,\text{С}}{A, \Gamma \to \Theta, B}\,\text{ПЛ}$$

Аналогично, каждое применение остальных фигур заключения из группы II заменяется частью доказательства, использующего структурные правила и правила группы III. Таким образом, имеет место

Теорема 1: SLC *эквивалентна* SNC. Логическую систему, задаваемую основной секвенцией, структурными правилами и правилами групп II и IV, обозначим SL°C, а логическую систему, задаваемую основной секвенцией, структурными правилами и правилами групп III и IV, обозначим SN°C.

Теорема 2. *Пропозициональные части систем* SNC, SLC, SL°C и SN°G *эквивалентны.*

Доказательство теоремы 2 тривиально.

§ 2. КЛАССИЧЕСКОЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим более подробно SLC. Для логических фигур более удобно дать несколько иную классификацию, чем в предыдущем параграфе. Логические фигуры разбиваются на фигуры введения логического знака справа и фигуры введения логического знака слева.

$$\text{ВИП}\ \dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B} \qquad \text{ВИЛ}\ \dfrac{\Gamma \to \Theta,\ A \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta}$$

$$\text{ВКП}\ \dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta,\ A \,\&\, B} \qquad \text{ВКЛ}\ \dfrac{A, B, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}$$

$$\text{ВДП}\ \dfrac{\Gamma \to \Theta, A,\ B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B} \qquad \text{ВДЛ}\ \dfrac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}$$

$$\text{ВОП}\ \dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A} \qquad \text{ВОЛ}\ \dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta}$$

$$\text{В}\forall\text{П}\ \frac{\Gamma \to \Theta, Aw}{\Gamma \to \Theta, \forall x Ax} \qquad \text{В}\forall\text{Л}\ \frac{At, \Gamma \to \Theta}{\forall x Ax, \Gamma \to \Theta}$$

$$\text{В}\exists\text{П}\ \frac{\Gamma \to \Theta, At}{\Gamma \to \Theta, \exists x Ax} \qquad \text{В}\exists\text{Л}\ \frac{Aw, \Gamma \to \Theta}{\exists x Ax, \Gamma \to \Theta}$$

Основная секвенция – это секвенция вида $A \to A$; структурные фигуры заключения: перестановка, сокращение, добавление, сечение. Секвенции, стоящие над чертой фигуры заключения, суть *верхние секвенции,* под чертой – *нижняя секвенция* данной фигуры заключения.

Формулы A и B верхних секвенций логических фигур называют *боковыми* формулами, а формулу в нижней секвенции, содержащую вводимый логический знак – *главной* формулой.

Формулу M в сечении называют *формулой сечения.* Для фигур В∀П и В∃Л переменная w не встречается в формулах нижней секвенции; эту переменную w будем называть *собственной переменной* данного применения В∀П и В∃Л.

Заметим, что в этом параграфе дана несколько иная формулировка ВКЛ и ВДП, чем в предыдущем параграфе, но эти формулировки эквивалентны (при условии, что имеются правила добавления и сокращения).

Действительно:

$$\begin{array}{cl} A, B, \Gamma \to \Theta & \\ \hline A \& B, B, \Gamma \to \Theta & \\ \hline B, A \& B, \Gamma \to \Theta & \text{ПЛ} \\ \hline A \& B, A \& B, \Gamma \to \Theta & \\ \hline A \& B, \Gamma \to \Theta & \text{СЛ} \end{array} \qquad \begin{array}{cl} A, \Gamma \to \Theta & \\ \hline B, A, \Gamma \to \Theta & \text{ДЛ} \\ \hline A, B, \Gamma \to \Theta & \text{ПЛ} \\ \hline A \& B, \Gamma \to \Theta & \end{array}$$

для ВДП

$$\begin{array}{cl} \Gamma \to \Theta, A, B & \\ \hline \Gamma \to \Theta, A, A \vee B & \\ \hline \Gamma \to \Theta, A \vee B, A & \text{ПП} \\ \hline \Gamma \to \Theta, A \vee B, A \vee B & \\ \hline \Gamma \to \Theta, A \vee B & \text{СП} \end{array} \qquad \begin{array}{cl} \Gamma \to \Theta, A & \\ \hline \Gamma \to \Theta, A, B & \text{ДП} \\ \hline \Gamma \to \Theta, A \vee B & \end{array}$$

Фигура ВИЛ, сформулированная выше, была предложена Кетоненом и носит название правила Кетонена. Генцен дает другую формулировку ВИЛ, именно

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ A \quad B, \Delta \to \Lambda}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

SLC эквивалентна системе, которая получается из нее заменой кетоновской формулировки ВИЛ ее генценовской формой. Действительно:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \to \Theta, A$}
\RightLabel{ДЛ}
\UnaryInfC{$\Delta, \Gamma \to \Theta, A$}
\RightLabel{ПЛ}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Delta \to \Theta, A$}
\RightLabel{ДП}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Delta \to \Theta, A, \Lambda$}
\RightLabel{ПП}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda, A$}
\AxiomC{$B, \Delta \to \Lambda$}
\RightLabel{ДЛ}
\UnaryInfC{$\Gamma, B, \Delta \to \Lambda$}
\RightLabel{ПЛ}
\UnaryInfC{$B, \Gamma, \Delta \to \Lambda$}
\RightLabel{ДП}
\UnaryInfC{$B, \Gamma, \Delta \to \Lambda, \Theta$}
\RightLabel{ПП}
\UnaryInfC{$B, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$}
\RightLabel{С}
\BinaryInfC{$A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \to \Theta, A$}
\AxiomC{$B, \Gamma \to \Theta$}
\BinaryInfC{$A \supset B, \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta$}
\RightLabel{СП}
\UnaryInfC{$A \supset B, \Gamma, \Gamma \to \Theta$}
\RightLabel{ПЛ}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Gamma, A \supset B \to \Theta$}
\RightLabel{СЛ}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \supset B \to \Theta$}
\RightLabel{ПЛ}
\UnaryInfC{$A \supset B, \Gamma \to \Theta$}
\end{prooftree}
$$

Все пропозициональные фигуры заключения можно заменить на две фигуры введения знака Шефера $A \mid B =_{Df} \neg (A \& B)$:

$$\text{ВШП}\ \frac{A, B, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\ A \mid B} \qquad \text{ВШЛ}\ \frac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{A \mid B,\ \Gamma \to \Theta}$$

Пропозициональные знаки $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$ вводятся определениями:

$\neg A =_{Df} A \mid A$

$A \,\&\, B =_{Df} (A|B) \mid (A|B)$

$A \vee B =_{Df} (A|A) \mid (B|B)$

$A \supset B =_{Df} A \mid (B|B)$

В теоретических целях экономнее рассматривать систему SLC с единственным пропозициональным знаком – знаком Шефера.

В этом параграфе мы будем иметь дело именно с такой системой.

Доказательства без применения сечений обладают рядом интересных свойств, в частности *свойством подформульности:* в доказательствах без сечений все формулы, входящие в доказательство, являются подформулами формул нижней секвенции.

Оказывается, что правило сечения является допустимым правилом относительно системы SLC без сечений.

Теорема 1 (основная теорема Генцена об устранимости сечения). *Всякое доказательство может быть преобразовано в другое доказательство с той же конечной секвенцией, не содержащее сечений*[1].

Лемма 1. *Всякое доказательство с сечениями может быть преобразовано в доказательство со смешениями с той же конечной секвенцией.*

Под смешением (См) имеется в виду следующая фигура заключения

$$\frac{\Gamma \to \Theta \quad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^*_M \to \Theta^*_M, \Lambda}$$

где Θ и Δ содержат по крайней мере по одному вхождению *M,* а Δ^*_M есть результат вычеркивания всех вхождений формулы *M* в Δ, аналогично для Θ^*_M [2].

Формулу *M* будем называть формулой смешения.

Доказательство леммы 1.

Пусть Δ содержит *k* вхождений формулы *M,* а *θ–l* вхождений формулы *M (k* ≥ 0 и $l \geq 0$).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta, M \quad M, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^*_M \to \Theta^*_M, \Lambda}\text{смешение}}{M, \ldots, M, \Gamma, \Delta^*_M \to \Theta^*_M \Lambda}\text{ДЛ } (k \text{ раз})}{\Gamma, \Delta \to \Theta^*_M \Lambda}\text{ПЛ}}{\Gamma, \Delta \to \Theta^*_M \Lambda, M, \ldots, M}\text{ДП } (l \text{ раз})}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\text{ПП}$$

Лемма доказана. Верно и обращение леммы. Вместо смешения применяются сокращения и перестановки и затем сечение.

Лемма 2. *Если в основной секвенции или фигуре заключения всюду заменить некоторую свободную переменную, не являющуюся собствен-*

[1] В доказательстве теоремы об устранимости сечения мы следуем Генцену с небольшими техническими изменениями: рассматривается система с одной пропозициональной связкой; при доказательстве основной леммы индукция проводится не по степени формулы смешения, а по глубине формулы смешения; явно вычленяется структура использования двойной индукции (при доказательстве основной леммы). Сравни метод устранения обобщенного смешения для SLA (гл. 6, § 2).

[2] Мы пишем Δ^*_M, а не просто Δ_M, так как в последующем Δ_M будет означать результат вычеркивания некоторых (возможно всех, а возможно и ни одного) вхождений *M* в Δ.

ной, на другую переменную (не являющуюся собственной), то вновь получаем основную секвенцию и фигуру заключения (того же вида).

Для доказательства достаточно просмотреть каждую иа фигур заключения.

Для формулировки двух последующих лемм нам нужно ввести ряд определений.

Будем называть доказательство доказательством с *чистыми переменными* (доказательством, обладающим свойством чистоты переменных), если выполняются следующие условия:

1) Каждое применение В∃Л и В∀П имеет свою собственную переменную, отличную от собственных переменных других применений В∃Л или В∀П.

2) Собственная переменная не встречается ниже верхней секвенции В∃Л и В∀П с этой собственной переменной.

Нить доказательства – последовательность секвенций, такая, что непосредственно предшествующая является верхней, а непосредственно следующая – нижней секвенцией некоторой фигуры заключения, и последняя секвенция этой последовательности есть последняя секвенция доказательства.

Боковая формула некоторой фигуры заключения является *непосредственным логическим предком* главной формулы той же фигуры заключения.

Вхождение A в верхнюю секвенцию, не являющееся боковым, является *непосредственным нелогическим предком,* соответствующего вхождения A в нижнюю секвенцию.

Вхождение A есть *непосредственный предок* вхождения B, если A есть непосредственный логический или нелогический предок B.

A есть *предок* B тогда и только тогда, когда существует последовательность $C_1, \ldots, C_k$, такая, что C_1 есть A, C_k есть B и для каждого $i < k$ C_i есть непосредственный предок C_{i+1}.

Глубина вхождения формулы A в секвенцию S данного доказательства есть наибольшее число логических фигур заключения, нижние секвенции которых находятся в одной нити, заканчивающейся секвенцией S, боковые формулы которых – предки вхождения A в S.

Глубина вхождения формулы A в секвенцию S данного доказательства есть наибольшее число логических предков вхождения A, входящих в секвенции, находящиеся в одной нити, заканчивающейся секвенцией S.

Под сукцедентной глубиной формулы A секвенции S данного доказательства будем понимать наибольшую глубину одного из вхождений формулы A в сукцедент S. Aналогично определяем антецедентную глубину.

Под глубиной формулы смешения будем понимать наименьшую глубину из сукцедентной глубины левой секвенции и антецедентной глубины правой секвенции.

Из определения глубины формулы смешения следует, что наименьшая глубина формулы смешения равна 0. Будем обозначать глубину формулы смешения M посредством q.

Левое ранговое число – наибольшее число секвенций, содержащих в сукцеденте предков формулы смешения, каждый из которых графически равен формуле смешения, принадлежащих одной нити, заканчивающейся левой верхней секвенцией смешения.

Правое ранговое число – наибольшее число секвенций, содержащих в антецеденте предков формулы смешения, каждый из которых графически равен формуле смешения, принадлежащих одной нити, заканчивающейся правой верхней секвенцией смешения.

Ранг доказательства есть сумма левого и правого ранговых чисел. Обозначим ранг буквой ρ. Из определений следует, что $\rho \geq 2$.

Лемма 3. *Каждому доказательству в* SLC *с одним смешением в конце может быть сопоставлено доказательство, обладающее свойством чистоты переменных, с той же конечной секвенцией и того же ранга.*

Лемму доказываем индукцией по числу применений фигур В∃Л и В∀П. Пусть проведено указанное ниже преобразование над всеми применениями В∃Л и В∀П, стоящими выше данного применения В∀П (или В∃Л). Собственные переменные этой фигуры заменяем во всех секвенциях, стоящих выше ее нижней секвенции на новую свободную переменную, не встречающуюся в доказательстве. В∀П (В∃Л) остается фигурой заключения; остальная часть доказательства остается доказательством по лемме 2.

Лемма 4 (основная лемма). *Для всякого доказательства с одним смешением в конце может быть найдено доказательство без применения смешений с той же конечной секвенцией, что и данное.*

Запишем сокращенно основную лемму в виде $\forall q \forall \rho \text{Л}\,(q, \rho)$.

Для доказательства основной леммы достаточно доказать три утверждения:

A. $\text{Л}\,(0, 2)$

B. $\forall m\,(m \leq n \supset \forall \rho \text{Л}\,(m,\rho)) \supset \text{Л}\,(n', 2)$

C. $\forall \rho_1\,(\rho_1 \leq \rho \supset \text{Л}\,(n, \rho_1)) \supset \text{Л}\,(n, \rho')$

Принцип возвратной индукции имеет вид

$A\,(0)\ \&\ \forall n\,(\forall m\,(m \leq n \supset A\,(m)) \supset A\,(n')) \supset \forall n A\,(n)$;

полагая $A\,(n)$ равным $\forall \rho \text{Л}\,(n, \rho)$, получим

I $\forall\rho$Л $(0, \rho)$ & $\forall n\, (\forall m\, (m \le n \supset \forall\rho$Л $(m, \rho)) \supset \forall\rho$Л $(n', \rho)) \supset \forall n \forall\rho$Л (n, ρ);
и полагая $A\,(\rho)$ равным Л (n, ρ) и учитывая, что $\rho \ge 2$, получаем
II Л $(n, 2)$ & $\forall\rho\, (\forall\rho_1\, (\rho_1 \le \rho \supset$ Л $(n, \rho_1)) \supset$ Л $(n, \text{p}')) \supset \forall\rho$Л (n, ρ).

Из A, B,C, I и II получаем $\forall q \forall\rho$Л (q, ρ):

1. Л (0, 2) & $\forall\rho\, (\forall\rho_1\, (\rho_1 \le \rho \supset$ Л $(0, \rho_1)) \supset$ Л $(0, \rho_1)) \supset \forall\rho$Л $(0, \rho)$ II при $n = 0$
2. Л (0,2) A
3. $\forall\rho\, (\forall\rho_1\, (\rho_1 \le \rho \supset$ Л $(0, \rho_1)) \supset$ Л $(0, \rho'))$ С при $n = 0$
4. 2 & 3 &$_\text{в}$; 2, 3
5. $\forall\rho$Л $(0, \rho)$ $\supset_\text{у}$; 1, 4
6. $\forall m\, (m \le n \supset \forall\rho$Л$(m, \rho)) \supset$ Л $(n', 2)$ B
7. Л $(n', 2)$ & $\forall\rho\, (\forall\rho_1\, (\rho_1 \le \rho \supset$ Л $(n', \rho)) \supset$ Л $(n', \rho')) \supset \forall\rho$Л (n', ρ) II при $n = n'$
8. $\forall\rho_1\, (\rho_1 \le \rho \supset$ Л $(n', \rho_1)) \supset$ Л (n', ρ') С при $n = n'$
9. $\forall\rho\, [\forall\rho_1\, (\rho_1 \le \rho \supset$ Л $(n', \rho_1)) \supset$ Л $(n', \rho')]$ $\forall_B$; 8
10. $\forall m\, (m \le n \supset \forall\rho$Л $(m, \rho)) \supset \forall\rho$Л (n', ρ) из 6, 7, 9
11. $\forall n\, [\forall m\, (m \le n \supset \forall\rho$Л $(m, \rho)) \supset \forall\rho$Л $(n', \rho)]$ $\forall_B$;10
12. $\forall\rho$Л $(0, \text{p})$ & $\forall n\, (\forall m\, (m \le n \supset \forall\rho$Л $(m, \rho)) \supset \forall\rho$Л $(n', \rho)) \supset$ $\supset \forall q \forall\rho$Л$(q, \rho)$ I
13. 5 & 11 &$_\text{в}$; 5, 11
14. $\forall q \forall\rho$Л (q, ρ) $\supset_\text{у}$; 12, 13

Таким образом доказательство леммы сводится к доказательству утверждений A, B, C.

А. *Глубина формулы смешения равна* 0, *ранг равен* 2.

Ранг равен 2, поэтому левое и правое ранговые числа равны 1. Так как глубина формулы смещения равна 0, то возможны два случая:

А1. Глубина формулы смешения в левую секвенцию равна 0.

А2. Глубина формулы смешения в правую секвенцию равна 0. Возможны эти случаи, так как

$\min\,(q\,(M, S_1), q\,(M, S_2)) = 0 \supset q\,(M, S_1) = 0 \vee q\,(M, S_2) = 0.$

Случай А1 разбивается на два подслучая:

A11 – левая секвенция основная

А12 – левая секвенция есть нижняя секвенция фигуры заключения с формулой смешения в качестве добавляемой формулы.

А11. Левая секвенция основная.

Конец данного доказательства имеет вид:

$$\frac{M \to M \quad \Delta \to \Theta}{M, \Delta^*_M \to \Theta}$$

Он преобразуется в $\dfrac{\Delta \to \Theta}{M, \Delta^*_M \to \Theta}$ возможно несколько СЛ, ПЛ

А12. Левая секвенция смешения есть нижняя секвенция ДП с M в качестве добавляемой формулы. Конец данного доказательства имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Phi}{\Gamma \to \Phi, M} \quad \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta^*_M \to \Phi, \Theta}$$

где Φ не содержит формулы M, так как левое ранговое число равно 1.

Конец результирующего доказательства будет иметь вид

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Phi}{\Gamma, \Delta^*_M \to \Phi}\text{ДЛ, ДП}}{\Gamma, \Delta^*_M \to \Phi, \Theta}\text{ДП}$$

Случай А2 также разбивается на два подслучая: доказательство аналогично случаю А1.

Таким образом имеет место Л (0, 2).

В. Требуется доказать лемму для ранга 2 и глубины $n + 1$ в предположении, что лемма верна для доказательств любого ранга и для всех глубин меньших или равных n, т. е. надо доказать

$\forall m(m \leq n \supset \forall \rho \text{Л}(m, \rho)) \supset \text{Л}(n', 2)$

Ранг данного доказательства равен 2, поэтому левое и правое ранговые числа равны 1 и как левая, так и правая секвенция не могут быть нижними секвенциями структурных фигур заключения (кроме ДП (ДЛ) с M в качестве добавляемой формулы и если в сукцеденте (антецеденте) верхней секвенции ДП (ДЛ) не содержится M). Так как глубина формулы смешения больше нуля, то сукцедентная глубина и антецедентная глубина формулы смешения больше нуля. Отсюда ни правая, ни левая секвенции не могут быть основными секвенциями или нижними секвенциями ДП и ДЛ с M в качестве добавляемой формулы.

Поэтому как левая, так и правая секвенции являются нижними секвенциями логических фигур заключения. Тем самым B распадается на 3 случая по числу логических знаков.

В1. Главный знак есть|.

Конец данного доказательства имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{A, B, \Gamma \to \psi}{\Gamma \to \psi, A \mid B} \qquad \dfrac{\Delta \to \Theta, A \quad \Delta \to \Theta, B}{A \mid B, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_{A|B}, \Theta}\text{См}$$

Так как $\rho = 2$, то $A \mid B$ не входит в ψ и Δ. Поэтому

$$\Delta^*_{A|B} = \Delta \text{ и } \psi^*_{A|B} = \psi$$

Конец результирующего доказательства будет иметь вид:

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \Theta, A \quad A, B, \Gamma \to \Theta}{\Delta, B^*_A, \Gamma^*_A \to \psi, \Theta_A}\text{См, ИД}}{\Delta, B^*_A, \Gamma \to \psi, \Theta}\text{Д, П},$$

где ИД – индуктивное допущение

Если B есть A, то мы получили результирующее доказательство. Если B не есть A, то продолжаем

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \Theta, B \qquad \dfrac{\Delta, B, \Gamma \to \psi, \Theta}{B, \Delta, \Gamma \to \psi, \Theta}\text{См, ИД}}{\Delta, \Delta_B, \Gamma_{\mathbf{B}} \to \Theta_B, \psi, \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \psi, \Theta}\text{Д, С, П}$$

В2. Главный знак есть $\forall$.

Конец данного доказательства

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \psi, Aw}{\Gamma \to \psi, \forall x Ax} \qquad \dfrac{Av, \Delta \to \Theta}{\forall x Ax, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \psi, \Theta}$$

Конец результирующего доказательства

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \psi, Av \quad Av, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta^*_{Av} \to \psi^*_{Av}, \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \psi, \Theta}\text{Д, П}$$

$\forall x Ax$ не входит по условию в Δ и ψ.

По лемме 3, не нарушая общности, мы можем рассматривать только доказательства с чистыми переменными. Поэтому, поскольку переменная w в секвенции $\Gamma \to \psi, Aw$ не является собственной переменной, то мы можем всюду заменить в этом доказательстве w на v (по лемме 2) и получим доказательство секвенции $\Gamma \to \psi, Av$.

В3. Главный знак есть $\exists$.

Конец данного доказательства

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \psi, Av}{\Gamma \to \psi, \exists x Ax} \qquad \dfrac{Aw, \Delta \to \Theta}{\exists x Ax, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \psi, \Theta}$$

Конец результирующего доказательства

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \psi, Av \quad Av, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta^*_{Av} \to \psi^*_{Av} \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \psi, \Theta}\text{Д, П}$$

Рассуждаем аналогично случаю В2.

Таким образом, если $\forall m\ (m \le n \supset \forall \rho Л\ (m, \rho))$, то Л $(n', 2)$.

С. Докажем лемму для произвольной глубины и ранга ρ' в предположении, что лемма верна для той же глубины и всех рангов меньших или равных ρ. Т. е. докажем $\forall \rho Л\ (n, \rho')$ в предположении, что $\forall \rho_1\ (\rho_1 \le \rho \supset Л\ (n, \rho_1))$.

С разбивается на два случая: правое ранговое число больше 1 (С1) и левое ранговое число больше 1 (С2).

С1. Правое ранговое число > 1.

С1 в свою очередь разбивается на два подслучая.

С11. *M* входит в антецедент левой верхней секвенции смешения.

Конец данного доказательства

$$\frac{\Gamma \to \psi \quad \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta^{*}_{M} \to \psi^{*}_{M}, \Theta}$$

Конец результирующего доказательства

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \psi^{*}_{M}, \Theta}\,\text{Д, П}}{\Gamma, M, \Delta^{*}_{M} \to \psi^{*}_{M}, \Theta}\,\text{СЛ, П}}{\Gamma, \Delta^{*}_{M} \to \psi^{*}_{M}, \Theta}\,\text{СЛ, П}$$

Последний шаг в результирующем доказательстве допустим, так как в Г входит *M*.

С12. *M* не входит в антецедент левой верхней секвенций смешения.

Данное доказательство будет иметь вид:

$$\cfrac{\Gamma \to \psi \qquad \cfrac{\vdots}{\Delta \to \Theta}\,\Phi}{\Gamma, \Delta^{*}_{M} \to \psi^{*}_{M}, \Theta}$$

Ф означает некоторую фигуру заключения. По условию в антецедент верхней секвенции фигуры Ф входит формула смешения *M*, т. к. правое ранговое число > 1.

Случай С12 разобьем на три подслучая, в зависимости от вида фигуры заключения Ф.

С121. Ф есть одна из антецедентных структурных фигур заключения (ДЛ, ПЛ, СЛ).

С122. Ф есть одна из сукцедентных структурных фигур (ДП, ПП, СП) или одна из логических однопосылочных фигур.

С123. Ф есть двупосылочная логическая фигура (введение знака Шефера слева – ВШЛ).

С121. Конец данного доказательства будет иметь вид:

$$\cfrac{\Gamma \to \psi \qquad \cfrac{\Delta_1 \to \Theta}{\Delta \to \Theta}\,\Phi}{\Gamma, \Delta^{*}_{M} \to \psi^{*}_{M}, \Theta}$$

При построении результирующего доказательства учитываем две возможности: M совпадает с добавляемой, переставляемой или сокращаемой формулой (1) и не совпадает (2).

В случае С1211 конец результирующего доказательства имеет вид:

$$\frac{\Gamma \to \psi \quad \Delta_1 \to \Theta}{\Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\text{См, ИД}$$

Δ^*_{1M} совпадает с Δ^*_M.

В случае С1212 конец результирующего доказательства будет иметь вид:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \psi \quad \Delta_1 \to \Theta}{\Gamma, \Delta^*_{1M} \to \psi^*_M, \Theta}\text{См, ИД}}{\Delta^*_{1M}, \Gamma \to \psi^*_M, \Theta}\text{П}}{\Delta^*_M, \Gamma \to \psi^*_M, \Theta}\text{Ф}}{\Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\text{П}$$

С122. Ф есть однопосылочная логическая фигура или сукцедентная структурная фигура. Конец данного доказательства имеет вид:

$$\frac{\Gamma \to \psi \qquad \dfrac{\omega, \Delta \to \Theta}{\omega_1, \Delta \to \Theta_1}\text{Ф}}{\Gamma, \omega_{1M}, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta_1}$$

ω есть боковая формула и ω_1 – главная, если Ф логическая фигура; ω и ω_1 являются пустыми списками формул, если Ф структурная фигура.

Случай С122 разобьем на 3 подслучая: (1) ω и ω_1 не совпадают с M, (2) ω совпадает с M, ω_1 не совпадает с M, (3) ω не совпадает с M, ω_1 совпадает с M.

Случай, когда ω и ω_1 совпадают с M и тем самым друг с другом, отпадает, так как тогда мы ω и ω_1 относим к Δ.

С1221. ω и ω_1 не совпадают с M, поэтому $\omega_M = \omega$ и $\omega_{1M} = \omega_1$. Конец, результирующего доказательства имеет вид:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \psi \quad \omega, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \omega, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\text{См, ИД}}{\omega, \Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\text{П}}{\omega_1, \Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta_1}\text{Ф}}{\Gamma, \omega_1 \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta_1}\text{П}$$

С1222. ω совпадает с M, ω_1 не совпадает с M; тогда ω_M пусто, $\omega_{1M} = \omega_1$.

Конец результирующего доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \psi \quad M, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\text{См, ИД}}{\omega, \Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\text{ДЛ}}{\omega_1, \Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta_1}\Phi}{\Gamma, \omega_1 \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta_1}\Pi$$

C1223. ω не совпадает с M, ω_1 совпадает с M, тогда $\omega_M = \omega$ и ω_{1M} пусто.

Конец результирующего доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \psi \qquad \omega, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \omega, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\text{См, ИД}}{\omega, \Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\Pi}{M, \Gamma, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}\Phi$$

По условию Γ не содержит *M*, список Δ^*_M также не содержит *M*. Поэтому правое ранговое число секвенции *M*, Γ, $\Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta$ равно 1. Левое ранговое число секвенции $\Gamma \to \psi$ фиксировано. Поэтому мы вновь можем применить индуктивное допущение

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \psi \quad M, \Gamma, \Delta^*_M \to \Psi^*_M, \Theta}{\Gamma, \Gamma_M, \Delta^*_M \to \Psi^*_M, \psi^*_M, \Theta}}{\Gamma, \Delta^*_M \to \Psi^*_M, \Theta}\text{С, П}$$

C123. Φ есть ВШЛ.

Данное доказательство имеет вид:

$$\dfrac{\Gamma \to \psi \quad \dfrac{\Delta \to \Theta, A \quad \Delta \to \Theta, B}{A \mid B, \Delta \to \Theta}\text{ВШЛ}}{\Gamma, (A \mid B)_M, \Delta^*_M \to \psi^*_M, \Theta}$$

C123 разбиваем на два подслучая: (1) *M* совпадает с *A*|*B* и (2) *M* отлично от *A*| *B*.

C1231. *M* совпадает с *A* | *B*. Тогда данное доказательство имеет вид

$$\dfrac{\Gamma \to \psi \quad \dfrac{\Delta \to \Theta, A \quad \Delta \to \Theta, B}{A \mid B, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta^*_{A|B} \to \psi^*_{A|B}, \Theta}$$

Так как правое ранговое число > 1, то Δ содержит *A* | *B*. Применяя индуктивное допущение, строим результирующее доказательство

$$
\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \psi \quad \cfrac{\cfrac{\Delta \to \Theta, A}{\Gamma, \Delta^{*}_{A|B} \to \psi^{*}_{A|B}, \Theta, A}\,\text{См,ИД} \qquad \cfrac{\Gamma \to \psi \quad \Delta \to \Theta, B}{\Gamma, \Delta^{*}_{A|B} \to \psi^{*}_{A|B}, \Theta, B}\,\text{См,ИД}}{A \mid B, \Gamma, \Delta^{*}_{A|B} \to \psi^{*}_{A|B}, \Theta}\,\text{ВШЛ}}{\Gamma, \Gamma, \Delta^{*}_{A|B} \to \psi^{*}_{A|B}, \psi^{*}_{A|B}, \Theta}\,\text{См,ИД}}{\Gamma, \Delta^{*}_{A|B} \to \psi^{*}_{A|B}, \Theta}\,\text{П,С,П}
$$

Нижнее смешение мы можем применить согласно индуктивному допущению, так как правое ранговое число равно 1 (по условию Γ не содержит $A \mid B$).

C1232. M отлично от $A \mid B$, поэтому $(A \mid B)_M$ есть $A \mid B$. Результирующее доказательство строим так же, как правую верхнюю секвенцию последнего применения смешения в пункте C1231.

Таким образом C1 доказано.

C2 доказываем аналогично C1, тем самым утверждение C доказано. Как было показано выше, из A, B и C выводима лемма 4.

Согласно лемме 1 все сечения могут быть заменены смешениями. На основе леммы 4 индукцией по числу смешений доказываем устранимость всех смещений. Отсюда для каждого доказательства SLC может быть построено доказательство без сечений (и смешений) с той же конечной секвенцией.

Таким образом теорема об устранимости сечений доказана.

Теорема Генцена может быть доказана для системы с пропозициональными связками &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ тем же методом.

§ 3. ТЕОРЕМА ЭРБРАНА – ГЕНЦЕНА

Понятие предваренной нормальной формы предполагается известным. В классической логике каждой формуле можно сопоставить ей зквивалентную формулу в предваренной форме.

Теорема. *Каждое доказательство секвенции, в которую входят только формулы в предваренной форме, можно преобразовать в доказательство с той же конечной секвенцией, в котором нет сечений, и (2) ни одна пропозициональная фигура не следует ни за какой кванторной фигурой заключения и (3) в секвенции, стоящие выше нижней секвенции самой верхней кванторной фигуры или структурной фигуры добавления, вводящей формулы с кванторами, входят только бескванторные формулы.*

Пояснение. Другими словами, результирующий вывод подразделяется на две части: верхнюю, относящуюся к логике высказываний, и нижнюю, относящуюся к кванторной теории. Нижняя часть вывода состоит из одной нити, так как в нижней части применяются лишь кванторные фигуры и структурные, т. е. однопосылочные.

Самую нижнюю секвенцию, не содержащую формул с кванторами, будем называть *средней секвенцией.* При этом каждая формула, входящая в среднюю секвенцию, является результатом подстановки свободных переменных вместо свободных вхождений связанных переменных одной из матриц формул, входящих в нижнюю секвенцию.

Пример:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Aw\to Aw}{Aw, Bv\supset Cu\to Aw, Cu}\qquad \dfrac{\dfrac{Bv\supset Bv}{Aw, Bv\to Bv, Cu}\quad \dfrac{Cu\to Cu}{Cu, Aw, Bv\to Cu}}{Bv, Bv\supset Cu, Aw\to Cu}}{Aw\supset Bv, Bv\supset Cu, Aw\to Cu}\text{ВИЛ}}{Aw\supset Bv, Bv\supset Cu\to Aw\supset Cu}\text{ВИП}}{Aw\supset Bv, \forall y(Bv\supset Cy)\to Aw\supset Cu}\text{В}\forall\text{Л}}{\forall y(Aw\supset By), \forall y(Bv\supset Cy)\to Aw\supset Cu}\text{В}\forall\text{Л}}{\forall x\forall y(Ax\supset By), \forall y(Bv\supset Cy)\to Aw\supset Cy}\text{В}\forall\text{Л}}{\forall x\forall y(Ax\supset By), \forall y(Bv\supset Cy)\to \forall y(Aw\supset Cy)}\text{В}\forall\text{П}}{\forall y\forall y(Ax\supset By), \exists x\forall y(Bx\supset Cy)\to \forall y(Aw\supset Cy)}\text{В}\exists\text{Л}}{\forall x\forall y(Bx\supset By), \exists x\forall y(Bx\supset Cy)\to \forall x\forall y(Ax\supset Cy)}\text{В}\forall\text{П}
$$

Средняя секвенция – это верхняя секвенция первого применения В∀Л.

Доказательство теоремы.

По основной теореме преобразуем исходное доказательство в доказательство без сечений.

Пусть основные секвенции содержат знаки $\forall$ и $\exists$ (точнее, формулы, входящие в основные секвенции, содержат знаки $\forall$ и $\exists$).

В силу свойства подформульности (в секвенциях доказательства без сечения входят только подформулы конечной секвенции) в основных секвенциях формулы будут находиться в предваренной форме, т. е. основные секвенции будут иметь вид: $\forall x\mathrm{K}Ax\to\forall y\mathrm{K}Ay$ или $\exists x\mathrm{K}Ax\to\exists y\mathrm{K}Ay$, где K – кванторная приставка. Преобразуем основные секвенции в доказательства:

$$
\dfrac{\dfrac{\mathrm{K}Aa\to\mathrm{K}Aa}{\forall x\mathrm{K}Ax\to\mathrm{K}Aa}\text{В}\forall\text{Л}}{\forall x\mathrm{K}Ax\to\forall y\mathrm{K}Ay}\text{В}\forall\text{П}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\mathrm{K}Aa\to\mathrm{K}Aa}{\mathrm{K}Aa\to\exists y\mathrm{K}Ay}\text{В}\exists\text{П}}{\exists x\mathrm{K}Ax\to\exists y\mathrm{K}Ay}\text{В}\exists\text{Л}
$$

«*a*» в обоих доказательствах – свободная переменная, не входящая в преобразуемый вывод.

Повторив это преобразование необходимое число раз; добиваемся, чтобы кванторы не входили в основные секвенции (индукция по длине кванторной приставки). Назовем *порядковым числом предикатной фигуры заключения* число пропозициональных фигур заключения, стоящих в нити между нижней секвенцией данной предикатной фигуры заключения и конечной секвенцией доказательства.

Порядком доказательства назовем сумму порядковых чисел всех предикатных фигур доказательства.

Каждому доказательству с порядком k без сечений может быть сопоставлено доказательство с порядком 0 с той же конечной секвенцией без сечений.

Покажем, что существует алгорифм, перерабатывающий доказательство с порядком k' в доказательства с порядком k.

Преобразуем исходное доказательство в доказательство с чистыми переменными. Это преобразование не нарушает порядка доказательства.

Порядок исходного доказательства > 0, так как $k' > 0$. Поэтому найдется кванторная фигура заключения Ф, за которой в той же нити первой встретившейся логической фигурой будет пропозициональная фигура В. В противном случае порядок доказательства был бы равен 0.

Переместив фигуру Ф ниже В, мы уменьшим на 1 порядок доказательства. Покажем, что это всегда можно сделать.

1 случай. В – однопосылочная пропозициональная фигура заключения.

Ф есть В∀П.

Исходная часть доказательства. Результирующая часть доказательства.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, Aw}{\Gamma \to \Theta, \forall xAx}\text{В}\forall\text{П}}{\vdots}\text{Стр.пр.}}{\Delta \to \Lambda}\text{В} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, Aw}{\Gamma \to Aw, \Theta, \forall xAx}\text{П;ДП}}{\vdots}\text{Стр.пр.}}{\Delta \to Aw, \Lambda}\text{В}}{\Delta \to \Lambda, Aw}\text{П}}{\Delta \to \Lambda, \forall xAx}\text{В}\forall\text{П}}{\Delta \to \Lambda}\text{СП,П}$$

$\forall xAx$ обязательно входит в Λ, так как $\forall xAx$ не может быть боковой формулой В, так как $\forall xAx$ есть подформула конечной секвенции и если бы была боковой, то конечная секвенция не была бы предваренной.

1.2. Ф есть В∃П. Аналогично 1.1.

Ф есть В∀Л.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Aw, \Gamma \to \Theta}{\forall xAx, \Gamma \to \Theta}\text{В}\forall\text{Л}}{\vdots}}{\Delta \to \Lambda}\text{В} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Aw, \Gamma \to \Theta}{\forall xAx, \Gamma, Aw \to \Theta}\text{П,ДЛ}}{\Delta, Aw \to \Lambda}\text{В}}{Aw, \Delta \to \Lambda}\text{П}}{\forall xAx, \Delta \to \Lambda}}{\Delta \to \Lambda}$$

Ф есть В∃Л. Аналогично 1.3.

2 случай

2.1. Ф есть В∀П.

Рассматриваемая часть данного доказательства имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, Aw}{\Gamma \to \Theta, \forall xAx}\text{В}\forall\text{П}}{\vdots}\text{Стр.пр.}}{\Gamma' \to \Theta', B \qquad \Gamma' \to \Theta', C}}{B \mid C, \Gamma' \to \Theta'}\text{ВШЛ}$$

Заменяем ее следующей фигурой:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \to \Theta, Aw$}
\RightLabel{ПП}
\UnaryInfC{$\Gamma \to Aw, \Theta$}
\RightLabel{ДП}
\UnaryInfC{$\Gamma \to Aw, \Theta, \forall x Ax$}
\UnaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{Стр.пр.}
\UnaryInfC{$\Gamma' \to Aw, \Theta', B$}
\AxiomC{$\Gamma' \to \Theta', C$}
\RightLabel{ДП}
\UnaryInfC{$\Gamma' \to \Theta', C, Aw$}
\RightLabel{ПП}
\UnaryInfC{$\Gamma' \to Aw, \Theta', C$}
\RightLabel{ВШЛ}
\BinaryInfC{$B \mid C, \Gamma' \to Aw, \Theta'$}
\RightLabel{ПП}
\UnaryInfC{$B \mid C, \Gamma' \to \Theta', Aw$}
\RightLabel{В$\forall$П}
\UnaryInfC{$B \mid C, \Gamma' \to \Theta', \forall x Ax$}
\RightLabel{ПП,СП}
\UnaryInfC{$B \mid C, \Gamma' \to \Theta'$}
\end{prooftree}
$$

Случаи 2.2 –2.4 доказываются аналогично. Остается доказать третью часть теоремы. В доказательстве порядка 0 в средней секвенции (и выше нее) могут встречаться формулы с кванторами. Все эти формулы не являются боковыми и главными и не выходят в основные секвенции (в силу произведенного преобразования), следовательно, они вводятся посредством фигур добавления. Переместив применения ДП и ДЛ, вводящие формулы с кванторами, ниже средней секвенции, мы получим искомое доказательство.

§ 4. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА КРЕЙГА

Мы сформулируем и докажем теорему Крейга для узкого исчисления предикатов с констанстами t и f. Будем считать, что t и f не содержат предикатных и индивидных знаков.

Теорема (интерполяционная теорема Крейга).

Для любых формул A и B, если доказуема секвенция A →B, *то существует такая формула M, которая, содержит только те предикатные знаки, которые входят одновременно в A и B, и такая, что доказуемы секвенции A → M и M → B.*

Вместо A и B мы можем, естественно, взять списки формул Γ и Δ.

Теорема была сформулирована и доказана Крейгом в 1957 г. [47]. «Ввиду своей силы, тесной взаимосвязи с другими результатами в логике н многочисленных применений, обобщений и усовершенствовании интерполяционная теорема Крейга кажется центральным и важнейшим результатом в чистой логике после 1936 года». (Математическая логика и ее применения, стр. 29 (Аддисон).)

Из теоремы Крейга легко выводится теорема Бета о преобразовании неявных определений в явные. Теорема Бета имеет широкие приложения в логике и методологии наук.

Существует несколько способов доказательства теоремы Крейга. Назовем три из них.

1. Способ Крейга и примыкающий к нему способ Линдона. Мы изложим именно этот вариант. На русском языке есть изложение этого способа в работе Линдона «Заметки по логике», [22; 105 – 108]. Это чисто синтаксический способ, опирающийся на теорему Эрбрана–Генцена.

2. Синтаксическое доказательство Шютте для интуиционистского исчисления предикатов 1-го порядка. Этот способ, естественно, не опирается на теорему Эрбрана – Генцена, так как для интуиционистского исчисления она неверна.

3. Семантическое, теоретико-модельное доказательство Робинсона [30; 164–165]. Это доказательство опирается на так называемую лемму о непротиворечивости, которая в свою очередь легко выводится из теоремы Крейга.

Для доказательства теоремы нужно доказать две леммы.

Лемма 1 (теорема Крейга для бескванторных формул). *Для любых бескванторных формул A и B, таких, что доказуема $A \to B$, найдется бескванторная формула C, такая, что в C входят только те предикатные знаки, которые входят как в A, так и в B и такая, что доказуемы секвенции $A \to C$ и $C \to B$.*

Доказательство леммы 1.

Не нарушая общности, мы можем считать, что A есть формула в дизъюнктивной нормальной форме, т. е. имеет вид $\bigvee_i \mathop{\&}_j p_{ij}$. Также, не нарушая общности, будем считать, что B имеет вид $\neg B'$, где B' находится в дизъюнктивной нормальной форме, т. е. $B = \neg \bigvee_h \mathop{\&}_k q_{hk}$. p_{ij} и q_{hk} есть элементарные формулы, т. е. атомарные формулы или их отрицания.

Рассмотрим теперь формулу C, возникающую из $A = \bigvee_i \mathop{\&}_j p_{ij}$ вычеркиванием тех элементарных формул, предикатные знаки которых отсутствуют в B', т. е. $C = \bigvee_i \mathop{\&}_j^{*} p_{ij}$. Формула C содержит лишь те предикатные знаки, которые встречаются и в A и в B.

Покажем, что доказуемы секвенции $A \to C$ и $C \to B$:

$$\dfrac{\dfrac{\underset{j}{\&}\, p_{ij} \to \underset{j}{\&}^{*} p_{ij} \quad \underset{j}{\&}^{*} p_{ij} \to C}{\underset{j}{\&}^{*} p_{ij} \to C}\,\text{С}}{\dfrac{\underset{i}{\vee}\underset{j}{\&}\, p_{ij} \to C}{A \to C}}\,\text{ВДЛ}$$

Покажем, что доказуема секвенция $C \to B$:

1. $A \to B$ условие
2. $A \to \neg B'$ по соглашению $B = \neg B'$
3. $A, B' \to$ УОП
4. $\underset{i}{\vee}\underset{j}{\&}\, p_{ij},\ \underset{h}{\vee}\underset{k}{\&}\, q_{hk} \to$
5. $\underset{j}{\&}\, p_{ij},\ \underset{k}{\&}\, q_{hk} \to$ для каждой пары ij
6. $\underset{j}{\&}\, p^{*}{}_{ij},\ \underset{k}{\&}\, q_{hk} \to$ для каждой пары ij
7. $\underset{i}{\vee}\underset{j}{\&}\, p^{*}{}_{ij},\ \underset{h}{\vee}\underset{k}{\&}\, q_{hk} \to$ ВДЛ
8. $C, B' \to$
9. $C \to \neg B'$
10. $C \to B$

Переход от 5 к 6 правомерен, т. к. вычеркивание из конъюнкции элементарной формулы, отрицание которой не входит в конъюнкцию, не нарушает противоречия.

Таким образом лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть существует вывод секвенции* $\Gamma' \to \Delta'$ *из секвенции* $\Gamma \to \Delta$ с *помощью только кванторных и структурных правил без сечения. Пусть M произвольная формула. Тогда существует формула M' такая, что из секвенции* $\Gamma \to M$ *выводима секвенция* $\Gamma' \to M'$ *и из* $M \to \Delta$ *выводима секвенция* $M' \to \Delta'$ *с помощью кванторных правил и структурных фигур без сечения.*

Доказательство леммы 2.

Доказательство индукцией по числу фигур заключения:

В1. Ф есть В∀Л или В∃П; $M = M'$.

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma' \to \Delta'}\,\text{В}\forall\text{Л} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to M}{\Gamma' \to M}\,\text{В}\forall\text{Л}}{\Gamma' \to M'} \qquad \dfrac{M \to \Delta}{M \to \Delta'}\ \text{(тожд. переход:}$$

$\Delta' = \Delta$ $\Delta = \Delta'$)

В2. Ф есть В∀П; $M' = \forall x M x$.

$$\frac{\Gamma \to \Delta, Aw}{\Gamma' \to \Delta,\ \forall x A x}\text{В}\forall\text{П.} \qquad \frac{\Gamma \to Mw}{\Gamma \to \forall x M x}\text{В}\forall\text{П}$$

$$\frac{\dfrac{Mw \to \Delta, Aw}{\forall x M x \to \Delta, Aw}\text{В}\forall\text{Л}}{AxMx \to \Delta, \forall x A x}$$

В3. Ф есть В∃Л; M' есть $\exists x M x$.

$$\frac{\Gamma, Aw \to \Delta}{\Gamma, \exists x A x \to \Delta}\text{В}\exists\text{Л} \qquad \frac{\dfrac{\Gamma, Aw \to Mw}{\Gamma, Aw \to \exists x M x}\text{В}\exists\text{П}}{\Gamma, \exists x A x \to \exists x M x}\text{В}\exists\text{Л} \qquad \frac{Mw \to \Delta}{\exists x M x \to \Delta}$$

В4. Ф есть левое структурное правило; $M' == M$, $\Delta' = \Delta$.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta'}\Phi \qquad \frac{\Gamma \to M}{\Gamma' \to M}\Phi \qquad \frac{M \to \Delta}{M \to \Delta}$$

В5. Ф есть правое структурное правило; $\Gamma' = \Gamma$.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma' \to \Delta}\Phi \qquad \frac{\Gamma \to M}{\Gamma \to M} \qquad \frac{M \to \Delta}{M \to \Delta'}\Phi$$

Индукционный шаг доказывается аналогично базису.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы.

По условию $A \to B$ – доказуемая секвенция. По теореме Эрбрана – Генцена существует доказательство секвенции $A \to B$ со средней секвенцией $S_1, \ldots, S_n \to T_1, \ldots, T_m$, доказуемой без кванторных правил. По первой лемме существует такая формула M, что

$$\overset{\Gamma}{S_1, \ldots, S_n} \to M \quad \text{и} \quad M \to \overset{\Delta}{T_1, \ldots, T_m}$$

По второй лемме, так как из $S_1, \ldots, S_n \to T_1, \ldots, T_m$ выводима секвенция $A \to B$ с помощью кванторных и структурных правил, то из $\Gamma \to M$ выводима $A \to M'$ и из $M \to \Delta$ выводима $M' \to B$. M по первой лемме содержит только предикатные знаки, встречающиеся как в A, так и в B. Поскольку M' получена из M с помощью кванторных правил, то M' содержит те же предикатные знаки, что и M. Таким образом, теорема доказана.

§ 5. ТЕОРЕМА БЕТА

Пусть X есть высказывание, в которое входят только предикаты F, $G_1, \ldots, G_m$. Иногда будем его обозначать посредством $X_{F,G1,..,Gm}$. F есть k-местная предикатная константа.

X явно определяет F в терминах $G_1, \ldots, G_m$ тогда и только тогда, когда существует формула $Q\ (w_1, \ldots\ldots w_k)$, сформулированная в терминах $G_1, \ldots, G_m$ и индивидных констант из X, такая что $X \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k\ (F\ (x_1, \ldots, x_k) \sim Q\ (x_1, \ldots, x_k))$.

X неявно определяет F в терминах $G_1, \ldots, G_m$ тогда и только тогда, когда $X \mathbin{\&} X' \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k\ (F\ (x_1, \ldots, x_k \sim F'\ (x_1, \ldots, x_k))$, где F' есть предикатная константа, отсутствующая в X и имеющая то же число мест, что и F, а $X' = F^F_{F'} X$.

Теорема Бета. *Если X неявно определяет F в терминах $G_1, \ldots, G_m$, то X явно определяет F в терминах $G_1, \ldots, G_m$.*

1. $\vdash X \mathbin{\&} X' \supset \forall x_1 \ldots \forall x_k\ (F\ (x_1, \ldots, x_k) \sim F'\ (x_1, \ldots, x_k))$ условие
2. $\vdash X \mathbin{\&} X' \supset (F(w_1, \ldots, w_k \sim F'(w_1, \ldots, w_k))$
3. $\vdash X \mathbin{\&} F(w_1, \ldots, w_k\ ) \sim (X' \supset F'(w_1, \ldots, w_k))$

из 2 по правилу $A \mathbin{\&} B \supset (C \sim D) \vdash A \mathbin{\&} C \supset (B \supset D)$.

По теореме Крейга: существует такое $Q\ (w_1, \ldots, w_k)$, сформулированное в терминах X, за исключением F, такое что

4a. $\vdash X \mathbin{\&} F(w_1, \ldots, w_k\ ) \supset Q\ (w_1, \ldots, w_k)$

4b. $\vdash Q\ (w_1, \ldots, w_k\ ) \supset (X' \supset F'(w_1, \ldots, w_k))$

5. $\vdash X \supset (F(w_1, \ldots, w_k\ ) \supset Q\ (w_1, \ldots, w_k))$ экспортация 4a
6. $\vdash Q\ (w_1, \ldots, w_k\ ) \supset (X \supset F(w_1, \ldots, w_k))$ подст. F'/F в 4b
7. $\vdash X \supset (Q\ (w_1, \ldots, w_k\ ) \supset F(w_1, \ldots, w_k))$ перест.; 6
8. $\vdash X \supset (F\ (w_1, \ldots, w_k\ ) \sim Q\ (w_1, \ldots, w_k))$ 5,7
9. $X \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k\ (F\ (x_1, \ldots, x_k) \sim \mathrm{Q}\ (x_1, \ldots, x_k))$,

что и требовалось доказать.

Несколько слов о значении теоремы Бета. Еще Падоа провел аналогию между процедурой рассуждения и процедурой определения. Как в случае с аксиоматикой мы можем ставить вопрос о независимости аксиом, так и относительно терминов мы можем ставить вопрос о независимости и зависимости терминов.

X это конъюнкция аксиом. Если некоторый термин явно определим в других терминах, то его интерпретация полностью детерминируется интерпретацией этих других терминов. Как найти формулу $Q\ (w_1, \ldots, w_k)$, явно определяющую $F\ (w_1, \ldots, w_k)$? Этим целям и служит процедура превращения неявных определений в явные.

Чтобы установить, что некоторый термин явно определим в других терминах, достаточно установить, что из $X \mathbin{\&} X'$ выводима равнообъемность F и F'. Коль скоро это сделано, то можно эффективно найти Q (w_1, . . . , $w_к$), следуя ходу доказательства теоремы Бета и теоремы Крейга.

§ 6. СИНГУЛЯРНОЕ КЛАССИЧЕСКОЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Мы рассматривали классическое исчисление, в сукцеденте секвенций которого может быть более одной формулы. Однако можно построить классическое секвенциальное исчисление предикатов с одночленными или нульчленными сукцедентами. Правда, правил групп I и III и структурных правил недостаточно для описания классической системы. Для этого надо принять в качестве основных УИЛ $\dfrac{A \supset B, \Gamma \to}{\Gamma \to A}$ и УДП $\dfrac{\Gamma \to A \vee B \quad A, \Delta \to}{\Gamma, \Delta \to B}$ (или удаление двойного отрицания справа $\dfrac{\Gamma \to \neg\neg A}{\Gamma \to A}$ УООП). Обозначим эту систему посредством ScLC.

Фигуры заключения ScLC.

Логические

ВИП $\dfrac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B}$ ВИЛ $\dfrac{\Gamma \to A \quad B, \Gamma \to Q}{A \supset B,\ \Gamma \to Q}$

УИЛ $\dfrac{A \supset B, \Gamma \to}{\Gamma \to A}$

ВКП $\dfrac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \,\&\, B}$ ВКЛ $\dfrac{A, B, \Gamma \to Q}{A \,\&\, B,\ \Gamma \to Q}$

ВДП $\dfrac{\Gamma \to A \text{ или } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}$ ВДЛ $\dfrac{A, \Gamma \to Q \quad B, \Gamma \to Q}{A \vee B,\ \Gamma \to Q}$

УДП $\dfrac{\Gamma \to A \vee B \quad A, \Delta \to}{\Gamma, \Delta \to B}$

ВОП $\dfrac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A}$

В∀П $\dfrac{\Gamma \to Aw}{\Gamma \to \forall x A x}$

В∃П $\dfrac{\Gamma \to At}{\Gamma \to \exists x A x}$

Структурные

$$\frac{\Gamma \to Q}{A, \Gamma \to Q}\text{ДЛ}$$

$$\frac{C, C, \Gamma \to Q}{C, \Gamma \to Q}\text{СЛ}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to Q}{\Gamma, B, A, \Delta \to Q}\text{ПЛ}$$

$$\frac{\Gamma \to M \quad M, \Delta \to Q}{\Gamma, \Delta \to Q}\text{Сеч.}$$

Основная секвенция есть выражение вида $A \to A$.

Доказательство определяется так же, как в SLC.

Теорема 1. *Если секвенция* $\Gamma \to \Theta$*, где* Θ *формула или пустой список формул, доказуема в* ScLC*, то* $\Gamma \to \Theta$ *доказуема в* SLC.

Все фигуры заключения ScLG, кроме УИЛ и УДП, являются частными случаями соответствующих фигур SLC. Поэтому нам достаточно показать, что каждое применение УИЛ и УДП можно заменить частью доказательства в SLC.

УИЛ $\dfrac{A \supset B, \Gamma \to}{\Gamma \to A}$ заменяем на $\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{A \to A, B}}{\to A, A \supset B} \quad A \supset B, \Gamma \to}{\Gamma \to A}$

УДП $\dfrac{\Gamma \to A \vee B \quad A, \Delta \to}{\Gamma, \Delta \to B}$ заменяем на

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to A \vee B \qquad \cfrac{\cfrac{A \to A}{A \to A, B} \quad \cfrac{\cfrac{B \to B}{B \to B, A}}{B \to A, B}}{A \vee B \to A, B}}{\Gamma \to A, B}}{\Gamma \to B, A} \quad A, \Delta \to}{\Gamma, \Delta \to B}$$

Таким образом теорема доказана.

