ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
ЗА РУБЕЖОМ

ФИЛОСОФИЯ И СОЦИОЛОГИЯ

СЕМАНТИКА МОДАЛЬНЫХ И ИНТЕНСИОНАЛЬНЫХ ЛОГИК

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
ЗА РУБЕЖОМ

ФИЛОСОФИЯ И СОЦИОЛОГИЯ

СЕМАНТИКА МОДАЛЬНЫХ И ИНТЕНСИОНАЛЬНЫХ ЛОГИК

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Составление, общая редакция
и вступительная статья
доктора философских наук

В. А. СМИРНОВА

МОСКВА
„ПРОГРЕСС" 1981

Перевод с английского
А. А. МУЧНИКА, А. Л. НИКИФОРОВА, З. А. СОКУЛЕР

СЕМАНТИКА МОДАЛЬНЫХ
И ИНТЕНСИОНАЛЬНЫХ ЛОГИК

ИБ № 4851

Редактор *И. В. Прончеенков*
Художественный редактор *А. Д. Суима*
Технические редакторы *О. Н. Семина, А. П. Агафошина*

Сдано в набор 10.01.80. Подписано в печать 26.05.81. Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Условн. печ. л. 22,26. Уч.-изд. л. 22,70. Тираж 5400 экз. Заказ № 1212. Цена 1 р. 60 к. Изд. № 26615

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Прогресс» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 119021, Зубовский бульвар, 17

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28 в Ленинградской типографии № 2 головном предприятии ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Редакция литературы по философии и педагогике

$С\frac{10508-226}{006(01)-81}$ 11—80 0302040000

СОВРЕМЕННЫЕ СЕМАНТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДАЛЬНЫХ И ИНТЕНСИОНАЛЬНЫХ ЛОГИК (ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ)

Исследование модальных, временны́х, деонтических, эпистемических, релевантных логик и других интенсиональных логических систем — новая и бурно растущая область современной логики. Некоторые из перечисленных выше разделов приобрели четкие очертания, а их исследование пошло по пути детальной, иногда технически очень трудной, систематизации. Это относится к модальным, временны́м, в меньшей степени релевантным логикам и системам сильной импликации. По этим разделам написаны обобщающие монографии и учебники. Прежде всего здесь следует упомянуть монографию М. Кресвелла и Д. Хьюза [20][1] и более свежую работу Д. Габбая [19]. Другие разделы, и прежде всего теория квантификации для интенсиональных контекстов, проблемы смысла, синонимии, косвенных контекстов, еще не приобрели законченного характера.

Предлагаемый вниманию читателей сборник состоит из основополагающих работ зарубежных ученых, посвященных семантике модальных и интенсиональных логик. Авторы публикуемых здесь статей являются крупными специалистами в области современной логики. Хотя ни в одной из помещенных статей и не провозглашается принадлежность автора к той или иной философской школе, тем не менее следует иметь в виду, что они так или иначе разделяют различные философские убеждения. В свое

[1] Здесь и далее цифра в квадратных скобках указывает на литературу, помещаемую в конце каждой статьи.

время многие буржуазные логики придерживались идей логического позитивизма. Но развитие научных исследований, в том числе и логических, показало несостоятельность философских установок позитивизма. И наиболее прогрессивные буржуазные ученые, разочарованные экстремистскими установками позитивизма, становятся на позиции материализма, часто называя себя «научными реалистами». Это относится прежде всего к логикам, группирующимся вокруг журналов «Философская логика» («Journal of philosophical logic») и «Теория» («Theoria») и Общества точной философии. К этому направлению принадлежит и ряд авторов публикуемых в настоящем издании переводов. Некоторые из авторов активно сотрудничают с советскими логиками, и их работы опубликованы, например, в журналах «Вопросы философии» и «Философские науки» и в специальных научных изданиях.

Исследования модальных и интенсиональных систем занимали и занимают в логической науке значительное место.

Довольно интересный семантический анализ неэкстенсиональных контекстов мы находим уже у основоположников символической логики, и особенно у Г. Фреге и Ч. Пирса, много внимания им уделено в работе Р. Карнапа «Значение и необходимость» и в работах других исследователей. Современное исследование модальных логик можно датировать работами К. И. Льюиса (1912 г.) и Я. Лукасевича (1920 г.). Особое значение имеет работа К. И. Льюиса и К. Г. Лангфорда (1932 г.).

В 1948 году А. Тарским и Дж. Мак-Кинси была предложена алгебраическая интерпретация модальной логики. Однако решающий перелом наступает на рубеже 50—60-х годов, когда семантика модальных и родственных им систем начинает разрабатываться особенно интенсивно.

При этом выявились две тесно связанные между собой тенденции. С одной стороны, стали изучаться формальные языковые системы с более богатыми, чем это имело место ранее, выразительными возможностями, и тем самым искусственные логические языки были приближены к естественным языкам и языкам науки. С другой стороны, стали учитываться более тонкие семантические и гносеологические аспекты. Последнее, в частности, проявилось в обсуждении такого важного для обоснования правильности логических рассуждений понятия, как понятие истинности. Как извест-

но, способ рассуждения правилен, если он при истинности посылок гарантирует истинность заключения. Для обоснования способов рассуждений в классической логике достаточно было понимания истинности предложения как его соответствия с действительностью. От таких важных самих по себе аспектов, как относительность знания, изменение и рост знания, конкретность истины и ряда других, абстрагируются при построении семантики классической логики. Однако многие из этих характеристик знания и истинности становятся существенными и при построении семантики для неэкстенсиональных языков.

Отметим и еще один немаловажный момент. При построении семантик как для классической логики, так и для неклассических логических систем используются понятия и методы теории множеств, алгебры и других разделов логики и математики. Но использование достаточно богатых технических средств не должно скрывать логической и философской сути изучаемых проблем. Разработка модальных и интенсиональных логик ориентирована по преимуществу на проблемы философского характера. Поэтому нередко рассматриваемый раздел логики называют философской логикой. Цель настоящей вступительной статьи прежде всего состоит в том, чтобы обрисовать связь исследований модальных и интенсиональных логик с философской проблематикой.

Еще Аристотель наряду с ассерторической силлогистикой, то есть теорией умозаключений из утверждений вида „P присуще всякому S“, „P не присуще ни одному S“, „P присуще некоторому S“ и „P не присуще некоторому S“, рассматривал и модальную силлогистику. В посылки и заключение модального силлогизма могут входить утверждения вида „P необходимо присуще всем S“, „P возможно присуще всем S“ и т. д. (такое использование модальных выражений получило впоследствии название модальностей de re). Но если ассерторическая силлогистика Аристотеля в настоящее время реконструирована, то общепринятого построения модальной силлогистики Аристотеля мы не имеем. Мне представляется, что модальности de re — это особый способ приложения предиката к субъекту, а модальности силлогистики есть особого типа связки. Своеобразие модальной силлогистики Аристотеля состоит в том, что он допускал переход от необходимой большей посылки и ассерторической меньшей к необходимому заключению: от „P необходимо присуще M“ и „M присуще S“ к „P необходимо присуще S“.

Логики мегаро-стоической школы сконцентрировали свое внимание на логике высказываний. Модальности „необходимо“, „возможно“, „случайно“ они понимали как операторы, действующие на высказывание в целом. Подобное понимание модальностей получило впоследствии в схоластической логике название модальностей de dicto.

Таким образом, модальные характеристики высказываний изучались на всем протяжении развития логики. При этом следует иметь в виду, что в разряд модальностей заносились и заносятся сейчас разные по своему содержанию понятия и операторы, хотя их свойства во многом аналогичны. Прежде всего следует выделить *алетические модальности*. Эти модальности относятся к положениям дел, описываемым подоператорными выражениями, и они подразделяются на *логические* и *физические модальности*. Например, все, что не противоречит логике, считается логически возможным, а все, что не противоречит законам природы, — физически возможным. С другой стороны, модальные операторы могут характеризовать степень обоснованности нашего знания: „достоверно“, „вероятно“ или „доказано“, „подтверждено“, „опровержимо“. Такого рода модальности называют *эпистемическими*. К ним относят и операторы вида „a знает, что“ и т. д. Часто как модальные рассматривают и *деонтические* модальности: „обязательно“, „разрешено“ и „запрещено“.

Модальности всех указанных типов изучаются нередко одинаковыми методами, то есть при построении абстрактных семантик мы порой отвлекаемся от их конкретной интерпретации. Поэтому следует иметь в виду, что часто название логической системы сохраняет только возможную основную конкретную интерпретацию. Так, в статье Е. Леммона речь идет об эпистемических и деонтических логиках, хотя построенные им алгебраические и реляционные семантики, конечно, не содержат собственно эпистемических или деонтических интерпретаций.

Модальные операторы тесно связаны с пониманием импликации „если..., то...“. Еще в мегаро-стоической школе разгорелся спор о понимании импликации. Филон считал, что импликация „если A, то B“ ложна только тогда, когда A истинно и B ложно; во всех остальных случаях она истинна. Именно такая импликация, полу-

чившая название *материальной*, была принята при построении системы классической логики. Однако материальная импликация обладает целым рядом парадоксальных свойств, заставляющих нас, например, считать утверждение „если $2\times2=5$, то Нью-Йорк — большой город“, которое содержательно не представляется истинным, за истинное утверждение. Иначе говоря, использование слов „если..., то...“ в естественных языках заставляет видеть в них нечто большее, чем просто материальную импликацию, и логики упорно стремились вычленить эту более сильную связь. Диодор Кронос — учитель Филона — предлагал считать импликацию „если A, то B“ истинной в том и только в том случае, когда невозможно и не было возможным, чтобы A было истинным, а B — ложным, то есть предлагал определить нематериальную импликацию с помощью модальных и временны́х операторов.

К. И. Льюис для уточнения нематериальной импликации построил ряд логических систем. Помимо классических связок они содержали модальные операторы. Нематериальную импликацию он назвал *строгой импликацией*. Он полагал, что интуитивному пониманию нематериальной импликации соответствует его система S2. Затем в работе [23] были обобщены результаты К. И. Льюиса и О. Беккера и сформулированы 5 канонических систем S1 — S5.

На первых порах не было четко сформулированных семантик для модальных логик. Как мы уже отметили, в 1948 году А. Тарским и Дж. Мак-Кинси была построена алгебраическая семантика для S4 Льюиса. В дальнейшем алгебраические семантики для различных систем модальной логики высказываний были детально разработаны Е. Леммоном в ставшей классической статье, перевод которой предлагается читателю. Модальное пропозициональное исчисление интерпретируется на матрице $\langle M, D, \cap, \cup, -, \mathbf{P}\rangle$, где $\langle M, \cap, \cup, -\rangle$ — булева алгебра, $\mathbf{P}$ — дополнительная операция на булевой алгебре и D — выделенное подмножество элементов. Пропозициональным связкам &, $\vee$, $\neg$, $\Diamond$ сопоставляются соответственно операции $\cap$, $\cup$, $-$, $\mathbf{P}$. Пропозициональные переменные пробегают по элементам M. Набор значений пропозициональных переменных выполняет формулу A на данной матрице, если значение формулы A при этом наборе будет принадлежать D. Формула A истинна на данной матрице, если и только если каждый набор значений переменных формулы A выполняет ее на этой матрице. Матрица называется *характеристической* для модального исчисления S, если и только если класс теорем S совпадает с классом формул, истинных на данной матрице.

Согласно теореме Линденбаума, для широкого класса пропозициональных исчислений существуют характеристические матрицы, в том числе для всех расширений классической логики (замкнутых относительно подстановки). Если для пропозиционального исчисления имеется конечная характеристическая матрица, то это исчисление называется *табличным*. Очевидно, что проблема разрешения для табличного исчисления разрешима. Исчисление называется *предтабличным*, если оно не является табличным, и всякое его расширение таблично. Советские логики установили ряд интересных результатов относительно предтабличных исчислений; в частности, что среди всех расширений S4 имеется ровно пять предтабличных (В. Месхи, Л. Л. Эсакиа [14], Л. Л. Максимова).

Модальные исчисления (включающие С2) можно интерпретировать не на матрице, а на алгебре соответствующего типа. В качестве выделенного значения берется булева **1**. Тогда формула A истинна на модальной алгебре, если и только если она принимает значение **1** при любом приписывании значений ее свободным переменным. Формула A общезначима, если и только если она истинна на любой алгебре из данного класса. Леммон устанавливает теоремы о полноте для целого ряда модальных исчислений: класс доказуемых формул совпадает с классом общезначимых формул на данном классе алгебр.

Для ряда логических систем класс доказуемых формул совпадает с классом формул, истинных на всех конечных алгебрах данного класса. Исчисление называют *финитно аппроксимируемым*, если для каждой недоказуемой формулы A найдется конечная алгебра (конечная матрица), на которой A ложна, но все аксиомы исчисления истинны и правила вывода сохраняют истинность[1]. Легко видеть, что если исчисление конечно аксиоматизируемо и финитно аппроксимируемо, то проблема разрешения для него разрешима (в силу рекурсивной перечислимости класса доказуемых формул и класса конечных матриц).

[1] Вместо термина „финитная аппроксимируемость", принятого в советской литературе, в англоязычной литературе употребляют термин "finite model property"—свойство финитности моделей. При переводе статей использовались как первый, так и второй термины.

При всей важности метода алгебраических семантик для решения многих технических задач логики сам этот метод давно уже оставлял чувство некоторой неудовлетворенности. Для модальных логик хотелось бы иметь семантики, более соответствующие нашей интуиции. И такие семантики были построены в конце 50-х годов. Это—реляционные семантики, основные идеи построения которых были сформулированы в работах С. Кангера, Я. Хинтикки, А. Прайора, С. Крипке. При этом наиболее фундаментальным понятием оказывается понятие возможности одного мира относительно данного.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Идея возможного мира в классической логике не нужна для формулировки понятия истинности, но она оказывается важной для формулировки понятия логической истинности, тесно связанного с понятием логической необходимости. Действительно, оператор логической необходимости естественно трактовать следующим образом:

$\Box A$ истинно тогда и только тогда, когда A логически истинно, то есть истинно во всех возможных мирах. Такая трактовка модальности была развита Р. Карнапом (см. его работу „Значение и необходимость"). Но нельзя ли подобную семантику сформулировать для известных модальных систем, например для S4? Всегда ли для установления истинности $\Box A$ в некотором возможном мире H следует устанавливать истинность A во всех возможных мирах; может быть, для этого достаточно установить истинность A в мирах, возможных относительно H, то есть в мирах, достижимых из H. Таким образом, класс возможных миров наделяется некоторой структурой и рассматривается вместе с отношением возможности одного мира относительно другого. Разные авторы называют последнее отношение по-разному: *отношением относительной возможности*, *достижимости*, *отношением альтернативности*.

Под *модельной структурой* (для нормальных модальных пропозициональных логик) понимается тройка $\langle K, R, G\rangle$, где K есть множество возможных миров, G—выделенный мир из K (его часто называют актуальным миром) и R—бинарное отношение на K. В зависимости от свойств R мы получим разные типы модельных структур. (Что понимать под возможным миром (при чем остается открытым; этот вопрос при более содержательном истолковании модальных операторов конкретизируется: возможный мир может быть отождествлен с совокупностью положений дел, совокупностью состояний знания и т. д.)

В классической логике под *означиванием (приписыванием значения пропозициональным переменным)* мы понимаем функцию, приписывающую каждой переменной значение **T** или **F**. В модальной логике пропозициональным переменным приписываются истинностные значения относительно возможного мира, то есть означивание есть бинарная функция φ: $\Pi \times K \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Следует обратить внимание на то, что функция означивания у разных авторов именуется по-разному (Крипке саму функцию φ называет моделью, другие авторы моделью называют модельную структуру вместе с функцией означивания, то есть $\langle K, R, G, \varphi\rangle$, третьи моделью формулы A называют модельную структуру $\langle K, R, G\rangle$, на которой A истинна). Теперь легко ввести функцию оценки

$$\Phi(p_i, H, \varphi) = \mathbf{T} \equiv \varphi(p_i, H) = \mathbf{T}$$

и обычным образом для $\&$, $\neg$, $\Box$.

Отметим, что реляционная семантика Крипке может быть описана и с более явным вычленением интенсиональных моментов. K есть множество возможных миров; пусть $\mathcal{P}K$ (или 2^K) есть класс всех подмножеств K. Каждый элемент из $\mathcal{P}K$ мы можем отождествить с положением дел, так как положение дел описывается множеством всех миров, в которых оно имеет место (вместо $\mathcal{P}K$ можно рассматривать множество всех функций типа $K \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$). Тогда функция означивания φ приписывает каждой пропозициональной переменной некоторое положение дел.

Вместо функции оценки можно ввести предикат — „*Формула A истинна в мире H модельной структуры* **M** при означивании φ“ — $\mathbf{M} \overset{\varphi}{\underset{H}{\models}} A$:

$$\mathbf{M} \overset{\varphi}{\underset{H}{\models}} p_i \equiv H \in \varphi(p_i)$$

$$\mathbf{M} \overset{\varphi}{\underset{H}{\models}} \Box A \equiv \forall H_1 \left(RHH_1 \supset \mathbf{M} \overset{\varphi}{\underset{H_1}{\models}} A \right).$$

Функция оценки φ на модельной структуре **M** есть не что иное, как характеристическая функция предиката $\mathbf{M} \overset{\varphi}{\underset{H}{\models}} A$. A *истинна* в **M** ($\mathbf{M} \models A$) тогда и только тогда, когда для всякого означивания $\mathbf{M} \overset{\varphi}{\underset{G}{\models}} A$.

Каково же отношение между алгебраическими и реляционными семантиками? Оказывается, что полного соответствия между алгебраическими семантиками и семантиками Крипке нет. С. К. Томасоном, Д. Макинсоном, К. Файном были построены примеры модальных и временных пропозициональных логик, для каждой из которых может быть построена алгебраическая семантика, но невозможна стандартная реляционная семантика.

С. К. Томасоном, Д. Макинсоном и Л. Л. Эсакиа были предложены обобщения реляционной семантики. Чтобы понять смысл вводимого обобщения, полезно провести сравнение его с понятиями *общезначимости* и *вторичной общезначимости* для классической второпорядковой логики [16]. При стандартной интерпретации второпорядкового исчисления предикатов одноместные предикатные переменные пробегают по подмножествам области X (то есть по $\mathcal{P}(X)$, n-местные — по множествам n-ок (то есть по $\mathcal{P}(X^n)$. Формула общезначима, если она общезначима в каждой непустой области. Известно, что этот класс общезначимых формул не может быть аксиоматизирован. А. Черч вводит понятие общезначимости в структуре $\langle X, \Pi_1, \ldots, \Pi_n, \ldots\rangle$, где $\Pi_1 \subseteq \mathcal{P}(X), \ldots, \Pi_n \subseteq \mathcal{P}(X^n)$. Формула *вторично-общезначима*, если она общезначима во всех структурах подобного типа. Класс вторично-общезначимых формул аксиоматизируем. По существу, это первопорядковая логика с несколькими сортами переменных.

В стандартной реляционной семантике пропозициональные переменные пробегают по $\mathcal{P}(K)$ — всем подмножествам K, то есть стандартная реляционная семантика является второпорядковой. Введя модельную структуру $\langle K, G, R, \Pi\rangle$, где $\Pi \subseteq \mathcal{P}(K)$, и соответствующие семантические понятия, мы получаем *первопорядковую реляционную семантику* (формула общезначима, если она общезначима во всех структурах $\langle K, G, R, \Pi\rangle$ данного типа). С. К. Томасон показывает, что пропозициональное модальное исчисление, имеющее алгебраическую семантику, имеет и первопорядковую реляционную, и наоборот.

Второпорядковая реляционная семантика может быть обобщена и другим способом. Вместо отношения между мирами вводится отношение между миром и множеством миров. Пусть $Q \subseteq K \times \mathcal{P}(K)$. На отношение Q для получения различных логик могут накладываться различные условия (см. статью Д. Габбая в этой книге). И тогда условия оценки для $\Box$ формулируются следующим образом:

$$\Phi(\Box A,\ H,\ \varphi) = \mathbf{T} \equiv HQ\{H'/\Phi(A,\ H',\ \varphi) = \mathbf{T}\}.$$

Или, словесно: формула $\Box A$ истинна в H при означивании φ (в данной модельной структуре), если и только если H находится в отношении Q к множеству миров, в которых истинна формула A при означивании φ. Этот тип семантики был предложен Р. Монтегю и Д. Скоттом. Семантики этого типа называют *окрестностными семантиками*, или семантиками типа Монтегю. Нетрудно видеть, что приняв $xQS \Leftrightarrow S = \{y/Rxy\}$, второпорядковая семантика оказывается частным случаем окрестностной семантики, но не наоборот. Читателю, желающему ознакомиться с семантикой типа Монтегю для пропозициональных логик, мы советуем начать с работы Д. М. Габбая.

Семантики для пропозициональных логик с интенсиональными операторами к настоящему времени достаточно хорошо разработаны. Помимо широкого класса логик с алетическими, эпистемическими и другими модальностями, основательно исследованы логические системы с временны́ми операторами. Создание временны́х логик является во многом заслугой А. Н. Прайора. Непосредственным поводом к построению временны́х логик послужил анализ „главного аргумента" Диодора Кроноса. Диодор Кронос, выдвигая аргументы против мыслимости движения, изменения в понятиях, в частности против трактовки изменения как превращения возможного в действительное, сформулировал следующие три несовместимых положения: „то, что было, то необходимо было"; „возможное не наследует невозможное" и „имеется нечто, что возможно, но чего нет и не будет". Если принять первые два положения, то из противоречивости трех положений следует, что если нечто возможно, то оно есть или будет. Аргументация Диодора рассматривалась как доказательство жесткого детерминизма, по существу — фатализма.

Другая проблема античности, тесно связанная с модальностью и временем, — это проблема высказываний о будущих событиях. Поставленная Аристотелем в работе „Об истолковании" как проблема истинностного статуса утверждений типа „завтра будет морское сражение", она стимулировала интенсивную работу мысли. В философском плане это — проблема об объективности случайных событий.

Построение модальных и временны́х логик во многом проясняет эти трудные философские проблемы. Временну́ю логику с операторами „когда-нибудь будет" (**F**) и „когда-то было" (**P**) можно рассматривать как бимодальную логику. Модельной структурой для временно́й пропозициональной логики будет структура с двумя бинарными отношениями $\langle K,\ R_1,\ R_2,\ G\rangle$. При этом естественно потребовать, чтобы одно отношение (трактуемое как „позже") было обращением другого (трактуемого как „раньше"). Тогда, формулируя условия истинности для F и P как для возможностей, мы получаем некоторую минимальную временну́ю логику K_t. Накладывая дальнейшие ограничения на отношения достижимости — в зависимости от принимаемой концепции времени, — мы получаем различные системы временны́х логик. На базе этих операторов легко ввести операторы „всегда будет" (G) и „всегда было" (H).

В связи с применением аппарата временно́й логики к анализу „главного аргумента" Диодора и утверждений о будущих событиях хотелось бы высказать одно соображение. Если мы будем рассматривать высказывания вида FA как констатацию дел в будущем, то при допущении возможности разного хода истории мы не можем дать двузначную истинностную оценку FA в настоящий момент, что́ необходимо приводит нас к идее многозначных логик. Этот момент явился исходным пунктом для построения модальных и многозначных логик Я. Лукасевичем. Но возможен и альтернативный подход. Временны́е операторы мы можем рассматривать как модализированные временны́е операторы. Тогда выражение „когда-нибудь будет" уточняется одним из двух способов: „возможно, когда-нибудь будет" ($\langle F\rangle$) и „обязательно когда-нибудь будет" ($\boxed{F}$). Семантические условия истинности для этих операторов можно ввести следующим образом. Пусть $H(\alpha,\ a)$ означает: „α есть нить, выходящая из точки a".

Символически:

$$\mathrm{H}(\alpha,\ a) \rightleftarrows \alpha =$$
$$= \{x/Rax\} \,\&\, \forall y \forall z\, (y \in \alpha \,\&\, z \in \alpha \supset Ryz \vee Rxy \vee z = y)$$

Тогда операторы $\boxed{\mathrm{F}}$ и $\langle\mathrm{F}\rangle$ определяются следующим образом:

$$a \models \boxed{\mathrm{F}}\, A \equiv \forall\alpha\, (\mathrm{H}(\alpha,\ a) \supset \exists x\, (x \in \alpha \,\&\, x \models A)),$$
$$a \models \langle\mathrm{F}\rangle\, A \equiv \exists\alpha\, (\mathrm{H}(\alpha,\ a) \,\&\, \exists x\, (x \in \alpha \,\&\, x \models A)).$$

Нетрудно видеть, что $\langle\mathrm{F}\rangle$ тождествен стандартному оператору F.

Возвращаясь к диодоровскому утверждению, что возможное эквивалентно тому, что есть или что будет, мы можем рассматривать его двояким образом: как $MA \equiv A \vee \langle\mathrm{F}\rangle A$ или $MA \equiv A \vee \boxed{\mathrm{F}}\, A$. В первом случае утверждение не ведет к утверждению жесткого детерминизма и фатализма. Отметим, что при допущении линейности отношения R и неоканчиваемости времени $(\forall x \exists y\, Rxy)$ формула $\langle\mathrm{F}\rangle A$ эквивалентна $\boxed{\mathrm{F}}\, A$.

На этой основе могут быть проанализированы и трудности проблемы утверждений типа „завтра будет морское сражение". В этом случае полезно ввести два метрических временных оператора: $\boxed{\mathrm{F}_n}\, A$ — „через n единиц времени обязательно будет A" и $\langle\mathrm{F}_n\rangle A$ — „через n единиц времени возможно будет A":

$$a \models \boxed{\mathrm{F}}\, A \equiv \forall x\, (Rax \,\&/a,\ x) = n \supset x \models A),$$
$$a \models \langle\mathrm{F}_n\rangle A \equiv \exists x\, (Rax \,\&/a,\ x/ = n \,\&\, x \models A).$$

Если нет ветвлений в будущее, то и здесь $\boxed{\mathrm{F}_n}\, A = \langle\mathrm{F}_n\rangle A$ и отрицаются случайные события. Если же ветвление допускается, то допускаются и случайные события $(\langle\mathrm{F}_n\rangle A \,\&\, \langle\mathrm{F}_n\rangle \neg A)$.

Хорошо разработанные системы льюисовской строгой импликации оказались не полностью соответствующими интуитивному пониманию следования, связи по смыслу. В этих системах нет так называемых „парадоксов" материальной импликации, но имеются „парадоксы" строгой импликации: если $\vdash A$, то $\vdash B \prec A$. В этой связи были предприняты попытки построить логические системы, более приближающиеся к интуитивному пониманию следования, основанные на таком понятии вывода, когда все посылки используются в выводе существенным образом (релевантные логики).

Обычно как на первую систему релевантной логики ссылаются на *слабую теорию импликации* А. Черча [18], опубликованную в 1951 году. Однако система А. Черча, по существу, эквивалентна системе советского логика И. Е. Орлова, предложенной им в 1928 году [8]. Работа И. Е. Орлова осталась вне поля внимания исследователей релевантной логики. Лишь недавно В. М. Попов [7] исследовал ее и показал эквивалентность слабой теории импликации А. Черча.

Важным видом релевантных логик, удовлетворяющих также требованиям, предъявляемым к льюисовским системам строгой импликации, являются системы сильной импликации или системы следования. Система *сильной импликации* была сформулирована В. Аккерманом в 1956 году [17], затем перестроена А. Андерсоном и Н. Белнапом и получила название *логики следования*. Системы релевантной логики, включая систему следования E, интенсивно исследуются американскими (Питтсбургская школа) и советскими логиками. Изучение систем сильной импликации в Советском Союзе было начато во многом по инициативе С. А. Яновской. В последние годы советскими логиками получены интересные результаты в этой области (см. [4; 6; 7; 14]). Системы релевантной импликации нужны для решения ряда методологических проблем: уточнения понятия номологических высказываний, контрфактических предложений, преодоления трудностей в логических моделях дедуктивного объяснения.

Долгие годы релевантные системы (R, E и др.) не имели семантики. Попытки построить для них реляционные семантики с двуместным отношением достижимости оказались безуспешными. Наконец Р. Роутлей и Р. Мейер предложили адекватную реляционную семантику для системы R с трехместным отношением достижимости. (В настоящей книге предлагается перевод первой части этой их работы.) Алгебраическая семантика для E построена Л. Л. Максимовой [5]; для важных фрагментов R и E была построена Е. К. Войшвилло [1] семантика на базе обобщенных описаний состояния (в семантике релевантной логики учитываются противоречивые описания состояния).

Многие трудные вопросы — и прежде всего философского характера — возникают при построении модальной (и более обще — интенсиональной) квантифицированной логики. В. Куайн считал, например, что комбинация кванторов и модальностей обязывает нас принять в качестве существующих индивидные концепты, то есть идеалистическую онтологию, что, по его мнению, неприемлемо. Имеются значительные трудности и логического характера. Так, если мы просто объединим обычную квантификационную логику с модальностями S5, то в этой системе будет доказуема *формула Баркан* — $\Diamond \exists x\, Ax \supset \exists x \Diamond Ax$, принятие которой вызывает серьезные возражения. Еще более серьезные трудности возникают при построении квантифицируемой модальной логики с тождеством (равенством). Так, принятие принципа замены $a = b \supset Aa \equiv Ab$, в частности $a = b \supset \Box (a = b)$, ведет к неприемлемым с точки зрения интуиции следствиям.

Однако вопреки пессимистическим прогнозам В. Куайна модальная квантификационная логика построена и при этом различными способами. В книге имеются переводы статей С. Крипке, Я. Хинтикки, Р. Монтегю и Д. Скотта, в которых предлагаются различные варианты построения модальных исчислений предикатов.

Чтобы разобраться в многообразии подходов к *модальной теории квантификации*, целесообразно взглянуть с единой позиции на различные подходы к этой теории. Я начну с характеристики более экстенсиональных подходов, переходя к теориям, содержащим все более и более интенсиональные аспекты, и проведу сравнение в единой терминологии.

Для простоты рассмотрим исчисление предикатов, содержащее только предикатные константы, индивидные переменные, квантор общности и модальный оператор необходимости. Рассмотрим модельную структуру $\langle K, R, G, U, \psi \rangle$, где K — множество миров, R — бинарное отношение на K, G — выделенный мир из K, U — индивидная область, понимаемая как множество возможных объектов, ψ есть функция, сопоставляющая каждому возможному миру H непустую индивидную область $\psi(H) \subseteq U$ (вместо $\psi(H)$ мы будем писать также U_H). Для простоты мы рассматриваем только нормальные модельные структуры. Семантику мы будем формулировать, используя понятия *интерпретации* **I**, функции *приписывания* значений свободным индивидным переменным — φ, и понятие *истинности* формулы в мире H данной модельной структуры **M** при приписывании φ — $H \overset{\varphi}{\underset{\mathbf{M}}{\models}} A$. Разные подходы к модальному исчислению предикатов будут расклассифицированы в зависимости от того, что мы будем понимать под интерпретацией и функцией приписывания φ.

Подход A. Интерпретация определяется, как и в экстенсиональной классической логике: n-местной предикатной константе интерпретация I сопоставляет множество n-ок из области U: $\mathrm{I}(P^n) \subseteq U \times \ldots \times U$. Функция приписывания φ каждой переменной сопоставляет объект из U. Квантор общности может трактоваться двояко: или как осуществляющий квантификацию по всем возможным объектам, или для каждого мира H по области $\psi(H)$. Пусть $\varphi \underset{x}{=} \varphi'$ есть сокращение для „приписывание φ' отличается от приписывания φ, возможно, только приписыванием переменной x". Первый квантор обозначим $\forall$, второй — $\forall.$. Тогда они удовлетворяют следующим условиям истинности (мы опускаем нижний индекс **M**):

$$\text{I. } H \overset{\varphi}{\models} \forall x\, Ax \equiv \forall \varphi' \left(\varphi \underset{x}{=} \varphi' \supset H \overset{\varphi'}{\models} Ax \right),$$

$$\text{II. } H \overset{\varphi}{\models} \forall. x\, Ax \equiv \forall \varphi' \left(\varphi \underset{x}{=} \varphi' \,\&\, \varphi'(x) \in \psi(H) \supset H \overset{\varphi'}{\models} Ax \right).$$

Классические связки удовлетворяют обычным условиям истинности, а оператор необходимости — стандартному условию:

$$H \overset{\varphi}{\models} \Box A \equiv \forall H_1 \left(RHH_1 \supset H_1 \overset{\varphi}{\models} A \right).$$

У нас имеется три возможности понимания истинности атомарной формулы (в мире H модельной структуры **M** относительно приписывания φ):

1. $H \overset{\varphi}{\models} P^n(x_1, \ldots, x_n) \equiv \langle \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \rangle \in \mathrm{I}(P^n)$,

2. $H \overset{\varphi}{\models} P^n(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi(x_i) \in \psi(H)$ для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\langle \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \rangle \in \mathrm{I}(P^n)$,

3. если $\varphi(x_i) \in \psi(H)$ для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то $H \overset{\varphi}{\models} P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \langle \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \rangle \in \mathrm{I}(P^n)$; если $\varphi(x_i) \notin \psi(H)$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то предикат $H \overset{\varphi}{\models}$ для формулы $P(x_1, \ldots, x_n)$ не определен.

В случае принятия (1) мы будем иметь $\Box Px \equiv Px$, что, по существу, делает логику немодальной. Мы не можем построить модальную логику с квантификацией по всем возможным объектам при (1) или (2). Если истинностное значение атомарной формулы в H при приписывании φ переменным недействительных объектов (случай 3) не определено, то $\forall x\, Ax$ становится эквивалентным $\forall .x\, Ax$. В этом случае условие истинности в мире H формулируется следующим образом:

$$H \models A \equiv \forall \varphi \left(\text{если } \varphi(x_i) \in \psi(H) \text{ для всех свободных переменных } A, \text{ то } H \overset{\varphi}{\models} A \right).$$

Модальные логики с квантификацией по действительным индивидам совместимы, по-видимому, только с возможностью (3). Однако этот вопрос подробно не исследован. При первом подходе интерпретация и функция приписывания не зависят от возможного мира, но понятие истинности зависит от него.

Подход B. Мы будем полагать, что интерпретация предикатной константы зависит от возможного мира; в разных возможных мирах предикатной константе могут приписываться разные значения. Интерпретация, таким образом, является функцией двух аргументов: один пробегает по предикатным константам, другой — по возможным мирам, то есть $\mathrm{I}(P^n, H) \subseteq (U_H)^n$. Однако вместо того чтобы рассматривать интерпретацию как функцию двух аргументов, мы можем рассматривать I как зависящую от одного аргумента, а именно — от переменной, пробегающей по возможным мирам. В качестве ее значения мы для каждого мира H будем иметь свою интерпретацию I_H. Последняя каждой предикатной константе в мире H сопоставляет ее экстенсионал на действительных объектах этого мира: $\mathrm{I}(P^n, H) = \mathrm{I}_H(P^n)$. Функция приписывания φ сопоставляет каждой переменной объект из U. Для случая, когда $\bigcup_{H \in K} U_H = U$ и выполняется условие $RH_1H_2 \supset \supset U_{H_1} \subseteq U_{H_2}$, построены соответствующие семантики для модальных логик (см., например, работу К. Шютте в [15; с. 328 и след.], Д. Габбая [19], Г. Е. Минца в [15]). При этом предикат $H \overset{\varphi}{\models} A$ (или функция оценки $\| A \|^{\varphi}_H = 1$) определен только для таких φ, которые свободным переменным из A сопоставляют объекты из U_H.

Подход C. При этом подходе интерпретация в каждом мире приписывает предикатному знаку его экстенсионал, но определенный на множестве U, то есть $\mathrm{I}_H(P^n) \subseteq U^n$. Функция приписывания φ, как и раньше, сопоставляет переменным объекты из U. Принимается, что $\bigcup_{H \in K} U_H = U$. Квантификация в H осуществляется по объектам U_H. Семантика указанного типа была построена С. Крипке (см. его статью в данной книге, с. 27—40). При таком подходе не являются общезначимыми ни формула Баркан, ни ее обращение, хотя при стандартной аксиоматизации формула Баркан доказуема в S5, а ее обращение уже в T. Ясно, что формула $\forall .x\, Ax \supset Ay$ не будет общезначимой. Поэтому С. Крипке для аксиоматизации класса общезначимых формул модальной логики берет в качестве аксиом формулы, полученные путем приписывания в любой последовательности кваторов общности и операторов необходимости к обычным аксиомам. Подход типа C часто называют *семантикой с переменными областями.*

Подход D. Здесь интерпретация предикатного знака будет пониматься как функция от двух переменных. Она в некотором мире H предикатному знаку P^n сопоставляет его экстенсионал на множестве возможных миров (аналогично подходу C), то есть $\mathrm{I}(P^n, H) \in 2^{U^n}$. При подходах B и C мы двуместную функцию $\mathrm{I}(P^n, H)$ представили в виде $\mathrm{I}_H(P^n)$. Но эту двуместную функцию $\mathrm{I}(P^n, H)$ можно представить и как сопоставляющую каждому предикатному знаку некоторую функцию $\mathrm{I}(P^n)$, которая в свою очередь каждому миру H сопоставляет некоторое подмножество из U^2, то есть $\mathrm{I}(P^n, H) = (\mathrm{I}(P^n)(H)) = \mathrm{I}_{P^n}(H)$. Саму функцию $\mathrm{I}(P^n)$ будем называть *интенсионалом предикатного знака* P^n, а значение этой функции (интенсионала) в мире H, то есть $\mathrm{I}_{R^n}(H)$ — *экстенсионалом* P^n *в мире* H.

Существенное отличие D от подхода C состоит в следующем. Допустим, что в языке имеются функциональные константы; n-местная функциональная константа может рассматриваться как особого вида $n+1$-местное отношение. Тогда в качестве интенсионала n-местной функциональной константы естественно рассматривать функцию с областью определения в K и областью значений в U^n. Индивидная константа есть нульместная функциональная константа, а множество функций, отображающих пустую последовательность $< >$ в U, можно отождествить с U. Поэтому интенсионалом константы будет функция $\mathrm{I}(a)$, сопоставляющая каждому миру из K элемент из U, а экстенсионалом — элемент из U, то есть $(\mathrm{I}(a))(H) \in U$. Интенсионалы индивидных констант называют вслед за Р. Карнапом индивидными концептами.

Во всех предыдущих случаях функция означивания φ индивидным переменным сопоставляла значение из U независимо от возможного мира. Но в таком случае нет семантической согласованности между индивидной константой и индивидной переменной. Специфика подхода D состоит в том, что функция означивания φ является функцией от двух переменных. Индивидной переменной мы приписываем как интенсионал, так и экстенсионал в данном мире, φ есть функция, приписывающая каждой переменной функцию $\varphi(x_n) \in U^K$. Экстенсионал переменной x_n есть элемент из U, так как $(\varphi(x_n))(H) \in U$.

Теперь встает вопрос, как определить интенсионал сложного выражения. Сложные выражения могут содержать свободные переменные. В отличие от Р. Монтегю мы будем говорить не об интенсионале сложного выражения самого по себе, а об интенсионале сложного выражения относительно приписывания интенсионалов свободным переменным (и относительно данной интерпретации).

При стандартном подходе в классической логике экстенсионал сложного выражения вычисляется по экстенсионалам составляющих выражений следующим образом. Пусть имеется выражение $P(a)$. Одноместной предикатной константе сопоставляется объект из 2^U, а индивидной — объект из U. Тогда объект, сопоставленный $P(a)$, вычисляется по схеме $2^U \times U \to 2$, то есть предложению сопоставляется объект из $2 = \{T, F\}$. В общем виде экстенсионал вычисляется по схеме $A^B \times B \to A$. А как будет вычисляться интенсионал сложного выражения $P(a)$ по интенсионалам составляющих? Константе a мы приписываем функцию U^K, одноместной предикатной константе P — функцию $(2^U)^K$. Тогда интенсионал сложного выражения должен находиться по $(2^U)^K \times U^K$. Но, с другой стороны, предложение есть нульместный предикатный знак, его интенсионал принадлежит к 2^K. В общем случае интенсионал сложного выражения мы находим по интенсионалам составляющих по схеме $(A^B)^K \times B^K \mapsto A^K$. Таким образом, интенсионал сложного выражения (относительно приписывания интенсионалов свободным переменным) является функцией интенсионалов составляющих, что реализует известное требование Г. Фреге.

Переходя к пропозициональным операторам, например оператору $\Box$, отметим, что в классическом случае одноместному пропозициональному оператору приписывается функция типа 2^2, тогда интенсионал одноместного оператора принадлежит к $(2^2)^K$, то есть отождествляется с функцией, приписывающей каждому миру некоторую классическую функцию.

При подходе D вводятся квантор по всем возможным объектам, квантор по действительным объектам и предикат существования $\mathrm{I}(\mathrm{E}, \mathrm{H}) = U_H$. Квантор по существующим объектам можно определить через квантор по возможным объектам и предикат существования.

Подход E. При этом подходе мы имеем два типа предикатных знаков: обычные и интенсиональные. Экстенсионал обычного одноместного предикатного знака — как и при подходе D — есть функция из U в 2, то есть объект, принадлежащий 2^U; интенсионал есть функция типа $(2^U)^K$. Аналогично интенсионалом индивидного знака является функция U^K, а экстенсионалом — объект из U.

Экстенсионалы интенсиональных предикатных знаков определены не на индивидах, а на индивидных концептах, то есть на U^K. Одноместному интенсиональному предикатному знаку в качестве его экстенсионала сопоставляется объект $2^{(U^K)}$, а в качестве интенсионала — функция типа $(2^{(U^K)})^K$. Таким образом, интенсиональные предикатные знаки имеют интенсионал и экстенсионал, как и обычные предикатные знаки. Этот подход сформулирован Е. Д. Смирновой в [7]. Он сходен с подходом Д. Скотта. Но имеется одно важное различие. Д. Скотт интенсиональному предикатному знаку, скажем одноместному интенсиональному знаку, сопоставляет функцию с областью определения в индивидных концептах, то есть U^K, и областью значений в пропозициональных концептах, то есть 2^K. Следовательно, он сопоставляет одноместной предикатной интенсиональной константе объект типа $(2^K)^{(2^U)}$. Но при таком подходе неясно, следует ли говорить об интенсионале и экстенсионале предикатного знака; при подходе Е. Д. Смирновой интенсиональному знаку может быть сопоставлен как интенсионал, так и экстенсионал. Но, учитывая, что $(A^B)^C$ изоморфно $(A^C)^B$, мы видим, что интенсионал $(2^{U^K})^K$ изоморфен скоттовскому значению одноместного интенсионального предикатного знака $(2^K)^{(2^U)}$. Для простоты мы говорим о чисто интенсиональных предикатных знаках, но могут быть и такие предикатные знаки, одно аргументное место которого интенсионально, а другое — экстенсионально.

Как установить интенсионал сложного выражения, главный знак которого интенсионален? Мы вычисляем по схеме $(A^B)^K \times B \to A^K$. В случае Qa, где Q — интенсиональный предикат, мы будем иметь: $(2^{(U^K)})^K \times U^K \to 2^K$. Интенсионал сложного выражения вычисляется по интенсионалам составляющих. Каким же образом вычисляется экстенсионал сложного выражения (с интенсиональным предикатным знаком)? Мы вычисляем его по экстенсионалу главного знака и интенсионалу аргументного знака: $2^{(U^K)} \times U^K \to 2$. В этом специфика интенсиональных предикатов (прямое и косвенное употребление у Фреге) — экстенсионал сложного выражения уже не является функцией экстенсионалов составляющих. У Д. Скотта еще более сложный подход, поскольку помимо области возможных объектов он допускает область виртуальных объектов $V (U \subseteq V)$. Индивидный концепт есть функция, отображающая K в V, соответственно интерпретируются и интенсиональные предикатные знаки. Квантификация осуществляется по возможным объектам.

Мы все время говорили о возможных мирах. Идея возможных миров в современной семантике обобщена. Первоначально в работах С. Кангера, Я. Хинтикки, в первой работе С. Крипке (см. в [15]) под возможными мирами имелись в виду множества функций приписывания (моделей в терминологии С. Крипке) с отношением на них. Но в работе 1963 года С. Крипке (см. [15]) уже не отождествляет возможный мир с функцией приписывания; он понимает его более абстрактно. В дальнейшем этот подход был еще более обобщен. У Д. Скотта вместо возможных миров фигурируют точки соотнесения, у Р. Монтегю —

ситуации использования. Причем точки соотнесения могут истолковываться как семантически, так и прагматически. Истинность предложения зависит от целого ряда факторов — времени, лица, высказывающего предложение, места и т. д. Эти факторы мы можем подразделить на относящиеся к объективным условиям и факторы субъективного прагматического характера. Факторы, характеризующие точку соотнесения, целесообразно разбить на относящиеся к собственно семантическим аспектам и к прагматическим, к ситуациям использования. Учет различных ситуаций использования реализует глубокую философскую идею конкретности истины. Учет фактора времени позволяет учесть и рост знания, изменение знания.

Настоящий сборник статей, переводы которых предлагаются советскому читателю, не может, конечно, заменить собой учебника, но специалистам он дает обширный материал для творческого обсуждения и дальнейшей разработки проблем семантики модальных и интенсиональных логик.

В. А. Смирнов

ЛИТЕРАТУРА

1. Войшвилло Е. К. Семантическая информация. Понятия экстенсиональной и интенсиональной информации. Кибернетика и современное научное познание. М., 1976.
2. Карнап Р. Значение и необходимость (исследование по семантике и модальной логике). М., 1959.
3. Логическая семантика и модальная логика. М., 1967.
4. Логический вывод. М., 1979.
5. Максимова Л. Л. Семантика и теоремы отделения для логических исчислений E и R. — „Алгебра и логика". М., 1974.
6. Методы логического анализа. М., 1977.
7. Модальная и интенсиональная логика (Материалы совещания). М., 1978.
8. Орлов И. Е. Исчисление совместности предложений. — „Математический сборник", т. 34, 1928.
9. Серебрянников О. Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. М., 1970.
10. Слинин Я. А. Современная модальная логика. Л., 1976.
11. Смирнов В. А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.
12. Смирнова Е. Д. и Таванец П. В. Семантика в логике. В [3].
13. Сокулер З. А. Проблема квантификации в модальной логике. В [6].

14. Теория логического вывода (Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума). М., 1974.
15. Фейс Р. Модальная логика. М., 1974.
16. Черч. А. Введение в математическую логику. М., 1960.
17. Ackerman W. Begründung einer strengen Implication. "The journal of symbolic Logic". Vol. 23, 1956.
18. Church A. The Weak theory of implication. Kontrolliztes Denken. Munich, 1951.
19. Gabbay D. M. Investigations in modal and tense logics with applications to problems in philosophy and linguistics (Synthese library, vol. 92). Dordrecht—Boston, 1976.
20. Hughes G. E., Cresswell M. I. An Introduction to modal logic. London, 1968.
21. Lewis C. I. Implication and algebra of Logic. Mind, N.S. 21, 1912.
22. Lewis C. I. A survey of Symbolic logic. Berkeley, 1918.
23. Lewis C. I. and Langford S. M. Symbolic logic. Dover, 1932.
24. McKinsey J. C., Tarski A. Some Theorems about the sententional calculi of Lewis and Heyting. Journal of Symbolic logic, vol. 13, 1948.
25. Zeman J. J. Modal logic. The Lewis-modal systems. Oxford, 1973.

С. А. Крипке

СЕМАНТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ *

В этой статье излагаются некоторые характерные особенности семантической теории модальных логик [1]. Для квантификационного расширения S5 эта теория была представлена в [1] и в сжатом виде изложена в [2]. Данная статья имеет дело с одним аспектом этой теории, который связан с введением кванторов, и ограничивается в основном одним методом. Основное внимание в статье уделяется чисто семантическим вопросам, поэтому здесь не используются семантические таблицы, которые важны для полного представления обсуждаемой теории. (Об этих таблицах см. [1] и [11]). Доказательства также в значительной степени будут опускаться.

Мы рассматриваем четыре модальных системы. Формулы A, B, C, ... построены из атомарных формул P, Q, R, ... с помощью связок $\wedge$, $\sim$ и $\Box$. Система M состоит из следующих аксиомных схем и правил:

A1. $\Box A \supset A$,

A2. $\Box (A \supset B) \supset . \Box A \supset \Box B$,

R1. $A, A \supset B / B$,

R2. $A / \Box A$.

---

* Kripke Saul A. Semantical Considerations on Modal Logic.— "Acta Philosophica Fennica", Fasc. XVI, 1963, p. 83—94.

[1] Изложенная здесь теория имеет точки соприкосновения с работами многих авторов; см. о них в [11] и в работе Хинтикки [6]. По-видимому, ближе всех к настоящей теории подошли Хинтикка и Кангер. Однако, насколько мне известно, настоящая трактовка квантификации является единственной в своем роде, хотя она и была стимулирована знакомством с совершенно отличными методами Прайора и Хинтикки.

Если добавить к ним следующую схему аксиом, то получим систему S4:

$$\Box A \supset \Box\Box A.$$

Мы получим *Брауэрову* систему, если добавим к M

$$A \supset \Box\Diamond A,$$

и S5, если добавляем

$$\Diamond A \supset \Box\Diamond A.$$

Модальные системы, теоремы которых замкнуты по правилам R1 и R2 и включают все теоремы системы M, называются „нормальными". Хотя нами развита теория, применимая к таким ненормальным системам, как S2 и S3 Льюиса, здесь мы ограничиваемся рассмотрением нормальных систем.

Для формулировки семантики модальной логики мы вводим понятие (нормальной) *модельной структуры*. Модельная структура (м. с.) есть упорядоченная тройка элементов (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$), в которой **K** есть некоторое множество, $\boldsymbol{R}$ — рефлексивное отношение на **K** и $\mathbf{G} \in \mathbf{K}$. Интуитивно это можно понимать следующим образом: **K** есть множество всех „возможных миров", **G** представляет „реальный мир". Если $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ являются двумя мирами, то $\mathbf{H}_1\boldsymbol{R}\mathbf{H}_2$ интуитивно означает, что $\mathbf{H}_2$ „возможен относительно" $\mathbf{H}_1$, то есть что каждое суждение, *истинное* в $\mathbf{H}_2$, возможно в $\mathbf{H}_1$. При этом становится ясно, что отношение $\boldsymbol{R}$ должно быть рефлексивным; каждый мир **H** возможен относительно самого себя, так как каждое суждение, *истинное* в **H**, a fortiori *возможно* в **H**. Таким образом, требование рефлексивности для $\boldsymbol{R}$ является интуитивно-естественным. Мы можем наложить на $\boldsymbol{R}$ дополнительные требования, соответствующие различным „аксиомам редукции" модальной логики: если $\boldsymbol{R}$ транзитивно, мы называем (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$) S4-м. с.; если $\boldsymbol{R}$ симметрично, (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$) является *Брауэровой* м. с.; если $\boldsymbol{R}$ является отношением эквивалентности, мы называем (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$) S5-м. с. Модельная структура, не содержащая дополнительных ограничений, называется *M-модельной структурой*.

Для полноты картины нам нужно понятие *модели*. Если дана некоторая модельная структура (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$), то *модель* приписывает каждой атомарной формуле (пропозициональной переменной) P истинностное значение **T** или **F**

в каждом мире $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$. Говоря формально, *модель* φ на м. с. (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$) есть бинарная функция $\varphi(P, \mathbf{H})$, где P пробегает по атомарным формулам, **H** — по элементам **K**, а областью значений этой функции является множество $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Если дана модель, то приписывание истинностных значений не-атомарным формулам мы можем определить индуктивно. Допустим, что $\varphi(A, \mathbf{H})$ и $\varphi(B, \mathbf{H})$ уже определены для всякого $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$. Тогда если $\varphi(A, \mathbf{H}) = \varphi(B, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$, то $\varphi(A \wedge B, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$; в противном случае $\varphi(A \wedge B, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. $\varphi(\sim A, \mathbf{H})$ есть **F**, если и только если $\varphi(A, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$; в противном случае $\varphi(\sim A, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$. И наконец, $\varphi(\Box A, \mathbf{H}) = \mathbf{T}$, если и только если $\varphi(A, \mathbf{H}') = \mathbf{T}$ для каждого $\mathbf{H}' \in \mathbf{K}$, такого, что $\mathbf{H}\boldsymbol{R}\mathbf{H}'$; в противном случае $\varphi(\Box A, \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. Интуитивно последнее означает, что A необходима в **H**, если и только если A истинна во всех мирах $\mathbf{H}'$, возможных относительно **H**.

Теорема полноты. $\vdash A$ в M (S4, S5, *Брауэровой* системе), если и только если $\varphi(A, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$ для каждой модели φ на M-(S4-, S5-, *Брауэровой*) модельной структуре (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$).

(Доказательство см. в [11].)

Эта теорема полноты уравнивает синтаксическое понятие *доказуемости* в модальной системе с семантическим понятием *общезначимости*.

За исключением некоторых заключительных замечаний, основная часть статьи относится к введению кванторов. Для того чтобы сделать это, мы должны ассоциировать с каждым миром некоторую область индивидов — индивидов, которые существуют в этом мире. Формально говоря, мы определяем *квантификационную модельную структуру* (к. м. с.) как модельную структуру (**G**, **K**, $\boldsymbol{R}$) вместе с функцией ψ, приписывающей каждому $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$ некоторое множество $\psi(\mathbf{H})$, называемое *областью* **H**. Интуитивно $\psi(\mathbf{H})$ есть множество всех индивидов, существующих в **H**. Следует заметить, между прочим, что $\psi(\mathbf{H})$ не обязательно должно быть одним и тем же множеством для различных **H**, ибо интуитивно ясно, что в мирах, отличных от реального мира, некоторые актуально существующие индивиды могут отсутствовать, в то время как могут появляться новые индивиды, подобные, например, Пегасу.

К символам модальной логики мы можем добавить бесконечный список индивидных переменных $x, y, z, \ldots$, и для каждого положительного числа n список n-арных предикатных букв P^n, Q^n, ... причем индексы часто будут понятны из контекста. Пропозициональные переменные (атомарные формулы) мы считаем „0-местными“ предикатными буквами. Определив затем правильно построенные формулы обычным образом, мы готовы перейти к определению квантификационной *модели*.

Для определения квантификационной модели мы должны расширить первоначальное понятие, которое приписывало истинностные значения каждой атомарной формуле в каждом мире. Аналогично этому мы должны предположить, что в каждом мире данная n-арная предикатная буква детерминирует определенное множество упорядоченных n-ок — ее *экстенсионал* в этом мире. Рассмотрим, например, случай с одноместной предикатной буквой $P(x)$. Мы могли бы сказать, что в мире $\mathbf{H}$ предикат $P(x)$ истинен для некоторых индивидов из $\psi(\mathbf{H})$ и ложен для других; формально мы могли бы сказать, что относительно одних приписываний элементов из $\psi(\mathbf{H})$ переменной x $\varphi(P(x), \mathbf{H}) = \mathbf{T}$, а относительно других — $\varphi(P(x), \mathbf{H}) = \mathbf{F}$. Множество всех индивидов, для которых P истинно, называется *экстенсионалом* P в $\mathbf{H}$. Но здесь имеется проблема: можно ли $\varphi(P(x), \mathbf{H})$ придать истинностное значение, когда переменной x приписано значение из области некоторого *другого* мира $\mathbf{H}'$, а не из области $\mathbf{H}$? Допустим, $P(x)$ означает „x лыс“ — должны ли мы приписать истинностное значение такому, например, подстановочному примеру, как „Шерлок Холмс лыс“? Холмс не существует, но при другом положении дел он мог бы существовать. Должны ли мы приписать определенное истинностное значение утверждению о том, что он лыс, или нет? Фреге [3] и Строусон [4] не приписали бы этому утверждению истинностного значения; Рассел [5] сделал бы это [1]. В связи с целями модальной логики мы считаем, что различные ответы на этот вопрос представляют альтернативные *соглашения*. Все они логичны. В известных мне обсуждениях этой проблемы — в работах Хинтикки [6] и Прайора [7] — принимается точка зрения Фреге — Строусона. Эта точка зрения неизбежно приводит к некоторой модификации обычной модальной логики. Причина состоит в том, что заданная нами семантика для модальной логики предполагает, что каждая формула принимает определенное истинностное значение в каждом мире; позиция же Фреге — Строусона требует не придавать истинностного значения формуле $A(x)$, содержащей свободную переменную x, в мире H, если переменной x приписывается индивид, не принадлежащий к области этого мира. Таким образом, мы больше не можем надеяться на то, что первоначальные законы модальной пропозициональной логики останутся справедливыми для утверждений, содержащих свободные переменные, и сталкиваемся с выбором: либо изменить модальную пропозициональную логику, либо ограничить правило подстановки. Прайор делает первое, Хинтикка — второе. Существуют и дальнейшие альтернативы, связанные с выбором позиции Фреге — Строусона: должны ли мы понимать $\Box A$ как означающее (в $\mathbf{H}$), что A *истинна* во всех возможных мирах (относительно $\mathbf{H}$), или она должна быть только *не ложна* в любом таком мире? С точки зрения второй альтернативы A должна быть либо истинна, либо вообще не иметь истинностного значения в каждом мире. В своей системе Q Прайор принимает, в сущности, оба типа необходимости, обозначая один как „L“, а другой — как „NMN“. Аналогичный вопрос встает для конъюнкции: если A ложно, а B не имеет истинностного значения, должны ли мы считать $A \wedge B$ ложным или не имеющим истинностного значения?

¹ Однако Рассел заключил бы, что „Шерлок Холмс“ не является настоящим именем, а Фреге устранил бы его как пустое имя.

В полной формулировке семантической теории мы должны были бы исследовать все эти варианты точки зрения Фреге — Строусона. Однако здесь мы примем другое решение и допустим, что утверждение, содержащее свободные переменные, имеет истинностное значение в каждом мире для каждого приписывания его свободным переменным [1]. Формально дело обстоит следующим образом. Пусть $\mathbf{U} = \bigcup_{\mathbf{H} \in \mathbf{K}} \psi(\mathbf{H})$. $\mathbf{U}^n$ является n-кратным декартовым произведением $\mathbf{U}$ с самим собой. Квантификационную *модель*

¹ Естественно предположить, что *атомарный* предикат должен быть *ложным* в мире $\mathbf{H}$ для всех тех индивидов, которые не существуют в этом мире, то есть что экстенсионал предикатной буквы должен состоять из актуально существующих индивидов. Мы можем осуществить это посредством семантического требования того, чтобы $\varphi(P^n, \mathbf{H})$ было подмножеством $[\psi(\mathbf{H})]^n$; в других отношениях семантическая трактовка, предлагаемая ниже, осталась бы без изменений. К системе аксиом нужно было бы лишь добавить все замыкания формул вида $P^n(x_1, \ldots, x_n) \wedge (y) A(y) . \supset . A(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Мы не

на к. м. с. $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ мы определяем как бинарную функцию $\varphi(P^n, \mathbf{H})$, в которой для произвольного n первая переменная пробегает по n-арным предикатным буквам, а $\mathbf{H}$ — по элементам $\mathbf{K}$. Если $n=0$, $\varphi(P^n\mathbf{H})=\mathrm{T}$ или $\mathbf{F}$; если $n \geqslant 1$, то $\varphi(P^n\mathbf{H})$ есть подмножество U^n. Теперь для каждой формулы A и $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$ мы индуктивно определяем истинностное значение $\varphi(A, \mathbf{H})$ относительно данного приписывания элементов U свободным переменным A. Случай с пропозициональными переменными очевиден. Для атомарной формулы $P^n(x_1, \ldots, x_n)$, в которой P^n является n-арной предикатной буквой и $n \geqslant 1$, и для данного приписывания элементов $a_1, \ldots, a_n$ из U переменным $x_1, \ldots, x_n$ мы устанавливаем, что $\varphi(P^n(x_1, \ldots, x_n), \mathbf{H})=\mathbf{T}$, если n-ка $(a_1, \ldots, a_n)$ является членом $\varphi(P^n, \mathbf{H})$; в противном случае $\varphi(P^n(x_1, \ldots, x_n), \mathbf{H})=\mathbf{F}$ относительно данного приписывания. Если атомарным формулам эти приписывания даны, то приписывания сложным формулам мы можем установить индуктивно. Для пропозициональных связок $\wedge$, $\sim$, $\square$ индукционные шаги уже были даны. Допустим, что мы имеем дело с формулой $A(x, y_1, \ldots, y_n)$, в которой x и y_i являются единственными свободными переменными, и истинное значение $\varphi(A(x, y_1, \ldots, y_n), \mathbf{H})$ уже было определено для каждого приписывания свободным переменным формулы $A(x, y_1, \ldots, y_n)$. Тогда мы устанавливаем, что $\varphi((x)A(x, y_1, \ldots, y_n), \mathbf{H})=\mathbf{T}$ относительно некоторого приписывания $b_1, \ldots, b_n$ переменным $y_1, \ldots, y_n$ (причем b_i является элементом $\mathbf{U}$), если $\varphi(A)$ x, $y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{H})=\mathbf{T}$ для каждого приписывания $a, b_1, \ldots, b_n$ $y_1, \ldots, y_n)$, переменным $x, y_1, \ldots, y_n$ соответственно, причем $a \in \psi(H)$; в противном случае $\varphi((x)A(x, y_1, \ldots, y_n)), \mathbf{H})=\mathbf{F}$ относительно данного приписывания. Заметим, что ограничение $a \in \psi(\mathbf{H})$ означает, что в $\mathbf{H}$ мы квантифицируем только по объектам, актуально существующим в $\mathbf{H}$.

Для иллюстрации этой семантики мы предлагаем контрпримеры двух известных утверждений, предложенных в качестве законов модальной теории квантификации,— „формулы Баркан“ $(x)\square A(x) \supset \square(x)A(x)$ и ее конверсии $\square(x)A(x) \supset (x)\square A(x)$. Для каждой из них мы рассматриваем модельную структуру $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$, в которой $\mathbf{K}= =\{\mathbf{G}, \mathbf{H}\}$, $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$, а $\mathbf{R}$ есть просто декартово произведение $\mathbf{K}^2$. Ясно, что $\mathbf{R}$ является рефлексивным, транзитивным и симметричным отношением, поэтому наши рассуждения применимы даже к S5.

Для „формулы Баркан“ мы расширяем $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ до квантификационной модельной структуры, определяя $\psi(\mathbf{G})=\{a\}$, $\psi(\mathbf{H})=\{a, b\}$, где a и b различны. Затем для одноместной предикатной буквы P мы определяем модель φ, в которой $\varphi(P, \mathbf{G})=\{a\}$, $\varphi(P, \mathbf{H})=\{a\}$. Тогда очевидно, что $\square P(x)$ истинно в $\mathbf{G}$, если x приписан a; и поскольку a является единственным объектом в области $\mathbf{G}$, постольку $(x)\square P(x)$ также истинно в $\mathbf{G}$. Но $(x)P(x)$, очевидно, ложно в $\mathbf{H}$ (так как $\varphi(P(x), \mathbf{H})=\mathbf{F}$, когда x приписан b), и, следовательно, $\square(x)P(x)$ ложно в $\mathbf{G}$. Так мы получаем контрпример для формулы Баркан. Заметим, что этот контрпример совершенно не зависит от того, приписывается ли $P(x)$ истинностное значение в $\mathbf{G}$, когда x приписан b, или нет, поэтому он справедлив также и для систем Прайора и Хинтикки. Такие примеры можно запретить и реабилитировать формулу Баркан только в том случае, если мы потребуем, чтобы модельная структура удовлетворяла условию: $\psi(\mathbf{H}') \subseteq \psi(\mathbf{H})$, если $\mathbf{H}R\mathbf{H}'$ $(\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in \mathbf{K})$.

Для конверсии формулы Баркан устанавливаем $\psi(\mathbf{G})= =\{a, b\}$, $\psi(\mathbf{H})=\{a\}$, причем снова $a \neq b$. Задаем $\varphi(P, \mathbf{G})= =\{a, b\}$, $\varphi(P, \mathbf{H})=\{a\}$ для данной одноместной предикатной буквы P. Тогда ясно, что $(x)P(x)$ справедливо и в $\mathbf{G}$, и в $\mathbf{H}$, так что $\varphi(\square(x)P(x), \mathbf{G})=\mathbf{T}$. Но $\varphi(P(x), \mathbf{H})=\mathbf{F}$, когда переменной x приписан b, так что $\varphi(\square P(x), \mathbf{G})=\mathbf{F}$. Следовательно, $\varphi((x)\square P(x), \mathbf{G})=\mathbf{F}$, и мы получили искомый контрпример для конверсии формулы Баркан. Однако этот контрпример зависит от соглашения о том, что $P(x)$ в $\mathbf{H}$ *ложно*, когда x приписан b; таким образом, этот контрпример может быть устранен, если принять, что для данного приписывания $P(x)$ не имеет истинностного значения в $\mathbf{H}$. В этом случае мы все-таки еще будем иметь контрпример, если потребуем, чтобы необходимое утверждение было истинно во всех возможных мирах („L“ Прайора), а не только того, чтобы оно никогда не было ложным („NMN“ Прайора). При нашем настоящем соглашении мы можем устранить этот контрпример только за счет того требования, чтобы $\psi(\mathbf{H}) \subseteq \psi(\mathbf{H}')$, если $\mathbf{H}R\mathbf{H}'$.

Эти контрпримеры порождают специфическую трудность: в квантифицированной S5 мы задали контрмодели

выбрали этот путь потому, что при этом нарушается правило подстановки; теоремы сохранились бы для атомарных формул, но они не были бы справедливы при замене атомарных формул произвольными формулами. (Это ответ на вопрос Патнема и Кальмара.)

и для формулы Баркан, и для ее конверсии. По-видимому, еще Прайор показал в [8], что формула Баркан выводима в квантифицированной S5, а ее конверсия кажется выводимой даже в квантифицированной M посредством следующего рассуждения:

(A) $(x)\,A(x) \supset A(y)$ (согласно теории квантификации),

(B) $\Box((x)\,A(x) \supset A(y))$ (навешивание знака необходимости),

(C) $\Box((x)\,A(x) \supset A(y)) \supset . \Box(x)\,A(x) \supset \Box A(y)$ (аксиома A2),

(D) $\Box(x)\,A(x) \supset \Box A(y)$ (из (B) и (C)),

(E) $(y)(\Box(x)\,A(x) \supset \Box A(y))$ (обобщение (D)),

(F) $\Box(x)\,A(x) \supset (y)\,\Box A(y)$ (по теории квантификации и (E)).

Мы, кажется, получили заключение, используя принципы, которые все должны быть значимы в теории моделей. На самом же деле здесь имеется слабое место при навешивании необходимости на (A). В формулах, подобных (A), мы придаем свободным переменным интерпретацию всеобщности[1]: при утверждении (A) в качестве теоремы подразумевается обычное универсальное замыкание этого утверждения:

$$(A')\quad (y)((x)\,A(x) \supset A(y)).$$

Теперь если мы применим правило навешивания необходимости к (A'), то получим:

$$(B')\quad \Box(y)((x)\,A(x) \supset A(y)).$$

С другой стороны, само (B) интерпретируется как утверждающее:

$$(B'')\ (y)\,\Box((x)\,A(x) \supset A(y)).$$

[1] Это не значит, что интерпретация всеобщности теорем, содержащих свободные переменные, является единственно возможной. Можно считать формулу A доказуемой, если и только если для каждой модели φ, $\varphi(A, G) = T$ для каждого приписывания свободным переменным A. Но тогда формула $(x)\,A(x) \supset A(y)$ не будет теоремой; в самом деле, в описанной выше контрмодели для формулы Баркан $\varphi((x)\,P(x) \supset P(y), G) = F$, если y приписан b. Таким образом, теория квантификации была бы изменена в направлениях, указанных в [9] и [10]. Эту процедуру вполне можно рекомендовать, но мы не используем ее, так как хотим показать, что трудности можно преодолеть, не изменяя теории квантификации или модальной пропозициональной логики.

Для выведения (B'') из (B') нам нужен закон вида $\Box(y)\,C(y) \supset (y)\,\Box C(y)$, представляющий собой как раз конверсию формулы Баркан, которую мы пытаемся доказать. В самом деле, легко проверить, что (B'') проваливается в контрмодели, данной выше для конверсии формулы Баркан, если заменить $A(x)$ на $P(x)$.

Такого рода трудностей мы можем избежать, если — следуя работе Куайна [15] — сформулируем теорию квантификации так, чтобы утверждать можно было только *замкнутые* формулы. Утверждение формул, содержащих свободные переменные, объясняется в лучшем случае удобством; утверждение $A(x)$ со свободным x всегда можно заменить утверждением $(x)\,A(x)$.

Если A является формулой, содержащей свободные переменные, мы определяем *замыкание* A как любую формулу без свободных переменных, полученную посредством приписывания к A универсальных кванторов и знаков необходимости в любом порядке. В этом случае аксиомы квантифицированной M мы определяем как замыкания следующих схем:

(0) истинностно-функциональных тавтологий,

(1) $\Box A \supset A$,

(2) $\Box(A \supset B). \supset . \Box A \supset \Box B$,

(3) $A \supset (x)\,A$, причем x не входит свободно в A.

(4) $(x)(A \supset B). \supset . (x)\,A \supset (x)\,B$,

(5) $(y)((x)\,A(x) \supset A(y))$.

Правилом вывода является правило отделения для материальной импликации. Правило навешивания знака необходимости может быть получено в качестве производного.

Для получения квантификационных расширений S4, S5 и *Брауэровой* системы нужно просто добавить к этим схемам аксиом замыкания соответствующих редукционных аксиом.

Полученные нами системы обладают следующими свойствами: они представляют собой непосредственные расширения модальных пропозициональных логик без модификаций Q Прайора; правило подстановки справедливо без ограничений в отличие от изложения Хинтикки; и тем не менее ни формула Баркан, ни ее конверсия не выводимы. Кроме того, все законы теории квантификации — модифицированные для допущения пустой области — справедливы. Семантическая теорема полноты, данная нами для модальной пропозициональной логики, может быть расширена на новые системы.

В настоящей системе мы можем — при желании — ввести *существование как предикат*. С семантической точки зрения существование является одноместным предикатом $E(x)$, удовлетворяющим — для каждой модели φ на м.с. $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \boldsymbol{R})$ — равенству $\varphi(E, \mathbf{H}) = \varphi(\mathbf{H})$ для всякого $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$. Аксиоматически мы можем ввести его, постулировав замыкания формул вида: $(x) A(x) \wedge E(y). \supset. A(y)$ и $(x) E(x)$. Предикат P, использованный выше в контрпримере для конверсии формулы Баркан, теперь можно истолковать просто как существование. Этот факт показывает, в какой степени существование отличается от тавтологичного предиката $A(x) \vee \sim A(x)$ даже в том случае, если доказуемо $\Box\ (x) E(x)$. Ибо, хотя формула $(x) \Box\ (A(x) \vee \sim A(x))$ значима, формула $(x) \Box\ E(x)$ не будет таковой; хотя и необходимо, что каждая вещь существует, но отсюда не следует, что каждая вещь существует с необходимостью.

Семантически мы можем ввести в теорию моделей тождество, определив, что $x = y$ истинно в мире $\mathbf{H}$, когда x и y приписано одно и то же значение, и ложно в противном случае; существование могло бы тогда быть определено в терминах тождества с помощью соглашения о том, что $E(x)$ означает $(\exists y)(x = y)$. В силу оснований, не изложенных здесь, более общая теория тождества может быть получена путем усложнения понятия квантификационной модельной структуры.

В заключение мы выскажем несколько кратких замечаний о „доказуемостной" интерпретации модальной логики, которую мы дали только для пропозиционального исчисления. В отношении основного содержания этой статьи читатель ничего не потеряет, если опустит эту часть. Обсуждаемая интерпретация опирается на решение добавлять оператор необходимости к формальным системам, скажем к арифметике Пеано, таким образом, что для любой формулы A этой системы $\Box\ A$ будет интерпретироваться как истинное, если и только если A доказуема в этой системе. Обсуждалось, можно ли использовать вместо таких „доказуемостных" интерпретаций модального оператора *предикат* доказуемости, отнесенный к геделевскому номеру формулы A; но статья профессора

Монтегю, помещенная в данном томе [1], порождает некоторые сомнения на этот счет.

Рассмотрим формальную систему **PA** арифметики Пеано в том виде, как она формализована в работе Клини [12]. К правилам образования мы присоединяем операторы $\wedge$, $\sim$ и $\Box$ (добавляемые конъюнкция и отрицание должны быть отличны от конъюнкции и отрицания исходной системы), применяемые только к замкнутым формулам. В данной выше теории моделей мы рассматривали в качестве атомарных формул пропозициональные переменные или предикатные буквы, за которыми следовали индивидные переменные, взятые в скобки; здесь мы считаем атомарными формулами просто замкнутые, правильно построенные формулы **PA** (а *не* атомарные формулы **PA**). В модельной структуре $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \boldsymbol{R})$ $\mathbf{K}$ является множеством всех различных (не изоморфных) счетных моделей **PA**, $\mathbf{G}$ есть стандартная модель в натуральных числах и $\boldsymbol{R}$ — декартово произведение $\mathbf{K}^2$. Модель φ мы определяем посредством того условия, что для любой атомарной формулы P и $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$ $\varphi(P, \mathbf{H}) = \mathbf{T}\ (\mathbf{F})$, если и только если P истинна (ложна) в модели $\mathbf{H}$. (Напомним, что P есть ппф **PA**, а $\mathbf{H}$ является счетной моделью **PA**.) Затем мы строим оценку сложных формул, как и раньше [2]. Сказать, что A истинна, значит сказать, что она истинна в реальном мире $\mathbf{G}$; и для любой атомарной формулы P $\varphi(\Box\ P, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$, если и только если P доказуема в **PA**. (Заметим, что $\varphi(P, \mathbf{G}) = \mathbf{T}$, если и только если P истинна в интуитивном смысле.) Так как $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \boldsymbol{R})$ является S5-м.с., все законы S5 будут значимы при этой интерпретации, и мы можем показать,

[1] Имеется в виду статья: Montague R. Syntactical Treatments of Modality, with Corollaries on Reflection Principles and Finite Axiomatizability. — „Acta Philosophica Fennica", Fasc. XVI, 1963, p. 153—168. — *Прим. ред.*

[2] Могут возразить, что раз **PA** уже содержит символы для конъюнкции и отрицания, скажем & и $\neg$, то зачем мы добавляем новые символы — $\wedge$ и $\sim$? Ответ состоит в том, что если P и Q являются атомарными формулами, то $P \& Q$ будет *также* атомарной в настоящем смысле, так как она является правильно построенной формулой **PA**; но $P \wedge Q$ не будет атомарной формулой. Для того чтобы иметь возможность применить предыдущую теорию, в которой конъюнкция атомарных формул сама не является атомарной, нам нужен знак $\wedge$. Тем не менее для любого $\mathbf{H} \in \mathbf{K}$ и атомарных P и Q $\varphi(P \& Q, \mathbf{H}) = \varphi(P \wedge Q, \mathbf{H})$, так что смешение & с $\wedge$ практически безвредно. Аналогичные замечания верны для отрицания и для доказуемостной интерпретации S4, излагаемой ниже.

что вообще значимы *только* законы S5. (Например, если P есть неразрешимая в смысле Геделя формула, то $\varphi(\Box P \vee \Box \sim P,\ \mathbf{G}) = \mathbf{F}$, что является контрпримером для „закона" $\Box A \vee \Box \sim A$.)

Другой доказуемостной интерпретацией будет следующая: мы снова считаем атомарными формулами замкнутые ппф **PA** и новые формулы строим с помощью дополнительных связок $\wedge$, $\sim$ и $\Box$. Пусть **K** будет множеством всех упорядоченных пар $(\mathbf{E}, \alpha)$, где **E** является непротиворечивым расширением **PA**, а α есть (счетная) модель системы **E**. Пусть $\mathbf{G} = (\mathbf{PA}, \alpha_0)$, где α_0 есть стандартная модель **PA**. Мы говорим, что $(\mathbf{E}, \alpha)\ R\,(\mathbf{E}', \alpha')$, где $(\mathbf{E}, \alpha)$ и $(\mathbf{E}', \alpha')$ находятся в **K**, если и только если **E'** представляет собой расширение **E**. Для атомарной P определим, что $\varphi(P, (\mathbf{E}, \alpha)) = \mathbf{T}\,(\mathbf{F})$, если и только если P истинна (ложна) в α. Тогда для атомарной формулы P мы можем показать, что $\varphi(\Box P, (\mathbf{E}, \alpha)) = \mathbf{T}$, если и только если P доказуема в **E**; в частности, $\varphi(\Box P,\ \mathbf{G}) = \mathbf{T}$, если и только если P доказуема в **PA**. Так как $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, R)$ является S4-м.с., все законы S4 справедливы. Но не все законы S5 сохраняются; если P — неразрешимая в смысле Геделя формула, то $\varphi((\sim \Box P \supset \Box \sim \Box P),\ \mathbf{G}) = \mathbf{F}$. Однако значимы некоторые законы, которые не доказуемы в S4; в частности, для любого A мы можем доказать, что $\varphi(\Box \sim \Box(\Diamond A \wedge \Diamond \sim A),\ \mathbf{G}) = \mathbf{T}$, и отсюда получить теоремы системы S4.1 Мак-Кинси (см. [13]). С помощью подходящих изменений эта трудность может быть устранена, но мы не хотим здесь углубляться в этот вопрос.

Можно было бы сформулировать аналогичные интерпретации для M и *Брауэровой* системы, но, по мнению специалистов, они менее интересны, чем данные выше. Мы упомянем еще один класс доказуемостных интерпретаций — „рефлексивные" расширения **PA**. Пусть **E** будет формальной системой, содержащей **PA**, правильно построенные формулы которой образуются из замкнутых формул **PA** с помощью связок &, $\urcorner$, $\Box$. (Я говорю о & и $\urcorner$ для того, чтобы указать, что речь идет о той же самой конъюнкции и о том же отрицании, которые используются в самой **PA**, а не о новых знаках. См. примечание 2 на с. 37.) Тогда **E** называется рефлексивным расширением **PA**, если и только если: (1) это есть несущественное расширение **PA**; (2) $\Box A$ доказуема в **E**, если и только если доказуема A; (3) существует оценка α, отображающая замкнутые формулы **E** в множество $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$, такая, что конъюнкция и отрицание удовлетворяют обычным таблицам истинности; все истинные замкнутые формулы **PA** получают значение **T**, $\alpha\ (\Box A) = \mathbf{T}$, если и только если A доказуема в **E**, и все теоремы **E** получают значение **T**. Можно показать, что существуют рефлексивные расширения **PA**, содержащие аксиомы S4 или даже S4.1, но не содержащие S5.

И наконец, мы замечаем, что, используя обычное отображение интуиционистской логики в S4, можно получить теорию моделей для интуиционистского исчисления предикатов. Здесь мы не будем формулировать этой теории, а лишь укажем — только для пропозиционального исчисления — полезную частную интерпретацию интуиционистской логики, которая вытекает из теории моделей. Пусть **E** будет любым непротиворечивым расширением **PA**. Мы говорим, что некоторая формула P системы **PA** *верифицирована* в **E**, если и только если она доказуема в **E**. Замкнутые ппф P системы **PA** мы рассматриваем как атомарные формулы и строим из них сложные формулы с помощью интуиционистских связок $\wedge$, $\vee$, $\urcorner$ и $\supset$. После этого индуктивно устанавливаем: $A \wedge B$ верифицирована в **E**, если и только если верифицированы A и B; $A \vee B$ верифицирована в **E**, если и только если верифицирована формула A или B; $\urcorner A$ верифицирована в **E**, если и только если не существует непротиворечивого расширения **E**, верифицирующего формулу A; $A \supset B$ верифицирована в **E**, если и только если каждое непротиворечивое расширение **E** до **E'**, верифицирующее A, верифицирует также и B.

Тогда каждый подстановочный пример законов интуиционистской логики верифицируется в **PA**; но, например, $A \vee \urcorner A$ не верифицируется, если A — формула, неразрешимая в геделевском смысле. В дальнейшем мы расширим эту интерпретацию и покажем, что с ее помощью мы можем найти интерпретацию для системы **FC** абсолютно свободно становящихся последовательностей Крайзеля (см. [14]). Между прочим, ясно, что в интерпретациях S4 и S5, опирающихся на понятие доказательства, **PA** может быть заменена любой истинностно-функциональной системой (то есть любой системой, модели которой детерминируют, что каждая замкнутая формула является истинной или ложной); в то же время интерпретация интуиционизма применима к любой формальной системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kripke S. A. A completeness theorem in modal logic. — „The Journal of Symbolic Logic", vol. 24, 1959, p. 1—15.
2. Kripke S. A. Semantical analysis of modal logic (abstract). — „The Journal of Symbolic Logic", vol. 24, 1959, p. 323—324.
3. Frege G. Über Sinn und Beteutung. — „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", vol. 100, 1892, p. 25—50.
4. Strawson P. F. On referring. — „Mind", n.s., vol. 59, 1950 p. 320—344.
5. Russell B. On denoting. — „Mind", n.s., vol. 14, 1905, p. 479—493.
6. Hintikka J. Modality and quantification. — „Theoria" (Lund), vol. 27, 1961, p. 119—128.
7. Prior A. N. Time and modality. Clarendon Press. Oxford, 1957.
8. Prior A. N. Modality and quantification in S5. — „The Journal of Symbolic Logic", vol. 21, 1956, p. 60—62.
9. Hintikka J. Existential presuppositions and existential commitments. — „The Journal of Philosophy", vol. 56, 1959, p. 125—137
10. Leblanc H. and Hailperin T. Nondesignating singular terms. — „Philosophical Review", vol. 68, 1959, p. 239—243.
11. Kripke S. A. Semantical analysis of modal logic I. — „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" vol 9, 1963, p. 67—96.
12. Kleene S. C. Introduction to metamathematics. D. Van Nostrand, New York, 1952.
13. McKinsey J.C.C. On the syntactical construction of systems of modal logic. — „The Journal of Symbolic Logic". vol. 10 1945, d. 83—94.
14. Kreisel G. A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs. — „The Journal of Symbolic Logic", vol 23, 1958, p. 369—388.
15. Quine W. Van O. Mathematical logic. Harvard University Press. Cambridge, Mass., 1940; second ed., revised, 1951.

Я. Хинтикка

ВИДЫ МОДАЛЬНОСТИ*

Под видами модальности я подразумеваю здесь не те разнообразные способы исследования, которые господствовали или продолжают господствовать в изучении модальных логик, хотя иногда и буду комментировать эти способы[1]. Я говорю о тех видах или модификациях, которые дали имя модальной логике. Другими словами, я имею в виду разновидности систем модальной логики и те разнообразные философски интересные интерпретации, которые часто можно придать этим системам. Цель моей статьи состоит в том, чтобы предложить особый метод изучения самых разнообразных модальных систем, богатство которых, на мой взгляд, может ошеломить каждого. Боюсь, это богатство отразилось и на моей статье, ибо основная часть ее представляет собой скорее ряд набросков применения моих методов, а не последовательное их изложение.

---

* Hintikka J. The Modes of Modality. — Models for modalities. Dordrecht, Holland, 1969, p. 71—86.

[1] В работе [1] Г. Бергманн дал интересную критику более ранних трактовок модальной логики. Я согласен с тем, что в период написания статьи Бергманна его основной тезис, что все прежние дедуктивные системы модальной логики не опирались на удовлетворительную семантическую (или, если хотите, комбинаторную) характеристику общезначимости (логической истины), был верен. Однако мне кажется, что в настоящее время ситуация в этом отношении радикально изменилась. Я убежден, что в статьях С. Кангера [14— 17], С. Крипке [18, 22], Р. Монтегю и Д. Калиша [23, 24], а также в моих статьях и статьях некоторых других авторов мы находим тот вид обоснования модальной логики, об отсутствии которого говорил Бергманн.

Эти методы были изложены в моей статье [12]. Здесь я начну с напоминания их существенных черт. Они опираются на понятие *модельного множества* (м.м.). Модельное множество является множеством формул — скажем, μ, — удовлетворяющим следующим условиям:

(С. $\sim$) Если μ содержит некоторую атомарную формулу или некоторое тождество, то оно не содержит их отрицания.

(С. &) Если $(p\&q)\in\mu$, то $p\in\mu$ и $q\in\mu$.

(С. $\vee$) Если $(p\vee q)\in\mu$, то $p\in\mu$ или $q\in\mu$.

(С. Е) Если $(Ex)\,p\in\mu$, то $p\,(a/x)\in\mu$ по крайней мере для одного свободного индивидного символа a. (Здесь $p\,(a/x)$ представляет собой результат замены x на a повсюду в p.)