Теорема 2. *Если секвенция* $\Gamma \to \Delta$ *доказуема в* SLC, *то секвенция* $\Gamma \to \to \Delta^D$ *доказуемая в* ScLC. Δ^D есть *дизъюнкция формул из* Δ, если Δ *пустой список формул, то* Δ^D *также пустой список формул, если* Δ есть *формула A, то* Δ^D есть *формула A.*

В ScLC производны фигуры заключения:

УДП1 $\dfrac{\Gamma \to A \vee B}{\neg A, \Gamma \to B}$ и ВДП1 $\dfrac{\neg A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}$

Действительно:

$$\dfrac{\Gamma \to A \vee B \qquad \dfrac{A \to A}{A, \neg A \to}}{\neg A, \Gamma \to B}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg A, \Gamma \to B}{\Gamma \to \neg A \supset B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to A \vee B} \qquad \dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to A \vee B}}{\neg(A \vee B), A \to}}{A, A \vee B \supset \neg(A \vee B) \to}}{A \vee B \supset \neg(A \vee B) \to \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{B \to B}{B \to A \vee B} \qquad \dfrac{\dfrac{B \to B}{B \to A \vee B}}{\neg(A \vee B), B \to}}{B, A \vee B \supset \neg(A \vee B) \to}}{\neg A \supset B, A \vee B \supset \neg(A \vee B) \to}}{(A \vee B) \supset \neg(A \vee B), \neg A \supset B \to}}{\neg A \supset B \to A \vee B}}{\Gamma \to A \vee B}$$

Теорему 2 доказываем индукцией по высоте доказательства в SLC. Для основной секвенции доказательство очевидно. Пусть имеется доказательство высоты $n + 1$, с концом вида:

$$\dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B}.$$

По индукционному допущению в ScLG может быть построено доказательство секвенции $A, \Gamma \to \Theta^D \vee B$. Надо показать, что можно построить и доказательство секвенции $\Gamma \to \Theta^D \vee A \supset B$. Но это просто сделать:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to \Theta^D \vee B}{\neg\Theta^D, A, \Gamma \to B}\text{УДП1}}{A, \neg\Theta^D, \Gamma \to B}\text{ПЛ}}{\neg\Theta^D, \Gamma \to A \supset B}\text{ВИП}}{\Gamma \to \Theta^D \vee A \supset B}\text{ВДП1}$$

Аналогичные построения делаем для каждой логической и структурной фигуры SLC. Тем самым теорема 2 доказана.

Очевидным недостатком сингулярного логистического классического исчисления является нарушение свойства подформульности для УИЛ и УДП.

Следует отметить, что вместо УДП мы могли бы принять структурное правило добавления формулы справа $\dfrac{\Gamma \to}{\Gamma \to B}$.

Глава 5

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕЗ СОКРАЩЕНИЙ

§ 1. СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ БЕЗ СОКРАЩЕНИЙ. РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ SLC.

Известны построения классических секвенциальных исчислений без структурных правил. Такого рода системы называют кангеровскими системами[1]. Чтобы система была полной, $\forall\to$ и $\to\exists$ должны быть сформулированы таким образом, чтобы в них неявно производилось сокращение; например в форме:

$$\forall\to\frac{\Gamma, At, \forall xAx, \Delta\to\Theta}{\Gamma, \forall xAx, \Delta\to\Theta} \quad \text{и} \quad \to\exists\frac{\Gamma\to\Phi, \exists xAx, At, \Theta}{\Gamma\to\Phi, \exists xAx, \Theta}$$

Системы кангеровского типа удобны для осуществления процедур поиска доказательств. Ниже мы формулируем секвенциальное классическое исчисление предикатов с обычными фигурами для $\forall\to$ и $\to\exists$, но со структурными правилами сокращения слева и справа. Основная секвенция есть секвенция вида:

$\Gamma, A, \Delta\to\Phi, A, \Theta$

Логические фигуры заключения:

$$\to\supset\frac{A, \Gamma\to\Phi, B, \Theta}{\Gamma\to\Phi, A\supset B, \Theta} \qquad \supset\to\frac{\Gamma, \Delta\to\Theta, A \quad \Gamma, B, \Delta\to\Theta}{\Gamma, A\supset B, \Delta\to\Theta}$$

$$\to\&\frac{\Gamma\to\Phi, A, \Theta \quad \Gamma\to\Phi, B, \Theta}{\Gamma\to\Phi, A\& B, \Theta} \qquad \&\to\frac{\Gamma, A, B, \Delta\to\Theta}{\Gamma, A\& B, \Delta\to\Theta}$$

$$\to\vee\frac{\Gamma\to\Phi, A, B, \Phi}{\Gamma\to\Phi, A\vee B, \Theta} \qquad \vee\to\frac{\Gamma, A, \Delta\to\Theta \quad \Gamma, B, \Delta\to\Theta}{\Gamma, A\vee B, \Delta\to\Theta}$$

$$\to\neg\frac{A, \Gamma\to\Phi, \Theta}{\Gamma\to\Phi, \neg A, \Theta} \qquad \neg\to\frac{\Gamma, \Delta\to\Theta, A}{\Gamma, \neg A, \Delta\to\Theta}$$

$$\to\forall\frac{\Gamma\to\Phi, Aw, \Theta}{\Gamma\to\Phi, \forall xAx, \Theta} \qquad \forall\to\frac{\Gamma, At, \Delta\to\Theta}{\Gamma, \forall xAx, \Delta\to\Theta}$$

$$\to\exists\frac{\Gamma\to\Phi, \quad At, \Theta}{\Gamma\to\Phi, \exists xAx, \Theta} \qquad \exists\to\frac{\Gamma, Aw, \Delta\to\Theta}{\Gamma, \exists xAx, \Delta\to\Theta}$$

---

[1] Перевод работы Кангера опубликован в книге «Математическая теория логического вывода» [26].

На $\to\forall$ и $\exists\to$ накладывается ограничение: w не входит в формулы нижней секвенции фигур заключения $\to\forall$ и $\exists$. Переменную w в этих фигурах называют *собственной* переменной этой фигуры заключения. Структурные фигуры заключения:

$$\frac{\Gamma, C, \Delta, C, \psi \to \Theta}{\Gamma, C, \Delta, \psi \to \Theta} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma \to \Phi, C, \Sigma, C, \Theta}{\Gamma \to \Phi, \Sigma, C, \Theta}.$$

Первая из них есть сокращение слева, вторая – справа. Доказательство имеет вид дерева.

Основная секвенция есть доказательство; если α есть доказательство и его последняя секвенция T_1 является верхней секвенцией фигуры заключения $\frac{T_1}{T}$, то $\frac{\alpha}{T_1}$ есть доказательство: если α и β доказательства, T_1 и T_2 их последние секвенции и $\frac{T_1T_2}{T}$ есть фигура заключения, то $\frac{\alpha\beta}{T}$ есть доказательство.

Заметим, что если язык содержит другие логические знаки, то запас логических фигур заключения легко расширить. Например, для $|$:

$$\to| \, \frac{A, B, \Gamma \to \Phi, \Theta}{\Gamma \to \Phi, A \,|\, B, \Theta} \qquad |\to \frac{\Gamma, \Delta \to \Theta, A \quad \Gamma, \Delta \to \Theta, B}{\Gamma, A \,|\, B, \Delta \to \Theta}$$

Кстати, эти две фигуры можно принять вместо правил для $\supset$, &, > и $\neg$.

Обычными методами можно доказать, что правила перестановки, утончения и сечения являются допустимыми относительно SLC. SLC эквивалентна другим построениям классического исчисления предикатов.

Пусть SLC° есть SLC без сокращений. Как для SLC, так и для SLC° имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *В результате замены каждого вхождения переменной, не являющейся собственной, в некоторой фигуре заключения на другую переменную, также не являющуюся собственной, получается та же самая фигура заключения.*

Доказательство с чистыми переменными есть доказательство, в котором каждое применение $\to\forall$ и $\exists\to$ имеет свою собственную переменную и ни одна собственная переменная данного применения $\to\forall$ (или $\exists\to$) не встречается ниже верхней секвенции $\to\forall$ ($\exists\to$).

Лемма 2. *Всякое доказательство* SLC (SLC°) *может быть преобразовано в доказательство с чистыми переменными и с той же конечной секвенцией, что и исходное.*

Доказательства лемм 1 и 2 см. стр. 120–121.

Лемма 3. *Всякое доказательство с чистыми переменными может быть преобразовано в доказательство с той же конечной секвенцией, также обладающее свойством чистоты переменных и такое, что в доказательство входят только собственные переменные и переменные, входящие в конечную секвенцию, или w_0, если конечная секвенция не содержит вхождений свободных переменных, где w_0 есть фиксированная свободная переменная, которая никогда не используется в качестве собственной переменной.*

Другими словами, согласно лемме 3 на применение $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$ без изменения класса доказуемых секвенций можно наложить дополнительное ограничение: t есть переменная, встречающаяся в нижней секвенции или w_0, если в нижней секвенции нет свободных переменных.

Доказательство леммы 3. Фиксируем в доказательстве все применения $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$, не удовлетворяющие заключению леммы. Самое нижнее применение $\forall\rightarrow$ или $\rightarrow\exists$ заменяем на такое применение, которое удовлетворяет заключению леммы. Для этого достаточно по лемме 1 в доказательстве, стоящем выше нижней секвенции $\forall\rightarrow$ или $\rightarrow\exists$, заменить каждое вхождение t на t', где t' есть одна из переменных, входящих в нижнюю секвенцию данного применения $\forall\rightarrow$ ($\rightarrow\exists$) или w_0. В результате получаем доказательство с чистыми переменными, содержащими на 1 меньше применений $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$, не удовлетворяющим заключению леммы. Индукцией по числу применений $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$, не удовлетворяющих заключению леммы, доказываем лемму 3.

На основе лемм 1–3 докажем теорему 1.

Теорема 1. *Проблема разрешения для* SLG° *разрешима*[2].

Под степенью секвенции будем иметь в виду сумму логических знаков, входящих в формулу секвенции. Каждой секвенции, в которой фиксирована формула в качестве главной, может быть однозначным образом сопоставлено конечное множество секвенций или пар секвенций, из которых она может быть получена по одной из логических фигур заключения. Для однопосылочных фигур (кроме применений $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$ со свободными переменными в нижней секвенции) это множество состоит из одной секвенции, в случае двухпосылочной фигуры – это также одноэлементное множество с парой секвенций в качестве элемента и, наконец, в случае $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$ с k ($k \geq 1$) сво-

[2] В работе [3, 120] Хао Ван замечает: «Благодаря тому, что существует правило сокращения, которое позволяет освобождаться от повторений одной и той же формулы, это еще не дает процедуры разрешения для исчисления предикатов».

бодными переменными в нижней секвенции это k-элементное множество.

Пусть T_i^n есть секвенция высоты n с фиксированной i-ой неатомарной формулой. Тогда секвенции T_i^n сопоставляется конечное множество $\{T_j^{n-1}\}_i$, где T_j^{n-1} – секвенция высотой n – 1 или пара секвенций, каждая из которых имеет высоту n – 1. В качестве главной формулы можно рассматривать любую неатомарную формулу секвенции. Поэтому каждой секвенции однозначно сопоставляем множество секвенций $H^{n-1} = \bigcup_{i=1}^{l} \left\{ T_j^{n-1} \right\}_i$ где l – число неатомарных формул в секвенции T^n. Секвенция T^n доказуема тогда, и только тогда, когда доказуема по крайней мере одна секвенция из $\bigcup_{i=1}^{l} \left\{ T_j^{n-1} \right\}_i$ или каждая из пары,если членом является пара.

Секвенции типа T^0 – это секвенции, все формулы которых атомарны. Вопрос о доказуемости или недоказуемости секвенций степени 0 решается однозначно. Поскольку проблема разрешения для T^n сводится к проблеме разрешения для конечного класса $\bigcup_{i=1}^{l} \left\{ T_j^{n-1} \right\}_i$, то по индукции заключаем, что для секвенции любой степени может быть решен вопрос, доказуема она или нет.

Из приведенного доказательства легко извлечь более общую теорему. Именно, для каждого секвенциального исчисления без структурных фигур заключения проблема разрешения разрешима, если каждая логическая фигура заключения обладает свойством подформульности.

В связи с этим встает вопрос, можно ли представить в указанной форме интуиционистское (минимальное, абсолютное) пропозициональное исчисление. Положительный ответ в сочетании с возможностями перестановки логических правил дал бы удобную разрешающую процедуру. Разрешающая процедура для SLC°, воспроизводящая приведенное выше доказательство, является достаточно громоздкой, но она может быть существенно упрощена.

§ 2. УПРОЩЕННАЯ РАЗРЕШАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ SLC °

Выше отмечалось, что раврешающая процедура для SLC°, копирующая доказательство теоремы 1, очень громоздка. Но она может быть существенно упрощена. Обычным образом вводится понятие положительного и отрицательного вхождения квантора в формулу и секвенцию.

Вхождение квантора в формулу положительно, если при приведении этой формулы к предваренной нормальной форме он преобразуется в квантор общности; отрицательно, если преобразуется в квантор существования.

Вхождение квантора в сукцедент секвенции положительно (отрицательно), если оно положительно (отрицательно) в формуле сукцедента.

Вхождение квантора в антецедент противоположно вхождению квантора в антецедентную формулу.

Пусть дана секвенция $\Gamma \to \Delta$. Разрешающий алгорифм должен предъявить доказательство секвенции $\Gamma \to \Delta$, если она доказуема в SLC°, и в противном случае дать отрицательный ответ.

А. Предварительная процедура

В секвенции $\Gamma \to \Delta$ размечаются кванторы; при каждом отрицательном кванторе пишется число положительных кванторов, находящихся в области действия этого квантора.

В. Процедура построения дерева поиска доказательства

Фигуры $\to \exists$ и $\forall \to$ переформулируем:

$$\frac{\Gamma, At_1, \Delta \to \Theta \text{ или ... или } \Gamma, At_n, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \forall x Ax, \Delta \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \psi, At_1, \Theta \text{ или ... или } \Gamma \to \psi, At_n, \Theta}{\Gamma \to \psi, \exists x Ax, \Theta},$$

где $t_1, \ldots, t_n$ – свободные переменные, входящие в формулы нижней секвенции или w_0, если таковых нет.

Дерево поиска доказательства строим снизу вверх, придерживаясь следующих правил:

(0) Проверяется, не является ли секвенция основной. Если да, то секвенция закрывается, если нет, то:

Устраняется самое левое вхождение положительного квантора.

(2) Если (1) не применим, то устраняется самое левое вхождение пропозиционального знака из формул, содержащих кванторы.

(3) Если (1) и (2) не применимы, то устраняется самое левое вхождение отрицательного квантора с наибольшим индексом.

(4) Если (1), (2) и (3) не применимы, то устраняется самое левое вхождение пропозиционального знака.

Эту процедуру осуществляем над каждой секвенцией. Процесс обрывается, если секвенция основная или не содержит неатомарных формул и не является основной. В итоге получаем дерево поиска, в верхних ветвях которого стоят основные секвенции или недоказуемые неразложимые секвенции.

С. Процедура установления доказуемости или недоказуемости секвенции

Над деревом поиска доказательства проделываем следующие преобразования:

1. Вычеркиваем недоказуемые неразложимые секвенции.

2. Если в однопосылочной фигуре заключения вычеркнута верхняя секвенция, то вычеркивается и нижняя.

3. Если в двухпосылочной фигуре заключения (секвенции связаны конъюнктивно) вычеркнута по крайней мере одна из верхних секвенций, то вычеркивается и нижняя.

4. Если все верхние секвенции, соединенные союзом «или», вычеркнуты, то вычеркивается и нижняя секвенция.

Проделав эту процедуру сверху вниз, мы можем получить два результата:

(I) самая нижняя секвенция оказывается вычеркнутой; в этом случае она не доказуема; работа заканчивается и выдается отрицательный ответ;

(II) самая нижняя секвенция оказывается не вычеркнутой; в этом случае секвенция доказуема; и результат всех вычеркиваний из дерева поиска назовем квазидоказательством.

Д. Процедура извлечения из квазидоказательства доказательства

Преобразуем квазидоказательство в доказательство снизу вверх следующим способом: в фигурах с «или» над чертой выбрасываем все секвенции, кроме одной, и отбрасываем выводы, надстраиваемые над отброшенными секвенциями. Эту процедуру можно организовать таким образом, чтобы в результате оставалось лишь доказательство минимальной высоты.

§ 3. СВОДИМОСТЬ ДОКАЗУЕМОСТИ ФОРМУЛЫ В СКОЛЕМОВСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ К ДОКАЗУЕМОСТИ НЕКОТОРОЙ СЕКВЕНЦИИ ИЗ SLC °

Всякая секвенция, доказуемая в SLC°, доказуема и в SLC. Обратное не имеет места. Однако имеет место:

Теорема 1: *Если секвенция* $\to A$ *доказуема в* SLC, *C есть сколемовская нормальная форма A, то существует такое число k, что секвенция* $\to C^k$ *доказуема в* SLC°. *Под* C^k *имеется в виду последовательность формул, состоящая из k вхождений формулы C.*

Формула в сколемовской нормальной форме имеет вид $\exists^n\forall^m M$, где M– бескванторная формула. Известно, что всякой формуле A может быть сопоставлена однозначным образом формула C в сколемовской нормальной форме, такая, что $\to A$ доказуема в SLC тогда, и только тогда, когда в SLC доказуема $\to C$.

Л е м м а 1 . *В пропозициональной части* SLC *все сокращения можно устранить.*

Пусть имеется доказательство, в которое входят бескванторные формулы и в котором встречается одно единственное сокращение. Это сокращение можно поднять вверх. Последнее утверждение доказываем индукцией по числу логических знаков в сокращаемой формуле. Для простоты рассмотрим случай, когда имеется одна пропозициональная связка $|$.

Сокращение можно поднять выше применения ВШЛ. Данное доказательство:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc} \dfrac{\Gamma'\to\Theta',A\quad \Gamma'\to\Theta',B}{} & \dfrac{\Gamma''\to\Theta'',A\quad \Gamma''\to\Theta'',B}{} \\ I\left\{\begin{array}{l} A\mid B,\Gamma'\to\Theta' \\ \quad\vdots \\ A\mid B,\Gamma\to\Theta,A\end{array}\right. & II\left\{\begin{array}{l} A\mid B,\Gamma''\to\Theta'' \\ \\ A\mid B,\Gamma\to\Theta,B\end{array}\right.\end{array}}{A\mid B,A\mid B,\Gamma\to\Theta}}{A\mid B,\Gamma\to\Theta}\,\text{Сокр.}
$$

Результирующее доказательство:

$$
\dfrac{\begin{array}{cc} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma'\to\Theta',A}{} \\ I\left\{\begin{array}{l}\Gamma'\to A,\Theta' \\ \quad\vdots \\ \Gamma\to A,\Theta,A\end{array}\right.\end{array}}{\Gamma\to\Theta,A,A}}{\Gamma\to\Theta,A}\,\text{Сокр.} & \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma''\to\Theta'',B}{} \\ II\left\{\begin{array}{l}\Gamma''\to B,\Theta'' \\ \\ \Gamma\to B,\Theta,B\end{array}\right.\end{array}}{\Gamma\to\Theta,B,B}}{\Gamma\to\Theta,B}\,\text{Сокр.}\end{array}}{A\mid B,\Gamma\to\Theta}
$$

Для простоты мы рассматриваем такую формулировку логических правил, которая не включает в себя перестановку. Заметим, что если в верхней и нижней фигуре вычеркнуть или добавить одну и ту же формулу (не являющуюся боковой и главной), то мы получим ту же фигуру заключения. I и II в данном и результирующем доказательствах имеют одну и ту же структуру. Сокращение можно поднять выше ВШП.

Данное доказательство: Результирующее доказательство

$$\begin{array}{l}
A,B,\Gamma'\to\Theta' \\ \hline
\left.\begin{array}{c}\Gamma'\to\Theta',A\mid B\\ \vdots\\ A,B,\Gamma\to\Theta,A\mid B\end{array}\right\} I \\ \hline
\Gamma\to\Theta,A\mid B,A\mid B \\ \hline
\Gamma\to\Theta,A\mid B \quad \text{Сокр.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
A,B,\Gamma'\to\Theta' \\ \hline
\left.\begin{array}{c}\Gamma',A,B\to\Theta'\\ \vdots\\ A,B,\Gamma,A,B\to\Theta\end{array}\right\} I \\ \hline
A,B,\Gamma\to\Theta \quad \text{Сокр.} \\ \hline
\Gamma\to\Theta,A\mid B
\end{array}$$

По индукции заключаем, что в доказательстве с одним сокращением сокращение можно поднять выше всех применений пропозициональных фигур.

Далее, если верхняя секвенция сокращения есть основная секвенция, то нижняя секвенция также будет основной. Заменяя теперь все фигуры сокращения с верхней основной секвенцией на нижнюю секвенцию, мы добиваемся того, что в доказательстве нет больше сокращений. Таким образом, всякое пропозициональное доказательство с одним сокращением может быть преобразовано в доказательство без сокращений с той же конечной секвенцией.

Наконец, индукцией по числу сокращений доказываем лемму 1.

Из леммы 1 получаем *следствие:* Пропозициональная часть SLC° совпадает с пропозициональной частью SLC.

Л е м м а 2. *В доказательстве, удовлетворяющем теореме Эрбрана – Генцена, с конечной секвенцией вида* $\exists^n\forall^m M$ *, все сокращения формул вида* $\forall^k M$ $(k \geq 0)$ *можно поднять выше применений кванторных правил.*

Для доказательств с одним сокращением лемму 2 докажем индукцией по числу кванторов в кванторной приставке сокращаемой формулы.

Базис: $k = 0$.

Данное доказательство:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c}\Gamma'\to\Theta',M,M\\ \vdots\\ \Gamma\to\Theta,M,M\end{array}\right\} I \\ \hline
\Gamma\to\Theta,M \quad \text{Сокр.}
\end{array}$$

Результирующее доказательство:

$$\begin{array}{l}
\Gamma'\to\Theta',M,M \\ \hline
\left.\begin{array}{c}\Gamma'\to\Theta',M \quad \text{Сокр.}\\ \vdots\\ \Gamma\to\Theta,M\end{array}\right\} I
\end{array}$$

Индукционный шаг. Сокращаемая формула имеет вид: $\forall^k M$, где $k \geq 1$.

Данное доказательство:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma''\to\Theta'',\forall^{k-1}Mv,\forall^{l}Mw}{\left.\begin{array}{c}\Gamma''\to\Theta'',\forall^{k}M,\forall^{l}Mw\\ \vdots\\ \Gamma'\to\Theta',\forall^{k}M,\forall^{k-1}Mw\end{array}\right\}I}}{\left.\begin{array}{c}\Gamma'\to\Theta',\forall^{k}M,\forall^{k}M\\ \vdots\\ \Gamma\to\Theta,\forall^{k}M,\forall^{k}M\end{array}\right\}II}}{\Gamma\to\Theta,\forall^{k}M}\ \text{Сокр.}
$$

В самой верхней секвенции переменные w и v не являются собственными. Заменив v на w во всем доказательстве, стоящем выше I, получим доказательство с последней секвенцией:

$$\Gamma''\to\Theta'',\forall^{k-1}Mw,\forall^{l}Mw$$

и далее

$$
\dfrac{\dfrac{\left.\begin{array}{c}\Gamma''\to\Theta'',\forall^{k-1}Mw,\forall^{l}Mw\\ \vdots\\ \Gamma'\to\Theta',\forall^{k-1}Mw\end{array}\right\}I}{\left.\begin{array}{c}\Gamma'\to\Theta',\forall^{k-1}Mw\\ \vdots\\ \Gamma\to\Theta,\forall^{k-1}Mw\end{array}\right\}II}\ \text{Сокр.}}{\Gamma\to\Theta,\forall^{k}Mw}
$$

Индукцией по числу сокращений доказываем лемму 2.

Л е м м а 3. *В доказательстве, удовлетворяющем теореме Эрбрана–Генцена, с конечной секвенцией вида* $\exists^{n}\forall^{m}M$, *все сокращения формул вида* $\exists^{l}\forall^{m}M$ *для* $n \geq l \geq 1$ *можно опустить ниже применений кванторных правил.*

Для одного сокращения лемму докажем индукцией по разности $n - l$.

Базис, $n - l = 0$, т.е. $l = n$.

Данное доказательство:

$$\begin{array}{c}
\to \Theta, \exists^n\forall^m M, \exists^n\forall^m M \\ \hline
\left.\begin{array}{c}\to \Theta, \exists^n\forall^m M \\ \vdots \\ \to \Lambda\end{array}\right\} I
\end{array}\ \text{Сокр.}$$

Результирующее доказательство:

$$\begin{array}{c}
\to \Theta, \exists^n\forall^m M, \exists^n\forall^m M \\ \hline
\left.\begin{array}{c}\to \exists^n\forall^m M, \Theta, \exists^n\forall^m M \\ \\ \to \exists^n\forall^m M, \Lambda\end{array}\right\} I \\ \hline
\to \Lambda
\end{array}\ \text{Сокр.}$$

В Λ данного доказательства обязательно входит $\exists^n\forall^m M$, так как в силу того, что доказательство удовлетворяет теореме Эрбрана – Генцена, формула $\exists^n\forall^m M$ не может быть боковой.

Индукционный шаг. $n - l > 0$, т.е. $l < n$. Поэтому за сокращением будет следовать фигура $\to \exists$.

Данное доказательство:

$$\begin{array}{c}
\to \Theta', \exists^l\forall^m M, \exists^l\forall^m M \\ \hline
\left.\begin{array}{c}\to \Theta', \exists^l\forall^m M \\ \vdots \\ \to \Theta, \exists^l\forall^m M\end{array}\right\} I \\ \hline
\to \Theta, \exists^{l+1}\forall^m M
\end{array}\ \text{Сокр.}$$

Результирующее доказательство:

$$\begin{array}{c}
\to \Theta', \exists^l\forall^m M, \exists^l\forall^m M \\ \hline
\left.\begin{array}{c}\to \exists^l\forall^m M, \Theta, \exists^l\forall^m M \\ \vdots \\ \to \exists^l\forall^m M, \Theta, \exists^l\forall^m M\end{array}\right\} I \\ \hline
\to \Theta, \exists^l\forall^m M, \exists^{l+1}\forall^m M \\ \hline
\to \Theta, \exists^{l+1}\forall^m M, \exists^{l+1}\forall^m M \\ \hline
\to \Theta, \exists^{l+1}\forall^m M
\end{array}\ \text{Сокр.}$$

Таким образом сокращение формул вида $\exists^l\forall^m M$ можно сдвинуть вниз. Индукцией по числу сокращений доказываем лемму 3.

Доказательство теоремы 1.

Пусть имеется доказательство секвенции $\to \exists^n\forall^m M$ в SLC. По теореме Эрбрана – Генцена это доказательство может быть преобразовано в доказательство с той же конечной секвенцией, в которой все применения пропозициональных правил предшествуют применениям кванторных и в средней секвенции и выше нее не встречаются формулы с кванторами. По лемме 2 все сокращения формул вида $\forall^k M$ можно поднять вверх, выше всех кванторных правил и по лемме 1 из § 1 элиминировать их. По лемме 3 сокращения формул вида $\exists^l\forall^m M$ модифицируются в сокращения формул вида $\exists^n\forall^m M$ и сдвигаются вниз. Поэтому можно перестроить доказательство -таким образом, что в нем имеется секвенция, выше которой имеются только логические фигуры, а ниже которой – сокращения. В силу леммы 3 она имеет вид $\to\left(\exists^n\forall^m M\right)^k$. Отсюда, если секвенция $\to\exists^n\forall^m M$ доказуема в SLC, то с помощью только логических правил без сокращений доказуема секвенция $\to\left(\exists^n\forall^m M\right)$, т. е., если $\to\exists^n\forall^m M$ доказуема в SLC, то существует такое $k \geq 1$, что $\to\left(\exists^n\forall^m M\right)^k$ доказуема в SLC°.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Естественно возникает вопрос, верно ли следующее утверждение:

Если $A_1, \ldots, A_n \to B_1, \ldots, B_m$ доказуема в SLC, то существуют такие числа $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$, что секвенция $A_1^{a_1}, \ldots, A_1^{a_n} \to B_1^{b_1}, \ldots, B_m^{b_m}$ доказуема в SLC° (в частности, если секвенция $\to$ A доказуема в SLC, то существует такое k, что $\to A^k$ доказуема в SLC°).

Гипотеза неверна, так как можно найти такую секвенцию, например, $\to\forall x\exists y\forall z(Fxy \supset Fxz)$, что она доказуема в SLC, но при любом k секвенция $\to(\forall x\exists y\forall z(Fxy \supset Fxz))^k$ не доказуема в SLC°.

Действительно, указанная секвенция доказуема в SLC:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\overline{Fab}}, Faa \to Fac, \overline{\overline{Fab}}}{\to Fab \supset Fac, Faa \supset Fab}}{\to \forall z(Fab \supset Faz), Faa \supset Fab}}{\to \exists y\forall z(Fay \supset Faz), Faa \supset Fab}}{\to \exists y\forall z(Fay \supset Faz), \forall z(Faa \supset Faz)}}{\to \exists y\forall z(Fay \supset Faz), \exists y\forall z(Fay \supset Faz)}}{\to \exists y\forall z(Fay \supset Faz)}}{\to \forall x\exists y\forall z(Fxy \supset Fxz)}$$

Но ни при одном k секвенция $\to\left(\forall x\exists y\forall z\left(Fxy \supset Fxz\right)\right)^k$ не доказуема в SLC°. Вместо x будем, двигаясь снизу вверх, подставлять числа от 1 до k включительно[3]. Пусть $b_i < k + i$. При устранении квантора существования в i-ой формуле вместо y подставляем одно из чисел $< k + i$; в общем виде b_i.

Вместо z можно подставлять числа[4], большие k. В результате секвенция $\to \left(\forall x \exists y \forall z (Fxy \supset Fxz)\right)^k$ будет доказуема тогда, и только тогда, когда доказуема одна из секвенций вида:

$F1b_1, F2b_2, \ldots, Fkb_k \to F1k + 1, F2k + 2, \ldots, Fk2k.$

Но ни одна из секвенций этого вида не доказуема, так как $b_1 < k + 1$ и вообще $b_i < k + i$, а для доказуемости секвенции надо, чтобы по крайней мере для одного i $b_i < k + i$. Следовательно, ни при одном k секвенция $\to \left(\forall x \exists y \forall z (Fxy \supset Fxz)\right)^k$ не доказуема в SLC°:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F1b_1,\ldots,Fkb_k \to F1k+1,\ldots,Fk2\cdot k}{\to F1b_1 \supset F1k+1,\ldots,Fk2\cdot k}}{\begin{matrix}\vdots\\ \to F1b_1 \supset F1k+1,\ldots,\exists y \forall z (Fky \supset Fkz)\end{matrix}}}{\to F1b_1 \supset F1k+1,\ldots,\exists y \forall z (Fky \supset Fkz)}}{\to \exists y \forall z (F1y \supset F1z),\ldots,\exists y \forall z (Fky \supset Fkz)}}{\dfrac{\to \forall x \exists y \forall z (Fxy \supset Fxz),\ldots,\forall x \exists y \forall z (Fxy \supset Fxz)}{\to \left(\forall x \exists y \forall z (Fxy \supset Fxz)\right)^k}}$$

§ 4. СВОДИМА ЛИ ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ РАЗРЕШИМЫХ КЛАССОВ SLC К ПРОБЛЕМЕ РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ SLC°?

Хао Ван в [3] утверждает: «Если рассматривать разрешимые фрагменты исчисления предикатов, то их обычно можно так формализовать, что правило сокращения уже не будет встречаться».

Если это утверждение истолковать таким образом, что секвенция T из разрешимого класса доказуема в SLC тогда, и только тогда, когда она доказуема в SLC°, то оно будет просто неверным.

Как мы видели выше, не будет верным также утверждение, что секвенция → A, принадлежащая к разрешимому классу, доказуема в SLC тогда, и только тогда, когда существует такое k, что секвенция $\to A^k$ доказуема в SLC°.

[3] Точнее: свободные переменные за номерами от 1 до k.

[4] Опять-таки свободные переменные, имеющие номер в пересчете.

Этим не отвергается возможность сведения проблемы разрешения для разрешимых классов к проблеме разрешения секвенций некоторого вида в SLC°.

Вопрос о доказуемости секвенции вида $\to \forall^n KM$ в SLC сводится к вопросу доказуемости секвенции вида $F_{w_1}^{x_1} \dots {}_{w_n}^{x_n} KM$, где $w_1, \dots, w_n$ свободные индивидные переменные, не входящие в $\forall^n KM$; K есть кванторная приставка. Нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Секвенция вида* $\to \exists^m M$*, где* M *есть бескванторная формула с* l *свободными индивидными переменными, доказуема в* SLC *тогда, и только тогда, когда в* SLC° *доказуема секвенция* $\to \left(\exists^m M\right)^k$*, где* $k = 1$*, если* $l = 0$*, или* $k = l$*.*

Таким образом вопрос о доказуемости или недоказуемости секвенции вида $\to \forall^n \exists^m M$, где $\forall^n \exists^m M$ не содержит свободных индивидных переменных, сводится к вопросу о доказуемости или недоказуемости в SLC° секвенции вида $\to \left(\exists^m M\right)^k$, где $k \leq n$.

Чтобы рассмотреть аналогичным методом другие разрешимые классы, надо ответить на вопрос, существует ли верхняя граница и какова она для k, чтобы секвенция вида $\to \exists \forall^n M$ была доказуема в SLC тогда и только тогда, когда секвенция $\to \left(\exists \forall^n M\right)^k$ доказуема в SLC°; M может содержать свободные индивидные переменные.

Аналогично встает вопрос о верхней границе k для секвенций вида $\to \left(\exists \exists \forall^n M\right)^k$.

При сведении разрешающей процедуры для разрешимых классов SLC к проблеме разрешения для исчисления предикатов без сокращений, удобно вместо SLC° использовать SLC^1. SLC^1 отличается от SLC° тем, что вместо $\to \exists$ и $\forall \to$ принимаются фигуры:

$$\frac{\Gamma \to \Theta, Aw_1, \dots, Aw_n}{\Gamma \to \Theta, \exists x A x} \qquad \frac{Aw_1, \dots, Aw_n, \Gamma \to \Theta}{\forall x A x, \Gamma \to \Theta}$$

В этих фигурах $w_1, \dots, w_n$ – все свободные индивидные переменные, входящие в формулы нижней секвенции; если в нижней секвенции нет свободных переменных, то $w_1 = w_0$.

Может быть показано, что секвенция вида $\to \forall^n \exists^m M$ где M – бескванторная формула, доказуема в SLC тогда, и только тогда, когда она доказуема в SLC^1.

§5. МЕТОДЫ УСТАНОВЛЕНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ЛОГИК

Теорема об устранимости сечения была применена Генценом для доказательства проблемы разрешения логик высказываний. Пусть антецедент и консеквент в секвенциях фигур заключения расчленены не более чем на три части, кроме фигуры заключения «перестановка».

Например, в *Д, Д,* $\Gamma \rightarrow \Theta$ – левая часть расчленена на 3 части. Пусть относительно исчисления И верны

1) теорема об устранимости сечения;

2) теорема подформульности для доказательств без сечения;

3) и лемма о доказательстве с редуцированными секвенциями.

Тогда проблема разрешения для исчисления высказываний И разрешима.

Секвенцию, в антецедент которой одна и та же формула не входит более трех раз и в сукцедент которой ни одна формула не входит также более трех раз, будем называть редуцированной. Пример.

(I) $A \supset B, A \supset B, A \supset B, C, A \supset B \rightarrow C$ нередуцированная секвенция, а

(II) $\mathrm{A} \supset B, C, A \supset B \rightarrow C$ редуцированная.

Назовем секвенцию X редукцией (результатом редукции) секвенции Y, если X получается из Y путем вычеркивания одного из двух вхождений одной и той же формулы до тех пор, пока не останется одного, двух или трех вхождений каждой из формул. Так II есть редукция I. Ясно, что из Y выводима X посредством сокращений и перестановок. Ясно также, что из X выводима Y посредством перестановок и правила размножения формул:

$$\frac{C, \Gamma \rightarrow \Theta}{C, C, \Gamma \rightarrow \Theta}\text{РЛ} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, C}{\Gamma \rightarrow \Theta, C, C}\text{РП}$$

Посредством перестановок, сокращений и размножений доказываем, что редукции одной и той же секвенции взаимно выводимы друг из друга.

Лемма о доказательстве с редуцированными секвенциями.

Каждое доказательство, конечная секвенция которого является редуцированной, можно преобразовать в доказательство с той же конечной секвенцией, в котором все секвенции являются редуцированными; и если в первоначальном доказательстве не было сечений, то сечений не будет и в результирующем.

Доказательство.

Основные секвенции являются редуцированными.

Пусть $\dfrac{\alpha_1}{X}$ и $\dfrac{\alpha_2}{Y}$ – доказательства, в которых все секвенции редуцированные, тогда доказательства $\dfrac{\dfrac{\alpha_1}{X}}{Z}\Phi$ и $\dfrac{\dfrac{\alpha_1}{X} \quad \dfrac{\alpha_2}{Y}}{Z}\Phi$ также можно преобразовать в доказательства, все секвенции которых редуцированные. Для этого в нижней и верхних секвенциях фигуры Ф в *каждой части* оставляем по одному вхождению каждой формулы. Мы получим доказательство, где все секвенции редуцированные.

Продолжая этот процесс, мы получаем доказательство, где все секвенции редуцированные. Конечная секвенция результирующего доказательства будет или тождественна конечной секвенции исходного доказательства, или эти две секвенции будут редукциями одной и той же секвенции, т. е. взаимно выводимыми друг из друга.

При наличии правила перестановки, в котором $C \approx D$, это правило имеет вид тождественного перехода $\dfrac{\Gamma, C, C, \Delta \to \Theta}{\Gamma, C, C, \Delta \to \Theta}$ и может быть выброшено в исходном доказательстве.

Лемма имеет место для тех исчислений высказываний, (1) фигуры заключений которых содержат секвенции, сукцеденты и антецеденты которых разделяются не более чем на 3 части (кроме правила перестановки), и (2) в которых есть фигуры сокращения, размножения и перестановки.

Доказательство теоремы о разрешимости логик высказываний.

Пусть исчисление И удовлетворяет указанным в теореме условиям, т. е. для него верна теорема об устранимости сечений, свойство подформульности и есть правила сокращения, размножения (и перестановки).

Требуется решить, доказуема секвенция X или нет. Рассмотрим некоторую редуцированную секвенцию Y, эквивалентную X. Очевидно, X доказуема тогда, и только тогда, когда доказуема Y.

По формуле Y можно найти все редуцированные секвенции, в антецедент и сукцедент которой входят подформулы формул секвенции Y. Число таких редуцированных секвенций конечно; обозначим множество этих секвенций буквой Ω.

Пример: Y есть $(A \supset B) \supset A \to A$.

Подформулы: $(A \supset B) \supset A, A, A \supset B, B$.

$\Omega = \{A \to A; A \supset B, A, A \supset B \to B, A, B, B; \ldots\}$.

Далее выбираем из Ω все основные секвенции, объединяя их в множество A_0; затем выбираем все секвенции Ω, которые могут быть получены из секвенций A_0 одним применением одной из фигур заключения, присоединив эти секвенции к A_0, получаем множество A_1.

Процесс заканчиваем, если в его ходе получаем формулу Y, или, построив множество A_n, не имеем возможностей к его расширению. В первом случае формула Y (а следовательно и X) будет доказуемой, во втором – недоказуемой.

Идея доказательства основана на том, что число секвенций, входящих в доказательство, является конечным в силу свойства подформульности и условия редуцированности. Поскольку в доказательстве мы переходим от более коротких к более длинным секвенциям и длина конечной секвенции известна, можно перебрать все фигуры, могущие быть доказательством.

Следствия. Проблема разрешения разрешима для логик высказываний следующих систем:

1) классической
2) интуиционистской
3) минимальной
4) абсолютной с правилом объединения.

Сформулированная теорема является неплохим критерием для принципиального положительного (но не отрицательного) решения вопроса о том, разрешима ли проблема разрешения для соответствующей логики высказываний.

Замечание. Конечно, редуцируемость не обязательно связывать с числом 3; это зависит от вида фигур заключения.

Однако теорема не дает практически хороших алгорифмов распознавания, доказуема формула или нет.

Устранимость сечения и сокращения дает другой метод доказательства разрешимости проблемы разрешения.

Будем говорить, что фигура заключения обладает свойством усиленной подформульности, если в верхние секвенции этой фигуры входят только подформулы нижней секвенции и если суммарное число логических знаков каждой верхней секвенции меньше числа логических знаков нижней секвенции.

Структурные фигуры заключения сокращение и перестановка обладают свойством подформульности, но не обладают свойством усиленной подформульности; сечение не обладает даже свойством подформульности.

Нетрудно видеть, что проблема разрешения для логистической системы SL разрешима, если эта система удовлетворяет следующим условиям:

1) каждая логическая фигура заключения обладает свойством усиленной подформульности;

2) относительно SL верна теорема об устранимости сечений и сокращений.

Действительно, в системе без сечений и сокращений для каждой секвенции, содержащей логический знаки, могут быть указаны секвенции с меньшим числом логических знаков, из которых они могут быть получены. Число таких секвенций будет конечно, так как имеется лишь конечное число возможностей применения структурной фигуры перестановки.

Если каждая фигура заключения, кроме перестановки, по условию обладает свойством усиленной подформульности, то процесс перебора оборвется. Определить, являются они основными или нет, не представляет труда.

Другими словами, для каждой секвенции исчисления SL, удовлетворяющей указанным условиям, процесс построения дерева поиска доказательств всегда будет заканчиваться. По дереву поиска доказательств, как было показано выше, может быть установлено, доказуема секвенция или нет, и если доказуема, то по дереву поиска доказательства может быть найдено доказательство этой секвенции.

Возможность перестановки фигур заключения в доказательстве, естественно, укорачивает процедуру построения дерева поиска доказательства.

Глава шестая

АБСОЛЮТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ ПО НАЛИЧИЮ ИЛИ ОТСУТСТВИЮ ЛОГИЧЕСКИХ ФИГУР ЗАКЛЮЧЕНИЯ ГРУППЫ IV

Вернемся к первой классификации правил введена удаления логических знаков слева и справа, сформулировав их в виде логических фигур заключения для сингулярных секвенций:

I

ВИП $\dfrac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B}$

ВКП $\dfrac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \,\&\, B}$

ВДЛ $\dfrac{A, \Gamma \to C \quad B, \Gamma \to C}{A \vee B, \Gamma \to C}$

В∀П $\dfrac{\Gamma \to Aw}{\Gamma \to \forall x F_x^w A}$

В∃Л $\dfrac{Aw, \Gamma \to C}{\exists x F_x^w Aw, \Gamma \to C}$

II

УИП $\dfrac{\Gamma \to A \supset B}{A, \Gamma \to B}$

УКП $\dfrac{\Gamma \to A \,\&\, B}{\Gamma \to A \text{ и } \Gamma \to B}$

УДЛ $\dfrac{A \vee B, \Gamma \to C}{A, \Gamma \to C \text{ и } B, \Gamma \to C}$

У∀П $\dfrac{\Gamma \to \forall x F_x^w A}{\Gamma \to F_t^w A}$

У∃Л $\dfrac{\exists x F_x^w Aw, \Gamma \to C}{F_t^w Aw, \Gamma \to C}$

III

ВИЛ $\dfrac{\Gamma \to A \quad B, \Delta \to C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to C}$

ВКЛ $\dfrac{A, \Gamma \to C \text{ или } B, \Gamma \to C}{A \,\&\, B, \Gamma \to C}$

ВДП $\dfrac{\Gamma \to A \text{ или } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}$

В∀Л $\dfrac{F_t^w Aw, \Gamma \to C}{\forall x F_x^w Aw, \Gamma \to C}$

В∃П $\dfrac{\Gamma \to F_t^w Aw}{\Gamma \to \exists x F_x^w Aw}$

IV

УИЛ $\dfrac{A \supset B, \Gamma \to A}{\Gamma \to A}$

УКЛ $\dfrac{A \,\&\, B, \Gamma \to C}{A, B, \Gamma \to C}$

УДП $\dfrac{\Gamma \to A \vee B \quad A, \Delta \to f}{\Gamma, \Delta \to B}$

На В∀П и В∃Л накладываются ограничения: переменная w не входит в формулы Г и формулу C.

В качестве структурных фигур заключения принимаются:

$$\frac{\Gamma, C, D, \Delta \to E}{\Gamma, D, C, \Delta \to E}$$ ПЛ – перестановка слева

$$\frac{C, C, \Gamma \to E}{C, \Gamma \to E}$$ СЛ – сокращение слева

$$\frac{\Gamma \to M, \Delta_1, M, \Delta_2 \to E}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \to E}$$ С – сечение

Основной секвенцией является секвенция вида $A \to A$..

Доказательство имеет форму дерева.

Язык содержит константу f. Отрицание вводим по определению $\neg A =_{\mathrm{Df}} A \supset f$.

Примем соглашение, что секвенция вида $\Gamma \to$ с пустым сукцедентом есть $\Gamma \to f$.

Системы, в которых принимаются структурные правила, правила групп I и II и, возможно, некоторые правила из группы IV, будем называть секвенциальными натуральными исчислениями первого типа и обозначать знакосочетанием SN.

Системы, в которых принимаются структурные правила, правила групп I и III и, возможно, некоторые правила группы IV, будем называть секвенциальными логистическими исчислениями и обозначать SL.

Правила группы I и II и структурные правила (вместе с основной секвенцией) образуют абсолютное секвенциальное натуральное исчисление (первого типа) – SNA. Заменив правила группы II на правила группы III, получим абсолютное секвенциальное логистическое исчисление SLA.

SNA + УКЛ образует минимальное исчисление SNM.

SNM + УДП дает нам интуиционистское секвенциальное натуральное исчисление SNI.

SNI + УИЛ есть классическое секвенциальное натуральное исчисление SNC.

Аналогично для логистических секвенциальных систем:

SLM = SLA + УКЛ

SLI = SLM + УДП

SLC = SLI + УИЛ

Мы не рассматриваем сейчас классификацию других логических систем (см. § 8, гл. 2).

При данной классификации за различие между классической и интуиционистской логиками ответственна импликация, за различие между интуиционистской и минимальной – дизъюнкция, за различие между минимальной и абсолютной – конъюнкция.

В отличие от классической интуиционистская логика отказывается дать общее правило удаления импликации слева. Минимальная логика не дает общего метода устранения дизъюнкции справа. Наконец, абсолютная логика дополнительно не дает общего метода удаления конъюнкции слева.

Я. Лукасевич в своей книге «Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики» отмечает, что молекулярные предложения (в его терминологии функториальные) «нельзя непосредственно сравнивать с фактами. Проблема Канта теряет свою значительность и должна быть заменена гораздо более важной проблемой: Каким образом возможны истинные функториальные предложения? Мне представляется, что именно здесь лежит исходный пункт как новой философии, так и новой, логики» [23, 191].

Мысль Я. Лукасевича, на наш взгляд, можно было бы изменить: как возможны сложные импликативные, конъюнктивные, отрицательные и общие высказывания в качестве посылок, дизъюнктивные и экзистенциальные высказывания в качестве промежуточных утверждений в рассуждении? Другими словами, как возможны правила, помещенные нами в IV группу.

В этой связи представляет интерес рассматривать не только интуиционистскую и минимальную систему, но и абсолютную систему.

Поскольку наше рассмотрение в основном является синтаксическим, то мы не будем давать семантику для абсолютной, минимальной и интуиционистской логик. И с чисто синтаксической точки зрения абсолютная система представляет определенный интерес, так как она является как бы базисной системой, над которой надстраиваются другие системы логики.

Различие между абсолютной логикой, минимальной и интуиционистской можно отнести за счет структурных правил добавления формулы слева и справа. Действительно, абсолютная система (SLA или SNA), обогащенная правилом ВКП, эквивалентна абсолютной системе, обогащенной правилом ДЛ. Аналогично минимальная система (SLM или SNM) вместе с УКЛ эквивалентна минимальной системе вместе с фигурой ДП для сингулярного случая $\left(\dfrac{\Gamma \to f}{\Gamma \to B}\right)$. Для систем натурального вывода и систем гильбертовского типа это различие сводится к модификации понятий вывода.

§2. СИСТЕМА SLA

Рассмотрим абсолютное секвенциальное логистическое исчисление. В отличие от предыдущего параграфа язык не содержит константу *f*, но содержит символ отрицания. Рассматриваются сингулярные секвенции или секвенции с пустым консеквентом. Сформулированную ниже систему мы обозначим как и в § 1, SLA. Контекст всегда позволит установить, идет ли речь об абсолютной системе с константой / или об абсолютной системе с символом отрицания в качестве примитивного знака[1]

Θ в фигурах заключения есть формула или пустая последовательность формул. Основная секвенция:

$A \to A$

Логические фигуры заключения:

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \to A \quad B, \Delta \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \,\&\, B} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Theta \text{ или } B, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to A \text{ или } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A} \qquad \frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}$$

$$\frac{\Gamma \to Aw}{\Gamma \to \forall x Ax} \qquad \frac{At, \Gamma \to \Theta}{\forall x Ax, \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to At}{\Gamma \to \exists x Ax} \qquad \frac{\Gamma, Aw \to \Theta}{\exists x Ax, \Gamma \to C}$$

Структурные фигуры заключения:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Theta} \qquad \text{перестановка}$$

---

[1] Мы могли бы различить системы с константой *f* и символом отрицания, ставя соответствующий индекс; например, SL_fA и SL_oA, аналогично N_fA и N_oA. Мы различаем мультиплярные и сингулярные секвенциальные исчисления; когда будет необходимость, то мы будем ставить индекс s (сингулярная) или m (мультиплярная) при S. Так S_mL_oA есть мультиплярное секвенциальное логическое абсолютное исчисление с отрицанием. Однако, чтобы не осложнять обозначений, мы будем опускать индексы, когда контекст позволяет установить, о какой системе идет речь.

$$\frac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta} \quad \text{сокращение}$$

$$\frac{\Gamma \to M, \Delta_1, M, \Delta_2 \to \Theta}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \to \Theta} \quad \text{сечение}$$

На В∀П и В∃Л накладывается обычное ограничение: w не входит в формулы нижней секвенции.

Для SLA имеет место теорема об устранимости сечения.

Теорема об устранимости сечения для SLA не может быть доказана тем же методом, что и для классического, интуиционистского и минимального исчислений, так как не проходит лемма о замене сечений смешениями – в силу отсутствия структурной фигуры ДЛ.

Однако, каждое сечение может быть замещено обобщенным смешением

$$\frac{\Gamma \to M \quad \Delta, M, \Phi \to \Theta}{\Delta_M, \Gamma, \Phi_M \to \Theta} \text{ ОС},$$

где Δ_M и Φ_M есть результаты вычеркивания некоторых (возможно всех, возможно ни одного)[2] вхождений M в Δ и Φ, M будем называть формулой ОС.

Легко видеть, что сечение есть частный случай обобщенного смешения (при $\Delta_M = \Delta$ и $\Phi_M = \Phi$).

Наоборот, обобщенное смешение может быть замещено фигурой, составленной из сокращений, перестановок и сечения.

Основная лемма. *Доказательство с одним обобщенным смешением в конце может быть преобразовано в доказательство с той же конечной секвенцией без обобщенных смешений.*

Лемму будем доказывать, используя две возвратные индукции: по степени формулы обобщенного смешения и рангу доказательства.

Под степенью формулы обобщенного смешения будем иметь в виду число логических знаков в этой формуле.

Нить доказательства – последовательность секвенций, такая что непосредственно предшествующая является верхней, а непосредственно следующая – нижней секвенцией некоторой фигуры заключения, и последняя секвенция этой последовательности есть последняя секвенция доказательства.

---

[2] Для обычного смешения Δ_M и Φ_M есть результаты вычеркивания *всех* вхождений M в Δ и Φ.

Левое ранговое число есть наибольшее число секвенций, содержащих формулу обобщенного смешения в сукцеденте и идущих в конце одной нити непосредственно друг за другом, причем нижняя из них является левой секвенцией обобщенного смешения.

Правое ранговое число есть наибольшее число секвенций, содержащих формулу обобщенного смешения в антецеденте и идущих непосредственно друг за другом в конце одной нити, причем нижняя из них является правой секвенцией обобщенного смешения.

Ранг доказательства – есть сумма левого и правого ранговых чисел. Обозначим ранг буквой ρ. Из определений следует, что $\rho \geq 2$.

Сокращенно запишем основную лемму в виде $\forall n \forall \rho Л(n, \rho)$.

Для доказательства основной леммы достаточно доказать три утверждения (гл. 4, § 2, стр. 140 – 141):

A. $Л\,(0,2)$
B. $\forall m(m \leq n \supset \forall \rho Л(m, \rho)) \supset Л(n', 2)$
C. $\forall \rho_1(\rho_1 \leq \rho \supset Л(n, \rho_1)) \supset Л(n, \rho')$

A. *Степень формулы смешения равна 0, ранг равен 2:* $Л(0,2)$.

Ранг равен 2, поэтому левое и правое ранговые числа равны 1. Так как степень формулы ОС равна 0, то как левая, так и правая секвенции имеют вид $P \to P,$ где P – элементарная формула, и доказательство с обобщенным смешением в конце имеет вид:

$$\frac{P \to P \quad P \to P}{P \to P}\,\text{ОС}$$

Результирующее доказательство это просто $P \to P$.

B. *Требуется доказать лемму для ранга 2 и степени n', в предположении, что лемма верна для любого ранга и для всех степеней меньших или равных n.*

Ранг данного доказательства равен 2, поэтому левое и правое ранговые числа равны 1 и как левая, так и правая секвенции не могут быть нижними секвенциями структурных фигур сокращения и перестановки. Так как степень формулы обобщенного смешения больше нуля, то имеются три возможности:

B1 – левая секвенция основная,

B2 – правая секвенция основная,

В3 – левая и правая секвенции являются нижними секвенциями логических фигур заключения[3].

В случае В1 и В2 мы доказываем лемму без индуктивного допущения, просто беря в качестве результирующего доказательства доказательство, стоящее над правой секвенций (вместе с самой этой секвенцией) в случае В1, и над левой секвенцией в случае В2.

В3. Правая и левая секвенции являются нижними секвенциями логических фигур заключения. Поэтому В3 распадается на 6 подслучаев по числу логических знаков. В общем виде конец данного доказательства будет иметь вид:

$$\frac{\dfrac{}{\Gamma \to A \circ B}\,B \circ П \qquad \dfrac{}{A \circ B, \Delta \to \Theta}\,B \circ Л}{\Gamma, \Delta \to \Theta}$$

Заметим, что поскольку правое ранговое число равно 1, то $A \circ B$ не встречается в Δ. И отсюда $\Delta_{A \circ B} = \Delta$.

В3.1. Главный знак &.

Данное доказательство:

$$\frac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \Gamma \to A & & \Gamma \to B\end{matrix}}{\Gamma \to A \,\&\, B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A, \Delta \to \Theta\end{matrix}}{A \,\&\, B, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \Gamma \to A & & A, \Delta \to \Theta\end{matrix}}{\Gamma, \Delta \to \Theta}\ \text{ОС по индукт. доп.}$$

В3.2. Главный знак $\vee$.

Данное доказательство:

$$\frac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \to A\end{matrix}}{\Gamma \to A \vee B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A, \Delta \to \Theta & & B, \Delta \to \Theta\end{matrix}}{A \vee B, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

[3] Случаи В1, В2, В3 исчерпывают все возможности, однако В1 и В2 не исключают друг друга.

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \Gamma \to A & A, \Delta \to \Theta\end{array}}{\Gamma, \Delta \to \Theta}\ \text{ОС по индукт. доп.}$$

В3.3. Главный знак $\supset$.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B} \qquad \dfrac{\Delta_1, \to A \quad B, \Delta_2 \to \Theta}{A \supset B, \Delta_1, \Delta_2 \to \Theta}}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta_1 \to A} \qquad \dfrac{A, \Gamma \to B \quad B, \Delta_2 \to \Theta}{A, \Gamma, \Delta_2 \to \Theta}\ \text{ОС}}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \to \Theta}\ \text{ОС}}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \to \Theta}\ \Pi$$

(ОС по индуктивному допущению).

В3.4. Главный знак $\neg$.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A} \qquad \dfrac{\Delta \to A}{\neg A, \Delta \to}}{\Gamma, \Delta \to}$$

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to A \quad A, \Gamma \to}{\Delta, \Gamma \to}\ \text{ОС по индукт. доп.}}{\Gamma, \Delta \to}\ \Pi$$

В3.5. Главный знак $\forall$.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to Aw}{\Gamma \to \forall x Ax} \qquad \dfrac{Av, \Delta \to \Theta}{\forall x Ax, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\Gamma \to Av \quad Av, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \Theta}\ \text{ОС по индукт. доп.}$$

Так как в доказательстве секвенции $T \to Aw$ w не является собственной переменной, то, заменив всюду в этом доказательстве w на v, получим доказательство секвенции $\Gamma \to Av$.

В3.6. Главный знак $\exists$.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to Av}{\Gamma \to \exists x Ax} \qquad \dfrac{Aw, \Delta \to \Theta}{\exists x Ax, \Delta \to \Theta}}{\Gamma, \Delta \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\Gamma \to Av \qquad Av, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \Theta}\text{ОС по индукт. доп.}$$

С. *Нужно доказать лемму для произвольной степени n и ранга* ρ' *в предположении, что лемма верна для доказательств той же степени и всех рангов меньших или равных* ρ.

Случай С разбивается на два подслучая:

С1 – правое ранговое число > 1.

С2 – левое ранговое число > 1.

Рассмотрим С1. Поскольку правое ранговое число больше 1, то конец данного доказательства имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to M} \qquad \dfrac{S}{\Delta, M, \Sigma \to \Theta}\Phi}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta},$$

где S есть секвенция (секвенции), в антецедент которой входит формула M; Ф есть некоторая фигура заключения.

С1 мы разобьем на 6 подслучаев, соответственно виду фигуры Ф:

С1.1 – Ф есть сокращение слева,

С1.2 – Ф есть перестановка слева,

С1.3 – Ф есть однопосылочная логическая фигура,

С1.4 – Ф есть ВКП,

С1.5 – Ф есть ВДЛ,

С1.6 – Ф есть ВИЛ.

Очевидно, что эти случаи исчерпывают С1.

С1.1. Ф есть сокращение слева.

Этот случай распадается на два: M есть сокращаемая формула (С1.1.1) и M не есть сокращаемая формула (С1.1.2).

С1.1.1. M есть сокращаемая формула.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to M} \qquad \dfrac{M, M, \Delta \to \Theta}{M, \Delta \to \Theta}\text{СЛ}}{\Gamma, \Delta_M \to \Theta}\text{ОС}$$

Результирующее доказательство:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to M \qquad M, M, \Delta \to \Theta}{\Gamma, M_M, \Delta_M \to \Theta}\text{ОС по индукт. доп.}}{\Gamma, \Delta_M \to \Theta}$$

С1.1.2. Сокращаемая формула не есть формула обобщенного смешения.

Данное доказательство:

$$\cfrac{\cfrac{}{\Gamma \to M} \qquad \cfrac{\Delta, M, \Sigma \to \Theta}{\Delta', M, \Sigma \to \Theta}\text{СЛ}}{\Delta'_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ОС}$$

Результирующее доказательство:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to M \qquad \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}}{\Delta'_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{СЛ}$$

С1.2. Ф есть перестановка слева. Также разбивается на два подслучая, когда *M* есть одна из переставленных формул и *M* отлична от переставляемых формул.

С1.2.1. *M* есть одна из переставляемых формул.

Данное доказательство:

$$\cfrac{\Gamma \to M \qquad \cfrac{\Delta, C, M, \Sigma \to \Theta}{\Delta, M, C, \Sigma \to \Theta}\text{ПЛ}}{\Delta_M, \Gamma, C_M, \Sigma_M \to \Theta}\text{ОС}$$

Результирующее доказательство:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to M \qquad \Delta, C, M, \Sigma \to \Theta}{\Delta_M, C_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ОС по индукт. доп.}}{\Delta_M, \Gamma, C_M, \Sigma_M \to \Theta}\text{ПЛ}$$

$\Delta_M, \Gamma, C_M, \Sigma_M \to \Theta$ при $\neg(C \approx M)$ есть $\Delta_M, \Gamma, C, \Sigma_M \to \Theta$ и при $\mathrm{C} \approx \mathrm{M}$ есть $\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta$.

С1.2.2. *M* отлична от переставляемых формул. Аналогично С1.1.2.

С1.3. Ф есть однопосылочная логическая фигура.

Данное доказательство имеет вид:

$$\cfrac{\Gamma \to M \qquad \cfrac{\psi, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{\psi_1, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}\Phi}{\psi_{1M}, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ОС}$$

ψ есть боковая, а ψ_1 – главная формула. В антецедент правой секвенции обобщенного смешения (помимо ψ_1) должна входить формула *M,* иначе правое ранговое число было бы равно 1, что противоречит условию С1.

С1.3 разбивается на два подслучая: φ_1 отлична от *M* и φ_1 есть *M*.

C1.3.1. ψ_1 отлична от *M*. Тогда ψ_{1M} есть ψ_1. Искомое результирующее доказательство будет таковым

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \qquad \psi, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{\psi, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ОС по индукт. доп.}}{\psi_1, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\Phi$$

Даже при условии, что φ есть *M*, мы можем применить ОС по индуктивному предположению, *не вычеркивая* φ. (Этого нельзя было бы сделать при обычном, а не обобщенном смешении.)

C1.3.2. ψ_1 есть *M*.

Результирующее доказательство строим следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \qquad \psi, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{\psi, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ОС по индукт. доп.}}{M, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\Phi$$

Пока мы еще не получаем доказательства искомой секвенции[4]. Имеются две возможности. Может оказаться, что *M* содержится в списке $\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M$; в этом случае применяем перестановки и сокращения и получаем доказательство секвенции $\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta$. Имеется вторая возможность – *M* не содержится в списке $\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M$. В этом случае к секвенциям $\Gamma \to M$ и $M, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta$ мы можем применить индуктивное допущение, так как левое ранговое число осталось прежним, а правое ранговое число равно 1. Поэтому конец искомого доказательства будет иметь вид

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \qquad M, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}{\Gamma, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ОС по индукт. доп.}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ПЛ, СЛ}$$

C1.4. Φ есть ВКП.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\Gamma \to M \qquad \dfrac{\Delta, M, \Sigma \to A \qquad \Delta, M, \Sigma \to B}{\Delta, M, \Sigma \to A \,\&\, B}\text{ВКП}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to A \,\&\, B}$$

Результирующее доказательство:

[4] Получено доказательство лишь одного частного случая ОС, когда ψ_1, графически равная *M,* не вычеркивается. Дальнейшее изложение имеет дело со случаем, когда ψ_1 вычеркивается.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad \Delta, M, \Sigma \to A}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to A}\text{ОС, ИД} \qquad \dfrac{\Gamma \to M \quad \Delta, M, \Sigma \to B}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to B}\text{ОС, ИД}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to A \,\&\, B}$$

Заметим, что дважды применяя ОС по индуктивному допущению (ИД), мы должны применять ОС одинаковым образом, т. е. в обоих случаях одинаковые вхождения *M* вычеркивать или не вычеркивать.

С1.5. Ф есть ВДЛ.

Данное доказательство имеет вид:

$$\dfrac{\Gamma \to M \qquad \dfrac{A, \Delta, M, \Sigma \to \Theta \quad B, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{A \vee B, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}}{(A \vee B)_M, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}$$

Имеются две возможности: $A \vee B$ отлична от *M* и $A \vee B$ есть *M.*

С1.5.1. $A \vee B$ отлична от *M*; тогда $(A \vee B)_M$ есть $A \vee B$. Конец результирующего доказательства будет иметь вид:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad A, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{A, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta} \qquad \dfrac{\Gamma \to M \quad B, \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{B, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}}{A \vee B, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\text{ВДЛ}$$

Так же как и в случае С1.4 ОС применяем одинаковым образом, ни *A*, ни *B* не вычеркиваем даже если они графически равны *M.*

С1.5.2. $A \vee B$ есть *M.*

Начинаем строить результирующее доказательство так же, как в случае С1.5.1. Тогда получаем доказательство секвенции $M, \Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta$.

Для случая, когда первое вхождение *M* не вычеркивается, доказательство получено. Для случая, когда вычеркивается, поступаем аналогично С1.3.2.

С1.6. Ф есть ВИЛ.

Конец данного доказательства имеет вид:

$$\dfrac{\Gamma \to M \qquad \dfrac{\Delta \to A \quad B, \Sigma \to \Theta}{A \supset B, \Delta, \Sigma \to \Theta}\text{ВИЛ}}{(A \supset B)_M, \Gamma, \Delta_M, \Sigma_M \to \Theta},$$

где Δ или Σ содержат *M* (так как правое ранговое число > 1).

Возможны 3 случая:

1. Δ содержит *M,* а Σ не содержит *M*;
2. Δ не содержит *M,* а Σ содержит *M*;
3. и Δ и Σ содержат *M.*

С1.6.1. Δ содержит M, Σ не содержит M. Поэтому Σ_M есть Σ. Результирующее доказательство имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad \Delta \to A}{\Gamma, \Delta'_M \to A}\,\text{ОС, ИД} \qquad B, \Sigma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta'_M, \Sigma \to \Theta}$$

Δ' есть Δ с одним вычеркнутым вхождением M.

Если $A \supset B$ отлично от M, то доказательство закончено. Если $A \supset B$ тождественно M, то доказательство закончено, если $A \supset B$ не вычеркивается в данном доказательстве; если вычеркивается, то имеются две возможности: $A \supset B$ содержится в Γ, тогда получаем искомое доказательство применением перестановок и сокращений; $A \supset B$ не содержится в Γ, Δ'_M, Σ – тогда еще раз применяем индукционное допущение.

С1.6.2. Σ содержит M, Δ не содержит M; Δ_M есть Δ. Строим результирующее доказательство

$$\dfrac{\dfrac{}{\Delta \to A} \qquad \dfrac{\Gamma \to M \quad B, \Sigma \to \Theta}{B, \Gamma, \Sigma'_M \to \Theta}\,\text{ОС, ИД}}{A \supset B, \Delta, \Gamma, \Sigma'_M \to \Theta}$$

Дальше поступаем аналогично С1.6.1.

С1.6.3. Δ содержит M и Σ содержит M. Строим результирующее доказательство

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad \Delta \to A}{\Gamma, \Delta'_M \to A}\,\text{ОС, ИД} \qquad \dfrac{\Gamma \to M \quad B, \Sigma \to \Theta}{B, \Gamma, \Sigma'_M \to \Theta}\,\text{ОС, ИД}}{A \supset B, \Gamma, \Delta'_M, \Gamma, \Sigma'_M \to \Theta}}{A \supset B, \Gamma, \Delta'_M, \Sigma'_M \to \Theta}$$

Далее поступаем как в С1.6.1.

Пока в С1.6.3 доказаны все случаи, кроме возможности вычеркивания только одного вхождения из Δ', Σ или Δ, Σ'. Но этот случай легко доказать по аналогии с С1.6.1 и С1.6.2.

Таким образом, С1 доказано.

Остается рассмотреть С2.

С2. *Левое ранговое число* > 1.

Конец данного доказательства имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{S}{\Gamma \to M}\,\Phi \qquad \dfrac{}{\Delta, \text{M}, \Sigma \to \Theta}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta},$$

где S есть секвенция, в сукцедент которой входит M.

Поэтому Φ не может быть логической фигурой введения знака справа.

Случай С2 разобьем на 3 подслучая:

С2.1 – Ф есть структурная фигура заключения или Ф есть однопосылочная фигура введения логического знака слева (т.е.ВКЛ, ВОЛ, В∀Л, В∃Л).

С2.2 – Ф есть ВИЛ.

С2.3 – Ф есть ВДЛ.

Очевидно, что эти случаи исчерпывают С2.

С2.1. Ф однопосылочная (левая) фигура.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M}{\Gamma' \to M}\,\Phi \qquad \dfrac{}{\Delta, \mathrm{M}, \Sigma \to \Theta}}{\Delta_M, \Gamma', \Sigma_M \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \qquad \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}\,\text{ОС, ИД}}{\Gamma, \Delta_M, \Sigma_M \to \Theta}\,\text{ПЛ}}{\Gamma', \Delta_M, \Sigma_M \to \Theta}\,\Phi}{\Delta_M, \Gamma', \Sigma_M \to \Theta}\,\text{ПЛ}$$

С2.2. Ф есть ВИЛ.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to A \qquad B, \Gamma_2 \to M}{A \supset B, \Gamma_1, \Gamma_2 \to M} \qquad \dfrac{}{\Delta, \mathrm{M}, \Sigma \to \Theta}}{\Delta_M, \mathrm{A} \supset \mathrm{B}, \Gamma_1, \Gamma_2, \Sigma_M \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \to A \qquad \dfrac{\dfrac{B, \Gamma_2 \to M \qquad \Delta, M, \Sigma \to \Theta}{\Delta_M, B, \Gamma_2, \Sigma_M \to \Theta}\,\text{ОС, ИД}}{B, \Delta_M, \Gamma_2, \Sigma_M \to \Theta}\,\text{ПЛ}}{A \supset B, \Gamma_1, \Delta_M, \Gamma_2, \Sigma_M \to \Theta}\,\text{ВИЛ}}{\Delta_M, A \supset B, \Gamma_1, \Gamma_2, \Sigma_M \to \Theta}\,\text{ПЛ}$$

С2.3. Ф есть ВДЛ.

Данное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to M \qquad B, \Gamma \to M}{A \vee B, \Gamma \to M} \qquad \dfrac{}{\Delta, \mathrm{M}, \Sigma \to \Theta}}{\Delta_M, \mathrm{A} \vee \mathrm{B}, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}$$

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,\Gamma\to M\quad \Delta,M,\Sigma\to\Theta}{\Delta_M,A,\Gamma,\Sigma_M\to\Theta}\text{ОС,ИД}}{A,\Delta_M,\Gamma,\Sigma_M\to\Theta}\qquad \dfrac{\dfrac{B,\Gamma\to M\quad \Delta,M,\Sigma\to\Theta}{\Delta_M,B,\Gamma,\Sigma_M\to\Theta}\text{ОС,ИД}}{B,\Delta_M,\Gamma,\Sigma_M\to\Theta}}{A\vee B,\Delta_M,\Gamma,\Sigma_M\to\Theta}}{\Delta_M,A\vee B,\Gamma,\Sigma_M\to\Theta}$$

Таким образом, лемма доказана.

Индукцией по числу смешений доказываем теорему об устранимости смешений и тем самым сечений.

Для всякого доказательства в SLA может быть найдено другое доказательство с той же конечной секвенцией, не содержащее сечений.

§ 3. АБСОЛЮТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ В ВИДЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНОГО НАТУРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Сформулируем абсолютное исчисление предикатов в виде секвенциального натурального исчисления SNA.

Основная секвенция и структурные фигуры заключения те же, что и для SLA. Логические фигуры представляют собой фигуры введения и удаления логических знаков:

$$\text{ВИП}\ \dfrac{A,\Gamma\to B}{\Gamma\to A\supset B}\qquad\qquad \text{УИП}\ \dfrac{\Gamma\to A\supset B}{A,\Gamma\to B}$$

$$\text{ВКП}\ \dfrac{\Gamma\to A\quad \Gamma\to B}{\Gamma\to A\,\&\,B}\qquad\qquad \text{УКП}\ \dfrac{\Gamma\to A\,\&\,B}{\Gamma\to A\text{ и }\Gamma\to B}$$

$$\text{ВДЛ}\ \dfrac{A,\Gamma\to C\quad B,\Gamma\to C}{A\vee B,\Gamma\to C}\qquad\qquad \text{УДЛ}\ \dfrac{A\vee B,\Gamma\to C}{A,\Gamma\to C\text{ и }B,\Gamma\to C}$$

$$\text{ВОП}\ \dfrac{A,\Gamma\to}{\Gamma\to\neg A}\qquad\qquad \text{УОП}\ \dfrac{\Gamma\to\neg A}{A,\Gamma\to}$$

$$\text{В}\forall\text{П}\ \dfrac{\Gamma\to Aw}{\Gamma\to\forall xF_x^wA}\qquad\qquad \text{У}\forall\text{П}\ \dfrac{\Gamma\to\forall xF_x^wA}{\Gamma\to F_t^wA}$$

$$\text{В}\exists\text{Л}\ \dfrac{Aw,\Gamma\to C}{\exists xF_x^wAw,\Gamma\to C}\qquad\qquad \text{У}\exists\text{Л}\ \dfrac{\exists xF_x^wAw,\Gamma\to C}{F_t^wAw,\Gamma\to C}$$

На В∀П, В∃Л накладываются обычные ограничения. Структурные правила SNA те же, что и SLA.

Доказательство имеет вид дерева.

Т е о р е м а 1. SNA *эквивалентна* SLA.

Для доказательства достаточно показать, что в SLA производны правила удаления системы SNA и что в SNA производны правила введения SLA, отсутствующие в SNA.

Производность правил удаления в SLA:

$$\text{УИП}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to A \supset B} \qquad \dfrac{A \to A \quad B \to B}{A \supset B, A \to B}\,\text{ВИЛ}}{\dfrac{\Gamma, A \to B}{A, \Gamma \to B}\,\text{П}}\,\text{Сеч}$$

$$\text{УКП}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to A \,\&\, B} \qquad \dfrac{A \to A}{A \,\&\, B \to A}\,\text{ВКЛ}}{\Gamma \to A}\,\text{Сеч}$$

$$\text{УДЛ}\,\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to A \vee B}\,\text{ВДП} \qquad \dfrac{}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}}{A, \Gamma \to \Theta}\,\text{Сеч}$$

$$\text{УОП}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to \neg A} \qquad \dfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\,\text{ВОЛ}}{\dfrac{\Gamma, A \to}{A, \Gamma \to}\,\text{П}}\,\text{Сеч}$$

$$\text{У}\forall\text{П}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to \forall x A x} \qquad \dfrac{At \to At}{\forall x A x \to At}\,\text{В}\forall\text{П}}{\Gamma \to At}\,\text{Сеч}$$

$$\text{У}\exists\text{Л}\,\dfrac{\dfrac{At \to At}{At \to \exists x A x}\,\text{В}\exists\text{П} \qquad \dfrac{}{\exists x A x, \Gamma \to \Theta}}{At, \Gamma \to \Theta}\,\text{Сеч}$$

Производность правил введения в SNA:

$$\text{ВИЛ}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to A} \qquad \dfrac{A \supset B \to A \supset B}{A, A \supset B \to B}\,\text{УИП}}{\dfrac{A \supset B, \Gamma \to B \qquad B, \Delta \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta}\,\text{Сеч}}\,\text{Сеч}$$

$$\text{ВКЛ}\,\dfrac{\dfrac{A \,\&\, B \to A \,\&\, B}{A \,\&\, B \to A}\,\text{УКП} \qquad A, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}\,\text{Сеч}$$

$$\text{ВДП}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to A} \qquad \dfrac{A \vee B \to A \vee B}{A \to A \vee B}\,\text{УДЛ}}{\Gamma \to A \vee B}\,\text{Сеч}$$

$$\text{ВОЛ}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to A} \quad \dfrac{\neg A \to \neg A}{A, \neg A \to}\text{УОП}}{\neg A, \Gamma \to}\text{Сеч}$$

$$\text{В}\forall\text{Л}\,\dfrac{\dfrac{\forall x A x \to \forall x A x}{\forall x A x \to A t}\text{У}\forall\text{П} \quad \dfrac{}{A t, \Gamma \to \Theta}}{\forall x A x, \Gamma \to \Theta}\text{Сеч}$$

$$\text{В}\exists\text{П}\,\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to A t} \quad \dfrac{\exists x A x \to \exists x A x}{A t \to \exists x A x}\text{У}\exists\text{Л}}{\Gamma \to \exists x A x}\text{Сеч}$$

Перестроим SNA так, чтобы в новом исчислении было как можно меньше логических фигур заключения аа счет расширения запаса основных секвенций.

Пусть исчисление SNaA задается следующими фигурами заключения и основными секвенциями.

Основные секвенции:

$A \to A$	$A \,\&\, B \to B$	$A, \neg A \to$
$A, A \supset B \to B$	$A \to A \vee B$	$\forall x A x \to A t$
$A \,\&\, B \to A$	$B \to A \vee B$	$A t \to \exists x A x$

Логические фигуры заключения:

ВИП, ВКП, ВДЛ, ВОП, В$\forall$П, В$\exists$Л.

Структурные фигуры заключения:

ПЛ, СЛ, С.

Доказательство имеет вид дерева.

Теорема 2. SNaA *эквивалентна* SNA.

Каждая основная секвенция SNaA доказуема в SNA.

$$\dfrac{A \supset B \to A \supset B}{A, A \supset B \to B}\text{УИП}$$

Остальные основные секвенции доказываются аналогичным образом.

Таким образом, каждая секвенция, доказуемая в SNaA, доказуема в SNA.

Каждая из фигур удаления логического знака системы SNA производна в SNaA.

$$\dfrac{\Gamma \to A \supset B \quad A, A \supset B \to B}{A, \Gamma \to B}\text{Сеч}$$

Остальные правила удаления логических знаков доказываются аналогично. Таким образом, каждая секвенция, доказуемая в SNA, доказуема в SNaA. Теорема доказана.

Обратим внимание на симметрию для абсолютного исчисления: дополнительные основные секвенции соответствуют только логическим фигурам удаления. Для более богатых систем эта симметрия нарушается.

§ 4. АБСОЛЮТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ В ФОРМЕ НАТУРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Построим абсолютное исчисление предикатов в виде натурального исчисления, т. е. методом субординатного вывода. Вывод имеет вид не дерева формул (или секвенций), а леса формул.

Введем понятие *леса формул:*

1. Если A формула, то $<A>$ лес формул.

2. $< >$ есть лес формул.

3. Если α – лес формул и A – формула, то $<\alpha A>$ – лес формул.

4. Если α и β – леса формул и B – формула, то $<\alpha\beta B>$ – лес формул.

5. Если α – лес формул и B – формула, то $<[\alpha]\ B>$ – лес формул.

6. Если α и β – леса формул и B – формула, то $<[\alpha]\ [\beta]\ B>$ – леса формул.

Определим высоту леса.

Вместо $p(<\alpha>)$ для экономии скобок будем писать $p<\alpha>$:

$p< > = 0$

$p<A> = 1$

$p<\alpha B> = p<\alpha> + 1$

$p<\alpha\beta B> = \max(p<\alpha>, p<\beta>) + 1$

$p<[\alpha]\ B> = \omega \times p<\alpha> + 1$

$p<[\alpha]\ [\beta]\ B> = \max(\omega \times p<\alpha>, \omega \times p<\beta>) +1.$

Пример: $p<<<A> <A \supset B> B> <B \supset C> C> = 3$.

Обозначим этот вывод буквой U; тогда $p<[<[U]\ A \supset C>]\ (B \supset C) \supset (A \supset C)> = \omega(3\omega + 1) + 1 = 3\omega^2 + \omega + 1$.

Правила вывода:

$$\supset у\ \frac{A, A \supset B}{B} \qquad \&у_1\ \frac{A \& B}{A} \qquad \&у_2\ \frac{A \& B}{B} \qquad \vee в_1\ \frac{A}{A \vee B}$$

$$\vee в_2\ \frac{B}{A \vee B} \qquad \forall у\ \frac{\forall x Ax}{At} \qquad \exists в\ \frac{At}{\exists x Ax} \qquad \neg у\ \frac{A, \neg A}{f}$$

Будем говорить, что из A непосредственно выводимо B, если $\frac{A}{B}$ есть одно из правил вывода; аналогично для случая двух посылок. Заметим, что принятые правила вывода соответствуют дополнительным основным секвенциям SNaA. В случае отрицания мы можем поступить трояким образом: (1) ввести константу f и принять правило вывода $\dfrac{A, \neg A}{f}$;

(2) принять по определению $\neg A = A \supset f$, рассматривая f как некоторую формулу, тогда $A,\ \neg A \mid\!- f$ будет производным правилом; (3) сформулировать правило непрямого вывода, охватывающего как ВОП, так и УОП, например, в виде $\dfrac{A, \Gamma \to \neg B}{B, \Gamma \to \neg A}$. Мы в данном параграфе принимаем первый способ.

Правила непрямого вывода включаются в формулировку вывода.

Определим вывод для NA индукцией по построению вывода и списку посылок.

1. $<A>$ есть вывод из списка посылок A.

2. Если α есть вывод из списка посылок Γ, A последняя формула α и из A непосредственно выводима формула B, то $<\alpha B>$ есть вывод из списка посылок Γ.

3. Если α есть вывод из списка посылок Γ и A – его последняя формула, β есть вывод из списка посылок Δ и B – его последняя формула и если из A и B непосредственно выводима формула C, то $<\alpha\beta C>$ есть вывод из списка посылок Γ, Δ.

4. Если α есть вывод из списка посылок Δ, A, Γ, B – последняя формула α, то $<[\alpha]\ A \supset B>$ есть вывод из списка посылок Δ_A, Γ_A, где Δ_A и Γ_A есть результаты вычеркивания некоторых (возможно всех, а возможно и ни одного) вхождений формулы A в Δ и Γ.

5. Если α и β есть выводы из списка посылок Γ, A есть последняя формула α и B – последняя формула β, то

$$<[\alpha]\ [\beta]\ A \,\&\, B> \qquad \left[\frac{\boxed{\alpha}\quad \boxed{\beta}}{A \,\&\, B}\right]$$

есть вывод из списка посылок Γ.

6. Если α есть вывод из списка посылок A, Γ и β есть вывод из списка посылок B, Γ, формула C есть последняя формула α и последняя формула β, то

$$<<A \vee B>\ [\alpha]\ [\beta]\ C> \qquad \left[\frac{A \vee B \quad \boxed{\alpha}\quad \boxed{\beta}}{C}\right]$$

есть вывод из списка посылок $A \vee B$, Γ.

7. Если « есть вывод из списка посылок A, Γ, f – последняя формула α, то

$<[\alpha]\ \neg A>$ $\quad \left[\dfrac{\left|\boxed{\alpha}\right|}{\neg A}\right]$

есть вывод из списка посылок Γ_A.

8. Если α есть вывод из списка Γ, Aw есть последняя формула α и переменная w не входит ни в одну формулу списка Γ, то

$<[\alpha]\ \forall xAx>$ $\quad \left[\dfrac{\left|\boxed{\alpha}\right|}{\forall xAx}\right]$

есть вывод из списка посылок Γ.

9. Если α есть вывод из списка посылок Aw, Γ, C есть последняя формула α и w не входит в формулы Γ, C, то

$<<\exists xAx>\ [\alpha]\ C>$ $\quad \left[\dfrac{\exists xAx \quad \left|\boxed{\alpha}\right|}{C}\right]$

есть вывод из списка посылок $\exists xAx$, Γ.

При определении вывода в квадратных скобках давалась двумерная запись вывода.

Пример вывода.

В стандартной одномерной записи:

$<\exists x(Ax \vee Bx)\ [<<Aw \vee Bw>\ [<<<Aw>\ \exists xAx>\ \exists xAx \vee \exists xBx>]\ [<<<Bw>\ \exists xBx>\ \exists xAx \vee \exists xBx>]\ \exists xAx \vee \exists xBx>]\ \exists xAx \vee \exists xBx>$

В двумерной записи:

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x(Ax \vee Bx)} \quad \left|\dfrac{Aw \vee Bw \quad \left|\dfrac{\dfrac{Aw}{\exists xAx}}{\exists xAx \vee \exists xBx}\right| \quad \left|\dfrac{\dfrac{Bw}{\exists xBx}}{\exists xAx \vee \exists xBx}\right|}{\exists xAx \vee \exists xBx}\right|}{\exists xAx \vee \exists xBx}$$

Построенную систему обозначим NA. $\Gamma \vdash A$ означает: существует вывод формулы A из списка посылок Γ.

Теорема 1. *Если секвенция* $\Gamma \to A$ *доказуема в* SNaA, *то* $\Gamma \vdash A$ *в* NA.

Для доказательства теоремы достаточно, во-первых, показать, что в NA существуют выводы, соответствующие основным секвенциям, т. е. $A \vdash A$; $A \& B \vdash A$; $A \& B \vdash B$; $A, A \supset B \vdash B$; $A \vdash A \vee B$; $B \vdash A \vee B$; $A, \neg A \vdash f$; $\forall xAx \vdash At$ и $At \vdash \exists xAx$, и, во-вторых, что для NA верны теоремы, соответствующие структурным и логическим фигурам заключения SNaA. Построение перечисленных выше выводов тривиально. Для NA имеет место теорема дедукции: если A, $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma_A \vdash A \supset B$. Действительно, пусть α есть вывод формулы B из посылок A, Γ, тогда согласно п. 4 $<[\alpha]\ A \supset B>$ есть вывод формулы $A \supset B$ из посылок Γ_A, что и требовалось доказать. Аналогично обстоит дело и с остальными теоремами, соответствующими логическим фигурам заключения SNaA.

Относительно NA имеет место теорема, соответствующая структурной фигуре «сечение»:

$$\frac{\Gamma \vdash M \qquad \Delta, M, \Phi \vdash C}{\Delta, \Gamma, \Phi \vdash C}$$

Пусть α есть вывод формулы M из Γ, а β – вывод формулы C из Δ, M, Φ с фиксированной в β посылкой M. Заменив фиксированное вхождение $<M>$ в β на α, мы получим вывод формулы C из посылок Δ, Γ, Φ $\vdash C$. Более детальное доказательство «сечения» для NA легко осуществляется индукцией по построению вывода β.

Относительно NA имеет место теорема о перестановке посылок.

Пусть $\Gamma = A_1, \ldots, A_k$; тогда выражение $\Gamma \supset E$ есть сокращения для $A_1 \supset (A_2 \supset \ldots (A_k \supset \mathrm{E})\ldots)$:

$$\dfrac{\dfrac{C, \Delta \vdash D \supset (\Gamma \supset E) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, C, D, \Delta \vdash E}{C, D, \Delta \vdash \Gamma \to E}\text{ТД}}{D, D \supset (\Gamma \supset E) \vdash \Gamma \supset E}\text{ТД}}{\mathrm{D}, \mathrm{C}, \Delta \vdash \Gamma \supset E}\text{Сеч.} \qquad \Gamma, \Gamma \supset E \vdash E}{\Gamma, D, C, \Delta \vdash E}\text{Сеч.}$$

Для NA верна теорема о сокращении графически равных посылок:

$$\dfrac{\dfrac{C, C, \Gamma \vdash E}{C, \Gamma \vdash C \supset E}\text{ТД} \qquad \dfrac{}{C, C \supset E \vdash E}}{C, \Gamma \vdash E}\text{Сеч.}$$

Теперь не представляет труда доказать сформулированную выше теорему индукцией по высоте доказательства SNaA.

Базис. Если секвенция $\Gamma \to E$ является основной, то $\Gamma \to E$ в NA.

Индукционный шаг. Пусть данное доказательство высоты n+1 и его конец имеет вид $\dfrac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B}$; тогда по индуктивному допущению A, Γ

$\vdash B$ и по доказанной выше теореме дедукции получаем $\Gamma \vdash A \supset B$. Аналогичное доказательство проводится для остальных логических и структурных фигур заключения.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в* NA из Γ *выводима формула A, то секвенция* $\Gamma \to A$ *доказуема в* SNaA.

Теорему докажем возвратной индукцией по высоте вывода NA.

Базис. Высота вывода равна 1, т. е. вывод имеет вид <*A*>. Это вывод формулы *A* из посылки *A*. Этому выводу сопоставляем доказательство секвенции $A \to A$.

Индукционный шаг. Пусть теорема верна для выводов высоты $\le p$; надо доказать, что она верна и для вывода высоты $p + 1$.

Случай 1. Данный вывод имеет вид <αβ>, где *A* – последняя формула α. и из *A* непосредственно выводима формула *B,* α есть вывод из Γ. По индуктивному предположению в SNaA доказуема секвенция $\Gamma \to A$. Из *A* непосредственно выводима *B*, поэтому $A \to B$ – основная секвенция. Используя сечение, получаем доказательство с последней секвенцией $\Gamma \to B$.

Случай 2. Данный вывод имеет вид <αβ*C*>, где α – вывод из списка посылок Γ, β – вывод из списка посылок Δ, формулы *A* и $A \supset C$ соответственно являются последними формулами α и β. По индуктивному предположению можно построить доказательства секвенций $\Gamma \to A$ и $\Delta \to A \supset C$. Отсюда получаем результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \to A \supset C} \qquad \dfrac{\Gamma \to A \qquad A, A \supset C \to C}{A \supset C, \Gamma \to C}\,\text{Сеч.}}{\Delta, \Gamma \to C}\,\text{Сеч.}}{\Gamma, \Delta \to C}\,\Pi$$

Случай 3. Данный вывод имеет вид <[α] $A \supset B$>, где α вывод с последней формулой *B* из списка посылок Γ, *A,* Δ. По индуктивному допущению доказуема секвенция $\Gamma, A, \Delta \to B$.

Применив перестановку, получаем доказательство секвенции $\Gamma, A, \Delta \to B$, далее применяем сокращения, получая $A, \Gamma_A, \Delta_A \to B$, и, наконец, применив ВИЛ, имеем доказательство секвенции $\Gamma_A, \Delta_A \to A \supset B$. Остальные случаи (4 – 8) рассматриваются аналогично.

Таким образом SNaA эквивалентна NA.

§ 5. АБСОЛЮТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА

Построим абсолютное исчисление предикатов в форме логистического исчисления гильбертовского типа с понятием сильного вывода.

Схемы аксиом:

1. $A \supset A$
2. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)$
3. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C)$
4. $(A \supset (A \supset C)) \supset (A \supset C)$
5. $(C \supset A) \& (C \supset B) \supset (C \supset A \& B)$
6. $A \& B \supset A$
7. $A \& B \supset B$
8. $(A \supset C) \& (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$
9. $A \supset A \vee B$
10. $B \supset A \vee B$
11. $\forall xAx \supset At$
12. $At \supset \exists xAx$
13. $\forall x(C \supset Ax) \supset (\mathrm{C} \supset \forall xAx)$
14. $\forall x(Ax \supset C) \supset (\exists xAx \supset C)$

В 13 и 14 C не содержит x свободно.

Правила вывода:

$$\frac{A, A \supset B}{B}, \quad \frac{Aw}{\forall xAx}, \quad \frac{A, B}{A \& B}.$$

Первое правило есть modus ponens, второе – правило обобщения. Последнее правило назовем ВК, на его применение накладываются ограничения – оно применяется к формулам, не зависящим от посылок.

Дадим определение вывода для НА.

1. Если E – аксиома, то $<< > E>$ есть вывод из пустого списка посылок.

2. $<E>$ есть вывод из списка посылок E.

3. Если α есть вывод из списка посылок Γ, A – последняя формула α, β есть вывод из списка посылок Δ и $A \supset B$ – последняя формула β, то $<\alpha\beta B>$ есть вывод из списка посылок Γ, Δ.

4. Если α есть вывод из списка посылок Γ и Aw есть последняя формула α, то $<\alpha\forall xAx>$ есть вывод из списка посылок Γ.

5. Если α и β – выводы из пустых списков посылок, A и B – соответственно их последние формулы, то $<\alpha\beta A \& B>$ есть вывод из пустого списка посылок.

Построенную систему назовем НА.

Отрицание вводится определением

$\neg A =_{\mathrm{Df}} A \supset f$.

Если не вводить константу f, то необходимо добавить аксиому[5]:

10a. $(A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg A)$

Прежде чем сравнивать систему НА с абсолютными исчислениями предикатов в иных формах, докажем некоторые теоремы.

Переменную w в правиле обобщения будем называть собственной переменной. Будем говорить, что переменная w варьируется относительно посылки A, если формула A содержит w и в нити вывода, начинающейся с A, встречается применение правила обобщения с собственной переменной w.

Теорема 1. (Теорема дедукции). *По всякому выводу* α *из списка* посылок Γ, A, Δ *с последней формулой* B, *в котором ни одна переменная не варьируется относительно* A, *может быть построен вывод формулы* $A \supset B$ *из списка посылок* Γ_A, Δ_A.

Доказательство.

Теорему дедукции докажем индукцией по высоте данного вывода.

Базис. Высота вывода равна 1. Выводы высоты 1 с последней формулой B может иметь вид $<< > B>$ или $<B>$. Но первый вывод есть вывод из пустого списка посылок, а список Γ, A, Δ не пуст. Поэтому вывод может иметь только вид $<B>$ из списка Γ, A, Δ, где Γ и Δ пусты, а A графически равна B.

Но вывод формулы $B \supset B$ из пустого списка посылок легко построить; это будет $<< > B \supset B>$.

Индукционный шаг. Пусть высота вывода из списка посылок Γ, A, Δ равна $k + 1$. Возможны 2 случая: последняя формула может быть получена по modus ponens (1), по правилу обобщения (2) [6].

1 случай. Пусть высота вывода формулы B из посылок Γ, A, Δ равна $k + 1$ и ни одна переменная формулы A не варьируется в этом выводе. Пусть формула B получена из формул P и $P \supset B$, при этом высота выводов формул $P \supset B$ и P меньше или равна k.

---

[5] В нашей статье [35] вместо (10a) написано за № 11 $(A \supset B)\ \&\ (A \supset \neg B) \supset \neg A$, что является неверным. На эту неточность обратил наше внимание О. Ф. Серебрянников. Указание об исправлении помещено нами в РЖМ. Дело в том, что аксиома, приведенная в статье, соответствует ВОП, а (10a) как ВОП, так в УОП.

[6] Поскольку ВК применяется лишь тогда, когда посылки этого правила являются последними формулами выводов из пустых списков посылок, то невозможен вывод из непустого списка посылок, последним шагом которого было бы применение ВК. Поэтому добавление ВК, так же как добавление схем аксиом, не нарушает верность теоремы дедукции.

Возможны два подслучая:

(a) Посылками вывода формулы P будет список Γ_1, а посылками вывода формулы $P \supset B$ будет Γ_2, A, Δ, где $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$.

($в$) Посылками вывода формулы P будет список Γ, A, Δ_1, а посылками вывода формулы $P \supset B$ будет список Δ_2, где $\Delta = \Delta_1, \Delta_2$.

Подслучай (a). По индуктивному предположению может быть построен вывод α формулы $A \supset (P \supset B)$ из посылок Γ_{2A}, Δ_A.

В свою очередь Γ_1 может не содержать вхождений формулы A (или вхождения A в Γ_1 не учитываются) и содержать учитываемые вхождения формулы A в Γ_1.

В первом случае имеется вывод β формулы P из посылок Γ_1. Результирующий вывод будет иметь вид:

$<\beta<\alpha<<> (A \supset (P \supset B)) \supset (P \supset (A \supset B))> P \supset (A \supset B)> A \supset B>$.

Во втором случае по индуктивному допущению строим вывод формулы $A \supset P$ из посылок Γ_{1A} и затем результирующий из $\Gamma_{1A}, \Gamma_{2A}, \Delta_A$:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{1A} & \Gamma_{2A}, \Delta_A \\ & \vdots \\ & \dfrac{A \supset (P \supset B) (A \supset (P \supset B)) \supset (P \supset (A \supset B))}{P \supset (A \supset B)} \\ \vdots & \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \supset P} \qquad \dfrac{\dfrac{2 \qquad\qquad 3}{(P \supset (A \supset B)) \supset ((A \supset P) \supset (A \supset (A \supset B))}}{(A \supset P) \supset (A \supset (A \supset B))}}{A \supset (A \supset B)} \qquad \dfrac{}{(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)}}{A \supset B}$$

Или в стандартной записи

$<<\beta<<\alpha<< > 3> P \supset (A \supset B)> <<< > 2> << > 3> (P \supset (A \supset B)) \supset ((A \supset P) \supset (A \supset (A \supset B)))> (A \supset P) \supset (A \supset (A \supset B))> A \supset (A \supset B)> << > 4> A \supset B>$.

Подслучай ($в$). По индуктивному допущению может быть построен вывод α формулы $A \supset P$ из посылок Γ_A, Δ_{1A}. Из посылок Δ_2 может быть построен вывод β формулы $P \supset B$, если вхождение A в Δ_2 не учитывается. В этом случае, используя аксиомы 2 и 3, можно построить вывод γ формулы $(\mathrm{P} \supset \mathrm{B}) \supset ((\mathrm{A} \supset \mathrm{P}) \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{B}))$ из пустого списка посылок. И, наконец, искомый результирующий вывод:

$<\alpha<\beta\gamma\ (A \supset P) \supset (A \supset B)> A \supset B>$
из посылок Γ_A, Δ_A.

Допустим, что Δ_2 содержит формулу A. Тогда по индуктивному допущению из посылок Δ_2 выводима формула $A \supset (P \supset B)$. Затем строим результирующий вывод

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_A\ \Delta_{1A}\\ \vdots \\ \vdots\end{matrix}}{A \supset P} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Delta_{2A} \\ \vdots \\ A \supset (P \supset B)\end{matrix} \quad A \supset (P \supset B)) \supset ((A \supset P) \supset (A \supset B))}{(A \supset P) \supset (A \supset B)}}{A \supset B}$$

Правая верхняя формула доказуема в НА.

2 случай. Формула B имеет вид $\forall xBx$ и получена из формулы Bw с помощью правила обобщения. Допустим, что ни одна переменная не варьируется относительно посылки A. Поскольку используется понятие сильного вывода, то последняя формула зависит от каждой посылки, и поэтому посылка A не содержит переменной w. По индуктивному допущению может быть построен вывод α из посылок Γ, Δ формулы $A \supset Bw$, причем A не содержит w.

Используя аксиому 13, строим искомый вывод

$<\alpha\ \forall x(A \supset Bx)> << > \forall x(A \supset Bx) \supset (A \supset \forall xBx)> A \supset \forall xBx>$

В соответствии с принципом возвратной индукции теорема 1 доказана.

Следствие. Если в НА существует вывод формулы B из посылок Γ, A, Δ и ни одна переменная не варьируется относительно какой-либо посылки, то в НА существует вывод формулы $A \supset B$ из посылок Γ_A, Δ_A, причем в последнем выводе ни одна переменная не варьируется.

Теорема 2. *Если в* НА $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$, *и ни одна переменная не варьируется относительно посылок* Γ, то $\Gamma \vdash A \,\&\, B$, *т. е. относительно* НА *имеет место производное правило*:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

Эту теорему докажем индукцией по числу элементов Γ.

Базис. Γ пусто. В таком случае вывод формулы A есть вывод высоты m из пустого списка посылок и вывод формулы В высоты n также из пустого списка посылок. Как A, так и B не зависят от посылок. Применив ВК, получим вывод формулы $A \,\&\, B$ из пустого списка посылок.

Индукционный шаг. Пусть теорема доказана для посылок числом n, надо доказать, что она верна и для посылок числом $n + 1$, т. е. при допущении, что имеет место

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \,\&\, B},$$

надо доказать

$$\frac{\Delta, C \vdash A \quad \Delta, C \vdash B}{\Delta, C \vdash A \,\&\, B}.$$

Пусть Δ, $C \vdash A$ и Δ, $C \vdash B$. По теореме дедукции получаем $\Delta \vdash C \supset A$ и $\Delta \vdash C \supset B$. По индуктивному предположению $\Delta \vdash (C \supset A) \,\&\, (C \supset B)$. Но $\vdash (C \supset A) \,\&\, (C \supset B) \supset (C \supset A \,\&\, B)$. Отсюда $\Delta \vdash C \supset A \,\&\, B$ и Δ, $C \vdash A \,\&\, B$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если в* НА *A, $\Gamma \vdash C$ и B, $\Gamma \vdash C$ и на одна переменная не варьируется относительно посылок A и B, то* в НА $A \vee B$, $\Gamma \vdash C$; если в НА A, $\Gamma \vdash f$ *и ни одна переменная не варьируется относительно посылки A,* то $\Gamma \vdash \neg A$; *если* в НА *Aw, $\Gamma \vdash C$ и C не содержит w, то $\exists xAx$,* $\Gamma \vdash C$.

Доказательство:

$$\text{ВДЛ}\ \frac{A, \Gamma \vdash C \quad B, \Gamma \vdash C}{A \vee B, \Gamma \vdash C}$$

1. $A, \Gamma \vdash C$	допущение
2. $\Gamma \vdash A \supset C$	Т.Д.; 1
3. $B, \Gamma \vdash C$	допущение
4. $\Gamma \vdash B \supset C$	Т.Д.; 3
5. $\Gamma \vdash (A \supset C) \,\&\, (B \supset C)$	(II); 2, 4
6. $\vdash (A \supset C) \,\&\, (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$	аксиома 8
7. $\Gamma \vdash A \vee B \supset C$	
8. $A \vee B, \Gamma \vdash C$	

$$\text{ВОП}\ \frac{A, \Gamma \vdash f}{\Gamma_A \vdash \neg A}$$

1. $A, \Gamma \vdash f$	
2. $\Gamma \vdash A \supset f$	Т.Д.; 1
3. $\Gamma \vdash \neg A$	Опр. 1

$$\text{В}\exists\text{Л}\ \frac{Aw, \Gamma \vdash C}{\exists xAx, \Gamma \vdash C}$$

1. $Aw, \Gamma \vdash C$	
2. $\Gamma \vdash Aw \supset C$	Т.Д.; 1
3. $\Gamma \vdash \forall x(Ax \supset C)$	В$\forall$П; 2
4. $\vdash \forall x(Ax \supset C) \supset (\exists xAx \supset C)$	аксиома 14
5. $\Gamma \vdash \exists xAx \supset C$	m.p.; 3, 4
6. $\exists xAx, \Gamma \vdash \mathrm{C}$	Отд; 5

Следствие. Теорема 3 пройдет, если мы потребуем, чтобы ни одна переменная не варьировалась относительно каждой посылки, а для В∃Л, чтобы w не содержалась в формулах Γ, C. При этих условиях ни одна переменная результирующего вывода не будет варьироваться.

Теорема 4. *Если* Γ |– B в NA, *то* Γ |– B в НА.

Теорему доказываем индукцией по построению вывода в NA.

Для высоты, равной 1, вывод в NA является выводом в НА.

Индукционные случаи, соответствующие прямым правилам вывода NA, доказываются тривиально; например, пусть $\alpha = <\beta\ A\ \&\ B>$; тогда выводу $<<\beta\ A\ \&\ B>\ A>$ в NA сопоставляем вывод $<<\beta'\ A\ \&\ B> << > A\ \&\ B \supset A> A>$, где $<\beta'\ A\ \&\ B>$ вывод, сопоставленный $<\beta\ A\ \&\ B>$ по индуктивному допущению.

Индукционные случаи, соответствующие косвенным правилам вывода (пункты 4 – 9 определения вывода в NA), доказаны в теоремах 1 – 3 и их следствиях. Таким образом, теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Если* Γ |– *B в* НА в *ни одна переменная не варьируется, то* Γ |– *B в* NA.

Доказательство проводим индукцией по высоте вывода НА.

Каждая аксиома выводима из пустого списка посылок. Доказательства в NA будем записывать в виде субординатного вывода по Яськовскому – Куайну:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} \vert\ 1.\ A \\ 2.\ A \supset A \end{array}$$

$$(2)\qquad \begin{array}{l} \vert\ \vert\ \vert\ 1.\ A \\ \vert\ \vert\ \vert\ 2.\ A \supset B \\ \vert\ \vert\ \vert\ 3.\ B \\ \vert\ \vert\ \vert\ 4.\ B \supset C \\ \vert\ \vert\ \vert\ 5.\ C \\ \vert\ \vert\ 6.\ A \supset C \\ \vert\ 7.\ (B \supset C) \supset (A \supset C) \\ 8.\ (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)) \end{array}$$

Аналогично для аксиом (3) – (12).

1. $\forall x(C \supset Ax)$
2. $C \supset Aw$
3. C
4. Aw
5. $\forall xAx$
6. $C \supset \forall xAx$
7. $\forall x(C \supset Ax) \supset (C \supset \forall xAx)$

1. $\forall x(Ax \supset C)$
2. $Aw \supset C$
3. Aw
4. C
5. $\exists xAx$
6. C
7. $\exists xAx \supset C$
8. $\forall x(Ax \supset C) \supset (\exists xAx \supset C)$

Вывод вида $<A>$ из посылок A системы НА есть вывод из тех же посылок в системе NA.

Легко видеть, что если выводу α с последней формулой A и выводу β с последней формулой $A \supset B$ сопоставлены соответственно выводы α' и β' системы NA, то выводу $<\alpha\beta\ B>$ сопоставляется вывод $<\alpha'\beta'\ B>$. Аналогично для правила обобщения и ВК.

Теорема доказана.

Таким образом системы SLA, SNA, SNaA, NA и НА эквивалентны, если в НА рассматривать только выводы без варьирования.

§ 6. ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЧАСТИ SLA, СИСТЕМА SLA$^+$

Встает вопрос о разрешимости проблемы разрешения для пропозициональной части SLA. Метод Генцена с использованием редукционных формул не проходит, так как средствами этого исчисления нельзя доказать эквивалентность относительно доказуемости некоторой формулы ее редукции (в силу отсутствия правил типа $\dfrac{C, \Gamma \to \Theta}{C, C, \Gamma \to \Theta,}$). Не видно, как можно элиминировать сокращения из доказательств без сечений.

Вопрос о существовании разрешающей процедуры для пропозициональной части SLA остается открытым.

Если мы добавим к SLA правило размножения $\dfrac{C, \Gamma \to \Theta}{C, C, \Gamma \to \Theta,}$ РЛ, являющееся обращением сокращения, то если бы удалось элиминировать сечение, мы имели бы исчисление с разрешимой пропозициональной частью. Но все дело в том, что теорему об устранимости сечений не удается доказать методом § 1 для SLA, дополненной РЛ.

При доказательстве методом § 1 надо добавить случай С1.7. Ф есть РЛ.

Но в этом случае основная лемма не проходит. Пусть Σ и Г не содержат *M*. Данное доказательство имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \models M} \qquad \dfrac{M, \Sigma \to \Theta}{M, M, \Sigma \to \Theta}\,\text{РЛ}}{M, \Gamma, \Sigma \to \Theta}\,\text{ОС}$$

Мы рассматриваем случай, когда ОС применяется в своем частном случае (эквивалентном применению сечения).

Используя общий метод, мы получаем $\dfrac{\Gamma \models M \qquad M, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Theta}$.

Но как получить $M, \Gamma, \Sigma \to \Theta$?

Фигуру $\dfrac{\Gamma \to A \qquad \Delta \to A}{\Gamma, \Delta \to A}$ назовем объединением (ОЛ). Пусть SLA^+ есть SLA с дополнительной фигурой ОЛ.

Относительно SLA^+ имеет место теорема об устранимости сечений. Для доказательства теоремы в доказательство основной леммы § 1 надо добавить следующие случаи С1.7 и С2.4.

С1.7. Ф есть ОЛ.

Данное доказательство имеет вид:

С1.7.1 С1.7.2

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to M} \qquad \dfrac{\Delta, M \to \Theta \qquad \Sigma \to \Theta}{\Delta, M, \Sigma \to \Theta}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta} \quad \text{или} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \to M} \qquad \dfrac{\Delta \to \Theta \qquad M, \Sigma \to \Theta}{\Delta, M, \Sigma \to \Theta}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}$$

В первом случае формула *M* обязательно входит в антецедент левой секвенции ОЛ, во втором случае – в антецедент правой секвенции ОЛ.

Рассмотрим С1.7.1. Этот случай разбиваем на два подслучая: M не входит в Σ и M входит в Σ.

С1.7.1.1. M не входит в Σ.

Строим результирующее доказательство

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad \Delta, M \to \Theta}{\Delta_M, \Gamma \to \Theta}\text{ОС, ИД} \qquad \dfrac{}{\Sigma \to \Theta}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma \to \Theta}$$

С1.7.1.2. M входит в Σ.

Если в данном доказательстве ни одно вхождение M не вычеркивается из Σ, то результирующее доказательство строим так же, как в С1.7.1.1. Если в данном доказательстве вычеркивается по крайней мере одно вхождение M в Σ, то результирующее доказательство имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad \Delta, M \to \Theta}{\Delta_M, \Gamma \to \Theta}\text{ОС, ИД} \qquad \dfrac{\Gamma \to M \quad \Sigma \to \Theta}{\Sigma'_M, \Gamma \to \Theta}\text{ОС, ИД}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma'_M, \Gamma \to \Theta}\text{ОЛ}}{\Delta_M, \Gamma, \Sigma'_M \to \Theta}\text{ПЛ, СЛ}$$

Σ′ есть результат вычеркивания одного вхождения в Σ (именно того, которое обязательно вычеркивается в Σ в данном доказательстве).

С 1.7.2 разбивается аналогично случаю С1.7.1 на два подслучая:

С1.7.2.1. M не входит в Δ.

Результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad M, \Sigma \to \Theta}{\Sigma_M, \Gamma \to \Theta} \qquad \dfrac{}{\Delta_M \to \Theta}}{\Delta, \Sigma_M, \Gamma \to \Theta}}{\Delta, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta}$$

С1.7.2.2. M входит в Δ. Рассуждаем аналогично случаю С1.7.1.2. С2.4. Ф есть ОЛ.

Данное доказательство имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad \Delta \to M}{\Gamma, \Delta \to M} \qquad \dfrac{}{\Sigma, M, \Phi \to \Theta}}{\Gamma, \Delta, \Sigma_M, \Phi_M \to \Theta}$$

Легко построить результирующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to M \quad \Sigma, M, \Phi \to \Theta}{\Sigma_M, \Gamma, \Phi_M \to \Theta} \qquad \dfrac{\Delta \to M \quad \Sigma, M, \Phi \to \Theta}{\Sigma_M, \Delta, \Phi_M \to \Theta}}{\Sigma_M, \Gamma, \Phi_M, \Sigma_M, \Delta, \Phi_M \to \Theta}\text{ОЛ}}{\Gamma, \Delta, \Phi_M \to \Theta}\text{ПЛ, СЛ}$$

Таким образом, относительно SLA^{+} имеет место теорема об устранимости сечений.

Доказательства без сечений в SLA^+ обладают свойством подформульности.

В SLA^+ допустимо правило размножения. Действительно,

$$\dfrac{\dfrac{C \to C \quad C \to C}{C, C \to C}\,\text{ОЛ} \qquad \dfrac{}{C, \Gamma \to \Theta}}{C, C, \Gamma \to \Theta}$$

Относительно SLA^+ имеет место лемма о доказательстве с редуцированными секвенциями. Поэтому мы можем применить генценовский метод установления разрешимости проблемы разрешения для пропозициональной части SLA^+.

Глава седьмая

ε-ИСЧИСЛЕНИЯ И СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНОГО ВЫВОДА ВТОРОГО ТИПА

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше было отмечено, что возможны две классификации правил введения и удаления логических символов слева и справа. При второй классификации к первой группе относятся правила введения логических знаков справа, ко второй – правила удаления логических знаков справа; к третьей и четвертой – соответственно правила введения и удаления логических знаков слева.

Правила группы 1 и 2 совместно со структурными правилами образуют – как было отмечаю выше – секвенциальные натуральные исчисления второго типа. Однако при таком подходе должно быть сформулировано правило удаления квантора существования слева.

При построении несеквенциального натурального исчисления второго типа должны быть прямые правила удаления для каждого логического знака, в том числе для квантора существования. Но как его формулировать?

Правила $\forall_{\text{у}}\dfrac{\forall xAx}{At}$ и $\exists_{\text{в}}\dfrac{At}{\exists xAx}$ в классической логике воспроизводят отношение логического следования. Правило $\forall_{\text{в}}\dfrac{Aw}{\forall xAx}$ не воспроизводит отношения логического следования, но гарантирует при общезначимости Aw в данной области, общезначимость в этой области и формулы $\forall xAx$.

Если правило удаления квантора существования сформулировать в виде $\dfrac{\exists xAx}{At}$, то это правило не только не воспроизводит отношения логического следования или отношения следования, но и не гарантирует при универсальной общезначимости посылки универсальную общезначимость заключения.

При каких же условиях применение правила $\dfrac{\exists xAx}{At}$ в выводах приводит к тому, что вывод в целом воспроизводит отношение логического следования? Выяснению этого и посвящена вся глава. Сначала будет изложена теория неопределенных дескрипций и построено исчисление предикатов с кванторами и неопределенными дескрипциями. Нашим целям удовлетворяет теория неопределенных дескрипций Д. Гильберта

– так называемое ε-исчисление. Расширив язык ε-выражениями, сначала построим классические исчисления в виде исчислений гильбертовского типа и секвенциальных и несеквенциальных натуральных исчислений второго типа. Затем будет построено интуиционистское натуральное (секвенциальное и несеквенциальное) исчисление второго типа.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ДЕСКРИПЦИИ

Под неопределенными дескрипциями или неопределенными описаниями имеются в виду выражения вида «такой объект, который удовлетворяет такому-то условию».

К определенным и неопределенным дескрипциям близок оператор наименьшего числа.

Дескрипции – как определенные, так и неопределенные – интенсивно изучались и изучаются в логике. Фундаментальное значение имеют работы В. Рассела и Д. Гильберта.

В английском, немецком и некоторых других языках использование неопределенных дескрипций связано с употреблением неопределенного артикля (например, «Socrat is a person»), а определенных дескрипций – определенного артикля (например, «Socrat is the philosopher who have drank a poison»). Поэтому иногда теорию дескрипций называют теорией неопределенного (определенного) артикля.

Теория неопределенных и определенных дескрипций явилась хорошим орудием обсуждения и решения ряда старых философских проблем. Прежде всего таких, как проблема единичных отрицательных утверждений существования, высказываний с пустыми именами и ряда других.

Но теория дескрипций представляет значительный интерес и как орудие анализа логического рассуждения.

Имеются некоторые различия в теориях дескрипций, восходящих к Б. Расселу, с одной стороны, и Д. Гильберту – с другой.

Определенные дескрипций вводятся в исчислении предикатов, содержащем в качестве примитивного знак равенства, с аксиомами и правилами вывода, регулирующими его употребление.

Обратимся сначала к расселовской теории определенных дескрипций. Б. Рассел развивает теорию определенных дескрипций для преодоления трудностей в трактовке единичных высказываний существования, высказываний с мнимыми (пустыми) именами.

Согласно Б. Расселу, дескрипций не имеют значения вне контекста, они являются неполными символами. Их невозможно определить непосредственно, но можно определить все контексты, в которые они входят, а тем самым можно заменить все высказывания (или функции-высказывания), содержащие дескрипций на им эквивалентные высказывания (функции-высказывания), в которые они не входят.

В элементарной формуле дескрипция может стоять на одном из аргументных мест. Тогда эту элементарную формулу с входящей в нее дескрипцией можно определить следующим образом[1]:

$B(\iota x A(x)) =_{\mathrm{Df}} \exists! x A(x) \;\&\; \forall x(A(x) \supset B(x))$.

В элементарную формулу могут входить несколько дескрипций. Устраняя дескрипции из элементарной формулы в любой последовательности, мы приходим к эквивалентным результатам. Пусть в формулу B входят две дескрипции $\iota x A(x)$ и $\iota y Д(y)$. Устраняя сначала первую, а затем вторую, получим:

(1) $\exists t(\forall x(A(x) \sim x = t) \;\&\; \exists p(\forall y(Д(y) \sim y = p) \;\&\; \mathrm{B}(t,p)))$.

Устраняя сначала $\iota y Д(y)$, затем $\iota x A(x)$, будем иметь:

(2) $\exists p(\forall y(Д(y) \sim y = p) \;\&\; \exists t(\forall x(A(x) \sim x = t) \;\&\; B(t, p)))$,

но (1) эквивалентна (2) и обе эквивалентны (3)

(3) $\exists t \exists p(\forall x(A(x) \sim x = t) \;\&\; \forall \mathrm{y}(Д(y) \sim y = p) \;\&\; B(t, p)))$.

Правило устранения одной дескрипций из элементарной формулы и независимость результата от порядка устранения дескрипций позволяют обосновать правило одновременной элиминации дескрипций из элементарной формулы:

$B(\iota x A_1(x), ..., \iota x A_{\mathrm{k}}(x)) =_{\mathrm{Df}} \exists! x A_1(x) \;\&\; ... \;\&\; \exists! x A_{\mathrm{k}}(x) \;\&\; \forall y_1 \ldots \forall y_{\mathrm{k}}(A_1(y_1) \;\&\; \ldots A_{\mathrm{k}}(y_{\mathrm{k}}) \supset B(y_1, ..., y_{\mathrm{k}}))$,

где y_1, ..., y_{k} – переменные, отличные от переменных, входящих в $B(\iota x A_1(x), ..., \iota x A_{\mathrm{k}}(x))$.

Но мы еще не дали определения всех контекстов, в которые может входить дескрипция. Если элементарная формула, на аргументном месте которой стоит дескрипция, сама является составной частью другой формулы, то такое вхождение дескрипций Рассел и Уайтхед называют вторичным. При вторичном вхождении дескрипций открываются две возможности определения контекстов, в которые они входят. Пусть «$A(x)$» – сокращение для «x – нынешний король Франции» и «$B(x)$» –

[1] Рассел и Уайтхед дают несколько иное определение: $B(\iota x A(x)) =_{\mathrm{Df}} \exists t(\forall x(A(x) \sim x = t) \;\&\; B(t))$. Их определение мы записали в более привычной символике, а не в символике PM. Легко видеть. что оба определения – в тексте и сноске – эквивалентны. «$\exists! x A(x)$» читается «существует и при том только один x, такой что $A(x)$». «$\exists! x A(x)$» введем следующим определением: $\exists! x A(x) =_{\mathrm{Df}} \exists x A(x) \;\&\; \forall x \forall y(A(x) \;\&\; A(y) \;\supset x = y)$. Определяющее выражение эквивалентно $\exists x(A(x) \;\&\; \forall y(A(y) \supset x = y))$, мы будем свободно пользоваться разными способами представления $\exists! x A(x)$.

для «x лыс». Как трактовать, например, высказывание «нынешний король Франции не лыс»?

Это высказывание можно трактовать двумя различными способами: как «существует и при том только один нынешний король Франции, но он не лыс», но также и как «неверно, что существует и при том только один нынешний король Франции, и что он лыс». Первому истолкованию будет соответствовать символическая запись $\exists!xA(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset \supset \neg B(x))$, второму – $\neg\exists!xA(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset B(x))$.

У Гильберта и Бернайса [46][2] необходимым условием правильной построенности формулы, содержащей дескрипцию, является доказуемость существования единственного объекта, удовлетворяющего этой дескрипций. Если это условие не выполнено, то формула просто не является правильно построенной. Рассел не принимает этого предварительного условия. Более того, могут иметься истинные предложения, даже если не выполняются условия существования или единственности объекта, выполняющего дескрипцию.

Чтобы ликвидировать неопределенность в трактовке вторичных вхождений дескрипций, необходимо каким-то образом указать область действия дескрипций.

Мы будем различать «область действия оператора дескрипции» и «область действия дескрипции». В первом случае областью действия оператора «ι» вместе с приписанной ему переменной будет вся формула, которая стоит справа от выражения «ιx», так областью действия «ιx» в выражении «ιxA» будет формула A. Во втором случае оператором, действующим на свою область, будет не оператор дескрипции, а дескрипция, взятая в квадратные скобки. Область действия дескрипции указывается круглыми скобками. Так, при первой интерпретации рассматриваемого примера будем писать $[\iota xA(x)](\neg \mathrm{B}(\iota xA(x)))$, а при второй $\neg([\iota xA(x)](\mathrm{B}(\iota xA(x))))$. Или, придерживаясь соглашения об экономии скобок (ассоциация вправо), соответственно $[\iota xA(x)]\neg \mathrm{B}(\iota xA(x))$ и $\neg[\iota xA(x)]\mathrm{B}(\iota xA(x))$.

Принимая во внимание, что дескрипция может входить в некоторый контекст на аргументном месте только вместе с вхождением в квадратные скобки, указывающие ее область действия, можно дать контекстуальное определение для всех вхождений дескрипций (а не только в элементарные формулы):

$[\iota xA(x)]B(\iota xA(x)) =_{\mathrm{Df}} \exists!xA(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset B(x))$.

Если область действия определенной дескрипций распространяется на всю формулу, то эта формула может быть истинной только тогда,

[2] Также у Клини [19].

когда определенная дескрипция удовлетворяет условию единственности и существования. Если же определенная дескрипция действует на часть формулы, то эта формула может оказаться истинной, даже если и не существует единственного объекта, удовлетворяющего дескрипцию.

В расселовской теории определенных дескрипций по любой формуле со свободной переменной w можно образовать дескрипцию. Но в этом случае с определенными дескрипциями нельзя обращаться так же как с собственными именами. В частности не будет верным $\forall x B(x) \supset$ $\supset [\iota x A(x)] B(\iota x A(x))$, так как не доказуема формула $\forall x B(x) \supset \exists ! x A(x)$ & & $\forall x (A(x) \supset B(x))$.

Также не будет верным: $[\iota x A(x)](\iota x A(x) = \iota x A(x))$, но будет верным $\exists ! x A(x) \supset (\forall x B(x) \supset [\iota x A(x)] B(\iota x A(x)))$ и $\exists ! x A(x) \supset [\iota x A(x)](\iota x A(x) =$ $= \iota x A(x))$.

Из сформулированного выше замечания об одновременной элиминации дескрипций из элементарной формулы можно извлечь доказательство перестановочности указателей области действия дескрипций (под указателями будем иметь в виду дескрипции вместе с квадратными скобками):

$[\iota x A(x)]\ [\iota x B(x)]\ C \equiv [\iota x B(x)]\ [\iota x A(x)]\ C$.

Логика определенных дескрипций, сформулированная Б. Расселом, подробно развита в книге Уайтхеда и Рассела «Principia mathematica».

Д. Гильберт разрешает пользоваться определенной дескрипцией $\iota x A(x)$ только если доказано $\forall y_1 \ldots \forall y_k \exists ! x (A(x, y_1, \ldots, y_k))$.

В этом случае с определенной дескрипцией можно обращаться так же, как с собственными именами (или с собственными именами с параметрами).

Гильбертом и Бернайсом доказана элиминируемость определенных дескрипций (см. Клини «Введение в метаматематику», § 74). Теория определенных дескрипций Д. Гильберта более изящна с логической точки зрения, тогда как теория Б. Рассела устанавливает более прозрачные связи с семантико-философской проблематикой, в частности, с проблемами единичных отрицательных высказываний существования, пустых имен и т. д.

Для наших целей – более прозрачной формулировки теории квантификации – нужна теория неопределенных дескрипций.

Рассел наряду с определенными дескрипциями анализирует и неопределенные дескрипции, однако логика неопределенных дескрипций не разработана им столь же тщательно и подробно, как логика определенных дескрипций.

Расселовская теория неопределенных дескрипций может быть сформулирована по аналогии с теорией определенных дескрипций.

В предложении «Петр видел Семена» выражения «Петр» и «Семен» естественно рассматривать как собственные имена и само предложение как имеющее структуру $R(x, y)$. Можно ли считать, что предложение «Семен видел верблюда» имеет точно такую же логическую структуру $R(x, y)$ и термины «Семен» и «верблюд» это собственные имена? При положительном ответе «верблюд» будет именем не индивида, а класса, собственным именем «верблюда вообще». Но, говоря, что Семен видел верблюда, имеют в виду, что он видел одного из представителей классов верблюдов, по крайней мере одного из членов класса верблюдов, но не сам класс. Поэтому естественно изменить анализ предложения «Семен видел верблюда», рассматривая это предложение как «Семен видел такой объект, который является верблюдом», или, что то же, «существует такой объект x, что Семен видел x и x есть верблюд».

Такая трактовка подобного рода высказываний была предложена Б. Расселом. Если дескрипцию «такой объект, который обладает свойством A» выразить посредством $\mathbf{z}xA\ (x)$, то утверждение $B(\mathbf{z}xA(x))$ трактуется как $\exists x(A(x)\ \&\ B(x))$.

Как и в случае с определенными дескрипциями, нет возможности в рамках исчисления предикатов в стандартной форме (т. е. имеющего в качестве основных операторов кванторы общности и существования) дать явное определение неопределенной дескрипции.

Однако имеется возможность определить все контексты, в которых может встречаться дескрипция.

Если «B» есть элементарный предикат, $A(w)$ есть формула со свободной переменной w, то легко дать контекстуальное определение выражения, образованного элементарным предикатом и неопределенной дескрипцией. В этом случае выражение $B(\mathbf{z}xA(x))$ можно рассматривать как сокращение $\exists x(A(x)\ \&\ B(x))$, т. е. $B(\mathbf{z}xA(x)) =_{\mathrm{Df}} \exists x(A(x)\ \&\ B(x))$

Однако указанное определение не есть определение для всех возможных контекстов. Дескрипции могут стоять на аргументных местах сложных формул, а указанное выше определение таких случаев не предусматривает.

Пусть имеется сложная формула $\neg B(\mathbf{z}xA(x))$. Каким образом ее трактовать? Или как $\neg\exists x(A(x)\ \&\ B(x))$, или как $\exists x(A(x)\ \&\ \neg B(x))$

Как и в случае с определенной дескрипцией, необходимо учесть область действия неопределенной дескрипции.

В общем случае контекстуальное определение будет иметь вид:

$[\mathbf{z}xA(x)]B(\mathbf{z}xA(x)) =_{\mathrm{Df}} \exists x(A(x)\ \&\ B(x))$.

Выражение с неопределенными дескрипциями оказывается эквивалентным выражению с так называемыми ограниченными кванторами.

Выражения с ограниченными кванторами вводятся следующими контекстуальными определениями

$\exists x_A Bx =_{\text{Df}} \exists x(A \;\&\; Bx)$

$\forall x_A Bx =_{\text{Df}} \forall x(A \supset Bx)$

Отсюда ясно, что $[\mathbf{z}xA(x)]B(\mathbf{z}xA(x))$ и $\exists x_{A(x)}B(x)$ – лишь два различных способа выражения одного и того же утверждения.

Из определения неопределенной дескрипции следует, что $\neg[\mathbf{z}xA(x)]\neg B(\mathbf{z}xA(x))$ эквивалентна $\neg\exists x(A(x) \;\&\; \neg B(x))$, и в классической логике эквивалентна $\forall x(A(x) \supset B(x))$, т. е. $\forall x_{A(x)}B(x)$.

Таким образом, *теория неопределенных дескрипций с указанием области действия дескрипции является иной формулировкой теории ограниченных кванторов.*

Теория ограниченных кванторов хорошо разработана (см., например, Бурбаки [2]). Ограниченные кванторы в указанной выше форме часто употребляются в логической и математической литературе.

Из введенных определений нетрудно убедиться в верности (в классической логике) следующих соотношений:

$\neg\forall x_{A(x)}B(x) \equiv \exists x_{A(x)}\neg B(x)$

$\neg\exists x_{A(x)}B(x) \equiv \forall x_{A(x)}\neg B(x)$.

Эти правила соответствуют правилам замены кванторов (неограниченных) общности на квантор существования и наоборот:

$\neg\forall xA(x) \equiv \exists x\neg A(x)$ и $\neg\exists xA(x) \equiv \forall x\neg A(x)$.

Отметим также, что

$\exists x_{A(x)}B(x) \equiv \exists x_{B(x)}A(x)$

$\forall x_{A(x)}B(x) \equiv \forall x_{\neg B(x)}\neg A(x)$

Для неопределенных дескрипций в смысле Рассела имеют место следующие правила введения и удаления:

$$\mathrm{Z}_{\text{в}}\ \frac{\forall xB(x), \exists xA(x)}{[zxA(x)]B(zxA(x))} \qquad \mathrm{Z}_{\text{у}}\ \frac{[zxA(x)]B(zxA(x))}{\exists xA(x)}$$

$$\exists_{\text{у}}\ \frac{\exists xA(x)}{[zxA(x)]A(zxA(x))}\ .$$

Действительно,

$\forall xB(x), \exists xA(x) \mid\!- \exists x(A(x) \;\&\; B(x))$

$\exists x(A(x) \;\&\; B(x)) \mid\!- \exists xA(x)$

$\exists xA(x) \mid\!- \exists x(A(x) \;\&\; A(x))$.

Однако неверно, что

$\forall xB(x) \mid\!- [\mathbf{z}xA(x)]B(\mathbf{z}xA(x))$

и

$\exists xB(x) \mid\!- [\mathbf{z}xA(x)]B(\mathbf{z}xA(x))$.

В классической, но не интуиционистской, логике имеет место правило

$$\mathrm{Z}_{\text{в}}^{\text{к}}\ \frac{\forall xB(x)}{\neg[zxA(x)]\neg B(zxA(x))}\ .$$

Возникает вопрос, нельзя ли использовать расселовскую теорию неопределенных дескрипций для формулировки правил введения и удаления кванторов в теории натурального вывода. Если отождествить неопределенные дескрипций с термами, то правило $\exists_{у}$ будет воспроизводить отношение логического следования, $Z_{у}$ будет частным случаем $\exists_{в}$. Осталось бы только изменить правило $\forall_{в}$.

Но сложность возникает из-за того, что подстановка дескрипций вместо свободной переменной в формулу (с одновременным указанием области действия) не эквивалентна операции подстановки этой дескрипции в подформулы.

Пусть $\mathrm{F}^{x}_{zxA(x)}B(x) = [\mathbf{z}xA(x)]B(\mathbf{z}xA(x))$, где $B(\mathbf{z}xA(x))$ есть результат замещения каждого свободного вхождения x на $\mathbf{z}xA(x)$.

Тогда $\mathrm{F}^{x}_{zxA(x)}\neg B(x)$ не эквивалентна $\neg\mathrm{F}^{x}_{zxA(x)}B(x)$ так же, как и $\mathrm{F}^{x}_{zxA(x)}(B(x)\,\&\,C(x))$ не эквивалентна $(\mathrm{F}^{x}_{zxA(x)}B(x))\ \&\ (\mathrm{F}^{x}_{zxA(x)}C(x))$ и т. д.

Тем самым не имели бы. места некоторые плавила вывода, например, $\&_{в}$. Сказанное заставляет отказаться от идеи использования расселовской теории неопределенных дескрипций для разработки теории квантификации.

Однако вспомним, что теория *определенных* дескрипций была развита двояким образом: Расселом с фиксацией области действия определенной дескрипции и Гильбертом без фиксации. Не окажется ли пригодной для наших целей теория неопределенных дескрипций без фиксации области действия неопределенных дескрипций? Д. Гильбертом была развита теория ε-выражений. Чтобы отличить неопределенные дескрипций по Расселу от ε-выражений Гильберта, мы вместо «ε» писали «**z**». Гильбертовскую теорию ε-выражений можно рассматривать как своеобразный вариант теории неопределенных дескрипций.

Если в несостоявшейся теории квантификации, с использованием ε-выражений, опустить области действия дескрипции и, чтобы не перепутать прежний язык с новым, заменить **z**-выражения на ε-выражения, то мы получим логическую систему, эквивалентную теории ε-выражений, предложенную Д. Гильбертом[3].

[3] Это не есть ход собственных мыслей Гильберта, к тому же теория неопределенных дескрипций Рассела была изложена нами не в соответствии с собственным изложением Рассела, а по аналогии с его теорией определенных дескрипций.

§ 3. КЛАССИЧЕСКОЕ ε-ИСЧИСЛЕНИЕ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА

Как и ранее, мы будем строить языке двумя сортами индивидных переменных, связанных x, y, z ... и свободных – v, w,....

Одновременной индукцией определим «квазитерм со списком свободных и списком связанных переменных» и «квазиформула со списком свободных и списком связанных переменных».

1. Если t свободная индивидная переменная, то t есть квазитерм со списком свободных переменных t и пустым списком связанных переменных.

2. Если t – связанная индивидная переменная, то t есть квазитерм со списком свободных переменных Λ и списком связанных переменных t.

3. Если t_1, ..., t_k суть квазитермы со списками свободных переменных $\mathbf{V}_1$, ..., $\mathbf{V}_k$ и списками связанных переменных $\mathbf{T}_1$, ..., $\mathbf{T}_k$ соответственно и P есть k-местная предикатная буква, то $P(t_1, ..., t_k)$ есть квазиформула со списком свободных переменных $\mathbf{V}_1 * ... * \mathbf{V}_k$ и списком связанных переменных $\mathbf{T}_1 * ... * \mathbf{T}_k$.

4. Если A – квазиформула со списками переменных $\mathbf{V}$ и $\mathbf{T}$, то $\neg(A)$ есть квазиформула с теми же списками переменных.

5. Если A и B – квазиформулы со списками $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ свободных и списками $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ связанных переменных, то (A) & (B), $(A) \vee (B)$, $(A) \supset (B)$ квазиформулы со списками переменных $\mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_2$ и $\mathbf{T}_1 * \mathbf{T}_2$.

6. Если A – квазиформула со списком $\mathbf{V}$ свободных и списком $\mathbf{T}$ связанных переменных и x – связанная переменная, то $\forall xA$ и $\exists xA$ есть квазиформула со списком $\mathbf{V}$ свободных и списком $\mathbf{T}_x$ связанных переменных, где $\mathbf{T}_x$ есть результат вычеркивания всех вхождений x в $\mathbf{T}$.

7. Если A – квазиформула со списком $\mathbf{V}$ свободных переменных и списком $\mathbf{T}_{*x}$ связанных переменных, то εxAx есть квазитерм со списком $\mathbf{V}$ свободных и списком $\mathbf{T}$ связанных переменных.

Квазитерм с пустым списком связанных переменных будем называть термом. Квазиформулу с пустым списком связанных переменных будем называть формулой.

Построим классическое исчисление гильбертовского типа с ε-термами – исчисление HεC.

Схемами аксиом являются схемы аксиом пропозициональной части классической логики и следующие схемы аксиом для кванторов и ε-термов:

$\exists xAx \supset A(\varepsilon xAx)$

$At \supset \exists\, xAx$

$\forall xAx \supset At$

$A(\varepsilon x\neg Ax) \supset \forall xAx$

или, более точно, в терминах подстановки

$\exists x \mathrm{F}_x^w Aw \supset \mathrm{F}_{\varepsilon x Ax}^w Aw$

$\mathrm{F}_t^w Aw \supset \exists x \mathrm{F}_x^w Aw$

$\forall x \mathrm{F}_x^w Aw \supset \mathrm{F}_{\mathrm{t}}^w Aw$

$\mathrm{F}_{\varepsilon x \neg Ax}^w Aw \supset \forall x \mathrm{F}_x^w Aw$

Правилами вывода являются modus ponens и правило обобщения

$$\frac{Aw}{\forall x \mathrm{F}_x^w Aw}$$ [4]

Вывод из посылок Γ имеет вид дерева.

1. <*A*> есть вывод из множества посылок $\{A\}$.

2. Если *A* аксиома, то << > *A*> есть вывод из пустого множества посылок.

3. Если α есть вывод из множества посылок Γ, β есть вывод из множества посылок Δ, последними формулами α и β являются формулы *A* и *A*. ⊃ *E*, то <αβ*E*> есть вывод из множества посылок Γ ∪ Δ.

4. Если α есть вывод из множеств посылок Γ, *Aw* есть последняя формула α, то <α∀*xAx*>есть вывод из множества посылок Γ.

Будем говорить, что переменная варьируется относительно посылки *A* в данном выводе, если *A* содержит *w*, и к формуле, зависящей от *A*, применяется правило обобщения по переменной *w*.

Исчисление HεC несколько отлично от ε-исчисления, сформулированного Д. Гильбертом. Отличия следующие:

(1) язык ε-исчисления не содержит кванторов, нет и аксиом, относящихся к кванторам, кванторы вводятся с помощью определений

$\exists x A(x) =_{\mathrm{Df}} A(\varepsilon x A(x))$ и

$\forall \mathrm{x} \mathrm{A}(x) =_{\mathrm{Df}} A(\varepsilon x \neg A(x))$,

единственной дополнительной схемой аксиом является

$A(t) \supset A(\varepsilon x A(x))$;

(2) вместо правила обобщения принимается правило подстановки терма вместо переменной; применение правила подстановки приводит к варьированию относительно посылки *A,* если *A* содержит переменную, вместо которой подставляется терм в некоторой формуле, зависящей от *A*;

(3) язык содержит один вид индивидных переменных;

(4) исчисление строится не на основе понятия вывода, а доказательства.

Но эти различия несущественны и носят чисто технический характер.

Для исчисления HεC имеет место теорема дедукции вида

[4] Напоминаем, что переменная *w* не обязательно входит в формулу *Aw*.

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma - \{A\} \vdash A \supset B}$$

Для доказательства теоремы дедукции достаточно показать, что в НεС доказуемы формулы вида $\forall x(Ax \supset C) \supset (\exists xAx \supset C)$ и $\forall x(C \supset Ax) \supset (C \supset \forall xAx)$, где C есть формула. Тогда, используя результаты §6 гл. 2, получим доказательство теоремы дедукции для НεС. Но формулы указанною вида доказуемы в НεС.

1. $\forall x(C \supset A(x)) \supset (C \supset A(\varepsilon x \neg A(x))$
2. $(C \supset A(\varepsilon x \neg A(x))) \supset ((A(\varepsilon x \neg A(x)) \supset \forall x A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x)))$
3. $\forall x(C \supset A(x)) \supset ((A(\varepsilon x \neg A(x)) \supset \forall x A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x)))$ тр.;1,2
4. $(A(\varepsilon x \neg A(x)) \supset \forall x A(x)) \supset (\forall x(C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x)))$ П; 3
5. $A(\varepsilon x \neg A(x)) \supset \forall x A(x)$
6. $\forall x(C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x))$

Аналогично для другой схемы.

Каково отношение исчислений НεС к исчислению предикатов без ε-выражений, т. е. к НС?

Легко показать, что всякая формула, доказуемая в НС, доказуема и в НεС. Обратное не имеет места в силу различия языка исчислений.

Но Д. Гильберт доказал вторую ε-теорему, которая утверждает, что если из Г выводима формула A в ε-исчислении, и ни посылки Г, ни заключение A не содержат ε-термов, то из Г выводима A в НС.

Тем самым, хотя и не указаны способы элиминации ε-выражений из предложений, ε-теорема позволяет использовать простую технику ε-исчисления для построения выводов и гарантирует, что она не выводит за пределы законных выводов.

§ 4. СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ВТОРОГО ТИПА

Язык с ε-термами позволяет сформулировать все правила введения и удаления логических знаков слева и справа.

Вернемся ко второй классификации логических фигур заключения, вводящих логические знаки слева и справа:

A

ВИП $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B}$

B

УИП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \supset B}{A, \Gamma \to \Theta, B}$

ВКП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \,\&\, B}$

УКП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \,\&\, B}{\Gamma \to \Theta, A \text{ и } \Gamma \to \Theta, B}$

ВДП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \text{ или } \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}$

УДП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \vee B}{\Gamma \to \Theta, A, B}$

ВОП $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A}$

УОП $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \neg A}{A, \Gamma \to \Theta}$

В∀П $\dfrac{\Gamma \to \Theta, Aw}{\Gamma \to \Theta, \forall x Ax}$

У∀П $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \forall x Ax}{\Gamma \to \Theta, At}$

В∃П $\dfrac{\Gamma \to \Theta, At}{\Gamma \to \Theta, \exists x Ax}$

У∃П $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \exists x Ax}{\Gamma \to \Theta, A(\varepsilon x Ax)}$

C

ВИЛ $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta}$

ВКЛ $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \text{ или } B, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}$

ВДЛ $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}$

ВОЛ $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta}$

В∀Л $\dfrac{At, \Gamma \to \Theta}{\forall x Ax, \Gamma \to \Theta}$

В∃Л $\dfrac{Aw, \Gamma \to \Theta}{\exists x Ax, \Gamma \to \Theta}$

D

УИЛ $\dfrac{A \supset B, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A \text{ и } B, \Gamma \to \Theta}$

УКЛ $\dfrac{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}{A, B, \Gamma \to \Theta}$

УДЛ $\dfrac{A \vee B, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta \text{ и } B, \Gamma \to \Theta}$

УОЛ $\dfrac{\neg A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A}$

У∀Л $\dfrac{\forall x Ax, \Gamma \to \Theta}{A(\varepsilon x \neg Ax), \Gamma \to \Theta}$

У∃Л $\dfrac{\exists x Ax, \Gamma \to \Theta}{At, \Gamma \to \Theta}$

На В∀П и В∃Л накладываются обычные ограничения.

Структурные правила: рефлексивность $\to$, перестановка, сокращение, добавление слева и справа и сечение.

Доказательство имеет вид дерева.

Правила группы A и B совместно со структурными правилами образуют мультиплярное секвенциальное классическое исчисление предикатов второго типа – $S_m N\varepsilon C$.

В системе $S_m N\varepsilon C$ производны правила введения и удаления справа ε-термов.

ВεП1 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, Aw}{\Gamma \to \Theta, A(\varepsilon x Bx)}$

УεП1 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(\varepsilon x Bx)}{\Gamma \to \Theta, \exists x Ax}$

ВεП2 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, At}{\Gamma \to \Theta, A(\varepsilon x A x)}$ УεП2 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(\varepsilon x \neg A x)}{\Gamma \to \Theta, \forall x A x}$

На правило ВεП1 накладывается ограничение: w не входит в Г и Θ; $A(\varepsilon x B x)$есть сокращенная запись $\mathrm{F}^{w}_{\varepsilon x B x} A$. Все эти правила производны в SNεC. Первое правило введения справа ε-герма доказывается посредством применения В∀П и У∀П, второе – В∃П и У∃П. УεП1 есть частный случай В∃П. В SNεC доказуема секвенция $A(\varepsilon x \neg A x) \to \forall x A x$, поэтому УεП2 производно.

В $\mathrm{S_m}$NεC производны все правила групп C и D, в том числе В∃Л, У∃Л, В∀Л и У∀Л.

Правила группы A и C совместно со структурными правилами образуют секвенциальную логистическую систему SLC, как и при первой классификации, так как A + C = I + II.

Правила введения и удаления ε-термов слева будут иметь вид:

ВεЛ1 $\dfrac{Aw, \Gamma \to \Theta}{A(\varepsilon x B x), \Gamma \to \Theta}$ УεЛ1 $\dfrac{A(\varepsilon x B x), \Gamma \to \Theta}{\forall x A x, \Gamma \to \Theta}$

ВεЛ2 $\dfrac{At, \Gamma \to \Theta}{A(\varepsilon x \neg A x), \Gamma \to \Theta}$ УεЛ2 $\dfrac{A(\varepsilon x A x), \Gamma \to \Theta}{\exists x A x, \Gamma \to \Theta}$

На ВεЛ1 накладывается обычное ограничение. Систему $\mathrm{S_m}$LC вместе с фигурами введения ε-термов будем обозначать SmLεC. Эти две системы не эквивалентны. В $\mathrm{S_m}$LC фигуры ВεП2 и ВεЛ2 не являются производными. Относительно $\mathrm{S_m}$LεC производны все правила группы B и D, т. е. правила удаления слева и справа. Доказательство элементарно. Следовательно, секвенциальная натуральная система с ε-термами $\mathrm{S_m}$NεC эквивалентна секвенциальной логистической системе с ε-термами $\mathrm{S_m}$LεC.

Теорема 1. *Если* Г |– *E* в HεC *и ни одна переменная не варьируется, то секвенция* Г → *E доказуема в* S+NεC.

Теорему доказываем индукцией по высоте вывода в HεC.

Базис. Пусть *E* аксиома HεC. Тогда секвенция → *E* доказуема в $\mathrm{S_m}$NεC и доказуема секвенция Г → *E*.

Например,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{Aw \to Aw}{\to Aw, \neg Aw}\text{ВОП}}{\to Aw, \exists x \neg Ax}\text{В}\exists\text{П}}{\to \exists x \neg Ax, Aw}\text{ПП}}{\to \exists x \neg Ax, \forall x Ax}\text{В}\forall\text{П}}{\to \forall x Ax, \exists x \neg Ax}\text{ПП}}{\to \forall x Ax, \neg A(\varepsilon x \neg Ax)}\text{У}\exists\text{П}}{A(\varepsilon x \neg Ax) \to \forall x Ax}\text{УОП}}{\to A(\varepsilon x \neg Ax) \supset \forall x Ax}\text{ВИП}$$

Пусть $E \in \Gamma$. Тогда секвенция $\Gamma \to E$ доказуема в SmNεC.

Индукционный шаг. Пусть α есть вывод формулы E из посылок Γ высоты n + 1 и E получена из формул A и $A \supset B$ по modus ponens. По индуктивному допущению доказуемы секвенции $\Gamma \to A$ и $\Gamma \to A \supset E$. Строим доказательство в S_mNεC:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to A \quad \cfrac{\Gamma \to A \supset E}{A, \Gamma \to E}\text{УИП}}{\Gamma, \Gamma \to E}\text{Сеч.}}{\Gamma \to E}\text{Сокр.}$$

Пусть α. есть вывод формулы $\forall x Bx$, из посылок Γ, высоты n + 1 и $\forall x Bx$ получена из формулы Bw по правилу обобщения. По условию ни одна переменная не варьируется, поэтому найдется такое $\Delta \subset \Gamma$, что Bw выводима из Δ и формулы Δ не содержат переменной w. По индуктивному допущению в S_mNεC доказуема секвенция $\Delta \to Bw$.

И отсюда

$$\cfrac{\cfrac{\Delta \to Bw}{\Delta \to \forall x Bx}\text{В}\forall\text{П}}{\Gamma \to \forall x Bx}\text{ДЛ}$$

Так же как и для секвенциальных натуральных систем первого типа, для секвенциальных натуральных систем второго типа могут быть построены сингулярные секвенциальные натуральные исчисления.

Построим исчисление S_sNεC.

Основная секвенция это формула вида

$A \to A$.

Логические фигуры заключения:

$$\text{ВИП}\ \dfrac{A,\Gamma\to B}{\Gamma\to A\supset B}\qquad\qquad \text{УИП}\ \dfrac{\Gamma\to A\supset B}{A,\Gamma\to B}$$

$$\text{ВКП}\ \dfrac{\Gamma\to A\quad \Gamma\to B}{\Gamma\to A\,\&\,B}\qquad\qquad \text{УКП}\ \dfrac{\Gamma\to A\,\&\,B}{\Gamma\to A\ \text{и}\ \Gamma\to B}$$

$$\text{ВДП}\ \dfrac{\Gamma\to A\ \text{или}\ \Gamma\to B}{\Gamma\to A\vee B}\qquad\qquad \text{УДП}\ \dfrac{\Gamma\to A\vee B\quad A,\Delta\to}{\Gamma,\Delta\to B}$$

$$\text{ВОП}\ \dfrac{A,\Gamma\to}{\Gamma\to\neg A}\qquad\qquad \text{УОП}\ \dfrac{\Gamma\to\neg A}{A,\Gamma\to}$$

$$\text{В}\forall\text{П}\ \dfrac{\Gamma\to Aw}{\Gamma\to\forall xAx}\qquad\qquad \text{У}\forall\text{П}\ \dfrac{\Gamma\to\forall xAx}{\Gamma\to At}$$

$$\text{В}\exists\text{П}\ \dfrac{\Gamma\to At}{\Gamma\to\exists xAx}\qquad\qquad \text{У}\exists\text{П}\ \dfrac{\Gamma\to\exists xF_x^w Aw}{\Gamma\to F_{\varepsilon xAx}^w Ax}$$

$$\text{УОЛ}\ \dfrac{\neg A,\Gamma\to}{\Gamma\to A}$$

В В∀П переменная w не входит в формулы нижней секвенции.

Структурные фигуры заключения:

Перестановка слева, сокращение слева, сечение.

Правило ДЛ производно:

$$\dfrac{\Gamma\to A\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{A\to A\vee\neg B}\text{ВДП}\quad \dfrac{A\to A}{A,\neg A}\text{ВОЛ}}{A,\neg A\to\neg B}\text{УДП}}{B,A,\neg A\to}\text{УОП}}{\neg A,B,A\to}\text{ПЛ}}{B,A\to A}\text{УОЛ}}{B,\Gamma\to A}\text{Сеч.}$$

Теорема 2. *Если секвенция* $\Gamma\to C$ *доказуема в* $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$, *то секвенция* $\Gamma\to C$ *доказуема в* $\mathrm{S_mN\varepsilon C}$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что фигуры заключения $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$ УДП и УОЛ производны в $\mathrm{S_mN\varepsilon C}$, что легко сделать:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to A\vee B}{\Gamma\to A,B}}{\Gamma\to B,A}\quad A,\Delta\to}{\Gamma,\Delta\to B}\text{Сеч.}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A\to A}{\to A,\neg A}\text{ВОП}\quad \dfrac{}{\neg A,\Gamma}}{\Gamma\to A}\text{Сеч.}$$

Теорема 3. *Если секвенция* $\Gamma\to\Theta$ *доказуема в* $\mathrm{S_mN\varepsilon C}$, *то секвенция* $\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}$, *где* $\Theta^{\text{Д}}$ *есть дизъюнкция формул* Θ, *доказуема в* $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$.

Для доказательства достаточно показать, что фигуры вида

$$\frac{A,\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee B}{\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee A\supset B},\qquad \frac{\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee A\quad\ \Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee B}{\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee A\,\&\,B}\ \text{и т. д.}$$

являются производными в $S_sN\varepsilon C$.

Действительно в $S_sN\varepsilon C$ производно правило

$$\frac{\Gamma\to A\vee B}{\neg A,\Gamma\to B}\ \text{(а) и его обращение}\ \frac{\neg A,\Gamma\to B}{\Gamma\to A\vee B}\ \text{(в).}$$

Доказательство (а):

$$\dfrac{\Gamma\to A\vee B\qquad \dfrac{\neg A\to\neg A}{A,\neg A\to}\,\text{УОП}}{\dfrac{\Gamma,\neg A\to B}{\neg A,\Gamma\to B}\,\text{ПЛ}}\,\text{УДП}$$

Доказательство (в):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{A\to A\vee B}\,\text{ВДП}}{\neg(A\vee B),A\to}\,\text{ВОЛ}}{\neg(A\vee B)\to\neg A}\,\text{ВОП}\qquad \dfrac{\neg A,\Gamma\to B}{\neg A,\Gamma\to A\vee B}\,\text{ВДП}}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(A\vee B),\Gamma\to A\vee B}{\neg(A\vee B),\neg(A\vee B),\Gamma\to}\,\text{ВОЛ}}{\neg(A\vee B),\Gamma\to}\,\text{Сокр.}}{\Gamma\to A\vee B}\,\text{УОЛ}}\,\text{Сеч.}$$

С помощью правил (а) и (в) легко доказать $\dfrac{A,\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee B}{\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee A\supset B}$ и другие аналогичные правила.

Например, $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee B}{\neg\Theta^{\text{Д}},A,\Gamma\to B}\,\text{(а)}}{A,\neg\Theta^{\text{Д}},\Gamma\to B}\,\text{ПЛ}}{\dfrac{\neg\Theta^{\text{Д}},\Gamma\to A\supset B}{\Gamma\to\Theta^{\text{Д}}\vee A\supset B}\,\text{(в)}}\,\text{ВИП}$$

Исчисление $S_sN\varepsilon C$ нетрудно перестроить в исчисление $SNa\varepsilon C$, в котором принимается минимальное число логических фигур заключения за счет расширения основных секвенций.

Основные секвенции:

1. $A\to A$
2. $A,\ A\supset B\to B$
3. $A,\ B\to A\ \&\ B$
4. $A\ \&\ B\to A$

5. $A \mathbin{\&} B \to B$
6. $A \to A \vee B$
7. $B \to A \vee B$
8. $\neg A, A \vee B \to B$
9. $A, \neg A \to$
10. $\forall x\, \mathrm{F}_x^w Aw \to \mathrm{F}_t^w Aw$
11. $\mathrm{F}_t^w Aw \to \exists \mathrm{x}\, \mathrm{F}_x^w \mathrm{A}w$
12. $\exists x\, \mathrm{F}_x^w Aw \to \mathrm{F}_{\varepsilon x A x}^w Aw$
13. $\neg\neg A \to A$

Логистические фигуры заключения: ВИП, ВОП и В∀П.

Структурные фигуры заключения ПЛ, СЛ, С.

Теорема 4. *Если секвенция* $\Gamma \to B$ *доказуема в* SNaεC, *то секвенция* $\Gamma \to B$ *доказуема в* $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$.

Действительно, каждая основная секвенция 1 – 13, как легко видеть, доказуема в $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$. Логические и структурные фигуры заключения SNaεC составляют часть фигур заключения $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$.

Теорема 5. *Если секвенция* $\Gamma \to B$ *доказуема в* $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$, *то секвенция* $\Gamma \to B$ *доказуема в* SNaεC.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что правила введения и удаления логических знаков производны относительно SNaεC.

Например,

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \qquad A, B \to A \mathbin{\&} B}{\Gamma, B \to A \mathbin{\&} B}\,\text{С}}{B, \Gamma \to A \mathbin{\&} B}\,\text{ПЛ}}{\Gamma, \Gamma \to A \mathbin{\&} B}\,\text{С}}{\Gamma \to A \mathbin{\&} B}\,\text{СЛ}$$

Остальные правила введения и удаления доказываются аналогично.

Теорема 6. *Если секвенция* $\Gamma \to B$ *доказуема в* SNaεC, то *существует вывод* α *формулы* B *из посылок* Γ в *системе* HεC *и при этом в выводе* α *ни одна переменная не варьируется.*

Доказательство.

Теорему докажем индукцией по высоте доказательства в SNaεC.

Базис. Высота доказательства равна 1. Каждой основной секвенции SNaεC нетрудно сопоставить вывод в HεC. Например, секвенции $A \mathbin{\&} B \to A$ сопоставляется вывод <<A & B> << > A & B ⊃ A> A>.

Индукционный шаг. Пусть высота доказательства равна $n + 1$. Тогда последней секвенцией доказательства будет нижняя секвенция ВИП или ВОП, или В$\forall$П, или ПЛ или СЛ, или С.

Пусть конец доказательства имеет вид $\dfrac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B}$. По индуктивному допущению в НεС может быть построено доказательство формулы B из посылок $\{A\} \cup \Gamma$ (и в этом выводе ни одна переменная не варьируется). Так как относительно НεС имеет место теорема дедукции, то может быть построен вывод формулы $A \supset B$ из посылок Γ и в этом выводе ни одна переменная не будет варьироваться.

Пусть конец доказательства имеет вид $\dfrac{A, \Gamma \to f}{\Gamma \to \neg A}$. По индуктивному допущению может быть построен вывод формулы f из посылок $\{A\} \cup \Gamma$. Согласно теореме дедукции может быть построен вывод формулы $A \supset f$ из посылок Γ. И так как в НεС доказуема формула $(A \supset f) \supset \neg A$, может быть построен вывод формулы $\neg A$ из посылок Γ.

Пусть конец доказательства имеет вид $\dfrac{\Gamma \to Aw}{\Gamma \to \forall xAx}$. По индуктивному допущению может быть построен вывод формулы Aw из посылок Γ, ни одна переменная в этом выводе не варьируется, Γ не содержит формулы со свободной переменной w. Применяя $\forall_{\text{в}}$, получаем вывод формулы $\forall xAx$, и ни одна переменная в этом выводе не варьируется.

Пусть конец доказательства имеет вид $\dfrac{\Gamma, C, D, \Delta \to E}{\Gamma, D, C, \Delta \to E}$. По индуктивному допущению может быть построен вывод формулы E из посылок $\Gamma \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \Delta$. Следовательно, и из посылок $\Gamma \cup \{D\} \cup \{C\} \cup \Delta$.

Аналогично для случая, когда конец доказательства имеет вид $\dfrac{C, C, \Gamma \to E}{C, \Gamma \to E}$.

Пусть конец доказательства имеет вид $\dfrac{\Gamma \to M \quad M, \Delta \to E}{\Gamma, \Delta \to E}$. По индуктивному допущению в НεС $\Gamma \mid\!- M$ и $\{M\} \cup \Delta \mid\!- E$; заменяя в последнем выводе M на вывод M из Γ, получаем вывод формулы E из посылок $\Gamma \cup \Delta$.

Таким образом теорема доказана.

Из теорем 1, 3, 5 и 6 следует, что системы $\mathrm{S_mN\varepsilon C}$, $\mathrm{S_sN\varepsilon C}$ и SNaεC эквивалентны, и если рассматривать только выводы без варьирования, то эквивалентны НεС.

§ 5. КЛАССИЧЕСКОЕ НАТУРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВТОРОГО ТИПА

Построим классическое исчисление предикатов в виде натурального исчисления второго типа, т. е. натурального исчисления с субординатным выводом и правилами вывода, соответствующими введению и удалению логических знаков справа.

$$\supset_{\text{в}}\ \frac{\{A\}\cup\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\supset B}\qquad \supset_{\text{у}}\ \frac{A\quad A\supset B}{B}$$

$$\&_{\text{в}}\ \frac{A\quad B}{A\,\&\,B}\qquad \&_{\text{у1}}\ \frac{A\,\&\,B}{A}\qquad \&_{\text{у2}}\ \frac{A\,\&\,B}{B}$$

$$\vee_{\text{в1}}\ \frac{A}{A\vee B}\qquad \vee_{\text{в2}}\ \frac{B}{A\vee B}\qquad \vee_{\text{у}}\ \frac{\neg A\quad A\vee B}{B}$$

$$\neg_{\text{в}}\ \frac{\{A\}\cup\Gamma\to f}{\Gamma\vdash\neg A}\qquad \neg_{\text{у}}\ \frac{A\quad \neg A}{f}\qquad \neg\neg_{\text{у}}\ \frac{\neg\neg A}{A}$$

$$\forall_{\text{в}}\ \frac{Aw}{\forall x\mathrm{F}_x^w Aw}\qquad \forall_{\text{у}}\ \frac{\forall x\mathrm{F}_x^w Aw}{\mathrm{F}_t^w Aw}$$

$$\exists_{\text{в}}\ \frac{\mathrm{F}_t^w Aw}{\exists x\mathrm{F}_x^w Aw}\qquad \exists_{\text{у}}\ \frac{\exists x\mathrm{F}_x^w Aw}{\mathrm{F}_{\varepsilon xAx}^w Aw}$$

Под выводом будем иметь в виду субординатный вывод следующего вида:

1. $\langle A\rangle$ есть вывод из множества посылок $\{A\}$.

2. Если α сеть вывод из множества посылок Γ и β есть вывод из множества посылок Δ, A и B есть последние формулы α и β и из A и B непосредственно выводима формула E, то $\langle\alpha\beta E\rangle$ есть вывод из множества посылок Γ.

3. Аналогично п. 2 для однопосылочных правил, кроме $\forall_{\text{в}}$.

4. Если α есть вывод из множества посылок Γ, Aw есть последняя формула α и w не входит в Γ, то $\langle\alpha\forall xAx\rangle$ есть вывод из множества посылок Γ.

5. Если α есть вывод из множества посылок $\{A\}\cup\Gamma$, формула E есть последняя формула α, то $\langle[\alpha]\,A\supset E\rangle$ есть вывод из множества посылок Γ.

6. Если α есть вывод из множества посылок $\{A\}\cup\Gamma$ и f есть последняя формула α,то $\langle[\alpha]\ \neg A\rangle$ есть вывод из Γ.

Теорема 1. *Если* $\Gamma\vdash E$ *в* HεC *и ни одна переменная в этом выводе не варьируется, то* $\Gamma\vdash E$ *в* NεC.

Доказательство проводим индукцией по высоте вывода E из Γ в HεC.

Базис. $h = 1$. Возможны два случая: (1) вывод имеет вид $<A>$ и (2) вывод имеет вид $<<\ > A>$.

В первом случае этот же вывод будет выводом исчисления NεC.

Во втором случае каждой схеме аксиом сопоставляем вывод в NεC.

Для примера рассмотрим вывод вида $<<\ > (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))>$. Этому выводу сопоставляем следующий вывод в NεC, данный в двумерной нотации Яськовского – Куайна.

1.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ A$	пос.;
2.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ A \supset C$	пос.;
3.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ C$	m.p.; 1, 2
4.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg C$	пос.;
5.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \vert\ f$	$\neg_{\text{у}}$; 3, 4
6.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg A$	$\neg_{\text{в}}$; 1–5
7.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ A \vee B$	пос.;
8.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ B$	$\vee_{\text{у}}$; 6, 7
9.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ B \supset C$	пос.;
10.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ C$	m.p.; 8, 9
11.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg C$	пос.;
12.	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ f$	$\neg_{\text{у}}$; 11, 12
13.	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\neg C$	$\neg_{\text{в}}$; 1–12
14.	$\vert\ \vert\ \vert\ C$	$\neg\neg_{\text{у}}$; 13
15.	$\vert\ \vert\ (A \vee B) \supset C$	$\supset_{\text{в}}$; 1–14
16.	$\vert\ (B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)$	$\supset_{\text{в}}$; 1–15
17.	$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$	$\supset_{\text{в}}$; 1–16

Другой случай:

1.	$\vert\ A(t)$	
2.	$\vert\ \exists x A(x)$	$\exists_{\text{в}}$; 1
3.	$\vert\ A(\varepsilon x A(x))$	$\exists_{\text{у}}$; 2
4.	$A(t) \supset A(\varepsilon x A(x))$	$\supset_{\text{в}}$; 1–3

Остальные случаи доказываются просто. Их доказательство предоставляем читателю в порядке упражнения.

Индукционный шаг.

Пусть данный вывод имеет вид <$\alpha\beta E$>, где α есть вывод формулы A из посылок Г и β есть вывод формулы $A \supset E$ из посылок Δ. По индуктивному допущению выводу α сопоставляем вывод α' в NεC и β – β'. Фигура <$\alpha'\beta' E$> 1 будет искомым выводом в NεC.

Пусть данный вывод имеет вид <$\alpha\forall xAx$>, где α есть вывод из посылок Г, и так как ни одна переменная не варьируется, то w не входит в Г. По индуктивному допущению выводу α сопоставляй вывод α' в NεC и искомый результирующий вывод будет иметь вид <$\alpha'\forall xAx$>.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* Г |– E *в* NεC, *то* Г |– E *в* HεC *и ни одна переменная вывода в* HεC *не варьируется.*

Теорему доказываем индукцией по построению вывода NεC.

В случае базиса вывод исчисления NεC является выводим исчисления HεC.

Индукционный шаг.

1 случай. Данный вывод имеет вид <$\alpha\beta E$>, где α есть вывод формулы A из Г, β есть вывод формулы B из Δ и где из A и B непосредственно выводима формула E.

По индуктивному допущению строим выводы α' из Г и β' из Δ в HεC и затем вывод <$\alpha'\beta' E$> в HεC.

2 случай. Данный вывод имеет вид <αE>, где α есть вывод в NεC из посылок Г, A есть последняя формула α и из A непосредственно выводима E по одному из однопосылочных правил (в случае $\forall_{в}$ в Г нет собственных переменных применения этого правила). По индуктивному допущению строим вывод α' в HεC и затем вывод <$\alpha' E$>.

3 случай. Данный вывод имеет вид <[α] $A \supset E$>, где α есть вывод из множества посылок $\{A\} \cup$ Г и E последняя формула α. По индуктивному допущению по выводу α в NεC может быть построен вывод α' в HεC из тех же посылок, т. е. из $\{A\} \cup$ Г. Но так как относительно HεC имеет место теорема дедукции, то в HεC может быть построен вывод формулы $A \supset E$ из посылок Г. Условие, чтобы ни одна переменная формулы A не варьировалась, как легко видеть, выполняется.