(С.U) Если $(Ux)\,p\in\mu$ и если b является свободным индивидным символом, который встречается по крайней мере в одной формуле из μ, то $p\,(b/x)\in\mu$.

(С. $\neq$) μ не содержит ни одной формулы вида $\sim(a=a)$.

(С. $=$) Если $p\in\mu$, $(a=b)\in\mu$ и если q отличается от p только взаимной заменой a и b в некоторых (или всех) вхождениях, то $q\in\mu$ при условии, что p и q являются атомарными формулами или тождествами.

В дополнение к этим условиям нам нужны либо соответствующие условия для отрицаемых формул, либо некоторый способ сведения отрицаемых (не-атомарных) формул к неотрицаемым. И то и другое нетрудно сделать.

Если, помимо пропозициональных связок, кванторов и равенства, у нас нет других логических констант, то некоторое м.м. можно представлять как частичное описание возможного состояния дел или возможного хода событий („возможного мира"). Будучи частичными, эти описания тем не менее вполне достаточны для того, чтобы показать, что описываемые ими состояния дел действительно возможны: в теории квантификации *выполнимость* некоторого множества формул равнозначна его включаемости в некоторое м.м., что я показал в [7, 8].

Этот подход можно распространить на модальную логику благодаря использованию определенных сочетаний модельных множеств, называемых *модельными системами*. Модельная система есть множество м.м., на котором определено некоторое двухместное отношение. Это отношение будет называться отношением альтернативности, а множества, находящиеся в этом отношении к некоторому данному множеству μ, будут называться *альтернативами* μ. Интуитивно они являются частичными описаниями тех положений дел, которые могли бы быть реализованы вместо положения дел, описываемого μ. Опираясь на эту идею, сразу же можно заметить, что каждая модельная система Ω и ее отношение альтернативности должны выполнять следующие условия[1].

(С.N.) Если $Np\in\mu\in\Omega$, то $p\in\mu$.

(С.М.*) Если $Mp\in\mu\in\Omega$, то в Ω существует по крайней мере одна альтернатива μ, содержащая p.

(С.N$^+$) Если $Np\in\mu\in\Omega$ и если ν является альтернативой μ в Ω, то $p\in\nu$.

Конечно, мы должны установить аналогичные условия также и для отрицаемых формул или свести их к неотрицаемым, но это сделать легко.

Содержание (С.М.*) и (С.N.*) соответственно можно выразить достаточно точно, сказав, что то, что возможно, должно быть истинно в некотором альтернативном мире, а то, что необходимо, должно быть истинно во всех альтернативных мирах. Мы получаем здесь, следовательно, несколько модифицированный вариант традиционной идеи, что возможность равнозначна истинности в некотором „возможном мире", в то время как необходимость равнозначна истинности во всех „возможных мирах". Если отвлечься от использования понятия модельного множества в качестве экспликации понятия описания возможного мира, наше единственное отклонение от традиционной идеи состоит в отрицании предположения, что все „возможные миры" равноправны. Мы считаем, что не каждый „возможный мир" (скажем, P) является реальной альтернативой данного „возможного мира" (скажем, Q) в том смысле, что P мог бы быть реализован вместо Q. Мы предполагаем, кроме того, что в расчет принимаются только подлинные альтернативы. Каждое утверждение считается принадлежащим некоторому „возможному миру", и в этом мире ничто не может быть названо возможным, кроме того, что могло бы быть истинным в некотором мире, который мог бы быть реализован вместо данного. Этим объясняется использование отношения альтернативности и выражений „некоторый *альтернативный* возможный

[1] Я буду постоянно указывать, однако, что имеется много способов модификации этих условий. Модификация (С.N$^+$) иногда необходима. См. [12].

мир" и „все *альтернативные* возможные миры" там, где можно было бы ожидать использования более простых выражений „некоторый возможный мир" и „все возможные миры".

Здесь мы уже получили краткое изложение теории модальной логики. *Выполнимость* множества формул может быть определена как включаемость этого множества в некоторый член модельной системы. (Можно заметить, что это является естественным обобщением соответствующего определения для теории квантификации). Переходя к еще более общей формулировке, можно сказать, что выполнимость произвольного множества множеств формул, которое включает в себя произвольное двухместное отношение (мы будем также называть его „отношением альтернативности"), определенное на этом множестве, может быть определена как возможность его гомоморфного отображения в некоторую модельную систему таким образом, чтобы каждый элемент включался в свой образ (и то и другое является, конечно, множеством). Другие понятия — например, понятие общезначимости, противоречивости и логического следования — могут быть определены в терминах выполнимости обычным образом.

Благодаря выдающемуся положению, которое занимает в этом подходе понятие выполнимости, этот подход может быть назван *семантическим*. Не очень трудно получить также некоторый вид *синтаксической* трактовки модальности исходя из тех же самых идей. Если дано некоторое множество формул, то как можно показать, что оно выполнимо? Ответ на этот вопрос непосредственно вытекает из формы тех условий, которые определяют м.м. и модельную систему. За исключением (С. $\sim$) и (С. $\neq$), все они являются условиями замыкания или очень похожи на них. (Исключенные условия можно рассматривать как некоторый вид условий непротиворечивости). Другими словами, всегда, когда некоторое множество Σ множеств (на котором определено отношение альтернативности) нарушает одно из условий, определяющих модельную систему (за исключением (С. $\sim$), это нарушение может быть устранено посредством добавления новой формулы к одному из членов Σ или (в случае (С.M^*)) посредством добавления нового члена вида $\{F\}$ к Σ, и этот новый член служит в качестве альтернативы одного из старых членов. Без труда можно показать, что добавления такого рода сохраняют выполнимость выполнимого Σ. (В случае (С. $\vee$) добав-

ление по крайней мере одного из двух членов сохраняет выполнимость Σ.) Естественным путем обнаружения выполнимости Σ является, следовательно, осуществление последовательных добавлений этого рода, которые приводят к построению модельной системы, показывающей, что Σ выполнимо. Если все альтернативные способы осуществления такого построения заканчиваются нарушением (С. $\sim$) или (С. $\neq$), то мы знаем, что Σ *не* выполнимо. Нетрудно также показать, что каждое доказательство формулы в соответствующей системе модальной логики можно представить как неудавшуюся попытку построить контрпример для этой формулы, то есть построить модельную систему, показывающую, что отрицание этой формулы выполнимо [1].

Непосредственно не очевидно, что для каждого противоречивого множества формул его противоречивость может быть показана посредством безуспешного построения модельной системы такого рода. Однако можно доказать, что это всегда осуществимо, если мы действуем надлежащим образом (важно, чтобы мы не забывали ни об одной возможности присоединения). Этот результат, который не будет доказываться здесь, представляет собой важную теорему полноты.

Но все это дает нам лишь одну систему модальной логики, хотя и одну из наиболее естественных систем.

---

[1] Если дано некоторое множество формул, для которого мы пытаемся построить модельную систему, обычно недостаточно рассмотрения только одного модельного множества и его альтернатив. Чаще всего мы должны рассматривать альтернативы этих альтернатив и т. д. Действительно, для каждого конечного k мы легко можем найти некоторое множество формул (и даже отдельную формулу), такое, что нужно рассмотреть более чем k модельных множеств для того, чтобы показать его выполнимость (или невыполнимость). Поскольку каждое м.м. можно рассматривать как описание возможного мира, в котором истинны или ложны предложения, постольку следует думать, что множество таблично-истинностных матриц с конечным числом истинностных значений не может служить для определения таких понятий, как выполнимость и значимость в нашей системе. Поэтому неудивительно, что соответствующий результат для доказуемости действительно был доказан для некоторых модальных систем Льюиса в работе [2]. Я не вижу, почему эти результаты должны показывать, что удовлетворительная семантическая теория модальной логики невозможна, как это утверждалось. Напротив, было бы очень странно, если бы мы раз и навсегда установили конечный верхний предел для числа возможных миров, которые мы должны рассматривать в семантической теории модальной логики.

Если отвлечься от аспектов, связанных с квантификацией, она оказывается семантическим аналогом той дедуктивной системы модальной логики, которая, пожалуй, лучше всего известна как „система M“ Г. фон Вригта, изложенная в его работе [29], хотя гораздо раньше она была предложена К. Геделем в [5]. (Соответствующую семантическую систему мы также будем называть „система M“.) На мой взгляд, мы вполне естественно приходим к этой системе, если примем во внимание ее большое значение. Однако существуют и другие интересные системы модальной логики, и поэтому мы должны иметь возможность модифицировать определяющие условия нашей системы M таким образом, чтобы охватить и их.

Существует много самых различных способов модификации. Некоторые системы, возникающие в результате этих модификаций, являются семантическими аналогами хорошо известных дедуктивных систем, другие — важны для интерпретации модальных логик. Среди важных возможностей модификации имеются следующие:

(1) Можно допустить, что отношение альтернативности обладает дополнительными свойствами по сравнению с теми, которые наложены на него условиями, приведенными выше. И наоборот, можно опустить некоторые из этих свойств. Например, очевидно, что при наличии (C.N$^+$) или некоторого аналогичного условия условие (C.N) равнозначно требованию того, чтобы отношение альтернативности было рефлексивным. От этого требования можно отказаться. В этом случае часто целесообразно принять более слабое условие, обеспечивающее, что оператор необходимости N является по крайней мере столь же строгим, как и оператор возможности M. Это можно сделать, например, следующим образом:

(C. n*) Если $Np \in \mu \in \Omega$, то в Ω существует по крайней мере одна альтернатива μ, содержащая p.

Напротив, мы можем потребовать, чтобы отношение альтернативности было не только рефлексивным, но также симметричным или транзитивным или обладало обоими этими свойствами. Тогда транзитивность приводит к семантическому аналогу S4 Льюиса, а соединение требований симметричности и транзитивности (плюс рефлексивность, конечно) дает аналог S5. Эти модификации были кратко представлены в [12].

Замечания относительно семантического аналога S5

могут представлять некоторый философский интерес. Транзитивное и симметричное отношения иногда известны как отношения эквивалентности: они разбивают свою область на „классы эквивалентности“ таким образом, что два различных члена одного и того же класса всегда находятся в этом отношении, в то время как члены разных классов никогда не стоят в отношении эквивалентности. В случае нашего семантического варианта S5 мы — для определенных целей — можем потребовать, чтобы существовал только один класс эквивалентности. (Например, это требование не влияет на выполнимость каких-либо множеств формул.) Если мы сделаем это, ситуация начинает становиться более знакомой: каждое м.м. является альтернативой каждого другого м.м. В самом деле, это именно та ситуация, которая предполагается традиционным отождествлением возможности с истинностью в некотором возможном мире, а необходимость — с истинностью во всех возможных мирах. Тот факт, что традиционная идея порождает, таким образом, лишь модальную систему специального вида, возможно, помогает объяснить, почему эта традиционная идея в течение длительного времени оказывалась бесплодной в теории модальной логики, и обосновывает наш отход от традиции.

(2) Мы можем модифицировать предположения, относящиеся к квантификации. Модификации этого рода иногда не зависят от наличия модальных понятий. Но даже в этом случае они желательны вследствие взаимодействия кванторов и модальностей. Наиболее фундаментальным изменением этого рода является устранение того, что я назвал в [11, 13] *экзистенциальными допущениями*. Это предположения относительно того, что все наши сингулярные термы говорят о некоторых актуально существующих индивидах, то есть что пустые сингулярные термы исключены из рассмотрения. В неинтерпретированной системе это, конечно, означает, что свободные индивидные символы не должны вести себя подобно пустым сингулярным термам.

Обычно допущения этого рода неявно делаются во всех традиционных системах теории квантификации. Их особенно легко устранить, используя нашу технику модельных множеств. Все, что мы должны сделать для этого, — это модифицировать (C.E) и (C.U) следующим образом:

(C.E$_0$) Если $(Ex)\,p \in \mu$, то $p\,(a/x) \in \mu$ и $(Ex)\,(x = a) \in \mu$ по крайней мере для одного свободного индивидного символа a.

($C.U_0$) Если $(Ux)\,p \in \mu$ и $(Ey)\,(y = b) \in \mu$ (или $(Ey)\,(b = y) \in \mu$), то $p\,(b/x) \in \mu$.

Объяснение: формула $(Ex)\,(x = a)$ обычно служит в качестве формализации фразы „a существует". (См. тезис Куайна „существовать — значит быть значением связанной переменной", который для наших целей можно перефразировать так: „существовать — значит быть тождественным одному из значений связанной переменной".) Соответственно этому новое условие ($C.U_0$) говорит о том, что все истинное для всех актуально существующих индивидов истинно также для индивида, обозначаемого термом b, *при условии, что такой индивид реально существует*. Если в наши системы допущены пустые сингулярные термы, подчеркнутое условие, очевидно, необходимо. Аналогично этому, дополнительное значение ($C.E_0$) по сравнению с ($C.E$) заключено в требовании, чтобы терм a, используемый для представления одного из индивидов, существование которых утверждается посредством $(Ex)\,p$, действительно говорил о некотором актуально существующем индивиде (или, если мы имеем дело с неинтерпретированной системой, вел себя соответствующим образом). Эта модификация необходима при допущении пустых сингулярных термов.

Система, полученная в результате устранения экзистенциальных предположений, будет слабее нашей первоначальной системы M. Все те выводы, примером которых может служить экзистенциальное обобщение и которые опираются на отсутствие пустых сингулярных термов, теперь оказываются незначимыми. Но их можно сохранить благодаря дополнительным посылкам вида $(Ex)\,(y = b)$. Хотя, например, формула $p\,(a/x) \supset (Ex)\,p$ больше незначима, будет значима связанная с ней формула $(p\,(a/x)\,\&\,(Ex)\,(x = a)) \supset (Ex)\,p$.

(3) Все это еще не решает дискуссионных проблем соединения модальностей с кванторами. Существует, однако, выход из этих трудностей, о котором я (для частного случая) говорил в [13]. Здесь мы будем рассматривать только предложения, содержащие неитерированные модальности. В этом случае мы поступаем совершенно аналогично тому, как мы только что поступали при устранении экзистенциальных предположений. Все, что нам нужно, — это придать формуле $(Ex)\,N\,(x = a)$ роль, аналогичную той, которую формула $(Ex)\,(x = a)$ играла при устранении экзистенциальных предположений: всегда, когда имеются вхождения x в сферу модального оператора p, мы модифицируем ($C.E$) (или ($C.E_0$)) таким образом, чтобы наличие $(Ex)\,p$ в μ влекло наличие $(Ex)\,N\,(x = a)$ в μ, и мы модифицируем ($C.U$) (или ($C.U$)) так, чтобы сделать его применение зависящим от наличия в μ формулы вида $(Ey)\,N\,(y = b)$ или $(Ey)\,N\,(b = y)$.

Эти модификации приводят к дальнейшему ослаблению нашей системы. Подозрительные выводы, осуществимость которых была спорной, теперь будут зависеть от случайных посылок вида $(Ex)\,N\,(x = a)$ или $(Ex)\,N\,(a = x)$.

Можно сказать, что эти модификации дают нам возможность устранить возражения тех логиков, которые сомневались в осуществимости (или целесообразности) квантификации в модальных контекстах [1]. Суть этих возражений, если я правильно их понимаю, сводилась к тому, что подлинные подстановочные значения связанных индивидных переменных должны быть сингулярными термами, которые действительно выделяют определенные индивиды, и что обычные сингулярные термы вполне могут нарушать это требование в модальных контекстах. Например, из

(i) число планет равно девяти, но оно могло бы быть больше десяти

(что можно считать истинным для целей аргументации), мы не можем вывести

(ii) $(Ex)\,(x = 9\,\&$ возможно, что $x > 10)$,

так как в той степени, в которой (ii) имеет смысл, оно кажется ложным.

Причина этого связана с тем фактом, что сингулярный терм „число планет" в (i) не выделяет какого-либо определенного числа, существование которого утверждается в (ii). (Может быть, это число 9? Но невозможно, чтобы 9 было больше, чем 10. Если же это не 9, то какое это число?) Тем не менее переход от (i) к (ii) оправдывается нашими немодифицированными условиями ($C.E$) и ($C.U$). Следовательно, в нашей системе есть нечто ошибочное, и легко заметить, что даже устранение экзистенциальных предположений не может нам помочь.

Мне представляется, что эти возражения совершенно справедливы и что на них должен ответить всякий, кто хочет работать в рамках системы квантифицированной модальной логики. Для ответа на эти возражения, может

[1] См., например, [26—28], а также [3].

быть, нужно спросить: почему в модальных контекстах некоторые термины не имеют того единственного значения, которое является предпосылкой существования подстановочного значения связанной переменной? Ответ на этот вопрос неявно содержится в нашем методе разработки модальной логики. Почему термин „число планет" в (i) не выделяет определенный индивид? Очевидно потому, что в различных положениях дел, которые мы считаем возможными, утверждая (i), этот термин будет относиться к различным числам. (В действительном положении дел этот термин относится к числу 9, но неосознанно мы вводим в рассмотрение также и другие положения дел, в которых он относится к бо́льшим числам). Это сразу же дает нам ответ на вопрос о том, когда же тот или иной сингулярный терм (скажем, a) действительно выделяет определенный индивид и поэтому выступает в качестве допустимого подстановочного значения связанных переменных. Последнее происходит в том, и только в том случае, если сингулярный терм обозначает один и тот же индивид не только в действительном мире (или, если обобщить это, в каком-либо из рассматриваемых нами возможных миров), но также и во всех альтернативных мирах, которые могли бы быть реализованы вместо него; другими словами, если, и только если, существует индивид, который он обозначает во всех альтернативных мирах. Но обозначать данный индивид во всех альтернативных мирах означает необходимо обозначать его. Следовательно, утверждение $(\mathrm{E}x)\,N\,(x=a)$ формулирует необходимое и достаточное условие для того, чтобы терм a обозначал определенный индивид в том смысле, к которому, по-видимому, склонялась критика квантифицированной модальной логики.

Другие логики предпочли принять, что все свободные индивидные символы логической системы являются допустимыми подстановочными значениями связанных индивидных переменных. При этом они были вынуждены ограничить класс сингулярных термов, которые при интерпретации могут быть подставлены вместо свободных индивидных символов, теми, которые обладают требуемым видом единственности обозначения. Эта процедура вполне осуществима, но она, как мне кажется, слишком сильно ограничивает применимость наших логических систем. Эти ограничения особенно стеснительны в тех областях, где даже собственные имена могут не иметь требуемого вида соотнесенности и поэтому не могут рассматриваться как подстановочные значения свободных индивидных символов. Это, по-видимому, происходит в эпистемической логике. В работе [13] я утверждал, что в эпистемической логике правильно определенная соотнесенность, с которой мы здесь имеем дело, равнозначна известной соотнесенности. Если это так, то собственные имена могут, конечно, не обладать ею, так как субъект вполне может не знать, на что ссылается некоторое собственное имя. Но если даже собственные имена подводят нас, то что у нас остается?

(4) Можно попытаться также провести модификацию в совершенно ином направлении. Мы можем допустить (а можем и не допускать), что индивиды, существующие в одном положении дел, всегда существуют в альтернативных положениях дел. И наоборот, мы можем допустить (или не допускать), что индивиды, существующие в одной из альтернатив данного положения дел, всегда существуют в этом данном положении дел. В системе, *не содержащей* экзистенциальных предположений, эти допущения могут быть очень просто формализованы путем введения переносимости формул вида $(\mathrm{E}x)(x=a)$ или $(\mathrm{E}x)(a=x)$ из модельного множества в его альтернативы, и *наоборот*. В системах, содержащих экзистенциальные предположения, ситуация будет сложнее. Простейшей и наиболее гибкой системой является та, в которой нет допущения переносимости. Для получения такой системы мы должны модифицировать $(\mathrm{C.N}^{+})$ так, чтобы его применимость обусловить вхождением каждого свободного индивидного символа предложения p по крайней мере в одну формулу μ. Обоснование этой модификации очевидно: из (C.U) видно, что в системах с экзистенциальными предположениями простое наличие свободного индивидного символа в членах модельного множества предполагает, что этот символ относится к актуально существующему индивиду. Для того чтобы не принимать допущения о том, что индивиды всегда переходят из некоторого возможного мира в его альтернативы, мы должны, следовательно, избежать предположения о том, что свободные индивидные символы можно переносить из модельного множества в его альтернативы.

Возможные способы формулировки предположений о таком перенесении в системах с экзистенциальными предположениями коротко были обсуждены в другой моей статье [12].

(5) До сих пор мы занимались способами получения новых систем модальной логики. Однако существуют другие методы изменения, а именно методы формулирования предположений любой данной системы различными способами, часть из которых нередко может быть более полезной и плодотворной для определенных конкретных целей, чем другие. В этой связи особенно полезно заменять „глобальные“ условия, относящиеся к отношению альтернативности вообще, „локальными“, касающимися отношения некоторого м.м. к его альтернативам. Типичным примером глобального условия является требование транзитивности. Нетрудно показать[1], что это условие можно заменить (если нет других условий, добавленных к условиям M) следующим локальным условием:

(C.NN$^+$) Если $Np \in \mu \in \Omega$ и если ν является альтернативой μ в Ω, то $Np \in \nu$. Если это условие выполнено и если другими условиями являются условия M, эффект требования симметричности может быть достигнут путем добавления следующего условия, которое опять-таки относится к „локальному“ типу:

(C.NN$_+$) Если $Np \in \nu \in \Omega$ и если ν является альтернативой μ в Ω, то $Np \in \mu$.

В самом деле, достаточно ясно, что это условие было бы равнозначно требованию симметричности. Мы допустили, что единственными другими условиями, касающимися отношения между всеми альтернативами, являются (C.NN$^+$) и (C.N$^+$). Однако последнее представляет собой следствие первого и условия (C.N). Следовательно, единственным важным в этом отношении условием является (C.NN$^+$), а (C.NN$_+$) представляет собой его зеркальное отображение.

Мы можем также соединить два или более условий в одно. Например, объединенное воздействие двух условий (C.N$^+$) и (C.N), очевидно, можно частично получить, используя следующее условие:

(C.M&N$^+$) Если $Mq \in \mu \in \Omega$, $Np_1 \in \mu$, $Np_2 \in \mu$, ..., $Np_k \in \mu$, то в Ω существует некоторая альтернатива μ, содержащая все формулы q, p_1, p_2, ..., p_k.

В некотором смысле даже все влияние (C.N$^+$) получается с помощью этого правила, а именно в том смысле, что каждое множество формул, которое выполнимо, остается выполнимым при замене (C.N$^+$) на (C.M&N$^+$), *и наоборот*. Правда, это не очевидно. В случае некоторого м.м. μ, содержащего бесконечно много формул вида Np, из (C.N$^+$) следует, что все альтернативы этого м.м. также содержат бесконечно много формул. Наше новое условие (C.M&N$^+$) гарантирует лишь то, что для μ существуют альтернативы, содержащие любое данное конечное подмножество бесконечного множества формул, которое (C.N$^+$) заставляет включать в каждую альтернативу μ. То, что более слабого условия (C.M&N$^+$) тем не менее достаточно, можно заключить из упомянутой выше теоремы полноты, хотя, конечно, это еще не доказательство. Теорема говорит, что для каждого множества формул, которое невыполнимо, можно показать это, пытаясь построить для него некоторую модельную систему; если мы действуем надлежащим образом, все возможные пути построения заканчиваются нарушением (C. $\sim$) после некоторого конечного числа шагов. Вследствие этого ограничения в доказательстве требуется всегда только конечное число применений (C.N$^+$). А для любого конечного числа применений (C.N$^+$) можно показать, что они заменимы применениями (C.M&N$^+$).

Если к нашей базисной системе M добавлено требование транзитивности, то условие (C.M&N$^+$) должно быть заменено следующим условием:

(C.M&NN$^+$) Если $Mq \in \mu \in \Omega$, $Np_1 \in \mu$, $Np_2 \in \mu$, ..., $Np_k \in \mu$, то в Ω существует по крайней мере одна альтернатива μ, содержащая все формулы q, Np_1, Np_2, ..., Np_k.

Такие вариации наших первоначальных условий можно продолжать почти бесконечно. Иногда они представляют технический интерес. Еще более важно то, что часто они помогают нам в интерпретации различных систем модальной логики сформулировать структуру различных интересных с философской точки зрения понятий, для анализа которых мы хотим использовать нашу технику. Я приведу здесь несколько примеров таких формулировок.

Если мы имеем дело с временной логикой или, более точно, если мы читаем „M“ как „есть или будет, что“, то нашим „возможным мирам“ можно придать очень ясное значение: они будут состояниями мира в различные моменты будущего. Каждое м. м. есть множество истинных

[1] См. [13].

утверждений, которые все могут быть высказаны в один и тот же момент (будущего) времени. Некоторое м. м. есть альтернатива другого м. м., если и только если момент времени, связанный с первым м. м., является более поздним, чем момент времени, связанный со вторым м. м. Тогда легко увидеть, что формулировка этой временнóй логики получается посредством принятия нашей базисной системы *M* и добавления к ее определяющим условиям требования о том, что отношение альтернативности должно быть *линейным* порядком[1].

Говоря более точно, этим способом мы получаем логику времени, соответствующую классической физике. Если же мы не хотим связывать нашу логику со старой физикой, то поступим лучше, если каждое м. м. будем интерпретировать как множество истинных утверждений, которые все могут быть высказаны в одной и той же точке мира, и читать „*M*" как „где-то случится так, что". Тогда мы больше не можем требовать, чтобы отношение альтернативности (в этом случае, может быть, его было бы лучше называть „отношением будущности") было линейным порядком. С релятивистской точки зрения мы, по-видимому, должны иметь только транзитивность. Поэтому S4, может быть, не так уж плоха в качестве системы временнóй логики.

Мы можем увидеть также, какая система модальной логики выступает в качестве формализации *логической* возможности и *логической* необходимости. Мне представляется очевидным, что все, что логически необходимо здесь и теперь, должно быть логически необходимо также во всех логически возможных положениях дел, которые могли бы быть реализованы вместо актуального положения дел. (Логически возможно, что данный коллоквиум не был бы проведен, но, безусловно, это не затронуло бы ни одной логической истины). Это именно то, что говорит (C. NN⁺). И наоборот, достаточно ясно также, что новая логически необходимая истина не может явиться результатом реализации какой-либо логической возможности. Короче говоря, мне представляется, что все, что является логически необходимым в одном из логически возможных

[1] Следовательно, S4 еще не является удовлетворительной системой этого рода временнóй логики, так как в S4 отношение альтернативности не должно быть линейным; от него лишь требуется, чтобы оно было транзитивным. См. [25] и [10].

миров, должно быть также логически необходимым в других логически возможных мирах. Но это предполагает, что выполнено также (C. NN⁺). Вместе с (C. NN⁺) это условие налагает на нашу модальную логику структуру S5 Льюса. Таким образом, система S5 представляется лучшей формализацией нашей логики *логической* необходимости и *логической* возможности.

Однако здесь нужно сделать важное уточнение. В данном мною рассуждении не было ссылок на какой-либо способ реального установления того, какие предложения являются логически необходимыми или логически возможными. А такая ссылка существенна для корректности рассуждения. В самом деле, мы получаем совершенно разные результаты, если рассматриваем не „сами по себе" логические истины, а лишь те из них, которые могут быть доказаны посредством некоторого определенного класса рассуждений, например в некоторой данной дедуктивной системе. Тогда „Np" будет означать, что p может быть доказано посредством данных рассуждений, а „Mp" будет означать, что p не может быть опровергнуто с их помощью. Но если так, то такая формула, как

$$\text{(iii)} \quad Mp \supset NMp,$$

вероятно, не будет значима, так как она бы означала, что если p не может быть опровергнуто посредством определенного класса рассуждений, то посредством тех же самых рассуждений можно доказать, что оно не может быть ими опровергнуто. В большинстве случаев это неверно. Тем не менее формула (iii) значима в S5, что можно установить без особого труда. Следовательно, S5 на самом деле не может служить формализацией *доказуемой* логической истины. Можно усомниться и в том, являются ли даже законы S4 значимыми в этом смысле, как свидетельствуют замечания Геделя в [15] о формуле $N(Np \supset p)$. Если так, то выводы Холлдена в [6] должны быть исправлены.

Другие интерпретации указаны в моих прежних работах. В одной из них я обсуждал аналогичные условия, которым должны удовлетворять наши нормативные понятия. (Новое обсуждение этого предмета дано в статье „Деонтическая логика и ее философские следствия", помещенной в [9].) В другой своей работе, [13], я проанализировал в том же отношении наши основные эпистемические понятия, а именно понятия знания и веры. Первое из них является достаточно простым для того, чтобы его можно было обсудить здесь. Предположим, что некто высказывает некоторое число утверждений по одному и тому же поводу, включая следующие: „для всего того, что я знаю, возможно, что q"; „я знаю, что p_1"; „я знаю, что p_2", ..., „я знаю, что p_k". В каком случае эта совокупность утверждений будет непротиворечива? Кажется ясным, что если для всего того, что он знает, действительно возможно q, то для q должно быть возможно оказаться истинным в то время, когда все, что он знает, является истинным. При интерпретации „N" = „я знаю, что", „M" = „для всего, что я знаю, возможно, что" это как раз то, что говорит (C.M&N^+). Но этого еще не достаточно. Если наш субъект действительно знает то, что — как он утверждает — он знает, то есть знает в том смысле, в каком знание отличается от истинного мнения, то для q должно быть возможно оказаться истинным в то время, как он продолжает знать все то, что — как он утверждает — он знает. Другими словами, реализация того, что возможно для всего, что он знает, не должна заставить его отказаться от какого-либо из его утверждений, если он не хочет противоречить сам себе. Но это как раз то, что требуется условием (C.M&NN^+). А выполнение этого условия означает, как мы видели, что логика знания по крайней мере столь же строга, как S4 Льюиса. (Насколько я могу видеть, она в точности равнозначна S4 при условии, что мы не обращаем внимания на некоторые уточнения, которые я довольно подробно рассмотрел в работе [13], а также на тот факт, что эпистемические понятия обычно связываются с некоторым субъектом.)

В то же время, если наш субъект стремится лишь к истинному мнению, ситуация будет иной. Нет противоречия в его отказе от одного из своих мнений, когда то, что могло быть истинным, согласно его (истинному) мнению, оказывается существующим. Другими словами, логика истинной веры не есть S4, хотя логикой „реального" знания является S4. Следовательно, наш подход приводит к интересному, хотя и частичному, ответу на древний вопрос относительно различия между „подлинным" знанием и „только" истинным мнением. Если я прав, этим двум понятиям соответствуют даже разные логики.

Этот момент очень интересен, поэтому его, может быть, стоит развить дальше. С большим правом, чем кажется на первый взгляд, можно сказать, что значение (C.M&N^+) состоит в том требовании, что если μ выполнимо и если $Mq \in \mu$, $Np_1 \in \mu$, $Np_2 \in \mu$, ..., $Np_k \in \mu$, то множество $\{q, p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ также должно быть выполнимо. Последнее множество выполнимо, если, и только если, импликация

$$q \supset (\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_k)$$

не является общезначимой (логически истинной). Таким образом, если (C.M&N⁺) используется с эпистемическими понятиями, то его смысл состоит в требовании, что все совместимое со знанием некоторого субъекта не должно содержать возражения против того, что *он знает осознанно*.

Аналогичным образом, смысл более строгого условия (C.M&NN^+) в эпистемических контекстах состоит в требовании, что все совместимое со знанием некоторого субъекта не должно содержать возражения против *его утверждения, что он знает* то, что он знает осознанно. Ибо суть этого условия сводится, как можно показать, к тому требованию, что выполнимость μ (вида, упоминаемого в (C.M&NN^+)) влечет, что импликация

$$q \supset (\sim Np_1 \vee \sim Np_2 \vee \ldots \vee \sim Np_k)$$

незначима. Отсюда видно, что если мы имеем дело с подлинным знанием, а не только с истинным мнением, то (C.M&NN^+) должно быть выполнено. Утверждение субъекта о знании мира в этом смысле может быть подвергнуто критике не только посредством указания на то, что факты не таковы, какими они должны быть, согласно его утверждению, но также и посредством указания на то, что *он в действительности не знает* (не в состоянии знать), что они таковы, каковы есть на самом деле. Кроме того, истинное мнение не удовлетворяет (C.M&NN^+), хотя оно удовлетворяет (C.M&N^+). (Конечно, большая часть того, что считается знанием в обычной речи, в смысле нашего точного различия будет лишь истинным мнением.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergmann G. The Philosophical Significance of Modal Logic.— "Mind", № 69, 1960, p. 466—485.

2. Dugundji J. Note on a Property of Matrices for Lewis and Langford's Calculi of Propositions.— "The Journal of Symbolic Logic", № 5, 1940, p. 150—151.
3. Føllesdal D. Referential Opacity and Modal Logic.— Неопубликованная докторская диссертация в Гарвардском университете, 1961.
4. Gödel K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül.— Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch— naturwissenschaftliche Klasse, 1932, S. 65—66.
5. Gödel K. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls.— „Ergebnisse eines mathematischen Kolloqiums", vol. IV, 1933.
6. Halldén S. A. Pragmatic Approach to Modal Logic.— „Filosofiska studiei tillägnade Konrad Marc—Wogau", 4 april 1962. Uppsala, 1962, p. 82—94.
7. Hintikka J. Form and Content in Quantification Theory.— "Acta Philosophica Fennica", № 8, 1955, p. 7—55.
8. Hintikka J. Notes on Quantification Theory.— "Societas Scientiarum Fennica". Commentationes phys.— math., 17, 1955, № 12.
9. Hintikka J. Deontic Logic and Its Philosophical Morals.— "Models for Modalities". Dordrecht—Holland, 1969, p. 184—214.
10. Hintikka J. Review of Prior's Time and Modality.— "The Philosophical Review", № 67, 1958, p. 401—404.
11. Hintikka J. Existential Presuppositions and Existential Commitments.— "The Journal of Philosophy", № 56, 1959, p. 125—137.
12. Hintikka J. Modality and Quantification.— "Theoria", № 27, 1961 (рус. пер. см. в данной книге, с. 60—75).
13. Hintikka J. Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions. Ithaca, N. Y., 1962, p. 129—131.
14. Kanger S. Provability in Logic.— "Stockholm Studies in Philosophy", vol. I, Stockholm, 1957.
15. Kanger S. The Morning Star Paradox.— "Theoria", № 23, 1957, p. 1—11.
16. Kanger S. A Note on Quantification and Modalities.— Ibid., p. 133—134.
17. Kanger S. On the Characterisation of Modalities.— Ibid., p. 152—155.
18. Kripke S. A Completeness Theorem in Modal Logic.— "The Journal of Symbolic Logic", № 24, 1959, p. 1—14 (русск. пер.: С. А. Крипке. Теорема полноты в модальной логике.— В: Р. Фейс. Модальная логика. М., „Наука", 1974, Приложения).
19. Kripke S. Semantical Considerations on Modal Logic.— Proceedings of a Colloquium on Modal and Many—Valued Logics. Helsinki, 23—26 August, 1962. Acta Philosophica Fennica, 16, 1963, p. 83—94 (рус. пер.: С. А. Крипке. Семантическое рассмотрение модальной логики. Наст. том, с. 27—40).
20. Kripke S. Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi.— "Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik", № 9, 1963, S. 67—96 (рус. пер.: С. А. Крипке. Семантический анализ модальной логики. I. Нормальные модальные исчисления высказываний.— В: Р. Фейс. Модальная логика. М., „Наука", 1974. Приложения).
21. Kripke S. Semantical Analysis of Modal Logic II: Non-Normal Modal Propositional Calculi.—"The Theory of Models". Amsterdam, 1965, p. 206—220 (русск. пер.: С. А. Крипке. Семантический анализ модальной логики. II. Не-нормальные модальные исчисления высказываний. Там же).
22. Kripke S. The Undecidability of Monadic Modal Quantification Theory.— „Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik", № 8, 1962, S. 43—116 (рус. пер.: С. А. Крипке. Неразрешимость одноместного модального исчисления предикатов. Т. м же).
23. Montague R. Logical Necessity, Physical Necessity, Ethics, and Quantifiers.— "Inquiry", № 3, 1960, p. 259—269.
24. Montague R. and Kalish D. That.— "Philosophical Studies". № 10, 1959, p. 54—61.
25. Prior A. N. Time and Modality. Oxford, 1957.
26. Quine W. V. From a Logical Point of View. 9 Logico-Philosophical Essays. 2nd ed., rivised. Cambridge, Mass., 1961.
27. Quine W. V. Quantifiers and Propositional Attitudes.— "The Journal of Philosophy", № 53, 1956, p. 177—187.
28. Quine W. V. Word and Object New York and London, 1960.
29. Wright G. H. von. Essay in Modal Logic. Amsterdam, 1951.

Я. Хинтикка

МОДАЛЬНОСТЬ И КВАНТИФИКАЦИЯ[*]

Многие ветви логики можно изучать двумя различными (хотя и взаимосвязанными) методами, которые обычно называются *синтаксическим* и *семантическим*. В этой статье я дам очерк некоторых основных идей семантической теории модальной логики, включая квантифицированную модальную логику. Я буду опускать большую часть доказательств, так как более полное изложение легко осуществить на базе и этого очерка[1].

Фундаментальным понятием семантической теории обычно является понятие истины. Если же при *некоторой отдельной* интерпретации логических формул нас интересует не вопрос об истине, а вопрос о том, существуют ли *какие-либо* интерпретации, которые делают истинным данное множество формул (короче говоря, если нас не интересует отдельная интерпретация), то в качестве фундаментального понятия семантической теории мы можем избрать понятие *выполнимости*[2]. Если отрицание некоторой формулы p невыполнимо, то p называется *общезначимой*.

Для обычной немодальной логики (теории квантификации) понятие выполнимости может быть определено (следуя

[*] Hintikka J. Modality and Quantification. Models for Modalities. Dordrecht, 1969, p. 57—70.

[1] Я знаю, что некоторые из моих наблюдений были предвосхищены различными логиками, включая О. Беккера, Х. Карри, П. Гича, М. Гюллеума, С. Кангера, С. Крипке, Дж. Маккинси, К. Мередита и, может быть, других. Однако я не буду заниматься выяснением точного отношения их идей к моим.

[2] Здесь рассматриваются лишь различные интерпретации не-логических символов. Интерпретация логических констант (связок и кванторов) считается фиксированной.

Карнапу, с небольшими модификациями) следующим образом: *множество формул λ выполнимо, если и только если существует некоторое описание состояния, в котором справедливы все члены λ.* (Некоторая формула выполнима, если и только если выполнимо единичное множество, содержащее эту формулу.) Некоторое множество формул μ является множеством *всех* формул, которые истинны в некотором отдельном описании состояния, если и только если оно удовлетворяет следующим условиям:

(C.1) *Если p есть атомарная формула или равенство, то либо $p \in \mu$, либо $\sim p \in \mu$, но не то и другое вместе.*

(C.2) *Если p — атомарная формула или равенство и если все свободные индивидные переменные p встречаются в других формулах μ, то либо $p \in \mu$, либо $\sim p \in \mu$.*

(C.3) *Если p — атомарная формула или равенство, если q отличается от p лишь тем, что a и b заменили друг друга в одном или нескольких местах, если $p \in \mu$ и если $a = b \in \mu$, то $q \in \mu$.*

(C.4) *Неверно, что $\sim (a = a) \in \mu$.*

(C.5) *Если $(p \& q) \in \mu$, то $p \in \mu$ и $q \in \mu$.*

(C.6) *Если $p \in \mu$ и $q \in \mu$, то $(p \& q) \in \mu$.*

(C.7) *Если $(p \vee q) \in \mu$, то $p \in \mu$ или $q \in \mu$ (или оба).*

(C.8) *Если $p \in \mu$ или $\in \mu$ и если все свободные индивидные переменные $(p \vee q)$ встречаются в других формулах μ, то $(p \vee q) \in \mu$.*

(C.9) *Если $(\mathrm{E}x)\, p \in \mu$, то $p(a/x) \in \mu$ по крайней мере для одной свободной индивидной переменной a.*

(C.10) *Если $p(a/x) \in \mu$ по крайней мере для одной свободной индивидной переменной a, то $(\mathrm{E}x)\, p \in \mu$.*

(C.11) *Если $(Ux)\, p \in \mu$ и если b встречается по крайней мере в одной формуле μ, то $p(b/x) \in \mu$.*

(C.12) *Если $p(b/x) \in \mu$ для каждой свободной индивидной переменной b, которая встречается в формулах μ, то $(Ux)\, p \in \mu$.*

Замечания:

(1) Условия (C.1)—(C.4) здесь обеспечивают, что та часть μ, которая состоит из атомарных формул и равенств, является некоторым описанием состояния (в смысле, близком карнаповскому). Другие условия служат для обеспечения того, чтобы, с одной стороны, все остальные формулы μ были истинны в данном описании состояния и, с другой стороны, чтобы все формулы, истинные в данном

описании состояния, принадлежали к μ. Эти условия являются не чем иным, как вариантами обычных семантических правил для $\&$, $\vee$, E и U.

(2) В условиях (C.1)—(C.12) я использовал следующие предположения:

(i) p, q, ... являются произвольными формулами;

(ii) a, b, ... — произвольные свободные индивидные переменные;

(iii) x, y, ... суть произвольные связанные индивидные переменные;

(iv) $p(a/x)$ есть формула, полученная из p посредством повсеместной замены x на a;

(v) все пропозициональные связки, кроме $\sim$, $\&$ и $\vee$, могут быть элиминированы;

(vi) все формулы, с которыми мы имеем дело, могут быть приведены к такому виду, в котором знаки отрицания встречаются только непосредственно перед атомарными формулами или перед равенствами;

(vii) знак $\in$ представляет собой металогическое сокращение для фразы „является членом..."

(3) Если мы хотим исключить пустоту универсума рассуждения, то этого можно добиться путем принятия следующего дополнительного условия:

(C.U) Если $(Ux)\,p \in \mu$, то $p(a/x) \in \mu$ для по крайней мере одной свободной индивидной переменной a.

Таким образом, мы можем переформулировать наше первоначальное определение и сказать, что *некоторое множество формул выполнимо, если и только если оно может быть включено в множество, которое удовлетворяет условиям* (C.1)—(C.12). (Множество, удовлетворяющее этим условиям, будет называться *полным* описанием состояния.)

Однако почти половина этих условий является излишней. Множество формул, удовлетворяющее условиям (C.1), (C.3), (C.4), (C.5), (C.7), (C.9) и (C.11), я буду называть *модельным множеством* и буду обозначать эти семь условий как (C.$\sim$), (C.=), (C.само$\neq$), (C.&), (C.$\vee$), (C.E) и (C.U) соответственно. Я покажу, каким образом можно доказать, что *множество λ формул выполнимо, если, и только если, его можно включить в некоторое модельное множество* (то есть если и только если существует модельное множество μ такое, что $\mu \supseteq \lambda$).

Доказательство: (1) Часть, относящаяся к „только если", тривиальна. (2) Для того чтобы доказать часть,

относящуюся к „если", достаточно доказать две следующие леммы:

(A) Каждое модельное множество может быть включено в *максимальное* модельное множество.

(B) Каждое *максимальное* модельное множество является полным описанием состояния.

Из этих лемм следует, что любое множество формул, которое можно включить в модельное множество, можно включить и в максимальное модельное множество, то есть в полное описание состояния. (Под максимальностью модельного множества μ мы подразумеваем, что не существует более широкого модельного множества $\nu \supset \mu$, такого, что каждая свободная индивидная переменная, встречающаяся в формулах ν, уже встречается в формулах μ.)

Лемму (B) можно доказать проверкой того, что если одно из условий (C.2), (C.6), (C.8), (C.10), (C.12) не выполняется модельным множеством μ, мы можем добавить к μ новую формулу так, чтобы получить более широкое модельное множество. Лемму (A) можно доказать на основе леммы Цорна точно так же, как соответствующий результат для множеств с некоторым свойством финитного характера (см. [1]).

Интуитивно данный результат можно выразить, сказав, что модельное множество является формальным аналогом частичного описания возможного состояния дел (некоторого „возможного мира"). (Этого описания, однако, вполне достаточно для того, чтобы не сомневаться, что данное состояние дел действительно возможно.) Поэтому было бы естественно сказать, что некоторое множество предложений выполнимо, если и только если оно может быть включено в (частичное или полное) описание возможного состояния дел, а это как раз и есть то, что нами было показано для того случая, когда модельные множества интерпретируются как такие описания.

Эта идея помогает нам расширить понятие выполнимости на множества формул, которые могут содержать модальные операторы. Прежде всего она говорит нам, что, когда мы рассматриваем такие формулы, мы не можем обойтись рассмотрением только одного модельного множества. При обсуждении таких понятий, как возможность и необходимость, мы должны рассматривать состояния дел, отличные от действительного. Следовательно, в определении выполнимости мы должны рассматривать *множества* модельных множеств. Такие множества множеств мы будем называть *модельными системами*.

Каким же условиям должны удовлетворять модельные системы? Допустим, что $Mp \in \mu \in \Omega$, где Ω является модельной системой (и где M обозначает „возможно"). Тогда, очевидно, мы должны потребовать, чтобы p, которое, может быть, не является истинным в состоянии дел, описываемом μ, должно быть тем не менее истинным в некотором другом состоянии дел, которое могло бы быть реализовано вместо того, которое описывается посредством μ. Описания таких состояний дел будут называться *„альтернативами μ"*. Другими словами, должно быть выполнено следующее условие:

(C.M*) *Если $Mp \in \mu$, то в Ω существует по крайней мере одна альтернатива ν к μ такая, что $p \in \nu$.*

Допустим снова, что $Np \in \mu \in \Omega$, где Ω является модельной системой (и где N обозначает „необходимо"). Тогда мы должны потребовать, чтобы то, что происходит необходимо, происходило реально

(C.N) *Если $Np \in \mu$, то $p \in \mu$.*

Однако это не исчерпывает „значения" выражения Np. Когда мы говорим, что нечто имеет место необходимо, мы говорим больше, чем просто то, что оно имеет место в действительности. Мы говорим, что это неизбежно имеет место, что это происходило бы во всех других положениях дел, которые могли бы быть осуществлены вместо реального положения дел. Говоря формально, должно быть принято следующее условие:

(C.N$^+$) *Если $Np \in \mu \in \Omega$ и если $\nu \in \Omega$ является альтернативой μ, то $p \in \nu$.*

Условий (C.M*), (C.N) и (C.N*) достаточно для семантической трактовки некоторой минимальной части модальной логики. Определение выполнимости, к которому они приводят, можно выразить следующим образом: множество λ формул выполнимо, если и только если существует модельная система $\langle\Omega, R\rangle$, такая, что для некоторого члена Ω, скажем μ, имеет место $\mu \supseteq \lambda$. Модельная система есть пара $\langle\Omega, R\rangle$, первым членом которой является множество модельных множеств, каждое из которых выполняет условие (C.N). Второй член этой пары R есть двухместное отношение на Ω, называемое отношением альтернативности. Требуется, кроме того, чтобы Ω и R удовлетворяли условиям (C.M*) и (C.N$^+$). Благодаря эквивалентностям $\sim Np \equiv$

$\equiv M \sim p$ и $\sim Mp \equiv N \sim p$ можно принять также предположение минимальности.

Полученная таким образом семантическая система эквивалентна хорошо известной синтаксической (аксиоматической) системе модальной логики, которая впервые была предложена Куртом Геделем и была названа фон Вригтом в [2] системой M. Эта эквивалентность означает, конечно, что некоторая формула доказуема в M, если и только если она значима в нашей семантической системе.

Если мы добавляем условие, что отношение альтернативности должно быть *транзитивным*, то получаем более строгую систему, которая в том же смысле эквивалентна системе S4 Льюиса. Если потребовать, чтобы отношение альтернативности было *симметричным*, мы получим семантическую систему, синтаксический аналог которой получается из M добавлением так называемой аксиомы (аксиомной схемы) Брауэра:

$$p \supset NMp.$$

Если потребовать, чтобы это отношение было *транзитивным* и *симметричным*, мы получим систему, которая эквивалентна S5 Льюиса. Посредством наложения определенного ограничения на (C.M*) в семантических аналогах M и S4 может быть дана аналогичная семантическая интерпретация системам S2 и S3 Льюиса[1].

Я не буду здесь доказывать этих результатов. Вместо этого я кратко рассмотрю проблемы, возникающие при соединении модальностей с кванторами (и/или равенством). Использование кванторов приводит к изменениям в приведенных выше условиях, ибо на основе этих условий мы могли бы доказать результаты, которые, очевидно, противоречат интуиции. Например, мы могли бы „доказать", что значима следующая формула:

$$(1) \qquad (\mathrm{E}x)\,NP(x) \supset N\,(\mathrm{E}x)\,P(x).$$

Однако формула (1), очевидно, неприемлема в качестве общего логического принципа. Для демонстрации этого мы могли бы допустить, что каждое колесо является необхо-

[1] Это ограничение можно было бы сформулировать, добавив к (C.M*) следующий пункт: „При условии, что μ не является альтернативой какого-либо другого члена Ω или что в μ существует по крайней мере одна формула вида Nq".

Мое внимание к тому, что S2 и S3 могут быть получены таким образом, впервые привлек С. Крипке.

димо круглым. Однако из того, что существуют колеса, мы не могли бы заключить, что существование круглых объектов — необходимое и неизбежное свойство мира.

Рассуждение, показывающее значимость формулы (1), можно представить следующим образом. Предположим обратное:

$$(2) \qquad (Ex)\, NP(x) \in \mu \in \Omega,$$

$$(3) \qquad M(Ux) \sim P(x) \in \mu \in \Omega$$

(для некоторого модельного множества μ и модельной системы Ω), откуда вытекает, что (1) незначима, то есть что отрицание этой формулы выполнимо. Теперь это предположение можно свести к абсурду. В самом деле, из (2) мы получаем:

$$(4) \qquad NP(a) \in \mu$$

для некоторого a в силу (C.E), и из (3), согласно (C.M*), мы получаем:

$$(5) \qquad (Ux) \sim P(x) \in \nu \in \Omega$$

для некоторой альтернативы ν к μ. На основании (C.N+) мы получаем из (4):

$$(6) \qquad P(a) \in \nu.$$

И на основе (C.U) мы из (5) получаем

$$(7) \qquad \sim P(a) \in \nu.$$

Последняя формула вместе с (6) нарушает наше условие (C.$\sim$). Таким образом, редукция закончена и посредством этого обоснована „общезначимость" формулы (1).

Так как (1), очевидно, не является логической истиной, где-то в нашем рассуждении должен обнаружиться ложный шаг. То, что (5) говорит обо всех индивидах, существующих в возможном мире, описываемом ν, в шаге (7) мы применяли к частному случаю индивида a. Но почему мы должны считать, что a существует в этом возможном мире? По-видимому, на том основании, что этот термин встречается в формулах ν, о чем свидетельствует (6). В таком случае, на каком основании мы утверждаем (6)? Этот шаг основывается на (C.N+). Однако ясно, что переход от (4) к (6) включает в себя нечто незаконное. В (4) мы говорим о том, что a не может не иметь свойства P. Из этого вовсе не следует, что a существует *и* обладает свойством P в каждом альтернативном мире. Отсюда следует лишь то, что *если* он существует в одном из них, *то* он будет обладать этим свойством. Следовательно, шаг (6) возможен только еще при одном предположении, которого здесь нет, а именно при предположении о том, что a существует в мире, описываемом посредством ν.

Этот анализ может быть обобщен. Для этого мы должны взглянуть на (C.E) и (C.U). Они показывают, что каждая свободная индивидная переменная, встречающаяся в формулах μ, ведет себя точно так же, как индивидный терм, референт (носитель) которого реально существует в положении дел, описываемом μ. Таким образом, мы можем сказать, что наличие свободных переменных в формулах μ является формальным аналогом существования их значений в положении дел, описываемом μ.

Отсюда следует, что когда формула p переносится из модельного множества μ в одну из его альтернатив, скажем ν, мы должны обращать внимание на те свободные переменные, которые содержит p. Если одна из них не встречается в других формулах ν, то присоединение p к ν законно только в том случае, если нужные нам значения этой свободной индивидной переменной считаются существующими не только в положении дел, описываемом μ, но также и в положении дел, описываемом ν. Вообще такого предположения сделать нельзя. Индивиды, которые существуют de facto, возможно могут не существовать. По этой причине условие (C.N+) должно быть заменено следующим условием:

(C.N*) *Если* $Np \in \mu \in \Omega$, *если* $\nu \in \Omega$ *является альтернативой* μ *и если каждая свободная индивидная переменная* p *встречается по крайней мере в одной другой формуле* ν, *то* $p \in \nu$.

Легко увидеть, что если (C.N+) заменяется на (C.N*), то (1) больше не будет значимой формулой. Действительно, шаг (6) из приведенного выше рассуждения не будет оправдан условием (C.N*) и не может быть осуществлен никаким другим путем в терминах этого модифицированного условия. Вместо этого рассуждение (2)—(5) дает нам, в сущности, контрпример для значимости (1). В самом деле, $\Omega = \{\mu, \nu\}$, где ν является альтернативой μ и где

$$\mu = \{(Ex)\, NP(x) \,\&\, M(Ux) \sim P(x),\ (Ex)\, NP(x),\ M(Ux) \sim P(x),\ NP(a),\ P(a)\},$$

$$\nu = \{(Ux) \sim P(x),\ \sim P(b)\}$$

представляет собой модельную систему (в новом смысле, определяемом посредством (C.N*) вместо (C.N⁺)), которая показывает, что формула (1) не общезначима.

Можно, конечно, принять предположение о том, что все, существующее в некотором возможном положении дел, существует также во всех альтернативных положениях дел; короче говоря, что все существующее существует необходимо. Однако важно понять, что в таком предположении нет нужды. И важно также понять, что, *если* это предположение принимается, мы обычно должны вносить другие изменения в наши условия в дополнение к усилению (C.N⁺) до (C.N*). Если в основе отношения альтернативности лежит отношение достижимости, то можно видеть, что должно быть выполнено следующее условие, если каждый актуально существующий индивид считается существующим необходимо:

(C.U*) *Если* $(Ux)\,p \in \mu$ *и если* b *встречается в формулах некоторого модельного множества, из которого достижимо* μ *(или в формулах* μ*), то* $p\,(b/x) \in \mu$.

Это новое условие действительно необходимо, так как можно показать, что (C.N⁺) не влечет (C.U*) и (C.U*) не влечет (C.N⁺). Однако (C.U*) и (C.N⁺) являются следствиями следующего условия, которое в явном виде исчерпывающе выражает предположение о том, что свободные индивидные переменные могут переходить из одного модельного множества в его альтернативы:

(C.само =*) *Если* a *встречается по крайней мере в одной формуле* μ *и если* ν *является альтернативой* μ, *то* $(a=a) \in \nu$.

Таким образом, мы получили две различные системы, одна из которых обходится без предположения о том, что все актуально существующие индивиды существуют необходимо, а другая принимает это предположение. Первая использует наши первоначальные условия, за исключением того, что (C. N⁺) заменяется на (C.N*). Мы будем называть ее системой M. Другая будет называться системой M*. Ее можно получить, присоединив к условиям M добавочное условие (C.само =*). Однако это не единственный способ получить ее. M* может быть получена из M посредством усиления условий (C.N⁺) и (C.U) до (C.N*) и (C.U*) соответственно. Можно показать, что каждое множество формул, которое выполнимо в получившейся системе, выполнимо также и в M*. (Обратный результат следует из того, что было сказано выше.)

Чтобы проиллюстрировать использование (C.само =*), аналогичное использованию (C.N*) (и (C.U*)), можно указать на то, что рассуждение (2)—(7), изложенное выше, может быть осуществлено благодаря этому условию следующим образом: (2)—(5) остаются прежними; затем

$$(5^*) \qquad\qquad (a=a) \in \nu$$

из (4) на основе (C.само=*). Теперь (6) оправдывается с помощью (C.N⁺). Последний шаг (7) получается прежним способом, завершая рассуждение.

Используя (C.U*) вместо (C.U), мы можем рассуждать следующим образом: (2)—(5) опять остаются прежними; (7) следует из (5) благодаря (C.U*), а (6) получается соответственно на основе (C.N*), а не (C.N⁺).

Эти варианты иллюстрируют ту мысль, что M* может быть получена различными способами.

Из M и M* мы получаем две новые системы, добавляя к их условиям новое условие (C.U). Здесь мы можем использовать любую формулировку M*. Если используется вторая формулировка, то становится возможным упрощение, состоящее в том, что нет необходимости усиливать (C.U) до (C.U*).

Система M заслуживает особого внимания, поскольку возможность обойтись без более строгих предположений, характеризующих M*, не всегда достаточно ясна. В частности, эти предположения легко ускользают в синтаксической (дедуктивной) формулировке квантифицированной модальной логики.

Действительно, если обычные аксиомы и правила вывода пропозициональной модальной логики просто соединяются с обычными аксиомами (и, может быть, правилами вывода) для кванторов, мы, как правило, получаем M*, а не M, не замечая того, что мы приходим к слишком строгому и часто неоправданному предположению о том, что все индивиды, существующие в одном возможном мире, должны существовать во всех его альтернативах.

Для того чтобы предохранить себя от принятия этого предположения, мы должны добавить соответствующую оговорку ко многим обычным аксиомам или правилам вывода. Например, к хорошо известному правилу вывода

$$\frac{p \supset q}{Np \supset Nq}$$

мы должны добавить требование, гласящее, что все свободные индивидные переменные p должны встречаться также в q.

Аналогично даже к modus ponens

$$\frac{p,\ p \supset q}{q}$$

мы должны добавить то требование, что все свободные переменные p должны встречаться в q.

Целесообразность этих ограничений нелегко увидеть в рамках дедуктивной структуры, о чем свидетельствует их отсутствие на ранних стадиях развития квантифицированной модальной логики. Преимущества семантического подхода иллюстрируются той легкостью, с которой мы обнаружили, что нужно заменить (C.N$^+$) на (C.N*).

В M* предполагалось, что каждую свободную индивидную переменную можно переносить из некоторого модельного множества в его альтернативы. Мы можем построить также еще более строгую систему — назовем ее M**, — в которой такой перенос разрешается не только в альтернативы некоторого модельного множества, но даже в произвольные члены той же самой модельной системы. M** может быть получена из M* следующим усилением условия C.U*:

(C.U**) *Если* $(Ux)\,p \in \mu$ *и если* b *встречается в формулах некоторого модельного множества, принадлежащего к той же самой модельной системе, что и* μ, *то* $p(b/x) \in \mu$.

Если нас интересует только выполнимость множеств формул, то имеется более экономный способ получения M**. Можно показать, что понятие выполнимости (определенное для множеств формул) не затрагивается, если к условиям M (или M*) мы присоединяем следующее условие:

(C.дос) *В каждой модельной системе существует по крайней мере одно модельное множество, из которого достижимы все другие члены этой модельной системы.*

Если (C.дос) выполнено, то M** может быть получена из M* посредством присоединения к условиям M* следующей „инверсии" (C.U*):

(C.U$_*$) *Если* $(Ux)\,p \in \mu$ *и если* b *встречается в формулах некоторого модельного множества, которое достижимо из* μ, *то* $p(b/x) \in \mu$.

И наоборот, мы можем присоединить к условиям M* аналогичную инверсию (C.само$=_*$) условия (C.само$=^*$).

Примером формулы, которая значима в M**, но не в M*, является *формула Баркан*

$$M(\mathrm{E}x)\,P(x) \supset (\mathrm{E}x)\,MP(x).$$

Однако очевидно, что формула Баркан неприемлема для большинства модальностей в качестве значимого логического принципа. Ясно, что *возможность* существовать не всегда приводит к актуальному существованию: регулирование рождаемости не является логически невозможным.

Если отношение альтернативности считается симметричным, то различие между M* и M** исчезает (при условии, что (C.дос) выполнено). Так как предположения, лежащие в основе M*, легко проникают в обычные дедуктивные системы квантифицированной модальной логики, можно ожидать, что даже более строгие незаконные предположения, лежащие в основе M**, столь же легко проникают в те дедуктивные системы, в которых отношение альтернативности неявно считается симметричным. Примером этого является S5 Льюиса. Это ожидание действительно оправдывается: формула Баркан доказуема в квантифицированной S5 без каких-либо добавочных предположений (см. [3]).

Некоторый интерес может представлять рассмотрение того, каким образом формула Баркан может быть доказана в M** различными способами. Рассуждение снова будет строиться по типу reductio ad absurdum. Противоречащим предположением является

(8) $$M(Ex)\,P(x) \in \mu \in \Omega,$$

(9) $$(Ux)\,N \sim P(x) \in \mu \in \Omega$$

для некоторой подходящей модельной системы Ω. Из (8) следует, что

(10) $$(\mathrm{E}x)\,P(x) \in \nu \in \Omega$$

для некоторой альтернативы ν к μ. Кроме того,

(11) $$P(a) \in \nu$$

из (10) посредством (C.E) для некоторого a. Теперь мы можем получить

(12) $$N \sim P(a) \in \mu$$

из (9) и (11) на основе (C.U**) или (C.U$_*$), что в свою очередь благодаря (C.N*) влечет

$$(13) \qquad \sim P(a) \in \nu,$$

которая вместе с (12) нарушает (C.∼), завершая, таким образом, наше рассуждение.

Если мы используем (C.само=$_*$), а не (C.U**) или (C.U$_*$), то вместо (12) можем получить

$$(11^*) \qquad (a=a) \in \mu$$

из (11) на основе (C.само=$_*$). Тогда (12) следует благодаря простому (C.U), а (13) — благодаря (C.N*).

Если отношение альтернативности считается симметричным, μ является альтернативой ν (благодаря симметрии), и мы получаем (даже на базе одних предположений M*) (11)* из (11) благодаря (C.само*) и т. д. или (12) из (9) благодаря (C.U*), действуя дальше, как и раньше.

Однако если не предполагается перенесение переменных (и не предполагается симметричности), рассуждение, начинающееся с (8) — (9), приводит, в сущности, к модельной системе Ω, которая показывает незначимость формулы Баркан в M*. Действительно, все, что мы должны сделать, это установить $\Omega=\{\mu, \nu\}$, в которой ν является альтернативой μ и

$$\mu=\{M(\mathrm{E}x)\,P(x)\,\&\,(Ux)\,N\sim P(x),\ M(\mathrm{E}x)\,P(x),\ (Ux)\,N\sim P(x),\ N\sim P(b),\ \sim P(b)\},$$
$$\nu=\{(\mathrm{E}x)\,P(x),\ P(a),\ \sim P(b)\}.$$

Таким образом, мы достигли очень большой гибкости. Мы можем допустить принцип переноса, на котором основывается значимость формулы Баркан, и можем сделать это даже различными способами, но, делая это, мы должны ясно понимать, что именно и для чего мы делаем.

Можно поставить вопрос относительно того, возможно ли в M усилить условие (C.=) до некоторой формы (будем называть ее (C.=!)), в которой снято ограничение на атомарные формулы и равенства. Оказывается, что, если принять условие (C.=!), мы выходим за рамки M (или M*) и получаем более строгую систему, которую можно получить также, приняв следующее условие:

(C.=*) *Если $a=b \in \mu$, если ν является альтернативой μ и если a и b встречаются в формулах ν, то $a=b \in \nu$, или в еще более простой форме:*

(C.N=!) *Если* $a=b \in \mu$, *то* $N(a=b) \in \mu$.

Другими словами, допущение (C.=!), отличного от (C.=), равнозначно допущению о том, что все равенства необходимы. Это весьма интересно, так как (C.=!) для всех практических целей идентично одной из форм *принципа замены равных*. Поскольку не имеет смысла предполагать, что все равенства необходимы, постольку эквивалентность (C.=!) и (C.N=!) дает серьезный аргумент против этого варианта данного принципа.

Тем не менее прицип замены равных — даже в рассматриваемой здесь форме — иногда принимается (более или менее явно) при построении синтаксических (дедуктивных) систем квантифицированной модальной логики. Поэтому неудивительно, что в таких системах можно „доказать“ столь парадоксальные „теоремы“, как, например,

$$(14) \qquad (a=b) \supset N(a=b).$$

Опять-таки может оказаться поучительным беглое сравнение различных способов, с помощью которых может быть „доказана“ формула (14). Будем использовать $(a \neq b)$ в качестве сокращения для $\sim(a=b)$. Предположим, что

$$(15) \qquad (a=b) \in \mu \in \Omega,$$
$$(16) \qquad M(a \neq b) \in \mu \in \Omega.$$

Эти два утверждения образуют предположение, которое должно быть сведено к абсурду. Ω является, конечно, модельной системой. Тогда мы получаем

$$(17) \qquad (a \neq b) \in \nu \in \Omega$$

из (16), согласно (C=M*), для некоторой альтернативы ν к μ. Теперь из (15) условие (C.=*) дает

$$(18) \qquad (a=b) \in \nu.$$

Последняя формула вместе с (17) противоречит (C.∼), завершая, таким образом, сведение к абсурду.

Если мы не хотим использовать (C.=*), мы можем рассуждать следующим образом: (15) — (17) остаются прежними. Вместо (18) мы получаем

(18)* $$M(a \neq a) \in \mu$$

из (15)—(16) на основе (C.=!). Это влечет

(19) $$(a \neq a) \in \lambda \in \Omega$$

благодаря (C.M*) для некоторой альтернативы λ к μ. Но (19) нарушает (C.само$\neq$), завершая, таким образом, сведение.

В ином случае, используя (C.N=!), мы можем действовать следующим образом: (15)—(17) остаются прежними. Вместо (18) мы можем сначала получить

(18**) $$N(a = b) \in \mu$$

из (15) благодаря (CN=!). Тогда (18) следует из (18**) благодаря (C.N=*), и сведение вновь будет завершено.

Однако ни одно из этих рассуждений не может быть осуществлено, если все незаконные предположения отвергнуты, и тогда легко построить контрпримеры для того, чтобы показать незначимость (14).

Если отношение альтернативности считается симметричным, то (C.=*) влечет некоторую свою „инверсию" (которая может быть названа (C.$=_*$)), получаемую из него благодаря тому, что μ и ν меняются ролями. В системе, которая принимает такое предположение, можно „доказать", что каждая пара, возможно, тождественных индивидов состоит из актуально тождественных индивидов. Примером может служить дедуктивная система квантифицированной S5 с принципом замены равных в качестве одной из аксиом. Мы видели, однако, что нет необходимости принимать (C.=!), отличное от (C.=). Напротив, наши рассуждения должны были показать, что принцип замены равных нормальным образом неприемлем в модальной логике, по крайней мере в той форме, которая была рассмотрена здесь. Одной из причин того, что этот принцип часто принимается, является неспособность логиков увидеть, что (C.=!) включает в себя бесконечно много гораздо более серьезных и сомнительных предположений, чем (C.=). Кроме того, синтаксические методы часто не дают возможности заметить реально принимаемых предположений. Семантический же подход выявляет эти предположения и показывает, каким образом можно обойтись без них.

Однако нужно еще исследовать, нельзя ли поддержать принцип замены с помощью других соображений и нет ли некоторого иного варианта этого принципа, который окажется лучше, чем тот, который мы анализировали здесь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Birkhoff G. Lattice Theory. New York, 1948, p. 42—43.
2. Wright G. von. An Essay in Modal Logic. Amsterdam, 1951.
3. Prior A. N. Modality and Quantification in S5.— „The Journal of Symbolic Logic", № 21, 1956.

А. Н. Прайор

ВРЕМЕННАЯ ЛОГИКА и НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВРЕМЕНИ*

1. Пятнадцать временных операторов Хэмблина

Если мы будем использовать переменные p, q, r и т. д. для „суждений" в древнем и средневековом смысле, согласно которому их истинностные значения могли быть различными в различные моменты времени (как, например, „Сократ сидит" истинно тогда, когда он сидит, и ложно в другое время), мы можем присоединять к ним не только обычные функционально-истинностные связки C, K, N и т. д., но и то, что я называю временными операторами, как, например:

P, означающий „было так, что" (слабое прошедшее время);

H, означающий „всегда было так, что" (сильное прошедшее время);

F, означающий „будет так, что" (слабое будущее время);

G, означающий „всегда будет так, что" (сильное будущее время).

Эти операторы могут образовывать различные комбинации с функционально-истинностными связками и друг с другом, например, $KKpHpGp$ будет означать „имеет место p, всегда было p, и всегда будет так, что p"; $PKpq$—„было так, что p и q", FPp—„будет так, что было так, что p".

Понимание времен как операторов, образующих предложения из предложений, недавно было подвергнуто критике Мейтсом в реферате [8], где он говорит, что средневековый пример „белое было черным" (album fuit nigrum) показывает, что „А было В" нельзя, не опасаясь парадоксов, толковать как „было так, что А есть В". Но средневековые логики сами умели отвечать на это возражение. Вальтер Бурляйгх, например, доказывал в [3, с. 48—49], что для того, чтобы суждение прошедшего времени было истинным, данный предикат должен утверждаться в настоящем времени не обязательно относительно грамматического субъекта, а de illo pro quo subiectum supponit *, например, для того, чтобы выражение album fuit nigrum ** было истинным, est nigrum *** должно быть истинно относительно illud quod est album ****, хотя и не нужно, и не может быть того, что раньше было истинно, что album est nigrum *****. В моей терминологии перед нами не простой пример суждения $P\varphi x$, а сложное утверждение $K\psi xP\varphi x$, что относительно некоторого объекта x „имеет место, что x бел и что было так, что x черен". Этот пример является, кроме того, оправданием для еще одной черты моего символизма, а именно отсутствия специального функтора настоящего времени. Я опускаю его, потому что „имеет место, что p" всегда эквивалентно просто p. Фома Аквинский, комментируя в [1] на с. 27 аристотелевское описание глаголов в косвенных временах как casus verbi ******, хотя сам глагол стоит в настоящем времени, замечает, что „preateritum vel futurum dicitur per respectum ad praesens. Est enim praeteritum quod fuit praesens, futurum autem quod erit praesens" *******.

Символически, если оператор „имеет место, что" обозначить через S, то $Pp=PSp$ и $Fp=FSp$.

Профессор Я. Н. Финдлей в 1951 году в подстрочном примечании в [6] высказал предположение, что должно быть исчисление с такими функторами, как F и т. п., и мне в 1954 году пришлось набросать такое исчисление, чтобы рассмотреть некоторые исторические проблемы, ко-

* Prior A.N. Tense-logic and the continuity of time.— „Studies Logica", Том XIII. 1962. Эта статья представляет собой содержание трех лекций, прочитанных Прайором в Варшаве, когда он был гостем Польской Академии наук в октябре 1961 года.

*—относительно того, что считается субъектом *(лат.)*.

**—белое было черным *(лат.)*.

***—есть черное *(лат.)*.

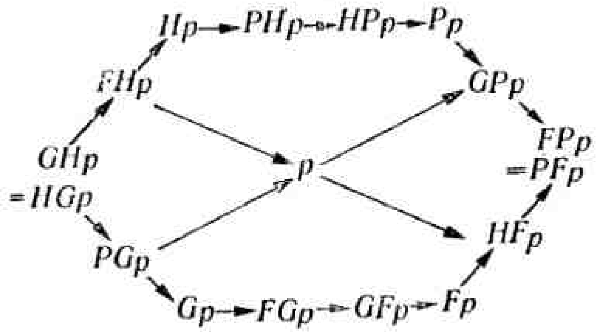
****—того, что есть белое *(лат.)*.

*****—белое есть черное *(лат.)*

******—случая глагола *(лат.)*

*******—это есть прошедшее или будущее, высказанное в отношении к настоящему. И даже прошлое, которое было настоящим, и будущее, которое будет настоящим *(лат.)*

торых я коснусь в следующем параграфе. Более подробно я рассмотрел этот вопрос в президентском обращении к Новозеландской секции Австралийской философской ассоциации, которое было опубликовано как [13], а еще подробнее в 1956 году в Локковских лекциях в Оксфорде, опубликованных как [12]. В письме от марта 1958 года д-р К. Л. Хэмблин из Сиднея, который отреферировал [12] в [7], сообщил замечательный результат, который, по моему, надо считать первым важным „прорывом" в этой области, а именно: если принять некоторые весьма естественные предпосылки, то любая последовательность функторов P, H, F и G, независимо от ее длины эквивалентна одной из 15 групп (в это число включается и пустая последовательность, то есть „настоящее время"). Отношение следования между этими 15 „временными операторами" может быть показано на следующей диаграмме:



Интуитивно легко усмотреть правдоподобие этих эквивалентностей и импликаций, а также то, что импликации необратимы. Например HGp — „всегда было так, что всегда будет так, что p", и GHp — „всегда будет так, что всегда было так, что p", оба, разумеется, истинны тогда и только тогда, когда есть, всегда было и всегда будет так, что p, FGp — „будет так, что всегда будет так, что p", означает, что раньше или позже мы достигнем (если еще не достигли) такого момента времени, после которого p всегда будет истинно. Ясно, что это влечет GFp, „всегда будет так, что будет так, что p", а не наоборот, ибо GFp может быть истинным и тогда, когда p должно в будущем всегда *попеременно* становиться то истинным, то ложным. Далее, если что-то было истинным и является истинным сейчас,

то относительно будущего времени также будет верно, что оно было истинным, то есть и Pp и p имплицируют GPp (ср. Оккам в [9, с. 4]: Si haec propositio sit modo vera: Haec res est, quacumque re demonstrata, semper postea erit haec vera: Haec res fuit *). Индетерминиста может встревожить аналогичный принцип, что если что-то истинно или будет истинно, то, следовательно, всегда было так, что оно будет истинно, то есть что и p и Fp имплицируют HFp; однако нетрудно проинтерпретировать временные операторы таким образом, что этот принцип окажется совместимым с индетерминистской гипотезой (например, „оккамистская" интерпретация изложена в моей статье [15]).

Хэмблин отметил, что формально мы можем вывести все эти эквивалентности и импликации из следующих постулатов:

I. Hp может быть определено как $NPNp$ („всегда было так, что p, если и только если никогда не было такого случая, чтобы было не -p"), а Gp — как $NFNp$.

II. Аксиомы: 1) $EFApqAFpFq$; 2) $CGpFp$; 3) $EFFpFp$; 4) $EFPpAApFpPp$; 5) $EGPpApPp$; 6) $CFGpGFp$.

III. Правила: (i) если $\vdash \alpha$, то $\vdash G\alpha$; (ii) $E\alpha\beta \rightarrow EF\alpha F\beta$ и (iii) (цитирую Хэмблина) „правило зеркального отображения, позволяющее из любого закона выводить соответствующее положение, заменяя P на F, и наоборот", причем все это присоединяется к обычному пропозициональному исчислению. Можно заметить, что эта формулировка построена по образцу фон-вригтовской формулировки модального исчисления в приложении к [16], и нет сомнений, что возможна более ясная и элегантная эквивалентная аксиоматизация (в [12], например, я отметил, что если мы используем Fnp для суждения „через промежуток времени n будет p" и Pnp соответственно, то Fp превратится в $\Sigma nFnp$, а Gp — в $\Pi nFnp$, Pp и Hp определяются сходным образом; тогда некоторые из вышеприведенных законов следуют из теории квантификации с некоторыми новыми постулатами для Pn и Fn). Однако и это множество аксиом и правил является достаточным в качестве базиса для дальнейшего обсуждения.

Из них мы можем не только вывести эквивалентности и импликации вышеприведенной диаграммы, но и дока-

* Если суждение „эта вещь есть" было истинным, независимо от того, как эта вещь обозначена, то всегда впоследствии будет верно: „эта вещь была" (*лат.*).

зать, что всякая сложная комбинация из P, H, F и G будет эквивалентна одной из 15 групп. Достаточно доказать это для одного „крыла" диаграммы, скажем, для нижнего, а остальные случаи можно получить, используя правило „зеркального отображения". В самом деле, если мы будем по очереди приписывать P, H, F или G ко всем нижним комбинациями операторов, то получаются следующие результаты:

	HG	PG	G	FG	GF	F	HF	PF
P	HG	PG	PG	FG	GF	PF	PF	PF
H	HG	HG	HG	FG	GF	HF	HF	PF
F	HG	GF	FG	FG	GF	F	F	PF
G	HG	G	G	FG	GF	GF	GF	PF

В этой диаграмме первый элемент показывает, что PHG эквивалентно HG и т. д. Очевидно, что последовательное применение этих эквивалентностей и соответствующих эквивалентностей для верхней части сводит каждую последовательность временны́х операторов, какой бы она ни была длинной, к одной из 15 групп, например $PHFG = PFG$ (так как $PHF = PF$, или, иначе, так как $HFG = FG) = FG$.

Однако в декабре 1959 года я заметил любопытную вещь относительно хэмблиновских аксиом. Вторая его аксиома — $EFFpFp$, которая утверждает эквивалентность „будет так, что будет так, что p" и „будет так, что p", очевидно, предполагает непрерывность времени. То, что из более длинной формулы следует более короткая, еще не связано ни с какими предположениями такого рода, но „будет так, что p" влечет „будет так, что будет так, что p", только если мы предположим, что между настоящим и любым моментом будущего, как бы ни был он близок к настоящему, всегда существует момент времени, следующий за настоящим, но предшествующий этому будущему моменту. Если бы время было дискретно и если бы p становилось истинным непосредственно в следующий момент времени, но после этого больше никогда истинным бы не было, то „будет так, что p" было бы истинно, а „будет так, что будет так, что p" было бы ложно. С другой стороны, его *пятая* аксиома — $EGPpApPp$ — предполагает, что время дискретно, хотя это и не является непосредственно очевидным, и я лично нахожу, что это легче показать на примере „дуала" этой аксиомы, то есть

$EPGpKpGp$, доказуемого из аксиом следующим образом:

$$
\begin{aligned}
PGp &= NNPGp\ (p = NNp)\\
&= NNPNFNp\,(Gp = NFNp:\mathrm{Df})\\
&= NHFNp\,(Hp = NPNp:\mathrm{Df})\\
&= NANpFNp\,(HFp = ApFp, \text{ по акс. 4 и прав. (iii)})\\
&= NANpNNFNp\,(p = NNp)\\
&= NANpNGp\,(Gp = NFNp:\mathrm{Df})\\
&= KpGp\,(Kpq = NANpNq).
\end{aligned}
$$

Здесь следование $KpGp$ из PGp не предполагает никаких допущений относительности непрерывности или дискретности времени. В любом случае ясно, что если было так, что всегда будет так, что p, то сейчас p и всегда будет так, что p. Затруднения возникают с конверсией этой импликации. Предположим, что теперь p и всегда будет p, но до настоящего времени никогда не было так, что p. Если есть такая вещь, как последний предшествующий момент (то есть если время дискретно), то ясно, что в этот момент прошлого, и, следовательно, некоторый момент прошлого было так, что во все моменты времени, будущие по отношению к этому моменту, будет p. Но если время континуально и *нет* такого последнего момента, то между любым моментом прошлого, каким бы близким он ни был, и настоящим найдется другой момент, который следует за ним и в который еще *не* было так, что p.

Но отсюда не следует, что постулаты Хэмблина противоречивы. В действительности, как указал ранее в 1961 году д-р Т. Я. Смайли, они непротиворечивы, так как выполняются совместно, если Pp, Fp, Hp и Gp эквивалентны просто p. Однако это приравнивание делает временную логику бессмысленной, а единственные интуитивные основания для того, чтобы принять все хэмблиновские постулаты без этого приравнивания, противоречивы. И он, и я были вынуждены согласиться, что вся система редукций, какой бы она ни была прекрасной, должна быть отброшена и что временна́я логика, по-видимому, является менее изящной и более сложной, чем казалось.

Однако в октябре 1961 года, заканчивая в Варшаве настоящую статью, я проверил детали редукций, чтобы точно выяснить, какие из них предполагают сомнительное следование PGp из $KpGp$, и обнаружил, что это только редукции $GPGp$ к Gp, дуальные ей эквивалентности Fp и $FHFp$ и их зеркальные отображения. Одно только равенство $GPGp = Gp$ надо рассмотреть детально. Доказать его из хэмблиновских аксиом можно, кажется, лишь так:

$$\begin{aligned} Gp &= NFNp \ (\mathrm{Df}) \\ &= NFFNp \ (FpFFp) \\ &= NFNNFNp \ (p = NNp) \\ &= GGp \ (\mathrm{Df.}\ G) \\ &= KGpGGp \ (CCpqCpKpq) \\ &= GKpGp \ (KGpGq = GKpq - \text{дуал. акс. I}) \\ &= GPGp \ (\text{дуал. акс. 5, доказ. выше}). \end{aligned}$$

Более детальный анализ показывает, что только следование $GPGp$ из Gp требует, чтобы из $KpGp$ следовало PGp (конверсия первого требует лишь конверсии последнего, что совершенно безопасно). Но легко видеть, что из Gp следует $GPGp$ и тогда (как в вышеприведенном доказательстве), когда время дискретно, и тогда, когда оно непрерывно. В самом деле, предположим, что p будет истинно во всякий будущий момент времени, каким бы близким он ни был, хотя сейчас p не истинно. Тогда между любым будущим моментом времени, каким бы он ни был близким, и настоящим найдется другой будущий момент времени, прошлый по отношению к этому будущему, такой, что p будет истинно во все моменты времени, будущие по отношению к нему; то есть, если всегда будет так, что p, то всегда будет так, что *было так*, что всегда будет так, что p. Поэтому мы можем улучшить систему Хэмблина, ослабив эквивалентность $EPGpKpGp$ до безопасной импликации в одну сторону $CPGpKpGp$ (это можно сделать, ослабив его четвертую аксиому до импликации $CApPpGPp$) и добавив $CGpGPGp$ в качестве новой аксиомы; и все его редукции будут сохранены на этот раз на совершенно непротиворечивой основе предположения, что время непрерывно.

2. Непрерывность времени и „главный аргумент“ Диодора

Импликация $CKpGpPGp$ имеет, возможно, и теоретический, и исторический интерес, поскольку дедуктивно эквивалентная ей формула играет важную роль в той

реконструкции „главного аргумента“ греческого логика Диодора Кроноса, которую я попытался дать в 1954 году. В первый раз я изложил эту реконструкцию в [11], а затем в слегка измененной форме в [12], после чего она обсуждалась в статье Бекера [2]. Здесь я только кратко изложу ее, а затем сделаю новые замечания относительно этого вопроса.

Цель „главного аргумента“, как я его понимаю, состоит в опровержении аристотелевского взгляда, что хотя повлиять на *прошлое* не могут ни люди, ни боги, но в *будущем* имеются альтернативы, между которыми возможен выбор. Вопреки этому Диодор утверждает, что возможное есть просто то, что либо истинно, либо будет истинно (то есть он сводит модальную логику к временной логике, принимая, по определению, что $Mp = ApFp$), и что то, что не истинно и не будет истинным, не является возможным. „Главный аргумент“ состоит в доказательстве этого на основе допущения самих перипатетиков, что мы не свободны по отношению к прошлому ($CPpNMNPp$), и их дальнейшего утверждения, что то, что с необходимостью влечет невозможное, само невозможно ($CLCpqCNMqNMp$). Хотя ни в одном достаточно обширном тексте не говорится о том, как это доказательство было проведено в деталях, оно предположительно может быть воспроизведено следующим образом: если некоторое предложение p теперь и всегда будет ложно, то уже сейчас, относительно настоящего времени, было так, что p всегда будет ложно ($CKNpGNpPGNp$), и поэтому, поскольку прошлое нельзя изменить, теперь *не может не* быть так, что было так, что p будет ложно. Но если p теперь истинно, то теперь *было бы* „не верно, что было так, что p всегда будет ложно“ (поскольку сейчас p истинно), то есть настоящая истинность p влекла бы эту теперь невозможную вещь, и, следовательно, сама является невозможной.

Символически

$$\begin{aligned} KNpGNp &\to PGNp \\ &\to NMNPGNp \ (\text{так как } CPpNMNPp) \\ &\to NMp \ (\text{так как } LCpNPGNp \text{ и } CLCpqCNMqNMp). \end{aligned}$$

Это рассуждение, будучи реконструированным, существенно зависит от того принципа, что если p теперь ложно и всегда будет ложно, то уже теперь имеет место, что p всегда будет ложно; интуитивным обоснованием этого принципа является то, что если p сейчас ложно и всегда будет ложно, то по крайней мере в тот момент прошлого, который непосредственно предшествует настоящему, будет верно „никогда не будет так, что p“, хотя бы это и не было верно ни для какого другого момента прошлого. (Это становится достаточно ясным из диаграммы, приведенной Бекером в [2, с. 252]). Но (и таково мое новое утверждение) если время непрерывно, то нет *непосредственно* предшествующего настоящему момента времени, и если только в настоящий момент p стало ложным, то между любым прошлым моментом (как бы он ни был близок к настоящему) и настоящим найдется другой момент (еще более близкий), в который p *не* ложно, следовательно, ни в один момент прошлого не будет верно „p всегда будет ложно“. Итак, без предпосылки атомистического понимания времени данный исторический довод несостоятелен. (Именно осознание этого факта в связи с диодоровским аргументом помогло мне заметить предположение дискретности в пятой хэмблиновской аксиоме.)

Если отвлечься от того, насколько действен аргумент Диодора, его определение возможного как того, что есть либо будет истинным ($Mp = ApFp$), и вытекающее отсюда определение необходимого как того, что истинно сейчас и будет истинно в любой момент времени ($Lp = KpGp$), ставят перед современным модальным логиком интересный вопрос: какие из современных модальных систем будут соответствовать этим определениям (если вообще имеются такие системы)?

Есть три системы, непосредственно представляющиеся нашему рассмотрению, а именно: фейсовская система T (эквивалентная системе M фон Вригта) и льюисовские системы S4 и S5. Рассмотрим следующие аксиомы, которые добавляются к пропозициональному исчислению вместе с определением Mp как $NLNp$ и „правилом необходимости“ — если $\vdash \alpha$, то $\vdash L\alpha$:

(1) $CLpp$ (2) $CLCpqCLpLq$

(3) $CLpLLp$ (4) $CNLpLNLp$.

Если мы используем только (1) и (2), то получим фейсовскую систему T; если добавим к ним (3), получим систему, эквивалентную льюисовской системе S4; а если

вместо (3) добавим (4), получим систему, эквивалентную более сильной льюисовской системе S5 (в которой (3) доказуемо).

Я показал в [11], используя диодоровские определения и фрагмент временной логики, что можно доказать все постулаты S4, а характеристический постулат S5 недоказуем. Это наводило на мысль, что диодоровская система либо совпадает с S4, либо лежит между S4 и S5. В [12] я несколько поспешно отвлекся от второй возможности и предложил следующую матрицу как характеристическую для S4: последовательности из 0 и 1; булевские C и N; Lp принимает значение 1 в тех и только тех точках, для которых p принимает значение 1 в этой точке и во всех точках, следующих за ней. (Это, разумеется, соответствует идее, что Lp истинно тогда, и только тогда, когда p истинно в это время и во все последующие моменты времени.) Но Леммон и другие смогли показать, что матрица такого рода не является характеристической для S4 и что она подтверждает не только все постулаты S4, но и некоторые формулы, относительно которых с помощью других матриц можно показать, что они недоказуемы в S4, особенно формулы $CMLpLMp$ (аналогичную закону перестановки кванторов $C\Sigma x\Pi y\varphi xy\Pi y\Sigma x\varphi xy$) и $ALCLpLqLCLqLp$. Систему, получающуюся добавлением к S4 первой из них, они назвали S4.2, а систему, получающуюся добавлением второй, — S4.3. Далее они показали, что S4.3 содержит S4.2, но не содержится в ней. Позднее Гич отметил, что аксиома S4.3 может быть сокращена до $ALCLpqLCLqp$. Но даже S4.3 не содержит всех формул, которые подтверждаются матрицей, ибо Даммет и Леммон показали в [4], что формула

$$CLCLCpLpLpCMLpLp,$$

подтверждаемая нашей матрицей, не содержится в S4.3. Позднее Гич показал, что в S4.2, следовательно, в любой более сильной системе из этой формулы выводима немного более короткая формула

$$CLCLCpLppCMLpp,$$

из которой она сама в свою очередь выводится. Но дает ли эта формула при присоединении ее к S4.3 систему, для которой матрица действительно будет характеристической, еще не известно, так же как не известна и аксиоматизация для диодоровской системы.

3. Логика отношения достижимости между мирами

Теперь я хочу рассмотреть системы, упоминавшиеся в предыдущем параграфе, и некоторые другие с иной точки зрения.

Предположим, что p, q, r и т. д. есть обычные переменные для утверждений, а a, b, c и т. д. — обозначения „миров", или полных положений дел. Будем обозначать „в мире a имеет место, что p" или, выражаясь более свободно, „p истинно в a" как pa. Принимается, что $(Np)a$ имеет место тогда, и только тогда, когда $N(pa)$; $(Cpq)a$ тогда, и только тогда, когда $C(pa)(qa)$, и т. д. (Это предположение позволяет нам использовать простую форму pa вместо, скажем, Tap, которое мы ввели бы, если бы нужно было провести различие между, скажем, $NTap$, то есть $N(pa)$, и $TaNp$, то есть $(Np)a$. Я рассмотрел некоторые системы, в которых проводится такое различие, в [12].) Будем использовать, далее, форму Iab для „a и b тождественны", Uab — для „b либо тождествен a, либо достижим из a", а $(Lp)a$, то есть „необходимо, что p в мире a", будем интерпретировать как сокращение для $\Pi bCUabpb$" p истинно в a и во всех мирах, достижимых из a". (Эти обозначения принадлежат К. А. Мередиту, 1956 г.; а интерпретация — П. Т. Гичу, 1960 г.) Понятие достижимости между мирами пока может остаться неопределенным; некоторые способы его уточнения будут рассмотрены ниже. Можно представить себе, что „быть достижимым из a" означает "быть будущим состоянием a", и таким образом получить обобщение временнóй логики в некоторых направлениях.

Если принимать в качестве аксиом такие формулы, которые истинны в любом произвольно выбранном мире a, то, делая различные предположения об отношении U, можно получить характеристические аксиомы различных модальных логик. Важные допущения, которые следует рассмотреть, могут быть перечислены так (каждая формула считается принятой в некоторой возможной системе):

(i) Uaa (Refl, или рефлексивность U).
(ii) $CUabCUbcUac$ (Trans, или транзитивность U).
(iii) $CUabCUacUbc$ (Recip — этим названием я обозначаю постулат, гласящий, что любые два мира, достижимые из одного и того же мира, достижимы один из другого).
(iv) $CUabUba$ (Symm, или симметричность U).
(v) $AUabUba$ (Connex, или связность U).
(vi) $CUabCUbaIab$ (Asym — между двумя *различными* мирами отношение U не может иметь места в обоих направлениях).
(vii) $C\Pi bC\varphi b\Pi cCKNUbc\Pi dCNUbdUdc\varphi cC\varphi a\Pi eCUea\varphi e$.

Этот последний принцип я называю Ind, или принцип индукции. Он выглядит очень сложным, однако его можно сократить и упростить, если ввести определение

$$Yab = KNUba\Pi cCNUbcUca,$$

и читать как „a непосредственно предшествует b". Мы можем сказать, что мир a „предшествует" миру b, если a не тождествен b и не достижим из b (конечно, называть это „предшествованием" имеет смысл только тогда, когда миры образуют сериальный порядок, так что любой мир, который не совпадает с b и не достижим из него, есть мир, отличный от b и такой, из которого b достижим; но это составляет только один тип случаев, в связи с которыми у нас будет повод обсудить постулат (vii). Теперь мы можем сказать, что мир a „непосредственно предшествует" миру b, если a предшествует b и любой мир, который предшествует b, или предшествует a, или совпадает с ним. Именно это понимание излагается в вышеприведенном определении, которое сокращает постулат (vii) до

$$C\Pi bC\varphi b\Pi cCYcb\varphi cC\varphi a\Pi eCUea\varphi e.$$

То есть если всегда имеет место, что, когда некая функция выполняется b, она также выполняется любым миром, непосредственно предшествующим b, тогда если она выполняется для данного мира a, то она выполняется и для любого мира, из которого a достижим. (Потому что из того, что она выполняется для a, следует, что она выполняется для непосредственного предшественника a, а из того, что она выполняется для непосредственного предшественника, следует, что, и т. д.).

Формулы (i)—(iv) образуют группу, которую я уже исследовал в [14], и главные результаты этого исследования будут перечислены здесь первыми.

Во-первых, существуют некоторые очень простые отношения между самими этими формулами. Trans и Symm совместно влекут Recip, а Refl и Recip совместно влекут Trans и Symm, так что множества

(Refl, Trans, Symm)
(Refl, Recip)

являются дедуктивно эквивалентными. Connex: *AUabUba* влечет Refl: *Uaa*. Connex и Symm совместно влекут очень сильное утверждение *Uab*, означающее, что любой мир достижим из любого другого, из чего также следуют (i)—(iii). Trans и Symm следуют, кроме того, из совершенно отличного предположения *CUabIab*, означающего, что нет способа достигнуть из одного мира какой-либо другой мир; а Connex сам не выводим из (i)—(iii).

Модальные формулы, которые выводимы (как выполняющиеся в любом произвольно выбранном мире *a*) из различных подмножеств этого множества постулатов, включают следующие:

A1. *CLpp*,
A2. *CLCpqCLpLq*,
A3. *CLpLLp*,
A4. *CMLpLp* (эквивалентно *CMpLMp* и *CNLpLNLp*),
A5. *CMLpp* (эквивалентно *CpLMp*),
A6. *CMLpLMp*,
A7. *ALCLpqLCLqp*.

Мы уже отмечали, что если A1 и A2 добавить к пропозициональному исчислению с правилом необходимости, то получится фейсовская система T; если к ним добавить A3, получится льюисовская система S4, а при добавлении A4 вместо A3 получится льюисовская система S5. Если к системе T добавить A5, A6 или A7, получатся системы, содержащиеся, подобно S4, в S5, но независимые от S4 T + A5 была изучена Хинтиккой, T + A6 и A7, насколько я знаю, не были изучены никем; а S4 + A6, то есть T + A3 + A6, дают систему Даммета и Леммона S4.2, в то время как S4 + A7 дают их систему S4.3. S4 + A5 дают S5.

A1 в форме (*CLpp*)*a*, то есть *CΠbCUabpbpa*, следует непосредственно из постулата рефлексивности или *Uaa* — постулата, который имплицитно содержится в нашей интерпретации *Uab* как „*b* либо достижимо из *a*, либо тождественно с ним“, поскольку тождество рефлексивно.

Даже постулата *Uaa* не требуется, чтобы установить A2 в форме (*CLCpqCLpLq*)*a*, то есть *CΠbCUabCpbqbCΠcCUacpcΠdCUadqa*, ибо для вывода этой формулы достаточно одной теории квантификации. То же самое верно относительно правила необходимости в той форме, что если *φa* есть закон, то и *ΠbCUabφb* есть закон.

A3, формулу системы S4, в виде (*CLpLLp*)*a*, или *CΠbCUabpbΠcCUacΠdCUcdpd*, легко вывести из допущения Trans, а формула A4 системы S5, имеющая вид (*CMLpLp*)*a*, или *CΣbKUabΠcCUbcpcΠdCUadpd*, получается из допущения Recip (*CUabCUacUbc*) таким образом:

ΠbdCK	(1) *Uab*	
K	(2) *ΠcCUbcpc*	
	(3) *Uad*	
K	(4) *Ubd*	(1, 3, Recip)
	(5) *pd*	(2, 4).

(В изложении этого предполагаемого доказательства доказываемая формула понимается как имеющая спереди два квантора общности, вместо квантора существования перед антецедентом и квантора общности перед консеквентом.)

Хинтикковская формула A5, в виде (*CMLpp*)*a*, требует только Symm, а характеристическая формула A6 системы S4.2, в виде (*CMLpMp*)*a*, и характеристическая формула S4.3 системы A7, в виде (*ALCLpqLCqp*)*a*, обе следуют из Connex. (Доказательство см. в [14].)

Использование постулатов Asym и Ind легче рассматривать, если обратиться сначала к вопросу о возможной интерпретации „достижимости“, обозначаемой функтором *U*. Одно очень простое чтение его таково: мы можем сказать, что мир *b* достижим из мира *a*, если в мире *a* есть факты относительно мира *b*, то есть если для некоторого *φ* в мире *a* имеет место, что *φb*; например, если в мире *a* имеет место, что в мире *b* имеет место, что для всех *p*, если *p*, то *p*. В этом смысле „достижимости“ можно считать, что любой мир достижим из любого другого, то есть принять в качестве постулата *Uab*, что дает, как мы видим, по меньшей мере систему S5.

Благодаря прямо противоположному условию, что *никакой* мир не достижим из любого другого, мы также приходим по меньшей мере к системе S5. Это может быть, например, в таком случае: однажды я слышал, как профессор У. К. Нил доказывал, что не может быть никаких научных оснований для решения вопроса о конечности мира или бесконечности его. Я спросил его, как быть с теми физическими фактами (эффект Допплера и т. п.), на основании которых некоторые физики-релятивисты утверждают, что пространство является неэвклидовым и „конечным, но неограниченным". Он ответил, что, даже если они и правы, эти физические факты не подтверждают, но и не исключают возможность того, что существует бесконечное число таких конечных, но неограниченных физических пространств, которые не имеют никаких пространственных или физических отношений друг к другу. Конечно, это поразительная идея, но такая возможность логически не исключена, и в этом случае мир b „тождествен или физически достижим из a", только если он тождествен с миром a ($CUablab$), откуда следует Trans и Symm как следствия из $CIabCUbcUac$, $CIabIba$ и $CIbaUba$.

Опять-таки мы можем сказать, что мир, или состояние дел b, достижим из положения дел a, если b является *возможным будущим состоянием* a. Постулат Trans и, таким образом, по меньшей мере модальная система S4, кажется, соответствуют этой интерпретации, поскольку возможное будущее состояние возможного будущего состояния само есть возможное будущее состояние. Однако Symm, очевидно, не соответствует этой интерпретации, так же как с индетерминистской точки зрения не соответствует ей и Connex, ибо если для данного состояния дел могут быть различные возможные будущие состояния, то найдется пара состояний, принадлежащих, так сказать, различным „ветвям", таких, что ни одно из них не достижимо из другого, хотя оба они достижимы из общего начала.

Еще один тип „перехода от мира к миру" описывается Китсом в „Оде к Соловью":

Вдаль, вдаль, к тебе хочу я улететь,
Но не на колеснице Вакха,
А на невидимых крыльях поэзии,
Несмотря на недоумение моего глупого рассудка.

Один мир может быть „достижим" из другого в том смысле, что он является *продуктом воображения* какого-то лица, принадлежащего этому последнему миру. При такой интерпретации Symm (принцип, означающий, что наши продукты воображения таковы, что всегда могут „вообразить себе нас") кажется неуместным, хотя Л. Кэрролл обыгрывал эту идею в „Зазеркалье", когда Единорог удивлялся, что человеческие дети — это не просто создания *его* мифологии, а Твидледум и Твидледи старались убедить Алису, что она существует только в воображении Красного Короля, который на самом деле существовал только в *ее* воображении. Connex также кажется в этом случае неподходящим: некто может создать в воображении два мира, из которых ни один не будет продуктом воображения, созданным в другом мире. С другой стороны, некто *может* вообразить мир, в котором люди вообразили мир, в котором, и т. д. и т. п.; тогда постулат Trans будет означать, что если мы вообразим мир, в котором кто-то вообразил мир и т. д., то мы *тем самым* воображаем этот последний мир. В этом смысле принцип Trans кажется правдоподобным. Получим ли мы таким образом систему S4 (благодаря Trans без Symm или Connex)? Может быть; но Мейнонг (см. Финдлей [5], гл. VI) и Ч. С. Пирс (в [10], 4,61 и 4.172) указывали, что миры только воображаемые являются „неполными" в том смысле, что какое-то утверждение может не быть ни истинным, ни ложным в мире, создатель которого никак не определил соответствующий факт. Это нарушило бы эквивалентность $N(pa)$ и $(Np)a$ и поставило бы модальную систему, соответствующую данному типу отношения „достижимости", вне группы систем, которые мы здесь рассматривали.

Возвращаясь к временны́м интерпретациям, мы можем в заключение рассмотреть вопрос о том, что случится, если под „достижимостью" b из a мы будем понимать, что b есть не просто возможное, а *актуальное* будущее состояние a. Тогда то, что является „тождественным или достижимым" из действительного мира, будет просто тем, что либо истинно, либо будет истинным, то есть появится диодоровская возможность. В этом случае разумно иметь такой постулат, как Connex, а также Trans (положения дел образуют линейный порядок без разветвления, так что для любых a и b, если b не тождественно a и не достижимо из него, то a достижимо из b); однако Symm по-прежнему не желателен. В результате получается, как и можно было ожидать на основании результатов предыдущего параграфа, по меньшей мере S4.3. Здесь стоит упомянуть другую характеристическую аксиому для этой системы, предложенную Хинтиккой, которая не очень коротка, но особенно наглядна при диодоровской интерпретации, а именно:

$$CKMpMqAMKpMqMKqMp.$$

Эта аксиома утверждает (в терминах диодоровских модальностей), что, если p истинно сейчас или будет истинно позже и q также истинно сейчас или будет истинно позже, тогда есть или будет либо комбинация p с q-или-одновременно-или-позже-него, либо комбинация q с p-или-одновременно-или-позже-него. Утверждение этой формулы относительно произвольного мира a при нашем переводе становится таким:

$$\begin{aligned} &CK(\Sigma bKUabpb)-\\ &-(\Sigma cKUacqc)-\\ &-A(\Sigma dKUadKpd\Sigma eKUdeqe)-\\ &-(\Sigma fKUafKqf\Sigma gKUfgpq),\end{aligned}$$

или эквивалентно

$$\begin{aligned} &C(\Sigma bcKKUabpbKUacqc)-\\ &-A(\Sigma deKKUadpdKUdeqc)-\\ &-(\Sigma fgKKUafqfKUfgpq).\end{aligned}$$

Применяя к b и c антецедента принцип Connex, получим $AUbcUcb$. Первая альтернатива, Ubc, вместе с антецедентом дает первую альтернативу консеквента (ибо, поскольку мы имеем Uab pb, Ubc и qc, b и c дают d и e, для которых $KKUadpdKUdeqe$), в то время как другая альтернатива, Ucb, вместе с антецедентом дает другую альтернативу консеквента.

Кажется, что это так хорошо соответствует временно́й последовательности, что можно только удивляться, чего же еще желать, но ведь осталась еще формула Даммета и Леммона, $CLCLCpLppCMLpp$, которая подтверждается моей диодоровской матрицей, но не принадлежит S4.3. В [14] я поднял вопрос о том, выводима ли эта формула из постулата Asym, $CUabCUbaIab$, который при настоящей интерпретации U утверждает необратимость, или нецикличность времени. Оказывается, что нет; мы должны взять постулат, который я назвал Ind, то есть постулат индукции.

Формуле, которую мы теперь рассматриваем, не так легко придать интуитивный смысл, но ее консеквент, $CMLpp$, означает: „если раньше или позже p станет истинным навсегда, то p истинно сейчас", а вся формула доказывается силлогистически из следующих двух лемм:

(а) Если $LCLCpLpp$ (то есть антецедент формулы), то нет и не будет последнего момента, в который p ложно.

(b) Если нет и не будет последнего момента времени, в который p ложно, то если раньше или позже p станет истинным навсегда, то p истинно и сейчас.

(а) следует по транспозиции из

(с) Если есть или будет последний момент времени, в который p ложно, то неверно, что $LCLCpLpp$. „Неверно, что $LCLCpLpp$" эквивалентно $MKNpLCpLp$ (поскольку $LCpq = NMKNqp$ и, таким образом, $NLCpq = NMKNqp$), то есть „раньше или позже будет так, что p-не-истинно (Np), но если p-станет-истинным-то-оно-и-останется-истинным ($LCpLp$), так что (с) эквивалентно

(d) Если есть или будет последний момент времени, в который p ложно, то раньше или позже будет так, что и p-не-истинно, и если p-станет-истинным-то-оно-и-останется-истинным.

Это следует в силу обычных правил квантификации из

(е) Если некоторый момент времени есть тот последний момент, в который p ложно, то в *этот* момент одновременно будет так, что p-не-истинно, и если p-станет-истинным-то-оно-останется-истинным.

Это кажется очевидно истинным и может быть выражено символически и доказано следующим образом: b есть последний момент, в который p ложно, если в b одновременно истинно, что Np и что p будет истинно во все моменты, следующие за b, то есть „b есть последний момент времени, в который p ложно" мы обозначим $KNpb\Pi cC NUcbpc$. Поэтому (е) в целом принимает вид:

(Т1). $CKNpb\Pi cCNUcbpcKNpb\Pi dCUbdCpd\Pi eCUdepe$,

а его предполагаемое доказательство таково:

$$\begin{aligned} \Pi deCK\ &(1)\ Npb\\ K\ &(2)\ \Pi cCNUcbpc\\ K\ &(3)\ Ubd\end{aligned}$$

K (4) pd
(5) Ude
K (6) $CUebUdb$ (5, Trans)
K (7) $CUdbIdb$ (3, Asym)
K (8) $CUdbNpb$ (7, 1)
K (9) $CUebNpd$ (6, 8)
K (10) $NUeb$ (9, 4)
(11) pe (2, 10)

Принцип Asym в этом доказательстве используется в основном для того, чтобы придать значение определению для „b есть последний момент времени, в который p ложно“, ибо если бы время было цикличным (то есть если бы принцип Asym был ложен), то компонент $\Pi cCNUcbpc$ был бы тривиально истинен (потому что тогда было бы $\Pi cUcb$), даже если бы b и *не* был в обычном смысле „последним моментом, в который p ложно“.

Используя T1, или (е), доказываем (d) на основании (d) — (с), а из (с) можно доказать (а), который дает формулировку Даммета — Леммона, если доказано (b). Легко убедиться, что (b) эквивалентно

(f) Если начиная с настоящего момента за каждым моментом времени, в который p ложно, рано или поздно последует другой момент времени, в который p ложно, то, если раньше или позже p станет истинным навсегда, то p истинно и сейчас.

Мы можем доказать это совершенно очевидным образом из более общего утверждения

(g) Если за всяким моментом времени, в который p ложно, рано или поздно последует другой момент, в который p ложно, то, если с какого-то момента p-является-всегда-истинным, оно истинно всегда, начиная с любого момента времени, предшествующего этому данному.

Это доказывается по индукции из

(h) Если за каждым моментом времени, в который p ложно, рано или поздно последует другой момент, в который p ложно, то, если p начиная с некоторого момента навсегда-становится-истинным, то оно стало-навсегда-истинным и в тот момент, который *непосредственно* ему предшествует.

Символически (h) можно выразить так:

(T2) $$C\Pi bCNpb\Sigma cKNUcbNpc - - \Pi dC\Pi eCUdepe\Pi fCYfd\Pi hCUfhph.$$

Поскольку Yfd есть сокращение для $KNUdf\Pi gCNUdgUgf$, то T2 доказывается следующим образом:

$\Pi dfhCK$ (1) $\Pi bCNpb\Sigma cKNUcbNpc$
K (2) $\Pi eCUdepe$
K (3) $NUdf$
K (4) $\Pi gCNUdgUgf$
(5) Ufh
K (6) $CNph\Sigma cK$ (7) $NUch$ } (1)
K (8) Npc }
K (9) $NUdc$ (2,8)
K (10) Ucf (4,9)
(11) Uch (10,5, Trans)
(12) ph (6,7,11)

Напомним, что постулат Ind выражается таким образом:

$$C\Pi bC\varphi b\Pi cCYcb\varphi cC\varphi a\Pi eCUea\varphi e.$$

Подставив в него $\Pi fCUfpf$ вместо φ, получим

(T3) $$C\Pi bC\Pi fCUbfpf\Pi cCYcb\Pi fCUcfpf - - C\Pi fCUafpf\Pi eCUea\Pi fCUefpf.$$

Переименование букв в этом выражении дает

$$C\Pi dC\Pi eCUdepe\Pi fCYfd\Pi hCUfhph - - C\Pi eCUdepe\Pi fCUfd\Pi gCUfgpg.$$

Это вместе с T2 силлогистически дает

(T4) $$C\Pi bCNpb\Sigma cKNUcbNpc - - C\Pi eCUdepe\Pi fCUfd\Pi gCUfgpg,$$

что и является нашим (g).

Однако предположение Ind, которое играет решающую роль в этом доказательстве, допустимо только тогда, когда время дискретно. Ибо Ind означает (при настоящей интерпретации U), что если из того, что p имеет место в данный момент времени, всегда следует, что p имеет место и в непосредственно предшествующий момент времени, то, если p в какой-нибудь момент истинно, оно истинно и во всякий предшествующий момент времени. Но если бы время было непрерывным, то есть если бы не было никакого непосредственно предшествующего момента времени, то антецедент был бы в силу этого истинен во всех случаях; следовательно, и консеквент должен был бы всегда выполняться, то есть должно было бы всегда выполняться, что все, что истинно в некоторый момент времени, истинно и в следующие моменты, и тогда не было бы такой вещи, как изменение. А если время непрерывно (и, следовательно, Ind ложно), то нетрудно придумать опровергающий пример для формулы Даммета—Леммона $CLCLCp LppCMLpp$. Ибо мы можем представить себе случай, когда p истинно в M и во все более поздние моменты времени и ложно во все предшествующие моменты, хотя и нет такого последнего момента, в который p ложно (потому что между M и любым сколь угодно близким из предшествующих моментов времени, в который p ложно, всегда найдется еще более близкий к M момент, в который p также ложно). В этом случае просто не будет такого момента времени, в который p ложно и в который было бы истинно, что, если p становится истинным, оно и остается истинным навсегда, то есть антецедент формулы Даммета—Леммона будет истинен: и если мы установим, что наше „теперь" предшествует M, то „раньше или позже p всегда будет истинно" будет и сейчас истинно, а p не будет истинным, то есть консеквент $CMLpp$ формулы Даммета—Леммона будет ложен.

Формула Даммета—Леммона является поэтому такой же сомнительной, как и пятая аксиома Хэмблина, и как сходная формула, которая может быть использована в „главном аргументе" Диодора. То, что она подтверждается моей матрицей, неудивительно, поскольку элементами этой матрицы являются дискретные последовательности нулей и единиц, такие, что для каждого члена последовательности имеется определенный последующий член — в моей матрице в действительности непреднамеренно отразилось не только диодоровское определение модальности, но и особая черта диодоровской метафизики; возможно, хотя это еще и не доказано, что S4.3 будет удовлетворять диодоровским модальностям *без* этой случайной черты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aquinas Th. In Aristotelis libros peri hermeneias et posteriorum analyticorum expositio. Marietti, Turin, 1955.
2. Becker O. Zur rekonstruktion des „Kyrieuon logos" des Diodorus Kronos.— In: „Erkenntnis und Verantwortung". Festschrift für Theodor Litt. Düsseldorf, 1961.
3. Burgleigh W. De puritate artis logicae tractatus longior. Franciscan Institute, St. Bonaventure, N. Y., 1955.
4. Dummett M. A. E. and Lemmon E. J. Modal logics between S4 and S5.— „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", vol. 4, 1959, p. 250—264.
5. Findley J. N. Meinong's theory of objects. Oxford, 1933.
6. Findley J. N. Time—a treatment of some puzzles.— „Australasian journal of psycology and philosophy". Dec. 1941, p. 216—235. (Reproduced in Flew A. G. N. Logic and language. Ist series. Blackwell, Oxford, 1931.)
7. Hamblin C. L. Review of Prior's [12].— „Australasian journal of philosophy". Dec. 1958, p. 232—234.
8. Mates J. R. B. Review of I. M. Bochénski's Formale Logik.— „Journal of symbolic logic". March 1960, p. 57—62.
9. Ockham W. Tractatus de praedestination et de praescientia dei et de futuris contingentibus. Franciscan Institute, St. Bonaventure, N. Y. 1945.
10. Peirce C. S. Collected papers. Ed. by Ch. Hartshorne and P. Weiss. Harvard, 1931—1935.
11. Prior A. N. Diodorean modalities.— „Philosophical quarterly", July 1955, p. 205—213.
12. Prior A. N. Time and modality. Oxford, 1957.
13. Prior A. N. The syntax of time-distinctions.— „Franciscan studies", vol. 18, №2, 1958, p. 105—120.
14. Prior A. N. Possible worlds.— „Philosophical quarterly", January, 1962.
15. Prior A. N. The formalities of omniscience.— „Philosophy", April 1962.
16. Wright G. H. von. An essay on modal logic. Amsterdam, 1951.

4 № 1212

Е. Леммон

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК I*

Импульс к нынешнему развитию модальная логика получила в книге Льюиса и Лэнгфорда [10]. В последние годы, однако, их аксиоматический подход, связанный с рассмотрением выбранных ad hoc (к случаю) матриц для различения разных модальных систем, дополнился другими методами. Наиболее глубокие из них — это, во-первых, алгебраический метод Мак-Кинси и Тарского (см. [11] и [12] и, во-вторых, семантический метод Крипке (см. [5] и [6]); а затем — другие. Цель данной серии статей — осуществить синтез этих методов. Таким образом, хотя получены новые результаты, главный интерес состоит в нахождении связей между родственными результатами и в установлении общей основы для будущих исследований. Вообще мы покажем, что результаты типа результатов Крипке о семантической полноте могут быть выведены из алгебраических результатов с помощью одной главной теоремы (теорема 21).

В этой первой статье основная часть посвящена установлению того, что алгебраический метод Мак-Кинси — Тарского, столь успешно использованный в связи с S4, может быть распространен на шесть модальных систем, сильнейшей из которых является T. Во второй статье будут рассмотрены более сильные системы, а в третьей мы предполагаем рассмотреть введение кванторов в эти системы.

Все эти системы исследуются общим методом. Сначала устанавливается связь между регулярными матрицами для каждой системы и алгеброй некоторого типа (теоремы 9 и 11). Далее, используя матрицу Линденбаума (теоремы 7 и 8), мы доказываем, что каждая система финитно аппроксимируема и, следовательно, разрешима (теорема 14). Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением конечных алгебр, так что, в-третьих, мы докажем теоремы представления для таких алгебр в терминах алгебры, основанной на множестве всех подмножеств данного множества (теоремы 17 и 18). Эти представления приводят к установлению связи между алгебраическим подходом и подходом Крипке, а отсюда немедленно вытекают результаты о семантической полноте.

* Lemmon E. Algebraic Semantics for Modal Logics I.— „The Journal of Symbolic Logic", 1966, vol. 31, № 1.

I

Слабые модальные системы

В этой статье мы рассмотрим модальные системы, определенные в терминах следующих схем аксиом и правил вывода [1]:

A1. $A \to (B \to A)$;
A2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
A3. $(-A \to -B) \to (B \to A)$;
A4. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;
A5. $\Box A \to -\Box -A$;
A6. $\Box A \to A$;
R1. $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$; R2. $\dfrac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$; R3. $\dfrac{A}{\Box A}$.

В качестве определений мы принимаем следующие:

D1. $A \vee B = -A \to B$;
D2. $A \wedge B = -(-A \vee -B)$;
D3. $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$;
D4. $\Diamond A = -\Box -A$;
D5. $A \Rightarrow B = \Box(A \to B)$;

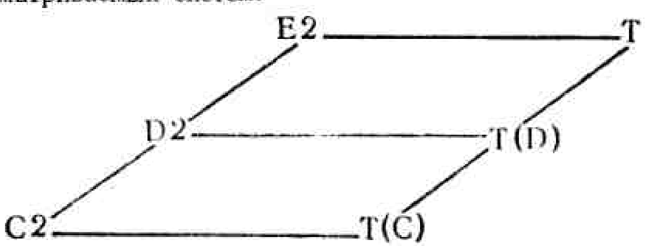
[1] Во всех системах неопределяемыми логическими связками являются $\to$ (материальная импликация), $-$ (отрицание) и $\Box$ (необходимость), и каждая содержит счетное множество пропозициональных переменных $p, q, r, \ldots$. Правила построения формул обычные.

D6. $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;
D7^n. $\Box^n A = \underbrace{\Box \ldots \Box}_{n \text{ раз}} A$;
D8^n. $\Diamond^n A = \underbrace{\Diamond \ldots \Diamond}_{n \text{ раз}} A$;
D9^n. $A \Rightarrow^n B = \Box^n (A \to B)$;
D10^n. $A \Leftrightarrow^n B = \Box^n (A \leftrightarrow B)$ (или $(A \Rightarrow^n B) \wedge (B \Rightarrow^n A)$)

В терминах этих схем аксиом и правил вывода мы определим следующие шесть модальных систем:

C2 = {A1 — A4; R1, R2};
D2 = {A1 — A5; R1, R2};
E2 = {A1 — A4, A6; R1, R2};
T(C) = {A1 — A4; R1, R3};
T(D) = {A1 — A5; R1, R3};
T = {A1 — A4, A6; R1, R3}.

Использование схем аксиом вместо аксиом в определении систем дает возможность не прибегать к правилу подстановки. Наличие A1 — A3, R1 в аксиоматике каждой системы вместе с D1 — D3 означает, что каждая система содержит полное классическое исчисление высказываний как свою подсистему [1], и мы используем это в дальнейшем без доказательства. Надо отметить, что в обеих системах, содержащих A6 (E2 и T), немедленно выводится A5 как схема теорем. Точно так же и для T-систем R2 можно получить как выводимое из R3, A4 и R1 правило. Эти факты, взятые вместе с определениями данных систем, немедленно приводят к следующей таблице включений [2] рассматриваемых систем:



(Здесь линия, проведенная слева направо, означает включение левой системы в правую.)

Система T эквивалентна хорошо известной системе M(T) Фейса — фон Вригта (см. [3] и [17]), а E2 была представлена в несколько иной формулировке в [7]. T(D) и D2 суть соответственно их деонтические дубликаты, в которых схема аксиом A6 заменена более слабой „деонтической" схемой A5. T(C) и C2 суть соответствующие более слабые системы, в которых нет даже A5. Отличительной чертой C2, D2 и E2 является то, что правило R3 T-систем заменено более слабым правилом R2. Стоит напомнить здесь, что, как показано в [7], система S2 Льюиса заключена между E2 и T.

В дальнейшем мы основное внимание уделим C2. Формально это связано с возможностью быстро распространить результаты для C2 на другие системы. Но, кроме того, эта система представляется нам как минимальная модальная логика. Хотя могут быть и были рассмотрены более слабые системы [1], они представляются менее интересными с точки зрения интерпретации; возможная интерпретация C2 дана в [9]. Следующая теорема дает некоторые основные схемы теорем для C2; их доказательство непосредственно здесь не приводится.

Теорема 1.
(1) $\vdash_{C2} \Box (A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$;
(2) $\vdash_{C2} \Diamond (A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$;
(3) $\vdash_{C2} \Diamond (A \wedge B) \to \Diamond A \wedge \Diamond B$;
(4) $\vdash_{C2} \Box A \vee \Box B \to \Box (A \vee B)$;
(5) $\vdash_{C2} \Box^n A \to (B \Rightarrow^n A)$;
(6) $\vdash_{C2} \Box^n - A \to (A \Rightarrow^n B)$;
(7) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to (\Box^n A \Rightarrow^m \Box^n B)$;
(8) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to (\Diamond^n A \Rightarrow^m \Diamond^n B)$;
(9) $\vdash_{C2} \Box^n A \leftrightarrow (- A \Rightarrow^n A)$;
(10) $\vdash_{C2} \Box^n A \leftrightarrow ((B \to B) \Rightarrow^n A)$;
(11) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^n B) \leftrightarrow - \Diamond^n (A \wedge - B)$;
(12) $\vdash_{C2} (A \Rightarrow^{n+m} B) \to ((B \Rightarrow^n C) \Rightarrow^m (A \Rightarrow^n C))$.

[1] См., например, работу Черча [1].
[2] Из матриц, приведенных в последнем разделе настоящей статьи, следует, что все включения в таблице собственные, а других включений между этими системами нет.

[1] Например, системы E1, D1, S0.5 и S0.9 из [7] хотя и не являются собственными подсистемами C2, но в некоторых отношениях они слабее, чем C2. То же самое, конечно, относится к системе Льюиса S1 и системе Фейса S1°.

В следующей теореме даются основные схемы теорем для D2 и E2, которых нет в C2:

Теорема 2.
(1) $\vdash_{D2} \Diamond(A \to A)$;
(2) $\vdash_{D2} \Diamond(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$;
(3) $\vdash_{E2} A \to \Diamond A$.

Отличительной чертой T-систем является усиление теорем соответствующих более слабых систем добавлением префикса в соответствии с правилом R3.

Теорема 3. Если $\vdash_{C2\,(D2,\,E2)} A$, то $\vdash_{T(C)\,(T(D),\,T)} \Box^n A$.
Особенностью, которая нам позднее понадобится, является

Теорема 4. $\vdash_{T(C)} \Box(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$[1].
Одна черта, присущая всем шести системам, хотя ею не обладает, например, S2, состоит в подстановочности *материальной* эквивалентности в смысле следующей теоремы; в дальнейшем мы часто будем ее использовать.

Теорема 5. Для S=C2, D2, E2, T(C), T(D), T, если $\vdash_S A \leftrightarrow B$, то $\vdash_S \ldots A \ldots \leftrightarrow \ldots B \ldots$ (где $\ldots B \ldots$ есть результат замены некоторых вхождений A в $\ldots A \ldots$ на B).

Доказательство проводится по индукции по длине формулы $\ldots A \ldots$, при этом существенно используются правила R2 или R3.

II

Алгебры и матрицы

Как установлено в работе Мак-Кинси — Тарского [12], существует тесная связь между логикой S4 Льюиса и алгебрами с *замыканием*. Аналогичная связь, как показано в [8], существует между логикой T и обобщением алгебр с замыканием, названных алгебрами с *расширением*. Здесь мы рассмотрим дальнейшее обобщение, называемое просто модальной алгеброй, которое мы используем для изучения логики C2.

[1] Более того, $\vdash_{T(C)} (A \Rightarrow^n A) \leftrightarrow (A \Rightarrow^m A)$ для всех m, n.

Определение 1. Система $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ является *модальной алгеброй*, если M есть множество элементов, замкнутое относительно операций $\cup$, $\cap$, $-$ и $\mathbf{P}$, таких, что:

(i) M является булевой алгеброй относительно $\cup$, $\cap$, $-$;

(ii) для $x, y \in M$ $\mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y$.

Определение 2. $\mathbf{N}x = -\mathbf{P}-x$.

Теорема 6. Во всякой модальной алгебре $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$
(i) для $x, y \in M$, $\mathbf{N}(x \cap y) = \mathbf{N}x \cap \mathbf{N}y$;
(ii) для $x, y \in M$, если $x \leqslant y$, то $\mathbf{P}x \leqslant \mathbf{P}y$ и $\mathbf{N}x \leqslant \mathbf{N}y$ (где $x \leqslant y$ означает $x \cup y = y$, что равносильно $x \cap y = x$).
Доказательство
(i) $\mathbf{N}(x \cap y) = -\mathbf{P}-(x \cap y) = -\mathbf{P}(-x \cup -y) = -(\mathbf{P}-x \cup \mathbf{P}-y) = -\mathbf{P}-x \cap -\mathbf{P}-y = \mathbf{N}x \cap \mathbf{N}y$.

(ii) Предположим, $x \leqslant y$, то есть $x \cup y = y$. Тогда $\mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y = \mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}y$, то есть $\mathbf{P}x \leqslant \mathbf{P}y$. Аналогично, используя (i), мы покажем, что $\mathbf{N} \leqslant \mathbf{N}y$.

Модальные алгебры нас будут интересовать как (логические) *матрицы*. Вообще алгебра, в которой выделено некоторое подмножество D *отмеченных элементов*, становится матрицей (так что каждой алгебре мощности N соответствуют 2^N различных матриц). Данную пропозициональную логику можно *проинтерпретировать* в терминах матриц следующим образом: пропозициональные переменные (правильно построенной формулы) (ппф) логики пробегают значение из множества элементов матрицы, логические связки интерпретируются как операции в (или определимые в) матрице; таким образом, каждой ппф A с n пропозициональными переменными соответствует (единственная) матричная функция $f^{(A)}$ от n переменных. Теперь мы скажем, что A *удовлетворяется* (или *общезначима* на) матрицей тогда и только тогда, когда при данной интерпретации значение $f^{(A)}$ для каждого набора из n элементов матрицы принадлежит D; в противном случае мы скажем, что A *опровергается* матрицей. Будем говорить также, что *система* S удовлетворяется матрицей, если и только если все теоремы S удовлетворяются матрицей. Система *характеризуется* матрицей (или матрица является *характеристической* для системы), если и только если все ппф системы, общезначимые на этой матрице, и только они, являются теоремами системы.

И наоборот, если выбран формализм (то есть множество связок) и матричная интерпретация, то всякая матрица определяет некоторую пропозициональную логику, а именно логику, теоремы которой суть в точности формулы, удовлетворяемые матрицей при данной интерпретации. Очевидно, эта матрица будет характеристической для определяемой ею системы.

Для любой пропозициональной логики L через W_L обозначим множество ее ппф (в терминах связок $C_1, \ldots\ldots, C_n$), а через T_L (подмножество W_L) — множество ее теорем. Теперь мы приходим к следующей, чрезвычайно общей фундаментальной теореме (принадлежащей Линденбауму)[1].

Теорема 7. Пусть L — пропозициональная логика, такая, что T_L замкнута относительно подстановки вместо пропозициональных переменных. Тогда существует характеристическая матрица $\mathfrak{M}_L$ логики L.

Доказательство. Пусть в L имеются связки $c_1^{a_1}, \ldots, c_n^{a_n}$, такие, что $c_i^{a_i}$ является a_i-местной $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Элементами нашей матрицы будут члены W_L, а выделенным множеством — T_L. Каждой связке $c_i^{a_i}$ соответствует a_i-местная функция c_i^*: для $w_1, \ldots, w_{a_i} \in W_L$ полагаем $c_i^*(w_1, \ldots, w_{a_i})$ равным ппф, получающейся применением связки $c_i^{a_i}$ к ппф $w_1, \ldots, w_{a_i}$.

Пусть $\mathfrak{M}_L = \langle W_L, T_L, c_1^*, \ldots, c_n^* \rangle$. Интерпретируя $c_i^{a_i}$ как c_i^*, мы видим, что все теоремы L удовлетворяются $\mathfrak{M}_L$. Предположим, $t \in T_L$, тогда при любом приписывании значения из W_L функция $f^{(t)}$ принимает значение, равное результату подстановки в t, которое, по предположению, принадлежит T_L. Наоборот, если $w \notin T_L$, тогда значение $f^{(w)}$ при значениях аргументов, равных пропозициональным переменным w, не принадлежит T_L. Таким образом, $\mathfrak{M}_L$ является характеристической матрицей для L.

Следствие. Для каждой системы C2, D2 и т. д. существует характеристическая матрица.

Хотя мы и будем обращаться в дальнейшем к матрице Линденбаума, существование которой гарантирует эта теорема, надо иметь в виду, что эта матрица весьма тривиальна и не обязательно является самой интересной и удобной характеристической матрицей данной системы. Так, для классического исчисления высказываний наиболее интересной характеристической матрицей является, очевидно, та, которая основана на двухэлементной булевой алгебре (то есть обычная таблица истинности), тогда как матрица Линденбаума имеет счетное число элементов и даже не является булевой.

Матрицы, которыми мы здесь интересуемся, суть структуры $\mathfrak{M} = \langle M, D, \cup, \cap, -, P \rangle$, такие, что $D \subseteq M$ и $\cup$, $\cap$ суть бинарные операции, $-$, P — унарные операции, определенные на M и принимающие значения из M. Матрица называется *собственной*, если $D \subset M$. В связи с этими матрицами мы вводим следующие определения отдельных матричных функций:

Определение 3. $x \rightarrow y = -x \cup y$.

Определение 4. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \cap (y \rightarrow x)$.

Определим далее следующим образом *регулярные* матрицы:

Определение 5. Матрица $\mathfrak{M} = \langle M, D, \cup, \cap, -, P \rangle$ называется *регулярной*, если и только если:

(i) $\mathfrak{M}$ является собственной;
(ii) D — аддитивный идеал в M;
(iii) если $x \leftrightarrow y \in D$, то $x = y$.

(Подмножество D в M называется *аддитивным идеалом*, если и только если $\forall x, y \in D (x \cap y \in D)$ и $\forall x \in D, \forall y \in M (x \cup y \in D)$.

После этого мы можем дать одновременную интерпретацию связок модальных систем в терминах матричных функций, а именно: „$\rightarrow$“ интерпретируется как $\rightarrow$, „$-$“ как $-$, а „$\Box$“ — как N. Это на самом деле означает, что $A \vee B$ интерпретируется как $--x \cup y$, а не как $x \cup y$ в соответствии с определением D1; но эти функции оказываются идентичными во всех интересных случаях (хотя они не идентичны в матрице Линденбаума). То же относится к $A \wedge B$ и другим определяемым связкам.

Покажем теперь, как из характеристических матриц Линденбаума для наших шести модальных систем получить регулярные характеристические матрицы. Это делается в основном построением новой матрицы, элементами кото-

[1] См. Мак-Кинси [11].

рой служат классы эквивалентности (относительно $\leftrightarrow$) элементов старой матрицы.

Пусть W — множество ппф шести модальных систем. Пусть T — множество теорем C2, (D2 и т. д.). Для $A \in W$ положим $E(A) = \{B \mid B \leftrightarrow A \in T\}$. Пусть $\vee$, $\wedge$, $-$, $\diamond$ те функции на W, которые для ппф A, B, $\in W$ дают соответственно формулы $A \vee B$, $A \wedge B$, $-A$ и $\diamond A$. Определим новые функции $\vee_1$, $\wedge_1$, $-_1$, $\diamond_1$ на множестве всех классов $E(A)$ следующим образом:

$$E(A) \vee_1 E(B) = E(A \vee B);$$
$$E(A) \wedge_1 E(B) = E(A \wedge B);$$
$$-_1 E(A) = E(-A);$$
$$\diamond_1 E(A) = E(\diamond A).$$

Наконец, назовем W_1 — множество всех классов $E(A)$, для $A \in W$ и T_1 — множество всех классов $E(A)$ для $A \in T$. Очевидно, что T_1 содержит только один элемент, так как $\forall A, B \in T$, $A \leftrightarrow B \in T$.

Если положить $A \cong B$ для $A \leftrightarrow B \in T$, то легко проверить, что $\cong$ есть отношение конгруэнтности на W. (Это является следствием того, что все шесть модальных систем содержат классическое исчисление высказываний и теоремы 5) Таким образом, мы доказали, что структура $\langle W_1, T_1 \vee_1, \wedge_1, -_1, \diamond_1 \rangle$ есть матрица[1]; назовем ее $\mathfrak{M}_1$. Покажем, что $\mathfrak{M}_1$ является характеристической матрицей для C2 (D2 и т. д.).

Теорема 8. Для C2, D2 и т. д. существуют характеристические регулярные матрицы с единственным выделенным элементом.

Доказательство. Рассмотрим только случай C2; разные системы отличаются только множествами **T** выводимых формул. То, что $\mathfrak{M}_1$ есть характеристическая матрица, легко вытекает из того, что $\langle W, T, \vee, \wedge, -, \diamond \rangle$ является матрицей Линденбаума. Так как логика C2 непротиворечива, $T \subset W$, то $T_1 \subset W_1$, и матрица $\mathfrak{M}_1$ — собственная. Для $E(A)$, $E(B) \in T_1$, A, $B \in T$, откуда (согласно пропозициональному исчислению) $A \wedge B \in T$, так что $E(A \wedge B) = E(A) \wedge_1 E(B) \in T_1$.

[1] Если бы $\cong$ не было отношением конгруэнтности, мы не имели бы, вообще говоря, подстановочности тождества, которая, конечно, предполагается для матриц как для алгебр.

Аналогично можно показать, что если

$$E(A) \in T_1,\ E(B) \in W_1, \text{ то } E(A) \vee_1 E(B) \in T_1.$$

Следовательно, T_1 является аддитивным идеалом в W_1.

Теперь предположим, что $E(A) \leftrightarrow_1 E(B) \in T_1$, то есть что $(E(A) \rightarrow_1 E(B)) \wedge_1 (E(B) \rightarrow_1 E(A)) \in T_1$, где $E(A) \rightarrow_1 \rightarrow_1 E(B) = -_1 E(A) \vee_1 E(B)$. Тогда $E(A \leftrightarrow B) \in T_1$, так что $A \leftrightarrow B \in T$, то есть $A \cong B$. Это значит, что $E(A) = E(B)$. Стало быть, $\mathfrak{M}_1$ — регулярная матрица. То, что T_1 — одноэлементное множество, было уже отмечено прежде.

Мы хотим установить соотношение между регулярными матрицами, удовлетворяющими C2 (C2-матрицами), и модальными алгебрами. Этому служит следующая теорема; в ней мы обозначаем через „1" единицу булевой алгебры, входящей в модальную алгебру.

Теорема 9. $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ тогда и только тогда является регулярной матрицей, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ — модальная алгебра и $d = 1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \{a\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ — регулярная C2-матрица. Чтобы доказать, что $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$ является булевой алгеброй, достаточно взять какое-нибудь множество постулатов для булевой алгебры и установить их справедливость: мы возьмем аксиоматику Розенблюма ([15], с. 9). Из семи его постулатов A1, A6 и A7 являются тривиальным следствием того, что $\mathfrak{M}$ есть матрица. Для установления A2 мы докажем $x \cap y = y \cap x$: поскольку $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ есть теорема C2, то $x \cap y \leftrightarrow \leftrightarrow y \cap x \subset \{d\}$, так как $\mathfrak{M}$ — C2-матрица. Согласно (iii) определения 5 имеем $x \cap y = y \cap x$. A3, A4 и A5 аналогично вытекают из того, что C2 содержит классическое исчисление высказываний и из (iii) определения 5. Тождество $\mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y$ является следствием теоремы 1 и (2) и (iii) определения 5. Таким образом, $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ есть модальная алгебра. Поскольку $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$ есть булева алгебра, можно положить $1 = x \cup -x$. Ввиду того что $\vdash_{C2} A \vee -A$, мы имеем: $x \cup -x \in \{d\}$, то есть $x \cup -x = d$ и $d = 1$.

Наоборот, пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ есть модальная алгебра. Так как $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$ — булева алгебра, то схемы аксиомы A1 — A3 удовлетворяются матрицей $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$. Матричная функция, соответствующая A4, — это

$$-\mathbf{N}(-x \cup y) \cup (-\mathbf{N}x \cup \mathbf{N}y) = \mathbf{P}(x \cap -y) \cup (\mathbf{P}-x \cup -\mathbf{P}-y) =$$
$$= \mathbf{P}((x \cap -y) \cup -x) \cup -\mathbf{P}-y = \mathbf{P}(-x \cup -y) \cup -\mathbf{P}-y =$$
$$= (\mathbf{P}-x \cup \mathbf{P}-y) \cup -\mathbf{P}-y = \mathbf{P}-x \cup 1 = 1,$$

так что схема аксиом A4 удовлетворяется. Чтобы проверить R1, предположим $x = 1$ и $x \to y = 1$. Тогда

$$y = (x \cap -x) \cup y = (x \cup y) \cap (-x \cup y) = (1 \cup y) \cap 1 = 1.$$

Проверим R2: пусть $x \to y = 1$. Тогда $-x \cup y = 1$ и $x \leqslant y$, так что $\mathbf{N}x \leqslant \mathbf{N}y$ по теореме 6 (ii). Теперь $\mathbf{N}x \to \mathbf{N}y = -\mathbf{N}x \cup \mathbf{N}y = 1$. Таким образом, $\langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является C2-матрицей. Эта матрица собственная, так как $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$, как булева алгебра, содержит по крайней мере два элемента. Очевидно, $\{1\}$ есть аддитивный идеал в M. Наконец, $x \leftrightarrow y = 1$ влечет $x = y$ в булевой алгебре, так что наша матрица также регулярна.

Ввиду этой теоремы мы можем не делать различия между модальными алгебрами и соответствующими матрицами, в которых выделенным элементом является 1. Таким образом, каждая модальная алгебра приводит к матрице, удовлетворяющей C2 естественным образом. И наоборот, C2 — характеристическая матрица теоремы 8, как мы показали, является модальной алгеброй.

Для того чтобы установить аналогичные связи между другими пятью системами и соответствующими алгебрами, необходимо определить подходящие алгебры. Итак, введем

Определение 6. Алгебра называется *деонтической*, если она модальная алгебра и удовлетворяет постулату:
(iv) $\mathbf{P}1 = 1$.

Определение 7. Модальная алгебра называется *эпистемической*, если она удовлетворяет постулату:

$$x \leqslant \mathbf{P}x.$$

Определение 8. Модальная алгебра называется *нормальной*, если она удовлетворяет постулату:

$$\mathbf{P}0 = 0.$$

Теорема 10. Все эпистемические алгебры деонтические.

Доказательство. Из (v) следует, что $1 \leqslant \mathbf{P}1$. Но в булевой алгебре $\mathbf{P}1 \leqslant 1$, откуда $\mathbf{P}1 = 1$, то есть (iv).

Теорема 11. $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является регулярной D2 — (E2 —, T(C) —, T(D) —, T —) матрицей тогда и только тогда, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является деонтической (эпистемической, нормальной, нормальной деонтической, нормальной эпистемической) алгеброй и $d = 1$.

Доказательства следуют доказательству теоремы 9, если вдобавок мы заметим следующее: регулярная D2-матрица удовлетворяет условию (iv), согласно теореме 2 (2). Регулярная E2-матрица удовлетворяет условию (v), согласно теореме 2 (п. 3). Регулярная T(C)-матрица удовлетворяет условию (vi) согласно теореме 4. Наоборот, из (iv) следует:

$$\mathbf{N}x \to \mathbf{P}x = \mathbf{P}-x \cup \mathbf{P}x = \mathbf{P}(-x \cup x) = \mathbf{P}1 = 1;$$

так что справедливо A5. Из (v) следует:

$\mathbf{N}x \to x = \mathbf{P}-x \cup x = (-x \cup \mathbf{P}-x) \cup x$, так как $\mathbf{P}-x = -x \cup \mathbf{P}-x) = 1 \cup \mathbf{P}-x = 1$, так что выполняется A6. Далее, пусть выполняется (vi). Предположим, $x = 1$. Тогда $\mathbf{N}x = -\mathbf{P}-x = -\mathbf{P}0 = -0 = 1$ и выполняется R3. Нормальная эпистемическая алгебра является алгеброй расширений в смысле [8]; теорема 11 для T фактически эквивалентна теореме 4 из [8]. Однако в [8] рассматривалась двойственная интерпретация модальной логики T.

III

Финитная аппроксимируемость

Результаты предыдущего раздела дают уже некоторые теоремы о полноте шести модальных систем, хотя и мало интересные.

Теорема 12. $\vdash_{C2\,(D2,\,E2,\,T(C),\,T(D),\,T)} A$ тогда и только тогда, когда A удовлетворяется во всех модальных (деонтических, эпистемических, нормальных, нормальных деонтических, нормальных эпистемических) алгебрах.

Доказательство. Всякая теорема C2 общезначима на любой модальной алгебре в соответствии с теоремой 9, и наоборот, каждая не-теорема C2 опровергается регулярной характеристической С2-матрицей теоремы 9, а следовательно, некоторой модальной алгеброй по теореме 9. В случае других систем аналогично используются теоремы 11 и 8.

В этом разделе мы покажем, что теорема 12 еще остается в силе, если ограничиться только конечными алгебрами. Мы покажем фактически, что каждая из этих систем является финитно аппроксимируемой, то есть что для каждой не-теоремы A каждой системы существует конечная матрица, удовлетворяющая системе, но не удовлетворяющая A. Таким образом, кроме уточнения теоремы 12 и подготовки для семантических построений в следующем разделе, этот результат доказывает разрешимость всех шести систем. Наш способ доказательства, как и прежде, является воспроизведением способа, примененного Мак-Кинси и Тарским (см. [11] и [12]).

Теорема 13. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ модальная (деонтическая и т. д.) алгебра и пусть $a_1, \ldots, a_r$ — конечная последовательность элементов M. Тогда существует конечная модальная (деонтическая и т. д.) алгебра $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \cup_1, \cap_1, -_1, \mathbf{P} \rangle$ с не более чем $2^{2^{r+1}}$ элементами, такая, что

(i) для $1 \leqslant i \leqslant r$ $\quad a_i \in M_1$;
(ii) для $x, y \in M_1$ $\quad x \cup_1 y = x \cup y$;
(iii) для $x, y \in M_1$ $\quad x \cap_1 y = x \cap y$;
(iv) для $x \in M_1$ $\quad -_1 x = -x$;
(v) для $x \in M_1$, такого, что $\mathbf{P}x \in M_1$, $\mathbf{P}_1 x = \mathbf{P}x$.

Доказательство. Пусть M_1 — множество элементов M, полученных из $\mathbf{P}_1, a_1, \ldots, a_r$ конечным числом применений $\cup$, $\cap$ и $-$, так как булева алгебра M_1 содержит не более чем $2^{2^{r+1}}$ элементов. Положим $\cup_1, \cap_1, -_1$ равными $\cup, \cap, -$ соответственно ограниченными M_1. Отсюда непосредственно будет следовать, что условия (i) — (iv) теоремы выполнены. Для $x \in M_1$ скажем, что x *покрывается* y, если $y \in M_1$, $\mathbf{P}y \in M_1$ и $x \leqslant y$. Так как $\mathbf{P}1 \in M_1$, так же как и 1, то каждый элемент M_1 покрывается некоторым, хотя бы 1. Если x покрывается элементами $y, \ldots, y_n$, то положим $\mathbf{P}_1 x = \mathbf{P}y_1 \cap \ldots \cap \mathbf{P}y_n$ (так что $\mathbf{P}_1 x \in M_1$). Если x покрывается элементами $y_1, \ldots, y_n$, то $x \leqslant y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, так что $\mathbf{P}x \leqslant \mathbf{P}_1 y_i$, по теореме 6 (ii), и $\mathbf{P}x \leqslant \mathbf{P}_1 x$.

И наоборот, если $x \in M_1$ и $\mathbf{P}x \in M_1$, то элемент x покрывается самим собой, так что

$$\mathbf{P}_1 x = \mathbf{P}x \cap \mathbf{P}y_1 \cap \ldots \cap \mathbf{P}y_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — другие элементы, покрывающие x. Таким образом, $\mathbf{P}_1 x \leqq \mathbf{P}x$. Соединяя вместе эти результаты, мы видим, что выполняется также (v).

Остается показать, что $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathbf{M}_1, \cup_1, \cap_1, -_1, \mathbf{P}_1 \rangle$ является модальной (деонтической и т. д.) алгеброй, если таковой является $\mathfrak{M}$. Для модальных алгебр доказательство того, что $\mathbf{P}_1(x \cup_1 y) = \mathbf{P}_1 x \cup_1 \mathbf{P}_1 y$, идентично данному Мак-Кинси [11, с. 125]* и проводится непосредственно. Для деонтических алгебр $\mathbf{P}1 = 1$, и надо показать, что $\mathbf{P}_1 1 = 1$. Но поскольку 1 и $\mathbf{P}1$ принадлежат M_1, условие (v) дает $\mathbf{P}_1 1 = \mathbf{P}1 = 1$ [1]. Для эпистемических алгебр $x \leqslant \mathbf{P}x$, и нужно показать, что $x \leqslant \mathbf{P}_1 x$. Но мы уже показали, что

---

* Обозначим множество $x \in M_1$, на которых определена $\mathbf{P}_1$ в начале построения, через M_2. Нам нужно доказать, что $\forall x, y \in M_1$, $\mathbf{P}_1(x \cup y) = \mathbf{P}_1 x \cup \mathbf{P}_1 y$ для определенной выше операции $\mathbf{P}_1$. Заметим, что если $\mathbf{P}_1$ определена в начале построения для x и y, то $\mathbf{P}_1$ определена на x и y и $\mathbf{P}_1(x \cup y) = \mathbf{P}_1 x \cup \mathbf{P}_1 y$, так как $\mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y = \mathbf{P}_1 x \cup \mathbf{P}_1 y$, и, следовательно, $\mathbf{P}(x \cup y) \in M_1$, поскольку $\mathbf{P}_1 x, \mathbf{P}_1 y \in M_1$, а M_1 замкнуто относительно $\cup$, $\cap$, $-$. Отсюда $\mathbf{P}_1(x \cup y) = \mathbf{P}(x \cup y)$.

По определению $\forall x, y$ $\mathbf{P}_1(x) = \bigcap\limits_{\substack{u \in M_2 \\ u \geqslant x}} \mathbf{P}_1(u)$, $\mathbf{P}_1 y = \bigcap\limits_{\substack{u \in M_2 \\ v \geqslant y}} \mathbf{P}_1(v)$.

Очевидно, $\mathbf{P}_1(x) \cup \mathbf{P}_1(y) = \bigcap\limits_{\substack{u \in M_2 \\ u \geqslant x}} \mathbf{P}_1(u) \cup \bigcap\limits_{\substack{v \in M_2 \\ v \geqslant y}} \mathbf{P}_1(v) \leqslant$

$\leqslant \bigcap\limits_{\substack{u,\ v \in M_2 \\ u \geqslant x,\ v \geqslant y}} (\mathbf{P}_1(u) \cup \mathbf{P}_1(v)) = \bigcap\limits_{\substack{u \cup v \in M_2 \\ u \cup v \geqslant x \cup y}} \mathbf{P}_1(u \cup v) = \mathbf{P}_1(x \cup y)$, то есть $\mathbf{P}_1(x) \cup \mathbf{P}_1(y) \leqslant \mathbf{P}_1(x \cup y)$.

С другой стороны, $\mathbf{P}_1(x) \cup \mathbf{P}_1(y) = \bigcap\limits_{\substack{u \in M_2 \\ u \geqslant x}} \mathbf{P}_1(u) \cup \bigcap\limits_{\substack{v \in M_2 \\ v \geqslant y}} \mathbf{P}_1(v) \geqslant$

$\geqslant \bigcap\limits_{\substack{w \in M_2 \\ w \geqslant x \cup y}} \mathbf{P}_1(w)$, так как $(\forall w,\ w \in M_2,\ w \geqslant x \cup y)\ (w \geqslant x \;\&\; w \geqslant y)$. Следовательно, $\mathbf{P}_1(w)$ входит в каждое $\bigcap$ слева от $\geqslant$. Отсюда $\mathbf{P}_1(x \cup y) = \mathbf{P}_1(x) \cup \mathbf{P}_1(y)$ — *Прим. перев.*

[1] Для деонтических алгебр, так же как и для эпистемических алгебр (теорема 10), эту теорему можно несколько усилить, заменив $2^{2^{r+1}}$ на 2^{2^r}; для этих алгебр не нужно включать $\mathbf{P}1$ в число образующих M_1.

вообще $\mathbf{P}x \leqslant \mathbf{P}_1 x$. Для нормальных алгебр $\mathbf{P}0 = 0$, и нужно показать, что $\mathbf{P}_1 0 = 0$. Но если $\mathbf{P}0 = 0$, то $\mathbf{P}0 \in M_1$, так что по (v) имеем $\mathbf{P}_1 0 = \mathbf{P}0 = 0$. Случаи нормальных деонтических и нормальных эпистемических алгебр являются простой комбинацией рассмотренных выше случаев.

Подформулой ппф А мы называем ппф, которая входит как часть (собственная или несобственная) в А. Теперь мы докажем:

Теорема 14. Пусть А является ппф с r подформулами. $\vdash_{C2\,(D2 \text{ и т. д.})}$ А тогда и только тогда, когда А общезначима на всех модальных (деонтических и т. д.) алгебрах с не более чем $2^{2^{r+1}}$ элементами.

Доказательство. Если $\vdash_{C2\,(D2 \text{ и т. д.})}$ А, то, согласно теореме 12, А общезначима на *всех* модальных (деонтических и т. д.) алгебрах. И наоборот, предположим, что А не является теоремой C2 (D2 и т. д.). Тогда А опровергается на подходящей регулярной матрице, по теореме 8, скажем на $\mathfrak{M} = \langle M, \{1\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ являются элементами M, подставляя которые вместо пропозициональных переменных $v_1, \ldots, v_n$ формулы А соответственно мы получаем значение, не равное 1. Предположим, что для этого задания значений переменных подформулы А, отличные от $v_1, \ldots, v_n$, принимают значения $a_{n+1}, \ldots, a_r$. Можно допустить, что последняя такая подформула А есть она сама, так что $a_r \neq 1$. Тогда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является модальной (деонтической и т. д.) алгеброй (теоремы 9 и 11), так что, по теореме 13, существует конечная модальная (деонтическая и т. д) алгебра $\mathfrak{M}$ с не более чем $2^{2^{r+1}}$ элементами, удовлетворяющая пяти условиям этой теоремы. По условию (i) можно взять те же значения переменных $v_1, \ldots, v_n$, то есть $a_1, \ldots, a_n$, в матрице $\mathfrak{M}_1$. Из условий (ii)—(v) ясно, что это задание значений приводит к тем же значениям подформул А в $\mathfrak{M}_1$, что и были в $\mathfrak{M}$, а значение $А — a_r \neq 1$, то есть А опровержима на $\mathfrak{M}_1$.

Следствие 1. Системы C2, D2, E2, T (C), T (D) и T финитно аппроксимируемы, а следовательно, разрешимы.

Следствие 2. $\vdash_{C2\,(D2 \text{ и т. д.})}$ А тогда и только тогда, когда А удовлетворяется на всех конечных модальных (деонтических и т. д.) алгебрах.

IV

Алгебры и модельные структуры

В [6] Крипке показал, как можно использовать *нормальные модельные структуры* для доказательства полноты и других результатов для системы T и как можно аналогичным образом применить нормальные модельные структуры различных типов для изучения более сильных систем, таких, как S4 и S5 [1]. В последующей части статьи мы обобщаем понятие модели Крипке и показываем, что естественные *теоремы представления* для введенных ранее алгебр можно получить в терминах различных модельных структур. Из этих теорем и теорем о полноте последнего раздела легко вытекают результаты о полноте в духе Крипке.

Модельной структурой (м. с.) называется упорядоченная тройка $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$, где K — непустое множество элементов, $Q \subseteq K$, а U — отношение, определенное на K. Интуитивно можно представлять себе K как множество „возможных миров" и интерпретировать Uxy (для $x, y \in K$) как „достижимость" y из x или как „возможность" мира y относительно мира x [2]. Для понимания роли подмножества нужно напомнить, что в слабых системах C2, D2 и E2 нет теорем вида $\Box$ А, так что они совместимы с добавлением $\Diamond$ А как схемы аксиом: с точки зрения интерпретации это означает, что мы должны допускать возможность миров, в которых любое утверждение (в том числе противоречие) оказывается возможным, и Q интуитивно воспринимается как множество таких миров [3].

[1] Трудно определить источник этих структур в недавней истории модальной логики. Подобные семантические методы применял Хинтикка, а также Прайор, который, кажется, почерпнул эту идею из нескольких неопубликованных заметок Мередита („исчисление свойств", см. работу Томаса [16]). Точка зрения на эти структуры с учетом взаимосвязей между „возможными мирами" восходит, кажется, к Гичу. Их связь с алгебраической трактовкой S4 косвенно рассматривается в статье Даммета и Леммона [2].

[2] См., например, работу Крипке [6, с. 70] или Прайора [14], где дано менее формальное объяснение.

[3] Эта конструкция была мне предложена во время беседы с С. Крипке; в [4] Крипке анонсировал результаты о семантической полноте по крайней мере для E2 и D2 из систем, которые здесь рассматриваются, и, вероятно, эти результаты были получены с помощью рассмотрений, аналогичных тем, которые представлены в нашей статье.

Пусть задана модельная структура $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U \rangle$. Мы определяем *алгебру* $\mathfrak{K}^+$ на $\mathfrak{K}$, как $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$, где

(i) $M = \mathfrak{P}K$ (то есть множество всех подмножеств K);
(ii) $\cup$, $\cap$ являются теоретико-множественными операциями объединения, пересечения и дополнения до M;
(iii) для $A \in M$ $\mathbf{P}A = \{x \mid (\exists y)(y \in A \land Uxy) \lor x \in Q\}$.

Теорема 15. Если $\mathfrak{K}$ — модельная структура, то $\mathfrak{K}^+$ — модальная алгебра.

Доказательство. Что $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$ является булевой алгеброй, непосредственно следует из условия (ii). Далее, для $A, B \in \mathfrak{P}K$ имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B) &= \{x \mid (\exists y)(y \in A \cup B \land Uxy) \lor x \in Q\} = \\ &= \{x \mid (\exists y)(y \in A \land Uxy) \lor (\exists y)(y \in B \land Uxy) \lor x \in Q\} = \\ &= \{x \mid (\exists y)(y \in A \land Uxy) \lor x \in Q\} \cup \\ &\cup \{x \mid (\exists y)(y \in B \land Uxy) \lor x \in Q\} = \mathbf{P}A \cup \mathbf{P}B,\end{aligned}$$

так что $\mathfrak{K}^+$ является модальной алгеброй.

Обозначим пустое множество через $\varnothing$. Тогда, согласно (iii), получаем:

Теорема 16. В алгебре любой модельной структуры:
(i) $\mathbf{P}\varnothing = Q$;
(ii) $Q \subseteq \mathbf{P}A$ для любого A.

Основной теоремой о представлении этого раздела является:

Теорема 17. Каждая конечная модальная алгебра изоморфна алгебре на некоторой конечной модельной структуре.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{M}, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ — конечная модальная алгебра. Тогда, по теореме Стоуна о представлении, $\langle \mathbf{M}, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ изоморфна алгебре всех подмножеств данного множества K. Обозначим этот изоморфизм через φ. Для $A \subseteq K$ положим $\mathbf{P}'A = \varphi\mathbf{P}\varphi^{-1}A$ и $Q = \varphi(\mathbf{P}0)$. Наконец, для $x, y \in K$ положим Uxy, если $x \in \mathbf{P}'\{y\}$. $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U \rangle$, очевидно, является модельной структурой. Мы покажем, что $\mathfrak{M}$ изоморфно отображается функцией φ на $\mathfrak{K}^+$. Обозначим операцию возможности в $\mathfrak{K}^+$ через $\mathbf{P}^*$, то есть $\mathbf{P}^*A = \{x \mid (\exists y)(y \in A \land Uxy) \lor x \in Q\}$. φ, очевидно, является изоморфизмом относительно $\cup$, $\cap$ и $-$, так что осталось только показать, что

$\varphi(\mathbf{P}x) = \mathbf{P}^*(\varphi x)$. Докажем сначала, что для $x \in M\ \varphi(\mathbf{P}x) \cup Q = \varphi(\mathbf{P}x)$. По теореме 6 (ii) $\mathbf{P}0 \leqslant \mathbf{P}x$, так что $\mathbf{P}x \cup \mathbf{P}0 = \mathbf{P}x$. Поэтому $\varphi(\mathbf{P}x) = \varphi(\mathbf{P}x \cup \mathbf{P}0) = \varphi(\mathbf{P}x) \cup \varphi(\mathbf{P}0) = \varphi(\mathbf{P}x) \cup Q$, по определению Q. Теперь рассмотрим атом $a \in M$. Очевидно, φa является одноэлементным множеством $\{u\}$ для некоторого $u \in K$, и мы получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^*(\varphi a) &= \{x \mid (\exists y)(y \in \{u\} \land Uxy) \lor x \in Q\} = \\ &= \{x \mid Uxy \lor x \in Q\} = \{x \mid x \in \mathbf{P}'\{u\} \lor x \in Q\} = \\ &= \{x \mid x \in \varphi(\mathbf{P}a) \lor x \in Q\} = \varphi(\mathbf{P}a) \cup Q = \varphi(\mathbf{P}a).\end{aligned}$$

Каждый элемент $x \in M$ может быть представлен в виде $a_1 \cup \ldots \cup a_m$ для атомов $a_1, \ldots, a_m$. Итак, для $x \in M$:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{P}x) &= \varphi(\mathbf{P}(a_1 \cup \ldots \cup a_m)) = \varphi(\mathbf{P}a_1 \cup \ldots \cup \mathbf{P}a_m) = \\ &= \varphi(\mathbf{P}a_1) \cup \ldots \cup \varphi(\mathbf{P}a_m) = \mathbf{P}^*(\varphi a_1) \cup \ldots \cup \mathbf{P}^*(\varphi a_m) = \\ &= \mathbf{P}^*(\varphi a_1 \cup \ldots \cup \varphi a_m) = \mathbf{P}^*(\varphi(a_1 \cup \ldots \cup a_m)) = \mathbf{P}^*(\varphi x).\end{aligned}$$

Следовательно, φ является также изоморфизмом относительно $\mathbf{P}$.

Для алгебр пяти остальных типов нам потребуются определения соответствующих модельных структур. Определим *деонтическую* м.с. как м.с. $\langle K, Q, U \rangle$, в которой U и Q удовлетворяют условию:

$$(\delta)\ \text{для } x \in K,\ (\exists y)\ Uxy, \text{ или } x \in Q.$$

Эпистемической м.с. мы назовем м.с. $\langle K, Q, U \rangle$, в которой U и Q удовлетворяют условию: (ε) для $x \in K$, Uxx, либо $x \in Q$. (Очевидно, условие (ε) эквивалентно рефлексивности U на $K - Q$.) Наконец, м.с. $\langle K, Q, U \rangle$ назовем *нормальной*, если $Q = \varnothing$. Для удобства мы можем обозначать нормальные м.с. как $\langle K, U \rangle$ вместо $\langle K, Q, U \rangle$: в них нет „странных" миров. Для алгебры на нормальной м.с. условие (iii) на $A \in \mathfrak{P}K$ можно записать, как

$$\text{(iii)}' \quad \mathbf{P}A = \{x \mid (\exists y)(y \in A \land Uxy)\}.$$

Аналогично для деонтических м.с. условие (δ) запишется в виде:

$$(\delta)'\ \text{для } x \in K\ (\exists y)\ Uxy;$$

а для нормальных эпистемических м.с. условие (ε) означает условие рефлексивности U на K. Таким образом, нормальные эпистемические м.с. идентичны тем м.с., которые Крипке назвал нормальными м.с.[1].

Теорема 18. Если $\mathfrak{K}$ является деонтической (эпистемической, нормальной и т. д.) модельной структурой, то $\mathfrak{K}^+$ — деонтическая (эпистемическая, нормальная и т. д.) алгебра.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U \rangle$ будет деонтической м.с. Согласно теореме 15, для доказательства деонтичности алгебры $\mathfrak{K}^+$ достаточно доказать, что $\mathbf{P}K = K$. Но $\mathbf{P}K = \{x \mid (\exists y)(y \in K \wedge Uxy) \vee x \in Q\} = K$, согласно условию (δ). Пусть теперь $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U \rangle$ является эпистемической м.с. Для доказательства эпистемичности алгебры $\mathfrak{K}^+$ в соответствии с теоремой 15 надо установить, что для $A \subseteq K$ $A \subseteq \mathbf{P}A$. Но, по (ε), для $x \in A$ $Uxx \vee x \in Q$, откуда $(\exists y)(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q$, так что $x \in \mathbf{P}A$. Наконец, пусть $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U \rangle$ — нормальная м.с. Для того чтобы доказать нормальность алгебры $\mathfrak{K}^+$ в соответствии с теоремой 15, достаточно доказать, что $\mathbf{P}\varnothing = \varnothing$. Но, по теореме 16 (i), $\mathbf{P}\varnothing = Q$, а $Q = \varnothing$.

Можно сформулировать теоремы представления.

Теорема 19. Всякая конечная деонтическая (эпистемическая, нормальная и т. д.) алгебра изоморфна алгебре некоторой конечной деонтической (эпистемической, нормальной и т. д.) модельной структуры.

Доказательство. Мы применяем такую же терминологию и определения, как и в доказательстве теоремы 17. Доказательство изоморфизма остается таким же, но только нужно еще показать, что $\mathfrak{K}$ является деонтической (эпистемической и т. д.) м.с. Предположим, что $\mathfrak{M}$ деонтическая алгебра. Так как $\mathbf{P}1 = 1$, то по изоморфизму φ $\mathbf{P}^*K = K$, или $\{x \mid (\exists y)\, Uxy \vee x \in Q\} = K$. Условие (δ) получается сразу, и $\mathfrak{K}$ оказывается деонтической м.с. Далее, предположим, что $\mathfrak{M}$ является эпистемической алгеброй. Так как для $x \in M$ $x \leqslant \mathbf{P}x$, то по изоморфизму φ для каждого $A \subseteq K$ $A \subseteq \mathbf{P}^*A$. Следовательно, в частности, для $x \in K$ $\{x\} \subseteq \mathbf{P}^*\{x\}$, так что $x \in \mathbf{P}^*\{x\}$. Отсюда следует, что $(\exists y)(y \in \{x\} \wedge Uxy) \vee x \in Q$, откуда сразу же получается условие (ε) и эпистемичность м.с. $\mathfrak{K}$. Предположим теперь, что $\mathfrak{M}$ — нормальная алгебра. Поскольку $\mathbf{P}0 = 0$, то по изоморфизму φ $\mathbf{P}^*\varnothing = \varnothing$. Но, по определению, $Q = \varphi(\mathbf{P}0) = \mathbf{P}^*(\varphi 0) = \mathbf{P}^*\varnothing$, так что $Q = \varnothing$ и $\mathfrak{K}$ является нормальной м.с.

[1] Это терминологическое расхождение, возможно, является неприятным моментом, однако я предпочитаю считать, что нормальность структур Крипке выражается в том, что $Q = \varnothing$, в большей степени, чем в том, что отношение U рефлексивно, поэтому нам понадобился специальный термин для обозначения последнего свойства. Крипке также выделяет специальный элемент G в K („действительный" мир), но это не нужно для наших целей.

Теорема 20. $\vdash_{C2\,(D2\text{ и т. д.})} A$ (i) тогда и только тогда, когда A удовлетворяется $\mathfrak{K}^+$ для всех модельных структур $\mathfrak{K}$ (деонтических модельных структур $\mathfrak{K}$ и т. д.); (ii) тогда и только тогда, когда A удовлетворяется $\mathfrak{K}^+$ для всех конечных модельных структур $\mathfrak{K}$ (деонтических модельных структур $\mathfrak{K}$ и т. д.).

Доказательство. Если $\vdash_{C2} A$, то A удовлетворяется всеми модальными алгебрами, согласно теореме 12, а следовательно, алгебрами $\mathfrak{K}^+$ для всех модельных структур $\mathfrak{K}$, по теореме 15. И наоборот, если A не является теоремой C2, то существует конечная модальная алгебра, опровергающая A, согласно теореме 14, так что A опровергается $\mathfrak{K}^+$ на некоторой конечной модельной структуре $\mathfrak{K}$, по теореме 17. В других случаях применяются теоремы 18 и 19.

Теорема 20 является еще одним результатом о полноте (ср. теоремы 12 и следствие 2 теоремы 14). Остается только уяснить, что эти последние результаты эквивалентны семантической полноте. Это будет прямым следствием того факта, что удовлетворение формулы алгеброй $\mathfrak{K}^+$ м.с. $\mathfrak{K}$ эквивалентно *истинности* этой формулы в $\mathfrak{K}$ в смысле Крипке. (На самом деле мы пользуемся здесь слегка измененной терминологией Крипке.)

Сначала надо, следуя Крипке, определить подходящие семантические понятия. *Моделью* ппф A в модельной структуре $\langle K, Q, U \rangle$ мы называем двухместную функцию $\Phi(\mathrm{v}, k)$, где v пробегает множество пропозициональных переменных формулы A, k — множество элементов K, а значения функция Φ принимает из {T, F} (T — „истина", F — „ложь"). Таким образом, $\Phi(\mathrm{v}, k)$ задает истинностные значения T, F каждой пропозициональной переменной A в каждом „мире" из K; $\Phi(\mathrm{v}, k)$ связывает каждую переменную с множеством миров из K, в которых она истинна (так что можно рассматривать переменную как функцию, отображающую миры в множество истинностных значений), и каждый мир ассоциируется с множеством переменных, которые принимают в нем значение „истина" (так что каждый мир можно рассматривать как функцию от переменных со значениями истинности). Естественным образом $\Phi(v, k)$ связывает с переменной v множество $A \in K$, которое можно рассматривать как значение этой переменной в алгебре $\mathfrak{K}^+$.

Далее мы определим однозначно расширение функции Ф, $\Phi'(B, k)$, где B *любая* подформула A, следующим образом:
(i)

если B — атомарная формула (то есть переменная), то

$$\Phi'(B, k) = \Phi(B, k);$$

(ii) $\Phi'(-C, k) = T\ (F)$, если и только если $\Phi'(C, k) = F(T)$;
(iii) $\Phi'(C \to D, k) = T$, если и только если $\Phi'(C, k) = F$, либо $\Phi'(D, k) = T$;
(iv) $\Phi'(\Box C, k) = T$, если и только если $\Phi'(C, l) = T$ для всех $l \in K$, таких, что Ukl и $k \in Q$. Из этих определений и D1, D2 и D4 получаем:
(v) $\Phi'(C \vee D, k) = T$, если и только если $\Phi'(C, k) = T$, либо $\Phi'(D, k) = T$;
(vi) $\Phi'(C \wedge D, k) = T$, если и только если $\Phi'(C, k) = T$ и $\Phi'(D, k) = T$;
(vii) $\Phi'(\Diamond C, k) = T$, если и только если $\Phi'(C, l) = T$ для некоторого $l \in K$, такого, что Ukl, или $k \notin Q$.

Эта интерпретация не нуждается в комментарии, за исключением одного замечания, что, согласно (vii), $\Diamond C$ истинно в мире k, если в некотором мире, достижимом из k (возможном относительно k), истинно C, или k является одним из „странных" миров, в которых возможно *любое* высказывание. $\Box C$ интерпретируется двойственным образом, согласно (iv).

Мы будем говорить, что A *истинна* в модели $\Phi(v, k)$ *в мире* $l \in K$ в модельной структуре $\langle K, Q, U\rangle$, если $\Phi'(A, l) = T$. Будем говорить, что A общезначима в $\langle KQU\rangle$ если A истинна во всех моделях $\Phi(v, k)$ во всех $l \in K$ в $\langle K, Q, U\rangle$. Будем говорить, что A *общезначима*, если A истинна во всех модельных структурах. Будем говорить также, что A D2-(E2-, T(C)-, T(D)-, T-) *общезначима*, если A истинна во всех деонтических (эпистемических, нормальных, нормальных деонтических, нормальных эпистемических) модельных структурах.

Для заданной ппф A и модели $\Phi(v, k)$ для A в модельной структуре $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ можно определить приписывание значений $\mathfrak{A}(\Phi)$ * в терминах переменных $v_1, \ldots, v_n$ формулы A из алгебры $\mathfrak{K}^+$, полагая

$$V(v_n) = \{x \mid x \in K \wedge \Phi(v_i, x) = T\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

и

$$\mathfrak{A}(\Phi) = \langle V(v_1), \ldots, V(v_n)\rangle.$$

И наоборот, если дано приписывание $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ $(A_i \subseteq K)$ из $\mathfrak{K}^+$ для n переменных из A, можно определить модель $\Phi(\mathfrak{A})(v, k)$ для A в $\mathfrak{K}$, полагая $\Phi(\mathfrak{A})(v_i, x) = T$ тогда и только тогда, когда $x \in A_i$. Для любого приписывания $\mathfrak{A}$ значений из $\mathfrak{K}^+$ для переменных из A и подформулы B формулы A обозначим через $V_{\mathfrak{A}}(B)$ значение из $\mathfrak{K}^+$, принимаемое B при приписывании $\mathfrak{A}$.

Лемма. (i) Пусть A — ппф и $\Phi(v, k)$ — модель для A в $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$. Тогда для всех $x \in K$ $\Phi'(A, x) = T$, если и только если $x \in V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(A)$.

(ii). Пусть A — ппф и $\mathfrak{A}$ — задание значений из $\mathfrak{K}^+$ для переменных из A в некоторой структуре $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$. Тогда для всех $x \in K$ $\Phi(\mathfrak{A})'(A, x) = T$, если и только если $x \in V_{\mathfrak{A}}(A)$.

Доказательство (i) проводится индукцией по длине A. Если A является одной из переменных $v_1, \ldots, v_n$, то (i) выполняется по определению $\mathfrak{A}(\Phi)$. Для доказательства шага индукции предположим, что результат доказан для B и C. Заметим, что по кванторной логике:

(1) $\forall y(Uxy \to \Phi'(B, y) = T) \leftrightarrow \forall y(Uxy \to y \in V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(B))$.

Теперь предположим, что A имеет вид $B \to C$. Тогда для всех $x \in K$:

$$\Phi'(B \to C, x) = T \leftrightarrow \Phi'(B, x) = F \vee \Phi'(C, x) = T \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \notin V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(B) \vee x \in V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(C) \leftrightarrow x \in (-V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(B) \cup$$
$$\cup V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(C)) \leftrightarrow x \in V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(B \to C).$$

Аналогичное доказательство получается, если A имеет вид $-B$. Предположим, наконец, что A имеет вид $\Box B$.