4 случай. Данный вывод имеет вид <[α] $\neg A$>, где α есть вывод формулы f из посылок $\{A\} \cup$ Г. Этот случай рассматривается аналогично случаю 3.

Теорема 2 доказана.

Система NεC, как она сформулирована выше, не допускает вывода с варьированием. При необходимости системы с субординатным выводом могут допускать варьирование. Это можно сделать, определив вывод NεC следующим образом.

1. <A> есть вывод из множества посылок $\{A\}$ с пустой системой классов варьирования.

2. Если α есть вывод из множества посылок Γ с системой классов варьирования $\Gamma w_1, \ldots, \Gamma w_k$, A есть последняя формула α, то <$\alpha \forall x\, \mathrm{F}_x^{w_{k+1}} A$> есть вывод из множества посылок Γ с системой классов варьирования $\Gamma w_1, \ldots, \Gamma w_k, \Gamma w_{k+1}$, где Γw_{k+1} есть подмножество формул Γ, в которые входит w_{k+1} при условии, что w_{k+1} входит в A, и с той же системой классов варьирования, что и для α, если w_{k+1} не входит в A.

3. Если α есть вывод из Γ с системой классов варьирования $\Gamma w_1, \ldots, \Gamma w_k$, A – последняя формула α и E – непосредственно выводима из A по одному из прямых правил вывода, кроме $\forall_{\text{в}}$, то <αE> есть вывод из посылок Γ с той же системой классов варьирования, что и для вывода α.

4. Если α_1 есть вывод из посылок Γ с системой классов варьирования $\Gamma w_1, \ldots, \Gamma w_k$, α_2 есть вывод из посылок Δ с системой классов варьирования $\Delta_{v_1}, \ldots, \Delta_{v_l}$, A – последняя формула α_1, и B – последняя формула α_2, из A и B непосредственно выводима формула E, то <$\alpha_1\alpha_2 E$> есть вывод из множества посылок $\Gamma \cup \Delta$ с системой классов варьирования $\Gamma w_1, \ldots, \Gamma w_k$, $\Delta v_1, \ldots, \Delta v_l$.

5. Если α есть вывод из посылок $\Gamma \cup \{A\}$ с системой классов варьирования $\Gamma w_1, \ldots, \Gamma w_k$, B есть последняя формула α, формула A не входит ни в один из классов $\Gamma w_1, \ldots, \Gamma w_k$ (т. е. ни одна переменная не варьируется в α относительно A), то <$[\alpha]\ A \supset B$> есть вывод из посылок Γ с той же системой варьирования, что и в выводе α.

Определив $\neg A =_{\mathrm{Df}} A \supset f$, не будем формулировать правила $\neg_{\text{в}}$ – оно содержится в п. 5.

Система со вновь сформулированным понятием вывода эквивалентна НεС в том смысле, что если $\Gamma \mid\!- E$ в одном исчислении, то $\Gamma \mid\!- E$ и в другом.

§ 6. ВОЗМОЖНО ЛИ ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ НАТУРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ ВТОРОГО ТИПА?

Рассмотрим пропозициональную часть NεC (S_sNεC). Если мы отбросим в пропозициональной части NεC (S_sNεC) правило снятия двойного отрицания (УОЛ), то получим пропозициональное исчисление, которое слабее интуиционистского. Чтобы получить интуиционистское исчисление, надо обогатить это исчисление правилом введения дизъюнкции слева (фигурой ВДЛ).

Как обстоит дело с интуиционистским исчислением предикатов? Возможно ли натуральное интуиционистское исчисление с ε-термами и только прямыми правилами для кванторов?

Если логику высказываний NεC ослабить до интуиционистской, то в этой ослабленной системе окажутся доказуемыми такие формулы, как $(\exists xAx \supset \exists xBx) \supset \exists x(Ax \supset Bx)$, $\exists x(\exists yAy \supset Ax)$ и другие, неприемлемые интуиционистами.

Действительно:

1. $\exists xAx \supset \exists xBx$	посылка
2. $A(\varepsilon xBx)$	посылка
3. $\exists xAx$	$\exists_{в}$; 2
4. $\exists xBx$	$\supset_{у}$; 1, 3
5. $B(\varepsilon xBx)$	$\exists_{у}$; 4
6. $A(\varepsilon xBx) \supset B(\varepsilon xBx)$	$\supset_{в}$; 1 – 5
7. $\exists x(Ax \supset Bx)$	$\exists_{в}$; 6
8. $(\exists xAx \supset \exists xBx) \supset \exists x(Ax \supset Bx)$	$\supset_{в}$; 1 – 7

1. $\exists xAx$	посылка
2. $A(\varepsilon xAx)$	$\exists_{у}$; 1
3. $\exists xAx \supset A(\varepsilon xAx)$	$\supset_{в}$; 1 – 2
4. $\exists y(\exists xAx \supset Ay)$	$\exists_{в}$; 3

Таким образом, квантификационная часть содержит некоторые классические допущения. Поэтому неверно, что добавление к интуиционистскому натуральному исчислению прямых правил введения и удаления кванторов дает интуиционистское исчисление предикатов[5].

Отказ от использования ε-выражений (или их аналогов) в интуиционистской логике означает отказ от использования очень изящных методов натурального вывода второго типа, вообще говоря, от систем натурального вывода без правил непрямого вывода, относящихся к кванторам. Однако такие системы возможны, если мы наложим дополнительные ограничения на применимость правил непрямого вывода – именно

[5] Ср. [44].

потребуем, чтобы ε-термы не содержались в устраняемых посылках и заключениях вспомогательных выводов.

§ 7. ИСЧИСЛЕНИЯ DC И DI. ЭЛИМИНАЦИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ДЕСКРИПЦИЙ ДЛЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОГО И КЛАССИЧЕСКОГО НАТУРАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Язык содержит два вида индивидных переменных, ε-выражения, кванторы, обычные пропозициональные связки и константу f. По определению принимаем $\neg A =_{\mathrm{Df}} A \supset f$.

Вхождение переменной s в квазиформулу A будем называть связанным, если это вхождение находится в области действия кванторов по этой переменной, в противном случае свободным. Легко видеть, что каждое вхождение свободной переменной свободно, каждое вхождение связанной переменной в формулу связано, но имеются свободные вхождения связанных переменных в квазиформулы.

Если терм t есть переменная s, то s свободна в t. Вхождения x в εxA являются связанными. В ε-термах возможны лишь свободные вхождения свободных переменных.

Под подстановкой квазитерма t вместо переменной s в квазиформулу A (квазитерм φ) будем подразумевать результат замещения каждого свободного вхождения s квазитермом t.

Подстановка правильна, если t свободен для s в A (в φ), т. е. ни одно свободное вхождение в A (в φ) не попадает в область действия кванторов (оператора дескрипции) по переменным, свободным в t.

Подстановка терма всегда будет правильной, так как в термах нет свободных вхождений связанных переменных, а свободные переменные не связываются кванторами и оператором дескрипции.

Результат подстановки вместо переменной s терма t в $A(s)$ будем обозначать $\mathrm{F}_t^s\, A(s)$ или просто $A(t)$.

Из определения подстановки следует, что

$\mathrm{F}_t^s\, (B \nabla C) \equiv \mathrm{F}_t^s\, \mathrm{B} \nabla\ \mathrm{F}_t^s\, \mathrm{C}$, где ∇ есть &, $\vee$, $\supset$,

$\mathrm{F}_t^s\, \neg B \equiv \neg\, \mathrm{F}_t^s\, B$,

$\mathrm{F}_t^s\, \mathrm{K}yB \equiv \mathrm{K}y\, \mathrm{F}_t^s\, B$, если s и y различны, и где K есть $\forall$ или $\exists$,

$\mathrm{F}_t^s\, \varepsilon xAx = \varepsilon x\, \mathrm{F}_t^s\, Ax$, если s и x различны,

$\mathrm{F}_t^s\, B \equiv B$, если B не содержит s свободно.

Для всех исчислений D (классического DC, интуиционистского DI и др.) правила введения и удаления кванторов и ε-выражений одни и те же, а именно:

$$\forall_{у}\ \frac{\forall x \mathrm{F}^{w}_{x} Aw}{\mathrm{F}^{w}_{t} Aw} \qquad \forall_{в}\ \frac{Aw}{\forall x \mathrm{F}^{w}_{x} Aw}$$

$$\exists_{у}\ \frac{\exists x \mathrm{F}^{w}_{x} Aw}{\mathrm{F}^{w}_{\varepsilon x A x} Aw} \qquad \exists_{в}\ \frac{\mathrm{F}^{w}_{t} Aw}{\exists x \mathrm{F}^{w}_{x} Aw}$$

$$\varepsilon_{у}\ \frac{\mathrm{F}^{w}_{\varepsilon x A x} Bw}{\exists x \mathrm{F}^{w}_{x} Bw} \qquad \varepsilon_{в}\ \frac{\forall x \mathrm{F}^{w}_{x} Bw \exists y A y}{\mathrm{F}^{w}_{\varepsilon y A y} Bw}.$$

Все подстановки правильны. Как посылки, так и заключения являются формулами, но не квазиформулами. Как классическое, так и интуиционистское исчисления будут содержать следующие прямые правила введения и удаления логических связок

$$\supset_{у}\ \frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$$\&_{в}\ \frac{A \quad B}{A \& B} \qquad \&_{у1}\ \frac{A \& B}{A} \qquad \&_{у2}\ \frac{A \& B}{B}$$

$$\vee_{в1}\ \frac{A}{A \vee B} \qquad \vee_{в2}\ \frac{B}{A \vee B} \qquad \vee_{у}\ \frac{\neg A \quad A \vee B}{B}$$

Дополнительное правило для классической системы DC:

$$\neg\neg_{у}\ \frac{\neg\neg A}{A}$$

Дополнительное правило для интуиционистской системы DI:

$$\text{УД}\ \frac{A \vee B \quad A \supset C \quad B \supset C}{C}$$

Вывод определяется следующим образом.

1. $\langle A \rangle$ есть вывод из множества посылок $\{A\}$.

2. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ выводы из множества посылок $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ формул $A_1, \ldots, A_k$ соответственно и из $A_1, \ldots, A_k$ непосредственно выводима формула E по одному из правил вывода, кроме $\forall_{в}$, то $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k\ E \rangle$ есть вывод из множества посылок $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k$..

3. Если α есть вывод формулы Aw из посылок Γ и формулы Γ не содержат w, то $\langle \alpha\ \forall x A x \rangle$ есть вывод из посылок Γ.

4. Если α – вывод из множества посылок $\{A\} \cup \Gamma$ формулы E, формулы A и E *не содержат вхождений ε-термов*, то $\langle [\alpha]\ A \supset E \rangle$ есть вывод из посылок Γ.

Теорема 1. *Если* $\Gamma \mid\!- E$ *в* НС (HI) *и ни одна переменная не варьируется, то* $\Gamma \mid\!- E$ *в* DC (DI).

Язык НС и HI не содержит ε-термов. Правилами вывода НС и HI являются modus ponens и правило обобщения. Для облегчения доказательства понятие вывода для НС и HI будет определяться первыми тремя пунктами определения вывода для DC и DI. Это не нарушает общности. Аксиомы НС и HI описаны ранее.

Каждая пропозициональная аксиома в НС и HI доказуема соответственно в DC и DI. Предикатные аксиомы НС (HI) также доказуемы в DC (DI).

Действительно, $\forall xAx \supset Aw$ и $Aw \supset \exists xAx$ доказуемы в DC (DI) тривиальным образом.

1.	$\mid \forall xAx$	пос.
2.	$\mid Aw$	$\forall_у$; 1
3.	$\forall xAx \supset Aw$	$\supset_в$; 1 – 2

1.	$\mid Aw$	пос.
2.	$\mid \exists xAx$	$\exists_в$; 1
3.	$\mathrm{A}w \supset \exists xAx$	$\supset_в$; 1 – 2.

Две остальные аксиомы также доказуемы в DI:

1. $\forall x(Ax \supset C)$	посылка
2. $\exists xAx$	посылка
3. $\mathrm{F}^{w}_{\varepsilon xAx}(Aw \supset C)$	$\exists_в$; 1, 2
4. $\mathrm{F}^{w}_{\varepsilon xAx}Aw \supset C$	свойство подст.; 3
5. $\mathrm{F}^{w}_{\varepsilon xAx}Aw$	$\exists_у$; 2
6. C	m. p.; 4, 5
7. $\exists xAx \supset C$	$\supset_в$; 1 – 6
8. $\forall x(Ax \supset C) \supset (\exists xAx \supset C)$	$\supset_в$; 1 – 7

1. $\forall x(C \supset Ax)$	посылка
2. $C \supset Aw$	$\forall_у$; 1
3. C	посылка
4. Aw	m. p.; 2,3
5. $\forall xAx$	$\forall_в$; 4
6. $C \supset \forall xAx$	$\supset_в$; 1 – 5
7. $\forall x(C \supset Ax) \supset (C \supset \forall xAx)$	$\supset_в$; 1 – 6

Индукционный шаг доказывается тривиально, так как каждое правило вывода HC (HI) есть правило вывода DC (DI).

Теорема 2. *Если* $\Gamma \vdash E$ *в* DC (DI) *и ни посылки* Γ, *ни формула* E *не содержат* ε*-термов, то* $\Gamma \vdash E$ *в* HC (HI).

Эта теорема является элиминационной теоремой, аналогичной ε-теореме Д. Гильберта, но она имеет место не только для классических, но и интуиционистских систем.

Для доказательства теоремы 2 построим вспомогательные исчисления D_1C (D_1I) и докажем теоремы 3 – 5, а с их помощью теорему 2.

В дальнейшем, вместо того, чтобы говорить отдельно о классическом и интуиционистском исчислениях, мы будем просто говорить об исчислениях D и D_1, подразумевая под ними классическое или соответственно интуиционистское исчисления.

Язык исчисления D_1 будет отличаться от языка D тем, что в нем будут присутствовать средства, указывающие область действия дескрипций.

Чтобы отличить вводимые во вспомогательном исчислении дескрипции от неопределенных дескрипций Рассела и ε-выражений, в качестве оператора дескрипции будем использовать букву ρ.

Одновременной индукцией определяем «квазитерм с множеством свободных переменных, множеством связанных переменных и множеством ρ-термов» и «квазиформула с множеством свободных переменных, множеством связанных переменных и множеством ρ-термов».

1. Если t есть свободная индивидная переменная, то t есть квазитерм с множеством $\{t\}$ свободных переменных и пустыми множествами связанных переменных и ρ-термов.

2. Если t есть связанная индивидная переменная, то t есть квазитерм с множеством $\{t\}$ связанных переменных и пустыми множествами свободных переменных и ρ-термов.

3. Если $t_1, \dots, t_k$ есть квазитермы с множествами $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$ связанных переменных, множествами $\mathbf{V}_1, \dots \mathbf{V}_k$, свободных переменных и множествами $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$ ρ-термов и P есть k-местная предикатная буква, то $P(t_1, \dots, t_k)$ есть квазиформула с множеством $\mathbf{X}_1 \cup \dots \cup \mathbf{X}_k$ связанных переменных, с множеством $\mathbf{V}_1 \cup \dots \cup \mathbf{V}_k$ свободных переменных и множеством $\mathbf{S}_1 \cup \dots \cup \mathbf{S}_k \cup \mathbf{T}$ ρ-термов, где $\mathbf{T}$ есть множество термов из $t_1, \dots, t_k$, являющихся ρ-термами.

4. Если A квазиформула с множеством $\mathbf{X}$ связанных, множеством $\mathbf{V}$ свободных переменных и множеством $\mathbf{S}$ ρ-термов, то $\neg(A)$ есть квазиформула с теми же множествами переменных и ρ-термов.

5. Если A и B квазиформулы с множествами $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ связанных переменных, множествами $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ свободных переменных и множествами $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ ρ-термов, то $(A)\ \&\ (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \supset (B)$ квазиформулы с мно-

жествами $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_2$ связанных переменных, $\mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$ свободных переменных, $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$ ρ-термов.

6. Если A квазиформула с множеством $\mathbf{X}$ связанных переменных, множеством $\mathbf{V}$ свободных переменных и множеством $\mathbf{S}$ ρ-термов и $x \in X$, то $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ есть квазиформулы с множеством $\mathbf{X} - \{x\}$ связанных, множеством $\mathbf{V}$ свободных переменных и множеством $\mathbf{S}$ ρ-термов.

7. Если A квазиформула с множеством $\mathbf{X}$ связанных переменных, множеством $\mathbf{V}$ свободных переменных, множеством $\mathbf{S}$ ρ-термов и если $t \in \mathbf{S}$, то $[t]A$ есть квазиформула с множеством $\mathbf{X}$ связанных переменных, множеством $\mathbf{V}$ свободных переменных и множеством $\mathbf{S} - \{t\}$ ρ-термов.

8. Если A квазиформула с множеством $\{x\}$ связанных переменных, множеством $\mathbf{V}$ свободных переменных, множеством $\mathbf{S}$ ρ-термов, то $\rho x(A)$ есть ρ-терм с множеством $\mathbf{V}$ свободных переменных и множеством $\mathbf{S}$ ρ-термов (ρ-терм есть квазитерм).

Под **термом** будем иметь в виду квазитерм с пустым множеством связанных переменных, под **формулой** – квазиформулу с пустым множеством связанных переменных и пустым множеством ρ-термов.

Из определения следует, что все ρ-квазитермы являются ρ-термами, т. е. ни один ρ-квазитерм не содержит свободных вхождений связанных переменных.

Выражение $\rho xBxy$ не является квазитермом, поэтому выражение $\forall yP(\rho xBxy)$ не есть формула.

Однако в языке с ε-термами $\varepsilon xBxy$ будет квазитермом, а $\forall yP(\varepsilon xBxy)$ – формулой.

Правилами вывода D_1 являются правила логики высказываний D и следующие правила введения и удаления:

$$\forall_{\text{у}}\ \frac{\forall x\mathrm{F}_x^w Aw}{\mathrm{F}_t^w Aw} \qquad\qquad \forall_{\text{в}}\ \frac{Aw}{\forall x\mathrm{F}_x^w Aw}$$

$$\exists_{\text{у}}\ \frac{\exists x\mathrm{F}_x^w Aw}{[\rho xAx]\mathrm{F}_{\rho xAx}^w Aw} \qquad\qquad \exists_{\text{в}}\ \frac{\mathrm{F}_t^w Aw}{\exists x\mathrm{F}_x^w Aw}$$

$$\rho_{\text{у}}\ \frac{[\rho xAx]\mathrm{F}_{\rho xAx}^w Bw}{\exists x\mathrm{F}_x^w Bw} \qquad\qquad \rho_{\text{в}}\ \frac{\forall x\mathrm{F}_x^w Bw \quad \exists yAy}{[\rho yAy]\mathrm{F}_{\rho yAy}^w Bw}$$

$$[\ ]_{\text{у}1}\ \frac{[\rho xAx]\mathrm{F}_{\rho xAx}^w C}{C} \qquad\qquad [\ ]_{\text{в}1}\ \frac{\forall y\mathrm{F}_y^w[\rho xAx]\mathrm{F}_{\rho xAx}^v B}{[\rho xAx]\mathrm{F}_{\rho xAx}^v \forall y\mathrm{F}_y^w B}$$

В $\exists_{в}$ переменная w не входит в ρ-термы, в $[\ \ ]_{у1}$ переменная w не входит в формулу C и в $[\ \ ]_{в1}$ терм ρxAx не содержит w.

$$[\ \ ]_{у2}\ \frac{[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}Bw}{\exists xAx} \qquad [\ \ ]_{в2}\ \frac{[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}(B\supset D)}{[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}B\supset[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}D}$$

Вывод для D_1 ($\mathrm{D}_1\mathrm{C}$ и $\mathrm{D}_1\mathrm{I}$) определяется так же, как и для D, но без ограничения на $\supset_{в}$, выделенного в пункте 4 курсивом.

Лемма 1. *Если* α *есть вывод формулы* E *из посылок* $B_1, \ldots, B_k$, *переменная* w *не варьируется в этом выводе и в* ρxAx *не входит ни одна переменная, варьируемая в выводе* α, *то существует вывод формулы* $[\rho xAx]\,\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}\,E$ *из посылок* $[\rho xAx]\,\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}\,B_1, \ldots, [\rho xAx]\,\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}\,B_k$.

Доказательство.

Так как существует вывод формулы E из посылок $B_1, \ldots, B_k$ в D_1, то существует доказательство формулы

$$\forall x\,\mathrm{F}^{w}_{x}(\overline{B}1\supset(\overline{B}2\supset\ldots\ldots\supset(\overline{B}k\supset E)\ldots),$$

где $\overline{B}i$ есть замыкание всеобщности по всем переменным, варьируемым в α.

Далее вывод строим следующим образом:

k+1.	$[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}B_i$	посылка
k+2.	$[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}\overline{B}_i$	$\forall_{в}$; $[\ \ ]_{в1}$; k+1
k+3.	$\exists xAx$	$[\ \ ]_{у2}$; k+2
k+4.	$[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}(\overline{B}1\supset(\ldots\ldots\supset(\overline{B}k\supset E)\ldots))$	$\rho_{в}$; k+1, k+3
k+5.	$[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}\overline{B}1\supset(\ldots\ldots\supset([\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}\overline{B}k\supset[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}E)\ldots)$	$[\ \ ]_{в2}$
k+6.	$[\rho xAx]\mathrm{F}^{w}_{\rho xAx}E$	m. p.; k+2, k+5.

Из леммы 1 извлекаются некоторые следствия. Выражение

$$[t_1]\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ldots\ldots[t_k]\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}$$

будем называть приставкой формулы $[t_1]\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ldots\ldots[t_k]\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}\,B$.

Следствие 1. Если $[t_1]\mathrm{F}_{t_1}^{v_1}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k}$ есть приставка, $\dfrac{B}{E}$ правило вывода D_1, переменные $v_1, \ldots, v_k$ не варьируются и ни одна варьируемая переменная не входит в $t_1, \ldots, t_k$, то

$$\frac{[t_1]\mathrm{F}_{t_1}^{v_1}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B}{[t_1]\mathrm{F}_{t_1}^{v_1}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} E}$$

есть допустимое правило D_1.

Доказательство осуществляется по числу членов приставки на основе леммы 1.

Следствие 2. Если переменная v_i не входит в формулу

$[t_{i+1}]\mathrm{F}_{t_{i+1}}^{v_{i+1}}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B$, то

$$\frac{[t_1]\mathrm{F}_{t_1}^{v_1}......[t_{i-1}]\mathrm{F}_{t_{i-1}}^{v_{i-1}}[t_i]\mathrm{F}_{t_i}^{v_i}[t_{i+1}]\mathrm{F}_{t_{i+1}}^{v_{i+1}}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B}{[t_1]\mathrm{F}_{t_1}^{v_1}......[t_{i-1}]\mathrm{F}_{t_{i-1}}^{v_{i-1}}[t_{i+1}]\mathrm{F}_{t_{i+1}}^{v_{i+1}}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B}$$

есть допустимое правило D_1.

Доказательство.

$$\frac{[t_i]\mathrm{F}_{t_i}^{v_i}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B}{[t_{i+1}]\mathrm{F}_{t_{i+1}}^{v_{i+1}}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B}$$

есть правило $[\ ]_y$.

Применяя следствие 1, получаем искомый результат.

Следствие 3. Если формула $[t_{i+1}]\mathrm{F}_{t_{i+1}}^{v_{i+1}}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B$ не содержит переменной w и $\exists x A(x)$, то

$$\frac{[t_1]\mathrm{F}_{t_1}^{v_1}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B}{[t_1]\mathrm{F}_{t_1}^{v_1}......[t_i]\mathrm{F}_{t_i}^{v_i}[\rho x A x]\mathrm{F}_{\rho x A x}^{w}[t_{i+1}]\mathrm{F}_{t_{i+1}}^{v_{i+1}}......[t_k]\mathrm{F}_{t_k}^{v_k} B}$$

есть допустимое правило D_1.

Определим ранг ρ-терма:

1. Терм $\rho x A(x)$ есть терм нулевого ранга, если в формулу $\mathrm{F}_v^x A(x)$ не входят ρ-термы.

2. Терм $\rho x A(x)$ есть терм $k + 1$-го ранга, если в формулу $\mathrm{F}^{x}_{v} A(x)$ входит по крайней мере один ρ-терм ранга k и не входит ни один терм ранга $> k$.

Выражение $[t_1]$, где t_1 есть ρ-терм, будем называть дескриптором, последовательность дескрипторов – дескрипторной приставкой. Дескрипторная приставка находится в *стандартной форме*, если все дескрипторы разбиты на группы по рангам, и каждая группа меньшего ранга находится влево от групп с большим рангом.

Формула в стандартной форме есть формула вида:

$$[t_1]......[t_k]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\,......\,^{v_k}_{t_k}\,B,$$

где $[t_1]......[t_k]$ – дескрипторная приставка в стандартной форме, $v_1, \ldots, v_k$ – различные переменные, $\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\,......\,^{v_k}_{t_k}$ – одновременная подстановка, B – формула без вхождений ρ-термов. Термы $t_1, \ldots, t_k$ не содержат вхождений переменных $v_1, \ldots, v_k$, кроме случая, когда индекс у терма и переменной один и тот же.

Формулу исчисления D_1 будем называть формулой в *нормальной форме*, если она имеет вид $[t_1]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\,......[t_k]\,\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}\,B$, где $t_1, \ldots, t_k$ ρ-термы ранга 0, B – формула, не содержащая вхождений ρ-термов и выражения $[t_1]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}$, ..., $[t_k]\,\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}$ упорядочены таким образом, что термы самой левой группы не содержат вхождений переменных $v_1, \ldots, v_k$ (кроме переменной, вместо которой подставляется сам терм). Следующая группа термов содержит по крайней мере одну переменную, вместо которой подставляются термы первой группы, в третью группу входят термы, содержащие по крайней мере одну из переменных, вместо которых подставляются термы второй группы (и возможно переменные, вместо которых подставляются термы первой группы) и т. д.

Терм некоторой группы не содержит переменных, вместо которых подставляются термы той же группы, кроме переменной, вместо которой он подставляется.

В D_1, при условии, что переменные w и v различны, ρ-терм t_1 не содержит вхождений переменной v, а ρ-терм t_2 вхождений переменной w, то формулы $[t_1]\,\mathrm{F}^{w}_{t_1}[t_2]\,\mathrm{F}^{v}_{t_2}\,B$, $[t_2]\,\mathrm{F}^{v}_{t_2}\,[t_1]\,\mathrm{F}^{w}_{t_1}B$, $[t_1][t_2]\,\mathrm{F}^{w\ v}_{t_1\ t_2}\,B$ и

$[t_2][t_1]\,F^{w\ v}_{t_1\ t_2}\,B$ эквивалентны. Если формула B не содержит w и $\exists xA(x)$, то B эквивалентна $[\rho xA(x)]F^{w}_{\rho xA(x)}B$.

Действительно, поскольку t_2 не содержит w, то $[t_1]\,F^{w}_{t_1}[t_2]\,F^{v}_{t_2}\,B \equiv$ $[t_1][t_2]\,F^{w\ v}_{t_1\ t_2}\,B$. Но так как t_1 не содержит переменной v и t_2 переменной w, то $F^{w}_{t_1}\,F^{v}_{t_2}\,B \equiv F^{w\ v}_{t_1\ t_2}\,B$. Отсюда $[t_1][t_2]\,F^{w}_{t_1}\,F^{v}_{t_2}\,B \equiv [t_1][t_2]\,F^{w\ v}_{t_1\ t_2}\,B$; по транзитивности эквивалентности получается, что

$$[t_1]\,F^{w}_{t_1}[t_2]\,F^{v}_{t_2}\,B \equiv [t_1][t_2]\,F^{w\ v}_{t_1\ t_2}\,B.$$

Остальные эквивалентности доказываются аналогично.

Пусть B не содержит w и $\exists xA(x)$. Тогда по $\forall_{\text{в}}$ получаем $\forall x\,F^{w}_{x}\,B$ и по $\rho_{\text{в}}$ – $[\rho xA(x)]F^{w}_{\rho xA(x)}B$. Наоборот, из $[\rho xA(x)]F^{w}_{\rho xA(x)}B$ по правилу $[\ \ ]_{\text{у}}$ получаем B.

Указанное соотношение позволяет представлять формулы в нормальной форме следующим образом:

$$[t_1^1][t_2^1]\ldots[t_l^1]F^{v_1^1\ \ldots\ v_l^1}_{t_1^1\ \ldots\ t_l^1}\ldots[t_1^j]\ldots[t_m^j]F^{v_1^j\ \ldots\ v_m^j}_{t_1^j\ \ldots\ t_m^j}\,B\,.$$

Здесь верхний индекс указывает номер группы, нижний – номер терма и переменной внутри группы.

Л е м м а 2. *Для всякой формулы в нормальной форме может быть указана ей эквивалентная формула в стандартной форме, и наоборот.*

Для доказательства леммы нам потребуются известные соотношения между последовательностью подстановок и одновременной подстановкой.

Пусть v и w различные переменные; тогда

$$F^{v}_{t_1}\,F^{w}_{t_2}\,B \equiv F^{v\quad w}_{t_1\ F^{v}_{t_1}t_2}\,B \qquad \text{(I)}$$

$$F^{v\ w}_{t_1\ t_2}\,B \equiv F^{v}_{t_1}\,F^{w}_{F^{t_1}_{v}t_2}\,B \qquad \text{(II)}$$

I может быть обобщено

$$F^{v_1\ldots v_k}_{t_1\ldots t_k}\,F^{v_{k+1}}_{t_{k+1}}\,B \equiv F^{v_1\ldots v_k\quad v_{k+1}}_{t_1\ldots t_k\ F^{v_1\ldots v_k}_{t_1\ldots t_k}t_{k+1}}\,B \qquad \text{(Ia)}$$

$$\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \mathrm{F}^{v_2\ldots v_k}_{t_2\ldots t_k}\ B \equiv \mathrm{F}^{v_1\ v_2\ldots\ \ v_k}_{t_1\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}t_2\ldots\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}t_k}\ B \qquad \text{(Ib)}$$

Применяя последовательно (Ia) или (Ib), получим:

$$\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \ldots\ \mathrm{F}^{v_k}_{t_k}\ B \equiv \mathrm{F}^{v_1\ldots v_k}_{q_1\ldots q_k}\ B,$$

где $q_1 = t_1$ и для $i > 1$ $q_i = \mathrm{F}^{v_1\ldots v_{i-1}}_{q_1\ldots q_{i-1}} t_i$

Пусть имеется формула в нормальной форме; она будет иметь вид

$$[t_1]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \ldots\ [t_k]\,\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}\ B.$$

Учитывая, что подстановка в формулу есть подстановка в подформулы и, применяя последовательно (Ia), получаем:

$$[t_1]\ [\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ t_2]\,\mathrm{F}^{v_1\ v_2}_{t_1\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}t_2}\ [t_3]\,\mathrm{F}^{v_3}_{t_3}\ \ldots\ [t_k]\,\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}\ B.$$

Затем

$$[t_1]\ [\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ t_2]\ [\,\mathrm{F}^{v_1\ v_2}_{t_1\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}t_2}\ t_3]\ \mathrm{F}^{v_1\ \ v_2\ \ \ v_3}_{t_1\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}t_2\mathrm{F}^{v_1\ v_2}_{t_1\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}t_2}t_3}\ [t_4]\,\mathrm{F}^{v_4}_{t_4}\ \ldots\ [t_k]\,\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}\ B$$

и т. д., и учитывая соглашение, что $q_1 = t_1$ и $q_i = \mathrm{F}^{v_1\ldots v_{i-1}}_{q_1\ldots q_{i-1}} t_i$ для $i > 1$,

получаем $[q_1]\ [q_2]\ \ldots\ [q_k]\,\mathrm{F}^{v_1\ldots v_k}_{q_1\ldots q_k}\ B$. В этой формуле дескрипторная приставка имеет стандартную форму, так как ранг терма, входящего в дескрипторы, соответствует переменной, замещенной термом.

Имеет место и обратное. Пусть имеется формула в стандартной форме. Может оказаться, что не для всякой дескрипции, входящей в формулу, найдется дескриптор в дескрипторной приставке. Но эту формулу можно расширить до полной стандартной формы, т. е. такой, в дескрипторную приставку которой входят все дескрипторы, соответствующие дескрипциям, входящим в формулу. Для этого достаточно выбрать переменные, не входящие в B и отличные от переменных, вместо которых делается подстановка. Разместив дескрипторы на соответствующие места дескрипторной приставки, получим формулу в полной стандартной форме.

Например, $[\rho x A(x,\ \rho y B(y))]\ C\ (\rho x \mathrm{A}(\mathrm{x},\ \rho y B(y)))$ есть формула в стандартной, но не полной стандартной форме. Полной стандартной формой будет формула $[\rho y B(y)]\ [\rho x A(x,\ \rho y B(y))]\ C(\rho x A(x,\ \rho y B(y)))$, или что то же

$[\rho y B(y)]\ [\rho x A(x, \rho y B(y))]\ \mathrm{F}^{\ v}_{\rho y B(y)}\ {}^{v}_{\rho x A(x, \rho y B(y))}\ C(w)$. Эквивалентность формул в полной и неполной стандартных формах имеет место при условии, что доказано существование объектов, удовлетворяющих условиям, по которым образованы дескриптивные выражения.

Перейдем к доказательству второй половины леммы. (II) может быть обобщена до

$$\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \ldots\ \mathrm{F}^{v_{k+1}}_{t_{k+1}}\, B \equiv \mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \mathrm{F}^{v_2 \ldots\ldots v_k}_{\mathrm{F}^{t_1}_{v_1} t_2 \ldots \mathrm{F}^{t_1}_{v_1} t_k}\ B \qquad \text{(IIa)}$$

Пусть имеется формула в полной стандартной форме

$$[t_1]\ldots\ldots[t_k]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \ldots\ldots\ {}^{v_k}_{t_k}\ B$$

Применяя (IIa), получаем:

$$[t_1]\ldots\ldots[t_k]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \mathrm{F}^{v_2}_{\mathrm{F}^{t_1}_{v_1} t_2}\ \ldots\ldots\ \mathrm{F}^{v_k}_{\mathrm{F}^{t_1}_{v_1} t_k}\ B$$

Поскольку термы $t_2, \ldots, t_k$ не содержат вхождений переменной v_1, то получаем эквивалентную формулу:

$$[t_1]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ [t_2]\ldots\ldots[t_k]\,\mathrm{F}^{v_2}_{\mathrm{F}^{t_1}_{v_1} t_2}\ \ldots\ldots\ \mathrm{F}^{v_k}_{\mathrm{F}^{t_1}_{v_1} t_k}\ B$$

Повторяя указанный процесс, получаем формулу в нормальной форме.

Лемма доказана.

Пусть $B' = [t_1]\,\mathrm{F}^{v_1}_{t_1}\ \ldots\ [t_k]\,\mathrm{F}^{v_k}_{t_k}\ B$ и $C' = [q_1]\,\mathrm{F}^{w_1}_{q_1}\ \ldots\ [q_e]\,\mathrm{F}^{w_e}_{q_e}\ C$ согласованы и обе находятся в нормальной форме. Приставку первой формулы обозначим знаком d_1, второй – d_2. Пусть d_3 есть объединение приставок d_1 и d_2. Под объединением двух приставок будем иметь в виду объединение одинаковых групп из d_1 и d_2 в одну группу и образование из этих групп новой нормальной приставки.

Например, пусть d_1 есть $[\rho x A(x)]\,\mathrm{F}^{v}_{\rho x A(x)}\,[\rho y B(v, y)]\,\mathrm{F}^{w}_{\rho y B(v,y)}$ и d_2 есть $[\rho x C(x)]\,\mathrm{F}^{u}_{\rho x C(x)}\,[\rho x A(x)]\,\mathrm{F}^{v}_{\rho x A(x)}\,[\rho z D(z, u, v)]\,\mathrm{F}^{w_1}_{\rho z D(z,u,v)}$.

Эти приставки согласованы. Их объединением будет приставка

$$[\rho x A(x)]\,\mathrm{F}^{v}_{\rho x A(x)}\,[\rho x C(x)]\,\mathrm{F}^{u}_{\rho x C(x)}\,[\rho y B(v, y)]\,\mathrm{F}^{w}_{\rho y B(v,y)}$$

$$[\rho z D(z, u, w)]\,\mathrm{F}^{w_1}_{\rho z D(z,u,w)}.$$

Лемма 3. *Если* $\dfrac{B, C}{E}$ *допустимое правило вывода,* d_1 *и* d_2 *– согласованные нормальные приставки и* d_3 *их объединение, то* $\dfrac{d_1 B, d_2 C}{d_3 E}$ *есть допустимое правило* D_1.

Из формул d_1B и d_2C выводима формула d_3B. Начнем процесс с d_1B; если первый член приставки совпадает с одним из членов d_1, то переходим к рассмотрению следующего члена; если отличается, то добавляем его в соответствующую группу приставки d_1. Этот член удовлетворяет условию существования (правило $[\ ]_y$). Поэтому выражение с вновь образованной приставкой выводимо из d_1B – в силу следствия 3 леммы 1. Продолжая этот процесс, получаем формулу d_3B, выводимую из d_1B. Для обоснования того, что соответствующие члены из d_2 удовлетворяют условию существования, достаточно правила

$$\frac{[\rho x A_1(x)]\mathrm{F}^{\nu_1}_{\rho x A_1(x)} \ldots [\rho x A_k(x)]\mathrm{F}^{\nu_k}_{\rho x A_k(x)} C}{\exists x A_i(x)}$$

Но это правило допустимо в D_1.

Аналогично из d_1B и d_2C выводима d_3C. Но из d_3B и d_3C по лемме 2 – при условии, что из B и C выводима E – выводима формула d_3E.

Будем говорить, что $\dfrac{dB}{dE}$ и $\dfrac{d_1B, d_2C}{d_3E}$ есть D-правила, соответствующие правилам $\dfrac{B}{E}$ и $\dfrac{B, C}{E}$; если d, d_1, d_2, d_3 есть нормальные приставки без фиктивных членов, d_3 – сокращение объединения согласованных приставок d_1 и d_2.

D-правила, допустимые в исчислении D_1, будем обозначать тем же способом, что и правила введения и удаления D_1, ставя впереди обозначений этих правил букву D. Например, $D\&_y$ есть правила вида:

$$\frac{[t_1]\mathrm{F}^{\nu_1}_{t_1} \ldots\ldots [t_k]\mathrm{F}^{\nu_k}_{t_k} (B \,\&\, C)}{[t_1]\mathrm{F}^{\nu_1}_{t_1} \ldots\ldots [t_k]\mathrm{F}^{\nu_k}_{t_k} B}.$$

При этом в приставке нижней формулы выброшены все фиктивные члены. Переход от объединения приставок к сокращенной приставке осуществлен согласно следствию 2 леммы 1.

На основании леммы 1 и леммы 4 (и следствия 3 леммы 1) мы можем утверждать, что всякое D-правило, соответствующее прямому правилу введения или удаления, допустимо в D_1.

Теорема 3. *Всякому выводу* α *из посылок* Γ *исчисления* D, *если посылки* Γ *не содержат* ρ*-термов, может быть сопоставлен вывод* α' *исчисления* D_1 *из посылок* Γ', *при этом каждая формула, входящая в* α', *есть формула в нормальной форме; если последняя формула вывода* α *не содержит* ρ*-термов, то последняя формула вывода* α' *также не содержит* ρ*-термов.*

Доказательство.

Доказательство будем вести индукцией по построению вывода исчисления D.

Базис. Вывод исчисления D состоит из одной формулы. Поскольку эта формула есть посылка, то по условию она не содержит ρ-термов. Эта же фигура является и выводом исчисления D_1; формула, входящая в вывод, находится в нормальной форме, так как она вообще не содержит ρ-термов. Последняя формула этого вывода не содержит ρ-термов.

Индукционный шаг. Возможны три случая:

1. Вывод из посылок Γ исчисления D имеет вид $<\alpha E>$, где E непосредственно выводима из последней формулы вывода α из посылок Γ.

2. Вывод из посылок Γ исчисления D имеет вид $<\alpha_1\alpha_2 E>$, где α_1 есть вывод из посылок Δ_1, α_2 есть вывод из посылок Δ_2, $\Gamma = \Delta_1 \cup \Delta_2$ и формула E непосредственно выводима из последних формул вывода α_1 и вывода α_2.

3. Вывод из посылок Γ исчисления D имеет вид $<[\alpha]\ A \supset E>$, где α есть вывод из посылок $\Gamma \cup \{A\}$, E – последняя формула вывода α, ни одна переменная не варьируется относительно посылки A и формулы A и E не содержат ρ-термов.

Случай 1. По индуктивному предположению выводу α исчисления D может быть сопоставлен вывод α' исчисления D_1, все формулы вывода α' суть формулы в нормальной форме. Пусть B есть последняя формула вывода α и E получена из B по некоторому правилу $\frac{B}{E}$. Формуле B в выводе α' соответствует некоторая формула dB, где d есть нормальная приставка.

Если правило $\frac{B}{E}$ есть правило пропозициональной логики, $\forall_у$ или $\forall_в$, то по первому следствию леммы 1 из dB выводима формула dE и $<\alpha' dE>$ есть вывод исчисления D_1.

Если $\frac{B}{E}$ есть правило $\exists_у$, то по следствию 1 леммы 1 получаем

$$\frac{d\exists x A(x)}{d[\rho x A(x)] A(\rho x A(x))},$$

где $B = \exists x A(x)$ и $E = A(\rho x A(x))$. Тогда $<\alpha' d[\rho x A(x)]\ A(\rho x A(x))>$ есть вывод D_1 и его последняя формула находится в нормальной форме.

Если $\frac{B}{E}$ есть $\exists_в$, то по следствию 1 леммы 1 получаем

$$\frac{dA(w)}{d\exists x A(x)},$$

где $B = A(w)$ и $E = \exists x A(x)$.

Затем на основании следствия 2 леммы 1 уменьшаем приставку d за счет удаления члена $[t]\,\mathrm{F}_t^w$, затем, повторяя этот процесс, удаляем все члены вида $[t_i]\,\mathrm{F}_{t_i}^{v_i}$, если v_i не входит в часть формулы, стоящей справа от $[t_i]\,\mathrm{F}_{t_i}^{v_i}$. В результате получим формулу в нормальной форме вида $d'\exists x A(x)$ в из $A(w)$ выводима $d'\exists x A(x)$. На основании леммы 3 можно показать, что $dA(w)$ эквивалентна формуле в полной стандартной форме вида $\rho_1\,\mathrm{F}_{t_1 \ldots t_k q}^{v_1 \ldots v_k w}$, а $d'\exists x A(x)$ эквивалентна формуле вида $\rho_2\,\mathrm{F}_{t_1 \ldots t_k}^{v_1 \ldots v_k}$, где ρ_1 и ρ_2 полные стандартные приставки. Из последнего соотношения ясно, что если $\exists x A(x)$ в выводе исчисления D не содержала ρ-термов, то и $d'\exists x A(x)$ не содержит вхождений ρ-термов.

Пусть $\frac{B}{E}$ есть правило $\rho_у$. По индуктивному предположению последняя формула есть формула в нормальной форме, т. е. имеет вид dB; причем в d входит член вида $[t]\,\mathrm{F}_t^w$. По следствию 1 леммы 1 из dB выводима $d\exists x\,\mathrm{F}_x^w B$. Устраняя в d член $[t]\,\mathrm{F}_t^w$ и все другие члены по следствию 2 леммы 1, получаем результаты, аналогичные предыдущему подслучаю.

Случай 2. По индуктивному предположению выводам α_1 и α_2 исчисления D могут быть сопоставлены выводы α_1' и α_2' исчисления D_1, все формулы этих выводов суть формулы в нормальной форме.

Пусть B и C последние формулы выводов α_1 и α_2 соответственно. Формула E получена из формул B и C по некоторому правилу $\frac{B, C}{E}$. По лемме 4 получаем $\frac{d_1 B, d_2 C}{d_3 E}$ и $<\alpha_1'\alpha_2' d_3 E>$ вывод D_1, последняя формула которого находится в нормальной форме. Как и в случае 1, если E не содержит ρ-термов, то и d_3E не содержит ρ-термов.

Случай 3. По индуктивному предположению выводу α из посылок $\Gamma \cup \{A\}$ сопоставляем вывод α' из тех же посылок. По условию формула A и последняя формула E вывода α не содержат ρ-термов. Отсюда и последняя формула α' не содержит ρ-термов. По $\supset_{\text{в}}$ для D_1 получаем вывод $<[\alpha']\ A \supset E>$ из Г. $A \supset E$ не содержит ρ-термов, поэтому она является нормальной формулой.

Таким образом, теорема доказана.

Пусть HD есть исчисление H, расширенное за счет добавления контекстуального определения

$$[\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{w}_{\rho x A(x)} B =_{\mathrm{Df}} \exists x A(x)\ \&\ \forall y\, \mathrm{F}^{w}_{y} (A(w) \supset B).$$

Теорема 4. *Если из* Г *выводима в* D_1 *формула A, то из* Г *выводима* в HD *формула A.*

Доказательство.

Для доказательства достаточно показать, что каждое правило вывода D_1 является допустимым правилом вывода HD. Но это имеет место. Правила для логики высказываний совпадают, совпадают также $\forall_{\text{у}}$, $\forall_{\text{в}}$ и $\exists_{\text{в}}$.

Для остальных случаев:

$\exists x A(x) \vdash [\rho x A(x)]\ A(\rho x A(x))$ в HD, так как в нем
$\exists x A(x) \vdash \exists x A(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset A(x))$.
$[\rho x A(x)]\ B(\rho x A(x)) \vdash \exists x B(x)$ в HD, так как в нем
$\exists x A(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset B(x)) \vdash \exists x B(x)$.
$\forall x B(x), \exists x A(x) \vdash [\rho x A(x)]\ B(\rho x A(x))$ в HD, так как в нем
$\forall x B(x), \exists x A(x) \vdash \exists x A(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset B(x))$.

$[\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{w}_{\rho x A(x)} C \vdash C$, где C не содержит w,

имеет место в HD, так как в нем

$\exists x A(x)\ \&\ \forall x\, \mathrm{F}^{w}_{x} (A(x) \supset C) \vdash C$ (при условии, что C не содержит w).

$[\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{w}_{\rho x A(x)} B \vdash \exists x A(x)$ в HD, так как в нем

$\exists x A(x)\ \&\ \forall x\, \mathrm{F}^{w}_{x} (A(w) \supset B(w)) \vdash \exists x A(x)$.

$\forall y\, \mathrm{F}^{w}_{y} [\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{v}_{\rho x A(x)} B \vdash [\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{v}_{\rho x A(x)}\ \forall y\, \mathrm{F}^{w}_{y} B$ в HD, т. к. в HD

$\forall y(\exists x A(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset \mathrm{B})) \vdash \exists x A(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset \forall y B(y))$.

$[\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{w}_{\rho x A(x)} (B \supset D) \vdash [\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{w}_{\rho x A(x)} B \supset [\rho x A(x)]\, \mathrm{F}^{w}_{\rho x A(x)} D$

в HD, т. к. в HD

$\exists xA(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset \mathrm{F}_x^w (B \supset D)) \vdash \exists xA(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset \mathrm{F}_x^w B) \supset$

$\supset \exists xA(x)\ \&\ \forall x(A(x) \supset \mathrm{F}_x^w D)$.

Построение всех искомых в HD выводов тривиально. Таким образом теорема доказана.

Следствие. Всякий вывод формулы A из посылок Γ исчисления D_1, не содержащий в посылках и заключении ρ-термов, редуцируется в вывод формулы A из посылок Γ исчисления H.

Действительно, поскольку в посылках не содержатся ρ-термы, то в выводе A из Γ в исчислении D_1 не встречаются ρ-термы без указания области действия, поскольку все правила D_1 вводят ρ-термы только вместе с указанием их области действия. Но все вхождения ρ-термов с указанием их области действия могут быть элиминированы согласно принятому определению.

Из теоремы 3 и следствия теоремы 4 получаем теорему 2: *Если из посылок* Γ в D *выводима формула A, и ни посылки* Γ, *ни формула A не содержат* ρ-*термов, то из* Γ в H *выводима формула A.*

§ 8. ПРАВИЛО $\exists_{\text{у}}$ В ФОРМУЛИРОВКЕ Е. СЛУПЕЦКОГО

От системы D очень естественно перейти к формулировке правил введения и удаления кванторов, предложенных, Е. Слупецким [32].

Прежде всего отметим, что если в системе D построен вывод формулы B из посылок Γ и ни в посылках, ни в заключении нет ρ-выражений, то в системе D может быть построен вывод формулы B из посылок Γ, в котором вместо правила $\rho_{\text{в}}\ \dfrac{\forall xB(x) \quad \exists xA(x)}{B(\rho xA(x))}$ применяется правило

$\rho_{\text{в}}'\ \dfrac{\forall xB(x)}{B(\rho xA(x))}$.

Действительно, при введении терма $\rho xA(x)$ посредством правила $\rho_{\text{в}}$ имеются две возможности: (1) терм $\rho xA(x)$ тождествен некоторому терму, вводимому посредством $\exists_{\text{у}}$, (2) терм $\rho xA(x)$ не тождествен терму, вводимому правилом $\exists_{\text{у}}$.

В первом случае можно вынести все посылки в начало вывода и тогда налицо посылка $\exists xA(x)$.

Во втором случае терм $\rho xA(x)$ может вводиться правилом $\rho_{\text{в}}$ несколько раз, но естественно конечное число k, допустим в формулы

$\forall xB^1(x)$, $\forall xB^2(x)$, . . . , $\forall xB^k(x)$. Тогда вместо $\rho xA(x)$ мы вводим терм $\rho xB^1(x)$. Этот терм мы можем ввести, так как $\forall xB(x) \vdash \exists xB(x)$ и $\forall xB(x)$, $\exists xB(x) \vdash B(\rho xB(x))$.

Отсюда

$\forall xB(x) \vdash B(\rho xB(x))$.

Этот же терм вводим во всех тех случаях, в которых вводился $\rho xA(x)$. При этом надо соблюдать правильность подстановки. Но это всегда можно сделать, предварительно осуществив переименование связанных переменных. Произведя затем исключение $\rho xB(x)$ на том же месте, где исключался $\rho xA(x)$, получим искомый вывод.

Если мы теперь каждому ρ-выражению, встречающемуся в выводе, сопоставим константу (т. е. одну из букв *a, b, c, d*), выписав при ней в качестве индексов все свободные переменные ρ-выражения и при этом всем различным ρ-выражениям будут сопоставлены различные константы, а одинаковым одинаковые, то мы получим некоторый способ записи того же вывода из D (с правилом $\rho_в'$). При этом одну и ту же букву с различными индексами будем считать различными константами.

При такой кодификации правило $\exists_у$ превратится в $\dfrac{\exists xA(x)}{A(a_{w_1,\ldots,w_k})}$, где $w_1, \ldots, w_k$ – все свободные переменные формулы $\exists xA(x)$. Правило $\rho_у$ превратится в $\dfrac{B(t)}{\exists xB(x)}$, $\rho_в$ превратится в $\dfrac{\forall xB(x)}{B(t)}$.

Такое соглашение о сокращении должно вводиться для каждого вывода порознь.

А теперь ничто нам не мешает вводить и элиминировать константы сразу, не рассматривая их как сокращения для некоторых ρ-выражений. При этом должны соблюдаться два условия.

(1) Каждое применение правила $\exists_у$ должно вводить новую константу, по сравнению с ранее введенными этим же правилом.

(2) При применений правила $\exists_у$ должны вводиться константы с индексами, соответствующими всем свободным переменным посылки.

Естественно, подстановка констант должна быть правильной в том же смысле, как и подстановка дескрипций.

Понимая теперь под *t* переменную или константу, мы получаем следующие правила введения и удаления кванторов:

$$\forall_{\text{у}}\ \frac{\forall x \mathrm{F}^{w}_{x} A}{\mathrm{F}^{w}_{t} A}, \qquad \forall_{\text{в}}\ \frac{A}{\forall x \mathrm{F}^{w}_{x} A},$$

$$\exists_{\text{у}}\ \frac{\exists x \mathrm{F}^{w}_{t} A}{\mathrm{F}^{w}_{a_{w_1,\ldots,w_k}} A}, \qquad \exists_{\text{в}}\ \frac{\mathrm{F}^{w}_{t} A}{\exists x \mathrm{F}^{w}_{x} A},$$

где $w_1, \ldots, w_k$ все свободные переменные A, отличные от w.
А это и есть кванторные правила в формулировке Е. Слупецкого.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асмус В. Ф.* Учение логики о доказательстве и опровержении. М., 1954.
2. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М., 1965, гл. 1.
3. *Ван Хао.* На пути к механической математике. – Кибернетический сборник, 5, 1962.
4. *Войшвилло Е. К.* Опыт построения исчисления предикатов, приближенного к естественному языку. – Логическая структура научного знания. М., 1965.
5. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965.
6. *Генцен Г.* Исследования логических выводов, в [26].
7. *Генцен Г.* Непротиворечивость чистой теории чисел, в [26].
8. *Генцен Г.* Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел, в [26].
9. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М. – Л., 1948. Добавления VII – X.
10. *Гильберт Д.* Об основаниях логики и арифметики, в [9].
11. *Гильберт Д.* О бесконечном, в [9].
12. *Гильберт Д.* Обоснования математики, в [9].
13. *Гильберт Д.* Проблемы обоснования математики, в [9].
14. *Гильберт Д.* и *Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947.
15. *Гудстейн Р. Л.* Математическая логика. М., 1961.
16. *Гуревич Ю. Ш.* Об эффективном распознавании выполнимости формул УИП. – Алгебра и логика (семинар). М., 1966, 5, № 2.
17. *Кангер С.* Упрощенный метод доказательства для элементарной логики, в [26].
18. *Карри Х.* Основания математической логики, М., 1969.
19. *Клини С. К.* Введение в метаматематику, М., 1957.
20. *Клини С. К.* Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях, в [26].
21. *Кузнецов А. В.* Алгебра логики. – Философская энциклопедия, т. 1, М., 1960.
22. *Линдон Р.* Заметки по логике. М., 1968.
23. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
24. *Марков А. А.* Теория алгорифмов. – Труды Математического института АН СССР, 42, М. – Л., 1954.
25. *Марков А. А. О* логике конструктивной математики. – Вестник МГУ, № 2, 1970.
26. Математическая теория логического вывода. Сборник переводов под ред. А. В. Идельсона и Г. Е. Минца. М., 1967.
27. *Минц Г. Е.* Теорема Эрбрана, в [26].