* $\mathfrak{A}(\Phi)$ называют также оценкой или приписыванием значений. — *Прим. перев.*

Тогда для всех $x \in K$

$$\Phi'(\Box \mathrm{B},\ x) = \mathrm{T} \leftrightarrow \forall y\,(Uxy \rightarrow \Phi'(\mathrm{B},\ y) = T) \wedge x \notin Q \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall y)\,(Uxy \rightarrow y \in V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(\mathrm{B}) \wedge x \notin Q \text{ (по (1))}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in \mathrm{NV}_{\mathfrak{A}(\Phi)}(\mathrm{B}) \leftrightarrow x \in \mathrm{V}_{\mathfrak{A}(\Phi)}(\Box \mathrm{B})$$

Аналогично проводится доказательство (ii): замечаем, что утверждение (ii) справедливо в случае, когда A является одной из переменных $v_1, \ldots, v_n$, согласно определению $\Phi(\mathfrak{A})$.

Теперь можно сформулировать основную теорему, связанную с алгебраическим и семантическим подходом.

Теорема 21. Пусть $\mathfrak{K} = \langle K,\ Q,\ U\rangle$ — модельная структура, а A — любая ппф. Тогда A удовлетворяется алгеброй $\mathfrak{K}^+$, если, и только если, A истинна в $\mathfrak{K}$.

Доказательство. Пусть A является ппф, которая удовлетворяется в $\mathfrak{K}^+$, и рассмотрим модель $\Phi(v,\ k)$ для A в $\mathfrak{K}$. Тогда $V_{\mathfrak{A}(\Phi)}(A) = K$, откуда, по лемме (i), $\Phi'(A,\ x) = T$ для всех $x \in K$. Таким образом, A истинна в $\mathfrak{K}$. И наоборот, предположим, что A истинна в $\mathfrak{K}$, и рассмотрим задания значений переменных формулы A. Тогда для всех $x \in K \Phi(\mathfrak{A})'(A,\ x) = T$, откуда по лемме (ii) для всех $x \in K$ $x \in V_{\mathfrak{A}}(A)$, так что $V_{\mathfrak{A}}(A) = K$ и A удовлетворяется в алгебре $\mathfrak{K}^+$.

Следствие. $\vdash_{C2\ (D2,\ E2\ и\ т.\ д.)}$ A тогда и только тогда, когда A C2 — общезначима (D2 — общезначима, E2 — общезначима и т. д.).

Доказательство проводится с помощью теоремы 20 (i), теоремы 21 и различных определений истинности.

Результат полноты для T в этом следствии эквивалентен такому же результату в статье Крипке [6] (р. 86). Результаты полноты для других пяти систем являются новыми, хотя в некоторых случаях они были анонсированы Крипке в [4]. Однако эти результаты здесь получены независимо от рассмотрений семантических таблиц, применявшихся Крипке, а на основе соответствующих алгебраических теорем.

V.

Четырехзначные матрицы

Четырехзначные матрицы широко использовались в исследованиях по модальной логике для установления независимости и т. д. Теоремы представления последнего раздела дают легкий способ определения всех регулярных четырехзначных матриц, которые удовлетворяют C2; всякая такая матрица изоморфна алгебре на модельной структуре $\mathfrak{K} = \langle K,\ Q,\ U\rangle$, где K содержит два элемента, скажем a и b. Элементарное вычисление показывает, что существуют 64 таких модельных структур (существуют 4 возможных выбора Q и 16 выборов U). Однако из 64 соответствующих алгебр много изоморфных; среди них только 15 существенно различных, а именно[1]:

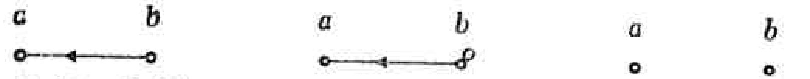
$\mathfrak{K}_1 = \langle K,\ \{a,\ b\},\ \varnothing\rangle$;
$\mathfrak{K}_2 = \langle K,\ \{a\},\ \varnothing\rangle$;
$\mathfrak{K}_3 = \langle K,\ \{a\};\ \{\langle b,\ b\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_4 = \langle K,\ \{a\},\ \{\langle b,\ a\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_5 = \langle K,\ \{a\},\ \{\langle b,\ b\rangle,\ \langle b,\ a\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_6 = \langle K,\ \varnothing,\ \varnothing\rangle$;
$\mathfrak{K}_7 = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle b,\ b\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_8 = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle b,\ a\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_9 = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle a,\ a\rangle,\ \langle b,\ b\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_{10} = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle a,\ b\rangle,\ \langle b,\ a\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_{11} = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle b,\ a\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_{12} = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle b,\ b\rangle,\ \langle a,\ b\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_{13} = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle b,\ b\rangle,\ \langle a,\ b\rangle,\ \langle b,\ a\rangle\}\rangle$.
$\mathfrak{K}_{14} = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle a,\ a\rangle,\ \langle b,\ b\rangle,\ \langle b,\ a\rangle\}\rangle$;
$\mathfrak{K}_{15} = \langle K,\ \varnothing,\ \{\langle a,\ a\rangle,\ \langle b,\ b\rangle,\ \langle a,\ b\rangle,\ \langle b,\ a\rangle\}\rangle$.

Эти 15 модельных структур более наглядно можно представить с помощью *направленных графов* (см. [13]):

---

[1] Это является следствием очевидной симметрии между a и b и того, что для построения $\mathfrak{K}^+$ безразлично, ведут ли стрелки отношения U в Q или из Q; последнее будет использовано в продолжении настоящей статьи.

$\mathfrak{R}_1\ (Q=\{a,b\})$ $\mathfrak{R}_2\ (Q=\{a\})$ $\mathfrak{R}_3\ (Q=\{a\})$



$\mathfrak{R}_4\ (Q=\{a\})$ $\mathfrak{R}_5\ (Q=\{a\})$ $\mathfrak{R}_6\ (Q=\varnothing)$

$\mathfrak{R}_7\ (Q=\varnothing)$ $\mathfrak{R}_8\ (Q=\varnothing)$ $\mathfrak{R}_9\ (Q=\varnothing)$

$\mathfrak{R}_{10}\ (Q=\varnothing)$ $\mathfrak{R}_{11}\ (Q=\varnothing)$ $\mathfrak{R}_{12}\ (Q=\varnothing)$

$\mathfrak{R}_{13}\ (Q=\varnothing)$ $\mathfrak{R}_{14}\ (Q=\varnothing)$ $\mathfrak{R}_{15}\ (Q=\varnothing)$

Чтобы облегчить сравнение с обычными представлениями (четырехзначных логик), надо договориться о следующем обозначении элементов

$\mathfrak{R}_i^+$ $(1 \leqslant i \leqslant 15)$: $1=\{a, b\}$, $2=\{b\}$, $3=\{a\}$, $4=\varnothing$.

Связки $\rightarrow$ и $-$ имеют одинаковую интерпретацию во всех матрицах:

$p \rightarrow q$	q: 1	2	3	4
p: 1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

p	$-p$
1	4
2	3
3	2
4	1

Наши 15 матриц различаются в столбцах для операции $\square$, приводимых в следующей таблице:

$\square\, p$

p	$\mathfrak{R}_1^+$	$\mathfrak{R}_2^+$	$\mathfrak{R}_3^+$	$\mathfrak{R}_4^+$	$\mathfrak{R}_5^+$	$\mathfrak{R}_6^+$	$\mathfrak{R}_7^+$	$\mathfrak{R}_8^+$	$\mathfrak{R}_9^+$	$\mathfrak{R}_{10}^+$	$\mathfrak{R}_{11}^+$	$\mathfrak{R}_{12}^+$	$\mathfrak{R}_{13}^+$	$\mathfrak{R}_{14}^+$	$\mathfrak{R}_{15}^+$
1	4	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	2	4	4	1	1	3	2	3	3	1	3	4	4
3	4	2	4	2	4	1	3	1	3	2	3	1	4	3	4
4	4	2	4	4	4	1	3	3	4	4	3	4	4	4	4

Сравним эту таблицу с пятью группами матриц Льюиса и Лэнгфорда (см. [10]). Группа I идентична с $\mathfrak{R}_5^+$, группа II — с $\mathfrak{R}_{14}^+$, группа III — с $\mathfrak{R}_{15}^+$, а группа IV — с $\mathfrak{R}_{11}^+$. Матрица группы V нерегулярна; хотя она удовлетворяет $A4$, но не удовлетворяет $R2$, и поэтому
$\mathbf{P}(x \cup y) \neq \mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y$ $(\mathbf{P}(4 \cup 2)=\mathbf{P}2=2$, но $\mathbf{P}4 \cup \mathbf{P}2=3 \cup 2=1)$.

Вспомним, что во всех 15 представленных матрицах, как регулярных, единственным выделенным значением является 1; однако вполне можно использовать для других целей такие же матрицы с двумя выделенными значениями 1 и 2.

$\mathfrak{R}_2^+$ опровергает $A5$ и $\square$A, показывая, таким образом, что C2 содержится в T(C) и D2 как собственная подлогика. $\mathfrak{R}_4$ удовлетворяет A5, но опровергает A6 и $\square$A, показывая, что D2 строго содержится в E2 и T(D). $\mathfrak{R}_6^+$ удовлетворяет правилу $R3$, но опровергает $A5$, что указывает на собственное включение T(C) в T(D) и независимость от D2. $\mathfrak{R}_3^+$ удовлетворяет $A6$, но опровергает $\square$A, что означает собственное включение E2 в T. Наконец, $\mathfrak{R}_{10}^+$ удовлетворяет $A5$ и $R3$, но опровергает A6, откуда следует собственное включение T(D) в T и независимость T(D) и E2.

На самом деле, какие схемы аксиом общезначимы в различных матрицах, можно уяснить из рассмотрения соответствующих графов, если принять во внимание подходящие модельные условия. Так, матрицы, которые удовлетворяют T, суть те, которые базируются на рефлексивных графах, в которых $Q=\varnothing$, а именно: $\mathfrak{R}_9^+$, $\mathfrak{R}_{14}^+$, $\mathfrak{R}_{15}^+$. Некоторые другие матрицы из приведенного множества будут использованы в продолжении данной статьи.

1. Church A. Introduction to mathematical logic I., Princeton, 1956 (рус. пер.: Черч А. Введение в математическую логику. М., 1960).
2. Dummett M.A.E. and Lemmon E. J. Modal logics between S4 and S5.—"Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", vol. 5, 1959, p. 250—264.
3. Feys R. Les logiques nouvelles des modalités.—"Revue néoscholastique de philosophie", vol. 30, 1937, p. 517—533, and vol. 41, 1938, p. 217—252.
4. Kripke S. A. Semantic analysis of modal logic (abstract).—"The Journal of Symbolic Logic", vol. 24, 1959, p. 323—324.
5. Kripke S. A. A completeness theorem in modal logic, this Journal, vol. 24, 1959, p. 1—14 (рус. пер. в кн.: Фейс. Модальная логика, М., 1974, с. 223—246).
6. Kripke S. A. Semantical analysis of modal logic I.—„Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", vol. 9, 1963, p. 67—96 (рус. пер.: там же).
7. Lemmon E. J. New foundations for Lewis modal systems.—Journal of Symbolic logic", vol. 22, 1957, p. 176—186.
8. Lemmon E. J. Extension algebras and the modal system T.—"Notre Dame journal of formal logic", vol. 1, 1960, p. 3—12.
9. Lemmon E. J. Deontic logic and the logic of imperatives.—"Logique et analyse", vol. 8. 1965, p. 39—71.
10. Lewis C. I. and Langford C. H. Symbolic logic. Mew York, 1932.
11. McKinsey J.C.C. A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4, with and application to topology.—"The Journal of Symbolic Logic", vol. 6, 1941, p. 117—134.
12. McKinsey J.C.C. and Tarski A. Some theorems about the sentential calcùli of Lewis and Heyting, vol. 13, 1948, p. 1—15.
13. Ore O. Graphs and their uses. New York, 1963.
14. Prior A. N. Possible worlds.—"Philosophical quarterly", vol. 12, 1962, p. 36—43.
15. Rosenbloom P. The elements of mathematical logic. New York, 1950.
16. Thomas I. A final note on S1° and the Brouwerian axiomes.—"Norte Dame journal of formal logic", vol. 4, 1963, p. 231—232
17. Wright G. H. von. An essay in modal logic. North-Holland, 1951.

Е. Леммон

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК II*

Данная статья является продолжением [7], и терминология [7] широко в ней используется. В [7] применялись алгебраические методы Мак-Кинси—Тарского. Мы также расширили эти методы для получения семантических результатов в духе Крипке для класса сравнительно слабых модальных логик, сильнейшей из которых является логика T Фейса—фон Вригта. Исследовались деонтические варианты систем T и E2, соответственно названные T (D) и D2, и даже более слабые системы модальной логики. Основная цель настоящей статьи состоит в распространении этих результатов на более сильные системы модальной логики. Так, мы рассматриваем системы Льюиса S2—S5, систему Брауэра B из статьи Крипке [4], системы E3—E5 [5] и модальную логику Лукасевича наряду с некоторыми новыми системами.

Теперь целесообразно произвести некоторые изменения метода [7]. Так, в разделе I устанавливаются некоторые дальнейшие результаты, касающиеся модельных структур, с тем чтобы выяснить соотношения между системами S2, E2, S3 и E3; в частности, в дальнейшем изложении важную роль играют понятия *рафинированной* и *связной* модельной структуры. Кроме того, для упрощения в исследовании сильных систем раздела IV даются общие теоремы представления модальных алгебр, в основном принадлежащие Дану Скотту, в результате мы переходим от чисто

* Lemmon E. J. Algebraic Semantics for Modal Logics II.—"The Journal of Symbolic Logic", 1966, vol. 31, № 2.

алгебраического решения проблемы для каждой модальной системы (как в [7]) к модельно-структурному решению, которое легче первого. Чем дальше по ходу статьи, тем больше предоставляется читателю самостоятельно делать очевидные семантические выводы из алгебраических результатов. Так мы приходим к заключению, что A является теорией некоторой системы, если A общезначима во всех алгебрах $\mathfrak{K}^+$ для всех модельных структур $\mathfrak{K}$ некоторого вида. Тогда можно автоматически применять теорему 21 из [7] для доказательства того, что A является теоремой системы тогда и только тогда, когда A общезначима во всех $\mathfrak{K}$ некоторого вида, что означает семантическую полноту. Таким образом, теорема 21 из [7] продолжает играть фундаментальную роль в наших рассмотрениях.

Осталось сделать многое. Например, имеются различные деонтические напарники к тем системам, которые следует рассмотреть, такие, как D3—D5 из [5], так же как системы, получающиеся при добавлении к T или S4 различных редукц..ных утверждений. Однако можно ожидать, что многие методы этой статьи переносятся на другие системы. На протяжении всей статьи я чрезвычайно обязан идейному и стимулирующему влиянию Дана Скотта, хотя я один ответствен за чисто алгебраическую форму, в которую вылились у меня некоторые из его изящных семантических построений.

Системы E2, E3, ET, E4

Система E2 подробно рассматривалась в [7]. Основная цель этого раздела — установить некоторые выводимые правила для E2, которые понадобятся позднее, и наметить доказательства полноты и разрешающих процедур для трех расширений E2. Как в [7], мы рассмотрим схемы:

$A1$. $A \to (B \to A)$;
$A2$. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
$A3$. $(-A \to B) \to (B \to A)$;
$A4$. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;
$A6$. $\Box A \to A$,

и правила

$$R1.\ \frac{A\quad A \to B}{B} \qquad R2.\ \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

Система E2 определяется схемами аксиом $A1$—$A4$, $A6$ и правилами вывода $R1$, $R2$. Вдобавок к определениям

из [7] введем обозначения $T = p \to p$, $F = -(p \to p)$; *е-алгеброй* (эпистемической алгеброй) мы будем называть структуру $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$, где M — множество элементов, замкнутое относительно $\cup, \cap, -$, и $\mathbf{P}$ такое, что:

(i) M является булевой алгеброй относительно $\cup, \cap, -$;
(ii) для всех $x, y \in M$ $\mathbf{P}(x \cup y) = \mathbf{P}x \cup \mathbf{P}y$;
(iii) для всех $x \in M$ $x \leqslant \mathbf{P}x$.

Согласно следствию 2 теоремы 14, нам известно из [7], что $\vdash_{E2} A$ тогда и только тогда, когда A общезначима во всех конечных е-алгебрах.

Модельной структурой мы называем структуру $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$, где K — непустое множество элементов, $Q \subseteq K$, а U — бинарное отношение, определенное на K. Модельная структура называется *эпистемической*, если отношение U рефлексивно на $K - Q$. *Алгеброй на* $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ называется структура $\mathfrak{K}^+ = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$, где:

(i) $M = \mathfrak{P} K$ (множество всех подмножеств K);
(ii) $\cup, \cap, -$ суть теоретико-множественные операции объединения, пересечения и дополнения до множества M;
(iii) для $A \in M$ $\mathbf{P}A = \{x \mid (\exists y)(y \in A \wedge Uxy) \vee x \in Q\}$.

Согласно теореме 18 из [7], алгебра $\mathfrak{K}^+$ эпистемической м. с. $\mathfrak{K}$ является е-алгеброй, а, по теореме 19 из [7], каждая конечная е-алгебра изоморфна алгебре на некоторой конечной эпистемической м. с. Заметим также, что для $A \in M$ $\mathbf{N}A (= -\mathbf{P}-A) = \{x \mid (\forall y)(Uxy \to y \in A) \wedge x \notin Q\}$.

Сначала мы уточним этот результат, ограничив наше внимание м. с. специального вида. Назовем модельную структуру $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ *рафинированной*, если и только если:

(p) для всех $x, y \in K$ из Uxy следует $x \in K - Q$.

Интуитивно рафинированность $\langle K, Q, U\rangle$ означает, что никакой U-путь не проходит внутри Q, не ведет из Q, то есть Uxy никогда не имеет место для $x \in Q$. Для *всякой* модельной структуры $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ можно положить:

$$U_1 = \{\langle x, y\rangle : x \in K - Q \wedge Uxy\},$$

тогда м. с. $\mathfrak{K}_1 = \langle K, Q, U_1\rangle$, очевидно, будет *рафинированной*.

Докажем:

Теорема 1. $\mathfrak{K}^+ = \mathfrak{K}_1^+$

Доказательство. Положим $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ и $\mathfrak{K}_1 = \langle K, Q, U_1\rangle$, где U_1 определено так, как и выше. Случаи $\cup$, $\cap$, $-$ тривиальны, и нам нужно только показать, что для $A \subseteq K$ $PA = P_1A$, где

$$P_1A = \{x \mid (\exists y)(y \in A \wedge U_1xy) \vee x \in Q\}.$$

То, что $P_1A \subseteq PA$, получится сразу, так как из U_1xy следует Uxy. И наоборот, предположим, что $x \in PA$, так что или $(\exists y)(y \in A \vee Uxy)$, или $x \in Q$. Если $x \in Q$, то $x \in P_1A$. Предположим теперь, что $x \notin Q$. Тогда $(\exists y)(y \in A \wedge Uxy)$, следовательно, $(\exists y)(y \in A \wedge U_1xy)$ и $x \in P_1A$. Доказательство окончено.

Это означает, что в результатах о полноте из [7] можно ограничиться классом алгебр, соответствующих рафинированным м. с.

В случае E2 получаем:

Теорема 2. $\vdash_{E2}$A тогда и только тогда, когда A общезначима на $\mathfrak{K}^+$ для всех конечных рафинированных эпистемических м. с. $\mathfrak{K}$.

Можно ввести дальнейшее ограничение, как показал Крипке в [4], 2.2. Будем говорить, что м. с. $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ *связна*, если существует $x \in K$, такой, что для всех $y \in K$ $(y \neq x)$ U^*xy, где U^* является наследственным для U[1]). Для данной $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ и $x \in K$ $\mathfrak{K}_x$ (*связной м. с., порождаемой* x из $\mathfrak{K}$), называется $\langle K_x, Q_x, U_x\rangle$, где

(i) $K_x = \{y \mid U^*xy\} \cup \{x\}$;
(ii) $Q_x = K_x \cap Q$;
(iii) $U_x = \{\langle y, z\rangle \mid Uyz \wedge y, z \in K_x\}$.

Теорема 3. Если A опровергается алгеброй $\mathfrak{K}^+$ на $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$, то существует связная модельная структура $\mathfrak{K}_x$, порождаемая элементом $x \in K$, такая, что A опровергается алгеброй $\mathfrak{K}_x^+$.

Доказательство. Предположим, что A опровергается в алгебре $\mathfrak{K}^+$ при задании $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ $(A_i \subseteq K)$ значений переменных $v_1, \ldots, v_n$). Как и в [7], через $v_\mathfrak{a}$ (B) обозначим значение, приписываемое подформуле B формулы A при задании $\mathfrak{A}$. Нам известно, что $V_\mathfrak{a}(A) \neq K$, следовательно, можно выбрать $x \in K - V_\mathfrak{a}(A)$. $\mathfrak{K}_x = \langle K_x, Q_x, U_x\rangle$ — связная модельная структура, порождаемая x из $\mathfrak{K}$. Для $A_i \subseteq K$ положим $A_i' = A_i \cap K_x$ и рассмотрим задание $\mathfrak{A}'$ (в алгебре $\mathfrak{K}_x^+) = \langle A_1', \ldots, A_n'\rangle$ значений переменных из A. Сначала мы убедимся, что для всякой подформулы B формулы A для всех $k \in K_x$ $k \in V_\mathfrak{a}$ (B) тогда и только тогда, когда $k \in A_i$. Применяем индукцию по длине A. Если B является переменной v_i, то для $k \in K_x$ имеем: $k \in V_\mathfrak{a}(v_i)$ тогда и только тогда, когда $k \in A_i$, тогда и только тогда, когда $k \in A_i' (= A_i \cap K_x)$, тогда и только тогда, когда $k \in V_{\mathfrak{a}'}(v_i)$.

Если B имеет вид C $\to$ D, то для $k \in K_x$ имеет: $k \in V_\mathfrak{a}$ (C $\to$ D) тогда и только тогда, когда $k \notin V_{\mathfrak{a}'}$ (C), или $k \in V_{\mathfrak{a}'}$ (D) тогда и только тогда, когда $k \notin V_{\mathfrak{a}'}$ (C), или $k \in V_{\mathfrak{a}'}$ (D) (по индуктивному предположению) тогда и только тогда, когда $k \in V_{\mathfrak{a}'}$ (C $\to$ D). Аналогично рассматривается случай, когда B имеет вид $-$C. Наконец, предположим, что B имеет вид $\Box$C. Тогда для $k \in K_x$ имеем:

$k \in V_\mathfrak{a}(\Box C)$ тогда и только тогда, когда

$$(\forall l)(l \in K \wedge Ukl \to l \in V_\mathfrak{a}(C)) \wedge k \notin Q; \tag{1}$$

$k \in V_{\mathfrak{a}'}(\Box C)$ тогда и только тогда, когда

$$(\forall l)(l \in K_x \wedge U_xkl \to l \in V_{\mathfrak{a}'}(C)) \wedge k \notin Q_x. \tag{2}$$

Чтобы убедиться в эквивалентности правых частей (1) и (2), заметим сначала, что для $k \in K_x$ $k \in Q$, если и только если $k \in Q_x$. Теперь предположим, что выполняется условие правой части (1), и пусть $l \in K_x$ и U_xkl; тогда $l \in K$, Ukl, так что $l \in V_\mathfrak{a}$ (C); таким образом, по индуктивному предположению $l \in K_x$, $l \in V_{\mathfrak{a}'}$ (C). И наоборот, предположим, что выполняется условие правой части (2), и пусть $l \in K$ и Ukl. Так как $k \in K_x$, то либо U^*xk, либо $x = k$. В обоих случаях из Ukl получаем $l \in K_x$. Следовательно, U_xkl, так что $l \in V_{\mathfrak{a}'}$ (C). По предположению индукции, $l \in V_\mathfrak{a}$ (C). Это завершает доказательство индукции.

Мы получили, что для $k \in K_x$ $k \in V_\mathfrak{a}$ (A) тогда и только тогда, когда $k \in V_{\mathfrak{a}'}$ (A). Но поскольку $x \in K_x$ и $x \notin V_\mathfrak{a}$ (A), мы имеем $x \notin V_{\mathfrak{a}'}$ (A), так что $V_{\mathfrak{a}'}(A) \neq K_x$, и A опровергается в $\mathfrak{K}_x^+$.

Очевидно, вследствие этой теоремы можно ограничиться связными м. с. при установлении результатов о полноте. Так, для всякого недоказуемого в E2 утверждения A найдется конечная рафинированная связная м. с. $\mathfrak{K}$, такая, что A опровергается в $\mathfrak{K}^+$. Доказательство теоремы 3

[1]) Такой x не обязательно единствен.

также показывает, что для формулы А, опровергаемой заданием $\mathfrak{A}$ значений из алгебры $\mathfrak{K}^+$, для некоторой м. с. $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$ для всякого $x\in K^-\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})$ А опровергается в алгебре $\mathfrak{K}_x^+$.

В дальнейшем мы будем иметь дело с двумя специальными модельными структурами. $\mathfrak{K}_e=\langle K, Q, U\rangle$ определяется следующим образом: $K=\{a\}$, $Q=\{a\}$, $U=\varnothing$ для некоторого элемента a. $\mathfrak{K}_e^+$ обладает такими свойствами: $\mathbf{P}A=K$ для всех $A\subseteq K$; $\mathbf{N}A=\varnothing$ для всех $A\subseteq K$; $\mathfrak{K}_e$ является (тривиальным образом) связной и рафинированной. $\mathfrak{K}_5=\langle K, Q, U\rangle$ определяется так: $K=\{a, b\}$, $Q=\{a\}$, а $U=\{\langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$ для некоторых элементов a и b; $\mathfrak{K}_5$ была определена также в [7], где был дан ее граф и установлен изоморфизм с группой I Льюиса из [9]; очевидно, эта м. с. является эпистемической, связной и рафинированной.

Теорема 4. Если А опровергается $\mathfrak{K}_e^+$, то она опровергается также $\mathfrak{K}_5^+$.

Доказательство. Предположим, что А опровергается $\mathfrak{K}_e^+$, то есть для некоторого задания $\mathfrak{A}=\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ $(A_i\subseteq\{a\})$ значений переменных $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ из А $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})\neq\{a\}$, и поэтому $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})=\varnothing$. Рассмотрим *такое же* задание значений $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ в $\mathfrak{K}_5^+$. Пусть $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}_5}(\mathrm{B})$ есть значение, принимаемое подформулой В формулы А при задании $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}_5^+$. Покажем по индукции, что $a\in\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{B})$ тогда и только тогда, когда $a\in\mathrm{V}_{\mathfrak{a}_5}(\mathrm{B})$. Если В является переменным v_i, то утверждение тривиально, так же как и в случае В вида $\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ и $-\mathrm{C}$. Предположим теперь, что В имеет вид $\Box\mathrm{C}$. Тогда и в $\mathfrak{K}_e$ и в $\mathfrak{K}_5$ $a\in Q$, так что $a\notin\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\Box\mathrm{C})$ и $a\notin\mathrm{V}_{\mathfrak{a}_5}(\Box\mathrm{C})$ утверждение будет справедливо также и в этом случае. Поскольку $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})\neq\varnothing$, $a\notin\mathrm{V}_{\mathfrak{a}_5}(\mathrm{A})$, то А опровергается в $\mathfrak{K}_5$.

Теорема 5. Если $\vdash_{\mathrm{E2}}\Box T\to\Box\mathrm{A}$, то $\vdash_{\mathrm{E2}}\mathrm{A}$.

Доказательство[1]. Предположим, что $\vdash_{\mathrm{E2}}\Box T\to\Box A$ и не $\vdash_{\mathrm{E2}}\mathrm{A}$. Тогда для любой эпистемической м. с. $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$ и для всякого задания значений переменных $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{K}^+$ $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\Box T\to\Box A)=K$. Теперь легко видеть, что $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\Box T)=K-Q$, откуда следует, что $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\Box A)=K-Q$, то есть $\mathbf{N}\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})=K-Q$. Но для $A\subseteq K$ $\mathbf{N}A\subseteq A$, так что $K-Q\subseteq\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})$. В частном случае $\mathfrak{K}_5$ ввиду $b\in K-Qb\in\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}\mathrm{A}$; также ввиду $b\in\mathbf{N}\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(A)=K-Q$, если Uba, то получается, что $a\in\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})$, так что $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{A})=K$, и А удовлетворяется на $\mathfrak{K}_5^+$. Теперь, если А не является теоремой E2, по теореме 2 существует некоторая (конечная) рафинированная эпистемическая м. с. $\mathfrak{K}'=\langle K', Q', U'\rangle$, такая, что А опровергается в $\mathfrak{K}^+$, то есть такая, что $\mathrm{V}_{\mathfrak{a}}(A)=K'$ для некоторого задания $\mathfrak{A}'$ из $\mathfrak{K}'^+$. Однако, как мы отмечали, $K'-Q'\subseteq\mathrm{V}_{\mathfrak{a}'}(\mathrm{A})$. По замечаниям, следующим за теоремой 3, А опровергается также $\mathfrak{K}_x^+$ для всякого $x\in K'\mathrm{V}_{\mathfrak{a}'}(\mathrm{A})$; но всякое такое $x\in Q$. Поскольку $\mathfrak{K}'$ рафинированная, то $\mathfrak{K}_x'^+$, очевидно, изоморфна $\mathfrak{K}_e^+$, так что А также опровергается $\mathfrak{K}_e^+$. Это противоречие с теоремой 4 доказывает теорему 5.

Мы используем выведенное для E2 правило в следующем разделе. Теперь же возвратимся к системе E3, определенной добавлением к E2 схемы аксиом:

A7. $\qquad\Box\mathrm{A}\to\Box(\Box\mathrm{B}\to\Box\mathrm{A})$.

E3 можно иначе аксиоматизировать, добавляя к E2 схему аксиом:

A7'. $\qquad\Box(\mathrm{A}\to\mathrm{B})\to\Box(\Box\mathrm{A}\to\Box\mathrm{B})$.

(Так, фактически E3 определяется в [5].) В самом деле, если в *A7* вместо А подставим $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, а вместо В $-\mathrm{A}$, то получим

$$\vdash_{\mathrm{E3}}\Box(\mathrm{A}\to\mathrm{B})\to\Box(\Box\mathrm{A}\to\Box(\mathrm{A}\to\mathrm{B})),$$

а используя *A4* и *R2*, легко можно доказать

$$\vdash_{\mathrm{E2}}\Box(\Box\mathrm{A}\to\Box(\mathrm{A}\to\mathrm{B}))\to\Box(\Box\mathrm{A}\to\Box\mathrm{B})$$

Вместе все это дает $\vdash_{\mathrm{E3}}A7'$. И наоборот, мы получим *A7* из *A7'*, заметив, что $\vdash_{\mathrm{E2}}\Box\mathrm{A}\to\Box(\mathrm{B}\to\mathrm{A})$.

Из *A7*, используя *A4*, мы имеем

$$\vdash_{\mathrm{E3}}\Box\mathrm{A}\to(\Box\Box\mathrm{B}\to\Box\Box\mathrm{A}),$$

откуда, подставляя $\Box\mathrm{A}$ вместо А и А вместо В, выводим

$$\vdash_{\mathrm{E3}}\Box\Box\mathrm{A}\to\Box\Box\Box\mathrm{A}.$$

Этот и другие подобные результаты позволяют нам вывести редукционные теоремы для E3, с помощью кото-

[1] Альтернативное доказательство этой теоремы в терминах нормальных форм для E2 было сообщено мне Д. Скоттом, которому я благодарен также за то, что он обратил мое внимание на важность этого в связи с *S2* и *S3* (см. следующий раздел).

рых доказывается, что в E3 ровно 42 разных неприводимых модальности (см. Парри [23], где даются параллельные редукции в системе S3).

Лемма. $\vdash_{E3} \Diamond(\Diamond A \wedge \Box T) \leftrightarrow \Diamond A$.

Доказательство. $\vdash_{E3} \Diamond(\Diamond A \wedge \Box T) \to \Diamond A$ следует из $A7$ по правилу контрапозиции и простых модальных преобразований, если подставить $-A$ вместо A и T вместо B. И наоборот, благодаря классическому пропозициональному исчислению (A1 — A3)

$$\vdash_{E3} \Diamond A \to (\Diamond A \wedge \Box T) \vee (\Diamond A \wedge - \Box T).$$

Но $\vdash_{E3} \Diamond A \wedge \Box T \to \Diamond(\Diamond A \wedge \Box T)$ по $A6$.

Кроме того, $\vdash_{E3} \Diamond A \wedge - \Box T \to \Diamond - T$ и $\vdash_{E3} \Diamond - - T \to \Diamond C$ для всякого C. Собирая все эти утверждения вместе, получим

$$\vdash_{E3} \Diamond A \to \Diamond(\Diamond A \wedge \Box T).$$

Для соответствующих алгебраических рассмотрений определим понятие транзитивных е-алгебр как е-алгебр, удовлетворяющих кроме условий (i)—(iii) еще и

$$\text{(iv)}\ (\forall x \in M)\, \mathbf{P}(\mathbf{P}x - \mathbf{P}O) = \mathbf{P}x.$$

Используя эти определения и идеи [7], мы докажем:

Теорема 6. $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является регулярной E3-матрицей тогда и только тогда, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ транзитивная е-алгебра и $d = 1$.

Доказательство. В дополнение к доказательству теоремы 11 из [7] нам потребуется еще следующее. То, что регулярная E3-матрица удовлетворяет условию (iv), следует из леммы. И наоборот, в каждой е-алгебре $\mathbf{P}0 \leqslant \mathbf{P}y$ (ср. [7], теорема 6 (ii)), так что $\mathbf{P}x - \mathbf{P}y = \mathbf{P}x - \mathbf{P}O$, откуда $\mathbf{P}(\mathbf{P}x - \mathbf{P}y) \leqslant \mathbf{P}(\mathbf{P}x - \mathbf{P}O) = \mathbf{P}x$ по (iv). Далее, $\mathbf{N}x \to \mathbf{N}(\mathbf{N}y \to \mathbf{N}x) = -\mathbf{N}x \cup \mathbf{N}(-\mathbf{N}y \cup \mathbf{N}x) = \mathbf{P} - x \cup - \mathbf{P} \times (-\mathbf{P} - y \cap \mathbf{P} - x)$. Но из вышесказанного $-\mathbf{P} - x \leqslant \mathbf{P}(\mathbf{P} - x \cap -\mathbf{P} - y)$. Таким образом, $\mathbf{N}x \to \mathbf{N}(\mathbf{N}y \to \mathbf{N}x) = 1$ и $A7$ выполняется.

Эта теорема показывает, что регулярную E3-матрицу Линденбаума (о существовании которой см. доказательство теоремы 8 из [7]) можно рассматривать как транзитивную е-алгебру с 1 как выделенным значением. Далее устанавливается финитная аппроксимируемость E3.

Теорема 7. Пусть A является ппф с r подформулами. Тогда $\vdash_{E3} A$, если и только если A истинна во всех транзитивных е-алгебрах с не более чем $2^{2^{r+1}}$ элементами.

Линии доказательства и обозначения следуют теоремам 13 и 14 из [7]. Вдобавок к тому, что там доказано, остается показать только, что $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}x - \mathbf{P}_1 O) = \mathbf{P}_1 x$, если дано $\mathbf{P}(\mathbf{P}x - \mathbf{P}O) = \mathbf{P}x$, где $\mathbf{P}_1 x = \mathbf{P}y_1 \cap \ldots \cap \mathbf{P}y_n$ для $y_1, \ldots, y_n$, покрывающих x. В построении M_1 из M не обязательно включать $\mathbf{P}1$, так как $\mathbf{P}1 = 1$, но вместо этого мы включаем $\mathbf{P}O$; отсюда следует, что в M_1 не более чем $2^{2^{r+1}}$ элементов. Так как $\mathbf{P}O \in M_1$, $\mathbf{P}_1 O = \mathbf{P}O$, по (v) теоремы 13 из [7]. $\mathbf{P}_1(x) \leqslant \mathbf{P}y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, откуда $\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}O \leqslant \mathbf{P}y_i - \mathbf{P}_1 O = \mathbf{P}y_i - \mathbf{P}O$. Но $\mathbf{P}(\mathbf{P}y_i - \mathbf{P}O) = \mathbf{P}y_i \in M_1$, так что $\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O$ покрывается $\mathbf{P}y_i - \mathbf{P}O$. Предположим, что $\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O$ также покрывается $z_1, \ldots, z_m$. Тогда $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O) = \mathbf{P}(\mathbf{P}y_1 - \mathbf{P}O) \cap \ldots \cap \mathbf{P}(\mathbf{P}y_n - \mathbf{P}O) \cap \mathbf{P}z_1 \cap \ldots \cap \mathbf{P}z_m$. Таким образом, $\mathbf{P}_1(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O) \leqslant \mathbf{P}_1 x$. И наоборот, так как $\mathfrak{M}_1$ — е-алгебра, то $\mathbf{P}_1 O \leqslant \mathbf{P}_1 x$, откуда $\mathbf{P}_1 x = (\mathbf{P}x - \mathbf{P}_1 O) \cup \mathbf{P}_1 O$. Но $\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O \leqslant \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O)$, а также $\mathbf{P}_1 O \leqslant \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O)$. Следовательно, $\mathbf{P}_1 x \leqslant \mathbf{P}_1 \times (\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_1 O)$. Этим и завершается доказательство.

Возвращаясь к модельным структурам, определим *транзитивную* м. с. $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ как м. с., в которой U транзитивно в K. Доказывается:

Теорема 8. Если $\mathfrak{K}$ — транзитивная эпистемическая м. с., то $\mathfrak{K}^+$ является транзитивной е-алгеброй.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что $\mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q) = \mathbf{P}A$ для $A \subseteq K$, где $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ — транзитивная эпистемическая м. с. Предположим, что $x \in \mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q)$. Тогда, если $x \in Q$, $x \in \mathbf{P}A$ во всяком случае. Если $x \notin Q$, то для некоторого y $y \in \mathbf{P}A - Q$ и Uxy, следовательно, $y \notin Q$ и $y \in \mathbf{P}A$, а значит, для некоторого z $z \in A$ и Uyz. Таким образом, по транзитивности U, имеем Uxz и $x \in \mathbf{P}A$. И наоборот, предположим, $x \in \mathbf{P}A$. Если $x \in Q$, то $x \in \mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q)$. Если $x \notin Q$, то $x \in \mathbf{P}A - Q$, а следовательно, $x \in \mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q)$, по предположению об эпистемичности $\mathfrak{K}$.

Теорема 9. Всякая конечная транзитивная е-алгебра изоморфна алгебре на некоторой конечной транзитивной эпистемической м. с.

Доказательство. Будем следовать линиям доказательства теорем 17 и 19 из [7]. Мы знаем, как найти для данной конечной транзитивной е-алгебры $\mathfrak{M}$ конечную эпистемическую $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$, такую, что $\mathfrak{M}$ изоморфна $\mathfrak{K}^+$ при изоморфизме φ. По теореме 1, $\mathfrak{K}^+=\mathfrak{K}_1^+$, где $\mathfrak{K}_1$ — рафинированная м. с., соответствующая $\mathfrak{K}$. Значит, $\mathfrak{M}$ изоморфна $\mathfrak{K}_1^+$ при изоморфизме φ. Дальше, при изоморфизме φ $\mathbf{P}(\mathbf{P}A-Q)=\mathbf{P}A$ для $A\subseteq K$, так как $\mathfrak{M}$ транзитивна. Предположим теперь, что для некоторых x, y, $z\in K$ имеет место U_1xy и U_1yz; тогда x, $y\notin Q$, так как м. с. $\mathfrak{K}_1$ рафинированная. Тогда $y\in\mathbf{P}\{z\}$, $y\in\mathbf{P}\{z\}-Q$, откуда $x\in\mathbf{P}(\mathbf{P}\{z\}-Q)$. Следовательно, $x\in\mathbf{P}\{z\}$ и U_1xz, так что отношение U_1 транзитивно.

Теорема 10. $\vdash_{E3}A(i)$ тогда и только тогда, когда A общезначима на $\mathfrak{K}^+$ для всех транзитивных эпистемических м. с. $\mathfrak{K}$; тогда и только тогда, когда A общезначима на всех конечных транзитивных эпистемических м. с. $\mathfrak{K}$.

Доказательство получается непосредственно из теорем 7—9 (ср. с доказательством теоремы 20 в [7]). Если, следуя линии [7], определить Е3-общезначимость А как истинность во всех транзитивных эпистемических м. с., то по теореме 21 из [7] получим:

Теорема 11. $\vdash_{E3}A$ тогда и только тогда, когда А Е3-общезначима.

Следующим результатом для Е3, который будет использован в дальнейшем, является:

Теорема 12. Если $\vdash_{E3}\Box T\to\Box A$, то $\vdash_{E3}A$.

Доказательство параллельно доказательству теоремы 5, если учесть, что $\mathfrak{K}_5$ есть транзитивная эпистемическая м. с., такая, что $\mathfrak{K}_5^+$ удовлетворяет Е3.

Третья система, которую мы рассмотрим, ЕТ, получается из Е2 добавлением аксиомы:

$A8$. $\qquad \Box T\to\Box\Box T.$

Так как обратная импликация следует из $A6$, то

$\vdash_{ET} \qquad \Box T\leftrightarrow\Box\Box T.$

Семантика ЕТ излагается в следующих теоремах. Назовем е-алгебру *замкнутой*, если кроме условий (i)—(iii) она удовлетворяет (v) $\mathbf{PP}(\mathrm{O})=\mathbf{P}(\mathrm{O})$.

Теорема 13. $\mathfrak{M}=\langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является регулярной ЕТ-матрицей тогда и только тогда, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ есть замкнутая е-алгебра и $d=1$.

Доказательство. Вспомним теорему 6. Что регулярная ЕТ-матрица удовлетворяет (v), непосредственно вытекает из $\vdash_{ET}\Diamond\Diamond F\leftrightarrow\Diamond F$. И наоборот, если дано (v), то $\mathbf{NN}1=\mathbf{N}1$, так что $\mathbf{N}(x\to x)\to\mathbf{NN}(x\to x)=-\mathbf{N}1\cup\mathbf{NN}1=1$.

Теорема 14. Пусть А — ппф с r подформулами. Тогда $\vdash_{ET}A$, если и только если А общезначима на всех замкнутых е-алгебрах с не больше чем $2^{2^{r+1}}$ элементами.

Доказательство. Вспомним теорему 7. Здесь достаточно доказать, что при $\mathbf{PP}\mathrm{O}=\mathbf{P}\mathrm{O}$ будет $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\mathrm{O}=\mathbf{P}_1\mathrm{O}$. Как в доказательстве теоремы 7, мы включаем $\mathbf{P}\mathrm{O}$ в построение M_1, так что $\mathbf{PP}\mathrm{O}=\mathbf{P}\mathrm{O}\in M_1$. Тогда по (v) теоремы 13 из [7] $\mathbf{P}_1\mathbf{P}\mathrm{O}=\mathbf{PP}\mathrm{O}$. По этой же причине $\mathbf{P}\mathrm{O}=\mathbf{P}_1\mathrm{O}$. Итак, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\mathrm{O}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}\mathrm{O}=\mathbf{PP}\mathrm{O}=\mathbf{P}\mathrm{O}=\mathbf{P}_1\mathrm{O}$.

Будем называть модельную структуру $\mathfrak{K}\langle K, Q, U\rangle$ *замкнутой*, если из Uxy следует $y\in K-Q$ для всех x, $y\in K$.

Таким образом, в замкнутой модельной структуре нет U-путей внутри Q или ведущих в Q.

Теорема 15. Если $\mathfrak{K}$ — замкнутая эпистемическая м. с., то она является замкнутой е-алгеброй.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$ — замкнутая эпистемическая м. с. Достаточно показать, что $\mathbf{P}Q=Q$. Включение $Q\subseteq\mathbf{P}Q$ тривиально. Предположим, $x\in\mathbf{P}Q$. Тогда $(\exists y)\ (y\in Q\wedge Uxy)\vee\vee x\in Q$. Но в силу замкнутости $\mathfrak{K}$ первый член дизъюнкции невозможен.

Теорема 16. Всякая конечная замкнутая е-алгебра изоморфна алгебре на некоторой конечной замкнутой эпистемической м. с.

Доказательство. Как в теореме 9, мы знаем, что $\mathfrak{M}$ изоморфна $\mathfrak{K}^+$, а также $\mathfrak{K}_1^+$, где м. с. $\mathfrak{K}_1$ — рафинированная. Дальше, по изоморфизму $\mathbf{P}Q=Q$, так как $\mathfrak{M}$ здесь замкнута. Предположим теперь, что U_1xy, но $y\in Q$ для x, $y\in K$. Тогда $x\in\mathbf{P}Q=Q$, что противоречит рафинированности $\mathfrak{K}_1$.

Как обычно, получается теорема о полноте.

Теорема 17. $\vdash_{ET}$ A (i) тогда и только тогда, когда A истинна на $\mathfrak{K}^+$ для всех замкнутых эпистемических м. с. $\mathfrak{K}$; (ii) тогда и только тогда, когда A истинна на $\mathfrak{K}^+$ для всех конечных замкнутых эпистемических м. с. $\mathfrak{K}$.

Определяя ET-общезначимость как истинность A во всех замкнутых эпистемических м. с., мы получаем:

Теорема 18. $\vdash_{ET}$A тогда и только тогда, когда A — ET-общезначимая формула. Главное различие между ET и E2, E3 состоит в том, что аналог теорем 5 и 12 не имеет места. Это главным образом потому, что $\mathfrak{K}_6$ *не* замкнута, так как Uba, хотя $a \in Q$. Действительно, если бы $\vdash_{ET} \Box T \to \Box$ A, то $\vdash_{ET}$ A и по $A8$ мы могли бы заключить $\vdash_{ET} \Box T \to \Box$ A, но, как мы увидим, в ET, подобно другим E-системам, нет теорем вида $\Box$A.

Наша четвертая система, E4, получается из E2 добавлением $A7$ и $A8$. Другой эквивалентный способ получить E4 из E2—добавить схему аксиом:

$A9$. $\qquad \Box A \to \Box\Box A.$

Для этого заметим, что $\vdash_{ET} \Box A \to \Box\Box T$, так как $\vdash_{E2} \Box A \to \Box T$ и $\vdash_{E3} \Box A \to (\Box\Box T \to \Box\Box A)$ по $A7$ и $A4$. Следовательно, $\vdash_{E4}$ $A9$. И наоборот, $\vdash_{E2} \Box\Box A \to \Box(\Box B \to \Box A)$, так что $A7$ непосредственно вытекает из $A9$, так же как и $A8$. (Этим другим способом E4 определяется в [5]).

При данной здесь аксиоматизации E4 результаты полноты и разрешающая процедура получаются посредством простой комбинации результатов для E3 и ET и не требуют отдельного рассмотрения.

Подходящими алгебрами будут замкнутые транзитивные эпистемические е-алгебры[1], а соответствующие модельные структуры суть замкнутые транзитивные эпистемические м. с. Определяя E4-истинность формулы A как общезначимость A во всех замкнутых транзитивных эпистемических м. с., получаем:

Теорема 19. $\vdash_{E4}$ A тогда и только тогда, когда A — E4-общезначима.

[1] Эти алгебры можно также определить как е-алгебры, в которых $\mathbf{PP}x = \mathbf{P}x$.

Итак, для всех четырех систем настоящего раздела указана алгебраическая семантика.

Системы S2, S3, T, S4

Рассматриваемые в этом разделе статьи системы S2, S3, T и S4 в отличие от систем предыдущего раздела хорошо известны в литературе (см., например, [14]). Мы увидим, что подходящую семантику для этих систем можно вывести из семантик прежних систем довольно естественным путем. Нам не потребуются новые схемы аксиом, за исключением того, что для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ мы примем схему $\Box A_i$, получающуюся из схем A_i приписыванием слева символа необходимости. Однако мы используем два новых правила:

$$R2' \frac{\Box(A \to B)}{\Box(\Box A \to \Box B)} \quad R3 \frac{A}{\Box A}.$$

Четыре новые системы определяются так:

$$\begin{aligned} S2 &= \{A6,\ \Box A1 - \Box A4,\ \Box A6;\ R1,\ R2'\}; \\ S3 &= \{A6,\ \Box A1 - \Box A4,\ \Box A6,\ \Box A7;\ R1\}; \\ T &= \{A1 - A4,\ A6;\ R1,\ R3\}; \\ S4 &= \{A1 - A4,\ A6,\ A9;\ R1,\ R3\}. \end{aligned}$$

Это стандартные формулировки T и S4. Относительно S2 (S3) мы заметим, во-первых, что A1 — A4 (A1 — A4, A7) следуют как схемы теорем, согласно A6; во-вторых, простой индукцией доказывается, что если A вытекает из A1 — A4, A6 (A1 — A4, A6, A7) *только* по правилу $R1$, то $\vdash_{S2\,(S3)} \Box$ A. (Это справедливо для A1 — A4, A6 (A1 — A4, A6, A7), а при переходе от A и A $\to$ B к B по B1 можно сделать параллельный переход от $\Box$ A и $\Box$(A $\to$ B) к $\Box$ B по A4 и R1).

Так как все тавтологии выводимы из $A1 - A3$ только с помощью $R1$, то для тавтологии A, $\vdash_{S2\,(S3)} \Box$ A. Теперь сразу получается эквивалентность приведенной здесь формулировки S2 формулировке из [5]. Для S3 дополнительно заметим, что, используя A7, мы легко можем вывести R2′ как правило (заменяя A на A $\to$ B и B на T и замечая, что $\vdash_{S3} \Box T$); это позволяет нам вывести $\Box$A7′ из $\Box$A7 параллельно E3-выводу A7′ из A7 (см.

предыдущий раздел) и установить эквивалентность формулировке S3 в [5][1].

Теорема 20. (i) $\vdash_{E2} A$ в том и только в том случае, когда $\vdash_{S2} \Box A$; (ii) $\vdash_{S2} A$ в том и только в том случае, когда $\vdash_{E2} \Box T \to A$; (iii) $\vdash_{E3} A$ в том и только в том случае, когда $\vdash_{S3} \Box A$; (iv) $\vdash_{S3} A$ в том и только в том случае, когда $\vdash_{E3} \Box T \to A$.

Доказательство. Следование $\vdash_{S2} \Box A$ из $\vdash_{E2}$ доказывается по индукции, как в [5]. Очевидно также, что если $\vdash_{E2} \Box T \to A$, то $\vdash_{S2} A$, так как $\vdash_{S2} \Box T$. И наоборот, предположим, что $\vdash_{S2} A$; индукцией по длине доказательства A в S2 мы покажем, что $\vdash_{E2} \Box T \to A$. Это сразу же устанавливается для аксиом, так как $\vdash_{E2} \Box T \to \Box Ai$ $(i = 1, 2, 3, 4, 6)$ по R2. Переходу от B и $B \to C$ к C в S2 соответствует переход от $\Box T \to B$ и $\Box T \to (B \to C)$ к $\Box T \to C$ в E2 с использованием A2 и R1. Предположим, наконец, что $\Box(\Box B \to \Box C)$ выведено из $\Box(B \to C)$, по правилу $R2'$, и что $\vdash_{E2} \Box T \to \Box(B \to C)$. Тогда, по теореме 5, $\vdash_{E2} B \to C$, откуда по $R2$ $\vdash_{E2} \Box B \to \Box C$; и далее, $\vdash_{E2} T \to (\Box B \to \Box C)$, откуда, снова по $R2$, $\vdash_{E2} \Box T \to \Box(\Box B \to \Box C)$, что и нужно было получить. Это доказывает (ii). Для доказательства другой половины (i) предположим, что $\vdash_{S2} \Box A$. Тогда, по только что полученному результату, $\vdash_{E2} \Box T \to \Box A$, откуда $\vdash_{E2} A$, по теореме 5. Это дает (i).

Для доказательства (iii) и (iv) мы выводим $\vdash_{S3} \Box A$ из $\vdash_{E3} A$ индукцией по длине доказательства (шагу от $A \to B$ к $\Box A \to \Box B$ по $R2$ соответствует переход от $\Box(A \to B)$ к $\Box(\Box A \to \Box B)$ с использованием $A7'$). Вывод $\vdash_{S3} A$ из $\vdash_{E3} \Box T \to A$ получается сразу ввиду $\vdash_{S3} \Box T$, а обратный вывод также тривиален, так как не надо заботиться о правиле $R2$. Это доказывает (iv). Осталось доказать другую половину (iii). Пусть $\vdash_{S3} \Box A$. Тогда, по только что полученному результату, $\vdash_{E3} \Box T \to \Box A$, откуда $\vdash_{E3} A$, по теореме 12, чем и завершается доказательство (iii).

[1] Следует отметить, что выше дана аксиоматизация S3 в духе Саймонса [15]; такие аксиоматики можно дать для S4, E3, E4, но не для E2, S2, ET или T, как показано в [8].

Теорема 21.

(i) $\vdash_{T} A$ эквивалентно $\vdash_{ET} \Box T \to A$;

(ii) $\vdash_{S4} A$ эквивалентно $\vdash_{E4} \Box T \to A$.

Доказательство. Из $\vdash_{ET\,(E4)} \Box T \to A$ получается сразу $\vdash_{T\,(S4)} A$ ввиду $\vdash_{T\,(S4)} \Box T$ (и, очевидно, включения теорем ET (E4) в теоремы T (S4)). Обращение доказывается простой индукцией: шагу $R3$ от B к $\Box$ B соответствует переход от $\Box T \to B$ к $\Box T \to \Box B$, с использованием $R2$ и $A8$.

Из теоремы 20 (ii) и (iv) и теоремы 21 следует, что проблема разрешения для четырех новых систем сводится к проблеме разрешения четырех предыдущих систем, которые, как было установлено раньше, разрешимы. (И наоборот, (i) и (iii) теоремы 20 сводят проблемы разрешения для E2 и E3 к проблемам для S2 и S3.) Далее, эти результаты позволяют получить теоремы полноты для новых систем из аналогичных теорем прежних систем.

В терминах алгебры мы будем говорить, что ппф A с переменными *слабо выполняются* на е-алгебре $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $f^{(A)}$, *n*-местная табличная функция, соответствующая A, принимает значения $\geqslant N1$ для каждого *n*-набора элементов из $\mathfrak{M}$. Это, очевидно, эквивалентно при осмыслении $\mathfrak{M}$ *как матрицы*; если вместо одного выделенного значения 1 мы будем считать выделенными все элементы $\geqslant N1$, то есть D, то множество выделенных элементов окажется главным фильтром (аддитивным идеалом), порождаемым N1; тогда слабая выполнимость эквивалентна выполнимости в новой матрице[1].

Теорема 22. Для каждой е-алгебры $\mathfrak{M}$ $\Box T \to A$ удовлетворяется на $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда A слабо удовлетворяется на $\mathfrak{M}$.

Доказательство. $f^{(\Box T \to A)} = 1$ тогда и только тогда, когда $N1 \to f^{(A)} = 1$, тогда и только тогда, когда $N1 \leqslant f^{(A)}$.

[1] Заметим, что эта новая матрица нерегулярна, как показано в [7]. Для этого заметим также, что условие (iii) определения 5 из [7], вообще говоря, не выполняется (например, если $x = 1$, $y = N1$, то $x \leftrightarrow y = N1 \in D$, но не всегда $x = y$). Мы видим здесь, между прочим, почему конечные матрицы с более чем одним выделенным значением играют столь большую роль в изучении слабых льюисовских систем.

Алгебраические результаты о полноте для всех четырех систем следуют по теоремам 20—22 из соответствующих результатов для прежних систем.

Теорема 23. $\vdash_{S2\,(S3,\,T,\,S4)}$ A тогда и только тогда, когда A слабо удовлетворяется на всех конечных (транзитивных, замкнутых, замкнутых транзитивных) e-алгебрах.

Действительно, для T и S4 в терминах выполнимости в нормальных e-алгебрах (где нормальная алгебра, как определено в [7], характеризуется условием $PO=0$) можно получить лучшие результаты, чем в терминах *слабой* выполнимости в замкнутых e-алгебрах. Соответствующие результаты действительно выводятся из исследования нормальных алгебр и модельных структур в [7], но будет более удобно и в некоторых отношениях более показательно вывести их здесь независимо. Это прольет больше света на важность условий замкнутости и аксиомы *A*8 и покажет, почему аналогичные результаты не получаются для S2 и S3, в алгебрах которых эти условия не выполняются.

Сначала заметим, что если A слабо удовлетворяется на всех (конечных) e-алгебрах, то a fortiori A удовлетворяется на всех (конечных) нормальных e-алгебрах, так как если $PO=0$ и $N1=1$, то слабая выполнимость есть просто выполнимость. Для установления обратного соотношения удобнее обратиться к модельным структурам. Если A слабо удовлетворяется на $\mathfrak{K}^+$ для м. с. $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$, то для всякого задания $\mathfrak{A}$ значений переменных $K-Q\subseteq\subseteq V_{\mathfrak{a}}(A)$. В терминах моделей Крипке $\Phi(v, k)$ (идею этого можно найти в [4]; обозначения см. в [7]) слабая выполнимость A на $\mathfrak{K}^+$ эквивалентна истинности A во всех моделях $\Phi(v, k)$ для всех $l\in K-Q$ в $\mathfrak{K}$; это можно назвать *слабой* общезначимостью A в $\mathfrak{K}$.

Рассмотрим замкнутую модельную структуру $\mathfrak{K}==\langle K, Q, U\rangle$. По условию замкнутости, в ней нет U-путей, ведущих в Q. Если выбрать какой-нибудь $x\in K-Q$, то в $\mathfrak{K}_x=\langle K_x, Q_x, U_x\rangle$ — связной модельной структуре, порожденной x из $\mathfrak{K}$, $Q_x=\varnothing$, так что $\mathfrak{K}_x^+$ нормальна. Мы применим этот факт в доказательстве следующей теоремы. Скажем, что A *слабо опровергается* на $\mathfrak{K}^+$, если и только если формула A не слабовыполнима на $\mathfrak{K}^+$.

Теорема 24. Если A слабо опровергается на $\mathfrak{K}^+$ для замкнутой эпистемической $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$, то для некоторого $x\in K-Q$ A опровергается на $\mathfrak{K}_x^+$, где $\mathfrak{K}_x^+$ — нормальная e-алгебра.

Доказательство. Если A слабо опровергается на $\mathfrak{K}^+$, то для некоторого задания значений $\mathfrak{A}$ $(K-Q)-V_{\mathfrak{a}}(A)\neq\varnothing$. Выберем $x\in(K-Q)-V_{\mathfrak{a}}(A)$. Тогда $\mathfrak{K}_x^+$ опровергает A, по замечанию к теореме 3, и $\mathfrak{K}_x^+$ является нормальной м. с., по замечанию, предшествующему этой теореме.

Если $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$ не только замкнута, но и транзитивна, то для $x\in K-Q$ $\mathfrak{K}_x^+$ будет не только нормальной, но и транзитивной. Следовательно, если A не представляет собой теорему T (S4), то существует конечная (транзитивная) e-алгебра, а также конечная (транзитивная) $\mathfrak{K}^+$ для эпистемической м. с. $\mathfrak{K}$, в которой формула A слабо опровержима. Тогда, по теореме 24 и следующему за ней замечанию, существует конечная (транзитивная) нормальная e-алгебра $\mathfrak{K}$, в которой опровергается A. Отсюда мы получаем все обычные результаты полноты для T и S4. Заметим, в частности, что нормальная эпистемическая алгебра есть просто *алгебра расширений* в смысле [6] и что нормальная транзитивная эпистемическая алгебра есть просто *алгебра с замыканием* в смысле Мак-Кинси—Тарского [12]. Таким образом, от теоремы 23 мы приходим к теореме 25.

Теорема 25. $\vdash_{T\,(S4)}$ A тогда и только тогда, когда A общезначима во всех конечных алгебрах расширений (с замыканием).

T-общезначимость определена в [7] как истинность во всех нормальных эпистемических м. с.

Можно определить S2-общезначимость как слабую истинность во всех эпистемических м. с., S3-общезначимость как слабую истинность во всех транзитивных эпистемических м. с. и S4-общезначимость — как истинность во всех нормальных транзитивных эпистемических м. с. Тогда будет верна:

Теорема 26. $\vdash_{S2\,(S3,\,T,\,S4)}$ A тогда и только тогда, когда A будет S2- (S3-, T-, S4-) общезначимой формулой. Отношение между E2 и S2 уже достаточно ясно ввиду теоремы 20. Однако можно еще кое-что уточнить в следующем смысле. Определим иерархию систем $E2^n$, таких, что $E2^0=E2$, и для $n\geqslant 1$ $E2^n$ содержит в качестве аксиом все формулы A, такие, что $\vdash_{E2} A$ и $\Box^n T$, а единственное правило вывода — $R1$. Обсудим сначала $E2^1$.

Теорема 27. $E2^1 = S2$.

Доказательство. Включение (теорем) $E2^1$ в S2 очевидно. И наоборот, предположим, $\vdash_{S2} A$. Тогда $\vdash_{S2} \Box T \to A$ по теореме 20, откуда $\vdash_{S2} A$. Таким образом, класс S2-теорем — это в точности класс E2-теорем, и $\Box T$ замкнуто относительно правила отделения.

Теорема 28. $\vdash_{E2^n} A$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{E2} \Box^n T \to A$.

Доказательство проводится по индукции.

Таким образом, проблема разрешения для каждой системы $E2^n$ решается с помощью E2.

Подходящие семантики для всех систем можно указать по аналогии с семантикой для S2. Так, назовем формулу A n-слабовыполнимой в алгебре $\mathfrak{M}$, если и только если для каждого задания значений переменных из $\mathfrak{M}$ $f(A) \geqslant N^n 1$.

По аналогии с теоремой 23 имеем:

Теорема 29. $\vdash_{E2^n} A$ тогда и только тогда, когда A n-слабовыполнима на всех конечных е-алгебрах.

Можно сказать, что A n-слабообщезначима в $\mathfrak{K}$, если и только если A истинна во всех моделях $\Phi(v, k)$ для всех $k \in (K - P^{n-1}Q)$ в $\mathfrak{K}$. Тогда A — $E2^n$-общезначима, если и только если A n-слабообщезначима во всех эпистемических м. с., и наоборот. Легко доказывается

Теорема 30. $\vdash_{E2^2} A$ тогда и только тогда, когда A — $E2^2$-общезначима.

Системы $E2^n$ образуют возрастающую последовательность в том смысле, что класс теорем $E2^n$ собственно содержится в классе $E2^{n+1}$; в $E2^n$ нет теорем вида $\Box^{n+1} A$, как показывают, например, матрицы $\mathfrak{M}^n$ из [8]. Далее, объединение множеств теорем всех систем $E2^2$ есть в точности множество теорем системы T, как показано в [8]. Доказательство теоремы 5 можно обобщить надлежащим образом, чтобы показать следующий факт: если $\vdash_{E2} \Box^n T \to \Box^n A$, то $\vdash_{E2} A$, откуда можно вывести, следуя линии доказательства теоремы 20, что $\vdash_{E2} A$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{E2^n} \Box^n A$. Это значит, что для каждого $E2^n$ можно вывести обобщенную версию правила $R2^r$:

$$R2^n \frac{A \Rightarrow^n B}{\Box A \Rightarrow^n \Box B}.$$

Таким образом, в $E2^n$ имеет место подстановочность „n-строго" эквивалентных формул, то есть таких A и B, что $\vdash_{E2^n} A \Leftrightarrow^n B$, но не „$m$-строго" эквивалентных формул, где $m < n$. Это обобщает известные факты о S2.

Можно, наконец, попытаться определить аналогичную иерархию, основанную на E3 так, что $E3^0 = E3$, а $E3^n$ для $n \geqslant 1$ содержит в качестве аксиом формулы A, такие, что $\vdash_{E3} A$ наряду с $\Box^n T$ и единственным правилом вывода $R1$. Однако мы установим следующее:

Теорема 31. $E3^1 = S3$; $E3^n = S4$ для $n \geqslant 2$.

Доказательство. Что $E3^1 = S3$, следует из теоремы 20 (iv). Очевидно, если $\vdash_{E3^n} A$, то $\vdash_{S4} A$, и если $\vdash_{E3^n} A$, то $\vdash_{E3^{n+1}} A$. Следовательно, достаточно показать, что если $\vdash_{S4} A$, то $\vdash_{E3^2} A$. Заметим, что $\vdash_{E3} \Box\Box T \to (\Box A \to \Box\Box A)$ по $A7$ и $A4$. Таким образом, $\vdash_{E3^2} A9$. Предположим, что $\vdash_{E3^2} A$. Покажем по индукции, что $\vdash_{E3^2} \Box A$ и, таким образом, что $R3$ есть выводимое правило E3. Если $\vdash_{E3} A$, то $\vdash_{E3} \Box T \to \Box A$ по $R2$, откуда $\vdash_{E3^2} \Box A$. Кроме того, $\vdash_{E3^2} \Box^3 T$, по A9 и аксиоме $\Box^2 T$. Итак, если A является $E3^2$-аксиомой, то $\vdash_{E3^2} \Box A$. Очевидно, когда C следует из B и $B \to C$ по $R1$, $\Box C$ следует из $\Box B$ и $\Box(B \to C)$, согласно A4 и $R1$. Это завершает доказательство.

Итак, если S2 можно рассматривать как первую ступень в иерархии систем, ведущих от E2 к T, и S3 находится в таком же отношении к E3, в каком S2 находится к E2, аналогичная иерархия между E3 и S4 вырождается уже на второй ступени. Этот факт тесно связан с конечной аксиоматизируемостью S4 (см. [8], особенно теорему 1).

Общая теорема о представлении[1]

Восемь рассмотренных до сих пор систем относительно включения образуют куб. Представим себе E-системы как

[1] Основным результатом этого и следующего разделов я весьма обязан идеям, сообщенным мне Даном Скоттом.

вершины в основании куба: тогда E3 и ET будут расширениями E2, в которых соответственно добавлены аксиомы $A7$ и $A8$, а E4 является расширением, содержащим обе эти аксиомы. Четыре системы из последнего раздела статьи можно поместить в верхней части куба над предыдущими четырьмя системами: как показывают теоремы 20 и 21, в каждой из „верхних" систем содержатся в точности те теоремы A, для которых $\Box T \to$ A служат теоремами соответствующих нижних систем. (См. схему в разделе VI.) Теперь мы рассмотрим восемь других систем, полученных из прежних восьми как бы переходом в новое, четвертое измерение. Этому новому измерению соответствует добавление схемы аксиом:

$$A10.$$
$$\Box T \to (\mathrm{A} \to \Box \Diamond \mathrm{A});$$

причем надо заметить, что в случае систем S2 и S3 мы добавляем $\Box A10$ (откуда $A10$ следует согласно $A6$). Как мы увидим, бóльшая часть получающихся систем уже известна из литературы.

Наши результаты о полноте существенно зависят, во-первых, от установления финитной аппроксимируемости этих систем (то есть каждая не-теорема опровергается на подходящей *конечной* алгебре) и, во-вторых, от использования теорем о представлении для конечных алгебр в терминах алгебр некоторых конечных модельных структур. Эти методы кажутся не применимыми непосредственно к новым системам. Поэтому мы поменяем местами эти этапы. Докажем сначала теорему представления применительно ко *всем* алгебрам, конечным или бесконечным, а затем установим свойства конечных моделей скорее в терминах модельных структур, чем в чисто алгебраических терминах. (В действительности мы могли бы везде следовать этому порядку.) Настоящий раздел как раз и дает эту общую теорему о представлении.

Вернемся назад, к понятию *модальной алгебры* в [7], по существу к алгебрам, подобным е-алгебрам, за исключением того, что условие (iii), то есть $x \leqslant \mathbf{P}x$, не обязательно выполняется. Если $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ является модальной алгеброй со счетным множеством M, тогда, конечно, не может существовать модельная структура $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U \rangle$, такая, что $\mathfrak{M}$ изоморфна $\mathfrak{K}^+$, так как алгебра $\mathfrak{K}^+$ содержит либо конечное, либо несчетное

число элементов в зависимости от того, содержит ли K конечное или бесконечное число элементов. Следовательно, в соответствии с общей теоремой Стоуна о представлении булевых алгебр, самое большее, что можно было бы показать, это что $\mathfrak{M}$ изоморфна некоторой *подалгебре* $\mathfrak{K}^+$ для некоторой м. с. $\mathfrak{K}$. Фактически наше доказательство будет близко следовать и являться обобщением доказательства Стоуна.

Для произвольной модальной алгебры $\mathfrak{M} = \langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ обозначим через m, n переменные с областью изменения M. Обозначим через F множество всех собственных максимальных фильтров булевой алгебры $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$ и пусть x, y, z будут переменные с областью значений F. (Собственный максимальный фильтр $x \in F$ есть подмножество M, которое является фильтром (аддитивным идеалом), таким, что $0 \notin x$ и для всякого $m \in M$ либо $m \in x$ либо $-m \in x$.) Теперь пусть A — любое подмножество M. Все конечные пересечения элементов A принадлежат M; пусть A' — множество таких пересечений, то есть $A' = \{n : (\exists m_1) \ldots (\exists m_p)(n = m_1 \cap \ldots \cap m_p \wedge m_1, \ldots, m_p \in A)\}$ $(p \geqslant 1)$.

Очевидно, что $A \subseteq A'$. Положим, $A^s = \{m : m \geqslant n$ для $n \in A'\}$. (В случае $A = \varnothing$ положим, $A^s = \{1\}$.) Очевидно, что $A' \subseteq A^s$, так что $A \subseteq A^s$. Интуитивно, если $\mathfrak{M}$ есть алгебра Линденбаума, то можно рассматривать A^s как множество „теорем", выводимых из A, как множества „аксиом" (ср. Столл [17], гл. 6, разделы 6—9). Мы покажем сейчас, что A^s всегда является фильтром.

Лемма 1. Для $A \subseteq M$, A^s есть фильтр в $\langle M, \cup, \cap, - \rangle$.

Доказательство. Пусть $m \in A^s$ и $n \in A^s$. Тогда найдутся конечные пересечения элементов A, m' и $n' \in A'$ такие, что $m \geqslant m'$, $n \geqslant n'$. Но очевидно, $m' \cap n'$ является конечным пересечением элементов A и $m \cap n \geqslant m' \cap n'$, так что $m \cap n \in A^s$. Теперь предположим, что $m \in A^s$, $n \in M$. Тогда $m \geqslant m'$ для некоторого $m' \in A'$. Но $m \cup n \geqslant m$; так что $m \cup n \geqslant m'$ и $m \cup n \in A^s$.

Будем называть подмножество $A \subseteq M$ *непротиворечивым*, если и только если $0 \notin A^s$, а в противном случае — *противоречивым*. Если A непротиворечиво, то A^s является собственным фильтром, согласно лемме 1, и поэтому содержится в некотором собственном максимальном фильтре (согласно лемме Цорна, см. книгу Столла [17], гл. 6, теорема 5.2 и раздел 9(3)), то есть $(\exists x)(x\in F \wedge A\subseteq x)$. И наоборот, предположим, что $(\exists x)(x\in F\wedge A\subseteq x)$, и выберем $m_1, \ldots, m_p\in A$. Тогда $m_1, \ldots, m_p\in x$, так что $\bigcap m_j\in x$, поскольку x — фильтр; таким образом, $A^s\subseteq x$, так что $0\notin A^s$, так как x — собственный фильтр и A непротиворечиво. Следовательно, непротиворечивость A эквивалентна тому, что A содержится в некотором собственном максимальном фильтре F.

Лемма 2. Для $A\subseteq M$ и $m\in M$ если $A\cup\{-m\}$ непротиворечиво, то $m\in A^s$.

Доказательство. Предположим, что $A\cup\{-m\}$ противоречиво. Тогда $0\in(A\cup\{-m\})^s$, то есть существуют такие элементы $n_1, \ldots, n_p\in A\cup\{-m\}$, что $0=n_1\cap\ldots\cap n_p$. Либо $-m=n_j$ для некоторого $j\,(1\leqslant j\leqslant p)$, либо нет. Предположим, что $-m=n_j$ для некоторого j. Тогда, если только $0\neq -m$ (а в случае $0=-m$, $m=1\in A^s$), очевидно, что $0=-m\cap n'$ для $n'\in A'$, откуда $m\geqslant n'$ и $m\in A^s$. Если $-m$ не совпадает ни с каким n_j, то $n_1\cap\ldots\cap n_p=0\in A'$ и, поскольку $0\leqslant m$, m снова будет $\in A^s$.

Лемма 3. Для $A\subseteq M\,(\forall x)(x\in F\wedge A\subseteq x\rightarrow m\in x)$ тогда и только тогда, когда $m\in A^s$.

Доказательство. Для $A\subseteq M$ предположим, что $m\in A^s$ и $A\subseteq x$ для некоторого собственного максимального фильтра x. Тогда, как мы установили выше, $A^s\subseteq x$, так что $m\in x$. И наоборот, предположим, $m\notin A^s$. Тогда, по лемме 2, $A\cup\{-m\}$ непротиворечиво и, стало быть, содержится в некотором собственном максимальном фильтре $y\in F$. Но в этом случае $A\subseteq y$ и ввиду $-m\in y$ $m\notin y$.

(Интуитивно лемма 3 эквивалентна утверждению о том, что „предложение" m принадлежит всем полным и непротиворечивым расширениям x множества A тогда и только тогда, когда m является „следствием" A.)

Теорема 32. Пусть $\mathfrak{M}=\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ — модальная алгебра. Тогда существует модельная структура $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$, такая, что $\mathfrak{M}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{K}^+$.

Доказательство. Положим K просто множеством F всех собственных максимальных фильтров алгебры $\langle M, \cup, \cap, -\rangle$. Для $m\in M$ возьмем $\varphi(m)=\{x\in F\mid m\in x\}$. Пусть $Q=\{x\in F\mid \mathbf{P}0\in x\}$, так что $x\in Q$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}0\in x$. Наконец, для $x, y\in F$ положим Uxy

тогда и только тогда, когда $(\forall m)(m\in y\rightarrow \mathbf{P}m\in x)$. Пусть $\mathfrak{K}=\langle K, Q, U\rangle$ и обозначим через $\mathbf{P}^*$ оператор возможности в $\mathfrak{K}^+$, то есть для $C\subseteq K$, $\mathbf{P}^*C=\{x\mid(\exists y)(y\in C\wedge Uxy)\vee \vee x\in Q\}$. Покажем, что $\mathfrak{M}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{K}^+$ при изоморфизме φ. Действительно, это простое следствие следующих четырех фактов:

(i) для $m, n\in M$ $\varphi(m\cup n)=\varphi(m)\cup\varphi(n)$;
(ii) для $m, n\in M$ $\varphi(m\cap n)=\varphi(m)\cap\varphi(n)$;
(iii) для $m\in M$ $\varphi(-m)=-\varphi(m)$;
(iv) для $m\in M$ $\varphi(\mathbf{P}m)=\mathbf{P}^*\varphi(m)$.

Из них три первых в соответствии с теоремой Стоуна о представлении являются простыми следствиями определения φ и свойств собственных максимальных фильтров. Для установления (iv) предположим, что $x\in\mathbf{P}^*\varphi(m)$, то есть либо для некоторого y, такого, что $y\in\varphi(m)$, Uxy или $x\in Q$. Если $y\in\varphi(m)$, то $m\in y$, и если Uxy, то $(\forall m)(m\in y\rightarrow\mathbf{P}m\in x)$, так что $\mathbf{P}m\in x$ и $x\in\varphi(\mathbf{P}m)$. Если $x\in Q$, то $\mathbf{P}0\in x$. Но $\mathbf{P}m\geqslant\mathbf{P}0$ для всякой модальной алгебры, так что $\mathbf{P}m\in x$, поскольку x — фильтр, и опять-таки $x\in\varphi(\mathbf{P}m)$. Таким образом, $\mathbf{P}^*\varphi(m)\subseteq\varphi(\mathbf{P}m)$.

Только обратное включение представляет некоторые трудности. Предположим, что $x\notin\mathbf{P}^*\varphi(m)$, то есть $(\forall y)(Uxy\rightarrow y\notin\varphi(m))\wedge x\notin Q$. Теперь легко проверить, что Uxy эквивалентно $(\forall n)(\mathbf{N}n\in x\rightarrow n\in y)$. Следовательно, $(\forall y)\,((\forall n)\ (\mathbf{N}n\in x\rightarrow n\in y)\rightarrow -m\in y)$, так как y — максимальный фильтр. Положим, $A=\{n\mid\mathbf{N}n\in x\}$, так что $n\in A$ означает, что $\mathbf{N}n\in x$. Тогда $(\forall y)\,(A\subseteq y\rightarrow -m\in y)$. Отсюда, согласно лемме 3, $-m\in A^s$. Это означает, что существует некоторое $n'=n_1\cap\ldots\cap n_p$ для $n_j\in A\,(1\leqslant j\leqslant p)$, такое, что $-m\geqslant n'$. Но тогда $-\mathbf{P}m=\mathbf{N}-m\geqslant\mathbf{N}n'=\mathbf{N}n_1\cap\ldots\cap\mathbf{N}n_p$ по свойствам модальных алгебр (см. [7], теорема 6). Однако $\mathbf{N}n_j\in x$, по определению A, так что $\mathbf{N}n'\in x$ и $-\mathbf{P}m\in x$. Таким образом, $\mathbf{P}m\notin x$, то есть $x\notin\varphi(\mathbf{P}m)$. Это показывает, что $\varphi(\mathbf{P}m)\subseteq\subseteq\mathbf{P}^*\varphi(m)$ и завершает доказательство (iv).

Рассмотрим множество подмножеств K вида $\varphi(m)$ для некоторого $m\in M$. Из (i)—(iv) очевидно, что это множество замкнуто относительно $\cup$, $\cap$, $-$ и $\mathbf{P}^*$, таким образом, это множество образует подалгебру $\mathfrak{K}^+$, очевидно изоморфную при φ алгебре $\mathfrak{M}$. Доказательство окончено.

Дальше мы намереваемся показать, что теорема о представлении остается в силе при различных ограничениях на алгебру $\mathfrak{M}$, если на соответствующую модельную структуру $\mathfrak{K}$ наложить подходящие ограничения. Напомним, что в [7] деонтической алгеброй называлась модальная алгебра, удовлетворяющая условию $\mathbf{P}1=1$, а деонтической модельной структурой — модельная структура, в которой для всякого x либо $(\exists y)Uxy$, либо $x\in Q$.

Теорема 33. Пусть $\mathfrak{M}$ — деонтическая (эпистемическая, нормальная, замкнутая, транзитивная) алгебра. Тогда существует деонтическая (эпистемическая, нормальная, замкнутая, транзитивная) модельная структура $\mathfrak{K}$, такая, что $\mathfrak{M}$ изоморфна и которой подалгебре $\mathfrak{K}^+$.

Доказательство. В терминологии и структуре оно следует теореме 32. Предположим, что $\mathfrak{M}$ — деонтическая алгебра, то есть $\mathbf{P}1=1$. Тогда для всех $x\in F$ $1\in x$, так что $\varphi(1)=F=K$ и $\mathbf{P}^*K=\mathbf{P}^*\varphi(1)=\varphi(\mathbf{P}1)=\varphi(1)=K$ или $\{x\mid(\exists y)(Uxy\vee x\in Q)\}=K$, и $\mathfrak{K}$ оказывается деонтической м. с. Пусть алгебра $\mathfrak{M}$ — эпистемическая, то есть $m\leqslant\mathbf{P}m$, и $m\in x$. Тогда $\mathbf{P}m\in x$, так как x — фильтр, а значит, Uxx. Таким образом м. с. $\mathfrak{K}$ эпистемическая. Если $\mathfrak{M}$ — нормальная алгебра, то есть $\mathbf{P}0=0$, то для всех $x\in F$, ввиду $0\notin x$ $\mathbf{P}0\notin x$ и $Q=\varnothing$. Поэтому $\mathfrak{K}$ нормальна. Если $\mathfrak{M}$ замкнута, то есть $\mathbf{PP}0=\mathbf{P}0$, то, согласно теореме 1, $\mathfrak{K}^+=\mathfrak{K}_1^+$, где $\mathfrak{K}_1$ рафинирована. Предположим, что U_1xy и $y\in Q$. Тогда $x\in K-Q$, $(\forall m)(m\in y\rightarrow\mathbf{P}m\in x)$, $\mathbf{P}0\in y$ и $\mathbf{PP}0=\mathbf{P}0\in x$, то есть пришли к противоречию. Следовательно, $\mathfrak{K}_1$ замкнута и $\mathfrak{M}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{K}_1^+$. Наконец, пусть $\mathfrak{M}$ транзитивна, то есть $\mathbf{P}(\mathbf{P}m-\mathbf{P}0)=\mathbf{P}m$. И снова, по теореме 1, имеем $\mathfrak{K}^+=\mathfrak{K}_1^+$, где $\mathfrak{K}_1$ — рафинированная м. с. Пусть теперь U_1xy, U_1yz. Тогда $x,y\in K-Q$, так что $-\mathbf{P}0\leqslant y$ ввиду максимальности y; кроме того, $(\forall m)(m\in y\rightarrow\mathbf{P}m\in x)$, $(\forall m)(m\in z\rightarrow\mathbf{P}m\in y)$. Пусть $m\in z$. Тогда $\mathbf{P}m\in y$. Таким образом, $\mathbf{P}m-\mathbf{P}0\in y$, так как y есть фильтр. Отсюда $\mathbf{P}(\mathbf{P}m-\mathbf{P}0)=\mathbf{P}m\in x$. Так как $x\in K-Q$, то U_1xz, и $\mathfrak{K}$ транзитивна.

Из характера этого доказательства ясно, что *комбинации* ограничений на алгебры не создают каких-либо специальных проблем: например, замкнутые (транзитивные, замкнутые транзитивные) е-алгебры изоморфны подалгебрам алгебр подходящих замкнутых (транзитивных, замкнутых транзитивных) эпистемических м. с. Ввиду

этого можно построить (с помощью теорем представления и различных регулярных матриц Линденбаума) новые характеристические матрицы для всех систем, рассматривавшихся до сих пор либо в [7], либо в настоящей статье; но если матрицы Линденбаума содержат только счетное число элементов, то новые матрицы содержат, конечно, несчетное множество. Рассмотрим случай E2. Мы знаем, что у этой системы имеется регулярная характеристическая матрица, являющаяся е-алгеброй, согласно теоремам 8 и 11 из [7]. По теореме 33, эта е-алгебра изоморфна подалгебре $\mathfrak{K}^+$ некоторой эпистемической м. с. $\mathfrak{K}$. По теореме 18 из [7], сама $\mathfrak{K}^+$ является е-алгеброй, а значит, E2-матрицей. Но, с другой стороны, каждая теорема A системы E2 опровергается на подалгебре $\mathfrak{K}^+$ по изоморфизму и, очевидно, на всей алгебре $\mathfrak{K}^+$. Итак, $\mathfrak{K}^+$ является характеристической для E2. Точно так же обстоит дело и с другими системами — за исключением S2 и S3, для которых нужно ввести специальные ограничения в свете результатов последнего раздела. Эти факты можно суммировать в следующем списке *подходящих* модельных структур для каждой системы:

Система	*Соответствующая* м. с.
C2	*Любая*
D2	Деонтическая
E2	Эпистемическая
T (C)	Нормальная
T (D)	Нормальная деонтическая
T	Нормальная эпистемическая
E3	Транзитивная эпистемическая
ET	Замкнутая эпистемическая
E4	Замкнутая транзитивная эпистемическая
S4	Нормальная транзитивная эпистемическая

Теорема 34. Для каждой из систем C2 и т. д. существует такая м.с. $\mathfrak{K}$, что $\mathfrak{K}^+$ является характеристической матрицей для этой системы.

IV

Восемь других систем

Из восьми упомянутых в начале предыдущего раздела систем мы выберем для начала одну — неинтересную; после того, как решим связанные с ней задачи, легко будет исследовать другие семь систем. Система E2(S) получается в результате добавления $A10$ к E2. Я не встречал раньше в литературе упоминания об этой системе.

Теорема 35.

(1) $\vdash_{E2(S)} \Box T \to (\Diamond\Box A \to A)$;

(2) $\vdash_{E2(S)} \Box(\Diamond A \to B) \to (A \to \Box B)$;

(3) $\vdash_{E2(S)} \Box(A \to \Box B) \to (\Diamond A \to B)$.

Доказательство. (1) тривиально. Для (2) заметим, что $\vdash_{E2(S)} \Box B \to (A \to \Box\Diamond A)$, так как, очевидно, $\vdash_{E2(S)} \Box B \to \Box T$. По $A4$, $\vdash_{E2(S)} \Box(\Diamond A \to B) \to$ $\to (\Diamond\Box A \to \Box B)$, и теперь получается (2). Аналогично с использованием (1) доказывается (3).

Назовем е-алгебру $\mathfrak{M}$ *симметричной*, если она удовлетворяет условию

(vi) для $x \in M$ $x - \mathbf{P}0 \leqslant \mathbf{NP}x$.

Теорема 36. $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является регулярной E2(S)-матрицей в том и только в том случае, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ есть симметричная е-алгебра и $d = 1$.

Доказательство. То, что E2(S)-матрица удовлетворяет условию (vi), сразу же следует из $A10$. И наоборот, $\mathbf{N}1 \to (x \to \mathbf{NP}x) = x - \mathbf{P}0 \to \mathbf{NP}x = 1$, согласно (vi).

Теперь нетрудно показать, что E2(S) имеет такую характеристическую регулярную матрицу Линденбаума, что существует симметричная е-алгебра, характеризующая ее согласно последней теореме. Назовем м.с. $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ *симметричной*, если U симметрично в $K - Q$. Нам потребуется:

Теорема 37. Пусть $\mathfrak{M}$ — симметричная е-алгебра. Тогда существует симметричная модельная структура $\mathfrak{K}$, такая, что $\mathfrak{M}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{K}^+$.

Доказательство следует линиям теорем 32 и 33. Если $\mathfrak{M}$ симметрична, то $m - \mathbf{P}0 \leqslant \mathbf{NP}m$. Пусть Uxy, то есть $(\forall m)(m \in y \to \mathbf{P}m \in x)$ для $x, y \in K - Q$. Тогда легко показать, что $(\forall m)(\mathbf{N}m \in x \to m \in y)$; кроме того, для $x \in K - Q, -\mathbf{P}0 \in x$, поскольку фильтр x максимален. Для $m \in x$ имеем $m - \mathbf{P}0 \in x$, откуда $\mathbf{NP}m \in x$, так что $\mathbf{P}m \in y$. Отсюда Uyx, то есть м.с. $\mathfrak{K}$ симметрична.

Теорема 38. Алгебра на симметричной модельной структуре симметрична.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ — симметричная м.с. Требуется доказать, что для $A \subseteq K, A - Q \subseteq \mathbf{NP}A$. Предположим, $x \in A - Q$, так что $x \in A$, $x \notin Q$. Тогда $x \in \mathbf{NP}A$ в том и только в том случае, когда $x \notin Q \wedge (\forall y)$ $(Uxy \to (\exists z) \in z (A \wedge Uxz) \vee y \in Q))$. Предположим, что Uxy. Если $y \in Q$, все очевидно. Если $y \in Q$, то Uyx, по симметричности U в $K - Q$. Но тогда $(\exists z)(z \in A \wedge Uyz)$.

Теорема 39. Существует модельная структура $\mathfrak{K}$ с $\mathfrak{K}^+$, являющейся характеристической алгеброй для E2(S).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ — модельная структура, построенная в теореме 37 из алгебры Линденбаума $\mathfrak{M}$ для E2(S). Тогда любая не-теорема в E2(S) опровергается на $\mathfrak{K}^+$ по теореме 37. И наоборот, всякая теорема E2(S) удовлетворяется на $\mathfrak{K}^+$ в соответствии с теоремами 36 и 38.

Теперь мы в состоянии доказать свойство финитной аппроксимируемости для E2(S). Однако сначала установим довольно общий результат, на основе которого можно доказывать финитную аппроксимируемость для широкого класса систем.

Теорема 40. Пусть $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ — произвольная модельная структура, а $A_1, \ldots, A_r$ — подмножества K. Тогда существует конечная модельная структура $\overline{\mathfrak{K}} = \langle \overline{K}, \overline{Q}, \overline{U}\rangle$ с не более чем 2^{r+1} элементами с подмножествами $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_r \subseteq \overline{K}$, такими, что:

(i) $A_i = K$ эквивалентно $\overline{A}_i = \overline{K}$;

(ii) $-A_i = A_j$ эквивалентно $-\overline{A}_i = \overline{A}_j$;

(iii) $A_i \cup A_j = A_k$ эквивалентно $\overline{A}_i \cup \overline{A}_j = \overline{A}_k$;

(iv) $A_i \cap A_j = A_k$ эквивалентно $\overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \overline{A}_k$;

(v) если $\mathbf{P}A_i = A_j$, то $\overline{\mathbf{P}}\overline{A}_i = \overline{A}_j$,

где $\mathbf{P}$ и $\overline{\mathbf{P}}$ — операторы возможности соответственно в $\mathfrak{K}^+$ и $\overline{\mathfrak{K}}^+$.

Доказательство. Пусть $S = \{A_1, \ldots, A_r, Q\}$ и для $x, y \in K$, положим, $x \equiv y$, если и только если $(\forall A)(A \in S \to (x \in A \leftrightarrow y \in A))$. Тогда $\equiv$ является отношением эквивалентности в K, которое разбивает K не более чем на 2^{r+1} классов эквивалентности. Для $x \in K$ положим, $\bar{x} = \{y \mid y \equiv x\}$. Для $A \subseteq K$ пусть $\bar{A} = \{\bar{x} \mid x \in A\}$. $\bar{K} = \{\bar{x} \mid x \in K\}$ есть множество классов эквивалентности K; мощность $\bar{K}$ не более чем 2^{r+1}. Для $x \in K$ и $A \subseteq K$ легко видеть, что (i) если $x \in A$, то $\bar{x} \in \bar{A}$, и (ii) если $\bar{x} \in \bar{A}$ и $A \in S$, то $x \in A$. Таким образом, мы уже определили $\bar{Q}$, $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_r$. Положим, наконец, для $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{K}$ $\bar{U}\bar{x}\bar{y} \Leftrightarrow (\forall A)(A \in S \wedge \wedge \mathbf{P}A \in S \rightarrow (y \in A \rightarrow x \in \mathbf{P}A))$. Это определение корректно, то есть не зависит от выбора x и y в $\bar{x}$ и $\bar{y}$, так как для y, $y' \in \bar{y}$ $y \in A \Leftrightarrow y' \in A$ для данного $A \in S$; а для x, $x' \in \bar{x}$ $x \in \mathbf{P}A \Leftrightarrow x' \in \mathbf{P}A$, по определению $\equiv$.

Из пяти условий теоремы (i)—(iv) проверяются тривиально. Для (v) мы сначала покажем, что $\bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i = \overline{\mathbf{P}A_i}$, если $\mathbf{P}A_i = A_j \in S$. Предположим, что $\bar{x} \in \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$. Тогда ввиду $\mathbf{P}A_i \in S$ $x \in \mathbf{P}A_i$, так что либо $(\exists y)(y \in A_i \wedge Uxy)$, либо $x \in Q$. Предположим, что $y \in A_i$ и Uxy. Если $y \in A$ для некоторого $A \subseteq K$, то $x \in \mathbf{P}A$ при Uxy; теперь отсюда обязательно $\bar{U}\bar{x}\bar{y}$. Но, кроме того, $\bar{y} \in \bar{A}_i$. Итак, $\bar{x} \in \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$. В другом случае, если $x \in Q$, то $\bar{x} \in \bar{Q}$, откуда $\bar{x} \in \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$. Поэтому $\overline{\mathbf{P}A_i} \subseteq \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$. И наоборот, пусть $\bar{x} \in \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$, так что либо $(\exists \bar{y})(\bar{y} \in \bar{A}_i \wedge \bar{U}\bar{x}\bar{y})$, либо $\bar{x} \in \bar{Q}$. Теперь, если $\bar{y} \in \bar{A}_i$ и $\bar{U}\bar{x}\bar{y}$, то $y \in A_i$ (так как $A_i \in S$) и $(\forall A)(A \in S \wedge \mathbf{P}A \in S \rightarrow \rightarrow (y \in A \rightarrow x \in \mathbf{P}A))$. Но A_i и $\mathbf{P}A_i \in S$, следовательно, $x \in \mathbf{P}A_i$ и $\bar{x} \in \overline{\mathbf{P}A_i}$. В другом случае при $\bar{x} \in \bar{Q}$ имеем $x \in Q$ (ввиду $Q \in S$), так что снова $x \in \mathbf{P}A_i$, и $\bar{x} \in \overline{\mathbf{P}A_i}$. Итак, $\bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i \subseteq \overline{\mathbf{P}A_i}$.

Предположим теперь, что $\mathbf{P}A_i = A_j$. Тогда $\bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i = \overline{\mathbf{P}A_i} = \bar{A}_j$. Тем самым (v) и вся теорема доказаны. Эту теорему можно использовать вместо теоремы 13 из [7] для установления финитной аппроксимируемости C2 и других систем; фактически эти доказательства родственны, конечная алгебра $\bar{\mathfrak{K}}^+$ эквивалентна в некотором смысле алгебре $\mathfrak{M}_1$ из той теоремы, а отношение $\bar{U}$ заменяет понятие покрывания элементов в $\mathfrak{M}_1$ у Мак-Кинси.

Для наших целей, однако, нужен вариант, охватывающий случай симметрии.

Теорема 41. Если $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ — симметричная модельная структура и $A_1, \ldots, A_r$ — подмножества K, то существует конечная симметричная модельная структура $\bar{\mathfrak{K}} = \langle \bar{K}, \bar{Q}, \bar{U}\rangle$ с не более чем 2^{r+1} элементами с подмножествами $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_r \subseteq \bar{K}$, удовлетворяющими пяти условиям теоремы 40.

Доказательство следует в общих чертах доказательству теоремы 40. S, $\bar{K}$ определяются, как и раньше, однако для $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{K}$ мы определяем теперь $\bar{U}\bar{x}\bar{y}$, если и только если $(\forall A)(A \in S \wedge \mathbf{P}A \in S \rightarrow (y \in A \rightarrow x \in \mathbf{P}A) \wedge \wedge (x \notin Q \wedge y \notin Q \rightarrow (x \in A \rightarrow y \in \mathbf{P}A)))$; это свойство зависит от присутствия в множестве S элемента Q. Как и раньше, (i)—(iv) получаются непосредственно. Предположим, что $\mathbf{P}A_i = A_j \in S$, и рассмотрим $\bar{x} \in \overline{\mathbf{P}A_i}$. Тогда $(\exists y)(y \in A_i \wedge Uxy)$ или $x \in Q$. Если $x \in Q$, то, конечно, $\bar{x} \in \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$. Для $A \subseteq K$ если $y \in A$, то $x \in \mathbf{P}A$, согласно Uxy. Далее, если $x \notin Q$, $y \notin Q$, то из Uxy мы выводим Uyx (U симметрично на $K - Q$), так что если $x \in A$, то $y \in \mathbf{P}A$. Таким образом, $\bar{U}\bar{x}\bar{y}$; но $\bar{y} \in \bar{A}_i$; следовательно, $\bar{x} \in \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$. И наоборот, если $\bar{x} \in \bar{\mathbf{P}}\bar{A}_i$, то или $(\exists \bar{y})(\bar{y} \in \bar{A}_i \wedge \bar{U}\bar{x}\bar{y})$, или $\bar{x} \in \bar{Q}$. Если $\bar{x} \in \bar{Q}$, то все равно $\bar{x} \in \overline{\mathbf{P}A_i}$. Так как $A_i \in S$, $\mathbf{P}A_i \in S$, то при $\bar{U}\bar{x}\bar{y}$ и $y \in A_i$ оказывается, что $x \in \mathbf{P}A_i$, $\bar{x} \in \overline{\mathbf{P}A_i}$. Это дает (v). Остается показать, что $\bar{U}$ симметрично в $\bar{K} - \bar{Q}$. Пусть $\bar{U}\bar{x}\bar{y}$, $\bar{x} \notin \bar{Q}$, $\bar{y} \notin \bar{Q}$, так что $x \notin Q$, $y \notin Q$. Легко убедиться, что, согласно определению $\bar{U}$, $\bar{U}\bar{x}\bar{y}$.

Очевидным следствием (ср. Мак-Кинси [11], теоремы 5 и 6) является опровержимость на подходящей $\bar{\mathfrak{K}}^+$ формул, опровержимых на $\mathfrak{K}^+$: пусть $A_1, \ldots, A_r$ являются значениями, которые принимают r подформул A при опровержении A на $\mathfrak{K}^+$; тогда $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_r$ будут значения, которые принимают те же подформулы при соответствующем опровержении на $\bar{\mathfrak{K}}^+$. Таким образом, теорема 41 устанавливает финитную аппроксимируемость E2 (S), и мы приходим к:

Теорема 42. $\vdash_{E2(S)}$ A эквивалентно тому, что (i) A общезначима на $\mathfrak{K}^+$ для всех симметричных эпистемических м.с. $\mathfrak{K}$, и тому, что (ii) A общезначима на $\mathfrak{K}^+$ для всех конечных симметричных эпистемических м.с. $\mathfrak{K}$.

Для *доказательства* надо просто распространить предыдущую теорему на *эпистемические* м.с. Мы сразу же получаем из Uxx для $x \notin Q$, что $\overline{U}\overline{x}\overline{x}$ для $\overline{x} \notin \overline{Q}$.

Подходящее определение истинности и теорема для E2(S) очевидны. Сформулируем, наконец:

Теорема 43. Если $\vdash_{E2(S)} \Box T \to \Box A$, то $\vdash_{E2(S)} A$.

Доказательство параллельно доказательству теоремы 5 (ср. теорему 12), если заметить, что $\mathfrak{K}_5$ является симметричной эпистемической м.с., так что $\mathfrak{K}_5^+$ удовлетворяет E2(S).

Вторая система, которую мы назвали E3(S), получается в результате добавления A10 к E3. Сначала докажем:

Теорема 44. $\vdash_{E3(S)} \Box \Diamond \Box A \to \Box A$.

Доказательство. Имеем $\vdash_{E2} \Box \Diamond \Box A \to \Diamond \Box$ $\vdash_{E2} \Box \Diamond \Box A \to \Box T$ (по $R2$), откуда $\vdash_{E2} \Box \Diamond \Box A \to \Box T \wedge \Diamond \Box A$. Подставляя T вместо B в $A7$ и применяя $R2$, получаем: $\vdash_{E3} \Diamond \Box A \to \Diamond \Box (\Box T \to \Box A)$. Таким образом, $\vdash_{E3} \Box T \wedge \Diamond \Box A \to \Box T \wedge \Diamond \Box (\Box T \to \Box A)$. Теперь используя $A10$, получаем: $\vdash_{E2(S)} \Box T \wedge \Diamond \Box (\Box T \to \Box A) \to \Box A$. Следовательно, $\vdash_{E3(S)} \Box \Diamond \Box A \to \Box A$.

Следствием теорем 36 и 6 является

Теорема 45. $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ — регулярная E3(S)-матрица тогда и только тогда, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P} \rangle$ есть симметричная транзитивная е-алгебра и $d = 1$.

Далее:

Теорема 46. Существует модельная структура $\mathfrak{K}$ такая, что алгебра $\mathfrak{K}^+$ является характеристической для E3(S).

Доказательство. $\mathfrak{K}$ строится, как в теореме 37, из алгебры Линденбаума $\mathfrak{M}$ для E3(S). Пусть $\mathfrak{K}_1$ — рафинированная модельная структура, соответствующая $\mathfrak{K}$, и предположим, что U_1xy, U_1yz, а значит, $x \in K - Q$, $y \in K - Q$. Тогда $(\forall m)(m \in y \to \mathbf{P}m \in x)$, $(\forall m)(m \in z \to \mathbf{P}m \in y)$. Теперь предположим, $m \in z$. Тогда $\mathbf{P}m \in y$. Так же и $\mathbf{P}0 \in y$, поскольку $y \in K - Q$ (ввиду максимальности y). Поэтому $\mathbf{P}m - \mathbf{P}0 \in y$, откуда $\mathbf{P}(\mathbf{P}m - \mathbf{P}0) \in x$. Но $\mathbf{P}m = \mathbf{P}(\mathbf{P}m - \mathbf{P}0)$, так как $\mathfrak{M}$ транзитивна. Таким образом, $\mathbf{P}m \in x$ и U_1xz, так что $\mathfrak{K}_1$ транзитивна. Теперь теорема следует из теорем 1, 8, 36, 38 и 45.

Теорема 47. Если $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U \rangle$ — симметричная транзитивная модельная структура и $A_1, \ldots, A_r$ — подмножества K, то существует конечная симметричная транзитивная модельная структура $\overline{\mathfrak{K}} = \langle \overline{K}, \overline{Q}, \overline{U} \rangle$ с не более чем $2^{2(r+1)}$ элементами и подмножествами $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_r \subseteq \overline{K}$, которые удовлетворяют пяти условиям теоремы 40.

Доказательство. Модифицируем доказательство теоремы 40 (ср. теорему 41): положим $S = \{A_1, \ldots, A_r, Q, A_1 - Q, \ldots, A_r - Q, \phi\}$, так что $\overline{\mathfrak{K}}$ содержит не более чем $2^{2(r+1)}$ классов эквивалентности, и для $\overline{x}$, $\overline{y} \in \overline{K}$ определим $\overline{U}\overline{x}\overline{y}$ как $x \notin Q \wedge (\forall A)(A \in S \wedge \mathbf{P}A \in S \to (y \in A \to x \in \mathbf{P}A) \wedge (x \notin Q \wedge y \notin Q \to (x \in A \to y \in \mathbf{P}A)))$. (Ср. определение $\overline{U}$ в теореме 41.) Как и прежде, (i)—(iv) проверяются очевидным образом. Для (v) предположим, $\mathbf{P}A_i = A_j \in S$ и рассмотрим $\overline{x} \in \overline{\mathbf{P}}\overline{A}_i$. Тогда или $(\exists y)(y \in A_i \wedge Uxy)$, или $x \in Q$. Если $x \in Q$, $\overline{x} \in \overline{\mathbf{P}A}_i$, как и раньше. Но если $x \notin Q$, то $\overline{U}\overline{x}\overline{y}$ мы устанавливаем, как и в доказательстве теоремы 41, так, что $\overline{x} \in \overline{\mathbf{P}}\overline{A}_i$. Аналогичным образом из $\overline{x} \in \overline{\mathbf{P}}\overline{A}_i$ выводится $\overline{x} \in \overline{\mathbf{P}A}_i$. Это дает (v), и остается доказать симметричность и транзитивность $\overline{\mathfrak{K}}$. Симметричность $\overline{U}$ в $\overline{K} - \overline{Q}$ непосредственно выводится из доказательства теоремы 41. Для установления транзитивности полагаем $\overline{U}\overline{x}\overline{y}$ и $\overline{U}\overline{y}\overline{z}$, то есть $x \notin Q$, $y \notin Q$, $(\forall A)(A \in S \wedge \mathbf{P}A \in S \to (y \in A \to x \in \mathbf{P}A) \wedge (x \notin Q \wedge y \notin Q \to (x \in A \to y \in \mathbf{P}A)))$, $(\forall A)(A \in S \wedge \mathbf{P}A \in S \to (z \in A \to y \in \mathbf{P}A) \wedge (y \notin Q \wedge z \notin Q \to (y \in A \to z \in \mathbf{P}A)))$.

Теперь предположим, что $A \in S$, $\mathbf{P}A \in S$ и $z \in A$. Тогда $y \in \mathbf{P}A$. По определению S, $\mathbf{P}A - Q \in S$ (в самом деле, для всех $A \in S$ $A - Q \in S$), и так как $\mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q) = \mathbf{P}A$, по транзитивности $\mathfrak{K}$, то также $\mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q) \in S$. Следовательно, $x \in \mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q)$, то есть $x \in \mathbf{P}A$. Наконец, предположим, что x, $z \notin Q$ и $x \in A$. Поскольку $y \notin Q$, то $y \in \mathbf{P}A - Q$, так что $z \in \mathbf{P}(\mathbf{P}A - Q) = \mathbf{P}A$. Таким образом, $\overline{U}\overline{x}\overline{z}$, что и требовалось доказать.

Теорема 48. $\vdash_{E3(S)} A$ (i), если и только если A общезначима на $\mathfrak{K}^+$ для всякой симметричной транзитивной эпистемической м.с. $\mathfrak{K}$, и эквивалентно (ii), если и только если A общезначима на $\mathfrak{K}^+$ для всякой конечной симметричной транзитивной эпистемической м.с. $\mathfrak{K}$.

Доказательство здесь аналогично доказательству теоремы 42.

Наконец, заметим, что ввиду транзитивности $\mathfrak{K}_6$ справедлив аналог теоремы 43.

Теорема 49. Если $\vdash_{E3(S)} \Box T \to \Box A$, то $\vdash_{E3(S)} A$. Опираясь на теорему 44 и имея в виду известную структуру модальностей для E3 (такую же, как у S3, см. 13), можно показать, что в E3(S) имеется ровно 26 различных неприводимых модальностей. На самом деле они идентичны 26 модальностям системы, описанной Парри в [13, с. 151], и те же матрицы показывают, что дальнейшие редукции невозможны.

Следующие две системы, EB и E5, получаются в результате добавления $A8$ к E2(S) и E3(S) соответственно; или, эквивалентно, в результате добавления $A10$ к ET и E4 соответственно; можно дать более простые аксиоматические определения этих двух систем. Система E5 была упомянута, но неправильно определена в [5]; необходимое исправление, принадлежащее Крипке, дано в [18]. Тогда как в E4 те же 14 неприводимых модальностей, что и в S4, в E5 их 10, а в сопоставляемой системе S5—6. Полнота и разрешимость легко получаются с помощью предыдущих теорем.

Теорема 50. $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ является регулярной EB-(E5-) матрицей тогда и только тогда, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$—замкнутая симметричная (транзитивная) е-алгебра и $d = 1$.

Теорема 51. Существует модельная структура $\mathfrak{K}$, такая, что $\mathfrak{K}^+$ служит характеристической алгеброй для EB (E5).

Доказательство требует только (в добавление к теоремам 37 и 46) установить, что алгебра $\mathfrak{K}^+$ из теоремы 32 замкнута, если замкнута алгебра $\mathfrak{M}$, то есть если $\mathbf{P}0 = \mathbf{PP}0$. Но, пользуясь терминологией доказательства той теоремы, мы знаем, что $\mathbf{P}^*\phi = \varphi(\mathbf{P}0)$, так что $\mathbf{P}^*\mathbf{P}^*\phi = \mathbf{P}^*\varphi(\mathbf{P}0) = \varphi(\mathbf{PP}0) = \varphi(\mathbf{P}0) = \mathbf{P}^*\phi$, и алгебра замкнута.

Теорема 52. Если $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$—замкнутая симметричная (транзитивная) м.с. и $A_1, \ldots, A_r$—суть подмножества K, то существует конечная замкнутая симметричная (транзитивная) м.с. $\overline{\mathfrak{K}} = \langle \overline{K}, \overline{Q}, \overline{U}\rangle$ с не более чем $2^{r+1}(2^{2^{(r+1)}})$ элементами и подмножествами $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_r \subseteq \overline{K}$, удовлетворяющими пяти условиям теоремы 40.

Доказательство требует только добавлений к теоремам 41 и 47. В связи с замкнутостью $\mathfrak{K}$ $Q = \mathbf{P}Q$. Но $Q \in S$, так что $\mathbf{P}Q \in S$. По условию (v), $\overline{\mathbf{P}Q} = \overline{\mathbf{P}Q} = \overline{Q}$, и $\overline{\mathfrak{K}}$ оказывается замкнутой.

Теорема 53. $\vdash_{EB(E5)} A$ (i) тогда и только тогда, когда A удовлетворяется на всякой замкнутой симметричной (транзитивной) эпистемической м.с. $\mathfrak{K}$, (ii) аналогично для соответствующих конечных м.с. Аналоги теорем 43 и 49, конечно, несправедливы для EB и E5 (тем более что они верны для ET и E4).

Остальные четыре системы можно рассматривать совместно. Они находятся в таком же отношении к E2(S)—E5, в каком S2—S4 находятся по отношению к E2—E4. S2(S) получается при добавлении A10 к S2, S3(S)—при добавлении $\Box A10$ к S3; B—при добавлении A10 к T; а S5—при добавлении $A10$ к S4. Среди этих систем новыми, как нам кажется, являются S2(S) и S3(S); B есть система Брауэра из статьи Крипке [4], а S5—родственная система Льюиса. Конечно, при наличии $R3$ легче аксиоматизировать B и S5, добавляя $A \to \Box\Diamond A$ к T и S4 соответственно.

Известны и более простые аксиоматизации S5 (см. [14]). Сформулируем основную теорему, которая связывает четыре новые системы с четырьмя старыми.

Теорема 54.

(i) $\vdash_{E2(S)(E3(S))} A$ эквивалентно $\vdash_{S2(S)(S3(S))} \Box A$;

(ii) $\vdash_{S2(S)(S3(S))} A$ эквивалентно $\vdash_{E2(S)(E3(S))} \Box T \to A$;

(iii) $\vdash_{B(S5)} A$ эквивалентно $\vdash_{EB(E5)} \Box T \to A$.

Доказательство проводится параллельно доказательствам теорем 20 и 21, а для (i) и (ii) используются теоремы 43 и 49.

Эта теорема сводит проблему разрешения новых систем к уже решенным аналогичным проблемам для четырех предыдущих систем. Основной результат раздела II можно теперь воспроизвести с обычными соответствующими модификациями. Кроме установления подходящей алгебраической семантики для новых систем S2(S) и S3(S), напоминающих S2 и S3 отсутствием в них теорем вида $\Box\Box$ A, это дает независимое доказательство семантических результатов Крипке для B и S5. Основные свойства суммирует следующая теорема.

Теорема 55 (а) $\vdash_{S2(S)(S3(S))}$ A, (i) если и только если A слабо общезначима на всех (конечных) симметричных (транзитивных) е-алгебрах; (ii) если и только если A слабообщезначима на $\mathfrak{K}^+$ для каждой [конечной] симметричной (транзитивной) эпистемической м.с. $\mathfrak{K}$;

(в) $\vdash_{B(S5)}$ A, если и только если A общезначима на $\mathfrak{K}^+$ для всякой [конечной] нормальной симметричной (транзитивной) эпистемической м.с. $\mathfrak{K}$.

Иерархию систем $E2(S)^n$ можно определить по аналогии с системами $E2^n$ раздела II. Тогда $S2(S) = E2(S)^1$. Каждая система $E2(S)^n$ разрешима, а подходящая семантика для нее строится в терминах n-слабой общезначимости. На существовании этой иерархии базируется доказательство финитной неаксиоматизируемости системы B, подобно тому как на $E2^n$-иерархии основано доказательство финитной неаксиоматизируемости системы T в [8]*.

Легко построить модельную структуру, показывающую, что в B бесконечно много различных неприводимых модальностей; следовательно, их бесконечно много в S2(S), E2(S) и EB. Однако в S3(S), подобно E3(S), только 26 неприводимых модальностей. Эта система, согласно теоремам 44 и 54 (i), содержит систему Парри (см. [13], с. 151), получающуюся при добавлении $\Box(\Box\Diamond\Box A \to A)$ к S3, и имеет точно такую же структуру модальностей. Но я не мог найти доказательства

* Здесь имеется в виду аксиоматическое задание систем T в B схемами аксиом с единственным правилом вывода R1 (modus ponens). — *Прим. перев.*

того, что $\Box A10$ доказывается в системе Парри, так что вопрос о совпадении этих систем, кажется, остается открытым. Как показано в [2], добавление $\Box\Diamond\Box A \to \Box A$ к S4 дает S5; аналогично можно показать, что добавление этой аксиомы к E4 дает E5. Было бы прекрасно, если бы удалось показать, что добавление этой аксиомы к E3 дает E3(S), и таким образом установить идентичность S3(S) и системы Парри.

V

Три вырожденные системы. Результаты о пересечениях

Рассмотрим следующие три дополнительные системы аксиом:

*A*11.	$A \to \Box A$;
*A*12.	$\Diamond A$;
*A*13.	$\Box B \to (A \to \Box A)$.

Через PC мы обозначаем систему $\{A1 - A4,\ A6,\ A11;\ R1\}$; через E — систему $\{A1 - A4,\ A6,\ A12;\ R1\}$; а через L — систему $\{A1 - A4,\ A6,\ A13;\ R1\}$. Для PC правило $R3$, так же как и $R2$, следует из $A11$. Действительно, по $A11$ и $A6$ $\vdash_{PC} A \leftrightarrow \Box A$, и система вырождается в классическое пропозициональное исчисление. Поэтому PC содержит S5 и, следовательно, все рассматривавшиеся до сих пор системы. Пусть $K = \{b\}$ для некоторого элемента b, $Q = \phi$ и $U = \{\langle b, b\rangle\}$, тогда для $\mathfrak{K}_{PC} = \langle K, Q, U\rangle$, $\mathfrak{K}^+_{PC}$, очевидно, является характеристической матрицей для PC, поскольку в качестве булевой алгебры она изоморфна соответствующей двузначной алгебре и удовлетворяет условию $\mathbf{P}x = x$. Система E также вырождена, поскольку $\vdash_E \Box A \leftrightarrow F$; $R2$ можно вывести в E ввиду того, что $\vdash_E \Box A \to B$ для каждой формулы B (на самом деле это показывает избыточность схем аксиом A4 и A6). E содержит E5, а следовательно, и все E-системы, которые мы рассматривали. Она характеризуется матрицей $\mathfrak{K}^+_e$ из раздела I, поскольку $\mathfrak{K}^+_e$, так же как булева алгебра, изоморфна двузначной, с условием $\mathbf{P}x = 1$.

*A*13 доказывается в обеих системах, PC и E, так что L содержится в PC и в E. Мы увидим, что L, являющаяся на самом деле модальной логикой Лукасевича[1], в равной степени близка к системам PC и E. Отметим сначала, что $\vdash_L (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$. По $A13$, $\vdash_L (A \to B) \to (\Box A \to \Box(A \to B))$; откуда по $A4$ получаем требуемую формулу. Значит, правило $R2$ оказывается выводимым правилом в L. Теперь легко видеть, что L содержит E5, а также все другие E-системы.

Чтобы дать алгебраическое описание L, назовем е-алгебру *дискретной*, если и только если она удовлетворяет условию:

(vii) $\mathbf{P}x = x \cup \mathbf{P}0$.

Легко проверить, что имеет место

Теорема 56. $\mathfrak{M} = \langle M, \{d\}, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ — регулярная L-матрица тогда и только тогда, когда $\langle M, \cup, \cap, -, \mathbf{P}\rangle$ есть дискретная е-алгебра и $d = 1$.

Назовем модельную структуру $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ *дискретной*, если и только если $\mathfrak{K}$ удовлетворяет условию: если Uxy, то $x = y$.

Теорема 57. Пусть $\mathfrak{M}$ — дискретная е-алгебра. Тогда найдется такая дискретная м.с. $\mathfrak{K}$, что $\mathfrak{M}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{K}^+$.

Доказательство следует линиям теорем 32 и 33 (ср. теорему 37). Пусть $\mathfrak{M}$ удовлетворяет (vii), то есть для $m \in M$, $\mathbf{P}m = m \cup \mathbf{P}0$. Для $\mathfrak{K}$ из теоремы 33 (эпистемический случай) рассмотрим $\mathfrak{K}_1$ — рафинированную м.с., полученную из $\mathfrak{K}$, и предположим U_1xy, то есть $(\forall m) \times (m \in y \to \mathbf{P}m \in x)$, где $x \notin Q$, то есть $\mathbf{P}0 \notin x$. Для $m \in y$ имеем $\mathbf{P}m \in x$, откуда $m \cup \mathbf{P}0 \in x$, т. е. $m \in x$, или $\mathbf{P}0 \in x$ по свойствам максимальных фильтров, следовательно, $m \in x$, таким образом, $y \subseteq x$. Обратное включение доказывается так: $\mathbf{N}m = m - \mathbf{P}0$, по дискретности $\mathfrak{M}$ и, поскольку U_1xy, $(\forall m)(\mathbf{N}m \in x \to m \in y)$. Пусть $m \in x$; $-\mathbf{P}0 \in x$ ввиду максимальности x, так что $m - \mathbf{P}0 = \mathbf{N}m \in x$, откуда $m \in y$. Таким образом, $x \subseteq y$ и $x = y$. Значит, $\mathfrak{K}_1$ — дискретная м.с., а, по теореме 1, $\mathfrak{M}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{K}_1^+$.

[1] См. Лукасевич [10] и Смайли [16]; здесь мы, однако, подразумеваем, что модальная система определяется матрицей Лукасевича и *не содержит* функторных переменных в правилах образования формул.

Теорема 58. Алгебра дискретной эпистемической модельной структуры сама является дискретной эпистемической.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K} = \langle K, Q, U\rangle$ — дискретная эпистемическая м.с., так что если Uxy, то $x = y$ и Uxx для $x \in K - Q$. Покажем, что для $A \subseteq K$ $\mathbf{P}A = A \cup Q$. Так как $A \subseteq \mathbf{P}A$ и $Q \subseteq \mathbf{P}A$, то $A \cup Q \subseteq \mathbf{P}A$. И наоборот, пусть $x \in \mathbf{P}A$. Тогда если $x \in Q$, то $(\exists y)(Uxy \wedge y \in A)$. Но тогда $x = y$ и $x \in A$, так что $\mathbf{P}A \subseteq A \cup Q$.

Сразу получаем (ср. теорему 39):

Теорема 59. Существует такая м.с. $\mathfrak{K}$, что $\mathfrak{K}^+$ является характеристической алгеброй для L.

Напомним читателю м.с. $\mathfrak{K}_8$ из [7], а именно: $\mathfrak{K}_8 = \langle\{a, b\}, \{a\}, \{\langle b, b\rangle\}\rangle$. Из Смайли [16] можно усмотреть, что $\mathfrak{K}_8^+$ есть матрица Лукасевича для Ł-модальной логики. Покажем, что $\mathfrak{K}_8$ является характеристической для L; это, конечно, дает разрешающую процедуру для L ввиду конечности $\mathfrak{K}_8$. Очевидно, что $\mathfrak{K}_8$ — дискретная эпистемическая м.с., так что она дает матрицу для L, согласно теоремам 56 и 58. Пусть A — не-теорема L. Тогда, по теореме 59, A опровергается на $\mathfrak{K}^+$, скажем, при задании $\mathfrak{A}$. Тогда для всякого $x \in K - V_{\mathfrak{A}}(A)$ A опровергается в алгебре $\mathfrak{K}_x^+$ на связной м.с. $\mathfrak{K}_x$ (см. замечание, следующее за теоремой 3). Теперь, если $x \in K - Q$, $\mathfrak{K}_x^+$ изоморфна $\mathfrak{K}_{PC}^+$, поскольку вследствие дискретности $\mathfrak{K}$, $K_x = \{x\}$. Тогда A — не-теорема PC. Аналогично, если $x \in Q$, $\mathfrak{K}_x^+$ изоморфна $\mathfrak{K}_e^+$, и A — не-теорема E. Принимая во внимание, что каждая теорема L является одновременно теоремой E и PC, получаем:

Теорема 60. $\vdash_L$ A тогда и только тогда, когда $\vdash_{PC}$ A и $\vdash_E$ A.

Хорошо известно (см. [16], с. 149), что $\mathfrak{K}_8^+$ можно рассматривать как прямое произведение двух матриц — $\mathfrak{K}_{PC}^+$ и $\mathfrak{K}_e^+$. Следовательно, если A опровергается на $\mathfrak{K}_{PC}^+$ или $\mathfrak{K}_e^+$, то A опровергается также и на $\mathfrak{K}_8^+$.

Теорема 61. $\mathfrak{K}_8^+$ есть конечная характеристическая матрица для L.

Конечный результат отношения между L и PC доказывается параллельно доказательству теорем 20, 21 и 54.

Теорема 62. $\vdash_{PC} A$ эквивалентно $\vdash_L \Box T \to A$.

Отметим также важную для последующего теорему:

Теорема 63. $\vdash_E A$ эквивалентно $\vdash_{E2} \Diamond F \to A$.

Доказательство. Поскольку $\vdash_E \Diamond F$ по $A12$, то из $\vdash_{E2} \Diamond F \to A$ следует, что $\vdash_E A$. Обратное устанавливается индукцией по длине доказательства A в E, если заметить, что $\vdash_{E2} \Diamond F \to \Diamond A$ по $R2$.

Для упрощения будем обозначать названиями логических систем также множества теорем, доказываемых в этих системах. Тогда теорему 60 можно выразить короче: $L = PC \cap E$. Следующая теорема показывает, что аналогичные результаты о пересечении имеются во всех рассматриваемых выше шестнадцати системах.

Теорема 64. (i) $E2 = S2 \cap E$; (ii) $E3 = S3 \cap E$; (iii) $ET = T \cap E$; (iv) $E4 = S4 \cap E$; (v) $E2(S) = S2(S) \cap E$, (vi) $E3(S) = S3(S) \cap E$; (vii) $EB = B \cap E$; (viii) $E5 = S5 \cap E$.

Доказательство. То, что $E2 \subseteq S2 \cap E$, тривиально и аналогично для остальных семи случаев. И наоборот, предположим, что $\vdash_{S2} A$ и $\vdash_E A$. Тогда $\vdash_{E2} \Box T \to A$, по теореме 20 (ii), и $\vdash_{E2} \Diamond F \to A$, по теореме 63. Но $\vdash_{E2} \Box T_\vee \Diamond F$. Поэтому $\vdash_{E2} A$. В остальных семи случаях применяются теоремы 20, 21 и 54; заметим, что E2 содержится во всех других E-системах.

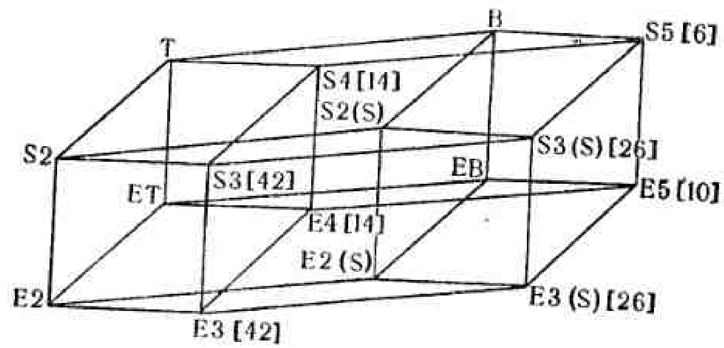
Доказательство этих результатов в терминах модельных структур мы проиллюстрируем на двух примерах. Пусть A — не-теорема ET. Тогда существует замкнутая эпистемическая м. с. $\mathfrak{K}$, такая, что $\mathfrak{K}^+$ опровергает A. Выберем $x \in K - V_\alpha(A)$, где α — задание значений переменных, на котором опровергается A. Легко видеть, что в зависимости от принадлежности $x \in K - Q$ или $x \in Q$, A опровергается на *нормальных* эпистемических алгебрах $\mathfrak{K}_x^+$ или на $\mathfrak{K}_e^+$ (мы предполагаем, что выбрана рафинированная м. с. $\mathfrak{K}$) и не является ни теоремой T, ни теоремой E. Предположим далее, что A не-теорема E3. Тогда существует транзитивная эпистемическая м. с. $\mathfrak{K}$, такая, что $\mathfrak{K}^+$ опровергает A. Выбирая x, как и прежде, мы видим в этом случае, что *A слабо* опровергается на $\mathfrak{K}_x^+$ и поэтому не является теоремой S3 или A опровергается на

$\mathfrak{K}_e^+$ и не является теоремой E. Шесть остальных случаев аналогичны одному из этих двух[1].

VI

Добавление о системах и матрицах

Системы, рассмотренные в разделах I, II и IV, можно представить в следующей схеме включения:



Здесь верхние четыре системы предполагают правило $R3$ и могут быть охарактеризованы *нормальными* матрицами; в следующих четырех системах есть теоремы вида $\Box A$, но нет теорем вида $\Box\Box A$; последние четыре системы характеризуются замкнутыми матрицами; четыре нижние системы обладают таким свойством, что если $\vdash \Box T \to \Box A$, то $\vdash A$. Куб, стоящий справа, является симметричным «напарником» левого куба. Число, стоящее в квадратных скобках, рядом с названием системы, обозначает количество различных неприводимых модальностей в системе; там, где такого числа нет, в системе бесконечно много различных неприводимых модальностей.

Для доказательства независимости систем, не соединенных отрезками, а также невозможности других включений достаточно сделать это для восьми верхних систем. Например, если мы покажем, что S3 не содержится в T,

[1] Эти результаты о пересечении получены в духе Холдена [3], который показал, что $S3 = S7 \cap S4$. Однако в представленной серии статей мы не пытались исследовать такие странные системы, как S6—S8; маловероятно, что они в некотором, сравнительно простом смысле связаны с системой E.

то по теоремам 20 и 21 E3 не содержится в ET. Далее, нам известно, что все E-системы, входящие в E, не содержат теорем вида $\Box A$ и, следовательно, собственно включается в соответствующие верхние системы. То, что системы S2, S3, S2(S), собственно, содержатся соответственно в T, S4, B и S5, следует из $\mathfrak{K}_5^+$, которая слабо удовлетворяет все эти системы и слабо опровергает $\Box\Box T$. Для доказательства собственного включения T в S4 и S2 в S3 нам, очевидно, нужна алгебра нетранзитивной м. с., которая должна поэтому содержать не менее трех элементов. Такой простейшей м. с. является $\mathfrak{K}=\langle\{a, b, c\}, \varnothing, \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}\rangle$; тогда $\mathfrak{K}^+$ удовлетворяет T и S2, но опровергает $A7$. Это показывает также вместе с $\mathfrak{K}_5^+$ независимость S3 и T. Далее, рассмотрим $\mathfrak{K}_{11}^+$ (11 группа Льюнса: см. [7], раздел V). Она является нормальной эпистемической транзитивной, но не симметричной м. с. и поэтому удовлетворяет $A4$, но не $A10$. Таким образом, S2, S3, T, S4, собственно, включаются в S2(S), S3(S), B, S5 соответственно. Наконец, нам необходима нормальная эпистемическая симметричная, а не транзитивная м. с.; и здесь снова нужны три элемента; для этого мы просто расширим U из предыдущей $\mathfrak{K}$, включив $\langle b, a\rangle$ и $\langle c, b\rangle$. Эта матрица удовлетворяет B, но опровергает $A7$, что указывает на собственное включение S2(S) в S3(S) и B в S5, так же как и на независимость S3 и S2(S) и S4 и B.

Последнее замечание. Дагунджи в [1] показал, что между S1 и S5 нет системы, которая бы характеризовалась конечной матрицей. Поэтому этот результат приложим к восьми верхним системам на чертеже.

Отсюда следует, что никакая E-система из восьми нижних также не характеризуется конечной матрицей; для всякой такой матрицы методы нашей статьи позволяют построить характеристическую матрицу для соответствующей верхней системы.

Все вырожденные системы P, C, E и L имеют конечные характеристические матрицы: $\mathfrak{K}_{PC}^+$, $\mathfrak{K}_e^+$ и $\mathfrak{K}_3^+$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dugundji J. Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions, Journal of Symbolic logic, vol. 5, 1940, p. 150—151.

2. Dummett M. A. E. and Lemmon E. J. Modal logics between S4 and S5, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 5, 1959, p. 250—264.

3. Hallden S. Results concerning the decision problem of Lewis's calculi S3 and S6, this Journal, vol. 14, 1950, p. 230—236.

4. Kripke S. A. Semantical analysis of modal logic I, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol. 9, 1963, p. 67—96. (рус. пер. в кн.: Фейс. Модальная логика. М., 1974, с. 304—323).

5. Lemmon E. J. New foundations for Lewis modal systems, this Journal, vol. 22, 1957, p. 176—186.

6. Lemmon E. J. Extension algebras and the modal system T.— „Notre Dame journal of formal logic“, vol. 1, 1960, p. 3—12.

7. Lemmon E. J. Algebraic semantics for modal logics I.— Journal of Symbolic logic, 1966, vol. 31, № 1 (см. наст. сб., с. 98).

8. Lemmon E. J. Some results on finite axiomatizability in modal logic. — „Notre Dame journal of formal logic“.

9. Lewis C. I. and Langford C. H. Symbolic logic. New York, 1932.

10. Lukasiewicz J. A system of modal logic.— „Journal of computing systems“, vol. 1, 1953, p. 111—149.

11. McKinsey J. C. C. A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4, with an application to topology, this Journal, vol. 6, 1941, p. 117—134.

12. McKinsey J. C. C. and Tarski A. The algebra of topology. Annals of mathematics, vol. 45, 1944, p. 141—191.

13. Parry T. W. Modalities in the Survey system of strict implication, Journal of Symbolic logic, vol. 4, 1939, p. 137—154.

14. Prior A. N. Formal logic (2nd edition), Oxford, 1962.

15. Simons L. New axiomatizations of S3 and S4, this Journal, vol. 18, 1953, p. 309—316.

16. Smile T. On Lukasiewicz's L — modal system.— „Notre Dame journal of formal logic“, vol. 2, 1961, p. 149—153.

17. Stoll R. R. Set theory and logic, San Francisco, 1961.

18. Yonemitsu N. Review of 5, Journal fo Symbolic logic, vol. 23, 1958, p. 346—347.

С. К. Томасон

СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫ́Х ЛОГИК*[1]

§ 1. Введение

Хотя мы и считаем, что излагаемые ниже результаты имеют непосредственное философское значение, однако ограничим свои замечания сферой математики. Философское обсуждение временны́х логик, близкое математикам, читатель найдет в [4]. „Минимальной" временно́й логикой T_0 является система со связками $\sim$, $\rightarrow$, F („в некоторый момент в будущем"), P („в некоторый момент в прошлом") и аксиомами:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$;

(2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$;

(3) $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$;

(4) $G(p \rightarrow q) \rightarrow (Gp \rightarrow Gq)$;

(5) $H(p \rightarrow q) \rightarrow (Hp \rightarrow Hq)$;

(6) $p \rightarrow HFp$;

(7) $p \rightarrow GPp$

(где C и H обозначают $\sim F \sim$ и $\sim P \sim$ соответственно) и следующими правилами вывода:

(8) из α и $\alpha \rightarrow \beta$ следует β;

(9) из α выводится всякая формула, получаемая подстановкой в α;

(10) из α выводится $C\alpha$;

(11) из α выводится $H\alpha$.

Логическая система T, язык которой совпадает с языком T_0, а аксиомы и правила вывода включают (1)—(11), называется временно́й логикой. Аксиомы и правила T, отличные от (1)—(11), называются *собственными* аксиомами и правилами T.

Мы исследуем три семантических системы временны́х логик, то есть три понятия *структуры* и три отношения $\models$ между структурами и формулами. $\mathfrak{A} \models \alpha$ читается как „α истинна в $\mathfrak{A}$". Структура $\mathfrak{A}$ является *моделью* временно́й логики T, если каждая формула, доказуемая в T, истинна в $\mathfrak{A}$. Семантика называется *адекватной* для T, если множество всех моделей T в этой семантике является характеристическим для T, то есть всегда, когда $T \not\vdash \alpha$, существует модель $\mathfrak{A}$ теории T в этой семантике, такая, что $\mathfrak{A} \not\models \alpha$. Две структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, возможно из различных семантик, называются *эквивалентными* ($\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$), если в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинны одни и те же формулы.

Семантика *второго порядка* — это семантика, подразумеваемая в [4]. Структурой в ней называется пара $\langle W; R \rangle$, где W — непустое множество, а R — бинарное отношение на W. Отношение $\models$ определено в терминах *приписывания значений*. Пусть Var и Fla обозначают множества пропозициональных переменных и формул соответственно; приписывание есть функция $V: \mathrm{Var} \rightarrow 2^W$; если V является приписыванием, то $V^*: \mathrm{Fla} \times W \rightarrow \{T, F\}$ определяется посредством:

(12) $V^*(p, w) = T \Leftrightarrow w \in V(p)$;

(13) $V^*(\sim\alpha, w) = T \Leftrightarrow V^*(\alpha, w) = F$;

(14) $V^*(\alpha \rightarrow \beta, w) = T \Leftrightarrow [V^*(\alpha, w) = F \vee V^*(\beta, w) = T]$;

(15) $V^*(F\alpha, w) = T \Leftrightarrow (\exists u)[wRu \wedge V^*(\alpha, u) = T]$;

(16) $V^*(P\alpha, w) = T \Leftrightarrow (\exists u)[uRw \wedge V^*(\alpha, u) = T]$.

$\langle W; R \rangle \models \alpha$, если для всякого приписывания V и всякого $w \in W V^*(\alpha, w) = T$. Кажется, что семантика второго порядка ясно формализует интуитивное представление о

---

* Thomason S. K. Semantic Analysis of Tense Logics.— „The Journal of Symbolic Logic", 1972, vol. 37, № 1.

[1] Эта работа была поддержана Канадским национальным исследовательским центром и доложена в Беркли в июне 1971 г. на симпозиуме, посвященном Тарскому.

временнóй логике: W соответствует множеству всех моментов времени, а R означает временнóе упорядочение. Однако в § 4 будет показано, что семантика второго порядка неадекватна для некоторых интересных временны́х логик.

Алгебраическая семантика является простой модификацией алгебраической семантики модальных логик, предложенной впервые Мак-Кинси и Тарским [3]. Структурой здесь служит *временнáя алгебра*, то есть алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; 0, 1, \cup, \cap, \urcorner, f, p\rangle$, такая, что $\langle A; 0, 1, \cup, \cap, \urcorner\rangle$ есть булева алгебра и для всех $a, b \in A$

$$f(0) = p(0) = 0; \tag{17}$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b); \tag{18}$$
$$p(a \cup b) = p(a) \cup p(b); \tag{19}$$
$$f(a) \cap b = 0 \Leftrightarrow a \cap p(b) = 0. \tag{20}$$

Каждой формуле α соответствует полином h_α временнóй алгебры (полученный записью α в терминах $\sim, \vee, F$ и P заменой каждой пропозициональной переменной p_i соответствующей переменной a_i и заменой $\sim, \vee, F$ и P на $\urcorner, \cup, f, p$ соответственно). Тогда $\mathfrak{A} \models \alpha$ означает, что $h_\alpha = 1$ тождественно в $\mathfrak{A}$. Ниже будет показано (теорема 2), что алгебраическая семантика адекватна для всех временны́х логик. Однако алгебраическая семантика не формализует очевидным образом интуитивной идеи упорядочения времени.

Новой является семантика *первого порядка*[1]. Структурой здесь служит $\langle W; R; \Pi\rangle$, где R — бинарное отношение на непустом множестве W, а Π — непустое семейство подмножеств W, замкнутое относительно булевых операций и операций f_R и p_R, определенных посредством

$$f_R(X) = \{w \in W \mid (\exists u)(wRu \wedge u \in X)\}; \tag{21}$$
$$p_R(X) = \{w \in W \mid (\exists u)(uRw \wedge u \in X)\}. \tag{22}$$

[1] Фактически Макинсон [6] представил понятие структуры, которое почти эквивалентно нашему понятию структуры первого порядка, и кажется очевидным из работы [5] Файна, что те, кто изучал модальные логики с пропозициональными кванторами, признавали необходимым рассматривать кванторы по ограниченному классу множеств „возможных миров". Когда писалась настоящая статья, эта работа была нам неизвестна.

Приписыванием здесь служит функция $V: \mathrm{Var} \to \Pi$; как и раньше, V^* определяется посредством (12)—(16), и $\langle W; R; \Pi\rangle \models \alpha$ означает, что $V^*(\alpha, w) = T$ для каждой оценки V и каждого $w \in W$. Очевидно, что структура второго порядка $\langle W; R\rangle$ эквивалентна структуре первого порядка $\langle W; R; 2^W\rangle$ и что α, истинная в $\langle W; R\rangle$, истинна также и в $\langle W; R; \Pi\rangle$ при всяком Π. Семантики первого порядка формализуют временнýю интуицию так же хорошо, как и семантики второго порядка, с той лишь разницей, что семантики первого порядка свободны от предположения, подразумеваемого в семантиках второго порядка, о том, что произвольному множеству моментов времени соответствует высказывание, истинное в эти, и только в эти, моменты. Ниже будет показано (следствие 5), что семантики первого порядка адекватны для всякой временнóй логики.

Сделаем небольшое отступление, чтобы разъяснить использование здесь терминов „первый порядок" и „второй порядок". Рассмотрим формальную систему с „индивидными переменными" $t, x_1, x_2, \ldots$, „унарными предикатными переменными" $X_1, X_2, X_3, \ldots$, находящимися в соответствии с пропозициональными переменными временны́х логик, и бинарным постоянным предикатом R. Формулы временнóй логики переводятся в формулы новой системы посредством преобразования Φ:

$$\begin{aligned}
\Phi(p_i) &= X_i(t);\\
\Phi(\sim\alpha) &= \sim\Phi(\alpha);\\
\Phi(\alpha \to \beta) &= \Phi(\alpha) \to \Phi(\beta);\\
\Phi(F\alpha) &= (\exists x)(R(t, x) \wedge \Phi(\alpha)[x/t]);\\
\Phi(P\alpha) &= (\exists x)(R(x, t) \wedge \Phi(\alpha)[x/t])
\end{aligned}$$

(где x первая индивидная переменная, не встречающаяся в $\Phi(\alpha)$, а $\Phi(\alpha)[x/t]$ есть результат подстановки x вместо t в $\Phi(\alpha)$). Тогда в $\Phi(\alpha)$ входят единственная свободная переменная t и предикатные переменные $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$, соответствующие пропозициональным переменным, входящим в α.

Теперь можно рассматривать новую систему как систему *второго порядка*, и структурой в этом случае будет пара $\langle W; R\rangle$; индивидные и предикатные переменные пробегают значения из W и 2^W соответственно, а $\Phi(\alpha)$ считается истинной в $\langle W; R\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle W, R\rangle \models \alpha$. С другой стороны, можно рассматривать новую систему как систему *первого порядка* с двумя сортами переменных, и структурой в этом случае (в сущности) будет тройка $\langle W; R; \Pi\rangle$, где $\Pi \subseteq 2^W$, индивидные и предикатные переменные принимают значения из W и Π соответственно, а $\Phi(\alpha)$ считается истинной в $\langle W; R; \Pi\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle W; R; \Pi\rangle \models \alpha$.

§ 2. Алгебраическая семантика

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A;\ 0,\ 1,\ \cup,\ \cap,\ \urcorner,\ f,\ p\rangle$ — алгебра типа временнóй алгебры (то есть $0 \in A$, $\cup$ — бинарная связка и т. д.). Тогда h_α, $\mathfrak{A} \models \alpha$ и „$\mathfrak{A}$ является моделью T" можно определить так, как в случае временнóй алгебры.

Теория 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ является алгеброй временнóго типа. Тогда $\mathfrak{A}$ будет моделью T_0 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ — временнáя алгебра.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ есть модель T_0. Поскольку все тавтологии доказываются в T_0, $\langle A;\ 0,\ 1,\ \cup,\ \cap,\ \urcorner\rangle$ является булевой алгеброй. Так как $\sim F(p \wedge \sim p)$, $\sim P(p \wedge \sim p)$, $F(p \vee q) \Leftrightarrow Fp \vee Fq$ и $P(p \vee q) \Leftrightarrow Pp \vee Pq$ доказываются в T_0, (17)—(19) удовлетворяются в $\mathfrak{A}$. Пусть $a, b \in A$ и $f(a) \cap b = 0$, то есть $b \leqslant \urcorner f(a)$. Тогда $p(b) \leqslant p(\urcorner f(a))$ по (19), так что $\urcorner p(\urcorner f(a)) \leqslant \urcorner p(b)$. Но $p \rightarrow \sim P \sim Fp$ доказывается в T_0, откуда $c \leqslant \urcorner p(\urcorner f(c))$ тождественно в $\mathfrak{A}$. Следовательно, $a \leqslant \urcorner p(b)$, то есть $a \cap p(b) = 0$. Аналогично, если $a \cap p(b) = 0$, то $f(a) \cap b = 0$ и (20) выполняется в $\mathfrak{A}$.

И наоборот, допустим, что $\mathfrak{A}$ временнáя алгебра. Чтобы доказать, что $\mathfrak{A}$ является моделью T_0, достаточно показать, что $\mathfrak{A} \models \alpha$ для всякой аксиомы α системы T_0 и что правила вывода T_0 сохраняют истинность формул в $\mathfrak{A}$. Очевидно, что (1)—(5) истинны в $\mathfrak{A}$. По (20) (с $b = \urcorner f(a)$) $\mathfrak{A} \models (6)$. Аналогично $\mathfrak{A} \models (7)$. Правила (8) и (9) в комментариях не нуждаются; для доказательства случаев (10) и (11) используется (17).

Теорема 2. *Алгебраическая семантика адекватна для каждой временнóй логики: а именно, для каждой временнóй логики T существует такая временнáя алгебра $\mathfrak{A}$, что*

$$(\forall \alpha \in \mathrm{Fla})\ (\mathfrak{A} \models \alpha \Leftrightarrow T \vdash \alpha).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_T$ обозначает алгебру Линденбаума—Тарского для T, то есть $\mathfrak{A}_T = \langle A;\ 0,\ 1,\ \cup,\ \cap,\ \urcorner,\ f,\ p\rangle$, где $A = \{[\alpha] \mid \alpha \in \mathrm{Fla}\}$; $[\alpha] = [\beta] \Leftrightarrow T \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$; $0 = [p \wedge \sim p]$; $[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \vee \beta]$; $f([\alpha]) = [F\alpha]$ и т. д. Тогда $\mathfrak{A}_T \models \alpha \Leftrightarrow T \vdash \alpha$ для всякого $\alpha \in \mathrm{Fla}$. По теореме 1 $\mathfrak{A}_T$ является временнóй алгеброй.

§ 3. Семантика первого порядка

Если $\langle W; R; \Pi\rangle$ структура первого порядка, то обозначим временнýю алгебру $\langle \Pi;\ \varnothing,\ W,\ \cup,\ \cap,\ \urcorner,\ f_R,\ p_R\rangle$ через $\langle W; R; \Pi\rangle^+$.

Теорема 3. *Структуры $\langle W; R; \Pi\rangle$ и $\langle W; R; \Pi\rangle^+$ эквивалентны.*

Доказательство. Если $V: \mathrm{Var} \rightarrow \Pi$, то

$$\begin{aligned}
&\{w \mid V^*(p, w) = T\} = V(p),\\
&\{w \mid V^*(\sim\alpha, w) = T\} = \urcorner\{w \mid V^*(\alpha, w) = T\},\\
&\{w \mid V^*(\alpha \vee \beta, w) = T\} = \{w \mid V^*(\alpha, w) = T\} \cup \{w \mid V^*(\beta, w) = T\},\\
&\{w \mid V^*(F\alpha, w) = T\} = f_R(\{w \mid V^*(\alpha, w) = T\}),\\
&\{w \mid V^*(P\alpha, w) = T\} = p_R(\{w \mid V^*(\alpha, w) = T\}),
\end{aligned}$$

и так индукцией по длине α получается, что в $\langle W; R; \Pi\rangle^+$ где $p_1, \ldots, p_n$ — пропозициональные переменные, входящие в α. Следовательно, $\langle W; R; \Pi\rangle^+ \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $\langle W; R; \Pi\rangle \models \alpha$.

Теорема 4. *Если $\mathfrak{A}$ временнáя алгебра, то существует структура первого порядка $\langle W, R, \Pi\rangle$, такая, что $\langle W; R; \Pi\rangle^+$ изоморфна $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. В терминологии [2] временнáя алгебра является булевой алгеброй с двумя сопряженными аддитивными нормальными операторами. Согласно теоремам 3.10, 2.12, 3.6 в [2], существует тройка $\langle W; R; S\rangle$, такая, что $S = R^{-1}$ и $\mathfrak{A}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{B}$

алгебры

$$\langle W, R, S\rangle^{+} = \langle 2^{W}; \varnothing, W, \cup, \cap, \urcorner, f_R, f_S\rangle,$$

где $\cup$, $\cap$ и $\urcorner$ — обычные теоретико-множественные операции, а f_R и f_S определены по (21). Так как $S = R^{-1}$, то $f_S = p_R$. Пусть множество $\Pi \subseteq 2^{W}$ таково, что $\mathfrak{B} = \langle \Pi; \varnothing, W, \cup, \cap, \urcorner, f_R, f_S\rangle$. Тогда $\mathfrak{B} = \langle W; R; \Pi\rangle^{+}$.

Следствие 5. *Семантика первого порядка адекватна для всех временных логик.*

§ 4. Семантика второго порядка

Назовем структуру $\langle W; R\rangle$ ILI-структурой, если существует такое $w_0 \in W$, что ограничение R на $\{w \mid w_0 R w\}$ является иррефлексивным линейным отношением порядка без наибольшего элемента. Рассмотрим формулу

(23) $$GFp \mapsto FGp.$$

Если $\langle W; R\rangle$ есть ILI-структура, то $\langle W; R\rangle \not\models (23)$. Для установления этого выберем w_0, как указано выше; можно показать (используя аксиому выбора), что существует подмножество S множества $\{w \mid w_0 R w\}$, такое, что как S, так и дополнение к S являются кофинальными в $\{w \mid w_0 R w\}$; пусть V — такое приписывание, что $V(p) = S$, где $V^{*}((23), w_0) = F$.

Если же T — временнáя логика, каждая модель которой является ILI-структурой, а T′ получена из T добавлением (23) как аксиомы, то у T′ нет модели; тогда формула $p \wedge \sim p$ истинна в каждой модели T′ и при условии непротиворечивости T′ семантика второго порядка неадекватна для T′. Надо заметить, что (23) имеет такой интуитивный смысл: эта формула утверждает, что каждое высказывание в некоторый момент перестает изменять свое истинностное значение. Таким образом, (23) означает истинность „макроскопических" предложений о мире, в котором справедлив второй закон термодинамики.

Укажем в заключение временнýю логику T такую, что каждая модель T является ILI-структурой и что добавление к T (23) как аксиомы дает непротиворечивую логику. Рассмотрим формулы:

(24) $FFp \rightarrow Fp$;
(25) $(Fp \wedge Fq) \rightarrow (F(p \wedge q) \vee F(p \wedge Fq) \vee F(q \wedge Fp))$;
(26) $Gp \rightarrow Fp$;
(27) $Pp \rightarrow P(p \wedge \sim Pp)$.

Читатель может проверить, что

$$\langle W; R\rangle \models (24) \Leftrightarrow R \text{ транзитивно},$$
$$\langle W; R\rangle \models (25) \Leftrightarrow (\forall u, v, w \in W)[(uRv \wedge uRw) \Rightarrow \Rightarrow (vRw \vee wRv \vee v = w)];$$
$$\langle W, R\rangle \models (26) \Leftrightarrow (\forall u \in W)(\exists v \in W)(uRv).$$

Мы докажем, что если $\langle W; R\rangle \models (27)$, то

$$(\forall S \subseteq W)(\forall w \in S)(\exists u \in S)[(uRw \vee u = w) \wedge (\forall v)(vRu \Rightarrow v \notin S)]^{*},$$

и если R транзитивно, то справедливо обратное заключение. (Следовательно, если $\langle W; R\rangle \models (27)$, то R иррефлексивно: для множества $S' = \{w\}$ получается $(\forall v)(vRw \Rightarrow v \neq w)$.) Пусть $\langle W; R\rangle \models (27)$ и $w \in S \subseteq W$. Пусть V таково, что $V(p) = S$. Если $V^{*}(Pp, w) = F$, то $(\forall v)(vRu \Rightarrow v \notin S)$ и можно взять $u = w$. Если $V^{*}(Pp, w) = T$, то $V^{*}(P(p \wedge \sim Pp)) = T$, так как $\langle W; R\rangle \models (27)$. Следовательно, $(\exists u)(uRw \wedge V^{*}(p, u) = V^{*}(\sim Pp, u) = T)$; тогда $u \in S$ и $(\forall v)(vRu \Rightarrow v \notin S)$.

Для доказательства обратного предположим, что R транзитивно и $\langle W; R\rangle \not\models (27)$. Пусть V — оценка и $w_1 \in W$ — такой элемент, что $V^{*}(Pp, w_1) = T$ и $V^{*}(P(p \wedge \sim Pp), w_1) = F$. Пусть $S = V(p)$. Так как $V^{*}(Pp, w_1) = T$, то существует $w \in W$, такое, что wRw_1 и $w \in S$. Теперь если $u \in S$ и $(uRw \vee u = w)$, то и uRw_1 (по транзитивности R) и $V^{*}(p \wedge \sim Pp, u) = F$ (согласно выбору w_1). Но $V^{*}(p, u) = T$, так что $V^{*}(\sim Pp, u) = F$, то есть $(\exists v)(vRu \wedge v \in S)$.

Из всего вышеизложенного следует, что для всякой временнóй логики T с собственными аксиомами (24)—(27) каждая модель T является ILI-структурой. Временнáя логика T′, получающаяся добавлением (23) как аксиомы к T, непротиворечива, потому что $\langle N; <; \Pi\rangle$ является моделью первого порядка логики T′, где N — натуральный

* На самом деле формулы (24)—(27) дают структуры (или шкалы Крипке), в которых время может „ветвиться" только назад и для каждого момента „времени" существует некоторый предыдущий момент (в смысле предпорядка в структуре), являющийся минимальным, то есть не имеющим предшественников. Транзитивность и иррефлексивность временнóй структуры T отмечена в тексте.— *Прим. перев.*

ряд, $<$ — обычный порядок на N, а П состоит из всех конечных или дополнительных к конечным („кофинитных") множеств N. Т' служит примером интересной по существу временно́й логики, для которой семантика второго порядка неадекватна.

§ 5. Структуры первого порядка

Здесь будет показано, что каждая структура первого порядка эквивалентна такой структуре первого порядка, которая по свойствам ближе к структуре второго порядка. Наша цель состоит в использовании универсальной адекватности структур первого порядка.

Определение 6. Структура $\langle W; R; \Pi\rangle$ является *рафинированной*, если для всех $u, v \in W$,

(28) $(\forall S \in \Pi)(u \in S \Leftrightarrow v \in S) \Rightarrow u = v;$

(29) $(\forall S \in \Pi)(v \in S \Rightarrow u \in f_R(S)) \Rightarrow uRv.$

Заметим, что из (29) следует

$$(\forall S \in \Pi)(u \in S \Rightarrow v \in p_R(S)) \Rightarrow uRv.$$

Пусть uRv, тогда по (29) существует некоторое $S_0 \in \Pi$, такое, что $v \in S_0$, но $u \notin f_R(S_0)$. Так как $v \in S_0 \subseteq \neg p_R \neg f_R(S_0)$, $v \notin p_R \neg f_R(S_0)$. Тогда для $S = \neg f_R(S_0)$ мы получим $u \in S$, но $v \notin p_R(S)$.

Определение 7. *Отношением конгруэнтности* на $\langle W; R; \Pi\rangle$ называется такое отношение эквивалентности $\equiv$ на W, что

(30) $(u \equiv u_1 \wedge v \equiv v_1) \Rightarrow (uRv \Leftrightarrow u_1Rv_1);$

(31) $u \equiv u_1 \Rightarrow (\forall S \in \Pi)(u \in S \Leftrightarrow u_1 \in S).$

Если $\equiv$ является отношением конгруэнтности на $\langle W; R; \Pi\rangle$, то полагаем: $\mathbf{u} = \{u_1 \mid u \equiv u_1\}$ $(u \in W)$, $\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \mid u \in W\}$;

(32) $\mathbf{u}\mathbf{R}\mathbf{v} \Leftrightarrow uRv;$

(33) $\mathbf{u} \in \mathbf{S} \Leftrightarrow u \in S \ (S \in \Pi),$

$\mathbf{\Pi} = \{\mathbf{S} \mid S \in \Pi\}.$

Заметим, что условия (30) и (31) в точности таковы, какими должны быть, чтобы (32) и (33) имели смысл.

Теорема 8. *Пусть* $\equiv$ *отношение конгруэнтности на* $\langle W; R; \Pi\rangle$. *Определим* $\Psi: \Pi \to \mathbf{\Pi}$ *условием* $\Psi(S) = \mathbf{S}$. *Тогда*

(34) Ψ *является взаимно однозначным отображением на;*

(35) $\langle \mathbf{W}; \mathbf{R}; \mathbf{\Pi}\rangle$ *есть структура;*

(36) Ψ *устанавливает изоморфизм* $\langle W; R; \Pi\rangle^+$ *и* $\langle \mathbf{W}; \mathbf{R}; \mathbf{\Pi}\rangle^+$;

(37) $\langle \mathbf{W}; \mathbf{R}; \mathbf{\Pi}\rangle \sim \langle W; R; \Pi\rangle$.

Доказательство. По определению, $\mathbf{\Pi}$, Ψ является отображением на. Если $\mathbf{S} = \mathbf{T}$, то, по (33), $S = T$; следовательно, Ψ есть взаимно однозначное отображение. (35) означает, что $\mathbf{\Pi}$ замкнуто относительно булевых операций $f_{\mathbf{R}}$ и $p_{\mathbf{R}}$. Читатель может проверить, что $\neg\mathbf{S} = \psi(\neg S)$ и $\mathbf{S} \cup \mathbf{T} = \psi(S \cup T)$. Точно так же $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}) = \{\mathbf{u} \mid (\exists v)(uRv \wedge v \in S)\} = \{\mathbf{u} \mid u \in f_R(S)\} = \psi(f_R(S))$. Аналогично $p_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}) = \psi(p_R(S))$. Одновременно с (35) при этом доказаны (36) и (37).

Определение 9. Если $\langle W; R; \Pi\rangle$ есть структура, то $\equiv_\Pi$ есть отношение эквивалентности, определенное на W посредством $u \equiv_\Pi v \Leftrightarrow (\forall S \in \Pi)(u \in S \Leftrightarrow v \in S)$.

Теорема 10. *Если* $\langle W; R; \Pi\rangle$ *удовлетворяет* (29), *то* $\equiv_\Pi$ *является отношением конгруэнтности на* $\langle W; R; \Pi\rangle$ *и структура* $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{\Pi}\rangle$ *рафинирована.*

Доказательство. Ясно, что $\equiv_\Pi$ удовлетворяет (31). Пусть $u \equiv_\Pi u_1$ и $v \equiv_\Pi v_1$. Если uRv, то $(\forall S \in \Pi)(v \in S \Rightarrow u \in f_R(S))$; из $u \equiv_\Pi u_1$ и $v \equiv_\Pi v_1$ следует, что $(\forall S \in \Pi)(v_1 \in S \Rightarrow u_1 \in f_R(S))$; поскольку $\langle W; R; \Pi\rangle$ удовлетворяет (29), то u_1Rv_1. Аналогично, если u_1Rv_1 то uRv. Следовательно, $\equiv_\Pi$ является отношением конгруэнтности. По определению $\langle \mathbf{W}; \mathbf{R}; \mathbf{\Pi}\rangle$, если $(\forall \mathbf{S} \in \mathbf{\Pi})(\mathbf{u} \in \mathbf{S} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in \mathbf{S})$, то $(\forall S \in \Pi)(u \in S \Leftrightarrow v \in S)$, то есть $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Точно так же, если $(\forall \mathbf{S} \in \mathbf{\Pi})$ $(\mathbf{v} \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{u} \in f_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}))$, то $(\forall S \in \Pi)(v \in S \Rightarrow u \in f_R(S))$, так как $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}) = \psi(f_R(S))$ по (36); так как $\langle W; R; \Pi\rangle$ удовлетворяет (29), то uRv, а значит, и $\mathbf{u}\mathbf{R}\mathbf{v}$. Следовательно, $\langle \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{\Pi}\rangle$ является рафинированной структурой.

Теорема 11. *Пусть* $\langle W; R; \Pi\rangle$ — *структура. Тогда существует такое отношение* $R' \supseteq R$, что:

(38) $\quad f_{R'} = f_R$ и $p_{R'} = p_R$;

(39) $\quad \langle W;\ R';\ \Pi\rangle$ *является структурой*;

(40) $\quad \langle W;\ R';\ \Pi\rangle^+ = \langle W;\ R;\ \Pi\rangle^+$;

(41) $\quad \langle W;\ R',\ \Pi\rangle \sim \langle W;\ R;\ \Pi\rangle$;

(42) $\quad \langle W;\ R';\ \Pi\rangle$ *удовлетворяет* (29).

Доказательство. Пусть $uR'v \Leftrightarrow (\forall S \in \Pi)\ (v \in S \Rightarrow \Rightarrow u \in f_R(S))$. Тогда $R \subseteq R'$, так что $f_R(S) \subseteq f_{R'}(S)$ для всех $S \in \Pi$. И наоборот, если $u \in f_{R'}(S)$, то для некоторого v $uR'v$ и $v \in S$, тогда по определению R', $u \in f_R(S)$. Аналогично $p_{R'} = p_R$, и легко выводятся (39)—(42).

Следствие 12. *Для каждой структуры $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle$ существует рафинированная структура $\langle W_0;\ R_0;\ \Pi_0\rangle$, эквивалентная $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle$; кроме того, Π и Π_0 равномощны.*

Доказательство. По очереди применяются теоремы 12, 11 и 9.

Следствие 13. *Для каждой временно́й логики T и формулы α $T \vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда α истинна в каждой модели T.*

§ 6. Адекватность второго порядка

Замечательно не то, что семантика второго порядка иногда не адекватна, а то, что она адекватна в некоторых нетривиальных случаях. В этом параграфе мы покажем, что каждое из двух условий на T достаточно для проверки адекватности семантики второго порядка для T.

Временна́я логика T называется *финитно аппроксимируемой* (ф. а.)* относительно данной из трех семантик, если при $T \nvdash \alpha$ существует конечная структура $\mathfrak{A}$ в этой семантике, такая, что $\mathfrak{A}$ является моделью T и $\mathfrak{A} \not\models \alpha$. (Мощностями $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle \langle W;\ R\rangle$ и $\langle A;\ 0,\ \ldots\rangle$ называются мощности W, W и A соответственно.) Если T ф. а. относительно некоторой семантики, то эта семантика, конечно, адекватна T.

---

* Переводчик заменил термин „свойство финитности моделей“ более привычным для русского читателя термином „финитная аппроксимируемость“.— *Прим. ред.*

Теорема 14. *Каждая конечная временна́я алгебра эквивалентна некоторой конечной структуре первого порядка, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная временна́я алгебра. По теореме 4 существует структура первого порядка $\langle W_1;\ R_1;\ \Pi_1\rangle$, эквивалентная $\mathfrak{A}$ с Π_1 той же мощности, что и A. По следствию 12, $\langle W_1,\ R_1,\ \Pi_1\rangle$ эквивалентна рафинированной структуре $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle$, где Π имеет ту же мощность, что и Π_1, а следовательно, и $\mathfrak{A}$. По (28) структура W конечна. Очевидно и обратное: $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle^+$ является временно́й алгеброй, эквивалентной $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle$, и конечной, если конечна $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle$.

Следствие 15. *Временна́я логика ф. а. относительно семантики первого порядка тогда, и только тогда, когда она ф. а. относительно алгебраической семантики.*

Теорема 16. *Каждая конечная структура первого порядка эквивалентна конечной структуре второго порядка, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle$ конечна. По следствию 12, существует рафинированная структура $\langle W_0,\ R_0,\ \Pi_0\rangle$, эквивалентная $\langle W;\ R;\ \Pi\rangle$ с Π_0 той же мощности, что и Π. По (28), множество W_0 конечно; скажем, $W_0 = \{w_1,\ \ldots,\ w_n\}$, где $w_i \neq w_j$, если $i \neq j$. Опять по (28), если $i \neq j$, то найдется $S_{ij} \in \Pi_0$, такое, что $w_i \in S_i$ и $w_j \notin S_{ij}$. Тогда $\{w_i\} = \cap \{S_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq i\} \in \Pi_0$. Отсюда $\Pi_0 = 2^{W_0}$ и $\langle W_0;\ R_0\rangle \sim \langle W_0;\ R_0;\ \Pi\rangle \sim \langle W,\ R,\ \Pi\rangle$. Обратное тривиально: если $\langle W;\ R\rangle$ — конечная структура второго порядка, то структура $\langle W;\ R;\ 2^W\rangle$ эквивалентна конечной структуре первого порядка.

Следствие 17. *Если T ф. а. относительно какой-нибудь из трех семантик, то семантика второго порядка адекватна для T.*

Тот, кто хотел бы доказывать адекватность семантики второго порядка для отдельных временны́х логик с помощью следствия 17, может использовать те сведения о финитной аппроксимируемости, бо́льшая часть которых применима в особенности к модальным логикам и, следовательно, может быть приспособлена, по-видимому, к временны́м логикам. Обзор этих сведений читатель найдет в [1]. Ниже мы приведем существенно отличающийся от этого метод доказательства адекватности, который не требует никакой специальной техники.

Пусть E — класс формул, таких, что если $\langle W; R; \Pi\rangle$ есть рафинированная структура и $\langle W; R\rangle \not\models \alpha$, то $\langle W; R; \Pi\rangle \not\models \alpha$. В E содержится много интересных формул, например (24)—(26). Принадлежность (25) к E устанавливается так: пусть $\langle W; R; \Pi\rangle$ рафинированная структура и $\langle W; R\rangle \not\models (25)$. По § 4, существуют $u, v, w \in W$, такие, что uRv, uRw, wRv, vRw и $v \neq w$. Так как wRv, то, согласно (29), существует $S_1 \in \Pi$, такое, что $v \in S_1$ и $w \notin f_R(S_1)$. Поскольку vRw, то, по (29), существует $T_2 \in \Pi$, такое, что $w \in T_2$ и $v \notin f_R(T_2)$. Наконец, ввиду $v \neq w$, по (28), найдется $S_3 \in \Pi$, такое, что $v \in S_3$ и $w \notin S_3$. Пусть $S = S_1 \cap \neg f_R(T_2) \cap S_3$ и $T = \neg f_R(S_1) \cap T_2 \cap \neg S_3$. Тогда $v \in S$ и $w \in T$, так что $u \in f_R(S) \cap f_R(T)$. Кроме того,

$$f_R(S \cap T) \subseteq f_R(S_3 \cap \neg S_3) = \varnothing;$$
$$f_R(S \cap f_R(T)) \subseteq f_R(\neg f_R(T_2) \cap f_R(T_2)) = \varnothing;$$
$$f_R(f_R(S) \cap T) \subseteq f_R(f_R(S_1) \cap \neg f_R(S_1)) = \varnothing.$$

Таким образом, $S, T \in \Pi$ и $f_R(S) \cap f_R(T) \nsubseteq f_R(S \cap T) \cup \cup f_R(S \cap f_R(T)) \cup f_R(f_R(S) \cap T)$, откуда $\langle W; R; \Pi\rangle \not\models 25)$.

Не следует делать заключение о том, что доказательство принадлежности формул к E всегда требует изобретательности. Доказательства для (24) и (26), например, тривиальны.

Теорема 18. *Пусть* T — *временна́я логика без собственных правил вывода, все собственные аксиомы которой принадлежат* E. *Тогда семантика второго порядка адекватна для* T.

Доказательство. Если $\mathrm{T} \not\vdash \alpha$, то существует рафинированная структура первого порядка $\langle W; R; \Pi\rangle$, которая является моделью T и в которой α не истинна. Тогда α, конечно, не истинна и в $\langle W; R\rangle$. Так как собственные аксиомы T принадлежат E и истинны в $\langle W; R; \Pi\rangle$, то они истинны в $\langle W; R\rangle$. Поскольку в T нет собственных правил вывода, то $\langle W; R\rangle$ есть модель T.

§ 7. Некоторые проблемы

Можно ли охарактеризовать E таким образом, чтобы легче усматривалась принадлежность и непринадлежность формул E? Является ли множество E эффективно разрешимым? Пусть E_1 обозначает класс формул α, для которых существуют предложения A теории первого порядка бинарного отношения, такие, что α истинна в $\langle W; R\rangle$ тогда и только тогда, когда A истинна в $\langle W; R\rangle$, рассматриваемой как модель теории первого порядка. В каком отношении находятся E_1 и E? Можно ли охарактеризовать класс E_1 предложений A, получаемых таким образом из формул $\alpha \in E_1$ синтаксически или в терминах обычной семантики теорий первого порядка?

В заключение заметим, что рассмотренные здесь нами три семантики для временны́х логик можно модифицировать и для модальных логик. Семантика возможных миров Крипке является семантикой порядка. Алгебраическая семантика и семантика первого порядка адекватны для всех модальных логик. Но будут ли адекватны для всех модальных логик семантики второго порядка? [1]

ЛИТЕРАТУРА

1. Harrop R. Some structure results for propositional calculi.— "The Journal of Symbolic Logic", vol. 30, 1965, p. 271—292.
2. Jonsson B. and Tarski A. Boolean algebras with operators.— "American Journal of Mathematics", vol. 73, 1951, p. 891—939.
3. McKinsey J. C. C. and Tarski A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting.— "The Journal of Symbolic Logic", vol. 13, 1948, p. 1—15.
4. Prior A. N. Past, Present and Future, Clarendon Press, Oxford, 1967.
5. Fine K. Propositional quantifiers in modal logic.—"The Journal of Symbolic Logic", vol. 36, 1970, p. 336—346.
6. Makinson D. A generalisation of the concept of a relational model for modal logic.—"Theoria", vol. 36, 1970, p. 330—335.
7. Thomason S. K. An incompleteness theorem in modal logic.— "Theoria" (to appear).

[1] Ответ отрицательный. В [7] мы построили нормальное расширение T, для которого семантика второго порядка неадекватна. Мы узнали, что Файн построил нормальное расширение S 4, для которого также нет адекватной семантики второго порядка [М. Герсон в [9] доказал, что для этих логик нет даже адекватной семантики Скотта — Монтегю второго порядка.— *Прим. перев.*]. А. Лахлан и В. Форрест показали, что E собственно содержится в E_1.

К. Сегерберг

К. Сегерберг

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ АЛЬТЕРНАТИВНОСТИ *

В этой статье мы даем изложение фундаментальных систем двух простейших и наиболее важных видов пропозициональной временно́й логики. Эти виды, которые все еще не имеют общепринятого наименования, мы называем мономодальным и бимодальным, согласно числу исходных операторов необходимости. Тема данной статьи — обсуждение взаимоотношения между синтаксическими и семантическими условиями: что представляет собой логика, например, общего, вполне упорядоченного, плотного, непрерывного, целочисленного или конечного времени? Не все результаты здесь являются новыми; ссылка на предыдущие работы дана в конце статьи. В качестве главного достижения данной статьи мы рассматриваем развитие теории фильтрации, что делает возможным применение техники типа Хенкина к модальным логикам с линейными (или строго линейными) отношениями альтернативности, так что это развитие позволяет нам дать систематическую трактовку специфической области временно́й логики.

Мы начинаем с § 0, который обеспечивает теоретическое обоснование для анализа, проводимого в последующей части статьи. Этот параграф обобщает и расширяет материал, изложенный в работе [8], и знакомство с этой работой, несомненно, сделает более легким чтение настоящей статьи. § 1 посвящен мономодальной логике, а § 2 — бимодальной. Некоторые исторические замечания собраны в заключительном § 3.

---

* Segerberg K. Modal logics with linear alternative relations.— "Theoria", 1970, vol. 36, p. 301—322.

§ 0. Общие замечания

N, Z, Rat и Re обозначают соответственно множества натуральных чисел, целых чисел, рациональных и действительных чисел. Порядковыми типами этих множеств являются ω, ζ, η и λ соответственно.

Нашими пропозициональными буквами будут P_0, P_1, ..., P_n, ..., а $\bot$ и $\rightarrow$ являются нашими булевыми исходными константами. В дополнение к этому мы имеем семейство $\{\boxed{i}\}_{i\in J}$ унарных модальных операторов, причем J есть некоторое фиксированное множество индексов. Очевидным образом определяется понятие J-формулы, и Φ_J обозначает множество всех J-формул. В качестве сокращений мы используем $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\leftrightarrow$, а также $\top$ вместо $\bot\rightarrow\bot$ и $\Diamond_i$ вместо $\neg\boxed{i}\neg$ (для всякого $i\in J$).

Под K^J мы понимаем наименьшее множество $L\subseteq\Phi_J$, такое, что (i) L содержит все тавтологии и все подстановочные примеры схемы

$$\boxed{i}(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})\rightarrow(\boxed{i}\mathrm{A}\rightarrow\boxed{i}\mathrm{B})$$

для каждого $i\in J$, и (ii) L замкнуто по модус поненс (MP: A, A → B/B), а также для каждого $i\in J$ замкнуто по правилу навешивания необходимости для $\boxed{i}$ (Nec_i: A/$\boxed{i}$A). Под J-модальной логикой мы понимаем множество $L\subseteq\Phi_J$, такое, что L содержит K^J и замкнуто по MP и по правилу подстановки. Если вдобавок L замкнуто по Nec_i для каждого $i\in J$, то L называется нормальным. Таким образом, K^J является наименьшей нормальной J-модальной логикой.