28. *Петер Р.* Рекурсивные функции. М., 1954.
29. *Ревзин И. И.* Метод моделирования и типология славянских языков. М., 1960.
30. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М., 1967.
31. *Серебрянников О. Ф.* Эвристические принципы и логические исчисления. М., 1970.
32. *Слупецкий Е., Борковский Л.* Элементы математической логики и теория множеств. М., 1965.
33. *Смирнов В. А.* Замечания по поводу системы силлогистики и общей теории дедукции. – Проблемы логики. М., 1963.
34. *Смирнов В. А.* Логические системы с формулами – аналогами записей о выводимости. – Логическая структура научного знания. М., 1965.
35. *Смирнов В. А.* Так называемые парадоксы материальной импликации и логические системы с понятием сильного вывода. – Исследование логических систем. М., 1970.
36. *Смирнова Е. Д.* Логическое следование, формальная выводимость и теорема дедукции. – Логика и методология науки. М., 1967.
37. *Френкель А. А., Бар-Хиллел М.* Основания теории множеств. М., 1966.
38. *Хомский Н., Шютценберж М.* Алгебраическая теория контекстно свободных языков. – Кибернетический сборник, 3. М., 1966.
39. *Черч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.
40. *Шютте К.* Интерполяционная теорема для интуиционистского исчисления предикатов, в [26].
41. *Ackerman W.* Begründung einer strengen Implication, JSL, 21, 1956.
42. *Anderson A. R.* and *Belnap N. D.* The pure calculus of entailment. JSL, 23,1958.
43. *Beth E. W.* Foundations of mathematics, Amsterdam, 1959.
44. *Borkowski L., Slupecki J.* A logical system based on rules and its applications in teaching mathematical logic. – Studia logica, vol. 7, 1958.
45. *Fitch F.* Symbolic logic, New-York, 1952.
46. *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagender Mathematik, B. 1, Berlin, 1939; B. 2, Berlin, 1039.
47. *Craig W.* Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand-Gentzen theorem, JSL, 22, 1957 (250-268).
48. *Jaśkowski S.* On the rules of suppositions In formal logic.—Studia logica, 1. Warsawa, 1934.
49. *Kripke S. A.* A completeness theorem in modal logic. JSL, v. 24, 1959.

50. *Kripke S. A.* Semantical analysis of modal logic. – Zeitschrift fur mathematische Logik nnd Grundlagen der Mathematik, Bd. 9, 1963.
51. *Lewis C. I., Langford C.* Symbolic logic, New-York – London, 1932.
52. *Lorenzen P.* Einfuhrung in dio operative Logik und Mathematik, Berlin – Gottingen – Heidelberg, 1955.
53. *Montague R., Kalish D.* Remarks on descriptions and natural deduction. – Archiv fur Math. Logik und Grundlagenforschung, 3, 1957 (50-69, 65-73).
54. *Prawitz D.* Natural deduction. A Proof-Theoretical Study. Stockholm, 1965.
55. *Quine W. V.* On natural deduction, JSL, 15, 1950.
56. *Russell B.* On denoting. Mind, 1905.
57. *Smullyan R. M.* Analytic natural deduction, JSL, 30, 1965 (123 – 139).
58. *Smullyan R. M.* First-order logic, New-York, 1968.
59. *Whitehead A. N., Russell B.* Principia Mathematica, 2 ed., v. 1, Cambridge, 1925.

КОММЕНТАРИИ

К главе 1 «Классическая логика предикатов и ее формализация гильбертовского типа».

В первой главе строится язык логики предикатов первого порядка и семантика этого языка, основанная на понятии полумодели. Под полумоделью понимается непустое множество R, называемое индивидной областью, вместе с функцией T, приписывающей каждой индивидной константе определенный объект из R и каждой k-местной предикатной константе подмножество множества R^k. Для полумодели M и функции f приписывания значения свободным переменным в М стандартным образом вводится понятие «f выполняет формулу A в M». Последнее обозначается посредством Вып(f, A, M). Далее определяется понятие общезначимой в M формулы и универсально общезначимой формулы. Соответственно:

Общ(A, M) $=_{\mathrm{Df}}$ $\forall f$Вып(f, A, M),

Общ(A) $=_{\mathrm{Df}}$ $\forall M$Общ(A, M)

Автор использует предложенную Е.Д.Смирновой классификацию семантических отношений, связанных с интуитивным понятием логического следования и дает точные определения следующих трех фундаментальных семантических отношений: отношения логического следования, отношения следования и отношения следования относительно универсальной общезначимости (дедуктивного следования). С этой целью предварительно определяются логическое следование формулы B из формулы A в полумодели M (сокращенно ЛС(A, B, M)) и следование формулы B из формулы A в полумодели M (сокращенно С(A, B, M)).

ЛС(A, B, M) $=_{\mathrm{Df}}$ $\forall f$(Вып(f, A, M) $\supset$ Вып(f, B, M)),

С(A, B, M) $=_{\mathrm{Df}}$ $\forall f$Вып(f, A, M) $\supset$ $\forall f$Вып(f, B, M).

Затем определяются 1) логическое следование формулы B из множества формул Г (сокращенно ЛС(Г, B)), 2) следование формулы B из множества формул Г (сокращенно С(Г, B)), 3) следование относительно универсальной общезначимости формулы B из множества формул Г (сокращенно ОС(Г, B)).

ЛС(Г, B) $=_{\mathrm{Df}}$ $\forall M$ЛС(Г, B, M),

С(Г, B) $=_{\mathrm{Df}}$ $\forall M$С(Г, B, M),

ОС(Г, B) $=_{\mathrm{Df}}$ $\forall A$($A \in \Gamma \supset$ Общ(A)) $\supset$ Общ(B).

Автор указывает на тот факт, что самым сильным из трех определенных выше отношений является логическое следование, а самым слабым – дедуктивное следование. В результате обсуждения вопроса о том, какое из этих отношений соответствует интуитивному пониманию следования, автор делает вывод, что поскольку в рассуждении некоторые свободные переменные могут не рассматриваться в интерпретации всеобщности, то интуитивному пониманию следования соответствует понятие ЛС(Г, A). Далее определяется ряд других семантических понятий и предлагается обобщение трех рассмотренных выше отношений следования.

Возникает допрос о возможности аксиоматизации и формализации таких семантических предикатов как общезначимость, логическое следование, следование, дедуктивное следование. Автор обсуждает этот вопрос, используя следующие определения аксиоматизации, формализации в собственном смысле и формализации в несобственном смысле некоторого предиката. Под аксиоматизацией некоторого свойства или отношения P, заданного над конструктивно порожденной областью R, имеется в виду нахождение рекурсивно-перечислимого предиката Q, заданного на той же области и эквивалентного P. Под формализацией в собственном смысле некоторого предиката P, заданного над конструктивно-порожденной областью R, имеется в виду нахождение рекурсивного предиката Q (разрешимого относительно R) такого, что Q эквивалентно P. Под формализацией n- местного предиката P в несобственном смысле будем имеется в виду нахождение n + 1-местного рекурсивного предиката Q, такого, что P выразим в форме $\exists yQ(y)$.

Аксиоматизация и формализация в несобственном смысле приводят к выработке рекурсивно-перечислимого предиката. Например, свойство универсальной общезначимости в логике предикатов первого порядка аксиоматизируемо и формализуемо в несобственном смысле, но не формализуемо в собственном смысле. Рассматривая проблему формализации свойства универсальной общезначимости посредством исчислений гильбертовского типа, В.А.Смирнов формулирует следующий, остающийся открытым до настоящего времени вопрос: «Нельзя ли найти такое конечное множество аксиом и конечное множество правил вывода, воспроизводящих отношение логического следования, чтобы исчисление, построенное на них (при обычных правилах построения вывода) полностью формализовало бы (в несобственном смысле – *В.П.*) отношение логического следования ?».

В ходе исследования возможных способов формализации отношения логического следования, использующих ограничения на применения правил вывода, которые не воспроизводят отношение логического следования, автор предлагает обобщенный вариант теоремы о дедукции, который избегает слишком сильных, по его мнению, ограничений. Остановимся на этом вопросе подробнее. В.А.Смирнов рассматривает такой гильбертовский вариант логики предикатов первого порядка, в котором имеются два правила вывода – модус поненс и правило обобщения (последнее не воспроизводит отношения логического следования) и формулирует две следующие известные теоремы, связывающие формальную выводимость с логическим следованием:

1) Теорема 1: Если существует вывод формулы *A* из посылок Г и по отношению к формулам, зависящим от посылок, не применяется правило обобщения (более общо – правила вывода, не воспроизводящие отношения логического следования), то из Г логически следует *A*,

2) Теорема 2: Если существует вывод *A* из Г и правило обобщения не применяется относительно переменных, входящих в одну из посылок, то из Г логически следует *A*.

Заметим, что понятие зависимости вхождения формулы в данный вывод от посылок таково: вхождение формулы *C* в вывод формулы *B* из посылок A_1, ... ,.A_n (с данным анализом) зависит от посылки A_i, если

1) *C* есть A_i (т.е. посылка зависит от самой себя) или

2) *C* непосредственно следует из формул *Д* и *E* (или одной формулы *Д*) и *Д* или *E* зависит от A_i.

Автор комбинирует ограничения на вывод, имеющиеся в этих теоремах, и доказывает новый вариант теоремы о связи формальной выводимости с логическим следованием: если существует вывод *A* из Г, в котором ни одна переменная не варьируется ни для одной из посылок, то из Г логически следует *A* (теорема 3). При этом считается, что переменная *w* варьируется в данном выводе относительно посылки A_i, если *w* входит в A_i и в этом выводе к формуле, зависящей от A_i, применяется правило обобщения именно по отношению к этой переменной *w*. Следствием этой теоремы являются две предыдущие теоремы о связи формальной выводимости с логическим следованием. Теперь возникает естественный вопрос о возможности доказать теорему о дедукции для выводов с ограничением на варьирование переменных относительно посылок. Положительный ответ на этот вопрос дает теорема 4 : Если существует вывод формулы *B* из посылок *A*, Г и ни одна переменная не варьируется относительно формулы *A*, то существует вывод формулы $A \supset B$ из посылок Г.

Первая глава завершается доказательством на основе сформулированной выше теоремы о дедукции производности ряда правил введения и удаления логических символов, которые не зависят от способа организации посылок (множество посылок, список посылок, последовательность посылок).

В.М.Попов.

К главе 2 «Формы выводов и теоремы дедукции для логистических систем гильбертовского типа».

Во второй главе В.А.Смирновым введены различные понятия вывода, сформулированы и доказаны несколько видов теоремы дедукции. Кроме того, для широкого класса логических систем изучен вопрос о необходимых и достаточных условиях верности того или иного вида этой теоремы.

В более поздних работах[1] этот вопрос успешно исследовался применительно к системам льюисовского типа (системам со строгой импликацией) и системам, сочетающим как льюисовский, так и релевантные ограничения, накладываемые на импликацию (системам с сильной импликацией).

В.А.Смирнов неустанно подчеркивал тот факт, что при задании логических систем необходимо определять то, какого рода объекты считать формальными выводами. Так как две системы с одинаковыми аксиомами и правилами вывода, но с различными понятиями вывода, могут быть неэквивалентными. Во второй главе автор изучает два типа выводов: выводы как линейные последовательности формул и выводы в виде дерева. Второй параграф второй главы содержит следующее часта встречающееся определение вывода.

Вывод из посылок Γ есть последовательность формул, каждая из которых есть или одна из посылок Γ, или аксиома, или непосредственно выводима из предшествующих в этой последовательности формул по одному из правил вывода R_1, ..., R_n. В ходе уточнения этого понятия В.А.Смирнов ставит вопрос о том, что подразумевается под посылками Γ, и рассматривает три возможности: (1) Γ есть множество формул, (2) Γ есть последовательность формул, (3) Γ есть список формул. Еще одна неопределенность данного выше определения состоит в том, что при его индуктивной переформулировке, учитывающей способ организации посылок, т.е. при индуктивном введении предиката «α есть вывод из множества посылок Γ» (соответственно «α есть вывод из списка посылок Γ» и «α есть вывод из последовательности посылок Γ») открываются две возможности:

1) вводить указанный предикат индукцией по одной переменной α с параметром Γ,

---

[1] *В.А.Смирнов.* Представление логических систем с сильной и релевантной импликациями в секвенциальной форме. //Теория логического вывода. Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума М.,1974, ч.II, с.152-162.

В.А.Смирнов. Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации. //Логический вывод. М.,1979, с.54-68.

2) вводить этот предикат индукцией по двум переменным α и Г.

Таким образом, имея три возможности относительно способа организации посылок (множество посылок, список посылок, последовательность посылок) и две возможности относительно используемого типа индукции при введении предиката «α есть вывод из посылок Г» (индукция по одной переменной α с параметром Г или индукция по двум переменным α и Г), автор получает шесть различных определений вывода как линейной последовательности формул. Во втором параграфе второй главы подробно изучен вопрос о том, какие структурные правила вывода верны для систем с этими определениями вывода безотносительно к особому характеру аксиом и правил вывода. В.А.Смирновым сформулированы также различные определения выводов, имеющих вид дерева. Изучению этих выводов посвящен четвертый параграф второй главы. Вначале дается индуктивное определение системы формуя, называемой деревом, и определяется высота дерева. Затем даются индуктивные определения выводов, имеющих вид дерева. Различные понятия вывода возникают в зависимости от того, будет ли минимальная высота вывода равна 0 или 1, будет ли это вывод из множества, списка и последовательности посылок, а также вводится понятие вывода по одной или двум переменным. Каждое понятие вывода обозначается согласно схеме BD*n*T*m*, где n = 0, 1 указывает минимальную допустимую высоту вывода, Т = М, С, П и m = 1, 2 показывает, вводится данное понятие индукцией по одной или двум переменным.

В.А.Смирновым исследован важный с точки зрения теории доказательств вопрос о том, какие структурные правила вывода производны в системах, выводы в которых имеют вид дерева.

Не менее значимая теоретико-доказательственная проблема решается в пятом параграфе второй главы. Здесь впервые в систематической форма был изучен вопрос о необходимых и достаточных условиях верности того или иного вида теоремы дедукции для гильбертовских систем с единственным правилом вывода modus ponens и тем или иным понятием вывода в виде дерева. Следует особо отметить, что при исследовании указанного вопроса В.А.Смирнов получил интересные и глубокие результаты, относящиеся к релевантной логике, им доказаны несколько видов теоремы дедукции (теоремы 5-8, §5, гл.6) для импликативного фрагмента одной из основных релевантных систем – системы R. Эти теоремы легли в основу последующего теоретико-доказательственного изучения релевантной логики как самим В.А.Смирновым, так и другими исследователями.

В шестом параграфе второй главы рассматриваются условия, обеспечивающие верность теоремы дедукции при переходе от исчисления, для которого эта теорема имеет место, к расширению этого исчисления за счет добавления правила обобщения, а в седьмом параграфе второй главы делаются два важных замечания. Первое – относительно значения мощностных ограничений на множество (список, последовательность) формул, фигурирующее слева от знака выводимости в формулировке теоремы дедукции, а второе – относительно специальной формы вывода, представленной в системах линейного рассуждения.

В восьмом параграфе второй главы исследуются производные правила введения и удаления логических связок в исчислениях гильбертовского типа. При этом основное внимание уделяется анализу производных правил в гильбертовских исчислениях с понятием сильного (в терминологии В.А.Смирнова) вывода, т.е. в гильбертовских исчислениях, понятие вывода которых не дает оснований для доказательства теоремы о добавлении посылок. Таковы гильбертовские исчисления с понятием вывода в виде дерева из списка посылок или последовательности посылок при условии, что эти понятия вывода определяются индукцией по двум переменным (по числу посылок и высоте дерева вывода).

В.А.Смирнов строит оригинальную логическую систему с понятием сильного вывода, названную им *абсолютным исчислением*. Эта система является подлогикой как интуиционистского исчисления предикатов, так и ряда кванторных расширений релевантных исчислений. В.А.Смирнов убедительно показывает (во второй и шестой главах), что абсолютное исчисление имеет естественную мотивацию с точки зрения теории доказательств. Специальному изучению абсолютного исчисления посвящена шестая глава работы «Формальный вывод и логические исчисления».

Восьмой параграф и вторую главу в целом завершает классификация логических систем, в основу которой положено абсолютное исчисление.

В.М.Попов.

К главе 3 «Субординатный вывод. Системы натурального вывода первого типа».

Целью третьей главы является уточнение понятия вывода для натуральных исчислений. Дело в том, что даже сейчас при объяснении различий между гильбертовскими, натуральными и секвенциальными исчислениями довольно часто имеет место путаница. В.А.Смирнов показывает, что суть различий вовсе не в наличии или отсутствии аксиом и не в наличии или отсутствии прямых и непрямых правил рассуждения. Различия между этими типами исчислений кроются в определении понятия вывода.

В гильбертовских исчислениях непосредственно формализуются лишь прямые способы рассуждения. С помощью метатеорем в них действительно можно обосновать непрямые способы рассуждений, но сопоставить определенный объект в рамках имеющегося определения вывода нельзя. Если суть натуральных исчислений усматривать лишь в наличии непрямых способов рассуждений при сохранении прежнего понятия вывода, мы опять не сможем корректно включить их в ткань вывода. Специфика натуральных исчислений как раз и состоит в том, что в них формальный вывод сопоставляется как прямым, так и непрямым способам рассуждений. Это требует перехода к совершенно другому понятию вывода. Помимо этого необходимым условием для натуральных исчислений является наличие хотя бы одного прямого и хотя бы одного непрямого правила вывода. Дальнейший материал третьей главы как раз и посвящен строгому определению понятия вывода для натуральных исчислений и уточнению, каким именно понятием пользуются различные логики при построении натуральных исчислений.

Понятие вывода в натуральных системах более сложное, чем просто последовательность или дерево формул, но именно благодаря ему мы можем корректно определить, что понимается под выводом в натуральных системах. В.А.Смирнов вводит понятие ***леса формул.*** Мы приведем его полностью, так как оно является фундаментальным для всей главы.

1. $< >$ есть лес формул.

2. Если A формула, то $<A>$ лес формул.

3. Если α лес формул , то $[\alpha]$ есть квазилес формул.

4. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ суть леса или квазилеса формул и E есть формула, то $<\alpha_1, \dots, \alpha_k\ E>$ есть лес формул.

Последней формулой леса вида $<\alpha_1, \dots, \alpha_k\ E>$ является формула E, леса вида $<A>$ – формула A, $< >$ есть лес без последней формулы; последней формулой квазилеса $[\alpha]$ является последняя формула леса α.

Под ***высотой леса*** будем иметь ввиду порядковое число h, вводимое следующим определением:

$$\begin{cases} h(<>) = 0 \\ h(< A >) = 0 \\ h(< \alpha_1,...,\alpha_k, E >) = \max(h(\alpha_1),...,h(\alpha_k)) + 1 \\ h([\alpha]) = \omega \cdot h(\alpha) \end{cases}$$

В третьем пункте определения леса формул вводится понятие квазилеса формул. Именно оно позволяет в дальнейшем корректно инкорпорировать в ткань вывода непрямые правила рассуждений. Определение же высоты леса формул позволяет применять по отношению к данному понятию метод математической индукции при доказательстве различных метатеорем.

Исходя из введенного понятия леса формул В.А.Смирнов показывает, как можно определить понятие вывода для конкретных натуральных исчислений. Один из пунктов этого определения, соответствующий непрямому правилу введения импликации, выглядит следующим образом: «если α есть вывод из списка посылок A, Г, формула B есть последняя формула α, то $<[\alpha]\ A \supset \mathrm{B}>$ есть вывод из списка посылок Γ_A». Видно, каким образом связывается понятие квазилеса с правилом введения импликации. Аналогично определяются и другие непрямые правила вывода.

Коль скоро дано новое понятие вывода для натуральных исчислений, легко уточнить его для конкретных исчислений: абсолютного **NA**, интуиционистского **NI**, минимального **NM**, классического **NC**. Это уточнение сводится лишь к замене тех или иных правил вывода.

В.А.Смирнов особое внимание обращает на так называемые натуральные исчисления второго типа, которые строятся на основе правил удаление и введение логических знаков справа. Они интересны тем, что позволяют минимизировать число правил непрямого вывода.

Далее В.А.Смирнов показывает, что мы будем получать различные исчисления в зависимости от того, как будем понимать посылки вывода. Он выделяет три таких понимания: посылки как множество формул, как список формул и как последовательность. В третьем параграфе вводится определение вывода в виде ***леса деревьев***. Если в нем использовать понятие множества посылок, то будет иметь место теорема о сокращении посылок и обратная ей теорема о размножении посылок. Если же заменить в определении понятие множества на список, то эти теоремы становятся автоматически неверны.

Особое положение в натуральных исчислениях занимают такие исчисления, в определениях вывода которых делается ссылка на ранее доказанные формулы. Т.е. в них каждая формула вывода есть либо посылка, либо непосредственно выводима из предшествующих формул, сылка, либо непосредственно выводима из предшествующих формул, либо является ранее доказанной теоремой. Очевидно, что такая ссылка значительно усложняет понятие вывода. Для преодоления указанной трудности В.А.Смирнов вводит понятие ***вывода уровня п***. Строгое определение дано в четвертом параграфе. Основная же идея заключается в том, что каждому выводу можно приписать определенный уровень. Если в нем не делается ссылка на ранее доказанные формулы, уровень такого вывода будет нулевым. Для последующих выводов в зависимости от того, на какие ранее доказанные формулы делается в них ссылка, происходит приращение уровней.

Структура таких выводов более сложна по сравнению с ранее рассмотренными. Если каждой входящей в вывод ранее доказанной формуле сопоставить ее доказательство, то всему выводу будет соответствовать уже некоторая структура под названием ***лес последовательностей***. С помощью этого понятия удается уточнить, что понималось под выводом в натуральных исчислениях предложенных Слупецким, Яськовским, Фитчем, Куайном. Такое уточнение зачастую оказывается более строгим, но более удобным, чем в оригинале.

Нет смысла просто пересказывать все результаты, изложенные в этой главе. Хотелось бы, однако, обратить внимание на следующее. Несколько раз В.А.Смирнов как бы извиняется перед читателями за то, что вводимые им формы записи «... громоздки и проводить в подобной форме рассуждения неудобно», что имеют они лишь «теоретическую ценность». Это единственная «ошибка», которую он допустил. Введенные им понятия ***леса формул***, ***леса деревьев***, ***леса последовательностей*** оказались *исключительно удобными* и имеющими *большую практическую ценность*, когда представители Computer science стали интересоваться вопросами моделирования натуральных рассуждений на компьютере. Никаких проблем не возникает при моделировании доказательств в исчислении секвенций или в аналитических таблицах. В натуральных же исчислениях приходится сталкиваться с трудностями. Компьютеру невозможно дать интуитивное понимание, как строить такие выводы. Необходимо абсолютно строго определить типы данных, которые будут сопоставляться натуральным выводам. В работе В.А.Смирнова как раз и содержится предвосхищение этих проблем и их решение. Введенные им понятия ***леса формул***, ***леса деревьев***, ***леса последовательностей*** являются искомыми типами данных. Это было явным образом продемонстрировано в последние годы жизни В.А.Смирнова, когда при его непосредственном руководстве была разработана компьютерная программа Deductio, моделирующая выводы в субординатном натуральном исчислении предикатов.

В.А.Смирнов обладал способностью находить интересные задачи там, где многим другим все казалось очевидным. Очень наглядно это как раз и проявилось в уточнении понятия вывода для натуральных исчислений.

В.И.Шалак.

К главе 4 «Классические секвенциальные исчисления предикатов».

Данная глава состоит из шести параграфов, в первом из которых даны различные формулировки классической логики предикатов, а во втором изложено доказательство теоремы об устранении сечения для классического исчисления предикатов первого порядка со штрихом Шеффера. В параграфах 3-5 кратко излагаются формулировки и основные идеи доказательств теоремы Эрбрана-Генцена (о секвенциальных выводах, содержащих только формулы в предваренной нормальной форме), теоремы Крейга (интерполяционная теорема) и теоремы Бета (о явной определимости терминов). В заключительном параграфе приведен вариант классического секвенциального исчисления, в котором сукцеденты секвенций содержат не более одной формулы.

В первом параграфе «Секвенции. Правила введения и удаления логических знаков» формулируются правила заключения, применяемые для преобразования формальных выражений, известных под называнием *секвенций.* Автор интерпретирует секвенции как записи о *логическом следовании,* т.е. $\Gamma \to \Delta$ означает «из Γ логически следует Δ», где Γ и Δ суть последовательности (возможно пустые) формул.

Логические фигуры заключения разбиты на четыре группы I–IV по следующему принципу:

– к группе I относятся правила введения импликации, конъюнкции, отрицания и квантора общности в сукцедент, а также правила введения дизъюнкции и квантора существования в антецедент;

– к группе II относятся правила удаления импликации, конъюнкции, отрицания и квантора общности из сукцедента, а также правила удаления дизъюнкции и квантора существования из антецедента;

– к группе III правила введения импликации, конъюнкции, отрицания и квантора общности в антецедент, а также правила введения дизъюнкции и квантора существования в сукцедент;

– к группе IV относятся правила удаления импликации, конъюнкции, отрицания и квантора общности из антецедента, а также правила удаления дизъюнкции и квантора существования из сукцедента; два правила этой группы (правило удаления квантора общности из антецедента и правило удаления квантора существования из сукцедента) сформулированы с применением ε-терма.

Таким образом, все правила введения логических знаков сосредоточены в группах I и III, а правила удаления логических знаков – в группах II и IV.

В качестве структурных правил принимаются стандартные правила добавления (утончения), сокращения и перестановки в антецеденте и сукцеденте и правило сечения.

С помощью перечисленных правил строится два варианта классической логики: «секвенциальное натуральное исчисление SNC», определяемое всеми структурными правилами, а также правилами групп I и II, и «секвенциальное логистическое исчисление SLC», которое получается из SNC заменой правил группы II на правила группы III.

Заметим, что терминология автора и его способ формулировки систем достаточно оригинальны. Обычно терминами «секвенциальные» и «натуральные» обозначаются различные типы логических систем (способы формулировки одной и той же логической системы). Традиционно в натуральных исчислениях (системах натурального вывода) не используется понятие секвенции и структурного правила, а различие между натуральным и секвенциальным вариантами логической системы состоит в том, что в первом из них используются правила введения и удаления логических знаков, а во втором – правила введения логических знаков в антецедент и сукцедент. При этом «роль» структурных правил (кроме сечения) в натуральных системах выполняют «естественные» разрешения вводить любые допущения на любом шаге построения вывода и применять их в произвольном порядке. В формулировках автора SLC соответствует традиционному секвенциальному исчислению – оно задается группами правил введения логических знаков в антецедент и сукцедент и обычными структурными правилами. Специфика секвенциального натурального исчисления SNC в том, что оно содержит правила введения и удаления логических знаков в сукцедентах секвенций, а также все структурные правила.

При такой формулировке доказательство дедуктивной эквивалентности SLC и SNC становится очень простым: легко показать, что правила группы III производны в SNC, а правила группы II производны в SLC.

В конце параграфа формулируются исчисления SL°C (состоящее из структурных правил и правил удаления логических знаков – групп II и IV) и SN°C (содержащее структурные правила вместе с правилами групп III и IV). Легко показать, что пропозициональные части этих исчислений дедуктивно эквивалентны пропозициональным частям систем SLC и SNC соответственно. В целом эти исчисления относятся к типу систем с ε-термом и далее в работе специально не рассматриваются.

Во втором параграфе «Классическое секвенциальное логистическое исчисление» SLC рассматривается более подробно. Специфика секвенциального исчисления SLC в том, что используется схема правила введения конъюнкции в антецедент (дизъюнкции в сукцедент), в которой боковыми формулами являются оба конъюнкта (дизъюнкта), а также правило Кетонена для введения импликации в антецедент. В.А.Смирнов приводит дерево вывода, показывающее, что правило введения импликации в антецедент Генцена производно в исчислении с правилом Кетонена. В этом дереве переход типа

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Delta, \Gamma \to \Theta, A}\ \text{ДЛ}$$

обозначен как применение правила добавления слева. Строго говоря, это верно с том случае, когда Δ состоит из единственной формулы, поскольку правило утончения (в данном случае в антецеденте) имеет вид

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$$

т.е. позволяет добавлять одну формулу, а не список формул одновременно. Поэтому указанный переход следует понимать как последовательность применений правил добавления слева и означить

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Delta, \Gamma \to \Theta, A}\ \text{ДЛ } (k \text{ раз}),$$

где $k \geq 1$ - число вхождений формул в Δ.

Затем все логические фигуры заключения заменяются на два правила введения штриха Шеффера в антецедент и сукцедент, и для полученного исчисления доказывается теорема об устранении сечения. При этом автор в основном следует оригинальному доказательству Генцена с небольшими изменениями. Отметим основные особенности доказательства В.А.Смирнова.

1. Утверждение о том, что сечение можно заменить правилом смешения (и наоборот), не нарушив корректности вывода, точно сформулировано в виде доказанной леммы и ее обращения. Как правило, этому моменту доказательства теоремы об устранении сечения вообще не придается значения в силу «очевидного» сходства правил сечения и смешения. В общем случае ссылка на такую «очевидность» некорректна, и требуется явно показать, что система с сечением действительно эквивалентна системе со смешением (или другим заменяющим сечение правилом), т.е. что любое применение сечения действительно можно

заменить применением другого правила (правил), не нарушая вывода (ср. с §2 шестой главы).

2. Для доказательства основной леммы (об устранении смешений) вводится понятие *глубины формулы смешения*. При этом используется понятие *глубины вхождения формулы A в секвенцию S* и понятие *сукцедентной (антецедентной) глубины формулы секвенции S.*

«Глубина вхождения формулы A в секвенцию S данного доказательства есть наибольшее число логических фигур заключения, нижние секвенции которых находятся в одной нити, заканчивающейся секвенцией S, боковые формулы которых – предки вхождения A в S.

Глубина вхождения формулы A в секвенцию S данного доказательства есть наибольшее число логических предков вхождения A, входящих в секвенции, находящиеся в одной нити, заканчивающейся секвенцией S.

Под сукцедентной глубиной формулы A секвенции S данного доказательства будем понимать наибольшую глубину одного из вхождений формулы A в сукцедент S. Аналогично определяем антецедентную глубину.

Под *глубиной формулы смешения* будем понимать наименьшую глубину из сукцедентной глубины левой секвенции и антецедентной глубины правой секвенции.» (стр. 121-122).

Здесь необходимы некоторые уточнения. Во-первых, возникает вопрос: что считать глубиной вхождения формулы A в секвенцию S? Строго говоря, в первом и втором абзацах приведенного отрывка определяются разные вещи, поскольку число указанных логических фигур заключения, находящихся в одной нити доказательства секвенции S, содержащей формулу A, может не совпадать с числом логических предков вхождения A в S, содержащихся в данной нити. Рассмотрим следующий простой фрагмент вывода, состоящий из одной нити:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{C', C, \Gamma \to \Theta}{C, C, \Gamma \to \Theta}\,\mathrm{R}}{C, \Gamma \to \Theta}}{\Gamma \to \Theta, \neg C}}{\Gamma \to \Theta, \neg C \vee B}$$

где R – применение логического правила, боковой формулой которого является C', а главной – C.

Очевидно, что, согласно первому абзацу, глубина вхождения формулы $\neg C \vee B$ в конечную секвенцию данного вывода (определяемая числом логических фигур заключения) равна 2. Если же для определения глубины вхождения формулы $\neg C \vee B$ в конечную секвенцию используется число ее логических предков, содержащихся в секвенциях данной нити, то возникает следующая ситуация. Формулы C и $\neg C$ являются логическими предками формулы $\neg C \vee B$, а формула C' является логическим предком формулы C. В силу транзитивности отношения «быть логическим предком» (точного определения которого автор не дает) формула C' есть логический предок формулы $\neg C \vee B$ и, следовательно, глубина вхождения формулы $\neg C \vee B$ в конечную секвенцию данного вывода равна 3. Такой неясности можно избежать двумя путями: либо указать, что предком главной формулы правила сокращения является только одна из боковых формул этого правила (и какая именно), либо принять следующее точное определение логического предка. A есть *логический предок* B тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $C_1, \ldots, C_n$, что C_1 есть A, C_n есть B и для каждого $i < k$ C_i есть непосредственный логический предок C_{i+1}. Тогда первый и второй абзац процитированного выше фрагмента будут альтернативными определениями одной и той же величины.

Во-вторых, в определении глубины формулы смешения фигурируют понятия «сукцедентной глубины левой секвенции» и «антецедентной глубины правой секвенции», в то время как в предыдущем абзаце определяется сукцедентная (антецедентная) глубина формулы, входящей в конкретную секвенцию вывода. Из контекста ясно, что определение глубины формулы смешения должно быть следующим. *Глубиной формулы смешения* M считается наименьшая глубина из сукцедентной глубины формулы M левой секвенции и антецедентной глубины формулы M правой секвенции данного применения правила смешения.

3. Явно выделяется структура применения двойной индукции, используемой при доказательстве основной леммы. Автор строго показывает, что для доказательства этой леммы достаточно доказать утверждения A, B и C (стр. 122-123). Обычно такое строгое обоснование применения индукции не приводится, и поэтому оно интересно само по себе, в частности, с дидактической точки зрения.

Следует отметить, что в доказательстве основной леммы автор использует буквенную символику достаточно свободно, и поэтому нужно всегда следить за контекстом. Не совсем удачным является обозначение типа B^*_A, например, в записи результирующего доказательства на стр. 125. По принятому соглашению о записях (см. сноску 2 на стр. 120) Δ^*_A означает результат вычеркивания всех вхождений формулы A в список Δ. Поскольку B явно обозначает формулу, B^*_A должно обозначать результат вычеркивания всех вхождений формулы A в B, что не имеет смысла, так как смешение «вычеркивает» формулы из списков, а не из других формул.

В записях выводов при рассмотрении случаев доказательства применяются сокращенные обозначения применений структурных правил заключения. В формулировке системы, например, сукцедентные структурные правила перестановки, сокращения и добавления обозначаются как ПП, СП и ДП соответственно. В доказательстве основной леммы (стр. 126-129) в записях выводов переходы от одной секвенции к другой обозначаются как «Д, П», «СЛ, П», «П» или «С, П». Это означает, что необходимо либо одно применение структурного правила, либо несколько последовательных применений (возможно различных) структурных правил либо в антецеденте, либо в сукцеденте. «Д, П» – последовательное применение добавления и перестановки; «, «СЛ, П» – последовательное применение сокращения в антецеденте и перестановки; «П» – перестановка или ряд перестановок; «С, П» – последовательное применение сокращения и перестановки. Обозначение «См, ИД» фиксирует применение смешения по индуктивному допущению.

В §3 «Теорема Эрбрана-Генцена» кратко излагается доказательство теоремы, согласно которой любое доказательство секвенции, содержащей только формулы в предваренной форме, можно преобразовать в доказательство той же секвенции, верхняя часть которого относится к пропозициональной логике, а нижняя состоит из одной нити и относится к теории кванторов.

Доказательство стандартно и носит информативный характер. Здесь при записи одного и того же вывода последовательность применений структурных правил обозначается тремя разными способами: как в предыдущем параграфе (например, «СП, П»), как «П; ДП» и явно выделяется вертикальным отточием и словами «Стр. пр.»

В §4 указаны основные способы доказательства интерполяционной теоремы Крейга. Теорема доказана синтаксическим способом, при котором используется теорема Эрбрана-Генцена.

В свою очередь, теорема Крейга используется в доказательстве теоремы Бета о явной определимости терминов, кратко изложенном в §5.

В §6 «Сингулярное классическое секвенциальное логистическое исчисление» рассматривается классическое исчисление предикатов ScLC, основной характерной чертой которого является то, что используются секвенции, содержащие не более одной формулы в сукцеденте, что создает определенные трудности при формулировке. Исчисление названо логистическим, хотя это не вполне соответствует классификации, принятой в четвертой главе. Как уже было сказано, логистические исчисления отличаются от натуральных тем, что первые содержат только правила введения логических знаков (в антецедент и сукцедент), а вторые – правила введения и удаления логических знаков (в сукцеденте). В ScLC же наряду с «логистической» частью имеются два правила: удаление импликации из антецедента (УИЛ) и удаление дизъюнкции из сукцедента (УДП). В число структурных правил не включается добавление в сукцеденте. В данном контексте требует уточнения следующая фраза: «правил групп I и III и структурных правил недостаточно для описания классической системы.» (стр. 138). Ясно, что их недостаточно тогда, когда используются только секвенции, содержащие не более одной формулы в сукцеденте.

Легко показать, что ScLC дедуктивно эквивалентно SLC. В то же время очевидно, что правила УИЛ и УДП нарушают свойство подформульности. Как отмечает автор, правило УДП можно заменить структурным правилом «интуиционистского» типа

$$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to B}$$

Аналогичная замена правила УИЛ каким-либо «чисто логистическим» правилом в данном случае невозможна, поэтому ScLC представляет собой лишь технический интерес.

П.И.Быстров.

К главе 5 «Секвенциальные исчисления без сокращений».

В работе «На пути к механической математике» (Кибернетический сборник, 5, 1962) Хао Ван выдвинул гипотезу о том, что разрешимые фрагменты исчисления предикатов можно формализовать без привлечения правил сокращения. В главе 5 В.А.Смирновым строится секвенциальное исчисление без сокращений SLC°, относительно которого доказана следующая теорема: вопрос о доказуемости в классической логике предикатов формулы вида $\forall^n\exists^m M$, где M не содержит кванторов и свободных индивидных переменных, эквивалентен вопросу о доказуемости в SLC° секвенции $\to(\exists^m M)^k$ для некоторого $k \leq n$. В исчислении SLC° соединяются черты генценовских и кангеровских секвенциальных исчислений.

Основная секвенция исчисления SLC° имеет вид: Γ, A, Δ → Φ, A, Θ. Логические фигуры введения пропозициональных связок формулируются по Кангеру, а фигуры введения кванторов – по Генцену.

$$\frac{A, \Gamma \to \Phi, B, \Theta}{\Gamma \to \Phi, A \supset B, \Theta} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \to \Theta, A \quad \Gamma, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, A \supset B, \Delta \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \Phi, A, \Theta \quad \Gamma \to \Phi, B, \Theta}{\Gamma \to \Phi, A \,\&\, B, \Theta} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, A \,\&\, B, \Delta \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \Phi, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Phi, A \vee B, \Theta} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \to \Theta \quad \Gamma, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, A \vee B, \Delta \to \Theta}$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Phi, \Theta}{\Gamma \to \Phi, \neg A, \Theta} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \to \Theta, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \Phi, Aw, \Theta}{\Gamma \to \Phi, \forall x Ax, \Theta} \qquad \frac{\Gamma, At, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \forall x Ax, \Delta \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \Phi, At, \Theta}{\Gamma \to \Phi, \exists x Ax, \Theta} \qquad \frac{\Gamma, Aw, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \forall x Ax, \Delta \to \Theta}$$

На первое и последнее кванторные правила накладывается обычное ограничение: w не входит в формулы нижней секвенции.

Если к исчислению SLC° добавить правила сокращения

$$\frac{\Gamma, C, \Delta, C, \Psi \to \Theta}{\Gamma, C, \Delta, \Psi \to \Theta} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma \to \Phi, C, \Sigma, C, \Theta}{\Gamma \to \Phi, \Sigma, C, \Theta},$$

то получится формулировка SLC классической логики предикатов. Заметим, что другой способ сформулировать классическую логику предикатов на основе SLC° состоит в добавлении к SLC° правила сечения

$$\frac{\Gamma \to \Delta, M \qquad M, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}.$$

Покажем, что в исчислении SLC° с сечением допустимы правила сокращения. Допустим, что в SLC° с сечением доказуема секвенция Γ, C, Δ, C, Ψ → Θ, тогда в этом исчислении доказуема и секвенция Γ, C, Δ, Ψ → Θ:

$$\frac{\dfrac{C \to C}{\to C \supset C} \qquad \dfrac{\Gamma, C, \Delta, \Psi \to \Theta, C \qquad \Gamma, C, \Delta, C, \Psi \to \Theta}{\Gamma, C, \Delta, C \supset C, \Psi \to \Theta}}{\Gamma, C, \Delta, \Psi \to \Theta}\ \text{Сечение}$$

Допустим что в SLC° с сечением доказуема секвенция Γ → Φ, *C*, Σ, *C*, Θ. Тогда в силу допустимости в этом исчислении правила перестановки справа (как, впрочем, и правила перестановки слева) получаем, что в нем доказуема и секвенция Γ → Φ, Σ, *C*, Θ, *C*.

Теперь требуемое доказательство строится так:

$$\frac{\dfrac{C \to C}{\to C \supset C} \qquad \dfrac{\Gamma \to \Phi, \Sigma, C, \Theta, C \qquad \Gamma, C \to \Phi, \Sigma, C, \Theta}{\Gamma, C \supset C \to \Phi, \Sigma, C, \Theta}}{\Gamma \to \Phi, \Sigma, C, \Theta}\ \text{Сечение}$$

В.А. Смирновым доказана разрешимость исчисления SLC°. Вместе с тем SLC° настолько богато, что его пропозициональная часть совпадает с классической пропозициональной логикой. Какова связь между SLC° и SLC (SLC = SLC° с правилами сокращения = SLC° с сечением) классической логики предикатов? Конечно, всякая секвенция, доказуемая в SLC°, доказуема в SLC, но обратное не верно. Однако, В.А.Смирнову удалось установить, что вопрос о доказуемости в SLC формулы в сколемовской нормальной форме сводится к вопросу о допустимости некоторой секвенции в SLC°. Этот интересный результат формулируется в теореме 1: Если секвенция $\to A$ доказуема в SLC, C есть сколемовская нормальная форма A, то существует такое число k, что секвенция $\to C^k$ доказуема в SLC°. Под C^k имеется в виду последовательность формул, состоящая из k вхождений формулы C. В.А.Смирнов показал, что гипотеза о том, что для всякой доказуемой в SLC секвенции $\to A$ существует такое k, что $\to A^k$ доказуема в SLC°, не верна. Контрпримером является секвенция $\to\forall x\exists y\forall z(F(x, y) \supset F(x, z))$. Автор изучал возможность сведения проблемы разрешения для разрешимых классов формул в SLC к проблеме доказательства секвенций определенного вида в SLC° и получил следующий результат для формул вида $\forall^n\exists^m M$, где M не содержит кванторов и свободных индивидных переменных: вопрос о доказуемости или недоказуемости в классической логике предикатов формулы указанного вида сводится к вопросу о существовании или не существовании такого $k \leq n$, при котором секвенция $\to(\exists^m M)^k$ доказуема в SLC°.

Глава 5 завершается анализом методов установления разрешимости секвенциальных исчислений – метода, основанного на лемме о доказательстве с редуцированными секвенциями, и метода, базирующегося на возможности элиминировать из доказательств правила сокращений. Спустя два года после опубликования книги «Формальный вывод и логические исчисления» В.Н.Гришин в работе «Об одной нестандартной логике и ее применение в теории множеств» (в сб. «Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам». Наука, М., 1974) рассмотрел другой вариант логики без сокращений и применил ее к анализу теории множеств. Позднее различные системы логик без сокращений изучались К.Дошеном, В.М.Поповым и рядом других авторов.

В.М.Попов.

К главе 6 «Абсолютное исчисление предикатов».

Глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе дана классификация сингулярных секвенциальных исчислений, а во втором доказана теорема об устранении сечения для введенного автором абсолютного исчисления предикатов SLA. В параграфах 3-5 SLA представлено в виде секвенциального натурального исчисления, натуральной системы субординатных выводов и аксиоматической системы соответственно. В последнем параграфе рассматривается проблема разрешимости пропозициональной части SLA.

Параграф §1 «Классификация сингулярных секвенциальных исчислений по наличию и отсутствию логических фигур заключения группы IV» имеет серьезное методологическое значение. Отличие данной в нем классификации исчислений от классификации, приведенной в четвертой главе состоит в следующем.

Рассматриваются только секвенции, содержащие не более одной формулы в сукцеденте, язык содержит константу f, считается, что секвенция вида $\Gamma\rightarrow$ есть $\Gamma \rightarrow f$ и из числа структурных правил исключаются правила добавления.

Группы правил I–III соответствуют группам правил из четвертой главы за исключением того, что не рассматриваются правила для отрицания. Формируется отдельная группа IV, состоящая из правил удаления импликации и конъюнкции из антецедента и правила удаления дизъюнкции из консеквента.

Суть данной классификации в том, что выделяется базисное «абсолютное» исчисление SLA (SNA), состоящее из структурных правил (без правил добавления) и правил групп I и III (I и II). Далее из этого исчисления получаются минимальное, интуиционистское и классическое исчисления предикатов за счет добавления определенных правил из группы IV. Таким образом, оказывается что переход от абсолютного исчисления к минимальному обеспечивает правило удаления конъюнкции, переход от минимального исчисления к интуиционистскому – правило удаления дизъюнкции, а переход от интуиционистского исчисления к классическому – правило удаления импликации.

На стр. 160 автор высказывает очень ценную в методологическом плане мысль: «Различие между абсолютной логикой, минимальной и интуиционистской можно отнести за счет структурных правил добавления формулы слева и справа.» Это действительно так, и в результате открываются широкие перспективы исследования специфики рассматриваемых систем и роли структурных правил в логических исчислениях.

Однако следующее далее пояснение автора некорректно. «Действительно, абсолютная система (SLA или SNA), обогащенная правилом ВКП, эквивалентна абсолютной системе, обогащенной правилом ДЛ. Аналогично минимальная система (SLM или SNM) вместе с УКЛ эквивалентна минимальной системе вместе с фигурой ДП для сингулярного случая

$$\left(\frac{\Gamma \rightarrow f}{\Gamma \rightarrow B}\right)»$$

(стр. 160).

В первом предложении утверждается эквивалентность SLA, «обогащенной» правилом ВКП, и этой же системы с правилом добавления слева. Однако, по определению исчисления (см. стр. 159), правило ВКП уже входит в SLA, поскольку оно относится к группе I, и утверждение об эквивалентности становится неверным. Например, в абсолютной системе с ДЛ доказуема секвенция $\rightarrow A \supset (B \supset (B \,\&\, A))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \rightarrow B}{A, B \rightarrow B}\text{ДЛ}}{B, A \rightarrow B} \qquad \dfrac{A \rightarrow A}{B, A \rightarrow A}\text{ДЛ}}{\dfrac{B, A \rightarrow B \,\&\, A}{\dfrac{A \rightarrow B \supset (B \,\&\, A)}{\rightarrow A \supset (B \supset (B \,\&\, A))}}}$$

Очевидно, что данная секвенция не доказуема в исчислении SLA.

Во втором предложении речь идет о минимальном исчислении «вместе с УКЛ» и минимальной системе с ДП «для сингулярного случая». Опять же, УКЛ по определению входит в минимальную систему а приведенный выше вариант правила добавления позволяет получить секвенции, которые выводимы в интуиционистской логике, но не выводимы в минимальной.

По-видимому, здесь имелось в виду, что SLA, обогащенная УКЛ, эквивалентна SLA с правилом ДЛ, а минимальная система, обогащенная УДЛ, эквивалентна минимальной системе с упомянутым вариантом правила ДП.

Параграф §2 «Система SLA» имеет особое значение – в нем формулируется “абсолютное” исчисление предикатов в виде исчисления секвенций (стр. 161-162), для которого оригинальным методом доказывается теорема об устранении сечения. В силу отсутствия структурных правил утончения в SLA устранимость сечения в этой системе нельзя доказать традиционным генценовским методом – заменой сечения на смешение. Основная идея доказательства В.А.Смирнова состоит в замене сечения обобщенным смешением

$$\frac{\Gamma \rightarrow M \qquad \Delta, M, \Phi \rightarrow \Theta}{\Delta_M, \Gamma, \Phi_M \rightarrow \Theta},$$

где Δ_M и Φ_M есть результаты вычеркивания некоторых (возможно всех, а возможно ни одного) вхождений формулы M в Δ и Φ соответственно. Ясно, что если из Δ и Φ не вычеркивается ни одного вхождения M, применение обобщенного смешения равнозначно применению сечения, если же вычеркиваются все вхождения M – применению обычного смешения. Поскольку сечение является частным случаем обобщенного смешения, эквивалентность исчислений, отличающихся только наличием одного из этих правил, очевидна.

В целом доказательство устранимости сечения В.А.Смирнова для SLA по духу и структуре соответствует оригинальному доказательству Hauptsatz Генцена: доказывается основная лемма об устранимости обобщенного смешения двумя возвратными индукциями по степени (обобщенного смешения) и рангу исходного доказательства; определения степени и ранга обычные. Из устранимости обобщенного смешения немедленно следует устранимость сечения. Различия между этими доказательствами определяются спецификой обобщенного смешения:

– во первых, при доказательстве устранимости обобщенного смешения необходимо рассмотреть дополнительные возможности в зависимости от того, вычеркивается формула обобщенного смешения из соответствующих списков или не вычеркивается;

– во вторых, в некоторых случаях (при проведении обратной индукции по рангу исходного вывода) обобщенное смешение применяется согласно индуктивному предположению дважды и при этом необходимо следить, чтобы оно применялось оба раза одинаково, т. е. вычеркивать или не вычеркивать одни и те же вхождения формулы обобщенного смешения *M*.

Ясно, что это необходимая “плата” за ту свободу действий, которую обобщенное смешение предоставляет при построении выводов по сравнению с обычным смешением.

Итак идея обобщенного смешения достаточно проста, но плодотворна в том смысле, что позволяет доказать теорему об устранении сечения для неклассических исчислений, в которых отсутствуют правила утончения (добавления).

Что касается изложения доказательства устранимости сечения для SLA в данной главе, можно заметить лишь следующее. При рассмотрении случая С1.3 (стр.167-168) автор ограничивается двумя общими подслучаями. Строго говоря, здесь необходимо рассмотреть все возможности, когда правило заключения Ф есть ВИП, ВДП, ВКЛ, ВОП, ВОЛ, В∃Л, В∀Л, В∃П или В∀П. Впрочем, все они беспрепятственно рассматриваются и не нарушают доказательства, но при принятом автором подробном изложении шагов доказательства их следовало бы вычленить явно.

В §§ 3 и 4 абсолютное исчисление предикатов формулируется в виде секвенциального натурального исчисления и натурального исчисления с субординатным выводом.

В первом случае основная секвенция и структурные правила SLA сохраняются а логические правила заменяются правилами введения и удаления логических знаков (стр. 172). Во втором случае форма вывода определяется достаточно сложным понятием леса формул, и при задании системы натурального вывода явно вычленяются лишь прямые правила заключения, а непрямые правила включаются в определение вывода (стр. 176-177). В этих же параграфах дано доказательство дедуктивной эквивалентности SLA и его натуральных вариантов.

В §5 абсолютное исчисление предикатов представлено в форме аксиоматической системы НА с правилами modus ponens и введения конъюнкции (ВК). На ВК накладывается ограничение, согласно которому оно применяется только к формулам, не зависящим от посылок. В системе НА используется понятие вывода из списка посылок и для нее доказана теорема дедукции: если Г, А, $\Delta \vdash$ В, то Γ_A, $\Delta_A \vdash A \supset B$. Следует отметить, что здесь (в тексте это явно не оговаривается) Γ_A, Δ_A есть результат вычеркивания некоторых (возможно всех, а возможно и ни одного) вхождений формулы А в списки Г, Δ соответственно. В этом же параграфе показана дедуктивная эквивалентность НА другим вариантам абсолютного исчисления предикатов.

В заключительном §6 поставлен вопрос о разрешимости пропозициональной части исчисления SLA. Очевидно, что метод разрешения Генцена с помощью редукционных формул в данном случае не подходит. В.А.Смирнов дополняет пропозициональный фрагмент SLA правилом ОЛ

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to A}{\Gamma, \Delta \to A}$$

и показывает, что в результате получается исчисление SLA^+ для которого остается в силе теорема об устранении сечения. Исчисление SLA^+ разрешимо.

Следует заметить, что правило ОЛ (обобщение слева) здесь приведено в некотором «частном» варианте. В общем случае для системы SLA^+ оно должно формулироваться как

$$\frac{\Gamma \to \Theta \quad \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \Theta}$$

Что касается SLA, то проблема разрешимости пропозиционального фрагмента этого исчисления до сих пор остается открытой.

П.И.Быстров.

К главе 7 «ε-исчисления и системы натурального вывода второго типа».

Тематика данной главы была продолжена В.А.Смирновым в последующих работах:

1. Поиск доказательства /Логика и компьютер Вып.1 / Ред.В.А.Смирнов, М, «Наука», 1990г.

2. Поиск доказательств в натуральном интуиционистском исчислении предикатов с ε-символом и предикатом существования/ Логические исследования.Вып.3/ Москва, «Наука», 1995г.

3. Доказательство и его поиск (соавторы: Маркин В.И., Новодворский А.Е,, Смирнов А.В.)/Логика и компьютер. Вып.3 / Москва, «Наука», 1996г.

Следует обратить внимание на связь ε-терма со сколемовскими функциями, на которую В.А.Смирнов указывает в последующих работах (см., например, [1], стр.180). Вместо использования ε-терма синтаксически можно использовать функциональные символы различной местности, каждый раз новые. Это-то по существу и есть сколемовские функции. Однако такой подход позволяет не сразу устранять положительные кванторы, а делать это в процессе поиска вывода.

На этом основан алгоритм поиска вывода для классического исчисления предикатов в форме натурального вывода, предложенный В.А. Смирновым в [1]. Алгоритм этот обладает одной интересной особенностью: все правила поиска вывода в нем перестановочны. Это означает, что, сделав некоторый формально допустимый но нерациональный шаг и преобразовав тем самым дерево поиска вывода, мы никогда не лишаем себя возможности построить вывод. Просто доказательство неоправданно удлиняется.

Для формулировки системы натурального вывода для интуиционистской логики на ε-терм накладывается дополнительное ограничение: они не должны содержаться в устраняемых посылках и заключениях вспомогательных выводов. Это ограничение оказывается весьма неудобным при организации процедуры поиска вывода в таком исчислении.

В 1997 г. А.Г.Драгалин (в работе Интуиционистская логика и ε-символ Гильберта./ История и методология естественных наук/ Москва, «Наука», 1997) ввел другое ограничение:

В правилах введения квантора существования и удаления кванторов общности вводимый или исключаемый терм должен быть непуст.

Позже независимо это было предложено Д.Скотт.

Используя этот вариант ограничения, в работе [2] В.А. Смирнов предложил формулировку интуиционистского исчисления предикатов с ε-символом и предикатом существования в виде субординатного вывода. Там же предлагается процедура поиска вывода для этого исчисления. В последние годы жизни В.А.Смирнов работал над доказательством нормализационной теоремы для этого исчисления, но работа не была завершена.

Указанные алгоритмы поиска вывода были реализованы на компьютере сотрудниками В.А.Смирнова, что подробно описано в книге [3].