$\langle U, R\rangle$ является J-структурой, если U есть некоторое множество, а R — функция, сопоставляющая каждому $i\in J$ в качестве значения бинарное отношение R_i на U. $\langle U, R, V\rangle$ является J-моделью, если $\langle U, R\rangle$ есть J-структура, а V — оценка на этой структуре[1]; то есть если V есть функция, определенная для каждого неотрицательного целого числа и имеющая в качестве значений подмножества множества U. Определение истины на некоторой точке в J-модели будет дано ниже. Модель $\mathfrak{U}$ является моделью для множества Σ формул, если каждая формула из Σ истинна в $\mathfrak{U}$, то есть истинна на каждой точке в $\mathfrak{U}$. Аналогично, структура $\mathfrak{F}$

---

[1] Буква «J» в выражениях «J-модель» и «J-структура» иногда будет опускаться.

будет структурой для Σ, если каждая формула из Σ значима в $\mathfrak{F}$, то есть истинна в каждой модели на $\mathfrak{F}$. Если $\Psi \subseteq \Phi_J$, то две модели эквивалентны по модулю Ψ, если каждая формула из Ψ истинна в обеих моделях, когда она истинна в одной из них. Две модели эквивалентны, если они эквивалентны по модулю Φ_J. Логика L детерминируется классом C структур, если каждая структура из C является структурой для L и каждая не-теорема L незначима в некоторой структуре из C. Если $\mathfrak{F}$ есть такая структура, что $\{\mathfrak{F}\}$ детерминирует L, мы будем говорить, что L детерминируется посредством $\mathfrak{F}$.

Под канонической моделью $\mathfrak{M}_L$ для нормальной J-модальной логики L мы понимаем J-модель $\langle U, R, V\rangle$, где U есть множество всех L-максимальных множеств J-формул, где для всякого $i \in J$, xR_iy тогда и только тогда, когда для всех J-формул А, $\boxed{i}\text{А} \in x$, если и только если $\text{А} \in y$ и где для всякого n, $V(n) = \{x{:}P_n \in x\}$. Можно показать (используя аксиому выбора, если дано неупорядоченное J), что для всякой формулы А и для всякого $x \in U$, А истинна на x в $\mathfrak{M}_L$ тогда и только тогда, когда $\text{А} \in x$. Мы будем ссылаться на этот факт как *на фундаментальную теорему для нормальных J-модальных логик*. Мы заключаем, что K^J детерминируется классом всех J-структур.

Предположим, что $\mathfrak{U} = \langle U, R, V\rangle$ есть некоторая J-модель, а x — некоторый элемент из U. Пусть U^x будет наименьшим множеством, которое содержит x и замкнуто по R_i для каждого $i \in J$. Пусть R_i^x и V^x будут ограничениями R_i и V — до U^x (в очевидном смысле). Тогда J-модель $\mathfrak{U}^x = \langle U^x, R^x, V^x\rangle$ называется моделью, порожденной из $\mathfrak{U}$ посредством x. Можно показать, что для всякой формулы А и для всякого $y \in U^x$ А истинна на y в $\mathfrak{U}$, если и только если А истинна на y в $\mathfrak{U}^x$. Мы будем ссылаться на этот факт как на *теорему порождения*.

Предположим, что $\mathfrak{U} = \langle U, R, V\rangle$ является J-моделью, а Ψ есть подмножество множества Φ_J, замкнутое по свойству подформульности. Мы определяем отношение эквивалентности $\sim$ в U посредством условия: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для всякой формулы $\text{А} \in \Psi$ А либо истинна в $\mathfrak{U}$ и на x, и на y, либо ложна и на x, и на y. Мы пишем $[x]$ для обозначения класса эквивалентности x и U' для обозначения множества классов эквивалентности. Предположим, что R' является семейством бинарных отношений R_i' на U', таким, что для всякого $i \in J$,

(i) xR_iy, если только $[x]R_i'[y]$; и

(ii) $[x]R_i'[y]$, если и только если $\boxed{i}\,\text{А} \in \Psi$ и $\boxed{i}$ А истинна на x в $\mathfrak{U}$, если А истинна на y. Кроме того, предположим, что V' есть такая функция, что $[x] \in V'(n)$, если и только если $x \in V(n)$ для всякого $x \in U$ и для всякого n, такого, что $P_n \in \Psi$. Тогда $\mathfrak{U}' = \langle U', R', V'\rangle$ называется фильтрацией $\mathfrak{U}$ по Ψ. Можно показать, что для всякой формулы $\text{А} \in \Psi$ и всякого $x \in U$ А истинна на x в $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда А истинна на $[x]$ в $\mathfrak{U}'$; таким образом, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ эквивалентны по модулю Ψ. Мы будем ссылаться на этот факт как на *теорему фильтрации*. Важно заметить, что U' конечно, если конечно Ψ.

Предположим, что $\mathfrak{U} = \langle U, R, V\rangle$ и $\mathfrak{U}' = \langle U', R', V'\rangle$ являются J-моделями. Функция $f{:}U \to U'$ называется P-морфизмом из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}'$, если (i) f есть „отображение на", (ii) для всякого $i \in J$ xR_iy, только если $fxR_i'fy$, и (iii) для всякого $i \in J$ $fxR_i'fy$, только если существует z, такой, что $fz = fy$ и xR_iz. Мы говорим, что f устойчива (reliable) на формуле А, если для всякого $x \in U$ А истинна на x в $\mathfrak{U}$, если и только если А истинна на fx в $\mathfrak{U}'$. Можно показать, что если f устойчива на пропозициональных буквах, встречающихся в А, то она устойчива и на А. На этот факт мы будем ссылаться как *на теорему P-морфизма*. Мы замечаем, что если f устойчива на пропозициональных буквах А, то А истинна в $\mathfrak{U}$, если и только если А истинна в $\mathfrak{U}'$. Следовательно, если f устойчива на каждой пропозициональной букве, то $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ эквивалентны.

Предположим далее, что $\mathfrak{U} = \langle U, R, V\rangle$ является J-моделью, $j \in J$ — фиксированным индексом и R_j — транзитивным отношением. Мы называем не-пустое подмножество C множества U R_j-скоплением в $\mathfrak{U}$, если ограничение R_j до C представляет отношение эквивалентности и не существует расширения C, для которого это истинно. Скопление является собственным, если оно содержит по крайней мере два члена. Идея, лежащая в основе введения этого понятия, обнаруживается благодаря следующему наблюдению. Предположим, что R_j связно в том смысле, что для всяких x, y из его области если $x \neq y$, то xR_jy или yR_jx. Тогда R_j будет линейным, если и только если оно рефлексивно и не существует собственных R_j-скоплений; и R_j является строго линейным, если и только если вообще не существует R_j-скоплений.

Теперь мы опишем построение, которое будет иметь большое значение для дальнейшего изложения. $\mathfrak{U}$ и j остаются такими же, как и прежде, за исключением того, что теперь мы считаем R_j транзитивным. По причинам, которые станут ясны в последующих параграфах, мы принимаем, что каждое R_j-скопление C погружено в некоторое множество C^+ таким образом, что если C и D — различные скопления, то C^+ и D^+ не имеют общих элементов. Для каждого C^+ мы определяем произвольное упорядочивание $R_j^\dagger$, такое, что $R_j^\dagger$ является линейным, если R_j рефлексивно, и строго линейным, если оно не рефлексивно. Пусть $\alpha = \langle A, < \rangle$ будет любым порядковым типом без последнего элемента. Для каждого C определяем $C^* = \{\langle c, a\rangle : c \in C^+ \text{ и } a \in A\}$. Не теряя общности, мы можем принять, что пересечение U и $\bigcup\{C^* : C$ является R_j-группой$\}$ пусто. Пусть U^* обозначает объединение $U - \bigcup\{C : C$ есть R_j-скопление$\}$ и $\bigcup\{C^* : C$ есть R_j-скопление$\}$. В каждом скоплении C мы произвольно выбираем элемент и обозначаем его посредством $\gamma(C)$. Тогда следующее определяет функцию $f\colon U^* \to U$:

$$f\xi = \begin{cases} \xi, & \text{если } \xi \in U \\ c, & \text{если } \xi = \langle c, a\rangle \text{ и } c \in U \\ \gamma(C), & \text{если } \xi = \langle c, a\rangle,\ c \notin U \text{ и C есть такое скопление, что } c \in C^+. \end{cases}$$

Мы определяем, что отношение $\xi R_j^* \eta$ имеет место между элементами $\xi, \eta \in U^*$, если и только если (i) $\xi \in U$ или $\eta \in U$ и $f\xi R_j f\eta$ или (ii) $\xi = \langle c, a\rangle$, $\eta = \langle d, b\rangle$ и *либо* существуют различные скопления C и D, такие, что $c \in C^+$ и $d \in D^+$, а $\gamma(C) R_j \gamma(D)$, *либо* существует скопление C, такое, что $c, d \in C^+$ и $a < b$, либо существует скопление C, такое, что $c, d \in C^+$, $a = b$ и cR^+d. Кроме того, для всякого $i \in J$, такого, что $i \neq j$, мы определяем, что $\xi R_i^* \eta$, если и только если $f\xi R_i f\eta$. И наконец, V^* мы определяем посредством того условия, что $\xi \in V^*(n)$, если и только если $f\xi \in V(n)$. Тогда $\mathfrak{U}^* = \langle U^*, R^*, V^*\rangle$ является J-моделью. Легко видеть, что f есть P-морфизм из $\mathfrak{U}^*$ в $\mathfrak{U}$, который устойчив на каждой формуле. Другими словами, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}^*$ эквивалентны. Ввиду отсутствия лучшего наименования мы будем называть этот результат *теоремой сглаживания* (Bulldozer Theorem). Этим же наименованием мы охватываем также тот факт, что если для некоторого

$k \in J$, отличного от j, такого, что $R_k = R_j$, мы заменяем определение R_k^* на $R_k^* = R_j^*$, то вся аргументация сохраняется, если изменение в конструкции $\mathfrak{U}^* : \langle A, < \rangle$ состоит в требовании устранить как первый, так и последний элементы.

Повторяя то, что было сказано выше, следует отметить, что значение *теоремы сглаживания* выражается в том, что поскольку $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}^*$ верифицируют одни и те же формулы, то R_j^* является линейным, если R_j рефлексивно, и оно будет строго линейным, если R_j не-рефлексивно. Это тот стержень, к которому крепится основное содержание данной статьи.

§ 1. Мономодальная логика

На всем протяжении этого параграфа множество индексов J будет множеством $J = \{0\}$. Таким образом, единственным исходным модальным оператором является $\boxed{0}$, который для простоты мы будем записывать как $\Box$. Также для простоты вместо "J-структура" и „J-модель" мы будем писать „структура" и "модель". Семейство R в структуре $\langle U, R\rangle$ будет отождествляться со своим единственным членом R_0, другими словами, R является отношением альтернативности из $\langle U, R\rangle$. В связи с транзитивной структурой $\langle U, R\rangle$ мы иногда будем использовать не всегда строго обоснованную, но более содержательную терминологию. Например, если xRy и неверно, что yRx, мы можем сказать, что x предшествует y или что x раньше, чем y, а также что y следует за x или что y позже x. Если y следует за x и ему не предшествует никакой последователь x, то мы говорим, что y является непосредственно следующим за x, тогда x и y, а также y и x являются смежными. Некоторый элемент x следует после множества C элементов, если x следует после каждого элемента множества C. Множество D следует после множества C, если каждый элемент D следует после C. Два множества будут смежными, если одно из них следует после другого и элемент, следующий за одним из них, не является предшественником другого. Последнее скопление — то, за которым не следует ни один элемент. И так далее.

Логики, обсуждаемые в этом параграфе, определимы в терминах аксиомных схем, получаемых из следующего набора:

D. $\Diamond\top$.
T. $\Box A \to A$.
B. $\Diamond\Box A \to A$.
4. $\Box A \to \Box\Box A$.
A. $\Box\Box A \to \Box A$.
L. $\Box(A \wedge \Box A \to B) \vee \Box(B \wedge \Box B \to A)$.
Z. $\Box(\Box A \to A) \to (\Diamond\Box A \to \Box A)$.
W. $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$.
Dum. $\Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to (\Diamond\Box A \to A)$.
Grz. $\Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$.

Напомним, что $K4.3 = K4L$, $S4.3 = KT4L$ и $S5 = KT4B$.

Доказательства полноты хенкиновского типа для модальных логик — впервые предложенные Макинсоном и Скоттом — опираются на тот факт, что свойства канонической модели для некоторой логики зависят от самой этой логики. Таким образом, хорошо известно, что если L есть нормальное расширение KD (KT, K4, KA, KL), то $\mathfrak{M}_L$ является сериальной (serial) в том смысле, что $\forall x \exists y xRy$ (рефлексивность, транзитивность, псевдоплотность в том смысле, что $\forall x \forall y \exists z (xRy \Rightarrow xRzRy)$, частично упорядоченной в том смысле, что $\forall x \forall y \forall z (xRy$ и $xRz \Rightarrow \Rightarrow yRz$, или $y = z$, или $zRy)$. Если это дано, то теоремы полноты для этих логик и логик, определимых в их терминах, следуют непосредственно.

Когда мы приступаем к рассмотрению полноты тех логик, которые определяются более сложными схемами нашего списка, то оказывается труднее оценить влияние этих схем на канонические модели. Однако мы достаточно хорошо сумеем обнаружить эти влияния — по крайней мере для целей временно́й логики, — пропуская канонические модели через фильтры.

Пусть $\mathfrak{U} = \langle U, R, V \rangle$ будет моделью, а Ψ — множеством формул, замкнутых по свойству подформульности. Предположим, что $\mathfrak{U}' = \langle U', R', V' \rangle$ есть фильтрация $\mathfrak{U}$ через Ψ, такая, что $[x]R'[y]$, если и только если $\Box A \in \Psi$ и $\Box A$ истинна на x, то и $\Box A$, и A истинны на y. Тогда мы говорим, что $\mathfrak{U}'$ является *леммоновской фильтрацией* $\mathfrak{U}$ через Ψ. Легко показать, что леммоновская фильтрация существует в том случае, если $\mathfrak{U}$ транзитивна.

Теперь мы сформулируем результат, который служит исходным пунктом исследования в этом параграфе. Предположим, что L является нормальным расширением K4.3. Пусть Ψ будет конечным множеством формул, замкнутых по свойству подформульности. Пусть $\mathfrak{M}$ будет как угодно порожденной подмоделью канонической модели $\mathfrak{M}_L$, и пусть $\mathfrak{M}'$ будет леммоновской фильтрацией $\mathfrak{M}$ посредством Ψ. Тогда, как легко видеть, $\mathfrak{M}'$ является конечной, транзитивной и упорядоченной (в том смысле, что $\forall\xi\forall\eta(\xi \neq \eta \Rightarrow \xi R' \eta$ или $\eta R' \xi)$, где R' есть отношение альтернативности из $\mathfrak{M}'$). Это — наш исходный пункт, и он важен по следующей причине. Предположим, что A_0 есть некоторая формула, не выводимая в L. Тогда, согласно фундаментальной теореме, A_0 проваливается в $\mathfrak{M}_L$, скажем, на t. Согласно теореме порождения, A_0 проваливается на t также в подмодели $\mathfrak{M}$, порожденной из $\mathfrak{M}_L$ посредством t. Пусть Ψ будет множеством подформул формулы A_0 и пусть $\mathfrak{M}'$ будет леммоновской фильтрацией $\mathfrak{M}$ через Ψ. Тогда, согласно теореме фильтрации, A_0 проваливается на $[t]$ в $\mathfrak{M}'$ благодаря тому, что $\mathfrak{M}'$ конечна, транзитивна и упорядочена. С другой стороны, легко показать, что каждая теорема K4.3 истинна в каждой модели этого вида. Следовательно, K4.3 детерминируется классом конечных, транзитивных и упорядоченных структур. Этот результат еще не объясняет, почему K4.3 представляет интерес для временно́й логики. Однако, согласно теореме сглаживания, каждая модель данного вида может быть преобразована в эквивалентную модель, являющуюся строго линейной (посредством погружения каждого скопления в самое себя и использования порядкового типа ω множества натуральных чисел для каждого α). Таким образом, K4.3 детерминируется классом всех строго линейных порядков. В действительности мы можем сказать даже больше: K4.3 детерминируется классом строго линейных порядков $\mathfrak{F}$, таким, что для некоторых натуральных чисел n и p, не каждое из которых равно нулю, порядковый тип $\mathfrak{F}$ есть $\omega \cdot n + p$. Таким образом, K4.3 детерминируется также классом строгих полных порядков.

Если L, Ψ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ таковы, как прежде, то можно показать следующее.

Лемма 1.1. *$\mathfrak{M}'$ сериальна (рефлексивна, псевдоплотна), если $KD \subseteq L$ ($KT \subseteq L$; $KA \subseteq L$). Другими словами,* *если $KD \subseteq L$, то $\mathfrak{M}'$ содержит последнее скопление. Если $KT \subseteq L$, то каждый элемент $\mathfrak{M}'$ содержится в некотором скоплении. Если $KA \subseteq L$, то $\mathfrak{M}'$ не содержит смежных иррефлексивных элементов.*

Мы приводим доказательство только последнего случая. Предположим, что $KA \subseteq L$. Тогда $\mathfrak{M}_L$ будет псевдоплотной, и, следовательно, такой же является $\mathfrak{M}$. Пусть ξ и η будут смежными элементами в $\mathfrak{M}'$, такими, что $\xi R'\eta$. Возьмем какие-либо $x \in \xi$ и $y \in \eta$. $\mathfrak{M}$ упорядочено, поэтому xRy, или $x=y$, или yRx. Из последнего случая следовало бы, что $\eta R'\xi$, и этот случай должен быть исключен; поэтому xRy. Благодаря псевдоплотности $\mathfrak{M}$ существует z, такой, что $xRzRy$. Поэтому $\xi R'[z]R'\eta$, и, следовательно, ξ и η не могут быть оба иррефлексивными.

Из этой леммы следует, что K4.3D детерминируется классом строго линейных порядков типа $\omega \cdot n$, где $n \geqq 1$. K4.3D детерминируется также классом всех бесконечных строго линейных порядков и классом всех бесконечных строгих полных порядков. Приведем еще один результат.

Теорема 1.2. K4.3D *детерминируется посредством* $\langle \omega^2, < \rangle$.

Для S4.3 также следуют различные результаты о полноте. Таким образом, S4.3 детерминируется классом всех бесконечных, упорядоченных, рефлексивных, транзитивных структур, классом всех линейных порядков, классом всех полных порядков, классом всех бесконечных полных порядков, а также $\langle \omega^2, \leqq \rangle$. Существуют также более строгие результаты. Лемма 1.1 показывает, что, строго говоря, S4.3 детерминируется классом структур, состоящих из конечной цепи конечных скоплений. Возьмем любую из этих структур; предположим, что она содержит m скоплений. Возьмем какую-либо модель на ней и применим теорему сглаживания, погружая каждое скопление в различные образы множества рациональных чисел и используя ω для каждого α. Получающаяся в результате этого линейная модель имеет порядковый тип $(\eta \cdot \omega) \cdot m = \eta$. Поскольку эта модель эквивалентна первой модели, мы получаем новую теорему полноты.

Теорема 1.3. S4.3 *детерминируется посредством* $\langle \mathrm{Rat}, \leqq \rangle$.

Вместо погружения первоначального скопления в образ интервала реальных чисел $(0,1)$ и каждого не-начального скопления — в образ интервала реальных чисел $[0,1)$ можно было бы сделать все образы различными. Получившаяся в результате этого линейная модель имела бы порядковый тип $\lambda + (1+\lambda)\cdot(m-1) = \lambda$.

Теорема 1.4. S4.3 *детерминируется посредством* $\langle \mathrm{Re}, \leqq \rangle$.

Последняя часть леммы 1.1 может быть использована для обоснования аналогичных теорем для K4.3AD. Здесь имеется дополнительное препятствие, а именно: нужно доказать, что если формула проваливается в строго линейно упорядоченной модели, областью которой является интервал рациональных (действительных) чисел $[r, +\infty)$ для некоторого r, то она также проваливается и в интервале рациональных (действительных) чисел $(-\infty, +\infty)$. Однако эта трудность сразу же разрешается благодаря теореме порождения.

Теорема 1.5. K4.3AD *детерминируется посредством* $\langle \mathrm{Rat}, < \rangle$, *а также посредством* $\langle \mathrm{Re}, < \rangle$.

Теперь мы обратимся к несколько более трудному случаю дискретных линейных порядков.

Пусть L, Ψ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ будут такими же, как и прежде.

Лемма 1.6. *Если* K4.3 $Z \subseteq L$, *то для каждого не-финального скопления* C *из* $\mathfrak{M}'$ *существует некоторый* R-*финальный элемент в* $\{x:[x] \in \mathrm{C}\}$, *являющийся иррефлексивным.*

Доказательство. Предположим, что C является не-финальным скоплением $\mathfrak{M}'$ и что ζ непосредственно следует за C. Из того, что $\mathfrak{M}'$ есть леммоновская фильтрация, следует, что существует некоторая формула A, такая, что $\Box A \in \Psi$ и $\Box A$ истинна на ζ, но повсюду ложна в C. Если исключить тот случай, когда $\{x:[x] \in \mathrm{C}\}$ состоит только из одного иррефлексивного элемента и поэтому доказывать ничего не нужно, то существуют элементы x, x', такие, что $[x]$, $[x'] \in \mathrm{C}$ и xRx'. Согласно теореме фильтрации, $\Box A$ проваливается на x' в $\mathfrak{M}$, поэтому $\Box\Box A$ проваливается на x. Если z есть какой-либо элемент ζ, такой, что $z \in \zeta$, то из теоремы фильтрации следует, что $\Box A$ истинно на z. Легко видеть, что xRz, поэтому $\Diamond\Box A$ истинно на x. Теперь каждый подстановочный пример новой схемы Z истинен на x. Отсюда мы заключаем о существовании некоторого элемента u, такого, что xRu, и такого, что $\Box\Box$A справедливо на u, когда $\Box$A проваливается. Очевидно, что u является иррефлексивным и, согласно теореме фильтрации, $[u]\in$C. Если для некоторого t мы имеем uRt, то $\Box$A справедлива на t, поэтому $[t]\notin$C. Доказательство закончено.

Теперь предположим, что L является нормальным расширением K4.3Z, и пусть Ψ, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ соответственно изменены. Если $\mathfrak{M}'$ содержит не-финальные скопления, то пусть C будет одним из них. Пусть R^0 будет произвольным строгим линейным упорядочиванием элементов C, таким, что $[u]$ будет R^0-финальным в C (u есть элемент, существование которого гарантируется леммой). Мы определяем, что $\xi R^*\eta$ имеет место между элементами ξ и η в $\mathfrak{M}'$, если и только если либо $\xi\notin$C, либо $\eta\notin$C, и $\xi R'\eta$, либо $\xi\eta\in$C и $\xi R^0\eta$. Пусть $\mathfrak{M}^*=\langle U', R^*, V'\rangle$. Индукцией можно доказать утверждение о том, что для всякого A$\in\Psi$ и всякого $\xi\in U'$A истинна на ξ в $\mathfrak{M}^*$, если и только если A истинна на ξ в $\mathfrak{M}'$. Единственным подслучаем индукционного шага, который осуществляется не автоматически, является тот, когда A$=\Box$B предполагается ложным в $\mathfrak{M}'$ на некотором $\xi\in$C, причем сформулированное утверждение считается справедливым для B. Отсюда следует, что $\Box$B ложна в $\mathfrak{M}'$ на $[u]$ и что поэтому, согласно теореме фильтрации, $\Box$B ложна на u в $\mathfrak{M}$. Таким образом, существует некоторый элемент, такой, что uRv и B ложна на v. Поскольку u иррефлексивно и R-финально в $\{x:[x]\in \text{C}\}$, постольку мы заключаем, что $[v]$ позже, чем C. Теорема фильтрации обусловливает ложность B на $[v]$ в $\mathfrak{M}'$, поэтому, согласно индуктивному предположению, B ложна на $[v]$ в $\mathfrak{M}^*$. Из определения R^* следует, что $\xi R^*[x]$, поэтому $\Box$B проваливается на ξ в $\mathfrak{M}^*$, что и нужно было показать.

Следовательно, $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}^*$ верифицируют одни и те же формулы Ψ, но, когда они являются конечными, упорядоченными и транзитивными, $\mathfrak{M}^*$ содержит на одно не-финальное скопление меньше, чем $\mathfrak{M}'$. Этого (и теоремы сглаживания для распределения конечных групп) вполне достаточно для обоснования той части следующей теоремы, которая относится к полноте,— часть, относящаяся к непротиворечивости, тривиальна.

Теорема 1.7. K4.3DZ *детерминируется посредством* $\langle N, <\rangle$, *а также* $\langle Z, <\rangle$.

Теперь легко установить соответствующий результат для K4.3W. Поскольку W представляет собой более строгую схему, чем Z, достаточно уточнить, что делать, если $\mathfrak{M}'$ содержит финальное скопление. Справедливо, что если C является финальным скоплением в $\mathfrak{M}'$, то R^0 может быть любым строго линейным упорядочением C; если R^* и $\mathfrak{M}^*$ определяются так, как они определялись раньше, то прежнее утверждение истинно. (Оказывается, что вследствие возрастающей численности W в индуктивном доказательстве не может возникнуть обсуждаемая ситуация, если C есть некоторое финальное скопление.)

Теорема 1.8. K4.3 W *детерминируется классом конечных строго линейных порядков, а также* $\langle N, >\rangle$.

Переходим к последней паре схем из нашего списка. Пусть L будет нормальной логикой, по крайней мере столь же сильной, как K4.3, и пусть Ψ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ изменены соответствующим образом. Если C есть некоторое скопление в $\mathfrak{M}'$, то мы будем говорить, что элемент $\zeta\in$C является *виртуально последним* в C, если и только если существует некоторый $z\in\zeta$, такой, что для всякого u если zRu и $[u]\in$C, то $[u]=\zeta$. Это понятие интересно, конечно, только в том случае, когда C собственное.

Лемма 1.9. *Предположим, что* K4.3Dum$\subseteq L$. *Тогда каждое не-финальное собственное скопление в* $\mathfrak{M}'$ *содержит виртуально последний элемент.*

Доказательство. Предположим, что C является не-финальным собственным скоплением в $\mathfrak{M}'$, таким, что в нем отсутствует виртуально последний элемент. Тогда для каждого $\zeta\in$C и каждого $z\in\zeta$ существует некоторое u, такое, что zRu, $[u]\in$C и $[u]\neq\zeta$. Поскольку $\mathfrak{M}'$ конечна, это означает, что в C должны существовать различные μ и ν, такие, что

$$(1)\quad \begin{array}{l}\forall x\exists y([x]\in \text{C}\Rightarrow y\in\mu \text{ и } xRy);\\ \forall x\exists y([x]\in \text{C}\Rightarrow y\in\nu \text{ и } xRy).\end{array}$$

Поскольку $\mu\neq\nu$, существует некоторая формула A$\in\Psi$, такая, что A истинна в $\mathfrak{M}'$ на μ, но не на ν. Пусть ϑ будет непосредственно следовать за C. Поскольку $\mathfrak{M}'$ представляет леммоновскую фильтрацию, существует некоторое B, такое, что $\Box$B$\in\Psi$ и $\Box$B истинно в $\mathfrak{M}'$ на ϑ, но не на μ. Пусть C$=$A$\vee\Box$B. Мы выписываем следующие факты, являющиеся следствиями теоремы фильтрации:

(2) если $x \in \mu$, то C истинно на x;
(3) если $x \in \nu$, то C ложно на x;
(4) если $[x]$ следует за C, то C истинно на x;
(5) если $x \in \nu$, то $\Diamond\Box$C истинно на x.

Фиксируем некоторое $u \in \nu$. Из (3), (5) и того факта, что каждый подстановочный пример схемы Dum справедлив на u, следует, что для некоторого v, такого, что uRv, имеет место

(6) $\Box$(C $\to \Box$C) истинно на v;
(7) C ложно на v.

При наличии (4) и (7) $[v]$ не может следовать за C; следовательно, $[v] \in$ C. Но тогда, согласно (1), существует некоторое $w \in \mu$, такое, что vRw. Согласно (2) и (6), получаем

(8) $\Box$C истинно на w.

Согласно (1), существует некоторое $t \in \nu$, такое, что wRt. Благодаря (8) C истинно на t. Однако это противоречит (3). Доказательство закончено.

С помощью рассуждения, аналогичного тому, которое привело нас к теореме 1.7, мы можем теперь доказать:

Теорема 1.10. S4.3Dum *детерминируется посредством* $\langle N \leqq \rangle$, *а также посредством* $\langle Z, \leqq \rangle$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем, так же как и доказательство следующей, связанной с предыдущей, теоремы.

Теорема 1.11. S4.3 *Grz детерминируется классом всех конечных линейных порядков.*

Другим путем выражения содержания последней теоремы было бы утверждение о том, что S4.3*Grz* детерминируется посредством $\langle N, \geqq \rangle$ и классом всех неупорядоченных структур.

В сфере мономодальной логики у нас остается еще только вопрос о круговом времени. Этот вопрос может быть поставлен точно относительно логик, детерминированных классом всех моделей $\langle Z, \leqq, V \rangle$ (соответственно классом всех моделей $\langle Z, <, V \rangle$), таким, что для некоторого положительного числа p, для каждого n, $\forall x \forall y\,(x, y \in V(n) \Rightarrow x \equiv y\,(mod\ p))$.

Интересно, что ответ на этот вопрос не зависит от того, требуется ли от отношения альтернативности быть рефлексивным или иррефлексивным или не требуется,— в любом случае ответом будет S5. Существует простое доказательство, использующее фильтрации и теорему сглаживания.

Можно добавить, что, как показывают наши аргументы, каждая логика, изложенная в этом параграфе, обладает свойством финитности моделей.

§ 2. Бимодальная логика

В данном параграфе множество индексов I будет множеством $2 = \{0, 1\}$, что означает наличие двух исходных модальных операторов $\boxed{0}$ и $\boxed{1}$. Интуитивно мы будем понимать $\boxed{0}$ как оператор прошлого, а $\boxed{1}$ — как оператор будущего. (Наша символика связана с символикой Прайора следующим образом: $\boxed{0} = H$, $\Diamond_0 = P$, $\boxed{1} = G$, $\Diamond_1 = F$.) Мы принимаем обычные сокращения: $\Box$A вместо A $\wedge \boxed{0}$A $\wedge \boxed{1}$A и $\Diamond$A вместо A $\vee \Diamond_0$A $\vee \Diamond_1$A. Под структурами и моделями мы понимаем биструктуры и бимодели, которые мы записываем как $\langle U, R_0, R_1 \rangle$ и $\langle U, R_0, R_1, V \rangle$. Ради простоты мы обычно пишем L (как в „left") вместо R_0 и R (как в „right") вместо R_1. Особый интерес для временно́й логики представляют те структуры, в которых L и R являются конверсными по отношению друг к другу. Эти структуры мы предлагаем называть структурами Прайора. В контексте транзитивных структур Прайора мы будем использовать содержательную терминологию такого же рода, как и в предыдущем параграфе. Например, можно говорить, что y позже, чем x, если xRy, и неверно xLy, что x является первым в множестве C, если x есть R-первый в C, и т. д.

Из того, что было сказано в § 0, следует, что K^2 — наименьшая нормальная бимодальная логика — детерминируется классом всех структур. Используя обычную процедуру анализа канонических моделей, легко найти результаты полноты для большого числа других нормальных логик. Мы приводим список избранных схем, соединенных с соответствующими условиями. Таким образом, если все подстановочные примеры одной из таких схем являются теоремами определенной нормальной логики, то каноническая модель для этой логики обладает соответствующим свойством.

C_0. $\Diamond\boxed{1}A \to A$. $R \subseteq \breve{L}$.

C_1. $\Diamond\boxed{0}$. $A \to A$. $L \subseteq R$.

D_0. $\Diamond T$. L сериально.

D_1. $\Diamond T$. R сериально.

T_0. $\boxed{0}A \to A$. L рефлексивно.

T_1. $\boxed{1}A \to A$. R рефлексивно.

Y_0. $\boxed{0}A \to \boxed{0}\boxed{0}A$. L транзитивно.

Y_1. $\boxed{1}A \to \boxed{1}\boxed{1}A$. R транзитивно.

A_0. $\boxed{0}\boxed{0}A \to \boxed{0}A$. L псевдоплотно.

A_1. $\boxed{1}\boxed{1}A \to \boxed{1}A$. R псевдоплотно.

L_0. $\Box A \to \boxed{0}\boxed{1}A$ $\forall x \forall y \forall z\,(xRyLz \Rightarrow x = z$ или xRz или $xLz)$.

L_1. $\Box A \to \boxed{1}\boxed{0}A$. $\forall x \forall y \forall z\,(xLyRz \Rightarrow x = z$ или xRz или $xLz)$.

Мы будем называть логики как можно проще. Примем соглашение о том, что если S_0 и S_1 являются дуальными схемами, а L — нормальной логикой, то мы пишем LS вместо LS_0S_1 для обозначения наименьшего нормального расширения L, которое содержит все подстановочные примеры S_0 и S_1. (Буква L выполняет у нас большую работу: в качестве параметра, относящегося к нормальным модальным логикам, в качестве сокращения для «L_0L_1», в качестве параметра отношений в структурах. Надеемся, что это не вызовет недоразумений.)

Вышеприведенные результаты можно расширить. K^2C детерминируется классом всех прайоровских структур, а K^2C4 — известная как минимальная временна́я логика K_t Леммона — классом всех транзитивных структур Прайора. Используя теорему порождения, мы могли бы легко доказать, что $\mathrm{Lin} = K^2C4L$ детерминируется классом всех связных транзитивных прайоровских структур и что $\mathrm{Lin}\,T$ детерминируется классом всех связных, рефлексивных, транзитивных прайоровских структур. Последние две системы мы рассматриваем как базисные нормальные временны́е логики бимодальной категории, так как, используя теорему сглаживания, можно доказать, что Lin детерминируется классом всех строго линейно упорядоченных прайоровских структур, а $\mathrm{Lin}\ T$ — классами всех линейно упорядоченных прайоровских структур.

Для уяснения этого пункта обратимся к теории фильтрации. Прайоровские фильтрации в бимодальных контекстах будут играть ту же самую роль, которую леммоновская фильтрация играет в мономодальном контексте. Прайоровскую фильтрацию мы определяем следующим образом. Пусть $\mathfrak{U} = \langle U, L, R, V\rangle$ будет моделью и $\mathfrak{U}' = \langle U'\ L',\ R'\ V'\rangle$ — фильтрацией $\mathfrak{U}$ посредством некоторого множества Ψ формул, которое замкнуто относительно подформул. Тогда $\mathfrak{U}'$ будет *прайоровской фильтрацией*, если и только если для всяких $x, y \in U$ $[x]R'[y]$, если и только если $[y]L'[x]$; и если для всякой формулы A, если $\boxed{0}A \in \Psi$ и $\boxed{0}A$ истинна в $\mathfrak{U}$ на x, то A и $\boxed{0}A$ истинны на y, и если $\boxed{1}A \in \Psi$ и $\boxed{1}A$ истинна в $\mathfrak{U}$ на y, то A и $\boxed{1}A$ истинны на x. Прайоровская фильтрация существует, если $\mathfrak{U}$ является транзитивной прайоровской моделью. Заметим, что прайоровские фильтрации являются транзитивными прайоровскими моделями. Так как упорядоченность и рефлексивность наследуются всеми фильтрациями, мы заключаем, что Lin детерминируется классом всех конечных упорядоченных транзитивных прайоровских структур, а Lin T — классом всех конечных упорядоченных рефлексивных транзитивных прайоровских структур. Эти результаты образуют исходный пункт нашего исследования в настоящем параграфе. Другим способом выражения таких результатов может быть следующий. В транзитивной прайоровской структуре L-скопление является R-скоплением, и наоборот; поэтому мы можем говорить о скоплениях, опуская префикс. Не-теорема Lin проваливается в некоторой конечной упорядоченной транзитивной прайоровской структуре, которая может содержать скопления, а может и не содержать их, в то время как не-теорема $\mathrm{Lin}\,T$ проваливается в некоторой линейно упорядоченной прайоровской модели, содержащей конечное множество конечных скоплений.

Используя теорему сглаживания, мы можем теперь вывести два интересных результата полноты. Поскольку доказательства просты и совершенно аналогичны соответствующим доказательствам § 1, мы их опускаем.

Теорема 2.1. *$\mathrm{Lin}\,T$ детерминируется посредством $\langle Rat, \geqq, \leqq\rangle$, а $\mathrm{Lin}\,DA$ — посредством $\langle Rat, >, <\rangle$.*

Опущенное доказательство второй части этой теоремы опирается на тот факт, что фильтрации (подмоделей) канонических моделей для нормальных расширений Lin DA не содержат смежных иррефлексивных элементов. Если бы мы могли найти некоторое расширение, такое, что фильтрации не содержали бы также смежных скоплений, мы могли бы решить проблему полноты для строго непрерывного времени. Предположим, например, что $\mathfrak{U} = \langle U, L, R, V \rangle$ является конечной связной транзитивной прайоровской моделью с начальным и финальным скоплениями, не содержащей ни смежных иррефлексивных элементов, ни смежных скоплений. Погружаем каждое скопление в различные отображения реального интервала $(0, 1]$ и применяем теорему сглаживания с ζ для каждого α. Предполагая, что сумма скоплений и иррефлексивных элементов в $\mathfrak{U}$ равна m (обязательно нечетное!), заключаем, что образовавшаяся эквивалентная строго линейно упорядоченная модель обладает типом $\tau = \tau_1 + \ldots \ldots + \tau_m$, где τ_i есть $(\lambda+1)\cdot\zeta = \lambda$, если i нечетное, и τ_i есть 1, если i четное. Следовательно, $\tau = \lambda$.

Двумя схемами, которые могут быть использованы для этой цели, являются следующие:

$$S_0 \cdot (\diamondsuit A \leftrightarrow \boxed{0} A) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Box A);$$
$$S_1 \cdot (\diamondsuit A \leftrightarrow \boxed{1} A) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Box A).$$

Эти схемы не только дуальны, но и эквивалентны. Легко проверить, что они значимы в $\langle Re, >, < \rangle$.

Хотя и можно доказать, что каноническая модель для Lin и DAS не содержит смежных скоплений, но, кажется, не существует способа устранить возможность того, что такие группы существуют в фильтрации этой модели или ее подмоделей. Однако можно показать, что эти фильтрации обладают некоторой разновидностью дедекиндовой полноты, которой будет достаточно для целей доказательства полноты Lin DAS.

Предположения для всех лемм этого параграфа. *L является нормальным расширением Lin. Ψ есть конечное множество формул, замкнутое по свойству подформульности. $\mathfrak{M} = \langle U, L, R, V \rangle$ — порожденная подмодель канонической модели для L, $\mathfrak{M}' = \langle U', L', R', V' \rangle$ есть прайоровская фильтрация $\mathfrak{M}$ через Ψ.*

Лемма 2.2. *Предположим, что* Lin $DAS \subseteq L$ *и что* C *и* D *являются смежными скоплениями в $\mathfrak{M}'$, причем* C *непосредственно предшествует* D. *Тогда существует иррефлексивный элемент, который является либо последним в $\{x\colon [x] \in C\}$, либо первым в $\{x\colon [x] \in D\}$.*

Доказательство. Возьмем любые $\xi \in C$ и $\eta \in D$; тогда $\xi R' \eta$ и неверно, что $\eta R' \xi$. Поскольку неверно, что $\eta R' \xi$, то существует некоторое A, такое, что либо (i) $\boxed{0} A \in \Psi$ и $\boxed{0} A$ истинна в $\mathfrak{M}'$ на ξ, но A и $\boxed{0} A$ не являются истинными на η, либо (ii) $\boxed{1} A \in \Psi$ и $\boxed{1} A$ истинна в $\mathfrak{M}'$ на η, но A и $\boxed{1} A$ не будут вместе истинны на ξ. Эти два случая аналогичны, и мы рассмотрим только один из них, скажем (i).

Если $\boxed{0} A$ истинна на η, то на η истинна и A, так как R' универсально на D, следовательно, $\boxed{0} A$ ложна на η. Так как C и D смежны и $\boxed{0} A$ истинна повсюду в C, существует некоторый элемент в D, на котором A проваливается. Не теряя общности, мы можем принять, что таким элементом будет η.

Пусть $x \in \xi$ и $y \in \eta$; очевидно, xRy. Согласно теореме фильтрации, $\boxed{0} A$ истинна на x в $\mathfrak{M}$ и $\boxed{0} A$ и A обе ложны на y. Следовательно, $\Diamond \boxed{0} A$ истинна на x, в то время как $\Box \boxed{0} A$ не истинна. Таким образом, согласно S_0, $\Box (\diamondsuit \Box A \leftrightarrow \boxed{0} \boxed{0} A)$ проваливается на x. Имеются два случая, которые нужно рассмотреть.

Случай (a). Для некоторого z, такого, что $x = z$, или xLz, или xRz, $\diamondsuit \boxed{0} A$ истинна на z и $\boxed{0} \boxed{0} A$ ложна. Из этого следует, что существует некоторый элемент u, такой, что zRu и $\boxed{0} A$ справедливо на u, а также что существует некоторый элемент v, такой, что xLv и $\boxed{0} A$ проваливается на v. Поскольку $\mathfrak{M}$ является транзитивной прайоровской моделью, это абсурдно. Поэтому такой случай не может возникнуть.

Случай (b). Для некоторого z, такого, что $x = z$, или xLz, или xRz, $\diamondsuit \boxed{0} A$ ложна на z и $\boxed{0} \boxed{0} A$ истинна на z. Очевидно, что z иррефлексивен. Кроме того, xLz невозможно, поэтому $x = z$ или xRz. Аналогично, yRz невозможно, поэтому $y = z$ или yLz. Так как C и D смежны, это означает, что $[z] \in C$ или $[z] \in D$. Если $[z] \in C$ и zRu для некоторого u, то тот факт, что $\diamondsuit \boxed{0} A$ ложна на z, влечет, что $\boxed{0} A$ ложна на u. Согласно теореме фильтрации, $\boxed{0} A$ проваливается на $[u]$, поэтому $[u] \notin C$. С другой стороны, если $[z] \in D$ и zLv для некоторого v, то аналогичное рассуждение показывает, что $[v] \notin D$.

На этом доказательство леммы заканчивается.

Пусть L, Ψ, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ будут такими же, как в лемме 2.2. Новую модель $\mathfrak{M}^* = \langle U^*, L^*, R^*, V^* \rangle$ мы определяем следующим образом. Элементами U^* являются элементы U' плюс — для каждой пары смежных скоплений в $\mathfrak{M}'$ — иррефлексивный элемент, выделяемый предшествующей леммой. Функцию $f: U^* \to U'$ мы определяем следующим равенством:

$$f(\mu) = \begin{cases} \mu, & \text{если } \mu \in U', \\ [\mu], & \text{если } \mu \notin U'. \end{cases}$$

Очевидно, что f является „отображением на". Мы устанавливаем, что $\mu\ R^* \nu$, если и только если $\nu L^* \mu$, если и только если $f\mu R' f\nu$ и $(\mu \neq f\mu$ и $\nu = f\nu \Rightarrow \exists z\,(z \in \nu$ и $\mu R z))$. V^* определена для всякого n посредством $V^*(n) = \{\mu : f\mu \in V'(n)\}$. Нетрудно доказать, что для всякого $\mu \in U^*$ и для всякого $A \in \Psi$ A истинно на μ в $\mathfrak{M}^*$, если и только если A истинна на $f\mu$ в $\mathfrak{M}'$. Другими словами, $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}^*$ эквивалентны по модулю Ψ. В то же самое время $\mathfrak{M}^*$ относится к тому же виду моделей, который был рассмотрен на с. 193: является конечной связной транзитивной прайоровской моделью с первым и финальным скоплениями, не имеющей смежных элементов и смежных скоплений. Отсюда мы заключаем:

Теорема 2.3. Lin DAS *детерминируется посредством* $\langle Re, >, < \rangle$.

Теперь мы обращаемся к непрерывному линейному времени. Сначала следует определить проблему. Пусть дана конечная связная рефлексивная транзитивная модель, не содержащая двух смежных собственных скоплений. Применяем к этой модели теорему сглаживания, погружая каждое собственное скопление в различные образы реального интервала $(0,1]$ и каждое не-собственное скопление — в различные образы одного из реальных интервалов $(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1)$, $[0,1]$ в зависимости от его окружения. Читатель может проверить, что погружения для не-собственных скоплений можно выбрать таким образом, что структура модели, получившейся в результате сглаживания, будет изоморфна $\langle Re, \geqq, \leqq \rangle$.

Опираясь на эту основу, рассмотрим следующую схему

$$\text{K}.\ \Diamond A \wedge \Diamond \neg A \wedge \Box(\boxed{0} A \vee \boxed{1} \neg A \rightarrow \Diamond(\boxed{0} A \wedge$$
$$\wedge (B \rightarrow \boxed{1}(A \rightarrow B)) \wedge (\neg B \rightarrow \boxed{1}(A \rightarrow B))) \vee$$
$$\vee \Diamond(\boxed{1} \neg A \wedge (C \rightarrow \boxed{0}(\neg A \rightarrow C)) \vee (\neg C \rightarrow \boxed{0}(\neg A \rightarrow \neg C)))$$

Мы замечаем, что K эквивалентна своему собственному дуалу и что каждый подстановочный пример K значим в $\langle Re, \geqq, \leqq \rangle$.

Введем следующую терминологию: $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ предполагаются такими же, как и прежде. Если C является скоплением в $\mathfrak{M}'$ и $\zeta \in C$, то ζ называется виртуально финальным в C, если существует некоторый $x \in \zeta$, такой, что для всякого u, если zRu и $[u] \in C$, то $\zeta = [u]$. Аналогично, ζ называется виртуально первым в C, если $\zeta \in C$ и существует некоторый $z \in \zeta$, такой, что для всякого u, если uRz и $[u] \in C$, то $\zeta = [u]$. Тривиально, что не-собственные скопления всегда имеют виртуально первый и виртуально финальный элемент.

Лемма 2.4. *Предположим, что* $L \subseteq$ Lin TK *и* C *и* D *являются смежными скоплениями в* $\mathfrak{M}'$, *такими, что* C *непосредственно предшествует* D. *Тогда либо* C *содержит виртуально финальный элемент, либо* D *содержит виртуально первый.*

Доказательство. В противоположность тому, что утверждает лемма, предположим, что C не имеет виртуально финального элемента, а D не имеет виртуально первого. Так как C и D конечны, должны существовать $\xi_1 \xi_2 \in C$, $\xi_1 \neq \xi_2$ и $\eta_1 \eta_2 \in D$, $\eta_1 \neq \eta_2$, такие, что для $i = 1, 2$

$$\forall x \exists y\,([x] \in C \Rightarrow y \in \xi_i \quad \text{и} \quad xRy);$$
$$\forall x \exists y\,([x] \in D \Rightarrow y \in D \Rightarrow y \in \eta_i \quad \text{и} \quad yRx).$$

Поскольку $\mathfrak{M}'$ является фильтрацией $\mathfrak{M}$ через Ψ, постольку должны существовать B, C $\in \Psi$, такие, что B истинна в $\mathfrak{M}'$ на ξ_1, но не на ξ_2 и C истинна на η_1, но не на η_2. Из того факта, что C раньше D, мы заключаем, что или (i) существует некоторая формула $\boxed{0} A \in \Psi$, такая, что $\boxed{0} A$ истинна везде в C и ложна везде в D, или (ii) существует некоторая формула $\boxed{1} A \in \Psi$, такая, что $\boxed{1} A$ истинна везде в D и ложна везде в C. Эти случаи аналогичны, и мы рассмотрим только один из них, скажем (i). Ясно, что $\Diamond \boxed{0} A$ и $\Diamond \neg \boxed{0} A$ повсюду истинны в $\mathfrak{M}$, а так как C и D смежны, то также ясно, что $\Box(\boxed{0}\boxed{0} A \wedge \boxed{1} \neg \boxed{0} A)$ справедлива повсюду в $\mathfrak{M}$. Следовательно, мы можем использовать новую аксиомную схему K (с $\boxed{0} A$ вместо A). Существуют два случая, согласно тому, какой из двух дизъюнктивных членов консеквента К является истинным.

В случае, когда истинен первый дизъюнктивный член, существует некоторый элемент u, такой, что $\boxed{0}\boxed{u}\mathrm{A}$ истинна в $\mathfrak{M}$ на u, так же как истины $\mathrm{B} \to \boxed{0}(\boxed{0}\mathrm{A} \to \mathrm{B})$ и $\neg \mathrm{B} \to \boxed{1}(\boxed{0}\mathrm{A} \to \neg \mathrm{B})$. Благодаря рефлексивности L $\boxed{0}\mathrm{A}$ истинна на u, следовательно, согласно теореме фильтрации, $[u]$ должно быть раньше D. Тогда должны существовать элементы $x_1 \in \xi_1$ и $x_2 \in \xi_2$, такие, что uRx_1 и uRx_2. Но тогда в зависимости от того, истинна или ложна В на u в $\mathfrak{M}$, либо В истинна на x_2, либо В ложна на x_1. Согласно теореме фильтрации, это абсурдно.

Случай, когда истинен другой дизъюнктивный член консеквента К, аналогичен рассмотренному.

На этом доказательство леммы 2.4 заканчивается.

Пусть L, Ψ, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ будут такими же, как в предшествующей лемме. Для каждой пары смежных собственных скоплений С и D выберем новый объект $g(\mathrm{C}, \mathrm{D})$. Пусть U^* будет объединением U' и области функции g. Определяем функцию $f: U^* \to U'$, устанавливая, что $f\mu = \mu$ в случае, когда $\mu \in U'$, и если $\mu = g(\mathrm{C}, D)$, то $f\mu$ будет виртуально финальным элементом в С, если таковой существует, и виртуально первым элементом в D в противоположном случае. Благодаря лемме 2.4 f всюду определена. Ясно, что f является „отображением на“. Мы определяем, что $\mu R^* \nu$, если и только если $\nu L^* \mu$, если и только если $f\mu R' f\nu$ и если $\mu = g(CD)$, $\mu \neq \nu$, а $f\nu$ — виртуально финальный в С, то $f\nu \notin \mathrm{C}$, а если $\nu = g(\mathrm{C}, D)$, $\mu \neq \nu$ и $f\nu$ — виртуально первый элемент в D, то $f\mu \notin D$. И наконец, определяем $V^*(n) = \{\mu : f\mu \in V'(n)\}$ для всякого n. Все это представляет собой точное объяснение того, что модель $\mathfrak{M}^* = \langle U^*, L^*, R^*, V^* \rangle$ получается посредством помещения между двумя любыми смежными собственными скоплениями в $\mathfrak{M}'$ нового элемента, который ведет себя подобно соответствующим виртуально финальному или виртуально первому элементу. Значение этого построения заключается в том, что $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}^*$ эквивалентны по модулю Ψ, так как если $\mathrm{A} \in \Psi$ и $\mu \in U^*$, то А истинна на μ в $\mathfrak{M}^*$, если и только если А истинна на $f\mu$ в $\mathfrak{M}'$. Вместе с предыдущими замечаниями это оправдывает следующее утверждение:

Теорема 2.5. Lin TK *детерминируется посредством* $\langle Re, \geqq, \leqq \rangle$.

Теперь мы обратимся к дискретному линейному времени и рассмотрим следующие аксиомные схемы:

Dum_0. $\boxed{0}(\boxed{0}(\mathrm{A} \to \boxed{0}\mathrm{A}) \to \mathrm{A}) \to (\Diamond\boxed{0}\mathrm{A} \to \mathrm{A})$.

Dum_1. $\boxed{1}(\boxed{1}(\mathrm{A} \to \boxed{1}\mathrm{A}) \to \mathrm{A}) \to (\Diamond\boxed{1}\mathrm{A} \to \mathrm{A})$.

Grz_0 $\boxed{0}(\boxed{0}(\mathrm{A} \to \boxed{0}\mathrm{A}) \to \mathrm{A}) \to \mathrm{A}$.

Grz_1 $\boxed{1}(\boxed{1}(\mathrm{A} \to \boxed{0}\mathrm{A}) \to \mathrm{A}) \to \mathrm{A}$.

Результаты для мономодальных прототипов этих схем нельзя автоматически перенести на бимодальную логику, так как в мономодальном случае мы имеем дело с леммоновскими фильтрациями, в то время как теперь имеем дело с прайоровскими фильтрациями. Однако бимодальный вариант леммы 1.9 имеет предполагаемую форму, и, поскольку доказательство аналогично, мы сформулируем только результат.

Лемма 2.6. *Предположим, что* $L \subseteq \mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Dum}_0$ $(\mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Dum}_1)$ *и что* С *является собственным не начальным* (*не конечным*) *скоплением в* $\mathfrak{M}'$. *Тогда в* С *существует виртуально первый* (*последний*) *элемент.*

Если в формулировке этой леммы Dum_0 (Dum_1) заменено на Grz_0 (Grz_1), то слова „не начальный“ („не конечный“) можно вычеркнуть.

Из леммы 2.6 и данного замечания различные результаты полноты могут быть выведены посредством разумного использования техники сглаживания. К ним относится и тот факт, что $\mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Dum}_0$ $(\mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Dum}_1)$ детерминируется классом всех линейных прайоровских структур, который не содержит никакой подструктуры типа $1 + {}^*\omega(\omega + 1)$. Более важной все-таки представляется:

Теорема 2.7. $\mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Dum}$ *детерминируется посредством* $\langle Z, \geqq, \leqq \rangle$.

Будем говорить, что линейная прайоровская структура $\langle U, L, R \rangle$ является вполне упорядоченной, если R вполне упорядочено, и анти-вполне упорядоченной, если L вполне упорядочено. Тогда $\mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Grz}_0$ детерминируется классом всех вполне упорядоченных структур, а $\mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Grz}_1$ — классом всех анти-вполне упорядоченных структур. Здесь существует также более важный результат:

Теорема 2.8. $\mathrm{Lin}\,T\,\mathrm{Grz}$ *детерминируется классом всех конечно линейно упорядоченных прайоровских структур.*

Без доказательства мы упоминаем о том, что введение схем

$$M_0.\ \Diamond_0 (\Diamond_0 A \to \boxed{0} A);$$
$$M_1.\ \Diamond_1 (\Diamond_1 A \to \boxed{1} A)$$

позволяет использовать данную технику для обоснования того, что $\mathrm{Lin}\, T\, \mathrm{Dum}\, M_0$ детерминируется посредством $\langle N, \geq, \leq \rangle$ и $\mathrm{Lin}\, T\, \mathrm{Dum}\, M_1$ — посредством $\langle N, \leq, \geq \rangle$ [1]. Заметим, что $\mathrm{Lin}\, T\, \mathrm{Dum}\, M = \mathrm{Lin}\, T\, \mathrm{Grz}$.

В нашем анализе дискретного строго линейного времени используются следующие схемы:

$$Z_0.\ \boxed{0} (\boxed{0} A \to A) \to (\Diamond_0 \boxed{0} A \to \boxed{0} A);$$
$$Z_1.\ \boxed{1} (\boxed{1} A \to A) \to (\Diamond_1 \boxed{1} A \to \boxed{1} A);$$
$$W_0.\ \boxed{0} (\boxed{0} A \to A) \to \boxed{0} A;$$
$$W_1.\ \boxed{1} (\boxed{1} A \to A) \to \boxed{1} A.$$

Анализ этих схем аналогичен анализу соответствующих схем в мономодальной логике, и мы ограничимся формулировкой бимодального аналога леммы 1.6:

Лемма 2.9. *Предположим, что* $L \subseteq \mathrm{Lin}\, Z_0\, (\mathrm{Lin}\, Z_1)$ *и что* C *является не начальной* (*не конечной*) *группой в* $\mathfrak{M}'$. *Тогда существует первый* (*последний*) *элемент в* $\{z : [z] \in C\}$, *который будет иррефлексивным.*

Отсюда следует, что $\mathrm{Lin}\, Z_0\, (\mathrm{Lin}\, Z_1)$ детерминируется классом строго линейных прайоровских структур, который не содержит подструктур типа $1 + {}^*\omega(\omega + 1)$. $\mathrm{Lin}\, Z$ детерминируется классом строго линейных прайоровских структур, чей порядковый тип является конечным, или есть ω, или ${}^*\omega$, или ζ. Аналогично $\mathrm{Lin}\, W_0\, (\mathrm{Lin}\, W_1)$ детерминируется классом строго вполне упорядоченных прайоровских структур (строго анти-вполне упорядоченных прайоровских структур). Этот результат, может быть, стоит выделить:

Теорема 2.10. $\mathrm{Lin}\, W$ *детерминируется классом конечных строго линейных прайоровских структур.*

Мы все еще не получили строгих логик, которые имеют дело с натуральными или целыми числами. Поэтому рассмотрим такие формулы:

$$E_0.\ \Diamond \boxed{0} \perp;$$
$$E_1.\ \Diamond \boxed{1} \perp.$$

[1] Ср. [8].

Поскольку данная статья оказалась достаточно длинной, мы опускаем полное описание анализа этих формул.

Можно показать, что $\mathrm{Lin}\, ZD_1E_0\, (\mathrm{Lin}\, ZD_0E_1)$ детерминируется посредством $\langle N, >, < \rangle$ ($\langle N, >, < \rangle$). И последнее:

Теорема 2.11. $\mathrm{Lin}\, ZD$ *детерминируется посредством* $\langle Z, >, < \rangle$.

Отметим, что $\mathrm{Lin}\, ZE = \mathrm{Lin}\, W$.

Теперь остается только вопрос о круговом времени. Ответ заключается в том, что логика, детерминируемая круговым рефлексивным временем, а также круговым иррефлексивным временем, есть $S5^2 = K^2T4B$, где B имеет очевидное значение.

§ 3. Исторические замечания

Логика времени берет свое начало с работы [6] Артура Прайора. Многие вопросы, с которыми он имеет дело в этой статье, были впервые поставлены им, и он же предложил ответы на многие из этих вопросов. Исторически сначала исследовались рефлексивные мономодальные системы; имеется интересное исследование их развития в работе [7] Прайора. Даммет и Леммон [3] и Булл [1] являются основными авторами в этой области. Логика, названная нами S4.3Grz, представляет собой то же самое, что и система D* Макинсона [5], но у этого автора неясно, была ли она аксиоматизирована раньше. Лемма 1.9 и теоремы 1.10 и 1.11 являются специальными случаями результатов, опубликованных в [9], хотя теорема 1.10 была, конечно, доказана раньше Крипке Буллом (см. [1]). По некоторым причинам вопросы полноты для иррефлексивных мономодальных систем не были исследованы, поэтому наши результаты для K4.3, K4.3AD, K4.3 и K4.3 могут быть новыми. (Д-р Кит Файн информировал автора о том, что м-р Патрик Шиндлер из Бальол-Колледжа в Оксфорде независимо получил теорему полноты для логики, тождественной K4.3DZ.) [1]

[1] (Добавлено в корректуре.) После того как эта статья была отправлена в печать, автор обнаружил, что система D* Макинсона отождествляется с S4.3Grz в статье: Schumm G. F. On a modal system of D. Makinson and B. Sobociński,— „Notre Dame journal of formal logic", 1969, vol. 10; p. 263 — 265. Кроме того, теперь опубли-

В области бимодальной временно́й логики основным источником является работа Булла [2], которая действительно содержит все наши результаты, касающиеся иррефлексивности. Работа Габбая [4] посвящена предикатной временно́й логике, но в качестве побочных продуктов содержит некоторые пропозициональные логические результаты. Рефлексивные бимодальные системы не привлекали большого внимания логиков, занимающихся временны́ми логиками. Прайор [7] приписывает Гэмблину определение системы, которая, согласно результату в [4], тождественна Lin T. Другие наши результаты в этой области, в частности для Lin TK, по-видимому, являются новыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bull R. A. An algebraic study of Diodorean modal systems.— „The Journal of Symbolic Logic", vol. 30, 1965, p. 58—64.
2. Bull R. A. An algebraic study of tense logics with linear time.— Ibid., vol. 33, 1968, p. 27—38.
3. Dummet M. A. E. & Lemmon E. J. Modal logics between S4 and S5.— „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", vol. 5, 1959, p. 250—264.
4. Gabbay D. Model theory for tense logics.— U. S. Air Force Office of Scientific Research, contract no. F61052-68-C-0036, report no. 1, April 1969.
5. Makinson D. S. There are infinitely many Diodorean modal functions.— „The Journal of Symbolic Logic", vol. 31, 1966, p. 406—408.
6. Prior A. N. Time and modality. Oxford, 1957.
7. Prior A. N. Past, present and future. Oxford, 1967.
8. Segerberg K. Decidability of S4.1.— „Theoria", vol. 34, 1968, p. 7—20.
9. Segerberg K. On some extensions of S4.— „The Journal of Symbolic Logic", vol. 35, 1970, p. 363.

кована работа: Schindler. Tense logic for discrete future time.— „The journal of symbolic logic" 1970, vol. 35, p. 105—118.

Д. М. Габбай

ОБЩИЙ МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК *

Метод фильтрации (см. [3]) и его различные модификации в модальной и временно́й логиках играют двоякую роль. Во-первых, его можно использовать для доказательства разрешимости различных систем, а во-вторых, для установления результатов о полноте (см. [4]).

Кратко метод фильтрации состоит в следующем. При данной системе $(S, R, 0)$ возможных миров (см. ниже), которая является моделью предложения ψ, мы выбираем конечное множество предложений Θ, связанных с ψ, и переходим от $(S, R, 0)$ к другой модели $(S^*, R^*, 0)$ предложения ψ, которая в зависимости от Θ более или менее подобна S. Это может быть сделано многими способами. В простейшем способе Θ полагается множеством всех подформул ψ и идентифицируются любые два возможных мира, в которых все элементы Θ принимают одинаковые значения и xR^*y определяется как $\forall\alpha\in\Theta$ (если $\Box\alpha$ истинно в x, то α истинно в y). При другом пути выбирается некоторое подмножество S. Способ, которым это делается, зависит от поставленной цели.

Если мы намереваемся применить этот метод для доказательства разрешимости, то хотелось бы, чтобы S^* было конечным множеством и моделью для рассматриваемой системы аксиом. Это главное из того, что делается в дальнейшем. Иногда бывает желательно доказать полноту на некотором множестве возможных миров, например на мно-

* Gabbay D. M. A General Filtration Method for Modal Logics.— „Journal of Philosophical Logic", 1972, № 1, p. 29—34.

жестве целых чисел: в этом случае мы выбираем в качестве S^* множество целых чисел.

Селективная фильтрация связана с специальным выбором S^*, а именно выбором подмножества S. В настоящей статье мы имеем дело как раз с этим методом (см. также мою статью [5]).

Пусть $(S, R, 0)$ будет структурой Крипке, то есть S — множество всех возможных миров, $R \subseteq S \times S$ — отношение достижимости, $0 \in S$ — „настоящий" мир, а $[\ ]$ — двухместная функция, такая, что для всех $x \in S$ и всех пропозициональных переменных $[\gamma]_x$ равно либо 1, либо 0 (истине или лжи). Истинностное значение формулы φ в мире x обозначается через $[\varphi]_x$.

Пусть X — модальная логика, семантика которой характеризуется некоторым множеством условий на R. Будем говорить, что X *допускает фильтрацию*, если для всякой модели $(S, R, 0)$ предложения ψ, являющейся моделью X, можно построить конечную модель $(S^*, R^*, 0^*)$ для ψ, удовлетворяющую тем же условиям.

Очевидно, всякая система, которая допускает фильтрацию, обладает свойством финитной аппроксимируемости, а не наоборот (например, логика S4.3 финитно аппроксимируема, но не допускает фильтрации относительно линейного отношения R).

В этой статье дается общий метод построения (S^*, R^*) из (S, R), действующий *одновременно* во многих семействах систем, среди которых такие хорошо известные системы, как K, T, B, S4, S4.1, S4.2, S5 и другие (см. различные теоремы ниже).

Обычная фильтрация была введена Леммоном и Скоттом [3], модифицирована затем Сегербергом [2] и мною [1], [4].

Пусть $(S, R, 0)$ — модель ψ. Предположим, что R удовлетворяет некоторому множеству условий P, которое характеризует отдельную рассматриваемую систему. Мы хотим получить из нее систему $(S^*, R^*, 0^*)$, такую, что R^* удовлетворяет тому же ряду условий, что R, и являющуюся моделью ψ. С этой целью рассмотрим два *конечных* множества формул Δ и Θ; Δ является множеством, служащим для построения S^*, а Θ — множеством для определения R^*. Мы *всегда предполагаем*, что оба множества Δ и Θ, содержат ψ и замкнуты относительно отрицания конъюнкции и взятия подформул. Для различных систем мы делаем различные предположения о Δ и Θ и в некоторых случаях используется промежуточное отношение R^+.

Теорема 1. Пусть K — модальная система с аксиомой $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ и правилом $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \Box\varphi$, тогда следующие расширения K допускают фильтрацию:

(a): K; (b): T; (c): B; (d): S4; (e): S5;

(f): $S4.1 = S4 + \Diamond\Box\varphi \vee \Diamond\Box \sim \varphi$;

(g): $S4.2 = S4 + \Box\Diamond\varphi \vee \Box\Diamond \sim \varphi$.

Доказательство. Предположим, $\Delta = \Theta$. Определим

(2) $x \equiv y$, если и только если $\forall\beta \in \Delta([\beta]_x = [\beta]_y)$.

Пусть x^* обозначает класс эквивалентности (относительно $\equiv$), содержащий x, а $\lfloor(y^*)$ обозначает формулу $(\exists y \in y^*) \forall z(yRz \to y = z)$;

положим,

(3) $x^*R^+y^*$, если и только если $(\exists x^1 \in x^*)(\exists y^1 \in y^*)(x^1Ry^1)$, и положим, $x^*R_1^+y^*$ означает $x^*R^+y^* \wedge \sim \lfloor(x^*)$.

Для пропозициональной переменной $\gamma \in \Delta$ определяем $[\gamma]^+_{x^*} = [\gamma]_x$.

Лемма 4. Для каждой подформулы φ формулы ψ имеет место $[\varphi]_x = [\varphi]^+_{x^*}$.

Доказательство. Проводится по индукции. Случаи атомной φ, а также $\sim$ и $\wedge$ не представляют трудности. Пусть $[\Box\varphi]_x = 1$; так как $\Box\varphi \in \Delta$, то $[\Box\varphi]_{x^1} = 1$ для каждого $x^1 \in x^*$. Если $x^*R^+y^*$, то x^1Ry^1 для некоторого $x^1 \in x^*$ и некоторого $y^1 \in y^*$, откуда $[\varphi]_{y^1} = 1$ и $[\varphi]_{y^1} = 1$.

Пусть $[\Box\varphi]_x = 0$ и $\sim \lfloor(x^*)$, тогда для некоторого y, такого, что xRy, $[\varphi]_y = 0$, и $x^*R^+y^*$, и $[\varphi]_{y^*} = 0$. Заметим, что если $\lfloor(x^*)$ и $[\Box\varphi]_x = 0$, то можно взять $y = x$.

Проверим теперь каждое утверждение теоремы. Покажем, что если R удовлетворяет условию P, то ему удовлетворяет также R^*.

(a) Система K полна относительно R без всяких ограничений, и $(S^*, R^+, 0^*)$ будет моделью K.

(b) Система T полна для рефлексивного R, и из рефлексивности R следует рефлексивность R^+, и $(S^*, R^+, 0^*)$ будет моделью T.

(c) Система B полна для симметричного отношения R. Опять из симметричности R вытекает симметричность R^+.

(d) S4 является полной системой для транзитивного и рефлексивного отношения R. Отношение R^+ не обязательно транзитивно, поэтому вводится R^* — транзитивное замыкание R^+. Надо доказать следующее:

Лемму 5. Если $x^*R^+y^*$ и $[\Box\varphi]^+_{x^*}=1$ для $\Box\varphi$ подформулы ψ, то $[\Box\varphi]^+_{y^*}=1$.

Доказательство. Так как $\Box\varphi$ есть подформула ψ, то, согласно лемме 4, $[\Box\varphi]_{x^*}=[\Box\varphi]_{x^1}$ для каждого $x^1\in x^*$. Так как $x^*R^+y^*$, то для некоторых $x^1\in x^*$ и $y^1\in y^*$ x^1Ry^1.

Теперь $[\Box\varphi]_{x^1}=1\Rightarrow[\Box\Box\varphi]_{x^1}=1\Rightarrow[\Box\varphi]_{y^1}=1\Rightarrow[\Box\varphi]^+_{y^*}=1$. Получаем по индукции, что $(x^*R^*z^*\wedge\wedge[\Box\varphi]^+_{x^*}=1)$. Последнее свойство дает $[\Box\varphi]^+_{x^*}=[\Box\varphi]^*_{x^*}$ для φ, являющейся подформулой ψ. Отношение R^* транзитивно и рефлексивно, так что (d) доказано.

(e) Система S5 полна для $\forall xy(xRy)$. Надо выбрать $R^*=S^*\times S^*$.

(f) Система S4.1 полна для рефлексивного и транзитивного R со следующим дополнительным условием (полнота может быть доказана с помощью метода Хенкина):

$$\forall x\exists y\ (xRy\wedge\forall z)\ (yRz\to y=z)).$$

Выберем R^* как транзитивное рефлексивное замыкание R_1^+. Очевидно, если для x^+ выбрать $x\in x^+$ и y как любой элемент S, удовлетворяющий условию, то по определению R_1^+ получим $y^*R_1^+z^*\to y^*=z^*$.

(g) Система S4.2 полна относительно рефлексивного и транзитивного R и следующего дополнительного условия (полнота может быть доказана с помощью метода Хенкина).

$$\forall xy\,\exists z\,(xRz\wedge yRz).$$

Возьмем R^* такое же, как в случае S4. Очевидно, для $x\in x^*$ и $y\in y^*$ можно найти такое z, что $x^*R^+z^*\wedge y^*R^+z^*$.

Теорема 6. Пусть X является расширением K, либо T или B, семантика которого характеризуется дополнительным условием на R вида (7); тогда X допускает фильтрацию и будет разрешимой системой (хотя может даже не быть финитно аксиоматизируемой):

$$(7)\quad (\forall x_i\ldots x_n)(\vee_j\wedge_i z_{i,j}Rt_{i,j}\to\exists y_i\ldots y_mM),$$

где z и t выбраны из $x_i\ldots x_n$, а формула M — в терминах R, равенства, $x_i\,(1\leqslant i\leqslant n)$, $y_j\,(1\leqslant j\leqslant m)$ не содержит кванторов, отрицания и импликации, а в $\wedge_i z_{i,j}Rt_{i,j}$ ни одно переменное не повторяется дважды. Антецедент может быть пустым.

В частности:

(a) $\Box^m\varphi\to\Box\varphi$,

(b) $\Box^m\varphi\to\varphi$,

(c) $\Box^m\varphi\to\Diamond\varphi$

допускают фильтрацию.

Доказательство. Пусть $(S, R, 0)$ является моделью ψ и X, и предположим, что она удовлетворяет также условию (7). Определим $(S^*, R^*, 0^*)$ так же, как в (2) и (3). Мы покажем, что условие (7) выполняется для R^+. Пусть $\wedge_i z^*_{i,j}R^+t^*_{i,j}$. Тогда можно найти $z_{ij}\in z^*_{ij}$, $t_{ij}\in t^*_{ij}$, такие, что $z_{ij}Rt_{ij}$. Это можно сделать потому, что из $x^*R^+y^*$ следует, что для некоторых $x^1\in x^*$, $y^1\in y^*$, x^1Ry^1. Заметим, что, возможно, $x^*=y^*$, но $x^1\neq y^1$; это ничему не мешает.

Поскольку в S выполняется (7), то для некоторых $y_1,\ldots,y_m$ $M(x_1,\ldots,y_1,\ldots)$ также выполняется в S. По индукции по $\vee_j$ и $\wedge_i$ можно доказать, что если в (S,R) выполняется M, то $M(x_1^*,\ldots,y_1^*\ldots)$ выполняется в (S^*,R^+), и доказательство заканчивается. (В случае, когда $x^1\neq y^1$, $x^*=y^*$, но в $M(x^*,y^*)$ они снова оказываются равными, и поэтому, предполагая антецедент для $x^*=y^*$, мы получим консеквент для $x^*=y^*$, хотя в доказательстве мы используем (7) в S для $x^1\neq y^1$.) Заметим, что $\bar{S}^*$ ограничено при данной длине ψ. Условия для выбранных нами систем будут:

(a) $\mu Rv\to\mu R^mv$;

(b) $\mu R^m\mu$;

(c) $\forall\mu\exists v(\mu R^mv\wedge\mu R^nv)$.

Эту теорему стоит сравнить со следующей теоремой (доказанной в [1] с использованием метода, совершенно отличного от данного).

Теорема 7. Пусть X будет расширением K, и семантику X можно характеризовать дополнительным требованием на R вида:

$$(\forall x_1\ldots x_n)(\wedge(\mu_iRv_i)\to M);$$

где M — предложение в языке, содержащем $x_1 \ldots x_n$, равенство и где u_i, v_i выбираются из $x_1 \ldots x_n$; тогда X допускает фильтрацию и является разрешимой системой.

Теорема 8. Система $K + \Box\varphi \to \Box^{m+1}\varphi$ допускает фильтрацию.

Доказательство. Эта система полна для R с условием $\mu R^{m+1} v \to \mu R v$. Пусть $(S, R, 0)$ будет моделью ψ и удовлетворяет этому условию. Построим конечную модель $(S^*, R^*, 0^*)$.

Выберем Δ и Θ такими, что $\Delta \supseteq \Theta$, и если $\beta \in \Theta$, то $\Box^{m+1}\beta \in \Delta$. Определим S^* и R^+, как в (2) и (3). Мы уже знаем, что выполняется (4).

Лемма 9. Пусть $\Box\beta$ является подформулой ψ, и предположим, что $[\Box\beta]_x = 1$ и что $x^* R^{+m} y^*$, тогда для всякого $y \in y^*$ $[\Box\beta]_y = 1$.

Доказательство. Из $\vdash \Box\beta \to \Box^{m+1}\beta$ мы получаем $[\Box^{m+1}\beta]_x = 1$. Выберем $y_1 \ldots y_{m-1}$ такими, что $y_i^* R^+ y_{i+1}^*$, $x^* R^+ y_1^*$ и $y_{m-1}^* R^+ y^*$. Тогда ввиду $x^* R^+ y_1^*$ мы имеем для некоторого $x^1 \equiv x$ и $y_1^1 \equiv y_1$ $x^1 R y_1^1$, а ввиду $\Box^{m+1}\beta \in \Delta$ имеем $[\Box^{m+1}\beta]_{x^1} = 1$ и $[\Box^m \beta]_{y_1^1} = 1$. Продолжая в этом духе, мы придем к $[\Box\beta]_y = 1$. Доказывая по индукции, получаем (10).

(10) Если $x^* R^{+(km+1)} y^*$ (для $k \geqslant 0$) и $[\Box\beta]_x = 1$, то $[\beta]_y = 1$.

Пусть $x^* R^* y^*$ означает $(\exists k \geqslant 0)$ $x^* R^{+(km+1)} y^*$. Согласно теореме 8, получаем

(11) $[\beta]^*_{x^*} = [\beta]^+_{x^*}$ для всякой подформулы β формулы ψ. Для завершения доказательства (6) потребуется:

Лемма 12. $x^* R^{*(m+1)} y^* \to x^* R^* y^*$.

Доказательство вытекает из определения R^*.

Замечание. Конструкция в (4а) приводит к такому же результату для временной логики K_t. K_t полна для семантики вида $(S, R, 0)$ с такими определениями:

$$[G\varphi]_x = 1 \Leftrightarrow \forall y\,(xRy \to [\varphi]_y = 1);$$
$$[H\varphi]_x = 1 \Leftrightarrow \forall y\,(yRx \to [\varphi]_y = 1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gabbay D. M. Selective Filtration in Modal Logics I.— „Theoria", № 36, 1970, p. 323—330.
2. Segerberg K. Decidability of Four Modal Logics.— „Theoria", 1968, p. 21—25.
3. Lemmon E. and Scott D. Intensional Logics. Stanford, 1966.
4. Gabbay D. M. Semantical Methods in Non-Classical Logics, Vol. I.— „Modal and Tense Logics", North—Holland Publishing, Co.
5. Gabbay D. M. Tense Sistems with Discrete Moments of Time.— „Journal of Philosophical Logic", No. 1, 1972, p. 35.

К. Файн

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ КВАНТОРЫ В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ [*1]

В этой статье я представлю некоторые полученные мною результаты относительно модальных теорий, содержащих кванторы по пропозициональным переменным. Статья состоит из двух частей: в первой рассматриваются теории, неквантификационная часть которых есть система S5; во второй части — теории, неквантификационная часть которых слабее S5 или не содержится в ней. Если не оговорено противное, то каждая теория будет иметь один и тот же язык L. Он содержит счетное множество V пропозициональных переменных $p_1, p_2, \ldots$, операторы $\vee$ (или), $\sim$ (не) и $\Box$ (необходимо), квантор общности (p), где p есть пропозициональная переменная, и скобки (и). Правильно построенная формула L определяется обычным образом.

I [2]

1.1 Семантика

В семантике Крипке для S5 [6] высказывание отождествляется с множеством возможных миров, в которых оно истинно. Таким образом, согласно этой точке зрения, пропозициональные квантифицированные переменные (p) пробегают по множеству подмножеств возможных миров. С формальной стороны, структура $\mathfrak{A}$ есть упорядоченная тройка (W, P, v), где W (миры) есть непустое множество, P (суждения) — непустое множество подмножеств W, а v (оценка) — отображение V в P. Тогда определения истинности формулируются таким образом: если $\mathfrak{A}$ есть структура (W, P, v), x — мир, принадлежащий W, а B и C — формулы, то:

(i) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} p_i$, если и только если $x \in v(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots$;

(ii) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} \sim B$, если и только если неверно, что $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} B$;

(iii) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} B \vee C$, если и только если $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} B$ или $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} C$;

(iv) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} \Box B$, если и только если $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{y}{\models}} B$ для всех y в W;

(v) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} (p_i) B$, если и только если $\overset{\mathfrak{A}'}{\underset{x}{\models}} B$ для всех структур $\mathfrak{A}' = (W, p, v)$, таких, что

$$v'(p_j) = v(p_j)$$

для всех $j \neq i$, $i = 1, 2, \ldots$ (Отметим, что $v'(p_i) \in P$ по определению структуры.)

Формула A *истинна* в $\mathfrak{A}$, $\overset{\mathfrak{A}}{\models} A$, если $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{y}{\models}} A$ для всех y в W.

Есть три естественных условия, которые мы можем наложить на P:

(i) P *булево*, то есть замкнуто относительно дополнения и конечного объединения. (Отрицание суждения и дизъюнкция суждений также суть суждения.)

(ii) P *замкнуто относительно формул*, то есть для каждой структуры $\mathfrak{A} = (W, P, v)$ и для каждой формулы A, $\left\{x \in W : \overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} A\right\} \in P$. (Каждая формула при любой интерпретации выражает суждение.)

(iii) P есть *степень-множество* W, то есть множество всех подмножеств W. (Для любого множества миров найдется суждение, истинное именно в этих мирах.)

* Fine Kit. Propositional quantifiers in modal logic.— „Theoria", 1970, vol. 36, p. 1.

[1] Я очень многим обязан покойному Артуру Прайору. Без его поддержки эта статья не была бы написана.

[2] Результаты этой части содержатся в моей диссертации доктора философии, представленной в Уорвикский университет летом 1969 года.

Эти три условия приводят соответственно к трем теориям. Пусть $S5\pi-$ ($S5\pi$; $S5\pi+$) есть множество формул, истинных в каждой структуре $\mathfrak{A}=(W, P, v)$, такой, что P есть булево множество (замкнутое относительно формул; степень-множество W).

Ясно, что $S5\pi - \subseteq S5\pi \subseteq S5\pi +$. Можно также показать, что эти включения являются собственными.

1.2. Аксиоматизируемость

Пусть $AxS5\pi-$ задается следующими аксиомными схемами и правилами вывода:

1. Все тавтологические формулы.
2. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.
3. $\Box A \rightarrow A$.
4. $\sim\Box A \rightarrow \Box\sim\Box A$.
5. $(p)A(p) \rightarrow A(B)$, где B есть формула PC, то есть немодального пропозиционального исчисления, свободная для (подстановки вместо) p в $A(p)$.
6. $(p)(A \rightarrow B) \rightarrow ((p)A \rightarrow (p)B)$.
7. $A \rightarrow (p)A$, где p не свободно в A.

   MP. A, $A \rightarrow B/B$.

   Nec. $A/\Box A$.

   Gen. $A/(p)A$.

$AxS5\pi$ есть $AxS5\pi-$ без схемы 5 ограниченной спецификации, но со спецификацией:

8. $(p)A(p) \rightarrow A(B)$, где B есть *любая* формула, свободная для (подстановки вместо) p в $A(p)$. $AxS5\pi+$ есть $AxS5\pi$ с аксиомой:

9. $(\exists p_1)(p_1 \& (p_2)(p_2 \rightarrow \Box(p_1 \rightarrow p_2)))$.

Ясно, что схема 5 соответствует условию, что P есть булево множество, схема 8 соответствует условию, что P замкнуто относительно формул. Аксиома 9 (с правилом Nec.) соответствует условию, что P атомно над множеством W, то есть для каждого $x \in W$ в P имеется атом (наименьшее непустое множество α в P), которому принадлежит $x \in \alpha$. Если отождествить неразличимые миры, то есть такие, которые принадлежат одним и тем же суждениям в P, то аксиома 9 будет означать, что каждый мир может быть описан, то есть для каждого $x \in W$, $\{x\} \in P$.

Утверждение 1[1]. $AxS5\pi-$, $AxS5\pi$ и $AxS5\pi+$ *суть аксиоматизации* $S5\pi-$, $S5\pi$ и $S5\pi+$ *соответственно.*

Простейшим прямым способом доказательства является использование метода Генкина—Скотта—Макинсона, метода максимально непротиворечивых (м. н.) теорий (см. [7]). Используется техника Крессвелла [3], для того чтобы показать, что каждая м. н. теория имеет один и тот же язык, а для $S5\pi+$ используется также построение, которое каждую м. н. теорию обеспечивает переменной, принадлежащей этой теории и только ей.

1.3. Разрешимость

Утверждение 2. *Теории* $S5\pi$ и $S5\pi+$ *разрешимы.*

Доказательство осуществляется путем элиминации кванторов. Пусть L_1 есть язык L с одноместными операторами M_k, $k=1, 2, \ldots$, и пусть L_2 есть L_1 с пропозициональной константой g. Для этих новых символов мы добавим следующие пункты к определению истинности:

(vi) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} M_k B$, если и только если по меньшей мере k различных атомов P включается в $\left\{y: \overset{\mathfrak{A}}{\underset{y}{\models}} B\right\}$.

(vii) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} g$, если и только если x принадлежит некоторому атому P.

Если неразличимые миры отождествлены, то $M_k A$ означает, что A истинно по меньшей мере в k мирах, которые могут быть описаны, а g означает, что действительный мир x может быть описан.

Мы докажем разрешимость $S5\pi+$ ($S5\pi$), если покажем, что:

---

[1] Р. Булл независимо установил этот результат для $S5\pi$ и $S5\pi+$ [2]. Он пользовался семантическими таблицами, а его семантика слегка отлична от моей. Д. Каплан также независимо установил этот результат для $S5\pi+$ [5]. Он использует метод элиминации кванторов, как в утверждении 2.

А. Существует эффективный способ нахождения для каждой формулы А языка L бескванторной формулы В языка L_1 (L_2) такой, что $A \Leftrightarrow B \in S5\pi+$ ($S5\pi$),

и

В. Множество бескванторных формул $L_1 \cap S5\pi+$ ($L_2 \cap S5\pi$) разрешимо.

M_k и g можно определить в языке L. Пусть QA будет обозначать $\Diamond A \& (p)(\Box(A \to p) \vee \Box(A \to \sim p))$, где p есть первая переменная, которая не свободна в А. Тогда следующие эквивалентности значимы во всех структурах:

10. $M_k A \Leftrightarrow (\exists q_1)\ldots(\exists q_k)(\wedge \Box (q_i \to \sim q_j) \& \wedge_{i=1}^{k} (Qq_i \& \& \Box (q_i \to A)))$,

где q_i есть i-я переменная, не свободная в А, $i = 1, \ldots, k$, $k = 1, 2, \ldots$.

11. $g \Leftrightarrow (\exists p_1)(p_1 \& Qp_1)$.

Добавляя 10 (10 и 11) как аксиомы к $AxS5\pi+$ ($AxS5\pi$), мы можем осуществить в аксиоматизированных теориях вышеуказанное доказательство элиминируемости. Это дает новое доказательство полноты.

Я предполагаю, что вышеописанный метод можно было бы использовать при доказательстве разрешимости $S5\pi-$. Однако полное доказательство содержало бы огромное количество деталей, а мое терпение не эквивалентно моим предположениям.

1.4. Предикатные и булевы аналогии

$S5\pi+$ взаимопереводима с первопорядковой теорией атомарной булевой алгебры, а также с М, второпорядковым монадическим исчислением предикатов. Например, перевод **T** формул $S5\pi+$ на язык М определяется следующим образом:

$$Tp_i = P_i(x);$$
$$T \sim B = \sim TB;$$
$$T(B \vee C) = TB \vee TC;$$
$$T \Box B = (x_1) TB;$$
$$T(p_i) B = (P_i) TB,$$

где (P_i) есть кванторы по предикатам.

Легко показать, что:

А. Т есть эффективное отображение.

В. Формула А языка L принадлежит $S5\pi+$, если и только если ТА значима в М.

А и В вместе с классическим результатом, что М разрешима, дают новое доказательство разрешимости $S5\pi+$.

$S5\pi$ взаимопереводима с первопорядковой теорией сепарабельной булевой алгебры и, разумеется, с второпорядковым исчислением, определенным посредством $\{TA : A \in S5\pi\}$. (Булева алгебра сепарабельна, если множество всех атомов алгебры имеет по меньшей мере верхнюю границу.) Первый результат зависит от утверждения 3.

Утверждение 3. *Р замкнуто относительно формул, если и только если Р булево и сепарабельно.*

Синтаксически это утверждение означает, что $S5\pi$ может быть аксиоматизируемо добавлением к $AxS5\pi$ — аксиомы

12. $(\exists p_1) \Box (p_1 \Leftrightarrow g)$

(g, как и M_k, будет теперь использоваться как сокращение). Единственное доказательство этого результата, которым я располагаю, является непрямым. Оно состоит в показе того, что доказательство элиминации кванторов для $AxS5\pi$ проходит и для новой аксиоматизации.

Элементарная теория булевой алгебры переводима в $S5\pi-$, и я подозреваю, что существует перевод и в другую сторону.

1.5. Некоторые дальнейшие теории

Между условиями, накладываемыми на *Р*, и аксиомами существует следующее соответствие:

Р атомно g,

Р безатомно $\sim g$,

Р атомно или безатомно $g \to \Box g$,

Р бесконечно $M_1 T \vee \Diamond \sim q$, $M_2 T \vee \Diamond \sim g$, ..., где $T = (p_1)(p_1 \to p_1)$.

Это означает, что теория, в которой выражается условие или комбинация условий, написанных слева, может быть аксиоматизирована добавлением к $AxS5\pi$ — соответствующих аксиом справа. Полнота и разрешимость для всех этих теорий может быть доказана методом элиминации кванторов. Некоторые из них особенно интересны:

(i) P атомно. Теория, удовлетворяющая этому условию, та же, что и S5π +. Другими словами, различие между утверждением, что P атомно, и утверждением, что P есть степень-множество, не выразимо с помощью L. Более строгое условие естественно формулировать, используя кванторы по множествам высказываний.

(ii) P безатомно. Теория, удовлетворяющая этому условию, соответствует неплатонистской концепции суждения (каждое суждение выражается предложением).

(iii) P атомно или безатомно. Теория, удовлетворяющая этому условию, является пересечением двух вышеописанных теорий. Поскольку S5π + соответствует платонистской концепции суждения, эта теория предоставляет общую территорию для платонистов и неплатонистов.

Утверждение 4. *Эта теория — самая слабая (нормальная) теория, обладающая следующим свойством: если* **A** *есть формула, в которой каждая переменная* **p** *находится в области действия* $\Box$ *или* (p), *то* $\mathbf{A} \Leftrightarrow \Box \mathbf{A}$ является теоремой.

(iv) P бесконечно. Теория для этого условия эквивалентна модальной теории с пропозициональными кванторами, предложенной Крипке в [6]. Если это условие добавляется к условиям (i) и (ii), то получающиеся теории будут полны в том смысле, что для каждой замкнутой формулы A либо A, либо $\sim$A является теоремой.

Эти рассмотренные нами три теории не являются, конечно, аксиоматизируемыми, то есть они не могут быть аксиоматизированы добавлением конечного числа аксиом к AxS5π.

II

2.1. Семантика

Пусть теперь под структурой понимается упорядоченная четверка $\mathfrak{A} = (W, R, P, v)$, где (W, P, v) есть структура в старом смысле, а R (достижимость) — бинарное отношение на W. Условия истинности выглядят теперь так:

(i), (ii) и (iii), как и раньше;

(iv) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} \Box\,\mathrm{B}$, если и только если $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{y}{\models}} \mathrm{B}$ для всех y таких, что xRy;

(v) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} (\mathrm{P}_i)\,\mathrm{B}$, если и только если $\overset{\mathfrak{A}'}{\underset{x}{\models}} \mathrm{B}$ для всех структур $\mathfrak{A}' =$ (W, R, P, v') таких, что $v'(\mathrm{p}_j) = v(\mathrm{p}_j)$ для всех $j \neq i$, $i = 1, 2, \ldots$. Значимость определяется, как и выше. Скажем, что $\mathfrak{A} = (W, R, P, v)$ *замкнута относительно формул*, если для каждой структуры $\mathfrak{A}' = (W, R, P, v')$ и для каждой формулы $\mathfrak{A} \left\{x \in W : \overset{\mathfrak{A}'}{\underset{x}{\models}} \mathrm{A}\right\} \in P$. Если S есть некоторая пропозициональная модальная логика, для которой R удовлетворяет условию C, то Sπ — (Sπ; Sπ +) есть множество формул, значимых в каждой структуре $\mathfrak{A} = (W, R, P, v)$, такой, что R выполняет C и P булево ($\mathfrak{A}$ замкнуто относительно формул; P есть степень-множество W). Так, например, S4π есть множество формул, общезначимых в каждой структуре $\mathfrak{A} = (W, R, P, v)$, такой, что R рефлексивно и транзитивно и $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно формул.

2.2. Аксиоматизируемость

Пусть AxS есть аксиоматизация вышеупомянутого S (но в расширенном языке). Пусть AxSπ — есть AxS с аксиомными схемами 5 и 6, а также 7 и следующей аксиомой:

$$13.\ (\mathrm{p})\,\Box\,\mathbf{A} \to \Box\,(\mathrm{p})\,\mathbf{A}$$

и правилами MP, Nec., Gen. Пусть AxSπ есть AxSπ — с аксиомной схемой 8 вместо 5.

Утверждение 5[1]. AxKπ —, AxKπ, AxTπ —, AxTπ, AxS4π —, AxS4π *есть аксиоматизации* Kπ—, Kπ, Tπ—, Tπ, S4π—, S4π *соответственно.*

Эти результаты также доказываются методом максимально непротиворечивых теорий. В самом деле, данный метод показывает, что AxSπ — и AxSπ суть аксиоматиза-

[1] Р. Булл первым установил этот результат для S4π [2]. Д. Габбай независимо установил эти результаты для π-теорий, но он использовал другую семантику [4].

ции $S\pi-$ и $S\pi$ соответственно, если каноническая модель для S базируется на модельной структуре для S[4].

По контрасту с утверждениями 1 и 5 имеем:

Утверждение 6. *Теории* $K\pi+$, $T\pi+$, $K4\pi+$, $S4\pi+$, $S4.2\pi+$ и $B\pi+$ *не аксиоматизируемы.*

Для каждой из этих теорий соответствующий результат получается заданием перевода T с языка второпорядковой арифметики на язык этой теории. T строится в три этапа. Прежде всего, в теории мы выражаем допущение, что существует одно-однозначное соответствие между мирами и тройками миров. Во-вторых, определяем квантификацию по множеству троек миров (отношений) через квантификацию по множеству соответствующих миров (суждений). В-третьих, даем стандартное пеановское определение для сложения и умножения.

2.3. Разрешимость

Пусть теория S есть некоторое множество формул L, содержащее $K\pi-$ и замкнутое относительно MP и Gen. Две теории, S_1 и S_2, *совместимы*, если {A: для некоторого B, $B\in S_1$ и $B\to A\in S_2$} непротиворечиво. Пусть φ будет конъюнкцией аксиом робинсоновской конечно аксиоматизируемой и существенно неразрешимой арифметики; и пусть

$$KR=\{A: T\varphi\to A\in K\pi-\}.$$

Тогда мы можем показать, что KR существенно неразрешима, так что и любая теория, совместимая с KR, неразрешима (см. [8]).

В частности, мы можем показать, что:

Утверждение 7. $K\pi-$, $K\pi$, $T\pi-$, $T\pi$, $K4\pi-$, $K4\pi$, $S4\pi-$, $S4\pi$, $S4.2\pi-$, $S4.2\pi$, $B\pi-$ и $B\pi$ *неразрешимы.*

Вышеописанный метод не применим для $S4.3\pi-$ и $S4.3\pi$, и я не знаю, разрешимы эти теории или нет.

После этих отрицательных результатов следует упомянуть и положительный. Структура $\mathfrak{A}=(W, R, P, v)$ является *диодоровой*, если $W=\{0, 1, 2, \ldots\}$, R есть естественный порядок на W, а P есть степень-множество W.

[4] Для объяснения этой терминологии см. [7].

Пусть

$$D\pi+=\{A: \overset{\mathfrak{A}}{\models} A \text{ для всех диодоровых } \mathfrak{A}\}.$$

Утверждение 8. $D\pi+$ *разрешима.*

Этот результат может быть доказан переводом $D\pi+$ во второпорядковую теорию функции „следования за", о которой известно, что она разрешима [1]. Из результата Рабина следует также, что $S4.3\pi+$ разрешима.

2.4. Теории с изменяющейся областью

До сих пор мы предполагали, что область P суждений одна и та же во всех возможных мирах. Однако можно было бы считать, что суждение имеет место в данном мире, если те индивиды, к которым относится это суждение, существуют в данном мире. Следовательно, если индивидные области меняются от мира к миру, то должны меняться и области суждений.

Как известно, существуют различные семантики для модальной логики с изменяющейся областью. Рассмотрим для примера одну из них. Под структурой будет пониматься упорядоченная пятерка (x, W, R, P, v), где $x\in W$, R есть бинарное отношение на W, P отображает каждый мир $y\in W$ в P_y, непустое множество подмножеств W, такое, что если yRz, то $P_y\subseteq P_z$, и, наконец, v отображает V на P_x. Условия истинности для $\Box$ и (p_i) теперь таковы:

(iv) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}}\Box B$, если и только если $\overset{\mathfrak{A}'}{\underset{y}{\models}} B$ для всех структур $\mathfrak{A}'=(y, W, R, P, v)$ таких, что xRy; и

(v) $\overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}}(p_i)\,B$, если и только если $\overset{\mathfrak{A}'}{\underset{x}{\models}} B$ для всех структур $\mathfrak{A}'=(y, W, R, P, v)$ таких, что $v'(P_j)=v(P_j)$ для всех $j\neq l$, $i=1, 2, \ldots$.

Все результаты предыдущих двух разделов могут быть расширены на случай данной семантики. Например, предположим

$$K'\pi-=\left\{A: \overset{\mathfrak{A}}{\underset{x}{\models}} A \text{ для всех } \mathfrak{A}=(x, W, R, P, v) \text{ таких, что } P_y \text{ булево для каждого } y \text{ в } W\right\}.$$

Тогда, используя применяемые ранее методы, мы можем показать, что $K'\pi$ — аксиоматизируема (отбросив аксиому 13 из $AxK\pi$ —) и что $K\pi$ — неразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Büchi J. R. On a decision method in restricted second order arithmetic. — In: "Logic, methodology and philosophy of science. Proceedings of the 1960 International Congress". Ed. by E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski. Stanford, California, Stanford University press, 1962, p. 1—11.
2. Bull R. A. On modal logic with propositional quantifiers. — "The journal of symbolic logic", vol. 34, 1969, p. 257—263.
3. Cresswell M. J. A Henkin completeness theorem for T. — "Notre Dame journal of formal logic", vol. 8, 1967, p. 186—190.
4. Gabbay D. M. Montague-type semantics for modal logics with propositional quantifiers. Unpublished.
5. Kaplan D. S5 with quantifiable propositional variables. — "The journal of symbolic logic", vol. 35, 1970, p. 355.
6. Kripke S. A. A completeness theorem in modal logic. — Ibid., vol. 24, 1959, p. 1—14.
7. Segerberg K. Decidability of S4.1. — "Theoria", vol. 34, 1968, p. 7—20.
8. Tarski A., Mostowski A. and Robinson R. M. Undecidable theories Amsterdam. North-holland Publishing Co., 1953.

Р. Монтегю

ПРАГМАТИКА И ИНТЕНСИОНАЛЬНАЯ ЛОГИКА*[1]

Слово „прагматика" в работе Ч. Морриса [20] использовалось для обозначения той ветви философии языка, в которой наряду с лингвистическими выражениями и объектами, обозначаемыми этими выражениями, внимание обращается и на тех, кто использует эти выражения, и на возможные ситуации их использования. Две другие ветви — синтаксис и семантика, рассматривающие соответственно выражения сами по себе и выражения вместе с их значением, — были во времена Морриса довольно основательно развиты; первая — целым рядом авторов, вторая — в работе Тарского [22].

Однако моррисовская концепция прагматики была декларативной и неопределенной. Шаг к уточнению понятия прагматики был сделан Бар-Хиллелом, который указывал в статье [2], что прагматика занимается тем, что Ч. С. Пирс

---

* Montague R. Pragmatics and intensional logic. — "Synthese" 1970, vol. 22, № 1/2.

[1] Эта работа была представлена на Южно-Калифорнийском логическом коллоквиуме 6 января 1967 года и содержит исследования, частично финансированные Национальным фондом по науке (договор GP-4594). Я хотел бы выразить благодарность моему ученику д-ру Дж. Кэмпу за ряд ценных замечаний, помимо тех, признательность за которые выражена в тексте, а также Т. Барроэо, исправившему одну мою ошибку. Следует, может быть, заметить, что эта статья была предложена другому журналу 7 ноября 1967 года, но после двух с половиной лет взята обратно из-за большой задержки с ее публикацией; таким образом по замыслу она должна была появиться раньше моих работ [14] и [15], ибо представляет собой в какой-то мере основание для них обеих.

в прошлом веке называл „индексными выражениями"[1]. Слово или предложение является индексным, если его значение может быть понято только в ситуации, в которой оно использовалось; примером может служить личное местоимение „я". Различные индексные предложения можно строить, используя, например, ссылки на время произнесения. Рассмотрим предложение „Цезарь будет убит". Его истинность или ложность не может быть определена независимо от ситуации, в которой оно было высказано; прежде чем определить истинностное значение этого предложения, должно быть определено время, когда оно произносилось, то есть должен быть уточнен один из аспектов ситуации использования.

Хотя Бар-Хиллел и отметил, что прагматика занимается индексными выражениями, он не разъяснил достаточно ясно, каким образом она должна ими заниматься. Мне кажется, что прагматика должна, по крайней мере первоначально, следовать образцу семантики — или ее современной версии — теории моделей[2], — рассматривающей прежде всего понятия истины и выполнимости (в модели или при интерпретации). Следовательно, прагматика будет использовать сходные понятия, хотя теперь мы будем говорить об истине и выполнимости не только по отношению к определенной интерпретации, но и в некоторой ситуации использования.

Несколько лет назад я анализировал эти понятия в связи с рядом специальных случаев, например с теми, где имелись личные и указательные местоимения, модальные и временны́е операторы, операторы вероятности, случаи, где наблюдалась контекстуальная двусмысленность и прямая самореференциальность[3]. Важной чертой бо́льшей части этих исследований был метод анализа кванторов, разработанный в основном моим учеником проф. Н. Кокьяреллой, который и воспроизводится ниже в нашем общем

[1] Другими терминами для обозначения тех же выражений являются „эгоцентрические частицы" (Рассел), „квазирефлексивные выражения" (Рейхенбах), „индикаторные слова" (Гудмен) и „невечные предложения" (Куайн, для предложений с индексами).

[2] Изложение фундаментальных понятий теории моделей Тарского см. в [23].

[3] Эта работа была доложена на Философском коллоквиуме Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе 18 декабря 1964 года. Анализ специальных случаев в рамках общего подхода настоящей работы будет обсуждаться в другой публикации.

рассмотрении[1]. В каждом специальном случае, однако, понятия истины и выполнимости должны были определяться заново, в частности не усматривалось никакого общего метода анализа операторов. Интуитивно единообразие чувствовалось, но полное формальное единство было достигнуто только в 1965 году, в ходе совместной работы д-ра Ч. Ховарда и моей.

Позвольте перейти к описанию общего метода. Под *прагматическим языком* понимается язык, символы которого (атомарные выражения) принадлежат следующим категориям:

(1) логические константы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$, $=$, E (которые понимаются, соответственно, как „неверно, что", „и", „или", „если...то", „если и только если", „все", „некоторые", „равно", „существует");

(2) круглые скобки, квадратные скобки и запятые;

(3) индивидные переменные $v_0, \ldots, v_k, \ldots$;

(4) индивидные константы;

(5) n-местные предикатные константы для каждого натурального (то есть неотрицательного целого) числа n;

(6) операторы.

(Индивиды, входящие в предметную область такого языка, будут рассматриваться как возможные объекты; соответственно, символ E будет встречаться в таких контекстах, как $\mathsf{E}[x]$, что надо понимать как „x существует" или „x — действительный объект". Под (6) я понимаю только то, что может быть названо *одноместными операторами*. Это — такие символы, которые, подобно знаку отрицания, будучи помещены перед предложением, дают в результате новое предложение; примерами могут служить модальные операторы „необходимо" и „случайно", так же как выражения „будет так, что", „обычно", „по крайней мере наполовину вероятно, что...". Исключительно ради простоты я отказываюсь от функциональных символов, дескрипций и многоместных операторов; но расширить настоящий метод, чтобы охватить и эти выражения, не сложно. В самом деле, многоместные операторы могут быть выражены как в расширенной прагматике, так и в интенсиональной логике, которые будут рассматриваться ниже,

[1] Н. Кокьярелла рассматривал квантификацию только в связи с временно́й логикой; это рассмотрение может быть найдено в реферате Кокьяреллы [4] и в его неопубликованной докторской диссертации [5].

в элементы теории дескрипций входят в интенсиональную логику.)

Формулы прагматического языка L строятся, как обычно. То есть множество формул L есть наименьшее множество Γ, такое, что: (1) Γ содержит все выражения

$E[\zeta]$;

$\zeta = \eta$;

$P[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}]$,

где $\zeta, \eta, \zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ есть индивидные константы L или индивидные переменные и P есть n-местная предикатная константа L; (2) Γ замкнуто относительно применения логических связок; (3) $\bigwedge u\varphi$ и $\bigvee u\varphi$ принадлежат Γ, если u есть индивидная переменная и φ принадлежит Γ; (4) $N\varphi$ принадлежит Γ, если N есть оператор L и φ принадлежит Γ.

Для того чтобы интерпретировать прагматический язык L, нам надо кое-что уточнить. Прежде всего, мы должны определить множество всех возможных ситуаций использования — или, скорее, всех комплексов существенных аспектов возможных ситуаций использования; такие комплексы мы можем называть *индексами* или, заимствуя выражения Д. Скотта, *точками соотнесения*. Например, если единственными индексными выражениями L были временной оператор и личное местоимение „я", то точками соотнесения должны были бы быть упорядоченные пары, состоящие из лиц и действительных чисел, представляющих соответственно произносящего высказывание и момент произнесения.

Во-вторых, мы должны для каждой точки соотнесения i определить множество A_i объектов, существующих по отношению к i. Например, если бы точками соотнесения были моменты времени, A_i понималось бы как множество объектов, существующих в момент времени i.

В-третьих, мы должны определить смысл, или *интенсионал* каждой предикатной и индивидной константы L. Для этого следует константе c приписать в каждой точке соотнесения i денотат, или *экстенсионал* c в i. Например, если точками соотнесения были моменты времени и c было предикатной константой „зеленый", мы должны были бы для каждого момента i определить множество объектов, которые будут считаться зелеными в i. Если, с другой стороны, c было бы индивидной константой, допустим „папа римский", мы должны были бы определить, для

каждого момента времени i, личность, рассматриваемую как папа римский в i.

Четвертым условием является интерпретация операторов языка L. Для того чтобы задать ее, мы припишем каждому оператору L отношение между точками соотнесения и множествами точек соотнесения. Роль, которую играют эти отношения и интуитивные основания, по которым мы считаем их интерпретацией для операторов, лучше обсудить позднее.

Для того чтобы говорить точнее, введем несколько вспомогательных понятий. Под $\langle U_0, \ldots, U_{n-1}\rangle$-*отношением* будем понимать подмножество множества $U_0 \times, \ldots, \times U_{n-1}$ (под которым понимаем декартово произведение $\Pi_{i<n} U_i$ множеств $U_0, \ldots, U_{n-1}$), а под $\langle I, U_0, \ldots, U_{n-1}\rangle$-*предикатом* будем понимать функцию, определенную на множестве I, со значениями из множества всех $\langle U_0, \ldots, U_{n-1}\rangle$-отношений. (Слово „отношение" я использую в качестве возможного кандидата для обозначения экстенсионала предикатной константы, тогда как термин „предикат" сохранен для интенсионала этих констант. Рассмотрим специальный случай, когда $n=1$. Тогда $\langle U_0\rangle$-отношения совпадут с множествами элементов U_0, а $\langle I, U_0\rangle$-предикаты будут тем, что можно рассматривать как *свойства* (снабженные указанием на точку соотнесения из множества точек соотнесения I) элементов U_0, и такие $\langle U_0\rangle$-отношения и $\langle I, U_0\rangle$-предикаты будут соответствовать одноместной предикатной константе. В случае, когда $n=0$, мы будем говорить о Λ-отношениях (где Λ есть пустая последовательность, то есть пустое множество); эти отношения есть подмножества пустого декартова произведения, которое, естественно, равно $\{\Lambda\}$. Таким образом, единственными Λ-отношениями будут пустое множество Λ и единичное множество $\{\Lambda\}$; мы будем считать эти два объекта истинностными значениями F и T соответственно. Соответствующими предикатами являются $\langle I\rangle$-предикаты; они будут функциями, определенными на множестве I, со значениями F и T, то есть тем, что может пониматься как *суждения*[1], снабженные указанием на точку соотнесения из множества I.)

[1] Идея истолковывать суждения, свойства и интенсионалы отношений как функции этого рода впервые встречается, по-моему, в статье Крипке [12].

Под *k-местным отношением членов множества* U и под *k-местным I-предикатом на членах* U будет пониматься $\langle U_0, \ldots, U_{k-1}\rangle$-отношение и $\langle I, U_0, \ldots, U_{k-1}\rangle$-предикат соответственно, где каждое U_p (для $p < k$) есть U.

Определение I. *Возможная интерпретация для прагматического языка* L есть тройка $\langle A, F, R\rangle$, такая, что: (1) A есть функция; (2) для каждого i из области определения A A_i есть множество (я использую равным образом „A_i" и „$A(i)$" для значения функции A от аргумента i); (3) F — функция, областью определения которой является множество предикатных и индивидных констант языка L; (4) если c — индивидная константа L, то F_c будет функцией с той же областью определения, что и у функции A, причем такой, что для всех j из области определения A $F_c(j)$ принадлежит объединению множеств A_i, где i принадлежит области определения A; (5) если P — n-местная предикатная константа L, то F_p является n-местным $\mathbf{D}A$-предикатом на элементах объединения множеств A_i (для $i \in \mathbf{D}A$), где $\mathbf{D}A$ — область A; (6) R — это функция, областью определения которой является множество операторов L; (7) если N принадлежит области определения R, то R_N есть $\langle \mathbf{D}A, \mathbf{SD}A\rangle$-отношение, где $\mathbf{SD}A$ представляет собой степень-множество (множество всех подмножеств) множества $\mathbf{D}A$.

В связи с этим определением будет уместно сделать несколько замечаний. Пусть $\mathfrak{A}$ будет возможной интерпретацией для прагматического языка L, и пусть $\mathfrak{A}$ имеет вид $\langle A, F, R\rangle$. Мы рассматриваем область определения A как множество всех точек соотнесения в интерпретации $\mathfrak{A}$. Если i есть точка соотнесения, то A_i понимается как множество объектов, существующих при i (согласно $\mathfrak{A}$). Объединение множеств A_i для i, принадлежащих $\mathbf{D}A$, может, таким образом, рассматриваться как множество всех возможных индивидов (согласно $\mathfrak{A}$). По вышеприведенному определению, индивидная константа обозначает *возможный* индивид, а одноместная предикатная константа — множество *возможных* индивидов в данной точке соотнесения. Чтобы показать, что требование принимать в качестве значений для констант только существующие в данной точке соотнесения индивиды или множества таких индивидов является слишком сильным, предположим, что точками соотнесения являются моменты времени, и рассмотрим индивидную константу „предпоследний папа римский"

и предикатную — „быть вспоминаемым кем-то". То же замечание может быть сделано в связи с более чем одноместными предикатными константами. Рассмотрим, например, двухместную предикатную константу „думать о" (Джонс думает о Джоне). При стандартной интерпретации, когда точками соотнесения являются возможные миры, экстенсионалом этой константы в данном мире будет отношение между индивидами, существующими в этом мире, и возможными индивидами (то есть объектами, существующими в некотором мире) [1].

Центральные для прагматики понятия *истинности* и *выполнимости* выражаются фразами: „предложение (то есть формула без свободных переменных) φ истинно в точке соотнесения i при интерпретации $\mathfrak{A}$" и „возможный индивид x выполняет формулу φ в точке соотнесения i при интерпретации $\mathfrak{A}$", которые мы сократим до „φ истинно$_{i, \mathfrak{A}}$" и „x вып$_{i, \mathfrak{A}}\, \varphi$" соответственно. Приведенные ниже пункты **не** являются определениями истины и выполнимости, а должны пониматься скорее как верные утверждения, выражающие наиболее характерные черты этих понятий: полные определения будут даны позднее.

Критерии прагматической истины и выполнимости

Пусть $\mathfrak{A}$ будет возможной интерпретацией для прагматического языка L, имеющей вид $\langle A, F, R\rangle$, пусть $i \in \mathbf{D}A$, пусть x есть элемент объединения множеств A_j (для $j \in \mathbf{D}A$), пусть P будет 2-местной предикатной константой L, и пусть u будет индивидной переменной. Тогда:

(1) $P[c, d]$ истинно$_{i\mathfrak{A}}$, если и только если $\langle F_c(i), F_d(i)\rangle \in F_P(i)$;

(2) x вып$_{i\mathfrak{A}}$ $P[c, u]$, если и только если $\langle F_c(i), x\rangle \in F_P(i)$;

(3) x вып$_{i\mathfrak{A}}$ $c = u$, если и только если $F_c(i)$ совпадает с x;

(4) x вып$_{i\mathfrak{A}}$ $\mathsf{E}(u)$, если и только если $x \in A_i$;

(5) если φ есть предложение L, то $\neg\varphi$ истинно$_{i\mathfrak{A}}$, если и только если φ не истинно$_{i, \mathfrak{A}}$;

[1] Этот простой и очевидный подход — не единственно возможный анализ для фразы „думать о", обсуждавшейся в философской литературе, например в статье [1], не очень успешно; но я думаю, что это одно из возможных рассмотрений одного смысла этой фразы — референциального. Для анализа нереференциального смысла см. [15].

(6) если φ, ψ есть предложения L, то $(\varphi \wedge \psi)$ истинно$_{i, \mathfrak{A}}$, если и только если оба φ и ψ истинны$_{i, \mathfrak{A}}$;

(7) если φ есть формула L с единственной свободной переменной u, то $\bigvee u\varphi$ истинно$_{i, \mathfrak{A}}$, если и только если в объединении множеств Aj $(j \in \mathbf{D}A)$ имеется объект y, такой, что y вып$_{i\mathfrak{A}}\varphi$;

(8) если φ есть предложение L и N — оператор L, то $N\varphi$ истинно$_{i, \mathfrak{A}}$, если и только если $\langle i, \{j : j \in \mathbf{D}A$ и φ истинно$_{j\mathfrak{A}}\}\rangle \in R_N$.

Согласно (8), $N\varphi$ истинно в i (при $\mathfrak{A}$), если и только если i стоит в отношении R_N к множеству точек соотнесения, в которых φ истинно (при $\mathfrak{A}$). Чтобы убедиться, что (8) обеспечивает адекватную трактовку, например, оператора прошедшего времени, рассмотрим такую интерпретацию $\mathfrak{A}$, в которой $\mathbf{D}A$ есть множество действительных чисел (то есть моментов времени), а R_N есть множество пар $\langle i, J\rangle$, где $i \in \mathbf{D}A$, $J \subseteq \mathbf{D}A$ и существует $j \in J$, такое, что $j < i$. Тогда по (8), $N\varphi$ будет истинно в i (при $\mathfrak{A}$), если и только если существует $j < i$, такое, что φ истинно в j (при $\mathfrak{A}$), и, следовательно, N будет корректно выражать значение оборота „было так, что...“. Ясно, что аналогичным образом может быть рассмотрено будущее время, так же как модальные операторы (интерпретированные посредством соответствующих отношений), рассматриваемые в работе Крипке [12]. Впрочем, все эти примеры могут быть проанализированы в рамках более простой структуры, в которой R_N есть отношение между двумя точками соотнесения (а не между точкой и множеством точек соотнесения). Чтобы понять необходимость более общего подхода, рассмотрим операторы возможности, условной необходимости или, заимствуя особенно прозрачный пример Д. Скотта, настоящее продолженное (present progressive) время. Для рассмотрения последнего примем, что интерпретация $\mathfrak{A}$ снова имеет в качестве точек соотнесения действительные числа; R_N пусть будет множеством пар $\langle i, J\rangle$, таких, что $i \in \mathbf{D}A$, $J \subseteq \mathbf{D}A$, и J есть окрестность i (то есть J содержит открытый интервал, элементом которого является i). Тогда, согласно (8), $N\varphi$ будет истинно в i (при $\mathfrak{A}$), если и только если имеется открытый интервал, включающий i, на котором φ истинно (при $\mathfrak{A}$). Таким образом, N может несколько неуклюже читаться как „сейчас продолжает иметь место, что...“ в том смысле,

в каком фраза „сейчас продолжает иметь место, что Джонс живет“ синонимична с „Джонс живет“.

В соответствии с (7) областью квантификации являются все *возможные* (а не только *действительные*) индивиды. Желательность этого может быть усмотрена, в случае временно́й логики, из рассмотрения предложения „был человек, о котором никто не помнит“. Разумеется, квантификацию по действительным индивидам можно ввести, комбинируя квантор и символ существования E.

Условия (1)—(8) станут совершенно ясными, если мы сможем получить их на основе следующей последовательности определений, то есть показать, что (1)—(8) являются просто следствиями определений II—V, приводящихся ниже. Мы принимаем, что $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для прагматического языка L, $\mathfrak{A} = \langle A, F, R\rangle$, U — объединение множеств A_j, где $j \in \mathbf{D}A$, U^{ω} есть множество всех бесконечных последовательностей (типа ω), состоящих из членов U, $i \in \mathbf{D}A$ и n — натуральное число.

Определение II. Если ζ — индивидная переменная или индивидная константа L, то под $\mathrm{Ext}_{i\mathfrak{A}}\zeta$, или *экстенсионалом* ζ в i (при $\mathfrak{A}$), понимается функция H с областью определения U^{ω}, заданная следующим образом:

(1) если ζ — переменная v_n и $x \in U^{\omega}$, то $H(x) = x_n$;

(2) если ζ — индивидная константа и $x \in U^{\omega}$, то $H(x) = F_{\zeta}(i)$.

Экстенсионал формулы в некоторой точке соотнесения при интерпретации $\mathfrak{A}$ вводится следующим рекурсивным определением.

Определение III. (1) Если ζ — индивидная константа L или индивидная переменная, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\mathsf{E}[\zeta])$ есть $\{x : x \in U^{\omega}$ и $(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta))(x) \in A_i\}$.

(2) Если ζ и η — индивидные константы L или индивидные переменные, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta = \eta)$ есть $\{x : x \in U^{\omega}$ и $(\mathrm{Ext}_{i\mathfrak{A}}(\zeta))(x)$ тот же самый, что и $(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\eta))(x)\}$.

(3) Если P есть n-местная предикатная константа L и $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ — индивидные константы L или индивидные переменные, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(P[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}])$ есть $\{x : x \in U^{\omega}$ и $\langle(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta_0))(x), \ldots, (\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta_{n-1}))(x)\rangle \in F_P(i)\}$.

(4) Если φ и ψ — формулы L, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\neg\varphi)$ есть $U^{\omega} - \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi)$, $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi \wedge \psi)$ есть $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi) \cap \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\psi)$ и подобным образом для других пропозициональных связок.

(5) Если φ — формула L, то $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\bigvee v_n\varphi)$ есть $\{x: x\in U^\omega$ и для некоторого $y\in U$, последовательность $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, y, x_{n+1}\ldots\rangle \in \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)\}$ и сходным образом для $\bigwedge v_n\varphi$.

(6) Если φ — формула L и N — оператор L, то $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(N\varphi)$ есть $\{x: x\in U^\omega$ и $\langle i, \{j: j\in \mathrm{D}A$ и $x\in \mathrm{Ext}_{j,\mathfrak{A}}(\varphi)\}\rangle \in R_N\}$.

Определение IV. Если φ — предложение L, то φ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$, если и только если $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}\varphi = U^\omega$.

Определение V. Если φ — формула L, единственной свободной переменной которой является v_n, то y вып$_{i,\mathfrak{A}}\varphi$, если и только если существует $x\in \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)$, такой, что $x_n = y$.

Из вышеприведенных определений можно усмотреть, что экстенсионалом формулы (в точке соотнесения) является множество последовательностей („выполняющих" эту формулу в точке соотнесения в том смысле, в каком формулы выполняются не индивидами, а последовательностями) и что экстенсионалом индивидной константы или переменной (опять-таки в данной точке соотнесения) является функция, приписывающая возможный индивид каждой последовательности в U^ω. Как соотносятся эти определения с основополагающим анализом вопроса, изложенным у Фреге в [9]? Следует вспомнить, что Фреге прямо рассматривает только экстенсионалы выражений, не содержащих свободных переменных, например в случае нашего языка, только для предложений и индивидных констант. Экстенсионалом (или *обычным экстенсионалом*) предложения для Фреге было истинностное значение, но в соответствии с определением III нетрудно видеть, что экстенсионалом предложения языка L может быть только U^ω или пустое множество, которые в этом случае естественно отождествить с истиной и ложью соответственно. Для Фреге экстенсионалом (или *обычным экстенсионалом*) индивидной константы был объект, обозначаемый этой константой, тогда как для нас экстенсионал есть константная функция, значением которой является этот объект, а областью определения — U^ω. Таким образом, если отвлечься от теоретико-множественных манипуляций, то фрегевские экстенсионалы во всех общих случаях совпадут с нашими.

Для дальнейшего обсуждения я введу *интенсионалы* некоторых выражений для интерпретации $\mathfrak{A}$, а также понятия *логического следования*, *логической истины* и *логической эквивалентности*, приемлемые для прагматики.

Определение VI. Если φ — индивидная константа L, формула L или индивидная переменная, то $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ есть функция H, определенная на области $\mathrm{D}A$, такая, что для каждого $i\in \mathrm{D}A$, $H(i) = \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)$.

Определение VII. Предложение φ есть *логическое следствие* (в прагматическом смысле) множества предложений Γ, если и только если для каждого прагматического языка L и для всех $\mathfrak{A}$, A, F, R, i, если $\mathfrak{A} = \langle A, F, R\rangle$, то $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для L, $i\in \mathrm{D}A$, $\Gamma\cup\{\varphi\}$ есть множество предложений L, и для каждого $\psi\in\Gamma$, если ψ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$, то φ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$. Предложение *логически истинно*, если и только если оно является логическим следствием пустого множества. Предложение φ *логически эквивалентно* предложению ψ, если и только если предложение $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ логически истинно[1].

Если под экстенсионалом предикатной константы P (в i при $\mathfrak{A}$) мы будем понимать $F_P(i)$, то исследование определения III покажет нам, что фрегевский принцип функциональности полностью приложим к нашему понятию экстенсионала: экстенсионал формулы есть функция экстенсионалов (обычных экстенсионалов) тех его частей, которые не находятся в косвенных контекстах (то есть в случае данного языка не находятся в области действия оператора) и интенсионалов (которые Фреге называет *непрямыми экстенсионалами*) тех его частей, которые находятся в косвенных контекстах. Пункт (6) определения III создает эту зависимость некоторых экстенсионалов от интенсионалов, и из-за него определение III нельзя рассматривать как простую рекурсию по длине формул. Вместо этого его можно рассматривать как рекурсию по фундированному отношению S между упорядоченными парами, определяемому таким образом: $\langle\langle j, \psi\rangle, \langle i, \varphi\rangle\rangle\in S$, если

---

[1] Назовем интерпретацию $\langle A, F, R\rangle$ пустой, если объединение множеств A_i для $i\in \mathrm{D}A$ пусто. Поскольку мы не исключаем пустую интерпретацию, может появиться опасение, что возникнут трудности в связи с понятием, введенным определением VII. Эти страхи неоправданны, легко показать, что вышеприведенное определение логического следования эквивалентно результату добавления ограничения, что $\mathfrak{A}$ не пуста. С другой стороны, некоторые из вышеприведенных критериев истины и выполнимости не проходят для пустой интерпретации; но этот случай исключен условием „x есть элемент объединения множеств A_j".

и только если $i, j \in DA$, φ, ψ суть формулы L, а ψ есть собственная подформула φ [1].

Впрочем, мы могли бы принять другой порядок, сначала введя интенсионалы, а потом в их терминах определяя экстенсионалы. Легко видеть, что в этом случае интенсионалы вводились бы простой рекурсией по длине формулы; другими словами, интенсионал сложного выражения зависит только от интенсионалов составляющих его частей. (Так мы даем, по крайней мере для прагматических языков, отрицательный ответ на вопрос Фреге, нужно ли вводить *косвенные интенсионалы* наряду с обычными экстенсионалами и обычными интенсионалами. Ответ будет отрицательным даже для более богатых языков, рассматривающихся ниже.)

Общее рассмотрение операторов, отраженное в пункте (6) определения III и принадлежащее Ч. Ховарду и мне, имеет то преимущество, что включает все известные частные случаи, однако его недостатком является его, по-видимому, ad hoc и далекий от интуитивной ясности характер. Чтобы устранить эту видимость и одновременно дать теоретическое обоснование, нужно рассмотреть *интенсиональную логику*. Попытки построить интенсиональные языки для анализа предложений мнения и тому подобного осуществлялись и раньше, но без полного успеха; теперь я сообщу о своих собственных результатах в этой области.

Под *интенсиональным языком* будет пониматься язык, символы которого принадлежат к следующим категориям:

(1) логические константы прагматических языков;

(2) круглые скобки, квадратные скобки и запятые;

(3) индивидные переменные $v_0, \ldots, v_n, \ldots$;

(4) индивидные константы;

(5) n-местные предикатные переменные $G_{0,n}, \ldots, G_{k,n}, \ldots$ для каждого натурального числа n;

(6) предикатные константы типа s для каждой конечной последовательности s целых чисел $\geqslant -1$;

(7) оператор $\Box$ (читающийся как „необходимо, что...");

(8) оператор дескрипции $\top$ (читается „единственный... такой, что..." и рассматривается вместе с символами (1) и (7) категорий как логическая константа).

[1] Рекурсия по фундированным отношениям явно была введена впервые в работе [13]; ее обсуждение см. в [19].

Согласно (6), мы допускаем, что аргументами предикатных констант наряду с индивидными символами могут быть и предикатные переменные. Тип такой константы указывает грамматические категории соответствующих последовательностей аргументов, причем -1 соответствует индивидным символам, а неотрицательное число n соответствует n-местной предикатной переменной. При этом все прежние предикатные константы могут быть включены в это определение и понимаемы как предикатные константы типа $\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$, где всякое s_i (если $i < n$) есть -1. Оператор дескрипции будет навешиваться только на предикатные переменные, потому что он понадобится нам только в таких контекстах и потому, что его использование в связи с индивидными переменными потребовало бы небольшого, но постороннего нашему предмету рассмотрения вопроса о выборе „пустого объекта" [1]. Мы будем допускать только такие дескрипции, которые полностью элиминируемы и вводятся исключительно для упрощения некоторых примеров.

Множество *формул интенсионального* языка L есть наименьшее множество Γ, такое, что (1) Γ содержит выражения

$$\mathsf{E}[\zeta];$$
$$\zeta = \eta;$$
$$G[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}],$$

где $\zeta, \eta, \zeta, \ldots, \zeta_{n-1}$ есть индивидные константы L или индивидные переменные и G есть n-местная предикатная переменная L, а также выражения

$$P[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}],$$

где P есть предикатная константа L типа $\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$, и для каждого $i < n$ либо $s_i \geqslant 0$ и ζ_i есть s_i-местная предикатная переменная, либо $s_i = -1$ и ζ_i есть индивидная константа L или индивидная переменная; (2) Γ замкнуто относительно применения логических связок; (3) $\bigwedge u\varphi$ и $\bigvee u\varphi$ принадлежат Γ, если только φ принадлежит Γ и u является индивидной или предикатной переменной;

[1] Настоящая система могла бы быть, однако, расширена, чтобы включать всю теорию определенных дескрипций любым из хорошо известных способов, например способом Монтегю и Калиша [17]. Дескрипции введены здесь в таком ограниченном виде также и для того, чтобы избежать не имеющих отношения к делу разногласий относительно лучшего способа рассмотрения дескрипций.

(4) $\Box\varphi$ принадлежит Г, если только φ принадлежит Г;
(5) если φ, ψ принадлежат Г, а G есть предикатная переменная, то Г содержит также результат замены в φ всех вхождений G, которые не следуют непосредственно за $\bigvee$, $\bigwedge$ или $\top$, на $\top G\psi$.

Под *термом* L понимается либо индивидная константа L, либо индивидная переменная, либо выражение $\top G\varphi$, где G — предикатная переменная, а φ — формула L.

Определение VIII. *Возможная интерпретация для интенсионального языка* L есть пара $\langle A, F\rangle$, удовлетворяющая пунктам (1)—(4) определения I и, кроме того, выполняющая условие (5'): если P — предикатная константа L типа $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle$, то F_P есть $\langle \mathbf{D}A, U_0, \ldots, U_{n-1}\rangle$-предикат, где для каждого $i < n$ либо $s_i = -1$ и U_i есть объединение множеств A_i ($i \in \mathbf{D}A$), либо $s_i \geqslant 0$ и U_i есть множество всех s_i-местных $\mathbf{D}A$-предикатов, заданных на элементах объединения множеств A_i, где $i \in \mathbf{D}A$.

Условие (5) определения I есть специальный случай настоящего условия (5'), когда $s_0 = \ldots = s_{n-1} = -1$.

Снова мы будем прежде всего интересоваться понятиями истинности и выполнимости, выражаемыми фразами: „предложение φ истинно в точке соотнесения i при интерпретации $\mathfrak{A}$“ и „x выполняет формулу φ в точке соотнесения i при интерпретации $\mathfrak{A}$“. Но поскольку наши формулы теперь могут содержать свободно наряду с индивидными и предикатные переменные, то под x мы будем понимать либо возможный индивид, либо предикат, заданный на индивидах.

Содержательные основания настоящего исследования станут ясными после рассмотрения следующих критериев.

Критерии интенсиональной истины и выполнимости. Пусть $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация вида $\langle A, F\rangle$ для интенсионального языка L, пусть $i \in \mathbf{D}A$, пусть U будет объединением множеств A_j (где $j \in \mathbf{D}A$), пусть $x \in U$, пусть P будет предикатной константой языка L типа $\langle -1, -1\rangle$, пусть c, d будут индивидными константами L и пусть u будет индивидной переменной. Тогда:

(1)—(7) пункты критериев прагматической истины и выполнимости.

(8') Если φ есть формула L, единственной свободной переменной которой является n-местная предикатная переменная G, то $\bigvee G\varphi$ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$, если и только если имеется

n-местный $\mathbf{D}A$-предикат X на членах U, такой, что X вып$_{i,\mathfrak{A}}$ φ.

(9') Если G есть n-местная предикатная переменная, P — предикатная константа L типа $\langle n\rangle$ и X — n-местный $\mathbf{D}A$-предикат на членах U, то X вып$_{i,\mathfrak{A}}$ $P[G]$, если и только если $\langle X\rangle \in F_P(i)$.

(10') Если φ есть предложение L, то $\Box\varphi$ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$, если и только если φ истинно$_{j,\mathfrak{A}}$ для всех $j \in \mathbf{D}A$.

(11') Если G есть n-местная предикатная переменная, $\mathcal{P}$ — предикатная константа L типа $\langle n\rangle$ и φ — формула L с G в качестве единственной свободной переменной, то $\mathcal{P}[\top G\varphi]$ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$, если и только если либо существует в точности один n-местный $\mathbf{D}A$-предикат X на членах U, такой, что X вып$_{i,\mathfrak{A}}$ φ, и этот предикат принадлежит $F_{\mathcal{P}}(i)$, либо неверно, что существует в точности один такой предикат, и пустой предикат (то есть $\mathbf{D}A \times \{\Lambda\}$) принадлежит $F_{\mathcal{P}}(i)$.

(12') Если G есть 0-местная предикатная переменная и X есть $\langle \mathbf{D}A\rangle$-предикат *), то X вып$_{i,\mathfrak{A}}$ $G[\,]$, если и только если пустая последовательность есть член $X(i)$ (следовательно, если и только если $X(i) = \{\Lambda\}$).

В силу (8'), предикатные переменные пробегают по свойствам и отношениям возможных индивидов. В силу (10'), $\Box$ будет рассматриваться как *стандартный* оператор необходимости. Вследствие (8') и более ранних замечаний 0-местные предикатные переменные пробегают по суждениям, следовательно, мы можем, согласно (12'), читать $G[\,]$ как „суждение G истинно“.

Квантификации по индивидным концептам и по отношениям (в экстенсиональном смысле) в системе нет, но тем не менее в ней можно построить их аналоги. Пусть $\langle A, F\rangle$ будет возможной интерпретацией для интенсионального языка, а U — объединением множеств A_i, где $i \in \mathbf{D}A$. Под *индивидным концептом* в $\langle A, F\rangle$ понимается функция, определенная на $\mathbf{D}A$ и принимающая значения из области U. Индивидные концепты могут быть отождествлены с $\langle \mathbf{D}A, U\rangle$-предикатами, выполняющими формулу

$$\Box \bigvee u \bigwedge v\, (G[v] \leftrightarrow v = u).$$

---

* Речь идет именно о $\langle \mathbf{D}A\rangle$-предикате, а не о $\mathbf{D}A$-предикате; $\langle \mathbf{D}A\rangle$-предикат есть функция, определенная на множестве $\mathbf{D}A$ со значениями „истина“ и „ложь“. — *Прим. перев.*

Далее, как заметил Дж. Кэмп, $\langle U, U\rangle$-отношения могут быть отождествлены с $\langle \mathbf{D}A, U, U\rangle$-предикатами, выполняющими формулу

$$\bigwedge u \bigwedge v(\square G[u, v] \vee \square \neg G[u, v]);$$

и то же самое для отношений с большим или меньшим числом мест.

Теперь введем точные определения, следствиями которых были бы критерии (1)—(12'). Мы примем, что $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для интенсионального языка L, $\mathfrak{A} = \langle A, F\rangle$, U есть объединение множеств A_j ($j \in \mathbf{D}A$), а $i \in \mathbf{D}A$. Мы не можем в данном случае продолжать считать, что обыкновенные бесконечные последовательности приписывают значения переменным; наличие переменных различных типов требует рассмотрения *двойных* последовательностей, в которых один из индексов определяет тип данной переменной. В частности, под *системой*, ассоциированной с $\mathfrak{A}$, будем понимать функцию x, областью которой являются пары $\langle n, k\rangle$, где n есть натуральное число, а k — целое число $\geqslant -1$; если $\langle n, k\rangle$ есть такая пара и $k = -1$, то $x(\langle n, k\rangle) \in U$, а если $k \geqslant 0$, то $x(\langle n, k\rangle)$ есть k-местный $\mathbf{D}A$-предикат, определенный на членах U. Пусть S есть множество всех систем, ассоциированных с $\mathfrak{A}$; как и раньше, мы будем понимать под $x_{n, k}$ значение функции $x(\langle n, k\rangle)$. Примем, что, кроме того, n и k суть натуральные числа; если x есть функция, то под x^a_b будем понимать функцию, которая получается из функции x подстановкой b вместо значения x при аргументе a, то есть функцию $(x - \{\langle a, x(a)\rangle\}) \cup \{\langle a, b\rangle\}$.

Экстенсионал терма и формулы вводится одновременной рекурсией.

Определение IX. (1) Если c есть индивидная константа L, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(c)$ есть функция H, заданная на S, такая, что для всех $x \in S$, $H(x) = F_c(i)$.

(2) $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(v_n)$ есть функция H, заданная на S, такая, что для всех $x \in S$, $H(x) = x_{n, -1}$.

(3) $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(G_{n, k})$ есть функция H, определенная на области S, такая, что для всех $x \in S$, $H(x) = x_{n, k}$.

(4) Если φ есть формула L, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\top G_{nk}\varphi)$ есть функция H, заданная на области S, такая, что для всех $x \in S$ либо $\{H(x)\} = \{Y : x^{\langle n, k\rangle}_Y \in \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi)\}$, либо не существует такого Z, для которого $\{Z\} = \{Y : x^{\langle n, k\rangle}_Y \in \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi)\}$, и $H(x)$ есть $\mathbf{D}A \times \{\bigwedge\}$.

(5) Если ζ есть индивидная константа L или индивидная переменная, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\mathbf{E}[\zeta])$ есть $\{x : x \in S$ и $(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta))(x) \in A_i\}$.

(6) Если ζ и η являются либо индивидной константой L, либо индивидной переменной, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta = \eta)$ есть $\{x : x \in S$ и $(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta))(x)$, такой же, что и $(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\eta))(x)\}$.

(7) Если η есть n-местная предикатная переменная или терм $\top G\varphi$ (где G — n-местная предикатная переменная) и каждая из $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ является индивидной константой L или индивидной переменной, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\eta[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}])$ есть $\{x : x \in S$ и $\langle(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta_0))(x), \ldots, (\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta_{n-1}))(x)\rangle \in (\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}})(\eta)(x)(i)\}$.

(8) Если P есть предикатная константа L типа $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle$ и для каждого $i < n$ либо $s_i \geqslant 0$ и ζ_i есть или s_i-местная предикатная переменная, или терм $\top G\varphi$, в котором G есть s_i-местная предикатная переменная и φ есть формула L, либо $s_i = -1$ и ζ_i есть индивидная константа или индивидная переменная L, то

$$\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(P[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}]) \text{ есть } \{x : x \in S \text{ и } \langle(\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta_0))(x), \ldots, \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\zeta_{n-1}))(x)\rangle \in F_p(i)\}.$$

(9) Если φ, ψ — формулы L, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\neg\varphi)$ есть $S - \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi)$ и соответственно для других пропозициональных связок.

(10) Если φ — формула L, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\bigvee v_n\varphi)$ есть $\{x : x \in S$ и для некоторого $y \in U$ система $x^{\langle n, -1\rangle}_y \in \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi)\}$ и соответственно для $\bigwedge v_n\varphi$.

(11) Если φ — формула L, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\bigvee G_{n, k}\varphi)$ есть $\{x : x \in S$ и для некоторого k-местного $\mathbf{D}A$-предиката Y на членах U система $x^{\langle n, k\rangle}_Y \in \mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi)\}$ и соответственно для $\bigwedge G_{n,k}\varphi$.

(12) Если φ — формула L, то $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\square\varphi)$ есть $\{x : x \in S$ и для всех $j \in \mathbf{D}A$, $x \in \mathrm{Ext}_{j, \mathfrak{A}}(\varphi)\}$.

Определение X. Если φ есть предложение L, то φ истинно$_{i\mathfrak{A}}$, если и только если $\mathrm{Ext}_{i, \mathfrak{A}}(\varphi) = S$.

Определение XI. Если φ есть формула L, имеющая в точности одну свободную переменную, то y вып$_{i, \mathfrak{A}}\,\varphi$, если и только если либо существует натуральное число n, такое, что свободная переменная φ есть v_n, и существует

$x \in \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)$, такое, что $x_{n,-1} = y$, либо имеются натуральные числа n и k, такие, что свободная переменная φ есть $G_{n,k}$, и существует такое $x \in \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)$, что $x_{n,k} = y$.

Определение XII. Если φ — терм или формула $\mathbf{L}$, то $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$, или *интенсионал* φ, в интерпретации $\mathfrak{A}$ есть такая функция H с областью $\mathbf{D}A$, что для любого $i \in \mathbf{D}A$, $H(i) = \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)$.

Определение XIII. Предложение φ есть *логическое следствие* (в смысле интенсиональной логики) множества предложений Γ, если и только если для каждого интенсионального языка L и для всех $\mathfrak{A}$, A, F, i, где $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ и $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация L, $i \in \mathbf{D}A$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ есть множество предложений L и для всякого $\psi \in \Gamma$ если ψ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$, то и φ истинно$_{i,\mathfrak{A}}$. Предложение *логически истинно*, если и только если оно есть логическое следствие пустого множества. Предложение φ *логически эквивалентно* предложению ψ, если и только если предложение $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ логически истинно.

Замечания об экстенсионалах и интенсионалах, сделанные выше по поводу прагматических языков, приложимы и к настоящим определениям, с той только разницей, что „бесконечные последовательности“ должны быть заменены „системами“. Далее, критерии (1)—(12′) являются непосредственными следствиями из определений IX—XI.

Ранее уже говорилось, что допускаемые нами дескрипции, то есть фразы с операторами дескрипции по предикатным переменным, элиминируемы. Теперь мы можем сделать более точное утверждение: если φ есть некоторое предложение интенсионального языка L, то существует предложение L без дескрипций, логически эквивалентное φ. Например, если φ есть

$$\mathscr{P}[\top G \mathscr{Q}[G]],$$

где G есть одноместная предикатная переменная, а P и Q предикатные константы типа $\langle 1 \rangle$, то φ логически эквивалентно

$$\bigvee G(\mathscr{Q}[G] \wedge \bigvee H(\mathscr{Q}[H] \rightarrow \Box \bigwedge x(H[x] \leftrightarrow G[x])) \wedge \mathscr{P}[G]) \vee (\neg \bigvee G(\mathscr{Q}[G] \wedge \bigwedge H(\mathscr{Q}[H] \rightarrow \Box \bigwedge x(H[x] \leftrightarrow G[x]))) \wedge \bigvee G(\Box \bigwedge x \neg G[x] \wedge \mathscr{P}[G])).$$

Удобство дескрипций состоит в том, что они дают возможность строить имена для особых предикатов. Вот

как, например, мы можем различать выражения, обозначающие свойства, и выражения, обозначающие двухместные предикаты, если они записаны одной и той же формулой (принимая во внимание места, занимаемые отдельными индивидными переменными): если φ есть формула и u, v — различные индивидные переменные, то под $\hat{u}\varphi$ (может читаться как „свойство тех u, которые удовлетворяют условию φ) будем понимать терм $\top G \bigwedge u \Box (G[u] \leftrightarrow \varphi)$, а под $\hat{u}\hat{v}\varphi$ (читается как „отношение между u и v, удовлетворяющих φ“) — терм $\top H \bigwedge u \bigwedge v \Box (H[u, v] \leftrightarrow \varphi)$, где G, H есть соответственно первая одноместная и первая двухместная предикатные переменные, не входящие в φ. Мы можем, таким образом, вводить определения для случая трех переменных, и даже больше; но — и это намного интереснее — мы можем также ввести определения для пустой последовательности переменных. В частности, если φ есть формула, то под $^\wedge\varphi$ будем понимать терм $\top G \Box (G[\,] \leftrightarrow \varphi)$; этот терм обозначает суждение, выраженное формулой φ, и может читаться как „суждение, что φ“ или просто „что φ“ и служит тем же целям, для которых Каплан [11] построил терм „$\bar{\varphi}$“.

Из определения IX ясно, что предложения интенсиональных языков в отличие от предложений прагматических языков могут содержать косвенные компоненты — то есть такие, *интенсионалы* которых приходится рассматривать для определения *экстенсионала* всего выражения, — только одного вида; это компоненты, находящиеся в области действия оператора $\Box$. К такому же результату можно прийти, беря в качестве исходного косвенного контекста не $\Box\varphi$, а $^\wedge\varphi$ — и тождество суждений, тогда $\Box\varphi$ можно было бы определить как $^\wedge\varphi = {}^\wedge \bigwedge v_0 v_0 = v_0$.

Теперь посмотрим, как можно ввести операторы в интенсиональные языки. (Наблюдение, что это может быть сделано, и настоящее исполнение принадлежат совместно Дж. Кэмпу и мне.) Предположим, что L есть некоторый прагматический язык и $\langle A, F, R \rangle$ — некоторая возможная интерпретация для него. Предположим также, что операторам N языка L взаимно однозначно соответствуют предикатные константы N' типа $\langle 0 \rangle$. Пусть L' будет интенсиональным языком, все индивидные и предикатные константы которого содержатся в L вместе с символами N', соответствующими операторам N языка L.

Пусть F' таково, что $\langle A, F' \rangle$ есть возможная интерпретация для интенсионального языка L$'$, $F \subseteq F'$, а для каждого оператора N языка L и для каждого $i \in \mathbf{D}A$ $F'_{N'}(i)$ — это $\{\langle U \rangle : U$ есть $\langle \mathbf{D}A \rangle$-предикат и $\langle i \{j : j \in \mathbf{D}A$ и $U(j) = \{\wedge\}\} \rangle \in R_N\}$. Тогда мы можем легко доказать следующее: если φ есть предложение L и если φ' получается из φ заменой каждой подформулы вида $N\psi$, где N есть оператор L, а ψ — формула L, на подформулу

$$\vee G(\Box(G[\,] \leftrightarrow \psi) \wedge N'[G]),$$

и $i \in \mathbf{D}A$, то φ истинно в i при *прагматической* интерпретации $\langle A, F, R \rangle$, если и только если φ' истинно в i при *интенсиональной* интерпретации $\langle A, F' \rangle$.

Таким образом, мы свели прагматику к интенсиональной логике. Это сведение, грубо говоря, заключалось в рассмотрении *одноместных модальностей* (то есть отношений между точками соотнесения и множествами точек соотнесения) как свойств суждений. И наоборот, каждое свойство суждений соответствует одноместной модальности. В самом деле, если $\langle A, F \rangle$ есть интерпретация для интенсионального языка и в этой интерпретации имеется свойство суждений X (то есть $\langle \mathbf{D}A, U \rangle$-предикат, где U есть множество всех $\langle \mathbf{D}A \rangle$-предикатов), то соответствующая одноместная модальность будет являться множеством пар $\langle i, J \rangle$, таких, что $i \in \mathbf{D}A$, и существует $Y \in X(i)$, такой, что $J = \{j : j \in \mathbf{D}A$ и $Y(j) = \{\wedge\}\}$.

Теперь уточним, в каком смысле интенсиональная логика может быть *частично* сведена к прагматике. Пусть L будет интенсиональным языком, все предикатные константы которого имеют тип $\langle 0 \rangle$ или $\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$, где $s_p = -1$ для всех $p < n$, и пусть $\langle A, F \rangle$ будет некоторой интерпретацией для языка L. Пусть предикатные константы $\mathcal{P}$ языка L типа $\langle 0 \rangle$ одно-однозначно отображаются на операторы $\mathcal{P}'$, и пусть N будет оператором, не входящим в их число. Пусть L$'$ будет прагматическим языком, у которого те же индивидные константы, что и в L, те же предикатные константы, что и константы L, которые не имеют типа $\langle 0 \rangle$, и операторами которого являются N и $\mathcal{P}'$, где $\mathcal{P}$ есть предикатная константа типа $\langle 0 \rangle$. Пусть F' и R таковы, что $\langle A, F', R \rangle$ есть возможная интерпретация для прагматического языка L$'$, $F \subseteq F$, R_N есть множество пар $\langle i, J \rangle$, таких, что $i \in \mathbf{D}A$ и $J = \mathbf{D}A$, и для каждого предиката $\mathcal{P}$ языка L типа $\langle 0 \rangle$, $R_{\mathcal{P}'}$ есть множество пар $\langle i, J \rangle$, таких, что $i \in \mathbf{D}A$ и существует $Y \in F_{\mathcal{P}}(i)$ такой, что $J = \{j : j \in \mathbf{D}A$ и $Y(j) = \{\wedge\}\}$. Тогда мы легко можем показать, что если $i \in \mathbf{D}A$, φ — предложение L и φ' получается из φ заменой каждой подформулы $\mathcal{P}[{}^\wedge\psi]$, где $\mathcal{P}$ есть предикатная константа типа $\langle 0 \rangle$, а ψ — формула L, на $\mathcal{P}'\psi$ и φ' есть предложение прагматического языка L$'$ (это налагает некоторые ограничения на форму φ), то φ истинно в i при *интенсиональной* интерпретации $\langle A, F \rangle$, если и только если φ' истинно в i при *прагматической* интерпретации $\langle A, F', R \rangle$.

Тот факт, что одноместные модальности в известном смысле совпадают со свойствами суждений, придает этим модальностям интерес и создает интуитивное обоснование для использования их при интерпретировании операторов. (Совершенно то же можно было бы сказать о многоместных модальностях и многоместных операторах, если бы таковые были включены в прагматическую систему.) Отношения между различными системами в общих чертах могут быть выражены следующим образом. Если под *модальной логикой* мы понимаем ту часть интенсиональной логики, в которой не рассматриваются формулы с предикатными переменными, то интенсиональная логика может рассматриваться как *второпорядковая модальная логика* и прагматика в известном смысле содержится в ней: в самом деле, прагматика может рассматриваться как первопорядковая часть интенсиональной логики.

Конечно, ничто не принуждает нас останавливаться на модальной логике *второго порядка*. Мы могли бы вполне очевидным образом расширить настоящее построение и получить разнообразные системы высших порядков вплоть до трансфинитного. Однако только система второго порядка нужна для того непосредственного применения к обсуждению философских проблем, основу для которого призвана была заложить настоящая работа.

Например, убеждения могут быть естественным образом рассмотрены в интенсиональной логике. Пусть L будет интенсиональным языком, содержащим предикатную константу $\mathcal{B}$ типа $\langle -1, 0 \rangle$. Если $\langle A, F \rangle$ есть возможная интерпретация для L, то мы будем рассматривать область определения функции A как множество всех возможных миров, A_i — как множество объектов, существующих в возможном мире i, а $F_c(i)$ как экстенсионал дескриптивной константы c в мире i. Тогда $\langle \mathbf{D}A \rangle$-предикат может с полным основанием рассматриваться как суждение в подлинном философском смысле, а не только в том расширенном значении, в каком он рассматривался раньше, а интенсионал предложения в интерпретации $\langle A, F\rangle$ — как суждение, выражаемое этим предложением (в интерпретации $\langle A, F\rangle$). Мы рассматриваем $\mathscr{B}$ как сокращение для „убежден“ и считаем $F_{\mathscr{B}}(i)$ множеством пар $\langle x, U\rangle$, таких, что x верит в суждение U в возможном мире i. Идея рассматривать убеждение как эмпирическое отношение между индивидами и суждениями не нова. Ряд трудностей, связанных с этим подходом, рассеивается, если осуществлять его в рамках нашего метода, в особенности снимается проблема квантификации по переменным в области действия оператора „убежден“ и проблема итерации таких операторов [1].

Рассмотрим утверждение „существует предмет, относительно которого Джонс убежден, что Робинсон убежден, что этот объект имеет форму шара“. В нем встречается и итерация, и квантификация в непрямых контекстах; но в L оно выражается (при $\langle A, F\rangle$) простым предложением $\bigvee x\,(E[x] \wedge \mathscr{B}[J, {}^\wedge\mathscr{B}[R, {}^\wedge S[x]]])$, где J и R — индивидные константы, обозначающие Джонса и Робинсона соответственно, и S есть предикатная константа, выражающая свойство „иметь форму шара“. Если же мы предпочитаем не иметь дела с дескрипциями, то эту фразу можно выразить логически эквивалентным предложением

$$\bigvee x \bigvee G\,(E[x] \wedge \mathscr{B}[J, G] \wedge \Box\,(G[\,] \leftrightarrow \bigvee H\,(\mathscr{B}[R, H] \wedge \Box\,(H[\,] \leftrightarrow S[x])))).$$

Здесь может быть выдвинуто два возражения. Во-первых, какой эмпирический смысл можно придать убеждению как отношению между лицами и суждениями? Я полагаю, что не меньший, чем у обычных эмпирических предикатов. Можно дать критерии, хотя, возможно, и не определение, для этого отношения в бихевиористских терминах. Приведу два примера, правда неотшлифованных и не до конца проанализированных.

[1] На проблемы первого рода много раз указывал Куайн, например в книге [21]; проблемы второго рода встают в связи с диссертацией Каплана [11], система которого кажется неспособной к расширению, адекватному для рассмотрения утверждений с итерированными выражениями для убеждений.

(1) Если φ есть некоторое предложение, выражающее суждение G, то утверждение, что x соглашается с φ, подтверждает (хотя, конечно, неокончательно) утверждение, что x убежден, что G.

(2) Если φ — некоторая формула, которая содержит в точности одну свободную переменную и выражает свойство H (в том смысле, что для всех $i \in \mathbf{D}A$, $H(i)$ есть множество возможных индивидов, выполняющих φ в i при данной интерпретации), то утверждение, что x соглашается с φ, когда ему указывают на y, подтверждает (хотя, опять-таки, неокончательно) утверждение, что x убежден в суждении, что $H[y]$.

Второе возражение может касаться того факта, что если φ и ψ есть какие-то логически эквивалентные предложения, то предложение

$$\mathscr{B}[J, {}^\wedge\varphi] \to \mathscr{B}[J, {}^\wedge\psi]$$

логически истинно, хотя и может при известных обстоятельствах оказаться необоснованным. На это можно было бы возразить, что заключение все-таки, по-видимому, неизбежно, если в качестве объектов убеждения действительно берутся суждения, но это заключение перестает казаться ложным, если последовательно применяется принцип (1), а его противоречие с интуицией объясняется, пожалуй, существованием другого понятия убеждения, объектами которого являются предложения или в некоторых случаях комплексы, состоящие частично из открытых формул [1].

В качестве другого примера рассмотрим глагол „казаться“: „u кажется v имеющим форму шара“.

Пусть L будет определено, как и выше, с той лишь разницей, что теперь в L будет иметься предикатная константа $\mathscr{G}$ типа $\langle -1, 1, -1\rangle$; если $\langle A, F\rangle$ есть возможная интерпретация для L и $i \in \mathbf{D}A$, то $F_{\mathscr{G}}(i)$ будет считаться множеством троек $\langle x, U, y\rangle$, таких, что в возможном мире i y кажется, что x имеет свойство U. Представленная выше формула будет выражаться в L формулой

$$\mathscr{G}[u, \hat{w}S[w], v].$$

[1] Частичный анализ этого понятия может быть найден в работе [18]. Однако он был неполон и непригоден в тех случаях, для которых предназначен критерий подтверждения (2) и в которых убеждения касаются объектов, не имеющих имен.

Мы не предпринимали никаких попыток *определить* оператор „убежден" или „ему кажется". Но это не избавляет нас от необходимости прояснить логический статус этих глаголов и понятий логической истины и логического следования для рассуждений, в которых они встречаются; и это, возможно, служит главным требованием для оценки ряда философских доводов. Однако область применения интенсиональной логики в философии, по моему мнению, этим не исчерпывается, более важные применения могут быть найдены и в других областях, особенно в метафизике и эпистемологии, как это обсуждалось в работе [15].

Здесь, по-видимому, было бы уместно хотя бы кратко охарактеризовать промежуточную систему, принадлежащую Д. Скотту и мне, которая может быть названа *расширенной прагматикой* [1].

Символы *расширенного прагматического языка* принадлежат к следующим категориям:

(1) логические константы прагматики;
(2) круглые и квадратные скобки и запятые;
(3) индивидные переменные;
(4) индивидные константы;
(5) операторы степени $\langle m, n, p\rangle$ для всех натуральных чисел m, n, p.

Множество *формул* такого языка L есть наименьшее множество Γ, удовлетворяющее ряду известных условий, а также условию, что $Nu_0, \ldots, u_{m-1}[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}, \varphi_g, \ldots, \varphi_{p-1}]$ принадлежит Γ, если N есть оператор L, имеющий степень $\langle m, n, p\rangle$, $u_0, \ldots, u_{m-1}$ есть различные индивидные переменные, каждая из $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ — либо индивидная константа L, либо индивидная переменная, а $\varphi_0, \ldots, \varphi_{p-1}$ принадлежит Γ.

Возможная интерпретация для расширенного прагматического языка L есть пара $\langle A, F\rangle$, удовлетворяющая условиям (1), (2), (4) определения I и, кроме того, такая, что (3′) F есть функция, определенная на множестве индивидных констант и операторов L, и (5′), если N есть оператор L степени $\langle m, n, p\rangle$, F_N есть $\langle \mathbf{D}A, U_0, \ldots, U_{n-1}, V_0, \ldots, V_{p-1}\rangle$-предикат, где каждое $U_i\,(i < n)$ есть объединение множеств A_j, где $j \in \mathbf{D}A$ и каждое $V_i\,(i < p)$ есть множество m-местных $\mathbf{D}A$-предикатов на членах объединения множеств $A_j\,(j \in \mathbf{D}A)$. *Экстенсионал* индивидной переменной, индивидной константы или формулы по отношению к возможной интерпретации $\mathfrak{A}$ вида $\langle A, F\rangle$ и точке соотнесения $i \in \mathbf{D}A$ определяется так же, как и в определении II, вместе с рекурсией, состоящей из пунктов (1), (2), (4), (5) определения III, и вместе со следующим пунктом: если N есть оператор L степени $\langle m, n, p\rangle$, $k_0, \ldots, k_{m-1}$ — различные натуральные числа, каждое из $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ есть индивидная константа L или индивидная переменная, а $\varphi_0, \ldots, \varphi_{p-1}$ — формулы L, то $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(Nv_{k_0}, \ldots, v_{k_{m-1}}[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}, \varphi_0, \ldots, \varphi_{p-1}]$ — это $\{x : x \in U^\omega$ и $\langle(\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta_0)(x), \ldots, \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta_{n-1})(x), Y_{0,x}, \ldots, Y_{p-1,x}\rangle \in F_N(i)\}$, где для каждого $q < p$ и $x \in U^\omega$, $Y_{q,x}$ есть

$$\{\langle j, \{\langle y_0, \ldots, y_{m-1}\rangle : x^{k_0}_{y_0}, \ldots, x^{k_{m-1}}_{y_{m-1}} \in \mathrm{Ext}_{j,\mathfrak{A}}(\varphi_q)\}\rangle : j \in \mathbf{D}A\}.$$

В частности, если N есть оператор степени $\langle 0, n, 0\rangle$, то $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(N[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}])$ есть $\{x : x \in U^\omega$ и $\langle \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi_0)(x), \ldots, \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta_{n-1})(x)\rangle \in F_N(i)\}$, а N в таком случае будет играть роль n-местной предикатной константы; если же N имеет степень $\langle 0, 0, 1\rangle$, то $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(N[\varphi])$ есть $\{x : x \in U^\omega$ и $\langle\{\langle j, \{\Lambda\}\rangle : j \in \mathbf{D}A$ и $x \in \mathrm{Ext}_{j,\mathfrak{A}}(\varphi)\} \cup \{\langle j, \Lambda\rangle : j \in \mathbf{D}A$ и $x \notin \mathrm{Ext}_{j,\mathfrak{A}}(\varphi)\}\rangle \in F_N(i)\}$, а N в таком случае может служить заменителем для (одноместного) оператора прагматики. Далее, оператор расширенной прагматики произвольной степени $\langle m, n, p\rangle$ может быть заменен в интенсиональной логике предикатной константой типа $\langle s_0, \ldots, s_{n-1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{p-1}\rangle$, где каждое $s_i\ (i < n)$ есть -1 и каждое $t_i\ (i < p)$ есть m.

Таким образом, в определенном смысле прагматика содержится в расширенной прагматике, которая в свою очередь содержится в интенсиональной логике. Мы можем рассматривать расширенную прагматику как дающую более всестороннюю, нежели обыкновенная прагматика, первопорядковую редукцию для части интенсиональной логики. Например, если $\mathscr{B}$, подобно оператору „убежден", является предикатной константой интенсиональной логики типа $\langle -1, 0\rangle$, мы можем заменить $\mathscr{B}$ оператором $\mathscr{B}'$ степени $\langle 0, 1, 1\rangle$

[1] В первоначальном варианте данной статьи описания расширенной прагматики не содержалось; оно было добавлено после того, как я познакомился в июне 1967 года с трактовкой модальной логики Скоттом и обсудил ее с ним и с Капланом. Принципиальная разница между системой Скотта и расширенной прагматикой состоит в том, что в первой допускается квантификация не по индивидам, а лишь по индивидным концептам.

(в расширенной прагматике) и утверждение

$$\mathcal{B}[x, \hat{}\varphi]$$

выражать эквивалентным образом утверждением

$$\mathcal{B}'[x, \varphi].$$

Соответственно, если $\mathcal{G}$, подобно „быть убежденным, что",— предикатная константа типа $\langle 1, 1, -1\rangle$, мы можем заменить ее оператором $\mathcal{G}'$ степени $\langle 1, 2, 1\rangle$ и выражать утверждение

$$\mathcal{G}[u, \hat{\omega}\varphi, v]$$

с помощью

$$\mathcal{G}'\omega[u, v, \varphi].$$

(Из этого примера, так же как из общего определения экстенсионала, должно быть ясно, что m переменных, непосредственно следующих за оператором $\langle m, n, p\rangle$, должны рассматриваться как *связанные*.) Мы, разумеется, не хотим сказать, что все формулы интенсиональной логики, содержащие $\mathcal{B}$ или $\mathcal{G}$, могут быть выражены в расширенной прагматике; например, утверждению „Джонс убежден в чем-то таком, во что Робинсон не верит" не соответствует никакая формула расширенной прагматики.

Теперь мы можем рассмотреть различные технические свойства трех систем, сформулированных в этой статье. Прежде всего надо отметить, что теорема компактности не выполняется для интенсиональной логики. Другими словами, это значит вот что: пусть множество предложений называется *выполнимым*, если существует не-пустая интерпретация $\mathfrak{A}$ и точка соотнесения i в $\mathfrak{A}$ такая, что все предложения этого множества истинны в i при $\mathfrak{A}$; тогда не будет выполняться утверждение, что для любого множества предложений интенсиональной логики Γ:

(3) Если любое конечное подмножество Γ выполнимо, то и Γ выполнимо.

Это очевидным образом вытекает из того сведе́ния обычной логики второго порядка к интенсиональной логике, о котором мы упомянули раньше, и из широко известного факта, что теорема компактности не выполняется в логике второго порядка. С другой стороны, пусть φ будет называться предикативным предложением, если φ — предложение интенсиональной логики, не содержащее дескриптивных выражений и такое, что (1), если G есть предикатная переменная, ψ — формула, а $\bigwedge G\psi$ — подформула φ, то существуют $\mathcal{P}, \zeta_0, \ldots, \zeta_n, \chi$ такие, что $\mathcal{P}$ есть предикатная константа, каждое из ζ_i $(i \leqslant n)$ есть либо индивидная константа, либо индивидная переменная, либо предикатная переменная, χ — формула, ψ есть формула $(\mathcal{P}[\zeta_0, \ldots, \zeta_n] \rightarrow \chi)$, а $G - \zeta_i$ для некоторого $i \leqslant n$, и (2) если G есть предикатная переменная, ψ — формула, а $\bigvee G\psi$ — подформула φ, то существуют $\mathcal{P}, \zeta_0, \ldots, \zeta_n, \chi$, удовлетворяющие такому же условию, что и в (1), за исключением того, что ψ теперь есть $(\mathcal{P}[\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n] \wedge \chi)$. Для *предикативных* предложений интенсиональной логики теорема компактности выполняется; другими словами, утверждение (3) выполняется для любого множества предикативных предложений [1]. Отсюда можно заключить, что теорема компактности без ограничений выполняется для прагматики и для расширенной прагматики, то есть что утверждение (3) верно как для любого множества Γ предложений прагматики, так и для любого множества Γ предложений расширенной прагматики; для этого мы используем вышеописанное сведение обоих языков к интенсиональной логике и замечаем, что в результате такого сведения получаются исключительно предикативные предложения.

Сходные замечания приложимы к вопросу о рекурсивной перечислимости класса логически истинных предложений во всех трех рассматриваемых системах. Однако сначала надо сказать о том, какой смысл имеет рекурсивная перечислимость в этом контексте. Мы не требовали, чтобы символы, из которых были построены наши языки, составляли бы счетное множество, поэтому здесь неуместно говорить о гёделевской нумерации всех выражений. Но можно предположить, что для некоторого счетного подмножества S множества всех выражений может быть дана гёделевская нумерация, удовлетворяющая всем обыкновенным условиям, можно, далее, предположить, что все логические константы, круглые и квадратные скобки, запятые, все индивидные переменные, все предикатные переменные,

[1] Это утверждение, формулировка которого частично принадлежит Дж. Кэмпу, может быть довольно легко доказано на базе теоремы полноты для логики ω-порядка Генкина [10] и не составляет особенности второпорядковой модальной логики; в самом деле, теорема компактности верна для предикатных предложений модальной логики высших порядков, содержащих переменные всех конечных уровней.

бесконечное множество n-местных предикатных констант (для каждого n), бесконечное множество предикатных констант каждого типа, бесконечное множество одноместных операторов и бесконечное множество операторов каждой степени есть в S и что S замкнуто относительно сочленения двух выражений. Когда мы говорим, что множество выражений рекурсивно или рекурсивно перечислимо, мы имеем в виду, что рекурсивным или рекурсивно перечислимым при определенной гёделевской нумерации является подмножество S.

Отождествим язык с множеством символов, которое он содержит; соответственно, мы можем говорить о рекурсивных языках. Тем же методом, какой был указан в связи с компактностью, легко показать, что (1) имеются рекурсивные интенсиональные языки, в которых множество логических истин не является рекурсивно перечислимым; (2) если L — некоторый рекурсивный интенсиональный язык, то множество логически истинных предикативных предложений L рекурсивно перечислимо; (3) если L — некоторый рекурсивный прагматический язык, то множество всех логических истин L рекурсивно перечислимо.

На базе (2) — (4) вместе с теоремой Крейга [6] мы можем, разумеется, показать, что каждое из трех множеств, упомянутых в (2) — (4), рекурсивно аксиоматизируемо (с использованием правила отделения). Однако представляется желательным найти простую и естественную аксиматизацию этих множеств. Одна из трех встающих таким образом проблем была окончательно разрешена: Д. Каплан недавно получил аксиоматизацию множества логических истин (обыкновенной) прагматики. Он получил также аксиоматизацию для множества логически истинных предложений системы, весьма близкой к расширенной прагматике похоже, что, когда его аксиоматизация станет доступной, ее можно будет распространить на расширенную прагматику. Однако проблема аксиоматизации предикативной прагматической логики остается открытой.

В связи с проблемой аксиоматизации не будет, наверное, излишним упомянуть, что все наши три системы в определенном смысле чисто референциальны, а именно в том смысле, что

$$(4) \quad \bigwedge u \bigwedge v\,(u = v \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi'))$$

логически истинно, если u, v суть индивидные переменные, φ — формула рассматриваемого языка и φ' получается из φ заменой свободного вхождения u на свободное вхождение v, но она *не* чисто референциальна в другом смысле: не всегда истинно, что если c, d суть индивидные константы, φ — формула одного из рассматриваемых языков и φ' получается из φ заменой вхождения c на d, то формула

$$(5) \quad (c = d \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi'))$$

логически истинна. Отсюда, разумеется, следует, что логический закон снятия квантора общности выполняется не всегда; он выполняется, если в результате снятия вводится переменная, но не выполняется в общем случае, если в результате снятия вводится индивидная константа.

Существует общее (хотя и не всеобщее) соглашение, что (5) не должно быть логически истинным в модальных контекстах или в контекстах, где имеется оператор убеждения; рассмотрим, в частности, такой знакомый пример формулы (5):

Если Утренняя Звезда = Вечерняя Звезда, то Джонс убежден, что Утренняя Звезда появляется утром, если и только если он убежден, что Вечерняя Звезда появляется утром.

Однако на основании этого некоторые философы отказываются считать логически истинным и (4). Желательность принятия в качестве логической истины (4), но не (5) впервые, по-моему, явно обосновывалась в 1955 году в статье Монтегю [14], однако недавно этот тезис был развит Фоллесдаллом в [8] и Кокьяреллой в [5], а также в докладах проф. Р. Томасона и проф. Д. Фоллесдалла.

Позвольте мне закончить некоторыми замечаниями относительно истории интенсиональной логики. Первой серьезной и подробной попыткой такого рода является, кажется, работа Чёрча [3]. Независимо от него, Карнап в своих беседах предлагал отождествить интенсиональные объекты с функциями, сопоставляющими возможным мирам интенсионалы соответствующих родов, и рекомендовал отождествить возможные миры с моделями — в отличие от более позднего подхода Крипке, принятого в настоящей работе. Д. Каплан в своей диссертации [11] отметил некоторые недостатки системы Чёрча и представил измененную версию, призванную преодолеть эти недостатки, а также построил теорию моделей для исправленной системы, базирующейся на идеях Карнапа. Однако система Каплана страдает от указанного выше недостатка, связанного с итерацией эмпирических свойств суждений; эта трудность в значительной мере происходит от карнаповской идеи отождествить возможные миры с моделями. Более недавние попытки Ч. Ховарда, Д. Каплана и Д. Скотта (некоторые из них предшествовали, а некоторые были предприняты после доклада, в котором излагалось основное содержание этой статьи) избегают этой трудности, но разделяют вместе с работой Каплана [11] тот недостаток, что не допускают неограниченную квантификацию по обыкновенным индивидам. Но не думаю, что без такой квантификации можно естественным образом рассматривать естественный язык или адекватно ответить на куайновское возражение против квантификации в косвенных контекстах *.

* Основное возражение Куайна против допустимости квантификации в косвенных контекстах состоит как раз в том, что в таких контекстах происходит квантифицирование не по объектам, а по абстрактным сущностям. Для Куайна квантификация является той привилегированной языковой формой, которая непосредственно указывает на предметы, существующие в предметной области данной теории (иногда он говорит: „в онтологии данной теории"). Отсюда формулировка онтологического критерия Куайна: „быть — значит быть значением квантифицированной переменной". Рассмотрим теперь случай квантификации в косвенном контексте: пусть

(1) $(a=b) \wedge$ (Джонс убежден, что $a \neq b$),

(2) $(a=a) \wedge$ (Джонс убежден, что $a=a$)

суть истинные утверждения, где „a" и „b" — индивидные константы, например „Утренняя Звезда" и „Вечерняя Звезда". Отсюда, по правилам стандартной теории квантификации

(3) $\exists x\,(x=a) \wedge \neg$ (Джонс убежден, что $x=a$),

(4) $\exists x\,(x=a) \wedge$ (Джонс убежден, что $x=a$).

Поскольку один и тот же объект не может одновременно выполнять как (3), так и (4) (при правдоподобном предположении, что убеждения Джонса не являются логически противоречивыми), то Куайн делает вывод, что в косвенных контекстах квантифицированные переменные пробегают не по действительным объектам (в данном случае по небесным телам), ибо действительный предмет, о котором шла речь в (1) и (2), был всего один, а по идеальным сущностям — индивидным концептам. Поэтому Куайн делает вывод, что квантификация в косвенных контекстах предполагает идеалистическую онтологию. — *Прим. перев.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Anscombe E. The Intentionality of Sensation: A Grammatical Feature.— „Analytical Philosophy", Second Series, Oxford, 1965.

2. Bar-Hillel Y. Indexical Expressions.—„Mind", 63, 1954, p. 359—379.

3. Church A. A Formulation of the Logic of Sense and Denotation.—"Structure, Method, and Meaning", ed. by Henle P., Kallen H. M. and Langer S. K. New York, 1951.

4. Cocchiarella N. A Completeness Theorem for Tense Logic.— „The Journal of Symbolic Logic", 1966, p. 689—690.

5. Cocchiarella N. Tense Logic: A Study of Temporal Reference (Doctoral dissertation, University of California at Los Angeles), 1966.