А.В.Смирнов

ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД, ТЕОРЕМЫ ДЕДУКЦИИ И ТЕОРИИ ИМПЛИКАЦИИ

1. ВЫВОД ИЗ СПИСКА ПОСЫЛОК; РЕЛЕВАНТНЫЕ ЛОГИКИ И ИХ РАСШИРЕНИЯ

Две философские идеи привели меня к рассмотрению логических систем, родственных системам релевантной логики. Первая идея связана с истолкованием пропозициональных связок и кванторов. Я. Лукасевич полагает, что кантовский вопрос «как возможны синтетические суждения a priori» следует заменить более общим вопросом: «как возможны молекулярные предложения». Молекулярные предложения, пишет он, «нельзя непосредственно сравнивать с фактами. Проблема Канта теряет свою значительность и должна быть заменена гораздо более важной проблемой: каким образом возможны истинные молекулярные предложения? Мне представляется, что именно здесь лежит исходный пункт как новой философии, так и новой логики» [7, с. 191].

Проблему Лукасевича можно представить посредством более логической формы. Прежде всего сформулируем правило введения и удаления логических знаков справа и слева, разделив их на четыре группы.

I	II
$\dfrac{A,\ \Gamma \text{④} B}{\Gamma \text{④} A\supset B}$	$\dfrac{\Gamma \text{④} A\supset B}{A,\ \Gamma \text{④} B}$
$\dfrac{\Gamma \text{④} A \quad \Gamma \text{④} B}{\Gamma \text{④} A\&B}$	$\dfrac{\Gamma \text{④} A\&B}{\Gamma \text{④} A \text{ и } \Gamma \text{④} B}$
$\dfrac{A,\ \Gamma \text{④} f}{\Gamma \text{④} \neg A}$	$\dfrac{\Gamma \text{④} \neg A}{A,\ \Gamma \text{④} f}$
$\dfrac{A,\ \Gamma \text{④} C \quad B,\ \Gamma \text{④} C}{A\vee B,\ \Gamma \text{④} C}$	$\dfrac{A\vee B,\ \Gamma \text{④} C}{A,\ \Gamma \text{④} C \text{ и } B,\ \Gamma \text{④} C}$
$\dfrac{\Gamma \text{④} Aw}{\Gamma \text{④} \forall xAx}$	$\dfrac{\Gamma \text{④} \forall xAx}{\Gamma \text{④} At}$

$$\frac{Aw, \Gamma \text{④} C}{\exists xAx, \Gamma \text{④} C} \qquad \frac{\exists xAx, \Gamma \text{④} C}{At, \Gamma \text{④} C}$$

III

$$\frac{\Gamma \text{④} A \quad B, \Delta \text{④} C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \text{④} C}$$

$$\frac{A, \Gamma \text{④} C \text{ или } B, \Gamma \text{④} C}{A \& B, \Gamma \text{④} C}$$

$$\frac{\Gamma \text{④} A}{\neg A, \Gamma \text{④} f}$$

$$\frac{\Gamma \text{④} A \text{ или } \Gamma \text{④} B}{\Gamma \text{④} A \vee B}$$

$$\frac{At, \Gamma \text{④} C}{\forall xAx, \Gamma \text{④} C}$$

$$\frac{\Gamma \text{④} At}{\Gamma \text{④} \exists xAx}$$

IV

$$\frac{A \supset B, \Gamma \text{④} A}{\Gamma \text{④} A}$$

$$\frac{A \& B, \Gamma \text{④} C}{A, B, \Gamma \text{④} C}$$

$$\frac{\neg A, \Gamma \text{④} f}{\Gamma \text{④} A}$$

$$\frac{\Gamma \text{④} A \vee B \quad A, \Delta \text{④} f}{\Gamma, \Delta \text{④} B}$$

$$\frac{\forall xAx, \Gamma \text{④} C}{A(\varepsilon x \neg Ax), \Gamma \text{④} C}$$

$$\frac{\Gamma \text{④} \exists xAx}{\Gamma \text{④} A(\varepsilon xAx)}$$

Предполагается, что имеются правила перестановки и сокращения посылок. Ограничения обычны.

Правила первых двух групп придают достаточно прозрачный смысл логическим связкам. Так, импликативное утверждение A⊃B, являющееся следствием из некоторых посылок, можно понимать как равносильное утверждению, что B является следствием из того же множества посылок и дополнительной посылки A. Но как трактовать импликативное утверждение, являющееся посылкой? Аналогично для других знаков.

Проблема Лукасевича теперь может быть переформулирована: как возможны импликативные, конъюнктивные, отрицательные и общие высказывания в качестве посылок; дизъюнктивные и экзистенциальные – в качестве промежуточных утверждений в рассуждении. Другими сло-

словами, проблема Лукасевича сводится к проблеме обоснования правил группы IV.

Логическую систему, для которой в качестве метатеорем могут быть доказаны правила групп I – III (но ни одно из правил группы IV), я назвал абсолютной. Сейчас я ее обозначаю RA, так как она является подсистемой релевантной логики. Расширение RA, в котором имеет место УОЛ, обозначим RAO. Добавление УКЛ к RA дает минимальную систему, расширение минимальной за счет УДИ – интуиционистскую систему, и, наконец, добавление УИЛ к интуиционистской приводит к классической системе.

Таким образом, за различение между интуиционистской и классической системами «ответственна» импликация (УИЛ), между интуиционистской и минимальной – дизъюнкция (УДП), между минимальной и абсолютной – конъюнкция (УКЛ). В секвенциальной форме абсолютная система RA описывается основной секвенцией $A \to A$ и правилами групп I и III. Другими словами, GRA – это интуиционистская система в генценовской формулировке без структурных правил утончения. От абсолютной системы к минимальной и интуиционистской можно перейти и другим способом: к абсолютной системе в секвенциальной форме добавляем новые структурные правила. Чтобы получить минимальную логику, к абсолютной добавляем правило

$$\frac{\Gamma \text{④} C}{A, \Gamma \text{④} C}\ \text{ДЛ}.$$

Чтобы получить интуиционистскую логику, надо добавить к минимальной логике особый вид:

$$\frac{\Gamma \text{④}}{\Gamma \text{④} B}\ \text{ДП}_{o}.$$

Для классической логики аналогичное решение не подходит. Мы должны или перейти к многосукцедентным секвенциям, или построить субординатное секвенциальное исчисление.

Из указанных выше соображений система, лежащая в основе, и была названа абсолютной.

В абсолютной системе не проходит закон дистрибутивности $A\&(B \vee C) \supset A\&B \vee C$ или в полной форме $A\&(B \vee C) \supset A\&B \vee A\&C$. Систему RA+дистрибутивность будем обозначать RAD. Таким образом, мы имеем

RA
RAD
M
И
K

Систему RA+закон снятия двойного отрицания будем обозначать RAO. R – это объединение RAD и RAO.

Указанные выше соображения обосновывают правомерность рассмотрения системы RA.

Вторая идея, приведшая к формулировке RA, состояла в следующем. При анализе рассуждения следует учитывать не только отдельные шаги рассуждения, но и структуру в целом, способ сочленения отдельных шагов в цельное рассуждение. Эта мысль хорошо выражена в традиционном учении о доказательствах (В. Ф. Асмус [2]). При формализации рассуждения эта установка формулируется следующим образом.

Обычно когда описывают формальную систему, то фиксируют аксиомы и правила вывода. И зачастую характеристика формальной системы на этом обрывается. Но это неправильно. Помимо аксиом и правил вывода, необходимо еще указать, что имеется в виду под выводом, или доказательством. В принципе возможны логические системы, отличающиеся друг от друга не различными аксиомами и правилами вывода, а различными понятиями вывода. Класс доказуемых формул зависит не только от того, каковы отдельные шаги в рассуждении, но и от того, какова структура рассуждения в целом, каков способ сочленения отдельных шагов в цельное рассуждение.

Обычно под выводом из множества посылок Г имеется в виду последовательность формул, каждая из которых является или одной из посылок из Г, или аксиомой, или непосредственно выводима из предшествующих.

При таком понимании вывода не все посылки входят в вывод. Правда, некоторые посылки могут входить в вывод, но из них не получаются другие формулы.

Понятие вывода можно перестроить, имея в виду под выводом не последовательность формул, а фигуру в виде дерева. Но и в этом случае не все посылки используются.

Мы будем использовать другое понятие вывода, которое иногда называем сильным. Такой вывод вводится индукцией не просто по длине последовательности или высоте дерева, а по двум параметрам: высоте дерева и числу посылок, используемых в выводе. Посылками мы считаем только те формулы, которые фактически используются в самом выводе.

Аккуратно сформулируем это понятие вывода. Предполагаем, что фундаментальным определением введено понятие *дерева формул*:

1. Если A – формула, то A – дерево формул.

2. Если $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ – деревья формул и E – формула, то –

$$\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}{E} \text{ – дерево формул.}$$

Затем определяется «A есть последняя формула дерева формул α'». Будем говорить, что E непосредственно выводима из формул $A_1,\ldots, A_k$, если

$$\frac{A_1,\ldots, A_k}{E} \text{ есть правило вывода.}$$

Под *списком* формул Г будем иметь в виду конечную последовательность формул, рассматриваемую с точностью до порядка членов. Список задается одной из последовательностей.

Теперь сформулируем понятие вывода индукцией по двум переменным:

1. Если A – формула, то A есть вывод из списка посылок A.

2. Если A – аксиома, то A есть вывод из пустого списка посылок.

3. Если $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ суть выводы из списков посылок $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$ соответственно, $A_1,\ldots,A_k$ суть последние формулы выводов $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, из $A_1,\ldots,A_k$ непосредственно выводима формула E, то

$$\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}{E} \text{ есть вывод из списка посылок } \Gamma_1,\ldots,\Gamma_k.$$

При замене слова «список» в этом определении на «множество» мы получим иное понятие вывода. Относительно логических систем с сильным понятием вывода, независимо от того, каковы аксиомы и правила вывода системы, верны структурные правила заключения: сечение и перестановка. Эти правила легко доказываются в качестве метатеорем. Однако могут иметь место другие структурные правила, в частности добавление посылок (утончение) и сокращение повторяющейся посылки.

При обычном понятии вывода все перечисленные структурные правила вывода, включая добавление и сокращение, имеют место и доказываются в качестве метатеорем. Если «список» заменить на «множество», то при полученном понятии вывода мы в качестве метатеоремы можем доказать правило, которое я называю размножением

$$\frac{A, \Gamma \text{④} B}{A, A, \Gamma \text{④} B},$$

но для сильного понятия вывода это соотношение не имеет место.

Мы будем работать с сильным выводом, введенным индукцией по двум параметрам – высоте дерева и числу посылок. Рассмотрим прежде всего чисто импликативные логические системы. Будем везде писать $\supset$, хотя для нематериальных систем чаще пишут $\rightarrow$. Единственным правилом вывода будет правило modus ponens.

Относительно систем такого типа можно доказывать теоремы дедукции, и при этом они будут иметь различный вид. Пусть Г – список формул, Γ_A – список формул, полученный из Г в результате вычеркивания возможно некоторых вхождений А из Г (можно вычеркнуть все или некоторые вхождения и вообще не вычеркивать ни одного вхождения). Тогда две формулировки

$$\frac{A, \Gamma \text{④} B}{\Gamma_A \text{④} A \supset B} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma \text{④} B}{\Gamma_A \text{④} A \supset B}$$

будут разными теоремами дедукции. Если вместо списков рассматривать множества (их мы будем обозначать X, Y), то получим еще две формулировки теорем дедукции, отличные от первых двух и друг от друга:

$$\frac{\{A\} \cup X \text{④} B}{X - \{A\} \text{④} A \supset B} \quad \text{и} \quad \frac{X \text{④} B}{X - \{A\} \text{④} A \supset B}.$$

Теперь мы можем оставить вопросы: какие формулы должны быть доказуемы в системе Н, чтобы данный вид теоремы дедукции имел место, будет ли доказуема теорема дедукции данного вида, если в системе Н доказуемы такие-то и такие-то формулы? Другими словами, каковы необходимые и достаточные условия, накладываемые на Н, чтобы теорема дедукции данного вида имела место.

Сформулируем ряд теорем, отвечающих на этот вопрос.

Теорема 1. *Теорема дедукции вида*

$$\frac{A, \Gamma \text{④} B}{\Gamma_A \text{④} A \supset B}$$

имеет место относительно системы Н *с правилом modus ponens тогда и только тогда, когда в этой системе доказуемы формулы вида*

1). A⊃A – рефлексивность;
2). (A⊃B)⊃((B⊃C)⊃(A⊃C)) – транзитивность;
3). (A⊃(A⊃B))⊃(A⊃B) – сокращение;
4). (A⊃(B⊃C))⊃(B⊃(A⊃C)) – перестановка.

Теорема доказана в моей книге «Формальный вывод и логические исчисления».

Назовем эту систему W_I – слабой теорией импликации А. Черча [4]. Она совпадает с импликативным фрагментом релевантной логики RI.

Теорема 2. *Теорема дедукции вида*

$$\frac{\Gamma \text{④} B}{\Gamma_A \text{④} A\supset B}$$

имеет место относительно системы H *с modus ponens тогда и только тогда, когда в* H *доказуемы формулы вида* 1 – 4 *и* 5) (A⊃B)⊃(C⊃(A⊃B)) – *добавление посылки*.

Эта система есть ничто иное, как импликативный фрагмент позитивной, минимальной и интуиционистской логик (все импликативные фрагменты этих логик совпадают).

Если заменить в определении вывода «список» на «множество», то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Теорема дедукции вида*

$$\frac{\{A\}\cup X \text{④} B}{X - \{A\} \text{④} A\supset B}$$

имеет место относительно системы H *с modus ponens тогда и только тогда, когда в* H *доказуемы формулы вида* 1 – 4 *и* 5а)

(A⊃B)⊃(A⊃(A⊃B)) – *размножение*.

Системы импликации, определяемые 1 – 4, 5а обозначим WM_I, или от слова Mingle.

Система, относительно которой имеет место теорема дедукции вида

$$\frac{X \text{④} B}{X - \{A\} \text{④} A\supset B}$$

эквивалентна импликативному фрагменту позитивной логики. начиная с позитивной логики безразлично, строим ли мы логическую систему с понятием вывода из списка или из множества формул.

Классическая система выходит за рамки этой классификации. Классическая импликативная система получается из позитивной (минимальной, интуиционистской), если мы в качестве аксиомы добавим закон Пирса

6). $((A \supset B) \supset A) \supset A$.

Описанные импликативные системы можно достаточно хорошо охарактеризовать в секвенциальных исчислениях. GW_I характеризуется правилами введения и удаления импликации

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \to A \quad B, \Delta \to C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to C}\ .$$

и структурными правилами

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A, B, \Delta \to C}$$ – перестановка,

$$\frac{A, A, \Gamma \to C}{A, \Gamma \to C}$$ – сокращение,

$$\frac{\Gamma \to M \quad \Delta, M, \Theta \to C}{\Delta, \Gamma, \Theta \to C}$$ – сечение.

Сечение в этой системе устранимо (см. [11]).

Для получения системы GWM_I к GW_I добавляем размножение.

$$\frac{A, \Gamma \to C}{A, A, \Gamma \to C}\ .$$

Для системы WM_I сечение неустранимо. Однако мы можем построить другую систему, эквивалентную ей, в которой сечение будет устранимо. Для этого правило размножения в WM_I заменяем на правило объединения.

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to A}{\Gamma, \Delta \to A}\ .$$

Для этой системы имеет место теорема об устранимости сечения [11, с. 213 – 216]. В книге нет доказательства эквивалентности этих систем. В то время я не знал, что они эквивалентны. Если в некоторой системе сечение неустранимо, то это еще не значит, что нельзя построить другую систему, эквивалентную первой, в которой сечение было бы устранимым.

Для того чтобы получить интуиционистскую систему GH_I, мы должны добавить к GW_I.

$$\frac{\Gamma \to C}{A, \Gamma \to C}\ .$$

Чтобы построить классическую логику в виде исчисления секвенций, требуется рассмотреть многосукцедентные секвенции или построить классическую односукцедентную методом субординатного секвенциального вывода (последнее менее разработано).

Мы получили двоякую классификацию импликативных систем: по виду теорем дедукции и по структурным правилам в секвенциальной форме. В первом случае структурные правила как бы включались в формулировку теоремы дедукции, в секвенциальной форме они разделены.

Система R_I и есть релевантная импликативная логика, т. е. логика, соответствующая требованию интуиции о том, чтобы все посылки существенно использовались в выводе. Такой вывод релевантен, т. е. соответствует интуиции.

Подобный подход позволяет нам охарактеризовать чисто импликативные системы единообразно. Такие системы можно построить в виде секвенциальных исчислений без сечения и доказать разрешимость указанных импликативных систем.

Трудности возникнут тогда, когда мы перейдем к системам с другими связками. При этом возникнет ряд нерешенных чисто формальных задач, не говоря уже о проблемах семантики.

Прежде всего – это трудности с конъюнкцией. Если имеются обычные правила обращения с конъюнкцией, т. е. правила введения

$$\frac{A \quad B}{A\&B}$$

и удаления конъюнкции, то эффект от требования существенного использования посылок оказывается нулевым. Действительно, всякую неиспользуемую посылку A можно объединить с используемой посылкой B конъюнктивно, затем по правилу удаления конъюнкции – получить B и продолжить вывод.

Преодолеть эти трудности можно различными способами. Один из способов состоит в следующем. Формулируем новое правило вывода – правило введения конъюнкции:

$$\frac{A \quad B}{A\&B}\,\text{ВК},$$

но при этом требуем, чтобы это правило применялось только к формулам, не зависящим от посылок.

Если помимо modus ponens есть правила, применяемые к формулам, не зависящим от посылок, то эти правила, так же как добавление новых аксиом, не влияют на доказательство соответствующей теоремы дедукции. Если мы добавляем новые правила вывода, применяемые к формулам, зависящим от посылок, то, естественно, теорему дедукции надо доказывать заново (если она имеет место).

В дальнейшем мы будем рассматривать логические системы со связками &, ∨, ⊃, ¬ и кванторами ∀ и ∃.

Мы характеризовали импликации с помощью различных теорем дедукции и modus ponens и в конечном с помощью правил введения и удаления импликации и, возможно, некоторых структурных правил.

Нельзя ли остальные связки характеризовать с помощью правил введения и удаления логических знаков? В некотором отношении минимальной системой была бы система, удовлетворяющая этим правилам введения и удаления. Все правила введения и удаления логических знаков сформулируем в виде следующих непрямых правил вывода:

A, Γ④ B ——————— Γ④A⊃B	Γ④A⊃B ——————— A, Γ④B
Γ④A Γ④B ——————— Γ④A&B	Γ④A&B ——————— Γ④A и Γ④B
A, Γ④f ——————— Γ④¬A	Γ④¬A ——————— A, Γ④ f
A, Γ④C B, Γ④C ——————— A∨B, Γ④ C	A∨B, Γ④C ——————— A, Γ④C и B, Γ④C
Γ④Aw ——————— Γ④∀xAx	Γ④∀xAx ——————— Γ④At
Aw, Γ④C ——————— ∃xAx, Γ④C	∃xAx, Γ④C ——————— At, Γ④ C

Мы рассматриваем систему с дополнительной константой f. В этом случае правило для отрицания будет излишним, если ¬A⇌A⊃f. На правила введения квантора общности (справа) и квантора существования (слева) накладываются обычные ограничения. Для ВИП, ВОП, ВДЛ и В∃Л мы требуем, чтобы ни одна переменная в устраняемой посылке не варьировалась.

Пусть в системе H имеются в качестве правила вывода modus ponens, правило обобщения

$$\frac{Aw}{\forall x F^{w}{}_{x} Ax}$$

и ВК (с указанными ограничениями на применимость). Тогда имеет место

Теорема 4. *Относительно* H *с указанными правилами вывода имеют место правила введения и удаления логических символов тогда и только тогда, когда в* H *доказуемы формулы вида*

(1) $A\supset A$;
(2) $(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$;
(3) $(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$;
(3) $(A\supset(D\supset C))\supset(B\supset(A\supset C))$;
(5) $A\&B\supset A$;
(6) $A\&B\supset B$;
(7) $(A\supset B)\&(A\supset C)\supset(A\supset B\&C)$;
(8) $A\supset A\vee B$;
(9) $B\supset A\vee B$;
(10) $(A\supset C)\&(B\supset C)\supset(A\vee B\supset C)$;
(11) $\forall x(C\supset Ax)\supset(C\supset\forall xAx)$;
(12) $\forall xAx\supset At$;
(13) $\forall x(Ax\supset C)\supset(\exists xAx\supset C)$;
(14) $At\supset\exists xAx$.

Эту систему обозначим RA. В моей книге я ее называю абсолютной системой, но поскольку она оказалась фрагментом R, я теперь ее предпочитаю называть RA. Отрицание вводится по определению $\neg A \rightleftharpoons A\supset f$.

Классическое и интуиционистское исчисления предикатов могут быть аксиоматизированны двояким образом: с правилами Бернаса и правилами обобщения. Но для системы RA в указанной выше аксиоматизации имеет место теорема дедукции, хотя для системы, полученной из RA заменой схем аксиом 11 и 13 и из правила обобщения правилами Бернайса, теорема дедукции не будет иметь место.

Теорема 4 доказывается нетрудно. Доказательство ее имеется в книге «Формальный вывод и логические исчисления» [11].

Система в виде правил введения и удаления логических знаков является видом натурального исчисления, который мы называем натуральным секвенциальным исчислением. От него очень легко перейти к секвенциальному логистическому исчислению.

В [11] мной была доказана теорема об устранимости сечения для GRA. В. М. Попов в [10] доказал разрешимость проблемы разрешения для пропозициональной части GRA. Секвенциальная формулировка для RAO получается в результате отбрасывания правил утончения из LK Генцена. Назовем эту систему GRAO. Теорема об устранимости сечения для GRAO доказывается тем же методом, что и для GRA. В. М. Попов доказал разрешимость проблемы разрешения для пропозициональной части GRAO методом, аналогичным [10]. Секвенциальная формулировка для GRAD предложена в [15], однако сечение для этой формулировки неустранимо. Открытыми остаются еще следующие проблемы:

1). Можно ли сформулировать системы RAD и R в секвенциальной форме так, чтобы сечение было устранимо и все остальные фигуры заключения обладали бы свойством подформульности?

2). Имеет ли место для RA, RAO, R интерполяционная теорема?

2. СИСТЕМЫ СИЛЬНОЙ И СТРОГОЙ ИМПЛИКАЦИЙ С ПОНЯТИЕМ ВЫВОДА ИЗ СПИСКА ПОСЫЛОК

Продолжим построение импликативных систем. Учтем и другую сторону, учитываемую в модальных логиках льюисовского типа, и получим характеристику некоторых льюисовских систем импликации (систем строгой импликации) и некоторых систем, сочетающих ограничения, накладываемые как на льюисовские, так и на релевантные системы (системы сильной импликации).

Для характеристики чисто импликативных систем применим уже изложенный подход, но иначе сформулируем теоремы дедукции. Пусть $\Gamma^{\supset}$ означает, что все формулы Γ импликативны, т. е. главный знак всех формул из Γ есть импликация. Вместо

$\dfrac{A, \Gamma ④ B}{\Gamma_A ④\ A \supset B}$ мы имеем теорему дедукции вида $\dfrac{A, \Gamma^{\supset} ④ B}{\Gamma^{\supset}{}_A ④ A \supset B}$,

аналогично для других форм теоремы дедукции.

Теорема 5. *Теорема дедукции вида*

$$\frac{A, \Gamma^{\supset} ④\ B}{\Gamma^{\supset}{}_A ④ A \supset B}$$

имеет место относительно системы H *с modus ponens тогда и только тогда, когда в* H *доказуемы формулы вида*:

(1) $A\supset A$;
(2) $(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$;
(3) $(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$;
(4’) $(A\supset((B\supset C)\supset D))\supset((B\supset C)\supset(A\supset D))$.

Формула (4’) есть ослабленная перестановка; в (4) $(A\supset(B\supset C))\supset(B\supset(A\supset C))$ формула B должна быть импликативной.

Получившаяся система есть не что иное, как импликативный фрагмент системы следования Андерсона и Белнапа E; обозначим ее E_I.

Доказательство теоремы 5 изложено на английском языке в [14]. Если относительно системы H с modus ponens имеет место теорема дедукции указанного вида, то формулы вида (1) – (4’) доказуемы в H. Покажем теперь, что в системе, в которой доказуемы формулы вида (1) – (4), имеет место теорема дедукции.

Если формула B выводима из A, Γ и все посылки Γ (за исключением, возможно, A) имплиативны, то формула $A\supset B$ выводима из $(\Gamma_A)^{\supset}$, где $(\Gamma_A)^{\supset}$ есть результат вычеркивания всех вхождений A, если A не импликативна, и, возможно, некоторых (возможно, всех, а возможно, и ни одного) вхождений A в Γ, если A – импликативная формула.

Теорему дедукции докажем индукцией по сложности данного вывода.

Под сложностью вывода будем иметь в виду пару натуральных чисел (k, h), где k есть число посылок вывода, а h – высота вывода. Предположим, что пары натуральных чисел лексикографически упорядочены, т. е. $(k', h') \prec (k'', h'')$, если и только если $k' < k''$ или $k' = k''$ и $h' < h''$.

Случай 1. Данный вывод имеет вид: A – посылка. Тогда результирующий вывод будет иметь вид: $A\supset A$ – аксиома.

Случай 2. Данный вывод имеет вид

$$\frac{\alpha \quad \beta}{B}$$, где α есть вывод формулы C

из списка посылок Δ и β есть вывод формулы $C\supset B$ из списка посылок Θ. Если A входит в Δ (соответственно в Θ), то пусть Δ=A, Δ’ (соответственно Θ=A, Θ’).

Случай 2 распадается на три подслучая.

Подслучай 2.1. A входит в Δ, но не в Θ, или A входит в Δ и Θ и $\Gamma_A=\Gamma$. Используя индуктивное допущение, можно построить вывод фор-

формулы $A\supset C$ из списка посылок $(\Delta'_A)^{\supset}$. Затем, используя транзитивность импликации, получаем искомый результирующий вывод.

Подслучай 2.2. A входит в Δ и в Θ и $(\Gamma_A)^{\supset} \neq \Gamma^{\supset}$. Используя индуктивное допущение, строим вывод формулы $A\supset C$ из списка посылок $(\Delta'_A)^{\supset}$ и вывод формулы $A\supset(C\supset B)$ из списка посылок $(\Theta'_A)^{\supset}$. Затем, используя самодистрибутивность импликации (а она доказуема в системе E_I), получаем искомый результирующий вывод.

Подслучай 2.3. A входит в Θ, но не входит в Δ. Этот подслучай, в свою очередь, распадается на два.

2.3.1. Δ непусто. Так как A не входит в Δ, то все формулы, входящие в Δ, импликативны. Пусть Δ есть $D_1,..., D_l$. Используя индуктивное допущение l раз, строим вывод формулы $A\supset(D_1\supset...\supset(D_l\supset B)...)$ из списка посылок $(\Theta_A)^{\supset}$. Поскольку формулы $D_1,..., D_l$ импликативны, то в E_I доказуема формула вида $(A \supset (D_1 \supset...\supset (_{Dl} \supset B)...)) \supset (D_1 \supset...\supset (D_l\supset (A \supset$
$\supset B))...))$. Отсюда из $(\Theta_A)^{\supset}$ выводима формула $(D_1\supset...\supset(D_l\supset(A\supset B))...))$. Применяя l раз modus ponens, строим результирующий вывод формулы $A \supset B$ из списка посылок $\Delta, (\Theta_A)^{\supset}$.

2.3.2. Δ пусто. В этом случае, поскольку $\vdash C$, то $\vdash(C\supset C)\supset C$. Используя индуктивное допущение, строим вывод формулы $A\supset(C\supset B)$ из списка посылок $(\Theta'_A)^{\supset}$. Поскольку в E_I доказуемы формулы вида $((C\supset C)\supset C)\supset((A\supset(C\supset B))\supset(A\supset B))$, то получается результирующий вывод формулы $A\supset B$ из списка посылок $(\Theta'_A)^{\supset}$. Теорема доказана.

Назовем PA систему, полученную из аксиоматической формулировки RA, заменой аксиомы (4) (перестановка посылок), ограниченной перестановкой посылок (4').

$(A\supset((B\supset C)\supset D))\supset((B\supset C)\supset(A\supset D))$ и добавлением схем аксиом:

(15) $(A\supset\neg B)\supset(B\supset\neg A)$;

(16) $(A\supset\neg A)\supset\neg A$;

(17) $(A\supset)\supset\neg A$.

Большой интерес представляет система EA. Она получается из PA за счет дополнительной схемы аксиом:

(18) $\Box A\&\Box B\supset\Box(A\&B)$,

где $\Box A \rightleftharpoons (A\supset A)\supset A$.

Пусть Г* есть список формул, каждая из которых или импликативна или является конъюнкцией импликативных формул (отрицательная формула является импликативной).

Теорема 6. *Для системы* EA *имеет место теорема дедукции вида*

$$\frac{A, \Gamma^* \vdash B}{\Gamma^* \vdash A\supset B}.$$

Доказательство этой теоремы получаем из теоремы 5 и из того, что в EA доказуема эквивалентность $(A\supset B)\&(C\supset D)\equiv\Box((A\supset B)\&(C\supset D))$. Пусть GEA есть генценовская формулировка исчисления EA.

Основная секвенция: $A\to A$.

Фигуры заключения:

$$\frac{A, \Gamma^*\to B}{\Gamma^* \to A\supset B}; \qquad \frac{\Gamma\to A \quad B, \Delta\to\Theta}{A\supset B, \Gamma, \Delta\to\Theta};$$

$$\frac{C, \Gamma^*\to A \quad C, \Gamma\to B}{C, \Gamma^* \to A\& B}; \qquad \frac{A, \Gamma\to\Theta \text{ или } B, \Gamma\to\Theta}{A\& B, \Gamma \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma\to A \text{ или } \Gamma\to B}{\Gamma \to A\vee B}; \qquad \frac{A, \Gamma^*\to\Theta \quad B, \Gamma^*\to\Theta}{A\vee B, \Gamma^* \to \Theta};$$

$$\frac{A, \Gamma\to}{\Gamma \to \neg A}; \qquad \frac{\Gamma\to A}{\neg A, \Gamma \to}.$$

Структурные правила заключения: перестановка, сокращение и сечение.

Теорема 7. Г④B *в* EA *тогда и только тогда, когда секвенция* $\Gamma\to B$ *доказуема в* GEA.

3. ИМПЛИКАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОНЯТИЕМ ВЫВОДА ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОСЫЛОК.

В работе [11] рассматривались выводы из последовательности формул. Воспроизведем определение вывода из последовательности посылок в виде дерева (в терминологии [11] ВДОП2).

1. Если A – аксиома, то A есть вывод из пустой последовательности посылок.

2. Если A посылка, то A есть вывод из последовательности посылок A.

3. Если α есть вывод формулы A из последовательности формул π, β есть вывод формулы $A\supset B$ из последовательности посылок ψ, то

$$\frac{\alpha \quad \beta}{B}$$ есть вывод из последовательности посылок.

Мы пока рассматривали логические системы только с одним правилом вывода – modus ponens. При этом это правило имеет вид

$$\frac{A \quad A\supset B}{B}.$$

Здесь важна последовательность посылок,

$$\frac{A\supset B \quad A}{B}$$ не есть правило вывода.

В [11, с. 72 – 74] была доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Относительно логистической системы* H *с modus ponens единственным правилом вывода*

$$\frac{A \quad A\supset B}{B}$$

и с указанным понятием вывода справедлива теорема дедукции вида

$$\frac{A\pi ④B}{\pi ④A\supset B}$$

тогда и только тогда, *когда в* H *доказуемы формулы вида*

$A\supset A$;
$(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$.

и относительно H *имеет место: если существует доказательство формулы, то существует доказательство формулы* $(A\supset(D\supset B))\supset(A\supset C)$.

Отметим, что относительно систем со сформулированным понятием вывода, без обращения к специальному виду аксиом, имеют место только структурное правило A④A и сечение, но не правила сокращения, перестановки, утончения. Сечение для указанной системы имеет вид

$$\frac{\pi④A \quad \psi A\varphi ④B}{\psi\pi\varphi ④B}.$$

Пусть E'_I есть импликативный фрагмент системы E с понятием вывода из последовательности посылок, а GE'_I – секвенциальное исчисление, задаваемое следующими схемами и фигурами заключения $A\rightarrow A$:

$$\frac{A\pi\rightarrow B}{\pi\rightarrow A\supset B}; \qquad \frac{\pi\rightarrow A \quad \lambda B\psi\rightarrow \upsilon}{\lambda\pi A\supset B\psi\rightarrow \upsilon}.$$

$\pi AA\psi\rightarrow\upsilon$

$$\frac{}{\pi A\psi\to\upsilon}\ \text{– сокращение;}$$

$$\frac{\pi A\supset B\psi\to\upsilon}{\pi BA^{\supset}\psi\to\upsilon}\ \text{– ограниченная перестановка;}$$

$$\frac{\pi\to A\quad \psi A\varphi\to\upsilon}{\psi\pi\varphi\to\upsilon}\ \text{– сечение.}$$

Теорема 9. π ④B в E'_I *тогда и только тогда, когда* ④π→B в GE'_I.

Индукцией по высоте вывода B из π доказываем, что если π④B в E_I, то ④π→B в GE_I. Каждая аксиома доказуема. Выводу 1. A – посылки сопоставляется доказуемая секвенция A→A.

Сечение позволяет доказать индукционный шаг. Пусть из φ ④ρ и из φ ④ρ⊃B. По индуктивному допущению ④ψ⊃ρ и φ→ρ⊃B; отсюда

$$\cfrac{\psi\to\rho\qquad \cfrac{\varphi\to\rho\supset B\qquad \cfrac{\rho\to\rho\quad B\to B}{\rho\rho\supset B\to B}}{\rho\varphi\to\rho}\ \text{– сечение}}{\psi\varphi\to B}\ \text{– сечение}$$

Для доказательства того, что если ④π→B в GE'_I, то π④B в E'_I, достаточно показать, что относительно E'_I имеют место правила вспомогательного вывода, соответствующие фигурам заключения.

Прежде всего покажем, что имеет место теорема дедукции вида

$$\frac{A\pi\ ④B}{\pi\ ④A\supset B}.$$

Для этого достаточно показать, что если в E'_I доказуема формула D, то и доказуема (A⊃(D⊃B))⊃(A⊃B). Но если D доказуема в E'_I, то D импликативна. Поэтому

1. D
2. (A⊃(D⊃B))⊃(D⊃(A⊃B)) – аксиома перестановки.
3. ((A⊃(D⊃B))⊃(D⊃(A⊃B)))⊃(D⊃((A⊃((D⊃B))⊃ ⊃(A⊃B))) – аксиома перестановки.
4. D⊃((A⊃(D⊃B))⊃(A⊃B) – m. p.; 2, 3.
5. (A⊃(D⊃B))⊃(A⊃B) – m. p.; 1, 4.

Используемое понятие вывода позволяет доказать сечение. Верно также обращение теоремы дедукции. Эти два последние правила позволяют с использованием соответствующих аксиом легко доказать правила, соответствующие введению импликации слева, сокращению, ограниченной перестановки. Например, пусть $C_1 ... C_n A^{\supset} B \psi$④$E$. Применив n+2 раза теорему дедукции, имеем ψ④$B \supset (A^{\supset} \supset (C_n \supset ... (C_1 \supset E)...))$. Используя аксиому ограниченной перестановки, получаем ψ④$A^{\supset} \supset (B \supset (C_n \supset ...(C_1 \supset E)...))$. Применяя обращение теоремы дедукции, получаем $C_1 ... C_n B A^{\supset} \psi$④$E$.

Чтобы получить импликативный фрагмент $GE4_I$, достаточно добавить к GE'_I фигуру

$$\frac{\pi \to \psi}{\pi, A \to \psi}.$$

Добавив правило добавления в другой форме, а именно:

$$\frac{\pi \to \psi}{A, \pi \to \psi},$$

получим минимальную систему импликации.

Аксиоматика E′A получается из аксиоматики RA заменой схемы перестановки схемой ограниченной перестановки и добавлением схемы $(A \supset (B \supset f)) \supset (B \supset (A \supset f))$ и □A&□B⊃□(A&B). Понятие вывода то же самое, что и для E'_I. Для системы E′A верна метатеорема «если ④D, то ④ND». С помощью этой метатеоремы докажем, что если ④D, то ④$(A \supset (D \supset E)) \supset (A \supset E)$. Пусть D доказуема, тогда доказуема ND. Последняя формула импликативна, поэтому доказуема формула $(A \supset (ND \supset E)) \supset (A \supset E)$. Но в EA доказуема формула $(A \supset (D \supset E)) \supset (A \supset (ND \supset E))$. Из последних двух формул и транзитивности импликации получаем ④$(A \supset (D \supset E)) \supset (A \supset E)$. Теперь, применив теорему 8, получаем следующую теорему.

Теорема 10. *Для* E′A *и всех ее расширений (с помощью добавления новых аксиом или схем аксиом) имеет место теорема дедукции вида*

$$\frac{A\pi \text{ ④} B}{\pi \text{ ④} A \supset B}.$$

Пусть GEA получается из пропозициональной части GRA заменой правила перестановки правилом ограниченной перестановки. На основе теоремы 10 нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 11. π④B *в* E′A *тогда и только тогда, когда секвенция* π→B *доказуема в* GEA.

Литература

1. *Anderson A. R.* Some open problems conxerning entailment. Acta philos. fenn., 1963. Fasc. 16.
2. *Асмус В. Ф.* Учение логики о доказательстве и опровержении. М., 1954.
3. *Belnap N. D., Wallace I. R.* A decision procedure for the system E of entailment with negation. Z. math. Log. und Grundlagen Math., 1965. Bd. 11.
4. *Church A.* The weak theory of implication. Kontrolliztes Denken. Munich, 1951.
5. *Kripke S. A.* The problem of entailment (abstract). J. Symbol. Log., 1959. V. 24.
6. *Kron A.* Deduction theorems for lerevant logics. Z. math. Log. und Grundlagen Math., 1973. Bd. 19.
7. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
8. *Максимова Л. Л.* Интерпретация и теоремы отделения для исчислений E и. // Алгебра и логика, 1971. Т. 10. № 4.
9. *Минц Г. Е.* Теорема об устранимости сечения для релевантных логик. // Зап. ЛОМИ, 1972. Т. 32.
10. *Попов В. М.* О разрешимости релевантной системы. // Методы логического анализа. М., 1977.
11. *Смирнов В. А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
12. *Смирнов В. А.* Так называемые парадоксы материальной импликации и логические системы с понятием сильного вывода. // Исследование логических систем. М., 1970.
13. *Smirnov V. A.* An absolute first order predicate calculus. Bull. Sec. Log. Pol. Acad. Sci. Inst. Philos. and Sociol., 1973. V. 2. N. 1.
14. *Smirnov V. A.* A new form of the deduction theorem for R, E and P. V Inter. Congr. Log. Methodol. and Philos. Sci. Contrib. Papers, London – Ontario, 1975.
15. *Смирнов В. А.* Представление логических систем с сильной и релевантной импликациями в секвенциальной форме. /// Теория логического вывода. Тез. докл. Всесоюз. симп., Москва, март 25 – 27, 1974. М., 1974.

ПОИСК ДОКАЗАТЕЛЬСТВ В НАТУРАЛЬНОМ ИНТУИЦИОНИСТСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ.

Существуют два типа систем натурального вывода: с прямым и непрямым правилом удаления квантора существования. Прямое правило удаления квантора существования по существу формулируется с использованием языка с эпсилон-символом. Классическое исчисление предикатов с прямым правилом удаления квантора существования элегантно и является хорошей основой для организации систематической процедуры поиска доказательств. Мною была предложена процедура поиска доказательств для классического исчисления предикатов с прямым правилом удаления квантора существования [7]. А.В. Смирнов и А.Е. Новодворский [3] реализовали ее на компьютере. Хотелось бы построить интуиционистское исчисление предикатов с прямым правилом удаления квантора существования и на этой основе сформулировать алгоритм поиска доказательств. Однако на этом пути мы встречаемся с определенными трудностями. Если мы заменим классические пропозициональные правила интуиционистскими, то в результате получим логическую систему, более богатую, нежели интуиционистское исчисление предикатов. Действительно, допустим, что имеет место $\exists xA(x)$. По правилу удаления квантора существования получим $A(\varepsilon xAx))$. По правилу введения импликации будем иметь $\exists xA(x) \supset A(\varepsilon xAx))$. Из последней формулы по правилу введения квантора существования получаем $\exists y(\exists xA(x) \supset A(y))$. Запишем этот вывод формально

1.	$\quad\mid \exists xA(x)$	допущение
2.	$\quad\mid A(\varepsilon xAx))$	$\exists$у; 1
3.	$\exists xA(x) \supset A(\varepsilon xAx))$	$\supset$в; 1-2
4.	$\exists y(\exists xA(x) \supset A(y))$	$\exists$в; 3

Но как хорошо известно, последняя формула не доказуема интуиционистски.

Где в этом доказательстве неинтуиционистткие шаги? Ответ, видимо, неоднозначен. В книге [5] я предлагал наложить ограничения на непрямые правила вывода: потребовать, чтобы ε-термы не входили в устраняемые допущения и заключение. Однако это ограничение слишком стеснительно и неэлегантно. А.Г. Драгалин [1], а затем Д.Скотт ввели другое ограничение: в пределах введения квантора существования и удаления квантора общности мы должны потребовать, чтобы вводимый или исключаемый терм был не пуст. Это более изящное решение проблемы. В настоящей статье я предлагаю формулировку интуиционистского исчисления предикатов с ε-символом и предикатом существования в виде субординатного вывода. Затем обсуждается проблема систематического поиска выводов в этом исчислении.

Язык интуиционистского натурального исчисления с ε-символом NεI строится с помощью двух типов индивидных переменных: свободных – v, $v1$, $v2$, ... и связанных – x, y, z, ... , $x1$, $x2$, ... , предикатных знаков, логических связок $\&, \vee, \supset, \neg$, знака абсурдности $\perp$, предиката существования Е, кванторов $\forall$ и $\exists$, ε-символа, скобок и запятой. Одновременной индукцией определяем понятия квазитерма и квазиформулы. Термами и формулами являются квазитермы и квазиформулы, не содержащие свободных вхождений связанных переменных. Под подстановкой вместо свободной переменной v квазитерма t в квазиформулу или квазитерм имеется в иду замещение каждого вхождения свободной переменной v в квазитерм или квазиформулу квазитермом t. Подстановку будем обозначать $\mathrm{F}v/t\ A$ и $\mathrm{F}v/t\ t1$. Подстановка правильна, если ни одна связанная переменная, имеющая свободные вхождения в t, не находится в области действия кванторов или ε-оператора по этой переменной. Ниже мы будем иметь дело только с правильными подстановками. Отметим, что каждая подстановка терма правильна. Каждую формулу, начинающуюся с квантора, мы можем представить в виде $\forall x Fv/xA$ и $\exists x Fv/xA$. Следуя Гильберту и Бернайсу, будем говорить, что терм $t1$ вложен в терм $t2$, если $t2$ имеет вид $\mathrm{F}v/t1\ t3$, где подстановка, естественно, правильна. Например, терм $\varepsilon x D(x,y)$ вложен в терм $\varepsilon y A(\varepsilon x D(x,y))$. Квазитерм $\varepsilon x B(x,y)$ подчинен квазитерму $\varepsilon y \mathrm{A}(y,\varepsilon x B(x,y))$, т.е. первый квазитерм имеет свободные вхождения связанной переменной, по которой образован второй терм. В дальнейшем мы будем иметь дело с выводами, посылки и заключение которых не будут содержать ε-термов. Поэтому в NεI в выводы не будут входить формулы с подчиненными друг другу квазитермами.

Вывод имеет вид субординатного вывода, при этом каждый вспомогательный вывод будет иметь не более одного допущения.

Правила введения и удаления логических знаков для NεI

$\dfrac{A\supset B \quad A}{B}\ \supset e$	$\begin{array}{c} A \\ . \\ . \\ . \\ B \end{array} \Rightarrow \left\| \begin{array}{c} A \\ . \\ . \\ . \\ B \end{array} \right. \quad \supset i$ $A\supset B$
$A\&B \quad A\&B$	$A \quad B$

<table>
<tr><td>$\dfrac{}{A}\qquad\dfrac{}{B}\qquad \&e$</td><td>$\dfrac{}{A\&B}\qquad \&i$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\begin{array}{c|c} A & A \\ . & . \\ .\!\Rightarrow & . \\ . & . \\ \perp & \perp \\ \multicolumn{2}{c}{\neg A} \end{array}\qquad \neg\, i$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A\vee B} \\ A & A \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ C & C \\ \multicolumn{2}{l}{u\ \Rightarrow} \\ B & B \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ C & C \\ \multicolumn{2}{c}{C} \end{array}\qquad \vee\, e$</td><td>$\dfrac{A}{A\vee B}\qquad \dfrac{B}{A\vee B}\qquad \vee i$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\perp}{A}\qquad \perp e$</td><td>$\dfrac{\neg A\quad A}{\perp}\qquad \perp i$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\forall x A(x)\quad \mathrm{E}(t)}{A(t)}\qquad \forall e$</td><td>$\dfrac{A(w)}{\forall x A(x)}\qquad \forall i$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\exists x A(x)}{A(\varepsilon x A(x))}\qquad \exists e$</td><td>$\dfrac{\mathrm{E}(t)\quad A(t)}{\exists x A(x)}\qquad \exists i$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{}{\mathrm{E}(w)}$</td><td>$\dfrac{\exists x A(x)}{\mathrm{E}(\varepsilon x A(x))}\qquad \mathrm{E}i$</td></tr>
</table>

Кроме основных будем использовать в качестве официальных также два производных правила $\supset e1$ и $\supset i2$:

$$\begin{array}{lcl} & A \supset B & \\ . & & .\\ . & & .\\ . & & .\\ A & & A \\ и & \Rightarrow & B \\ B & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & C \\ C & C & \end{array} \qquad \text{и} \qquad \dfrac{A}{B \supset A}$$

Теперь перейдем к процедуре поиска вывода. Поиск начинается с формулировки задачи: из посылок $A1, \ldots, An$ требуется вывести формулу B. Мы исходим из допущения, что ни посылки, ни заключение не содержат ε-символов и предиката существования.

Synthetic	
Introduction	Elimination
$\begin{array}{lcl} A & & A \\ \vdash & \Rightarrow & B\supset A \\ & & \vdash \end{array}$	$\begin{array}{lcl} A\supset B & & A\supset B \\ A & \Rightarrow & A \\ \vdash & & B \\ & & \vdash \end{array}$
$\begin{array}{lcl} \mathrm{A} & & A \\ B & \Rightarrow & B \\ \vdash & & A\&B \\ & & \vdash \end{array}$	$\begin{array}{lcl} A\&B & & A\&B \\ \vdash & \Rightarrow & A \\ & & \vdash \end{array} \quad \begin{array}{lcl} A\&B & & A\&B \\ \vdash & \Rightarrow & B \\ & & \vdash \end{array}$
$\begin{array}{lcl} A & & A \\ \vdash & \Rightarrow & \vdash A\vee B \\ & & \vdash \end{array} \quad \begin{array}{lcl} B & & B \\ \vdash & \Rightarrow & A\vee B \\ & & \vdash \end{array}$	$\begin{array}{lcl} A\vee B & & A\vee B \\ \neg A & \Rightarrow & \neg A \\ \vdash & & B \\ & & \vdash \end{array}$

$A \qquad A$	$\forall x A(x) \qquad \forall x A(t)$

<table>
<tr><td>$\begin{array}{lcl} \neg A & \Rightarrow & \neg A \\ \vdash & & \bot \\ & & \vdash \end{array}$</td><td>$\begin{array}{lcl} E(t) & \Rightarrow & E(t) \\ \vdash & & A(t) \\ & & \vdash \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{lcl} A(t) & & A(t) \\ E(t) & \Rightarrow & E(t) \\ \vdash & & \exists x A(x) \\ & & \vdash \end{array}$</td><td>$\begin{array}{lcl} \exists x A(x) & & \exists x A(x) \\ \vdash & \Rightarrow & A(\varepsilon x A(x)) \\ & & \vdash \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{lcl} \vdash & \Rightarrow & E(w) \\ & & \vdash \end{array}$</td><td>$\begin{array}{lcl} \exists x A(x) & & \exists x A(x) \\ \vdash & \Rightarrow & E(\varepsilon x A(x)) \\ & & \vdash \end{array}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Analitic</td></tr>
<tr><td>Introduction</td><td>Elimination</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{lcl} \vdash & \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} A \\ \vdash \\ B \end{array} \right. \\ A \supset B & & A \supset B \end{array}$</td><td>$\begin{array}{lcl} & & A \supset B \\ A \supset B & & \left| \begin{array}{l} \vdash \\ A \end{array} \right. \\ \vdash & \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} B \\ \vdash \\ C \end{array} \right. \\ C & & C \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{lcl} \vdash & \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} \vdash \\ A \\ \vdash \\ B \end{array} \right. \\ A \& B & & A \& B \end{array}$</td><td>$\begin{array}{lcl} A \& B & & \left| \begin{array}{l} \vdash \\ A \\ \vdash \\ B \end{array} \right. \\ \vdash & \Rightarrow & \\ C & & A \& B \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{lclcl} \vdash & & \left| \begin{array}{l} \vdash \\ A \end{array} \right. & & \left| \begin{array}{l} \vdash \\ B \end{array} \right. \\ A \vee B & \Rightarrow & A \vee B & \textit{or} & A \vee B \end{array}$</td><td>$\begin{array}{lcl} & & A \vee B \\ A \vee B & & \left| \begin{array}{l} A \\ \vdash \\ C \end{array} \right. \\ \vdash & \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} B \\ \vdash \\ C \end{array} \right. \\ C & & C \end{array}$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>$\neg A \qquad \neg A$</td></tr>
</table>

$\begin{array}{lc\|l} \vdash & \Rightarrow & \vdash \\ \neg A & & \bot \\ & & \neg A \end{array}$	$\begin{array}{lc\|l} \vdash & \Rightarrow & \vdash \\ \bot & & A \\ & & \bot \end{array}$
$\begin{array}{lc\|l} \vdash & \Rightarrow & \vdash \\ \forall xA(x) & & A(w) \\ & & \forall xA(x) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} & & \forall xA(x) \\ & & \vdash \\ \forall xA(x) & & \mathrm{E}(t) \\ \vdash & \Rightarrow & A(t) \\ C & & \vdash \\ & & C \\ & & C \end{array}$
$\begin{array}{lcl} & & \mathrm{E}(t) \\ \vdash & \Rightarrow & \vdash \\ \exists xA(x) & & A(t) \\ & & \exists xA(x) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} & & \exists xA(x) \\ \exists xA(x) & & A(\varepsilon xA(x)) \\ \vdash & \Rightarrow & \vdash \\ C & & C \\ & & C \end{array}$
$\begin{array}{lcl} \vdash & & \vdash \\ \mathrm{E}(\varepsilon xA(x)) & \Rightarrow & \exists xA(x) \\ & & \mathrm{E}(\varepsilon xA(x)) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} & & \mathrm{E}(\varepsilon xA(x)) \\ \mathrm{E}(\varepsilon xA(x)) & & \exists xA(x) \\ \vdash & \Rightarrow & \vdash \\ C & & C \\ & & C \end{array}$

Помимо перечисленных в таблице правил поиска вывода, имеются также два правила удаления знака $\vdash$:

$$\begin{array}{ccccccc} A & & & & \bot & & \bot \\ \vdash & \Rightarrow & A & и & \vdash & \Rightarrow & B\,, \\ A & & & & B & & \end{array}$$

правило введения произвольной формулы

$$\begin{array}{ccc} \vdash & & \vdash \\ B & \Rightarrow & \bot \\ & & B \end{array}$$

и, наконец, правило глобальной подстановки вместо временных переменных термов: во всем дереве поиска вывода разрешается заменить все вхождения переменной на терм.

В отличие от классической логики интуиционистские правила не обратимы. Поэтому небезразличен порядок применения правил поиска вывода.

Литература

1. *Драгалин А.Г.* Интуиционистская логика и ε-символ Гильберта. // История и методология естественных наук. М., МГУ, 1979.
2. *Клини С.К.* Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях LK и LI. // Математическая теория логического вывода. М., Наука, 1967.
3. Смирнов А.В., Новодворский А.Е. Язык описания логических систем. // Логические исследования вып.3, М. 1995.
4. *Смирнов А*.В. Система интерактивного доказательства теорем. // Логические исследования вып.2, М., Наука, 1993.
5. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исследования. М., Наука, 1972.
6. *Smirnov V.A.* Theory of Quantification and ε-calculi. // Essays on mathematical and philosophical logic. Synthese Library vol.122, D.Reidel P.C. 1979/
7. *Смирнов В.А.* Поиск доказательств. // Логика и компьютер. М., Наука, 1990.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИЛЬНОЙ И РЕЛЕВАНТНОЙ ИМПЛИКАЦИЯМИ В СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ.

§1. ФОРМУЛИРОВКА ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА С ПОНЯТИЕМ ВЫВОДА, ВВЕДЕННЫМ ИНДУКЦИЕЙ ПО ДВУМ ПЕРЕМЕННЫМ.

Мы будем рассматривать логистические системы, для которых понятие вывода вводится индукцией по двум переменным: числу посылок и высоте дерева.

Под списком посылок Г понимается последовательность формул, рассматриваемая с точностью до перестановок. Будем говорить, что формула E непосредственно выводима из формул $A_1,\ldots, A_k$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1,\ldots, A_k}{E} \qquad \text{есть правило вывода.}$$

Теперь определим, что есть вывод.

1. Если A аксиома, то A есть вывод из пустого списка посылок.

2. Если A есть формула, то A есть вывод из списка посылок A.

3. Если $\alpha_1,\ldots, \alpha_k$ есть выводы из списков посылок $\Gamma_1,\ldots, \Gamma_k$ соответственно, $A_1,\ldots, A_k$ есть последние формулы $\alpha_1,\ldots, \alpha_k$, и E непосредственно выводима из $A_1,\ldots, A_k$, то

$$\frac{\alpha_1,\ldots, \alpha_k}{E}$$

есть вывод из списка посылок $\Gamma_1,\ldots, \Gamma_k$.

Язык всех рассматриваемых систем будет одним и тем же, формулы строятся из элементарных формул с помощью пропозициональных знаков $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, f.

Заметим, что в качестве знака импликации во избежании введения нового знака для секвенции во всех системах мы употребляем $\supset$, а не $\rightarrow$.

Во всех системах имеется только два правила вывода, относящихся к пропозициональной части:

$$\frac{A \quad A\supset B}{B} \text{(модус поненс)}$$

и

$$\frac{A \quad B}{A\&B}\,\text{ВК}.$$

Особо отмечаем, что ВК применяется только формулам, не зависящим от посылок (т.е. к последним формулам выводов из пустых списков посылок).

Сформулируем схемы аксиом, с помощью которых будут формулироваться различные системы:

1. $A\supset A$;
2. $(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$;
3. $(A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$;
4. $(A\supset((B\supset C)\supset D))\supset((B\supset C)\supset(A\supset D))$;
5. $A\&B\supset A$;
6. $A\&B\supset B$;
7. $(C\supset A)\&(C\supset B)\supset(C\supset A\&B)$;
8. $A\supset A\vee B$;
9. $B\supset A\vee B$;
10. $(A\supset C)\&(B\supset C)\supset(A\vee B\supset C)$;
11. $\neg A\supset(A\supset f)$;
12. $(A\supset f)\supset\neg A$;
13. $(A\supset\neg B)\supset(B\supset\neg A)$;
14. $((A\supset A)\supset A)\&((B\supset B)\supset B)\supset((A\&B\supset A\&B)\supset A\&B)$;
15. $A\supset((A\supset A)\supset A)$;
16. $A\&(B\vee C)\supset A\&B\vee C$;
17. $(A\supset B)\supset(C\supset(A\supset B))$;
18. $((\neg A\supset\neg A)\supset\neg A)\supset(A\supset B)$;
19. $(((A\supset B)\supset C)\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$;
20. $\neg\neg A\supset A$.

Систему, описываемую схемами аксиом

1 - 13 обозначим P_A,
1 - 14 обозначим E_A,
1 - 15 обозначим R_A.

Система R_A рассматривалась нами в [3] и была названа абсолютной A. R_A – это система без законов дистрибутивности и снятия двойного отрицания; аналогичны отношения между E_A и E и P_A и P.

Абсолютные системы, обогащенные законом дистрибутивности, будем называть интуиционистскими, т. к. это интуиционистские фрагменты P, E и R.

Схемы аксиом

1 - 13, 16 определяют $P_И$,

1 - 14, 16 определяют $E_И$,

1 - 16 определяют $R_И$.

Системы R_A или $R_И$, расширенные добавлением схемы аксиом 17, приводят к минимальной системе M, а расширение систем P_A, E_A, $P_И$ и $E_И$ схемой аксиом 17 приводит к системе, которую мы назовем ультраминимальной УМ.

Наконец, обогащение УМ и M схемой 18 даст ультраинтуиционистскую УМ и интуиционистскую системы; соответственно, добавление к последним 19 даст ультраклассическую и классическую системы.

Введем классификацию в таблицу.

Таблица 1

	14		15
16 ↓	P_A	E_A	R_A
17 ↓	$P_И$	$E_И$	$R_И$
18 ↓	УМ		M
19 ↓	УI		I
	УК		К

Добавление к каждой из систем закона снятия двойного отрицания образует следующие системы.

P_{AO}	E_{AO}	R_{AO}
P	E	R
	S4	K
	S4	K
	S5	K

Если выделить чисто импликативную часть, то импликативные части R-систем совпадают и образуют слабую теорию импликации W_I А. Черча; импликативные части E-систем и P-систем также совпадают, образуя систему следования E_I. Совпадают и импликативные части M и I, обозначим их M_I, наконец, мы имеем импликативную часть $IM_IУI$ и S4 - $S4_I$; импликативную часть S5 - $S5_I$; импликативную часть K - K_I.

Теорема 1. Для P-систем и их расширений (т. е. для всех систем в описанных классификациях) справедлива теорема дедукции вида

$$\frac{A, \Gamma^{\supset} \text{④} B}{\Gamma^{\supset} \text{④} A \supset B},$$

где $\Gamma^{\supset}$ есть список импликативных формул.

Теорема 2. Для Е-систем и их расширений справедлива теорема дедукции вида

$$\frac{A,\ \Gamma^*\ \text{④} B}{\Gamma^* \text{④} A \supset B},$$

где Γ^* – список импликативных формул или конъюнкций импликативных формул.

Теорема 3. Для R-систем и их расширений справедлива теорема дедукции вида

$$\frac{A,\ \Gamma\ \text{④} B}{\Gamma\ \ \text{④} A \supset B}.$$

Все теоремы формулируются и доказываются для систем с понятием вывода, введенным индукцией по двум переменным. Собственно доказываются более сильные теоремы, включающие в себя сокращения, а именно:

Если из А, Г выводима формула В, и все посылки Г, кроме возможно А, импликативны, то из $(\Gamma_A)^{\supset}$ выводима формула $A \supset B$, где $(\Gamma_A)^{\supset}$ есть результат вычеркивания всех вхождений А в Г, если А не импликативна, и некоторых (возможно всех, а возможно ни одного), если А импликативна. Аналогично переформулируются теоремы 2 и 3.

Теорема 3 была доказана нами в [3] и в более ранней статье [4].

Теорема 1 доказывается индукцией по числу посылок и высоте данного вывода. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что

(a) теорема дедукции имеет место для всех выводов из одной посылки и произвольной высоты

и

(b) для выводов длины $m+1$ и высоты n в предположении, что теорема дедукции имеет место для выводов из числа посылок $\leq m$ и произвольной высоты и верна для выводов из того числа посылок, но меньшей высоты.

Доказательство теоремы 2 на основе теоремы 3 просто, учитывая, что в Е-системах $(A \supset B)\&(C \supset D) \equiv \Box((A \supset B)\&(C \supset D))$. Для системы УМ и ее расширений верна более сильная теорема дедукции, а именно

$$\frac{\Gamma\ \text{④} B}{\Gamma_A^{\supset}\ \text{④} A \supset B}$$

для системы и ее расширений

$$\Gamma\ \text{④} B$$

$$\frac{\qquad}{\Gamma_A \text{ ④ } A \supset B}$$

(см. [3]).

Отметим, что частный случай теоремы дедукции

$$\frac{A, \Gamma \text{ ④} f}{\Gamma \text{ ④} A \supset f}$$

имеет место для всех описанных выше систем без ограничений на Г.

§2. Подсистемы сильной и релевантной импликации, содержащиеся и интуиционистской логике высказываний.

Пусть P_A, E_A и R_A – это системы P, E и R, ослабленные за счет выбрасывания из них схем аксиом снятия двойного отрицания и дистрибутивности. Эти системы мы будем называть абсолютными.

R_A – это система, рассмотренная нами в [3], и обозначенная там буквой A. В [3] было построено следующее секвенциальное исчисление GR_A.

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B}; \qquad \frac{\Gamma \to A \qquad B, \Delta \to C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to C};$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \& B}; \qquad \frac{A, \Gamma \to C \text{ или } B, \Gamma \to C}{A \& B, \Gamma \to C};$$

$$\frac{\Gamma \to A \text{ или } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}; \qquad \frac{A, \Gamma \to C \qquad B, \Gamma \to C}{A \vee B, \Gamma \to C};$$

$$\frac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A}; \qquad \frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}.$$

Сечение имеет вид $\dfrac{\Gamma \to M \qquad M, \Delta \to C}{\Gamma, \Delta \to C}$.

Имеют место сокращение и перестановка слева. Основная секвенция имеет вид: $A \to A$; C в фигурах заключения – формула или пустой список формул.

В [3] были доказаны эквивалентность GR_A системе R_A. Для GR_A имеет место теорема об устранимости сечения (см. [3]).

Система GP_A получается из GR_A заменой фигуры ВИП на

$$\frac{A, \Gamma^{\supset} \to B}{\Gamma^{\supset} \to A \supset B},$$

где $\Gamma^{\supset}$ есть список импликативных формул. Доказательство теоремы об устранимости сечения аналогично доказательству теоремы об устранимости сечения для GR_A.

GE_A мы получаем из GP_A заменой ВИП фигурой

$$\frac{A, \Gamma^* \to B}{\Gamma^* \to A \supset B}.$$

Для этой системы также имеет место теорема об устранимости сечения.

Рассмотрим системы $P_И$, $E_И$ и $R_И$. Индекс при них означает, что они являются интуиционистскими частями P, E и R, соответственно. Аксиоматически они задаются присоединением к P_A, E_A и R_A закона дистрибутивности.

Удалось построить секвенциальный вариант для этих исчислений.

Секвенции многосукцедентны.

Основная секвенция: $A \to A$.

Логические фигуры заключения для $GP_И$:

$$\frac{A, \Gamma^{\supset} \to B}{\Gamma^{\supset} \to A \supset B}; \qquad \frac{\Gamma \to A \qquad B, \Delta \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \& B}; \qquad \frac{A, \Gamma \to \Theta \text{ или } B, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta};$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \text{ или } \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}; \qquad \frac{A, \Gamma \to \Theta \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta};$$

$$\frac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A}; \qquad \frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}.$$

Структурные фигуры заключения:

Сечение $$\frac{\Gamma \to M \qquad M, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \Theta},$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, B}$$ ДП, здесь Θ не пусто.

Имеются также перестановка и сокращение слева и справа.

Обращаем внимание, что в сечении левая секвенция односукцедентна. Если принять сечение с многосукцедентной секвенцией, то система будет богаче, чем $P_И$.

Исчисление $GP_И$ эквивалентно $P_И$ в следующем смысле. Пусть Θ^D есть дизъюнкция формул Θ, если Θ состоит более чем из одной формулы, Θ^D есть Θ, если Θ состоит из одной формулы, и Θ^D пуста, если Θ пуста. Очевидно, что в $GP_И$ секвенция $\Gamma\to\Theta$ доказуема тогда и только тогда, когда доказуема $\Gamma\to\Theta^D$.

Если Г ④В в $P_И$, то в $GP_И$ доказуема $\Gamma\to B$: если в $GP_И$ доказуема $\Gamma\to\Theta$, то в $P_И$ $\Gamma\to\Theta^D$ (Г ④ мы отождествляем с Г④f).

Имеет ли место теорема об устранимости сечения для $GP_И$? Эта правдоподобная гипотеза оказывается неверной. Совместно с В. М. Поповым был найден контрпример. Секвенция $A\&(B\vee C),\ (A\supset(B\supset D))\&(C\supset D)\to D$ доказуема в $GP_И$ с сечением, но не доказуема без использования сечения.

$GE_И$ и $GR_И$ получаются путем замены ВИП системы $GP_И$ на

$$\frac{A,\ \Gamma^*\to B}{\Gamma^*\to A\supset B} \quad \text{и} \quad \frac{A,\ \Gamma^*\to B}{\Gamma^*\to A\supset B} \quad \text{соответственно.}$$

$GE_И$ и $GR_И$ эквивалентны $E_И$ и $R_И$ в указанном выше смысле.

Позитивная часть системы R, являющейся подсистемой $R_И$, обогащенная необходимостью (S4) и интенсиональной конъюнкцией рассматривались Г. Минцем [2]. Им был предложен секвенциальный вариант этого исчисления и доказана теорема об устранимости сечения.

Обогащая систему R_A(или $R_И$) структурной фигурой добавления формулы слева, мы получаем минимальную систему логики; обогащая последнюю фигурой добавления справа (с пустым сукцедентом) D, получим интуиционистское исчисление высказываний.

Обогащая P_A (E_A, $P_И$, $E_И$) фигурой добавления формулы слева, получаем систему, которую назовем условно ультраминимальной УМ; и, обогащая последнюю $DП_O$, получаем систему, называемую нами ультраинтуиционистской УI.

Чтобы рассмотренные взаимоотношения стали более очевидны, выпишем системы в таблицу:

Таблица 2

$\Gamma^{\supset}$	Γ^*	Γ	
GP_A	GE_A	GR_A	$DП_1$

$GP_И$	$GE_И$	$GR_И$	DП
GYM		GM	$DП_O$
GYI		GI	

Заметим, что системы P_A, E_A и R_A мы могли бы сформулировать с теми же самыми логическими фигурами заключения, что и остальные, но сукцеденты всех секвенций, входящих в доказательство, будут не более чем одночленны.

Как видно из таблицы, различия рассматриваемых систем сводятся или к различной формулировке фигуры введения импликации справа или к наличию или отсутствию структурных фигур добавления.

§3. Системы сильной и релевантной импликаций с законом снятия двойного отрицания.

Если мы обогатим рассмотренные выше в аксиоматической форме системы законом снятия двойного отрицания, то получим следующие системы:

Таблица 3

P_{AO}	E_{AO}	R_{AO}
P	E	R
S4		K
S4		K

В секвенциальной форме, соответствующие системы мы можем получить, добавив к системам таблицы 2 дополнительную фигуру заключения

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{\neg\neg A, \Gamma \to \Theta}.$$

Однако для построенных таким образом систем не имеет места теорема об устранимости сечения. Например, $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ не доказуема в этих системах без сечения, но доказуема с применением сечения.

Для систем P_{AO}, E_{AO}, R_{AO} удалось найти секвенциальную формулировку, при которой сечение устранимо. Для R_{AO} эта формулировка дана в статье [1].

Формулировка следующая. Для всех связок, кроме отрицания, логические фигуры заключения формулируются также как в $GP_И$, $GE_И$ и $GR_И$. Для отрицания дается новая формулировка:

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A}; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta}.$$

Сечение формулируется в форме

$$\frac{\Gamma\to\Theta, M \qquad M, \Delta \to \Psi}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Psi}.$$

Имеются правила перестановки и сокращения слева и справа. (Никаких фигур добавления нет).

Нетрудно доказать, что GP_{AO}, GE_{AO} и GR_{AO} эквивалентны P_{AO}, E_{AO} и R_{AO} в следующем смысле: Если $\Gamma \vdash B$ в аксиоматическом исчислении, то $\Gamma\to B$ доказуема в секвенциальном; если $\Gamma\to\Theta$ доказуема в секвенциальном, то $\Gamma, \neg\Theta\to f$ в аксиоматическом.

Для всех систем имеют место теоремы об устранимости сечения.

Для P, E и R нам не удалось сформулировать исчисления в секвенциальной форме так, чтобы сечение было устранимо и все остальные правила обладали свойством подформульности.

Литература

1. *Войшвилло Е.К.* Понятие зависимости формул в выводах и различные типы импликации. // Вестник МГУ. Философия. №2. 1971.

2. *Минц Г.Е.* Теорема об устранимости сечения для релевантных логик. // “Записки ЛОМИ”. Л., 1972. Т. 32.

3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.

4. *Смирнов В.А.* Так называемые парадоксы материальной импликации и логические системы с понятием сильного вывода. // Сб. “Исследование логических систем”. М., 1970.

5. *Belnap N.D., Wallace J.R.* A decision procedure for the system E of entailment with negation. // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1965. B. 11. H. 4.

6. *Kron A.* Deduction theorems for relevant logics. // Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. B. 19. H. 1.

7. *Zarnecka-Bialy E.* The deduction theorems for propositional calculi when implication and falsum in present. // Prace z logiks, 7. Krakow, 1972.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ПАРАНЕПРОТИВОРЕЧИВОЙ ЛОГИКИ.

Теория T, сформулированная в языке L, называется тривиальной (сверхполной), если всякое предложение языка L является теоремой T; теория T противоречива относительно отрицания, если и только если найдется такое предложение, что оно само и его отрицание являются теоремами теории T. Если в основе лежит классическая (интуиционистская, минимальная) логика, то понятие нетривиальности и непротиворечивости (относительно отрицания) совпадают. Но в общем случае это не имеет места. Логики, удовлетворяющие этому условию (т. е., когда из противоречивости относительно отрицания не следует тривиальность) называют паранепротиворечивыми. Предшественниками паранепротиворечивых логик можно с полным основанием считать Н. А. Васильева и Я. Лукасевича. Работы этих авторов были опубликованы в 1910 г. Первая более или менее оформленная система паранепротиворечивой логики под названием дискурсивной (дискуссивной) была предложена С. Яськовским в 1948 г. Начиная с 1963 г., паранепротиворечивые логики систематически разрабатываются да Костой и его учениками. Близка к паранепротиворечивым логикам система И. Д. Заславского, который исходит из идеи симметрии конструктивной истинности и конструктивной ложности. Другим видом паранепротиворечивой логики является логика, двойственная интуиционистской. Если язык логики высказываний содержит только конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, то подход к ней естественен. Ей прямо можно сопоставить некоторую алгебраическую структуру. В случае с классической логикой – булеву алгебру, в случае с интуиционистской – алгебру Гейтинга. И в первом и во втором случаях естественным образом вводится импликация. Дуальной к гейтинговской алгебре является алгебра Брауэра. Если первую мы можем рассматривать как множество открытых множеств с операциями объединения и пересечения и ввести импликацию и отрицание (как внутренность дополнения), то брауэрову алгебру мы можем рассматривать как множество замкнутых множеств с операциями объединения и пересечения и операциями разности (антиимпликации) и отрицания как замыкание дополнения.

Интуиционистская логика со связками $\supset$, &, $\vee$ и константой F может быть задана в виде секвенциального исчисления. Секвениция имеет вид $\Gamma \to C$, где Γ – последовательность формул и C – формула или пустая последовательность формул. Правила введения логических знаков стандартны. Основная секвенция имеет вид $A \to A$ или $F \to$. Структурными правилами являются сокращение, перестановка и добавление в антецеденте и добавление справа в виде

$$\frac{\Gamma\to}{\Gamma\to\Delta}.$$

Интуиционистское отрицание может быть введено определением $\urcorner A=_{df}A\supset F$.

Чермак [3] сформулировал логику, дуальную интуиционистской в терминах конъюнкции, дизъюнкции и отрицания в секвенциальной форме. Секвенциями этой логики являются не более, чем односукцедентные.

Легко расширить эту логику, постулировав правила введения для импликации

$$\frac{A\to\Theta,\ B}{\to\Theta,\ A\supset B} \quad \text{и} \quad \frac{\to\Delta,\ B \quad B\to\Psi}{A\supset B\to\Delta,\ \Psi}.$$

Н. Д. Гудман [4] формулирует логику, двойственную интуиционистской, в терминах конъюнкции, дизъюнкции, антиимпликации $\dot{-}$ и константы T. Для антиимпликации он постулирует правила введения

$$\frac{A\dot{-}B\to\Delta}{A\to\Delta,\ B} \quad \text{и удаления} \quad \frac{A\to\Delta,\ B}{A\dot{-}B\to\Delta}.$$

Антецедент секвенции является формулой. Исчисление Н. Д. Гудмана легко построить в виде секвенциального исчисления, постулировав вместо правила удаления антиимпликации следующее правило введения антиимпликации справа

$$\frac{C\to A \qquad B\to\Delta}{C\to\Delta,\ A\dot{-}B}.$$

Естественно построить интуиционистскую логику высказываний с логическими связками $\&$, $\vee$, $\supset$, $\dot{-}$ и константами F и T. Основными секвенциями будут $A\to A$, $\to T$, $F\to$. Структурные фигуры заключения – добавление, сокращение и перестановка слева и добавление справа вида

$$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to B}.$$

В правую часть секвенции может входить не более одной формулы. Имеет место теорема об устранимости сечения. Отметим, что секвенция $A \to$ доказуема в интуиционистском исчислении, если и только если она доказуема в классическом исчислении.

Правила введения для антиимпликации будут иметь вид

$$\frac{C \to A \qquad B \to \Delta}{C \to \Delta, A \dot{-} B} \quad \text{и} \quad \frac{A, \Gamma \to B}{A \dot{-} B, \Gamma \to}.$$

Аналогично нетрудно построить интуиционистскую логику высказываний с тем же набором связок &, $\vee$, $\supset$, $\dot{-}$, F и T. Основные секвенции: $A \to A$, $\to T$, $F \to$. Структурными фигурами будут добавление, сокращение и перестановка справа и добавление слева вида

$$\frac{\to \Delta}{B \to \Delta}.$$

Фигуры введения импликации и антиимпликации будут иметь вид

$$\frac{A \to \Delta, B}{\to \Delta, A \supset B}; \qquad \frac{\to \Delta, A \qquad B \to \Psi}{A \supset B \to \Delta, \Psi};$$

$$\frac{C \to A \qquad B \to \Delta}{C \to \Delta, A \dot{-} B}; \qquad \frac{A \to \Delta, B}{A \dot{-} B \to \Delta}.$$

Имеет место теорема об устранимости сечения. Секвенция вида $\to A$ доказуема в антиинтуиционистском исчислении тогда и только тогда, когда она доказуема классически.

Пусть Γ^+ есть результат замещения в каждой формуле & на $\vee$, $\vee$ на &, T на F, F на T, $A \supset B$ на $B \dot{-} A$, $A \dot{-} B$ на $B \supset A$. Тогда секвенция $A \to \Delta$ доказуема в антиинтуиционистском исчислении тогда и только тогда, когда секвенция $\Delta^+ \to A^+$ доказуема в интуиционистском исчислении.

Отметим, что дуалом секвенции $\to A \vee \exists A$ будет, конечно, не секвенция $\to \exists(A \& \exists A)$, а секвенция $A \& \exists A \to$. В антиинтуиционистском исчислении секвенция $A \& \overline{\urcorner} A \rightarrow$ не доказуема, но секвенция выражающая закон противоречия , т. е. $\rightarrow \overline{\urcorner}(A \& \overline{\urcorner} A)$ доказуема.

В интуиционистском исчислении $A \supset F$ эквивалентно $T \dot{-} A$. Аналогично, эта эквивалентность имеет место и в антиинтуиционистском исчислении. Определим два вида отрицания:

$$\urcorner A =_{df} A \supset F \qquad \text{и} \qquad \overline{\urcorner} A =_{df} T \dot{-} A.$$

Как в интуиционистской, так и в антиинтуицинистской системах $\urcorner$ эквивалентно $\overline{\urcorner}$. При алгебраической интерпретации $\urcorner A$ трактуется как внутренность дополнения, а $\overline{\urcorner} A$ как замыкание дополнения. Поэтому их отождествление значимо для специального случая.

Если мы отбросим правило добавления справа в формулировке интуиционистского секвенциального исчисления, то получим минимальное исчисление, сформулированное в терминах &, $\vee$, $\supset$, $\dot{-}$, T и F. В этом исчислении доказуема секвенция $A \supset F \rightarrow T \dot{-} A$, т. е. $\urcorner A \rightarrow \overline{\urcorner} A$, но не доказуема секвенция $\overline{\urcorner} A \rightarrow \urcorner A$.

Мы получим антиминимальное исчисление, если отбросим правило добавления слева из формулировки антиинтуиционистского исчисления. В этой логике также доказуема секвенция, но не доказуема секвенция.

Ранее мною была сформулирована система GRAO в терминах $\supset$, &, $\vee$, $\neg$. Это многосукцедентное исчисление секвенций в генценовской формулировке без правил добавления слева и справа. Правила для $\neg$ имеют вид

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A} \qquad \text{и} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta}.$$

Назовем отрицание $\neg$ классическим. Основная секвенция имеет вид $A \rightarrow A$. GRAO есть релевантная система без закона дистрибутивности. Это исчисление можно расширить за счет обогащения языка константами T и F, антиимпликацией и принятием в качестве основных секвенций $F \rightarrow$ и $\rightarrow T$ и правил

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \quad B, \Delta \rightarrow \Psi}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Psi, A \dot{-} B} \qquad \text{и} \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{A \dot{-} B, \Gamma \rightarrow \Theta}.$$

Интуиционистское отрицание $\urcorner$ и антиинтуиционистское ╖ определяются как было указано выше. В указанной системе доказуемы секвенции $\urcorner A\to\neg A$ и $\neg A\to\overline{\urcorner}A$. В сформулированной системе доказуемы секвенции $A\to\urcorner\urcorner A$, $\overline{\urcorner}\overline{\urcorner}A\to A$, $\to\urcorner(A\&\urcorner A)$, $\to A\vee\overline{\urcorner}A$.

С помощью брауэрова отрицания $\overline{\urcorner}$ и релевантной импликации мы можем определить антиимпликацию $A\dot{-}B=_{df}\overline{\urcorner}(A\supset B)$, т. к. доказуемы секвенции $A\dot{-}B\to\overline{\urcorner}(A\supset B)$ и $\overline{\urcorner}(A\supset B)\to A\dot{-}B$. Наоборот, с помощью гейтинговского отрицания и антиимпликации мы можем определить релевантную импликацию $A\supset B\equiv\urcorner(A\dot{-}B)$. Отметим, что $\overline{\urcorner}(A\&B)\equiv\overline{\urcorner}A\vee\overline{\urcorner}B$ и $\urcorner(A\vee B)\equiv\urcorner A\&\urcorner B$ доказуемы, но $\urcorner(A\&B)\equiv\urcorner A\vee\urcorner B$ и $\overline{\urcorner}A\&\overline{\urcorner}B\equiv\overline{\urcorner}(A\vee B)$ – нет. В рассматриваемой системе доказуема $(A\supset\urcorner B)\supset(B\supset\urcorner A)$ и $(\overline{\urcorner}A\supset B)\supset(\overline{\urcorner}B\supset A)$. Докажем последнюю формулу.

$$\begin{array}{c}
T\to T \quad A\to A\\ \hline
T\to T\dot{-}A,\ A \quad B\to B\\ \hline
T,\ (T\dot{-}A)\supset B\to A,\ B\\ \hline
T\dot{-}B,\ (T\dot{-}A)\supset B\to A\\ \hline
(T\dot{-}A)\supset B\to(T\dot{-}B)\supset A\\ \hline
\overline{\urcorner}A\supset B\to\overline{\urcorner}B\supset A
\end{array}$$

Наконец, в нашей системе доказуемы $(C\dot{-}A)\dot{-}(C\dot{-}B)\supset(B\dot{-}A)$, $(B\dot{-}A)\supset((B\dot{-}A)\dot{-}A)$, $((C\dot{-}A)\dot{-}B)\supset((C\dot{-}B)\dot{-}A)$, $B\supset(B\dot{-}A)\vee A$. На этой основе можно дать аксиоматику гильбертовского типа релевантной логики R с дополнительными связками $\dot{-}$, $\urcorner$ и $\overline{\urcorner}$ и с законом дистрибутивности.

В заключение сформулируем релевантную логику с тремя видами отрицания и законами дистрибутивности. К позитивной аксиоматике R добавим следующие схемы аксиом:

$(A\supset\urcorner B)\supset(B\supset\urcorner A)$;
$(A\supset\neg B)\supset(B\supset\neg A)$;
$\neg\neg A\supset A$;
$(\overline{\urcorner}A\supset B)\supset(\overline{\urcorner}B\supset A)$;
$\urcorner A\supset\neg A$;
$\neg A\supset\overline{\urcorner}A$.

Антиимпликацию вводим определением $A \dot{-} B =_{df} \overline{\neg}(A \supset B)$. По-видимому, эта система (с $\dot{-}$ в качестве связки), как и GRAO с этим же набором связок самодвойственны.

Литература

1. *И. Д. Заславский.* Симметрическая конструктивная логика. Ереван, 1978.
2. *В. А. Смирнов.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
3. *J. Czermak.* A remark on Genzen's calculus of sequente. Notre Dame Journal of Formal Logic, 1977. Vol. 18.
4. *N. D. Goodmen.* The logic of contradiction. ZMLGM, 1981. Bd. 27. №2.
5. *V. A. Smirnov.* An absolute first order predicate calculus. Bull. Sec. Logic. PAN, 1973. Vol. 2. №1.

ТЕОРЕМА ОБ УСТРАНИМОСТИ СЕЧЕНИЯ ДЛЯ АБСОЛЮТНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ ГЕНЦЕНА БЕЗ УТОНЧЕНИЙ.

Абсолютное секвенциальное логическое исчисление первого порядка в сингулярной форме *SsLA* описывается основной секвенцией вида $A \to A$ и фигурами введения и удаления логических знаков (для введения конъюнкции справа в виде

$$\frac{\Gamma \to A \qquad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \,\&\, B}$$

и для введения импликации слева в виде

$$\frac{\Gamma \to A \qquad B, \Delta \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta},$$

где Θ состоит из одной формулы или есть пустая последовательность формул), а также структурными фигурами перестановки слева, сокращения слева и сечения в виде

$$\frac{\Gamma \to M \qquad \Delta_1, M, \Delta_2 \to \Theta}{\Delta_1, \Gamma, \Delta_2 \to \Theta};$$

доказательство имеет вид дерева.

SsLS получается из *SsLA* добавлением фигуры заключения

$$\frac{\Gamma \to \neg\neg A}{\Gamma \to A}.$$

Как для *SsLA*, так и для *SsLS* имеет место теорема об устранимости сечения.

Обычное доказательство не проходит, так как нельзя заменить сечение смешениями. Идея доказательства основывается на замене сечения *обобщенными* смешениями

$$\frac{\Gamma \to M \qquad M, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta_M \to \Theta},$$

где Δ_M есть результат вычеркивания *некоторых* (возможно всех, но возможно и ни одного) вхождений M в Δ.

Система *SsLS* эквивалентна системе *LK* Генцена без утончений: если секвенция $\Gamma \to \Theta$ доказуема в *SsLS*, то $\Gamma \to \Theta$ доказуема в *LK*; если секвенция $\Gamma \to \Theta$ доказуема в *LK*, то $\Gamma \to \Theta^D$, где Θ^D есть дизъюнкция формул Θ, доказуема в *SsLS*.

Проблема разрешения для пропозициональных частей *SsLA* и *SsLS* остается открытой.

СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЛОГИКИ ДАММЕТА.

Я исхожу из идеи, что различия между важными логическими системами могут быть сведены к различиям в понятии вывода или, при секвенциальной формулировке, к различиям в структурных фигурах заключения. Будем иметь дело с многосукцедентными секвенциями. Среди основных знаков есть константа f (ложь), но нет отрицания. Отрицание вводим определением $\neg A \rightleftharpoons A \supset f$. Основные секвенции — это секвенции вида $\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ и секвенция $f \to$. Логические фигуры заключения формулируются так же как у Генцена:

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, \mathrm{B}}{\Gamma \to \Theta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, A \qquad B, \Delta \to \Psi}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Psi}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \,\&\, B} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Theta \text{ } \textit{или} \text{ } B, \Gamma \to \Theta}{A \,\&\, B, \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta \text{ } \textit{или} \text{ } \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Theta \qquad B, \Gamma, \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}$$

Если имеются структурные фигуры перестановки и сокращения слева и справа, то мы имеем формулировку абсолютного релевантного исчисления GRA. GRA эквивалентна R без законов деструктивности и снятия двойного отрицания. Для этой системы сечение является допустимым правилом вывода.

Обогащение GRA структурным правилом добавления (утончения, ослабления) дает минимальную логику GM. Обогатив GM особым видом структурной фигуры добавления справа

$$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to A},$$

получим многосукцедентную формулировку интуиционистской логики GL. Допустимость сечения для GM и GI нельзя доказать стандартным образом, т.к. неверна теорема о замене сечений смешениями. Но

–

сечение можно заменить обобщенными смешениями, и доказательство допустимости сечения осуществляется тем же методом, что и для RA[1] .

Можно ли аналогичным образом сформулировать цепную логику LC или логику Даммета? Система LC получается из интуиционистской системы добавлением схемы аксиом $(A \supset B) \vee (B \supset A)$. Ответ на поставленный вопрос положительный. Добавив к GI структурную фигуру заключения

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \qquad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A, B}$$

(объединение справа), мы получим систему GLC. Эта система эквивалентна цепной логике LC. Для GLC имеет место теорема о допустимости сечения. Доказательство проводится тем же методом, что и для указанных выше систем.

[1] Смирнов В.А Формальный вывод и логические исчисления. М.: 1972.

ON DECIDABILITY OF DECISION PROBLEM FOR SEQUENTIAL CALCULUS OF PREDICATES WITHOUT CONTRACTIONS.

Let SLC be the classical sequential predicate first-order calculus. The language of SLC features two kinds of variables (free variables w, v, ... ; bound variables x, y, ...), propositional connectives, and quantifiers $\forall$ and $\exists$. The sequent is the expression of the form $\Gamma \to \Delta$ where Γ and Δ are sequences of the formulas.

Logical Rules.

$$/\!\to \frac{\Gamma, \Delta \to \Theta, A \quad \Gamma, \Delta \to \Theta, B}{\Gamma, A/B, \Delta \to \Theta} \qquad \to\!/ \frac{A, B, \Gamma \to \Theta, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, A/B, \Lambda}$$

$$\forall\!\to \frac{\Gamma, Aw, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \forall xAx, \Delta \to \Theta} \qquad \to\!\forall \frac{\Gamma \to \Theta, Aw, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \forall xAx, \Lambda}$$

$$\exists\!\to \frac{\Gamma, Aw, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \exists xAx, \Delta \to \Theta} \qquad \to\!\exists \frac{\Gamma \to \Theta, Aw, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \exists xAx, \Lambda}$$

In $\forall\!\to$ and $\exists\to$ variable w is not a part of the lower-sequent formulas.

Structural Rules.

$\Gamma, A, \Delta \to \Theta, A, \Lambda$ fundamental sequent

$$\frac{\Gamma,C,\Delta,C,\Lambda \to \Theta}{\Gamma,C,\Delta,\Lambda} \qquad \frac{\Gamma \to \Psi,C,\Lambda,C,\Theta}{\Gamma \to \Psi,\Lambda,C,\Theta} \qquad \text{contractions}$$

The proof is of the free form. The SLC system is equivalent to other constructions of the classical calculus of predicates. Let SLC° be SLC without contractions.

Theorem 1. The decision problem for SLC° is decidable. Let A^k be the ordered K-tuple of the formulas A.

Theorem 2. If the sequent $\to A$ is decidable within SLC and C is Skolem normal form of A, there does exist such a number k that makes sequent C^k

–

provable within SLC°. However, the assertion "If sequent $A_1, \ldots, A_k \to B_1, \ldots, B_e$ is provable within SLC, there do exist such x numbers $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_e$, that make sequent $A_1^{a_1}, \ldots, A_k^{a_k} \to B_1^{b_1}, \ldots, B_e^{b_e}$ provable within SLC° (in particular, if $\to A$ is provable within SLC, there does exist such a number k, that makes $\to A^k$ provable within SLC°)", that is generalization of Theorem 2, does not hold true. Thus, sequent $\to \forall x \exists y (F_{xy} \supset F_{xz})$ is provable within SLC, but with one k sequent $[\forall x \exists y \forall z (F_{xy} \supset F_{xz})]^k$ is not provable within SLC°.

БИБЛИОГРАФИЯ НАУЧНЫХ ТРУДОВ В.А.СМИРНОВА

1. На кафедрах философского факультета МГУ // Вопр. философии. 1957. №2. С. 159-165. (Соавт.: Е.Д.Клементьев, И.К.Пантин.)
2. Является ли классическая логика универсальной // Материалы 1 конференции кафедр общественных наук. Томск, 1958a. С. 35-38.
3. Серьезные ошибки в трактовке марксистской теории познания //Вопр. философии. 1958b. №9. С. 169-174.
4. К теории категорического силлогизма // Философские науки. 1959a. №3. С. 80-83.
5. О возможности общей теории систем // Доклады 2-й научной конференции кафедр общественных наук. Томск, 1959b. С. 84-87.
6. В.И.Ленин о математизации и логизации естественнонаучных теорий // Материалы конференции философов Сибири и Дальнего Востока. Красноярск, 1959c.
7. Роль символизации и формализации в научном познании // Труды ТГУ. Т.149. Томск, 1960a. С. 61-65.
8. Совещание по проблемам логики и методологии науки //Вопр. философии. 1960b. №11. С. 153-158. (Соавт.: В.Н.Садовский.)
9. Так называемые абстрактные объекты и теории языковых каркасов Р.Карнапа // (Тезисы докладов и выступлений). Межвузовская конференция. Диалектический материализм и современный позитивизм. М., 1961. С. 138-144.
10. Генетический метод построения научной теории // Философские вопросы современной формальной логики. М., 1962a. С. 263-285.
11. Некоторые выводы из сравнения нормальных алгоритмов А.А.Маркова и логических схем алгоритмов А.А.Ляпунова // Проблемы методологии и логики науки. Труды ТГУ. Томск, 1962b. С. 126-143.
12. Логические взгляды Н.А.Васильева // Очерки по истории логики в России. М., 1962c. С. 242-257.
13. Замечания по поводу системы силлогистики и общей теории дедукции // Проблемы логики. М., 1963a. С. 64-83.
14. Алгоритмы и логические схемы алгоритмов // Проблемы логики. М., 1963b. С. 84-101.
15. О достоинствах и ошибках одной логико-философской концепции (критические заметки по поводу теории языковых каркасов Р.Карнапа) // Философия марксизма и неопозитивизм. М., 1963c. С. 364-378.

16. Доклад на философской дискуссии в Дубне // Вопр. философии. 1963d. №12. С. 158.
17. Статьи в Философском словаре. М., 1963e. (
18. Уровни знания и этапы процесса познания // Проблемы логики научного познания. М., 1964a. С. 23-52.
19. Серьезные недостатки в книге по материалистической диалектике // Вопр. философии. 1964b. №4. С. 165-170 (Соавт.: П.В.Копнин, И.С.Нарский.)
20. Логические системы с формулами - аналогами записей о выводимости // Логическая структура научного познания. М., 1965a. С. 253-291.
21. Модели языка и модели мира // Проблемы логики научного познания. М., 1965b. С. 10-15.
22. Искусственные языки как средство изучения мышления // Материалы к дискуссии Язык и мышление. М., 1965c. С.
23. Натуральный вывод и трансформационный анализ // Материалы к 5-му симпозиуму по логике и методологии науки. Киев, 1966a. С. 17-34.
24. Рец. на кн.: Стяжкин Н.И. Становление идей математической логики // Вопр. философии. 1966b. №1. С.169-171.
25. Погружение силлогистики в исчисление предикатов // Логическая семантика и модальная логика. М., 1967a. С. 254-258.
26. Моделирование мира в структуре логических языков // Логика и методология науки. М., 1967b. С. 117-124.
27. Правило вывода // Философская энциклопедия. Т.4 М., 1967c. С. 330.
28. Противоречия закон // Там же, 1967d. С. 409-410.
29. Wissensebenen und Etappen des Erkenntnisprozesses // Studien zur Logik der Wissenschaftlichen Erkenntnis. Berlin, 1967e. S. 36-71.
30. Натуральный вывод и трансфомационный анализ // Материалы к 14 философскому конгрессу. М., 1968.
31. Natural Deduction and Transformation analysis // Akten des XIV Internationalen Kongresses fur Philosophie. Wien. 2-9 September 1968. Wien, 1969a. P. 125-133.
32. Третий конгресс по логике, методологии и философии науки // Научно-техническая информация. М., 1969b сер.2. (Соавт: И.А.Акчурин, Ю.А.Ершов, В.Н.Садовский.)
33. Так называемые парадоксы материальной импликации и логические системы с понятием сильного вывода // Исследования логических систем. М., 1970a. С. 122-136.
34. Силлогистика без закона исключенного третьего и ее погружение в исчисление предикатов // Исследование логических систем. М., 1970b. С. 68-77.

35. Levels of Knowledge and Stages in the Process of Knowledge // Problems of the Logic of scientific Knowledge. Dordrecht, 1970c.
36. Elimination des termes dans la logique intuitionniste // Revue internalie a role de philosophie. Bruxelles, 1971a. №4. P.512-519.
37. On decidability of decision problem for sequential calculus of predicates without contractions // IV International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. 1971b.
38. Силлогистика без исчисления высказываний в секвенциальной форме // Филос. науки. 1972a. №3. С. 115-116.
39. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972b. 271 с.
40. Рец. на кн.: Серебрянников О.Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. М., 1970 // Вопр. философии. 1972c. №3. С. 176-178.
41. К вопросу о взаимоотношении символической логики и философии // Проблемы логики, методологии и философии науки. Ереван, 1972d.
42. IV Международный конгресс по логике, методологии и философии науки // Вопр. философии. 1972e. №2. С. 148-154. (Соавт.: И.А.Акчурин и др.)
43. Quelques notes un sujet de l'article de B.Jan, J.C. Bemaille et J.L.Duhamean // Revue internationale de philosophie. 1972f. №98. P. 596-601. (Соавт.: Б.М.Кедров, П.В.Копнин, В.Н.Садовский.)
44. Теорема об устранимости сечения для абсолютного исчисления предикатов Генцена без утончений // Логика и методология науки. К XV Всемирному конгрессу философов. М., 1973a. С. 23-25.
45. Проблема эмпирического и теоретического знания в теории познания и методологии // Методологические основы теории научного знания. Свердловск, 1973b.
46. An absolute first order predicate calculus // Bull. of the Sec. of Logic. 1973c. Vol. 3. P. 38-45.
47. О взаимоотношении символической логики и философии //Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974a. С. 5-35. (Соавт.: П.В.Таванец.)
48. Представление логических систем с сильной и релевантной импликациями в секвенциальной форме // Теория логического вывода. Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума. М., 1974b, ч.II. С. 152-162.
49. К вопросу об определимости предикатов, вводимых двусторонними редукционными предложениями // Философия в современном мире. Философия и логика. М., 1974c. 165-167.
50. Предисловие к сб. Проблемы логики и методологии науки. М.: ИНИОН. 1974d.

51. Рец. на кн.: Философия, наука, методология, М., 1972 //Филос. науки. 1974e. №3. С. 154-156.
52. Вступительная статья к книге: Д.Г.Х.Инголс. Введение в индийскую логику навья-ньяя. М., 1974f. С. 3-6.
53. A new form of the Deduction Theorem for P, E and R // Conf. Paper 5 Int. Congr. of Logic, Methodology and Philosophy of Science. London, Canada, 1975. Part I. P. 49-50.
54. Wissensebenen und Etappen des Erkenntnisprozesses // Marxistische Wissenschaftstheorie // Frankfurt an Main, 1975. S. 216-248.
55. V Международный конгресс по логике, методологии и философии науки // Вопр. философии. 1976. №5. С.154-169. (Соавт.: И.А.Акчурин, Ю.Л.Ершов, В.Н.Садовский.)
56. Definability and Identifiability: Certain Problems and Hypotheses //Basic Problems in Methodology and Linguistics. Dordrecht-Boston, 1977a. P. 63-80. (Соавт.: В.Н.Садовский)
57. Полная и неполная определимость в теориях первого порядка // Методы логического анализа. М., 1977b. С. 26-41. (Соавт.: В.Н.Садовский.)
58. Логики с модальными временными операторами // Модальные и интенсиональные логики. (Тезисы координационного совещания.) М., 1978. С. 145-148.
59. Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М., 1979a. С. 54-68.
60. Theory of quantification and ε-calculi // Essays on Mathematical and Philosophical Logic. Dordrecht, 1979b. P. 41-47.
61. Логические системы с модальными временными операторами // Модальные и временные логики (Материалы II-го советско-финского коллоквиума. М., 1979). М., 1979c. С. 89-98.
62. Новое определение модальных операторов через временные // Там же. 1979d. С. 99-104.
63. Logical systems with modal temporal operators // Proceedings of the VI International Congress. Hannover, 1979e.
64. Некоторые проблемы развития логики (к VI Международному конгрессу по логике, методологии и философии науки) // Вопр. философии. 1979f. №6. С. 102-114. (Соавт.: В.А.Бочаров, Е.К.Войшвилло, А.Г.Драгалин.)
65. Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980a. С. 230-235.
66. Проблемы логики и философии математики // Вопр. философии. 1980b. №8. С. 40-50. (Соавт.: Н.Н.Непейвода, Е.А.Палютин.)

67. A simbolikus logica es a filozofia kapcsolatazol // Magiar filozofial cszemle. Budapest, 1980c. №1. С.57-77. (Соавт.: П.В.Таванец.)
68. Я.Хинтикка и развитие логико-эпистемологических исследований во второй половине XX века // Я.Хинтикка. Логико-эпистемологические исследования. М., 1980d. С. 5-32. (Соавт.: В.Н.Садовский.)
69. Logicai rendszerek modalis idooperatorokkal // A filosofia idoczeru kerdesei. 1980e. P. 55-64.
70. О логических отношениях между теориями // Идеалы и нормы научного исследования. Минск, 1981a. С. 341-360.
71. Современные семантические исследования модальных и интенсиональных логик // Семантика модальных и интенсиональных логик. М., 1981b. С. 5-27.
72. Предисловие и примечания // Н.Белнап, Т.Стилл. Логика вопросов и ответов. М., 1981c. С. 5-11, 268-285. (Соавт.: В.К.Финн.)
73. Значение аксиоматизации научных теорий для разработки методологии науки // Диалектика в науках о природе и человеке. Т.1. М., 1981d. С. 333-336.
74. Погружение элементарной онтологии Ст. Лесьневского во второпорядковое одноместное исчисление предикатов // Модальные и релевантные логики (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. Вып.1). М., 1982a. С. 55-65.
75. Временные логики с нестандартными условиями сопряженности будущего и прошлого // Модальные и интенсиональные логики (Материалы к VIII Всесоюзной конференции Логика и методология науки. Вильнюс, 1982). М., 1982b. С. 100-104.
76. Погружение системы силлогистики C2 в исчисление предикатов первого порядка // 6 Всесоюзная конференция по математической логике. Тбилиси, 1982c. С. 171.
77. The Definition of Modal Operators by Means of Tense Operators // Intensional Logic: Theory and Applications. Acta Philosophica Fennica. 1982d. P. 50-69.
78. Логические методы сравнения научных теорий // Вопр. философии. 1983a. №6. С. 80-90.
79. Tense logics with nonstandard interconnections between past and future // VII International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Abstracts of sections 5 and 12. Vol.11. Salzburg, 1983b. P.164-168.
80. Logische Bezungen Zwischen Wissenschaftlichen Theorien // Logic, Methodologia und Wissenschaft. 1983c. P. 87-109.

81. Секвенциальная формулировка логики Даммета // Семиотические аспекты формализации интеллектуальной деятельности. М., 1983d. С. 126.
82. Значение аксиоматизации научных теорий для разработки методологии науки // Диалектика в науках о природе и человеке (Труды 3-го Всесоюзного совещания по философским вопросам естествознания. Т.1). М., 1983e.
83. Топологическая интерпретация модальной силлогистики // Симпозиум по логике Аристотеля. Тбилиси, 1983f. С. 55-58.
84. Погружение систем позитивной силлогистики в одноместное исчисление предикатов // Логические исследования (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М., 1983g. С. 2-16.
85. Дефинициальная эквивалентность расширенной силлогистики С2Д булевой алгебре // Логические исследования. Там же. М., 1983h. С. 43-48.
86. Embedding the elementary ontology of S.Lesniewski into the monadic second order calculus of predicates // Studia Logica. 1983i. №2-3. P.197-207.
87. Логика, основания математики и лингвистики // Вопр. философии. 1984a. №1. С. 45-58. (Соавт.: Ю.А.Ершов, И.А.Лавров, Р.Павиленис, В.В.Петров.)
88. Об одной системе паранепротиворечивой логики // Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М., 1984b. С. 129-133.
89. Вложение элементарной онтологии в исчисление предикатов второго порядка // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск, 1984c.
90. Определение модальных операторов через временные // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984d. С.14-31.
91. Логические системы с модальными временными операторами // Там же. 1984e. С.49-58.
92. Символическая логика и теория познания // Философия и социология науки и техники. Ежегодник 1983. М.,1985a. С. 45-60.
93. Реконструкция модальной силлогистики // Интенсиональные логики и логическая структура научных теорий (Тезисы докладов IV Советско-финского коллоквиума по логике). Тбилиси, 1985b. С. 147-148.

94. Утверждение и предикация. Логика высказываний и логика событий // Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986a. С. 36-45.
95. Творчество, открытие и логические методы поиска доказательства // Природа научного открытия. М., 1986b. С. 101-114.
96. Вклад Г.Х. фон Вригта в логику и философию науки // Вригт Г.Х. фон. Логико-философские исследования. М., 1986c. С. 7-26.
97. Значение метода логической реконструкции для истории логики и философии // Философские проблемы истории логики и методологии науки. М., 1986d. ч.1 С. 109-112.
98. Способы представления квантовой механики и логической семантики // Логика квантовой механики. Университетская научная конференция. МГУ. М., 1986e. С. 27-28.
99. Утверждение и предикация. Комбинированные исчисления высказываний и ситуаций // Логика и системные методы анализа научного знания. М., 1986f. С. 160-162.
100. Logical Relation between Theories // Synthese. Dordrecht. 1986h. Vol.66, №1. P. 71-87.
101. Modality de re and Vasiliev's imaginary logics // Logique et Analyse. 1986i, N.114. P. 205-211.
102. Логические методы анализа научного знания. М., 1987a. 256 с.
103. Предложение, суждение, пропозиция // Тезисы конференции по пропозициональным установкам. М., 1987b.
104. Логический анализ научных теорий и отношений между ними // Логика научного познания: актуальные проблемы. М., 1987c. С. 118-139.
105. Актуальное философское исследование // Философия и социология науки и техники. М., 1987d. С. 285-290.
106. Гумманистический вектор науки // Коммунист. 1987e. №14. С.78-79. (Соавт.: В.С.Степин и др.)
107. За профессионализм философии // Вопр. философии. 1987f. №12. С.47-49.
108. Epistemology and Symbolic Logic. Science as a subject of Study // Social Sciences Today. M., 1987g. P. 41-56.
109. Assertion and Predication. Combined Calculus of Propositions and Situations // Abstracts of 8-th International Congress of Ilogic, Metodology and Philosophy of Sciense. Vol.1. M., 1987h. P. 333-335.
110. Logical Ideas of N.A.Vasiliev and Modern Logic // Ibid. Vol.5. M., 1987i, P. 86-89.
111. Strict Embedding of the Elementary Ontology into the Monadic Second-order Calculus of the predicates Admitting the Empty Individual Domain // Studia Logica. 1987j. Vol. XLVI. n.1. P. 1-15.

112. Аксиоматизация логических систем Н.А.Васильева // Современная логика и методология науки. М., 1987k. С.143-151.
113. Логическая наука и ее перспективы // Вопр. философии. 1988a. №6. С. 40-47. (Соавт.: С.Н.Артемов.)
114. Задачи исследования языка и аналитическая философия // Вопр. философии. 1988b. №8. С. 57-59.
115. Диалектика точного и неточного в современном научном познании // Там же. 1988c. №12. С. 24-27.
116. Statement and Predication. A combined Calculus of Sentences and Events // Intensional Logic, History of Philosophy and Methodology. Budapest, 1988d. P.101-108.
117. Internal and external logic // Bulletin of the Section of Logic. Vol.17. n.3/4. 1988e. P. 170-181.
118. Значение метода логической реконструкции для истории логики и философии // Методологические и мировоззренческие проблемы истории философии. М., 1988f. С. 272-279.
119. Рец. на кн.: Абаев Н.В. Чань-буддизм и культурно-психологические традиции в средневековом Китае. Новосибирск, 1989 // Филос. науки. 1989a. №12. С. 135. (Соавт.: Н.Ц.Жамбалдагбаев.)
120. Комбинирование исчислений предложений и событий и логика истины фон Вригта // Исследования по неклассическим логикам. М., 1989b. С. 16-29.
121. Утверждение и предикация. Комбинирование исчисления высказываний и событий // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989c. С. 27-35.
122. Предисловие // Н.А.Васильев. Воображаемая логика. М., 1989d. С. 5-11.
123. Логические идеи Н.А.Васильева и современная логика // Там же. 1989e. С. 229-259.
124. Творчество, открытие и логические методы доказательств // Философская и социологическая мысль. Киев, 1989f. №3.
125. И.Кант и современная логика //Кантовский сборник. Калининград, Вып.14. 1989g. С. 51-58.
126. The logical ideas of N.Vasiliev and modern logic // Logic, Methodology and Science. VIII. Amsterdam, N.Y., 1989h. P. 625-640.
127. Право, свобода, демократия // Вопр. философии. 1990a. №6. С. 19-21.
128. О многомерных логиках и их отношении к логикам многозначным // Тезисы X Всесоюзной конференции по логике, методологии и философии науки. Минск, 1990b. С. 90-91.
129. О перспективах анализа учения И.Канта о праве и морали средствами современной логики // Кантовский сборник. Калининград, Вып.15. 1990c. С. 68-73.

130.Логика и компьютер. М., 1990d. (Соавт.: А.М.Анисов, П.И.Быстров и др.)
131.Проблема истинности в логической семантике // Теория познания. Т.2. М., 1991a. С. 402-423. (Соавт.: Е.Д.Смирнова.)
132.Multidimensional Logics // Abstracts of the IX International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Uppsala. August 7-14. 1991b. P. 168.
133.Философская логика // Современная западная философия. Словарь. М., 1991c. С. 349-352. (Соавт.: П.И.Быстров.)
134.Рец.на кн: Мамардашвили М.К. Философия сознания // Коммунист. 1991d. №8. С. 66-76.
135.Памяти О.Ф.Серебрянникова // Вопросы философии. 1992. №10.
136.Рец. на книгу: Ракитов А.И. Философия компьютерной революции // Вопр. философии. 1993a. №1. С. 183-185.
137.Дважды алгебры и симметрические логики // Логические исследования. Вып.1. М., 1993b. С. 46-54.
138.Cut elimination in ε-calculus // Book of abstracts. Vol.1 XIX World Congress of Philosophy. Section 4. M., 1993c.
139.Дефинициальная эквивалентность элементарной онтологии и обобщенной силлогистики оккамовского типа // Логические исследования. Вып.2. М., 1993d. С. 17-31.
140.Многомерные логики // Там же. 1993e. С. 259-278.
141.Definitional Equivalence of elementary ontology and generalized syllogistic of occamian type // Препринт 93-03. Institute for Logic, Cognitive Science and Development of Personality. M., 1993f. C. 1-17.
142.Definitional Equivalence of the syllogistic Systems // Ibid. 1993g. C. 17-25.
143.Логика и клиническая диагностика. Теоретические основы. М., 1994a. С. 146-156, 279-295. (Соавт.: А.М.Анисов, А.С.Мелентьев и др.)
144.Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1994b. С.7-13.
145.К.Поппер прав: диалектическая логика невозможна // Вопр. философии. 1995a. №1. С. 148-151.
146.Об Асмусе вспоминают: (К 100-летию со дня рождения) // Там же. 1995b. №1. С. 31-35.
147.Поиск доказательств в натуральном интуиционистском исчислении предикатов // Логика, методология, философия науки. Москва-Обнинск. 1995c. С. 176-180.

148. Поиск доказательств в натуральном интуиционистском исчислении предикатов с ε-символом и предикатом существования // Логические исследования. Вып.3. М., 1995d. С.163-173.
149. Proof search in the Natural Intuitionistic Predicate Calculus with ε-symbol and Predicate of Existence // 10-th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Florence, Italy, 1995h. P. 176.
150. Доказательство и его поиск // Логика и компьютер. Вып.3. М., 1996. (Соавт.: В.И.Маркин и др.)
151. Free logics and quite free logics // Логические исследования. Вып. 4. М., 1997. С. 102-106.

СОДЕРЖАНИЕ