6. Craig W. On Axiomatizability within a System.— „The Journal of Symbolic Logic", 18, 1953, p. 30—32.

7. Feigl H. and Sellars W. (eds.). Readings in Philosophical Analysis. New York, 1949.

8. Follesdal D. Referential Opacity and Modal Logic (Doctoral Dissertation, Harvard University, 1961).

9. Frege G. Über Sinn und Bedeutung.—"Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik", 100, 1892, S. 25—50.

10. Henkin G. Completeness in the Theory of Types.— „The Journal of Symbolic Logic" № 15, 1950, p. 81—91.

11. Kaplan D. Foundations of the Intentional Logic (Doctoral dissertation, University of California at Los Angeles, 1964).

12. Kripke S. Semantical Considerations on Modal Logic.— "Acta Philosophica Fennica", № 16, 1963, p. 83—94.

13. Montague R. Logical Necessity, Phisical Necessity, Ethics and Quantifiers.— "Inquiry", № 4, 1960, p. 259—269.

14. Montague R. On the Nature of Certain Philosophical Entities.—"The Monist", № 53, 1969, p. 159—194.

15. Montague R. Pragmatics.—"Contemporary Philosophy — La Philosophie Contemporaine" (ed. by R. Klibansky). La Nuova Editorice, Florence, 1968.

16. Montague R. Well-founded Relations; Generalizations of Principles of Induction and Recurtion.—"Bulletin of the American Mathematical Society", № 61, 1955, p. 442.

17. Montague R. and Kalish D. Remarks on Descriptions and Natural Deduction", part I.—"Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung", № 3, 1957, p. 50—64.

18. Montague R. and Kalish D. That.—"Philosophical Studies", № 10, 1959, p. 54—61.

19. Montague R., Scott D. and Tarski A. An Axiomatic Approach to Set Theory. Amsterdam (forthcoming).

20. Morris C. W. Foundations of the Theory of Sings.—"International Encyclopedia of Unified Science", vol. 1, No. 2, 1938.

21. Quine W. V. Word and Object, M. I. T. Press. Cambridge, Mass., 1960.

22. Tarski A. Pojecie prawdy w jezykach nauk dedukcyjnych (The concept of truth in the languages of the deductive Sciences).— "Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie", Class, III, No. 34, 1933.

23. Tarski A. Contributions to the Theory of Models. Part I.— "Indagationes Mathematicae", 16, 1954, p. 572—581.

24. Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford, 1956.

Р. Монтегю

ПРАГМАТИКА*

Наука о языке (иначе *семиозис* или *семиотика*) была разделена в работе Ч. Морриса [20] на три ветви — синтаксис, семантику и прагматику, которые кратко можно охарактеризовать следующим образом. Синтаксис рассматривает только отношения между языковыми выражениями, семантика — отношения между выражениями и теми объектами, которые обозначаются этими выражениями, а прагматика — отношения между выражениями, объектами, к которым относятся эти выражения, и теми лицами, которые используют эти выражения, или теми ситуациями, в которых они используются.

В то время когда Моррис писал это, синтаксис уже был развитой дисциплиной в значительной мере благодаря Тарскому, Гёделю и школе Гильберта (см. Тарский [25—27], Гёдель [6], Гильберт и Бернайс [7]). Современные исследования по синтаксису в основном распадаются на два направления: теорию доказательств и математическую лингвистику, которая пока остается скорее попыткой создать дисциплину, чем научной дисциплиной.

Основания семантики тоже уже были полностью заложены в то время, когда писал Моррис (в работе Тарского

* Montague R. Pragmatics.— In: "Contemporary philosophy". Firenze, La nuova editrice Italia, 1968, vol. I. Большая часть этой статьи представляет собой изложение сообщения, сделанного автором на Философском коллоквиуме Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе в декабре 1964 года, в Британской ассоциации по философии науки в июне 1966 года и в Стокгольмском университете в марте 1966 года. Работа над статьей частично финансировалась Национальным фондом по науке.

[28]), но наиболее широкое развитие эта теория получила позднее под названием *теории моделей* (см. сборник Аддисона, Генкина и Тарского [1], обширную библиографию работ в этой области, а также статью „Теория моделей" в сборнике "Contemporary philosophie", Firenze, 1968, vol. I). Выдвигалась идея — например, в седьмой статье книги Куайна [23],— что семантика делится на две дисциплины — теорию референции, соответствующую теории моделей и работам Тарского, и теорию смысла. Однако исследование показывает, что это деление, возможно, не самое лучшее; кажется, что теорию смысла естественнее было бы отнести к прагматике, как это делается ниже в разделе 2.

Однако развитие прагматики во времена монографии Морриса было еще делом будущего. В статье Бар-Хиллела [2] отмечалось, что прагматика занимается тем, что Ч. С. Пирс в прошлом столетии называл *индексными выражениями*, то есть такими словами и предложениями, значение которых можно определить, только зная ситуацию, в которой они использовались[1]; примерами могут служить слова «я», «здесь», а также предложения, содержащие ссылку на время их произнесения.

Прагматика не имела никакого строгого технического воплощения вплоть до 1959 года, когда автор этой статьи, к которому затем присоединились и другие, начал свои исследования, до сих пор в значительной мере остающиеся неопубликованными. Мне представляется желательным, чтобы прагматика, по крайней мере вначале, следовала бы за семантикой, занимающейся понятием истины (в модели или при определенной интерпретации), то есть сама обратилась бы к понятию истины, причем не только при определенной интерпретации, но и в определенной ситуации использования.

Я проанализировал это понятие для ряда специальных случаев; во многих из них важной чертой анализа являлась трактовка кванторов, развитая первоначально моим учеником проф. Н. Кокьяреллой в связи с временно́й логикой и сохраненная в излагаемой ниже общей теории. Однако в этой ранней работе понятия истины и выполнимости определялись заново для каждого специального

[1] Рассел называл эти выражения „эгоцентрическими частицами", Рейхенбах — „квазирефлексивными выражениями". Гудмен — „индикаторными словами", Куайн — „невечными предложениями".

случая. В особенности не было усмотрено никакого общего способа рассмотрения операторов вплоть до 1965 года, когда в работах д-ра Ч. Ховарда и моих было достигнуто полное формальное единство подхода.

1. Язык и интерпретации

Теперь я обрисую общий подход.

Под *прагматическим языком* понимается язык, содержащий символы (или атомарные выражения) следующих категорий:

(1) *логические константы* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$, $=$ (читаются соответственно как „неверно, что“, „и“, „или“, „если ... то“, „если и только если“ „для всех“, „для некоторых“, „равно“);

(2) скобки;

(3) индивидные переменные $v_0, \ldots, v_k, \ldots$;

(4) n-местные предикаты — для каждого натурального (то есть неотрицательного целого) числа n, в том числе выделенный одноместный предикат E (читается „существует“);

(5) n-местные функциональные символы, для каждого натурального числа n;

(6) n-местные операторы, для каждого положительного целого n. Мы будем требовать, чтобы символы первой, второй и третьей категорий содержал каждый прагматический язык; следовательно, прагматический язык можно отождествить с множеством предикатов, функциональных символов и операторов, которые он содержит. Таким образом, прагматическим языком может быть любое множество таких символов.

n-местный оператор есть символ, который, будучи помещен перед последовательностью из n предложений, порождает новое предложение. Примерами одноместных операторов являются выражения „необходимо“, „будет так, что...“, а примерами двухместных операторов — выражения „если было так, что..., то будет так, что...“, „при предположении, что ..., вероятно со степенью 1, что...“. Я исключаю 0-местные операторы, потому что они по своим функциям ничем не отличаются от 0-местных предикатов.

Термы (обозначающие выражения) и формулы прагматического языка L образуются именно так, как этого и

следовало ожидать. То есть множество *термов* L есть наименьшее множество Γ такое, что (1) все переменные находятся в Γ и (2) Γ содержит $A\zeta_0 \ldots \zeta_{n-1}$, если A есть n-местный функциональный символ L и $\zeta_0\, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ принадлежат Γ[1]. А множество *формул* L есть наименьшее множество Δ, такое, что (1) Δ содержит $P\zeta_0 \ldots \zeta_{n-1}$, где P есть n-местный предикат L, а $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ — термы L, в частности Δ содержит $\zeta = \eta$, где ζ и η — термы L, (2) Δ содержит $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ и $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, если только φ и ψ принадлежат Δ; (3) Δ содержит $\bigwedge u\varphi$ и $\bigvee u\varphi$, если u есть переменная и φ содержится в Δ и (4) Δ содержит $N\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$, где N есть n-местный оператор L, а $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ принадлежат Δ.

При интерпретации прагматического языка L мы будем принимать во внимание возможные ситуации использования. Нет необходимости рассматривать их во всей сложности; вместо этого мы можем сосредоточить наше внимание только на тех чертах, которые влияют на значение используемых выражений. Таким образом, достаточно будет задать комплекс всех относящихся к делу аспектов подразумевающихся возможных контекстов использования. Мы можем назвать эти комплексы *индексами* или, используя термин Д. Скотта, *точками соотнесения*. Например, если единственными индексными выражениями L были временные операторы, то в качестве точек соотнесения, естественно, должны быть выбраны моменты времени, понимаемые как возможные моменты произнесения высказывания. Если же L содержит, кроме того, личное местоимение первого лица „я“, как в ниже приведенном примере, то существенными становятся два аспекта ситуации использования, то есть говорящий и время произне-

[1] Предполагается, что метатеория совпадает с какой-либо формулировкой теории множеств с собственными классами (например, теория множеств Бернайса — Морзе с индивидами или без них; формулировку такой теории см. в приложении к Келли [10] или в монографии Монтегю, Скотта и Тарского [19]), к которой добавлены обозначения для различных символов и множеств символов объектного языка, символ сочленения (здесь его заменяет простое расположение символов друг за другом) и некоторые допущения относительно отождествления и различения символов и множеств символов объектного языка. Следует подчеркнуть, что $\neg$, $\wedge$ и т. п. являются не символами объектного языка, а, скорее, их метаязыковыми именами

сения; тогда в качестве точек соотнесения естественно выбрать упорядоченные пары, состоящие из личности и момента времени.

Другим видом информации, которую мы должны получить для интерпретации L, служат подразумевающиеся *интенсионалы* (или смыслы) каждого предиката L. Для этого мы должны определить для данного предиката P и для каждой точки соотнесения i объем (или денотат) P при i. Например, если точками соотнесения являются моменты времени, а P есть одноместный предикат „зеленый", то мы должны для каждого момента времени i определить, какое множество объектов считаются зелеными в i; если же P—двухместный предикат „быть женатым на...", то мы должны определить для каждого момента времени i множество упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, таких, что x и y считаются супругами в i.

Третьим видом требующейся информации являются подразумеваемые интенсионалы каждого функционального символа L. Это может быть сделано, как и в случае предикатов, путем определения для каждой точки соотнесения i подразумеваемого объема функционального символа в i. Например, если точками соотнесения снова являются моменты времени и мы рассматриваем одноместный оператор „быть женой", то нам необходимо определить для каждого момента времени функцию, которая приписывает каждому женатому мужчине лицо, рассматривающееся как его жена в i (а любому другому объекту—произвольно выбранный „нулевой объект"); если же мы рассматриваем 0-местный функциональный символ (или *индивидную константу*) „американский президент", мы должны будем для каждого момента времени определить лицо, которое рассматривается как американский президент в i.

Четвертым родом требующейся информации служит интерпретация операторов L. Для того чтобы получить ее, мы припишем каждому n-местному оператору L и каждой точке соотнесения i в качестве объема оператора при i n-местное отношение между множествами точек соотнесения. Это вместе с пунктом (5) приведенного ниже определения IV есть именно тот общий подход к интерпретации операторов, который был выработан Ховардом и мной в 1965 году; мотивировка такой интерпретации станет яснее позднее, после рассмотрения примеров.

Наконец, для интерпретации L мы должны указать множество *возможных объектов*, которые будут объектами рассмотрения. (В случае временно́й логики это множество будет включать по крайней мере все объекты, существующие в прошлом, настоящем или будущем.) Вышеприведенные эвристические замечания естественно приводят к следующему определению.

Определение I. *Возможная интерпретация для прагматического языка* L есть упорядоченная тройка $\langle I, U, F\rangle$—такая, что (1) I, U есть множества, (2) F—функция с областью определения L, (3) для каждого символа A в L F_A есть функция с областью определения I; (4) если P есть n-местный предикат L, а i принадлежит I, то $F_P(i)$ есть *n-местное отношение на U* (то есть множество упорядоченных n-ок членов U); (5) если A—n-местный функциональный символ L, а i принадлежит I, то $F_A(i)$ есть $(n+1)$-местное отношение на U, такое, что для всех $x_0, \ldots, x_{n-1}$, принадлежащих U, имеется в точности один объект y множества U, такой, что $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, y\rangle$ принадлежит $F_A(i)$; (6) если N—n-местный оператор L, а i принадлежит I, то $F_N(i)$ есть n-местное отношение на множестве всех подмножеств I.

Здесь следует сделать несколько замечаний. Я использую равным образом обозначения "F_P" и "$F(P)$" для значения функции; это удобно тогда, когда, как в вышеприведенных случаях, значение функции само является функцией. Конечные последовательности (или n-ки) обозначаются с помощью угловых скобок; например $\langle x\rangle$ есть одночленная последовательность, состоящая из x. Множество I в вышеприведенном определении есть множество всех *точек соотнесения* интерпретации $\langle I, U, F\rangle$. Если i—точка соотнесения и в L есть выделенный предикат E, то объекты x, такие, что $\langle x\rangle \in F_E(i)$, понимаются как объекты, существующие в i (при интерпретации $\langle I, U, F\rangle$). Множество U в определении рассматривается как множество *возможных объектов (возможных индивидов)* интерпретации $\langle I, U, F\rangle$; мы не требуем, чтобы каждый возможный индивид существовал в какой-нибудь точке соотнесения, хотя это дополнительное условие будет в действительности выполняться для ряда специальных случаев. В пунктах (4) и (5) мы устанавливаем, что объем предиката или функционального символа является отношением между *возможными* объектами или функцией, определенной на *возможных* объектах. Требование, чтобы значением предиката в данной точке соотнесения было отношение между существующими в этой точке соотнесения объектами, а значением функционального символа была бы функция, которая существующим объектам сопоставляет опять-таки существующие объекты, является чрезмерным ограничением. Чтобы показать это, предположим, что точками соотнесения являются моменты времени, и рассмотрим одноместный предикат „быть вспоминаемым кем-то“ и одноместный функциональный символ „быть отцом“.

2. Смысл и значение

Теперь будет введено понятие интенсионала и экстенсионала в применении к термам и формулам; а используя эти понятия, мы определим понятия истины, логической общезначимости и логического следования.

Терм, вообще говоря, может содержать переменные. Поэтому его экстенсионал в данной точке соотнесения будет функцией H, которая для каждой возможной системы значений этих переменных приписывает терму значение в данной точке соотнесения. Термы могут содержать различное число переменных, и для этого числа нет никакой верхней границы, следовательно, удобнее рассматривать функцию H как заданную не на конечных, а на бесконечных последовательностях возможных объектов[1]. Позиция в этой последовательности укажет на подразумевающееся соответствие между переменными и объектами, то есть в произвольной бесконечной последовательности x n-я конституэнта x_n рассматривается как значение переменной v_n.

Определение II. Предположим, что $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для прагматического языка L, $\mathfrak{A} = \langle I, U, F\rangle$, а i принадлежит I. Тогда $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta)$, или *экстенсионал* ζ в i (при интерпретации $\mathfrak{A}$), вводится для произвольного терма ζ следующим рекурсивным определением:

(1) $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(v_n)$ есть функция H, областью которой является множество всех бесконечных последовательностей возможных объектов $\mathfrak{A}$, и причем такая, что если x — одна из последовательностей этого множества, то $H(x) = x_n$;

(2) если A есть n-местный функциональный символ языка L, а $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ термы, то $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(A\zeta_0 \ldots \ldots \zeta_{n-1})$ есть функция H, областью которой является множество всех бесконечных последовательностей возможных объектов интерпретации $\mathfrak{A}$, причем такая, что если x есть любая из этих последовательностей, то $H(x)$ — тот единственный объект y, для которого $\langle \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta_0)(x), \ldots, \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta_{n-1})(x), y\rangle$ принадлежит $F_A(i)$ *.

Определение III. Пусть $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для прагматического языка L, $\mathfrak{A} = \langle I, U, F\rangle$, а ζ — терм L. Тогда $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\zeta)$, или *интенсионал* ζ, есть функция H, определенная на множестве I, такая, что для всякого i из I

$$H(i) = \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta).$$

Формула, вообще говоря, может содержать свободные переменные, поэтому ее экстенсионал в данной точке соотнесения будет являться множеством тех систем значений ее свободных переменных, при которых формула выполняется.

Как и в случае термов, удобно рассматривать значения переменных как задаваемые *бесконечными* последовательностями возможных объектов. Однако мы не можем вводить экстенсионалы формул простой рекурсией по структуре выражения, как это было сделано в случае термов. Как было замечено Фреге в статье [5], экстенсионал формулы, содержащей операторы, зависит скорее от интенсионалов, чем от экстенсионалов некоторых ее частей, поэтому мы введем сначала *интенсионалы* формул, что можно сделать простой рекурсией.

[1] Под „бесконечной последовательностью“ я подразумеваю здесь *обычную* бесконечную последовательность, то есть функцию, определенную на множестве всех натуральных чисел.

* Экстенсионал терма ζ в точке соотнесения i, принадлежащей интерпретации $\mathfrak{A}$, есть функция, сопоставляющая каждому терму на каждой бесконечной последовательности определенное значение. Поэтому он является функцией от двух аргументов: индивидного терма и бесконечной последовательности, что Монтегю и записывает как $\mathrm{Ext}_{i\mathfrak{A}}(\zeta)(x)$. Понятнее, может быть, была бы запись: $(\mathrm{Ext}_{i\mathfrak{A}}(\zeta))(x)$. — *Прим. перев.*

Определение IV. Предположим, что $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для L и $\mathfrak{A}=\langle I, U, F\rangle$. Тогда $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ для произвольной формулы φ языка L вводится следующим образом:

(1) если ζ, η — термы L, то $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\zeta=\eta)$ есть такая функция H, определенная на I, что для всякого i из I $H(i)$ есть множество тех бесконечных последовательностей x, состоящих из членов U, для которых $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta)(x)$ есть тот же объект, что и $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\eta)(x)$;

(2) если P есть n-местный предикат языка L и $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ — термы L, то $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(P\zeta_0 \ldots \zeta_{n-1})$ есть такая функция H с областью I, что для каждого i из I H_i есть множество тех бесконечных последовательностей x, образованных из членов U, для которых $\langle \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta_0)(x), \ldots$ $\ldots, \mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\zeta_{n-1})(x)\rangle$ принадлежит $F_P(i)$;

(3) если φ — формула L, то $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)$ есть такая функция H, определенная на области I, что для каждого i из I $H(i)$ есть множество тех бесконечных последовательностей x, образованных из членов U, которые не входят в $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\varphi)(i)$, соответственно для прочих пропозициональных связок;

(4) если φ — формула L, то $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\vee v_n\varphi)$ есть такая функция H, определенная на области I, что для всякого i из I $H(i)$ есть множество тех бесконечных последовательностей x, образованных из членов U, для которых существует y в U, такой, что бесконечная последовательность $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, y, x_{n+1}, \ldots\rangle$ принадлежит $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\varphi)(i)$, соответственно для $\wedge v_n\varphi$;

(5) если N есть n-местный оператор языка L, а $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ — формулы L, то $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(N\varphi_0 \ldots \varphi_{n-1})$ есть функция H с областью I, такая, что для всякого i из I $H(i)$ есть множество бесконечных последовательностей x, образованных из членов U, таких, что $\langle J_0, \ldots, J_{n-1}\rangle$ принадлежит $F_N(i)$, где для каждого $k<n$ J_k есть множество элементов j множества I, для которых x является элементом множества $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\varphi_k)(j)$ *.

Определение V. Предположим, что $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для прагматического языка L, i — точка соотнесения в $\mathfrak{A}$, а φ — формула L. Тогда $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)$, или *экстенсионал* φ в i при $\mathfrak{A}$ есть $\mathrm{Int}_{\mathfrak{A}}(\varphi)(i)$.

* Именно в пункте (5) видно, что интенсионал выражения с операторами зависит не от экстенсионалов, а от интенсионалов подоператорных выражений. — *Прим. перев.*

Если φ — *предложение* (то есть формула без свободных переменных), то экстенсионал φ будет всегда либо пустым множеством, либо множеством всех бесконечных последовательностей возможных объектов; на этом соображении основывается следующее определение истины [1].

Определение VI. Если $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация для L, i есть точка соотнесения в $\mathfrak{A}$ и φ — предложение L, то φ *истинно* в i при $\mathfrak{A}$, если и только если $\mathrm{Ext}_{i,\mathfrak{A}}(\varphi)$ есть множество всех бесконечных последовательностей возможных объектов $\mathfrak{A}$.

Чтобы пояснить смысл этих определений, я укажу некоторые из их непосредственных следствий относительно понятия истины.

Замечания. Пусть $\mathfrak{A}$ будет возможной интерпретацией для прагматического языка L, имеющей вид $\langle I, U, F\rangle$, пусть i принадлежит I, пусть u есть переменная, пусть P — одноместный предикат языка L и пусть c, d есть 0-местные функциональные символы языка L. Тогда:

(1) Pc истинно в i при $\mathfrak{A}$, если и только если $\langle F_c(i)(\wedge)\rangle$ принадлежит $F_P(i)$ [2];

(2) $c=d$ истинно в i при $\mathfrak{A}$, если и только если $F_c(i)(\wedge)$ совпадает с $F_d(i)(\wedge)$;

(3) если φ — предложение L, то $\neg\varphi$ истинно в i при $\mathfrak{A}$, если и только если φ не истинно в i при $\mathfrak{A}$;

(4) если φ, ψ — предложения L, то $(\varphi\wedge\psi)$ истинно в i при $\mathfrak{A}$, если и только если оба φ и ψ истинны в i при $\mathfrak{A}$;

(5) $\vee uPu$ истинно в i при $\mathfrak{A}$, если и только если существует объект x в U, такой, что $\langle x\rangle$ принадлежит $F_P(i)$;

(6) если N — одноместный оператор языка L и φ предложение L, то $N\varphi$ истинно в i при $\mathfrak{A}$, если и только если $\langle J\rangle$ принадлежит $F_N(i)$, где J есть множество тех элементов I, в которых φ истинно (при $\mathfrak{A}$).

В соответствии с вышеприведенным пунктом (5), квантификация осуществляется по *возможным* (а не только по *действительным*, или *существующим*) объектам. Же-

[1] Это соображение, как и многие другие общие идеи, использованные в определениях данного раздела, принадлежит Тарскому [28].

[2] Здесь $\wedge$ есть пустая последовательность, $F_c(i)$ — 0-местная функция, а ее значения для 0-местной последовательности $\wedge$ — это тот возможный объект, который, как мы считаем, обозначается символом c.

лательность этого может быть усмотрена на примере предложения „есть люди, о которых никто не помнит", в частном случае временной логики. Разумеется, квантификация по актуальным индивидам может быть выражена с помощью особого предиката существования E; например, соответствующее предложению в пункте (5) предложение, в котором квантифицированная переменная пробегает по действительным объектам, имеет вид:

$$\bigvee u\,(Eu \wedge Pu).$$

Определение VII. Мы говорим, что φ есть *логическое следствие* (в смысле общей прагматики) множества Γ, если и только если имеется прагматический язык L, такой, что φ и все члены Γ являются предложениями L, и для любой возможной интерпретации $\mathfrak{A}$ языка L и любой точки соотнесения i в $\mathfrak{A}$, если все члены Γ истинны в i при $\mathfrak{A}$, то и φ истинно в i при $\mathfrak{A}$, и φ *логически общезначимо* (опять-таки в смысле общей прагматики), если и только если φ есть логическое следствие пустого множества предложений (то есть если и только если существует прагматический язык L, предложением которого является φ, и φ истинно в i при $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ есть возможная интерпретация L, а i — точка соотнесения $\mathfrak{A}$).

Легко заметить, что если φ и члены Γ являются предложениями (некоторого прагматического языка), то φ есть логическое следствие Γ, если и только если имеется такая конъюнкция ψ членов Γ, что $\psi \rightarrow \varphi$ логически общезначимо. Очевидно также, что в силу известных результатов множество логически общезначимых предложений рекурсивного языка рекурсивно аксиоматизируемо (при конечном числе правил вывода). Однако *представить* систему аксиом для этого множества — совсем другая и более трудная задача, но это было сделано проф. Д. Капланом в сравнительно недавней работе.

3. Частные случаи

Когда мы переходим к рассмотрению отдельных разделов, входящих в прагматику, таких, как временна́я логика, модальная логика, логика личных местоимений, то понятия логической общезначимости и логического следования, приводимые в определении VII, требуют

уточнений. Например, мы часто будем интересоваться не *всеми* возможными интерпретациями для данного языка L, а только некоторым классом K возможных интерпретаций. Выбор K будет зависеть от того, какой специальный раздел логики рассматривается в данном случае, а элементы множества K будут считаться *стандартными* интерпретациями для L в смысле, соответствующем этой логике. Соответствующие релятивизированные понятия истины и следования определяются следующим образом:

Определение VIII. Пусть K есть класс возможных интерпретаций для прагматического языка L, пусть φ и элементы множества Γ будут предложениями L. Тогда φ есть *K-следствие* из Γ, если и только если для любого $\mathfrak{A}$ из K и любой точки соотнесения i из $\mathfrak{A}$, если все члены Γ истинны в i при $\mathfrak{A}$, то и φ истинно; и φ *K-общезначимо*, если и только если φ есть *K-следствие* пустого множества.

В некоторых случаях, один из которых будет проиллюстрирован ниже, этой степени конкретности становится недостаточно, иногда нам приходится ограничивать не только класс рассматриваемых возможных интерпретаций, но и класс рассматриваемых точек соотнесения. Построение точных понятий, которое включает приписывание каждой стандартной интерпретации множества ее точек соотнесения (считающихся ее *стандартными* точками соотнесения), осуществлено совместно моими учениками д-ром Дж. Кэмпом, д-ром П. Смитом и мной.

Определение IX. Пусть K есть класс возможных интерпретаций для прагматического языка L, J — функция, приписывающая каждому элементу $\mathfrak{A}$ множества K множество точек соотнесения из $\mathfrak{A}$, и пусть φ и элементы множества Γ будут предложениями L. Тогда φ есть (K, J)-следствие Γ, если и только если для любого $\mathfrak{A}$ из K и любого i из $J_{\mathfrak{A}}$, если все члены Γ истинны в i при $\mathfrak{A}$, то истинно и φ; и φ (K, J)-*общезначимо*, если и только если φ есть (K, J)-следствие пустого множества предложений.

Необходимость этих понятий была показана Кэмпом: он нашел интересные примеры K и J, для которых доказал, что не существует такого класса K', что множество K'-общезначимых предложений совпадает с множеством (K, J)-общезначимых предложений.

Теперь введем специальные классы возможных интерпретаций; при этом мы будем указывать отдельные специальные разделы прагматики.

Обычная временнáя логика. Пусть L есть прагматический язык, единственными операторами которого являются два одноместных оператора $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$, и пусть K_1(L) — класс возможных интерпретаций $\langle I, U, G\rangle$ для L, таких, что (1a) I есть множество действительных чисел, (1b) для каждого i из I $G_{\mathcal{P}}(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, таких, что $J \subseteq I$, и существует j в J, такое, что $j < i$, и (1c) для каждого i в I $G_{\mathcal{F}}(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, таких, что $J \subseteq I$, и существует j в J, такое, что $i < j$. При этом мы рассматриваем действительные числа как моменты времени. Если (1a)—(1c) выполнены, если φ есть предложение L, а i принадлежит I, легко заметить, что

$\mathcal{P}\varphi$ истинно в i при $\langle I, U, G\rangle$, если и только если существует j в I, такое, что $j < i$ и φ истинно в j при $\langle I, U, G\rangle$ и

$\mathcal{F}\varphi$ истинно в i при $\langle I, U, G\rangle$, если и только если существует j в I, такое, что $j > i$ и φ истинно в j при $\langle I, U, G\rangle$.

Поэтому $\mathcal{P}\varphi$ естественно читать как „было так, что φ", а $\mathcal{F}\varphi$ — как „будет так, что φ". K_1(L)-общезначимые предложения L составляют класс логических истин (языка L) обычной временнóй логики. Д. Скотт в переписке отметил, что если L содержит по меньшей мере один одноместный предикат и два двухместных функциональных символа, то множество K_1(L) общезначимых предложений L не является рекурсивно перечислимым (и, следовательно, рекурсивно аксиоматизируемым). Он также показал, что при таком же предположении относительно L (которое, конечно, может быть ослаблено) *теорема компактности* для K_1(L) не выполняется, это означает, что неверно, что если предложение φ языка L есть K_1(L)-следствие множества Γ предложений L, то φ также есть K_1(L)-следствие некоторого конечного подмножества Γ.

В соответствии с интерпретациями в K_1(L) время континуально. Если считать, что время дискретно, то условие (1a) следует заменить условием „J есть множество целых (положительных и отрицательных) чисел". Д. Скотт показал, что вышеизложенные результаты сохраняют силу и в этом случае.

Обобщенная временнáя логика. Мы можем, однако, рассматривать структуру времени как случайную и, следовательно, не ограничивать наше внимание какой-то частной временной структурой; впрочем, было бы естественно принять минимальное требование, что время линейно упорядоченно. Если L снова есть прагматический язык, единственными операторами которого являются $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$, то мы приходим к другому классу стандартных интерпретаций для L; в самом деле, пусть K_2(L) есть класс возможных интерпретаций $\langle I, U, G\rangle$ для L, таких, что на I задано отношение простого порядка[1] $\leqslant$ и что (2a) I непусто (2b) для каждого i в I $G_{\mathcal{P}}(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, таких, что i принадлежит I, $J \subseteq I$ и существует j, принадлежащее I, такое, что $j \leqslant i$ и $i \neq j$, (2 c) для каждого i в I, $G_{\mathcal{F}}(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, таких, что $i \in I$ $J \subseteq I$ и существует j в J, для которого $i \leqslant j$ и $i \neq j$. Таким образом, мы получаем временнýю логику Н. Кокьяреллы. Легко заметить, что (это было замечено Кокьяреллой) теорема компактности выполняется для K_2(L). Далее Кокьярелла [3, 4] дал элегантную аксиоматизацию для K_2(L)-общезначимых предложений.

Личные и указательные местоимения. Пусть L будет прагматическим языком, в котором вообще нет операторов, но есть выделенный 0-местный функциональный символ c. Пусть K_3(L) будет классом возможных интерпретаций $\langle I, U, G\rangle$ для L, таких, что (3a) $G_A(i)$ есть $G_A(j)$ для всех символов A в L, отличных от c и всех i, j из I, (3b) $G_c(i)$ есть $\{\langle i\rangle\}$ (то есть единичное множество, состоящее из одночленной последовательности i), для всех i из I. Если эти условия выполнены, P есть одноместный предикат L, а i и j принадлежат I, то легко заметить, что Pc истинно в i при $\langle I, U, G\rangle$, если и только если $\langle i\rangle$ принадлежит $G_P(j)$. Итак, если точками соотнесения являются возможные авторы высказываний, то c соответствует местоимению первого лица „я". Если точки соотнесения рассматриваются как лица, к которым обращены высказывания, то c соответствует личному местоимению второго лица „ты". Другой способ задания точек соотне-

[1] *Простой порядок* множества I есть рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение на множестве I. (R *антисимметрично*, если и только если $x = y$, когда xRy и yRx.)

сения наделяет c значением указательных местоимений „это“ или „то“. Не лишено основания дополнительное условие на члены $K_3(L)$, что $\langle i \rangle$ принадлежит $G_E(i)$ для всех i из I; если это сделано, и только в этом случае, предложение E_c (например, „я существую“) будет общезначимым. Употребление сразу нескольких указательных и личных местоимений не представляет особых проблем: используются несколько различных индивидных констант и берутся последовательности соответствующей длины (например, состоящие из говорящего, объекта, на который указывает говорящий, и лица, к которому обращается говорящий) в качестве точек соотнесения.

Для того чтобы более подробно показать использование нескольких индексных выражений в одном языке, мы рассмотрим *комбинацию временных операторов с местоимением первого лица единственного числа*. Если I, J, U — множества, $\leqslant$ — отношение простого порядка на I и для каждого i в I, $\mathfrak{A}_i = \langle J, U, G_i \rangle$ и $\mathfrak{A}_i$ есть возможная интерпретация для прагматического языка L, не содержащего операторов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$, то $\leqslant$*-произведение* систем $\mathfrak{A}_i$ (где i принадлежит I), есть возможная интерпретация $\langle K, U, H \rangle$ для языка $L \cup \{\mathcal{P}, \mathcal{F}\}$, такая, что (1) K есть множество упорядоченных пар $\langle i, j \rangle$, где i принадлежит I, а j принадлежит J; (2) для каждого i в I, каждого j в J и каждого предиката или функционального символа A в L $H_A(\langle i, j \rangle) = (G_i)_A(j)$; (3) если i принадлежит I, j принадлежит J, а N есть n-местный оператор L, то $H_N(\langle i, j \rangle)$ есть множество n-ок $\langle X_0, \ldots, X_{n-1} \rangle$, таких, что $X_0, \ldots, X_{n-1}$ есть подмножества K, а $\langle Y_0, \ldots, Y_{n-1} \rangle$ принадлежит $(G_i)_N(j)$, где для каждого $k < n$, Y_k есть множество тех j' из J, для которых $\langle i, j' \rangle$ принадлежит X_k; (4) для каждого в I и j в J $H_{\mathcal{P}}(\langle i, j \rangle)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle X \rangle$, таких, что $X \subseteq K$, и существует i' в I, такое, что $i' \leqslant i$, $i' \neq i$ и $\langle i', j \rangle$ принадлежит X, (5) для каждого i из множества I и j из множества J $H_{\mathcal{F}}(\langle i, j \rangle)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle X \rangle$, таких, что $X \subseteq K$ и существует i' в I, такое, что $i \leqslant i'$, $i \neq i'$, а $\langle i', j \rangle$ принадлежит X.

Пусть теперь прагматический язык L содержит операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$ вместе с особым 0-местным функциональным символом c, упомянутым выше, и пусть $K_4(L)$ будет классом возможных интерпретаций $\mathfrak{B}$ для L, таких, что существуют множества I, J, U, возможные интерпретации $\mathfrak{A}_i$ в $K_3(L - \{\mathcal{P}\mathcal{F}\})$ (где i принадлежит I) и простой порядок $\leqslant$ на I, где J есть множество точек соотнесения, U — множество возможных индивидов интерпретации $\mathfrak{A}_i$ (где i принадлежит I), а $\mathfrak{B}$ есть $\leqslant$-произведение интерпретаций $\mathfrak{A}_i$ (где i принадлежит I). Если эти условия выполнены, если φ есть предложение L, а $\langle i, j \rangle$ — точка соотнесения $\mathfrak{B}$, то легко убедиться, что $\mathcal{P}\varphi$ истинно в $\langle i, j \rangle$ при $\mathfrak{B}$, если и только если существует i' в I, такое, что $i' \leqslant i$, $i \neq i'$, а φ истинно в $\langle i', j \rangle$ при $\mathfrak{B}$, если, кроме того, P — одноместный предикат L, то Pc истинно в $\langle i, j \rangle$ при $\mathfrak{B}$, если и только если $\langle j \rangle$ принадлежит $H_P(\langle i, j \rangle)$, и если j' принадлежит J, то $H_c(\langle i, j \rangle) = H_c(\langle i, j' \rangle)$.

Таким образом, $\mathcal{P}$ ведет себя как раз так, как должен бы вести себя оператор прошедшего времени, а c — как раз так, как этого можно было бы ожидать от местоимений „я“ (или „ты“, или указательного местоимения, в зависимости от того, как мы будем понимать второй конституэнт точки соотнесения в $\mathfrak{B}$). Однако мы не можем гарантировать, что Ec („я существую“) будет истинно при любом оправданном сокращении класса $K_4(L)$. Вместо этого мы будем говорить о $(K_4(L), J)$-общезначимости, где для всех $\langle K, U, H \rangle$ из $K_4(L)$, $J_{\langle K, U, H \rangle}$ есть множество пар $\langle i, j \rangle$ в K, для которых $\langle j \rangle$ принадлежит $H_E(\langle i, j \rangle)$. Получается, что Ec $(K_4(L), J)$-общезначимо, а $\neg \mathcal{P} \neg Ec$ („Я всегда существовал“) не $(K_4(L), J)$-общезначимо.

Стандартная модальная логика. Пусть L будет прагматическим языком, единственным оператором которого является $\Box$, и пусть $K_5(L)$ будет классом возможных интерпретаций $\langle I, U, F \rangle$ для L, таких, что для каждого i в I $F_{\Box}(i) = \{\langle I \rangle\}$. В данном случае мы рассматриваем I как множество всех возможных миров. Если $\langle I, U, F \rangle$ принадлежит $K_5 L$, φ есть предложение L, а i принадлежит I, то $\Box\varphi$ истинно в i при $\langle I, U, F \rangle$, если и только если для всех j из I φ истинно в j при $\langle I, U, F \rangle$.

Таким образом, необходимость понимается как истинность во всех возможных мирах. Легко показать, что для $K_5(L)$ выполняется теорема компактности и что множество $K_5(L)$-общезначимых предложений аксиоматизируется той версией системы S5 с квантификацией, которая содержится в статье Крипке [12]. Крипке в этой статье доказал, что его система аксиом полна относительно интерпретации, которая только в несущественных деталях отличается от приведенной здесь, поэтому настоящее утверждение о полноте тривиальным образом выводится из крипкевского.

Обобщенная модальная логика. Пусть L будет таким, как было указано выше, M будет классом бинарных отношений, а K_6(L, M) — классом возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для L, таких, что для некоторого R из M (6а) R есть рефлексивное отношение на множестве I и (6b) для каждого i из I $F\Box(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, таких, что $J \subseteq I$ и для всех j, для которых iRj, j принадлежит J. При этом мы опять рассматриваем I как множество всех возможных миров; утверждение, что iRj понимается как означающее, что мир j *достижим* из мира i, а истинность $\Box\varphi$ в i означает истинность φ во всех мирах, достижимых из i. Например, мы можем считать, что один мир достижим из другого в случае, если они в прошлом были одинаковыми или, наоборот, стали одинаковыми начиная с какого-то момента в прошлом. В обоих этих случаях, которые ниже будут рассмотрены более подробно, отношение достижимости есть отношение эквивалентности. Стандартная модальная логика служит частным случаем, когда M есть класс всех *универсальных* отношений (то есть отношений R таких, что iRj имеет место, если только i или j принадлежат области отношения R).

Идея использования отношения достижимости в модальной логике была (независимо) выражена в 1957 году в публикации Кангера [9] (изложение исследования, проведенного в 1955 году), в сообщении, сделанном Монтегю в 1955 году и изложенном в статье Монтегю [16], и в сообщении, изложенном в статье Хинтикки [8]. Однако в этих случаях отношение достижимости всегда понималось как отношение между моделями; отношение достижимости между точками соотнесения, вроде того, которое рассматривается здесь, впервые появилось в работе Крипке [13].

В этой работе Крипке [13] приводятся различные результаты относительно аксиоматизируемости. В частности, если M есть либо класс рефлексивных отношений [1], либо класс симметричных и рефлексивных отношений, либо класс транзитивных и рефлексивных отношений, либо класс отношений эквивалентности, Крипке аксиоматизировал множество K_6(L, M)-общезначимых предложений языка L, которые не содержат символа равенства и функциональных символов и в которых квантификация производится только по действительным индивидам. Некоторые случаи расширений, смягчающих ограничения на этот класс предложений, были получены в неопубликованной диссертации Кокьяреллы [4] и неопубликованной работе Крипке и Томасона.

Общая деонтическая логика получается, когда мы отбрасываем требование рефлексивности отношения достижимости, которое в этом случае следует понимать скорее как отношение этической релевантности. В частности, мы примем, что L есть прагматический язык, единственным оператором которого является одноместный оператор O, что K_7(L) есть класс возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для L, причем для некоторого бинарного отношения S (7а) область S включается в I и (7b) для каждого i из I $F_O(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, таких, что $J \subseteq I$ и для всех j, если iSj, то j принадлежит J. Мы будем читать $O\varphi$ как „обязательно, что φ“ и рассматривать утверждение iSj как означающее, что j есть один из тех достижимых из i миров, которые лучше устроены в моральном отношении. Истинность $O\varphi$ в i, таким образом, равносильна истинности φ во всех лучше устроенных достижимых из i мирах. *Пропозициональная логика* класса K_7(L) (то есть множество K_7(L)-общезначимых предложений, которые не содержат индивидных переменных и констант и, следовательно, не содержат вообще более чем 0-местных предикатных символов) была аксиоматизирована в неопубликованной работе Е. Леммона и Д. Скотта; теорема полноты для всего множества K_7(L)-общезначимых предложений была недавно доказана проф. Д. Капланом на основе идей Леммона.

Специальная деонтическая логика. Кажется, нет правдоподобных ограничений, которые могут быть наложены на отношение этической релевантности в общем случае. Однако в некоторых случаях уместны различные частные ограничения. Например, мы можем предположить, что любой мир (не обязательно этически релевантный ему) достижим из любого другого; тогда нам понадобится рассматривать только особое множество „лучших“ миров. Соответственно, если L таково, как было указано выше, мы будем считать K_8(L) классом возможных интерпре-

[1] *Рефлексивное* отношение — это такое отношение, которое иногда называют *рефлексивным на своей области*, то есть бинарное отношение R, такое, что для всех i из области определения R имеет место iRj.

таций $\langle I, U, F\rangle$ для L, если для некоторого непустого подмножества J множества I и для всех i из I $F_0(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle K\rangle$, где $J \subseteq K \subseteq I$. I в этом случае опять рассматривается как множество всех возможных миров, J рассматривается как множество лучших (предпочитаемых) миров, а истинность предложения $O\varphi$ в i равносильна истинности φ во всех предпочитаемых мирах.

Соответственно несколько более общему подходу мы будем считать достижимость отношением эквивалентности между возможными мирами (подобно отношению „быть в прошлом одинаковыми"), хотя и по-прежнему будем рассматривать выделенное множество предпочитаемых миров; $O\varphi$ считается в i истинным, если и только если φ истинно во всех мирах, достижимых из i и являющихся предпочитаемыми. Затем мы примем, что $K_9(\mathrm{L})$ есть класс возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для языка L, если существует отношение эквивалентности R и множество J, включающееся в множество I, такое, что (9a) для каждого i в I существует j в J, такое, что iRj, и (9b) для каждого i в I $F_0(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle K\rangle$, таких, что $K \subseteq I$, и для каждого j, такого, что iRj, и j принадлежит J, j принадлежит K. (Оптимистическое допущение (9a), что из любого мира достижим некоторый предпочтительный мир, не покажется необоснованным, если R понимается как отношение „быть в прошлом сходными", причем прошлое рассматривается как имеющее конечную длительность, а будущее — бесконечную длительность).

Как легко убедиться, класс $K_8(\mathrm{L})$-общезначимых предложений языка L совпадает с классом $K_9(\mathrm{L})$-общезначимых предложений языка L, и оба они совпадают с классом общезначимых предложений (заданным теоретико-модельным способом, но по-другому) квантифицированной деонтической логики, представленным в сообщении 1955 года, изложенном в статье Монтегю [16]. На основании установленного в этой работе результата о полноте легко вывести, что пропозициональная логика $K_8(\mathrm{L})$ (как и $K_9(L)$) аксиоматизируется с помощью правила отделения и следующих схем:

φ (если φ — тавтология);
$O\varphi$ (если φ — тавтология);
$O(\varphi \to \psi) \to (O\varphi \to O\psi)$;

$O(O(\varphi \to \psi) \to (O\varphi \to O\psi))$,
$\neg O\varphi \leftrightarrow O\neg O\varphi$;
$O(\neg O\varphi \leftrightarrow O\neg O\varphi)$.

В качестве иллюстрации возможных комбинаций рассмотрим *комбинацию оператора необходимости и оператора долженствования*. Пусть L — прагматический язык, единственными операторами которого являются $\square$ и O, пусть M будет классом бинарных отношений и пусть $K_{10}(\mathrm{L}, \mathrm{M})$ будет классом возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для L, таких, что для некоторого R из M и некоторого бинарного отношения S выполняются условия (6a), (6b) и (7b) и, кроме того, $S \subseteq R$.

В качестве другой иллюстрации мы можем рассмотреть *комбинацию временны́х операторов с зависящей от времени необходимостью и зависящим от времени долженствованием*. Пусть L будет таким, как указано выше, но к нему будут еще добавлены операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$, пусть L′ будет прагматическим языком, включающимся в язык $\mathrm{L} - \{\mathcal{P}, \mathcal{F}, \square, O\}$ и пусть $K_{11}(\mathrm{L}, \mathrm{L}')$ будет классом возможных интерпретаций $\mathfrak{C}$ для L, таких, что для некоторых I, J, U, $\leqslant$, U_i (где i принадлежит I), F_i (i принадлежит I), R_i (i принадлежит I), $\mathfrak{B}_i$ (i принадлежит I) и G_i (i принадлежит I); (11a) I, J, U есть множества; (11b) $\leqslant$ есть простой порядок на I; (11c) для каждого i из I $\mathfrak{A}_i = \langle J, U, F_i\rangle$ и $\mathfrak{A}_i$ есть возможная интерпретация для L′; (11d) для каждого i из I, R_i есть такое бинарное отношение между членами J, что для всех j и j', принадлежащих J, jR_ij', если и только если $(F_{i'})_A(j) = (F_{i'})_A(j')$, где $i' \leqslant i$, $i' \neq i$ и A принадлежит L′; (11e) для каждого i из I, $\mathfrak{B}_i = \langle J, U, G_i\rangle$, $F_i \subseteq G_i$ и $\mathfrak{B}_i$ принадлежит $K_{10}(\mathrm{L} - \{\mathcal{P}, \mathcal{F}\}, \{R_i\})$ и (11f) $\mathfrak{C}$ есть $\leqslant$-произведение систем $\mathfrak{B}_i$, где i принадлежит I. Мы будем считать элементы множества I моментами времени, $\leqslant$ — временны́м порядком, а J — множеством возможных миров. Утверждение, что jR_ij' означает, что миры j и j' во все моменты времени, предшествующие i, сходны во всех чертах, выражаемых в языке L′. Если условия (11a)—(11f) выполнены, φ есть предложение L, а $\langle i, j\rangle$ — точка соотнесения $\mathfrak{C}$, то легко показать, что $\square\varphi$ истинно в $\langle i, j\rangle$ (то есть в мире j во время i) при $\mathfrak{C}$, если и только если φ истинно при $\mathfrak{C}$ во всех точках соотнесения $\langle i, j'\rangle$, где jR_ij' (то есть во время i во всех мирах, которые подобны j во все моменты времени, предшествующие i). Таким образом „$\Box\varphi$“ может читаться как „в силу прошлых фактов необходимо, что φ“, а „$O\varphi$“ — как „принимая во внимание прошлое, обязательно, что φ“.

Будущее сослагательное условие может быть выражено без изменений в интерпретациях класса K_{11} (L, L′). В самом деле,

$$\Box \neg \mathcal{F} \neg (\varphi \rightarrow \psi),$$

кажется, адекватно выражает утверждение: если в будущем имело бы место φ, то (в то же время) имело бы место ψ.

Среди сослагательных условных модусов наиболее подходящей для этических рассуждений кажется форма будущего времени; впрочем, сходным образом можно было бы дать анализ и других модусов, но он будет более сложным. Первая адекватная трактовка сослагательных условий настоящего времени в рамках прагматического подхода содержится в неопубликованной работе проф. Д. Льюиса; другие трактовки, содержащие, как нам кажется, улучшение и расширение, были развиты Льюисом и мной. Настоящий анализ сослагательных условий будущего времени, хотя и принадлежит мне, обязан как критике проф. Льюисом более ранних версий, так и дискуссиям с Дж. Кэмпом и Д. Скоттом.

Во всех вышеприведенных примерах отношения значимости или достижимости было достаточно для интерпретации операторов. Следующие примеры, в которых это уже не так, иллюстрируют дополнительную общность настоящего подхода.

Крипкевская семантика для ненормальных модальных логик. Пусть L будет прагматическим языком, единственным оператором которого является $\Box$; пусть K_{12} (L) будет классом возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для L, таких, что для некоторого бинарного отношения R (12a) область K включается в I, (12b) iRi, если только iRj, (12c) для всех i из I $F_{\Box}(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, где $J \subseteq I$, iRi и j принадлежит J для всех j, таких, что iRj. Тогда одна из основных теорем работы Крипке [14] может быть сформулирована так: пропозициональная логика класса K_{12}(L) совпадает с множеством (сформулированных в L) теорем системы E2 Леммона [15]. Другие теоремы полноты, доказанные в работе Крипке [14], также могут быть выражены в понятиях прагматики.

Другая общая модальная логика. Вышеупомянутые интерпретации Крипке дают элегантные теоремы полноты для таких систем, как S2 и S3, однако у них нет четкого содержательного истолкования. В то же время могут быть найдены примеры таких содержательно-осмысленных интерпретаций для необходимости, которые кажутся невыразимыми в терминах отношений релевантности. Например, пусть L будет таким, как описано выше, пусть $\mathfrak{M}$ будет классом *множеств* бинарных отношений, и пусть K_{13} (L, $\mathfrak{M}$) будет классом возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для L, таких, что для некоторого M из $\mathfrak{M}$ (13a) M есть множество рефлексивных отношений, заданных на множестве I (13b) для каждого i из I $F_{\Box}(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, где $J \subseteq I$ и существует R в M такое, что J содержит все объекты j, для которых iRj. Элементы множества I и на этот раз понимаются как возможные миры. Отношения в M рассматриваются как соответствующие различным видам достижимости, другими словами, если R принадлежит M, то сказать, что iRj,— значит сказать, что j достижимо из i *определенным способом.* Истинность $\Box\varphi$ в мире i равносильна истинности φ во всех мирах, достижимых из j *каким-то определенным способом.*

Мы можем, например, рассматривать виды достижимости как соответствующие моментам прошлого и так, что один мир считается достижимым из другого способом, соответствующим моменту i, если и только если эти два мира в ряде черт совпадают вплоть до момента i. Несколько подробнее вдаваясь в детали, мы можем рассматривать язык L, такой же, как и описанный выше, но с добавлением операторов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$; L′ будет прагматическим языком, включающимся в L—{$\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$, $\Box$}, а K_{14} (L, L′) будет классом возможных интерпретаций $\mathfrak{C}$ для L, таких, что для некоторых I, J, U, $\leqslant$, $\mathfrak{A}_i$ (i принадлежит I), F_i (i принадлежит I), M_i (i принадлежит I), $\mathfrak{B}_i$ (i принадлежит I) и G_i (i принадлежит I) выполняются условия (11a)—(11c) и условие (14a) для каждого i из I, M_i есть множество бинарных отношений R на элементах J, такое, что для некоторого i', $i' \leqslant i$, $i' \neq i$ и для всех j и j, принадлежащих J, jRj', если и только если $(F_{i''})_A(j) = (F_{i''})_A(j')$, где $i'' \leqslant i'$, $i'' \neq i'$ и A принадлежит L′; (14b) для каждого i в I, $\mathfrak{B}_i = \langle J, U, G_i\rangle$, $F_i \subseteq G_i$ и $\mathfrak{B}_i$ включается в K_{13}(L—{$\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$}, {M_i}) и (14c) $\mathfrak{C}$ есть $\leqslant$-произведение систем $\mathfrak{B}_i$, где i принадлежит I. Если эти условия выполнены, если φ есть предложение L, а $\langle i, j\rangle$ точка соотнесения $\mathfrak{C}$, то легко заметить, что $\Box\varphi$ истинно в $\langle i, j\rangle$ (то есть в момент времени i в мире j) при $\mathfrak{C}$, если и только если существует R в M_i, такое, что φ истинно во всех точках соотнесения $\langle i, j'\rangle$, для которых iRj'. Тогда „$\Box\varphi$" может читаться также и как „в некоторый момент прошлого предсказуемо, что в настоящее время будет φ"[1].

Этот пример подсказывает некоторые способы спецификации класса $\mathfrak{M}$ в связи с $K_{13}(\mathrm{L}, \mathfrak{M})$. Мы могли бы потребовать, чтобы, как в примере, каждое множество в $\mathfrak{M}$ было множеством отношений эквивалентности, замкнутым относительно пересечения; в частности, пусть $\mathfrak{M}_1$ будет классом множеств M, таких, что для некоторого множества I (a) M есть непустое множество отношений эквивалентности, областью которого является I, и (b) $R \cap S$ принадлежит M, если только R и S принадлежат M. Если M принадлежит $\mathfrak{M}_1$, то мы можем рассматривать каждый член R множества M как отношение „совпадать в определенных чертах".

С другой стороны, отношение достижимости может пониматься в терминах *сходства*, а не совпадения; в этом случае имеет смысл рассматривать такой класс $\mathfrak{M}_2$ всех множеств M, что для некоторого множества I (a) M есть непустое множество рефлексивных и симметричных отношений, заданных на области I, (b) $R \cap S$ принадлежит M, если только R и S принадлежат M, и (c) для каждого R в M существует S в M, такое, что для всех i, j, k, если iSj и jSk, то iRk. Если M принадлежит $\mathfrak{M}_2$, мы рассматриваем каждое R из M как отношение сходства в определенных чертах и в определенной степени между мирами. R, разумеется, не будет в общем случае транзитивным. Отношение S, существование которого утверждается пунктом (c), может пониматься как отношение сходства в тех чертах, которые подразумеваются в R, но в два раза более высокой степени, чем это подразумевается в R[2].

[1] Это чтение было предложено У. Уэлкоу.

[2] Класс $\mathfrak{M}_2$ тесно связан с классом *равномерных пространств* (в смысле общей топологии; определение и обсуждение см. [10], с. 233—285, рус. издания.—*Ред.*). В частности, если M принадлежит $\mathfrak{M}_2$, I—общая область всех отношений в M, а N—множество отношений S между элементами I, такое, что для некоторого R из M, $R \subseteq S$, то $\langle I, N\rangle$ есть равномерное пространство; и наоборот, если $\langle X, T\rangle$—равномерное пространство и M—множество симметричных отношений в T, то M принадлежит $\mathfrak{M}_2$ и все отношения M определены на области X.

Дальнейшее ослабление допущений приводит нас к такому классу $\mathfrak{M}_3$ всех множеств M, что для некоторого множества I (a) M—непустое множество рефлексивных отношений на области I, (b) $R \cap S$ принадлежит M, если только R и S принадлежат M, и (c) если R принадлежит M и i принадлежит I, то существует отношение S в M, такое, что для всех j, k, если iSj и jSk, то iRk.

Ясно, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_3$. Может быть также показано, что $K_{13}(\mathrm{L}, \mathfrak{M}_3)$ есть в точности класс *топологических* интерпретаций модальной логики, то есть класс возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для L, таких, что существует множество T, для которого (a) $\langle I, T\rangle$—топологическое пространство[1] и (b) для каждого i из I $F_{\Box}(i)$—множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, таких, что $J \subseteq I$, и для некоторого K из T, i принадлежит K и $K \subseteq J$. $K_{13}(\mathrm{L}, \mathfrak{M}_3)$—общезначимые предложения суть, таким образом, в точности теоремы квантифицированной версии льюисовской системы S4; это показано для топологической интерпретации в книге Расёвой и Сикорского [24].

Индуктивная логика. Для каждого действительного числа r, такого, что $0 \leqslant r \leqslant 1$, пусть P_r будет одноместным оператором и пусть $P_r \neq P_s$, если $r \neq s$. Пусть L будет прагматическим языком, имеющим в качестве операторов символы $P_r (0 \leqslant r \leqslant 1)$, и пусть $K_{15}(\mathrm{L})$ будет классом возможных интерпретаций $\langle I, U, F\rangle$ для L, таких, что существуют ξ, μ, для которых (15a) $\langle I, \xi, \mu\rangle$ есть *поле вероятностей* (в смысле Колмогорова [11]) и (15b) для каждого i из I и каждого действительного числа r, такого, что $0 \leqslant r \leqslant 1$, $F_{P_r}(i)$ есть множество одночленных последовательностей $\langle J\rangle$, для которых J есть член ξ и $\mu(J) = r$. Тогда мы можем читать „$P_r\varphi$" как „вероятно в точности со степенью r, что φ", а „вероятно" может пониматься либо в смысле априорной теории вероятностей, либо в смысле частотной теории в зависимости от того, понимаются ли точки соотнесения как моменты времени или как возможные миры. „$P_1\varphi$" может соответственно читаться или как „почти всегда бывает так, что φ" или „почти достоверно, что φ".

Существуют примеры временных операторов, которые

[1] Определение топологического пространства см., например, в [10] (с. 60 русского издания.— *Ред.*).

не могут быть проинтерпретированы в терминах отношений достижимости. Кэмп рассматривал два бинарных оператора этого рода, соответствующих оборотам: „с тех пор как было так, что φ, (всегда) было так, что ψ" и „до тех пор пока есть так, что φ, будет (всегда) так, что ψ". (Кэмп анализировал общее понятие времени и показал в работе, которая до сих пор остается неопубликованной, что всякий временной оборот может быть выражен в терминах этих двух.)

Я только упомяну три дальнейших пути развития прагматики. (1) Кэмп дал анализ, представляющий некоторые интересные черты таких индексных наречий, как „вчера", „сегодня", „завтра", использованных вместе с временными операторами. (2) Анализ дат, использовавшихся в комбинации с временными операторами, был дан в книге Прайора [21] и развит далее Кэмпом[1]. (3) Разновидность второпорядкового расширения прагматики была развита в статье Монтегю [17] и отождествлена с интенсиональной логикой; кажется, что это первый вполне адекватный анализ контекстов мнения и тому подобного. Ряд философских приложений этой расширенной системы дается в статье Монтегю [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Addison J. W., Henkin L., Tarski A. The Theory of Models. Amsterdam, 1965.
2. Bar-Hillel Y. Indexical Expressions.— "Mind", 1954, vol. 63, p. 359—379.
3. Cocchiarella N. A Completeness Theorem for Tense Logic.— "The Journal of Symbolic Logic", vol. 31, 1966, p. 689—690.
4. Cocchiarella N. Tense logic: a Study of Temporal Reference (Dissertation). Los Angeles, 1966.
5. Frege G. Über Sinn und Bedeutung.— "Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", Bd. 100, 1892, S. 25—50.
6. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.— "Monatshefte für Mathematik und Physik", Bd. 38, 1931, S. 173—198.
7. Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik. Berlin, 1934—1939.
8. Hintikka J. Modality and Quantification.— "Theoria", vol. 27, 1961, p. 119—128.
9. Kanger S. Provability in logic. Stockholm, 1957.

[1] Хотя здесь впервые делается специальная ссылка на Артура Прайора, я должен сказать, что все современное развитие логики времени началось с его работ и было стимулировано ими, в особенности книгами [22] и [21].

10. Kelley J. L. General topology. Princeton, Toronto, New York & London, 1955. (Рус. пер.: Келли Дж. Л. Общая топология. Пер. А. В. Архангельского. М., „Наука", 1968).
11. Kolmogorov A. N. Foundations of the Theory of Probability. New York, 1956. (Рус. пер.: Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей, 2 изд. М., 1974).
12. Kripke S. A Completeness Theorem in Modal Logic.— "Journal of symbolic logic", vol. 24, 1959, p. 1—14.
(Рус. пер.: Крипке С. А. Теорема полноты в модальной логике.— В кн.: Фейс Р. Модальная логика. М., „Наука", 1974).
13. Kripke S. Semantical Considerations on Modal Logic.— "Acta Philosophica Fennica", f. 16, 1963, p. 83—94.
14. Kripke S. Semantical analysis of modal logic, II. Non-normal Modal Propositional Calculi.— In: [1]. (Рус. пер.: Крипке С. А. Семантический анализ модальной логики. II. Ненормальные модальные исчисления высказываний.— В кн.: Фейс Р. Модальная логика. М., „Наука", 1974).
15. Lemmon E. J. New Foundations for Lewis Modal Systems.— "The Journal of Symbolic Logic", vol. 22, 1957, p. 176—186.
16. Montague R. Logical Necessity, Physical Necessity, Ethics, and Quantifiers.— "Inquery", 4, 1960, p. 259—269.
17. Montague R. Pragmatics and Intensional Logic.—"Dialectica" (forthcoming). (Напечатано в журнале „Synthese", 1970, p. 22, № 112.)
18. Montague R. On the Nature of Certain Philosophical Entities.— "Monist" (forthcoming). (Напечатано в журнале: „Monist", 53, 1969, p. 161—164.)
19. Montague R., Scott D., Tarski A. An Axiomatic Approach to set Theory. Amsterdam (forthcoming).
20. Morris C. W. Foundations of the theory of signs. Chicago, 1938.
21. Prior A. N. Past, Present and Future. Oxford, 1967.
22. Prior A. N. Time and Modality. Oxford, 1957.
23. Quine W. V. From the Logical Point of View. Cambridge, 1953.
24. Rasiowa H., Sicorski R. The mathematics of metamathematics. Warsawa, 1963. (Рус. пер.: Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., „Наука", 1972.)
25. Tarski A. Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik.— "Comptes rendues des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie», classe III, 23, 1930, S. 22—29. (Англ. пер. в: Tarski [29].)
26. Tarski A. Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, I.— "Monatshefte für Mathematik und Physik", Bd. 37, 1930, S. 361—404 (Англ. пер. Там же).
27. Tarski A. Grundzüge des Systemenkalküls—"Fundamenta Mathematicae", 1936, 25, S. 503—526; 1936, 26, S. 283—301 (Англ. пер. Там же.)
28. Tarski A. Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych (The concept of truth in the languages of the deductive sciences).— "Travaux de la societe des sciences et des lettres de Varsovie, classe III", 1933, 34 (Англ. пер. Там же.)
29. Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Transl. by Woodger J. H. Oxford, 1956.

Д. Скотт

СОВЕТЫ ПО МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ *

Всем известно, что гораздо приятнее давать советы, чем получать их. Всем известно также, как редко люди внимают добрым советам. Тем не менее эти факты мало кого удерживали от дачи советов, и уж меньше всего — автора настоящей статьи. Он заметил, что в нынешних исследованиях по модальной логике весьма распространены путаница, неправильно расставленные акценты и дублирование одних работ другими, и теперь он занят распространением всякого рода полезных советов по этому поводу. Он очень доволен, что коллоквиум в Ирвине[1] оказался таким своевременным и удачным форумом, и надеется, что каждый его совет вызовет полезную дискуссию — хотя бы в порядке самозащиты. Действительно, кажется, что наступило время для плодотворного развития модальной логики; но для этого нужно позаботиться об очищении и упрочении ее оснований. В самом деле, ведь возможна такая гибкая структура, что старые затруднения окажутся вне ее и можно будет начать разработку ее важных приложений.

Прежде чем обратиться к частностям, я хочу дать один общий совет. Часто приходится слышать, что модальная (или какая-либо другая) логика не нужна, так как она может быть переведена в некоторый более простой, первопорядковый язык. Не обращайте внимания на

---

* Scott D. Advice on Modal Logic.— "Philosophical Problems in Logic. Some Recent Developments". Ed. by K. Lambert. Reidel. Dordrecht, Holland, 1970.

[1] Текст выступления автора на этом логическом коллоквиуме в 1968 году лег в основу настоящей статьи.

такие доводы. Не придавайте никакого значения требованию, чтобы исходная система была заменена другой. Надо выделить важные понятия и исследовать их свойства. Тот факт, что действительные числа могут быть определены в терминах множеств, еще не является доводом в пользу того, чтобы интересоваться произвольными множествами. Среди различных множеств должны выбираться имеющие отношение к данному вопросу, и нельзя порицать тех, кто считает внутренние свойства действительных чисел более интересными, чем любая их формализация в теории множеств. Конечно, если мы можем показать, что теория множеств дает новые важные понятия, то можно найти и основания для выхода за пределы теории действительных чисел (такие основания найти нетрудно!). Но, разумеется, обсуждение этого вопроса не может ограничиваться одними только формальными основаниями.

Этот очерк разделен на шесть параграфов. В первом из них обсуждаются индивиды: действительные, возможные и виртуальные; во втором вводятся возможные миры и их обобщения; в третьем параграфе возможные миры и индивиды комбинируются для того, чтобы ввести фундаментальное понятие *индивидного концепта*; в четвертом обсуждаются общие интенсиональные операторы; пятый параграф дополняет это обсуждение рассмотрением операторов, связывающих переменные. В заключительном, шестом параграфе выявляются различия между случайным совпадением (incidence) и равенством (equality), что необходимо для анализа проблемы перекрестной идентификации (cross-world identification). (Анализ последнего вопроса не так хорош, как хотелось бы автору, и поэтому он думает о его дальнейшей разработке.) Этот план был выбран с той целью, чтобы постепенно построить семантическую структуру для модальной логики и при этом дать адекватные (как надеется автор) объяснения проблем, чтобы его добрые советы не показались слишком авторитарными. Во всяком случае, различные критические замечания будут пониматься автором в духе целесообразной дискуссии. Целью является синтез всех ценных идей, а не победа взглядов одного человека над взглядами других.

1. Индивиды

Что такое индивид? Очень хороший вопрос. Настолько хороший, что мы даже не будем пытаться ответить на него. Мы могли бы допустить, что „быть индивидом"— это исходное неопределяемое понятие; что совершенно безопасно, ибо исходным может быть любое достаточно ясное понятие. Возможно, правда, что мы захотим иметь дело не с самими индивидами, а с *конструктами* или *знаками*, представляющими индивиды. Сейчас это не имеет значения: важно сойтись на том, что индивиды (или их законные представители) могут быть собраны в одну область, множество которое мы назовем D.

Я считаю важным, чтобы D было *данным заранее*. Это не означает, что все элементы D даны в конструктивном смысле, ибо данным тут может быть только некоторое свойство, определяющее множество D. Однако если D считается неопределенным, то возникает большая путаница. Любое множество может быть расширено путем введения новых элементов, но тогда мы получаем новое множество $D' \neq D$, и различные результаты могут подвергнуться изменению, будучи отнесены к новой области. Иногда это изменение может иметь вид парадокса, если забывают, что $D' \neq D$. Может быть, в будущем мы научимся понимать логику *потенциальных совокупностей* (возможно, благодаря интуиционизму?). Но сейчас наша простая двузначная логика требует такой идеализации. Пусть вас не обескураживает то, что мы с самого начала связываем себя этой идеализацией. Спросите себя, оценили ли вы, каким полезным и гибким орудием является в действительности двузначная логика? Я думаю, что лучше сначала исследовать такую идеализированную ситуацию, а затем, когда на основе сделанного можно будет оценить, чтó было приобретено, а чтó утеряно, отбросить нежелательные предположения.

Как велика область D? В общем она довольно обширна (по крайней мере *непуста*), потому что мы хотим чтобы D было областью *возможных индивидов*. Здесь „возможный" означает „возможный относительно некоторой априорной теории". Может быть, слово „мыслимый" здесь было бы более уместно. Во всяком случае, я хочу еще раз подчеркнуть, что это понятие относительно. Конечно, мы можем мыслить индивиды, не находящиеся в D, но это в данном случае совсем некстати. Мое единственное требование—мыслить по крайней мере *один* возможный индивид, поскольку вообще логика для непустой области проще. Кванторы по возможно пустым областям появятся позже, там, где они будут уместнее.

Мне понадобилось очень много времени, чтобы признать целесообразность понятия „возможный индивид". Только после многочисленных дискуссий с группой логиков Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе (Монтегю, Каплан, Кокьярелла и Кэмп) я наконец прозрел. На настоящем собрании я рад отметить, что и другие пришли к тому же заключению (особенно ван Фрассен и Ламберт). Можно привести много примеров, подтверждающих эту идею. Рассмотрим хотя бы следующие предложения: „Никакие два президента США никогда не были похожими друг на друга", „Все нобелевские лауреаты одинаково заслуживают своей награды", „Этот роман произведет на всех читателей не менее глубокое впечатление, чем на меня". В данных примерах мы имеем дело с течением времени. Индивиды (в данном случае люди) приходят в мир и умирают, прекращая свое существование. Однако мы можем осмысленно сравнивать любые два лица, существующие в разное время, причем не всегда два определенных лица, так что требуется как раз квантификация по всему множеству возможных индивидов. В этом состоит разница между первыми двумя предложениями (в прошедшем времени) и третьим (в будущем). Такова одна группа возможных примеров; как только проблема понята, на ум приходят сотни других примеров.

К различию между *действительными* и *возможными* индивидами мы обратимся ниже, в пятом параграфе. В настоящем же параграфе мы хотим обрисовать другое различие—между *возможными* и *виртуальными* индивидами. Не так давно Куайн популяризировал виртуальные объекты. Простите за слово „объекты", ибо Куайн хотел бы рассматривать их как façon de parler [1] и считать все вхождения таких выражений элиминируемыми посредством контекстуальных определений. Но мне такой подход представляется некоторым смещением акцентов или, может быть, проявлением известной близорукости. Возможность введения виртуальных объектов неограниченна

[1] Оборот речи *(франц.)*

и в значительной мере относительно неисследованна. Их надо понимать не как привидения, а, скорее, как *идеальные объекты*, введенные для того, чтобы увеличить закономерность в нашем языке. Используя имена таких объектов, мы часто получаем простые формулировки, благодаря которым можно избежать увеличения числа различных частных случаев. Блестящими примерами этой полезной идеализации являются $\pm\infty$ в обычной теории действительных чисел, бесконечно удаленная точка в проективной геометрии, виртуальные классы в теории множеств.

Конечно, каждое из вышеупомянутых понятий может быть элиминировано (ценой значительного удлинения выражений) с помощью контекстуальных определений. Но я советую не считать контекстуальную элиминируемость главной чертой этих понятий и предлагаю посмотреть на мои основания для такого совета.

Мое самое значительное возражение опирается на чувство, что мне не известна общая теория контекстуальных определений. Я даже сомневаюсь, что такая теория существует. Может быть, я в данном случае просто упрямлюсь, как не раз бывало раньше, но я не знаю никакого действительно серьезного изучения данной проблемы. Я не хочу сказать, что Куайн не дал нам некоторых важных примеров использования контекстуальных определений. Нет, мне хотелось бы предложить более нейтральный способ обсуждения, который позволит достаточно ясно обсуждать этот вопрос, не предрешая окончательного ответа. Меня беспокоит то, что, когда контекстуально элиминируется каждое вхождение элиминируемого выражения отдельно (а вхождения управляются возможными контекстами), тут всегда может вкрасться некоторый разрыв или, иначе говоря, может получиться, что в некоторых контекстах виртуальный объект ведет себя как вещь одного рода, а в других — иного. Причем это не так уж необоснованно: ни один объект не стоит в одних и тех же отношениях ко всем другим объектам. Беспокоит же меня здесь то, что контекстуальный метод слишком легко допускает непостоянные объекты.

Что же делать? Вот что: просто будем считать выражения для виртуальных объектов действительно именующими (абстрактные) объекты. Вместо *определений* возьмем *аксиомы* (может быть, используя „$\leftrightarrow$" вместо „есть сокращение для", используя, разумеется, в качестве символа

объектного языка!). Несомненно, это налагает более тяжелые обязательства. Так, если что-нибудь окажется ошибочным, то мы столкнемся с тем, что наши аксиомы противоречивы, и тогда мы не сможем так легко завуалировать существо вопроса, изменив какой-то пункт „определения" и назвав его безопасным. Это — отрицательное следствие. Но возможно также и положительное: я показал в моей работе по дескрипциям, что в случае виртуальных классов аксиомы могут быть проще и элегантнее, чем определения. Мне кажется, что благодаря этому понимать виртуальные классы легче. Заметьте, что на основе аксиом может быть выведена метатеорема об элиминации, причем это может иметь место довольно часто. Итак, совет мой состоит в том, чтобы оставить проблему элиминации для *развития* теории, а не усложнять ею *формализацию*.

Наш следующий вопрос таков: допустимо ли, чтобы квантифицированные переменные пробегали по виртуальным объектам? Мне думается, что ответом должно быть твердое „нет". Квантификация (или область связанных переменных) будет включать только возможные индивиды. Если мы придадим виртуальным объектам столь высокое значение, что захотим квантифицировать по ним, то перейдем к *новой* теории с *новой* онтологией (и с новыми виртуальными объектами!). Роль виртуальных объектов состоит в прояснении структуры базисной области D, а не во введении нового класса проблем. Вот почему мы бываем довольны, когда упоминания о виртуальных объектах оказываются элиминируемыми. Но может быть так, что виртуальные объекты используются для упрощения задания *исходной* структуры области D, поэтому мы допускаем, что элиминация не всегда возможна. Следовательно, виртуальные индивиды не допускаются на равных правах с индивидами из D.

Таким образом, квантификация по *всем* виртуальным индивидам не допускается. Однако квантификация по *части* их вполне может быть полезной. Возьмем в качестве примера теорию действительных и виртуальных классов. Каждый действительный класс имеет *кардинальное* число. Если a и b — действительные классы (множества), то мы будем писать $a \approx b$ для обозначения того факта, что между ними существует одно-однозначное соответствие (как актуальное отношение). Тогда кардинальное число множества a может быть определено следующим равенством:

$$|a| = \{x : x \approx a\}.$$

В обычных теориях классов $|a|$, как правило, есть виртуальный, а *не* действительный класс.

Среди виртуальных классов мы можем определить тот, который считается кардинальным числом, следующим образом:

$$Card\,[\tau] \leftrightarrow \exists x\,[\tau = |x|],$$

где τ есть терм, а x не входит в τ свободно.

Разве плохо было бы иметь *переменные*, пробегающие по кардиналам, например готические буквы $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \ldots$, так, чтобы можно было обычным путем формулировать теоремы о существовании? Ответ прост: да, вы можете это сделать и даже не рисковать своими взглядами на виртуальные объекты. Мы просто примем, что

$$\forall \mathfrak{m} \Phi(\mathfrak{m}) \leftrightarrow \forall x \Phi(|x|)$$

и

$$\exists \mathfrak{m} \Phi(\mathfrak{m}) \leftrightarrow \exists x \Phi(|x|).$$

Подразумевающийся смысл этих определений ясен, и мы видим, что такая квантификация не хуже, чем обычная квантификация по множествам. Ясно, что тот же самый подход может быть применен и к квантификации по любой части виртуальных объектов, которая может быть *пронумерована* или *индексирована* множествами с помощью некоторой определимой операции подобно $|a|$. Однако по этому методу квантификация никогда не будет производиться по всем виртуальным объектам, ибо вне зависимости от того, что за операция $\varphi(a)$ берется, виртуальный класс $\tau = \{x : x \notin \varphi(x)\}$ таков, что $\neg \exists y\,[\tau = \varphi(y)]$. Поэтому данный метод полезен и естествен.

В итоге мы различаем виртуальные, возможные и действительные объекты. Если обозначить буквой V область виртуальных объектов, D — возможных, а A — действительных, то для простоты мы можем принять, что

$$A \subseteq D \subseteq V.$$

Разница между A и D, хотя и не проявляется в обычных системах, но становится решающей в модальной логике. Действительно, в этом случае A должно быть заменено целым семейством областей $A_i \subseteq D$, где $i \in I$. Однако разделять эти классы полезно, может быть, даже в немодальной логике (см. работу Кокьяреллы и Ламберта).

Заметим, что мы уже использовали отношение *равенства* (=) между индивидами — даже в V. Это оправдано и строго. Равенство *есть* логическое понятие. Если раньше и заблуждались относительно свойств равенства, то это никак не означает, что само понятие изначально неясно. Мы обсудим это подробно в связи с модальными понятиями.

II. Возможные миры

Здесь не место обсуждать, откуда идет сама идея возможных миров, достаточно заметить, что недавние работы Кангера, Монтегю, Хинтикки и Крипке ясно установили полезность данного понятия. В самом деле, идея кажется столь достойной, что я хочу выступить за нее, имея в виду расширение этого понятия, которое делает метод гораздо более гибким, по крайней мере мне так кажется.

Мой совет заключается в использовании принципа *индексных выражений* Карнапа — Бар-Хиллела. Возможные миры, понимаемые как различные собрания индивидов с дополнительной структурой или без нее, выражают только один аспект этой идеи. Любая система структур может быть индексирована элементами подходящего множества, причем различными способами. Так, возьмем фиксированное множество I этих индексов и прежде всего отметим индексами систему действительных индивидов, положив, возможно различные, $A_i \subseteq D$ для каждого $i \in I$. Важно, чтобы не предполагалось одно-однозначного соответствия между A_i и i, ибо элементы множества I могут обладать структурой, не полностью отражающейся в отличиях одного A_i от другого. Вот почему я отказываюсь брать как модели Монтегю — Крипке (ранние работы), так и модельные множества Хинтикки в качестве фундаментальных. Этот пункт необходимо обосновать несколько подробнее. Дело в том, что недостаточно заявлять, будто, имея модели или модельные множества, мы можем провести различения, достаточные для получения *эффекта* любого множества индексов (используя отдельные различные экземпляры множества или вводя в язык специальные предикаты), ибо это и означает, что метод индексов в действительности является более фундаментальным.

Посмотрим на эти индексы в действии. Суть состоит в том, что в самих выражениях языка делается неопределенная ссылка на индекс — отсюда и наша терминология. Здесь мы можем привести лишь один такой пример, хотя позже будут приведены и другие, более интересные примеры. В данном примере рассматривается случай с квантификацией. Пусть мы имеем квантор $\forall x$, пробегающий по области D. Теперь введем квантор по „действительным" индивидам $\forall . x$, где точка означает указание на неопределенный индекс. Таким образом, даже если мы знаем значение предиката $\mathcal{P}$, мы не можем сказать, является ли

$$\forall . x \mathcal{P}(x)$$

истинным или ложным. Однако если мы выделим некоторое $i \in J$, то *относительно* этого индекса предложение имеет определенное истинностное значение; а именно, оно *истинно*, если $\mathcal{P}(a)$ истинно для всех $a \in A_i$. Но пока мы не укажем на некоторое $i \in I$, область значения квантифицированной переменной остается неизвестной.

В этом примере мы видим предложение, чье истинностное значение не постоянно, а изменяется как функция от $i \in J$. Такую ситуацию легче всего представить себе в случае высказываний, зависящих от времени, то есть в случае, когда I представляет множество моментов времени. Очевидно, что одно и то же высказывание может быть истинным в один момент и ложным — в другой. В более общем случае не следует считать $i \in I$ чем-то таким же простым, как моменты времени или возможные миры. В общем случае

$$i = (w,\ t,\ p,\ a,\ \ldots),$$

где индекс i имеет много *координат*: например, w есть *мир*, t — *время*, $p\{xyz\}$ — (трехмерное) *положение* в мире, a — *субъект* и т. д. Все эти координаты могут изменяться, возможно, независимо и таким образом влиять на истинностное значение утверждений, которые косвенно относятся к данным координатам.

Встает вопрос: почему мы не можем просто сделать эти указания прямыми и свести тем самым логику индексных выражений к обычной логике? Ответ заключается в том, что мы ведь не говорим таким образом. Высказывания всякого рода косвенно указывают на „здесь", „теперь", „я". Эти высказывания имеют свою логику: относительно некоторых из них можно утверждать, что они истинны в силу своей синтаксической формы. Поэтому ввиду распространенности и простоты таких высказываний мы, конечно, обязаны исследовать их внутреннюю логику. Разумеется, перевод на более элементарные языки может помочь в получении некоторых результатов, но это не означает, что более сложные языки неинтересны или что они должны быть элиминированы. Это напоминает идею типовой неопределенности: мы должны указывать точно не тип каждой переменной, а только относительное расстояние между их уровнями. Многие высказывания истинны на всех уровнях, и было бы просто лишней работой точно выписывать в обозначениях все уровни всех переменных.

$i \in I$ можно было бы назвать *точками соотнесения*, так как для определения истинностного значения выражения необходимо „соотнести" его с точкой из I. Предварительно я уже заметил, что эта терминология более нейтральна и более обща, чем *возможные миры*. Может быть, „индекс" также хороший термин, но мне он кажется каким-то невыразительным. В любом случае при построении интерпретации для некоторого языка множество I вместе с $A_i \subseteq \subseteq D \subseteq V$ должны быть фиксированы заранее. Не забывайте, что некрасиво изменять объем I в середине исследования (или заявлять о тех координатах, о которых вначале ничего не говорилось), а потом высмеивать логику индексных выражений как противоречивую и лишенную интуитивного содержания.

Такие доводы, если они имеют какое-либо серьезное содержание, могут только показать, что некоторая интерпретация неадекватна для представления более сложной ситуации. То есть можно показать неадекватность *отдельной* интерпретации, но нельзя доказать неадекватность самого метода построения интерпретаций.

Итак, можно заключить, что истинностное значение утверждения зависит от $i \in I$. Для того чтобы установить связь между утверждениями и их частями, потребуются некоторые обозначения. Сначала примем обозначения для истинностных значений: будем писать 1 для обозначения *истины* и 0 — для обозначения *лжи*. Этот выбор основан на том, что $2 = \{0,\ 1\}$ есть простой и удобный символ для обозначения множества из двух истинностных значений. Далее, утверждению Φ сопоставим *функцию* $\|\Phi\|$ (*значение* Φ в данной интерпретации), определенную на I, со значениями из множества 2. Иначе говоря, мы будем писать

$$\|\Phi\|_i=1,$$

когда Φ *истинно относительно* i. Возможны и другие обозначения, и ниже мы рассмотрим несколько их вариантов. Отметим, что мы используем запись f_i как равнозначную записи значения функции $f(i)$. Иногда нам придется говорить о множестве всех функций, определенных на I, со значениями из 2; оно будет обозначено 2^I, и мы можем записать:

$$\|\Phi\|\in 2^I,$$

если

$$\|\Phi\|_i\in 2^I,$$

где $i\in I$.

Мы уже фактически приняли, что наш язык содержит обычные пропозициональные связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ и кванторы $\forall$, $\forall.$, $\exists$, $\exists.$, а также другие операторы, о которых речь пойдет ниже. Для объяснения значения этих символов дадим обычные семантические определения, а именно:

($\neg$) $\|\neg\Phi\|_i=1$, если и только если $\|\Phi\|_i=0$;
($\vee$) $\|\Phi\vee\Psi\|_i=1$, если и только если $\|\Phi\|_i$ или $\|\Phi\|_i=1$;
($\vee$) $\|\Phi\wedge\Psi\|_i=1$, если и только если $\|\Phi\|_i=1$ и $\|\Phi\|_i=1$,

и аналогичным образом для ($\rightarrow$) и ($\leftrightarrow$). Заметьте, что в пункте ($\neg$) мы не добавили слов „в противном случае $\|\neg\Phi\|_i=0$", так как мы уже согласились, что принята двузначная логика.

Для того чтобы интерпретировать кванторы, я посоветовал бы ввести в язык *константы* $\bar{a}$ для всех $a\in V$. Разумеется, соответствие между $\bar{a}$ и a должно быть одно-однозначным. Тогда мы можем записать:

($\forall$) $\|\forall x\,\Phi(x)\|_i=1$, если и только если $\|\Phi(\bar{a})\|_i=1$ для всех $a\in D$;
($\forall\cdot$) $\|\forall\cdot x\Phi(x)\|_i=1$, если и только если $\|\Phi(\bar{a})\|_i=1$ для всех $a\in A_i$.

Соответственно для ($\exists$) и ($\exists.$). Однако известно, что некоторые не хотят иметь несчетные языки со слишком объемистыми „адресными книгами" индивидных констант. Это одна из причин, по которым Тарский ввел свой вариант определения выполнимости. Я работал с обоими типами определений и пришел к выводу, что определения с индивидными константами *гораздо проще излагать* тем, кто не имеет навыков в теории множеств. Определение истинности оказывается короче.

До сих пор мы говорили только о связи между высказываниями и о кванторах, навешиваемых на высказывания. Что же касается интерпретации атомарных формул термов (например, дескрипций), то она заслуживает отдельного параграфа.

III. Индивидные концепты

Почему бы не броситься сразу в гущу боя, начав с *определенных дескрипций*? Они иллюстрируют все проблемы и прямо ведут к общим операторам. Во-первых, какие же нам принять обозначения? Существуют ι, T, U для обозначения *определенной дескрипции*, но мне ни одно из них не нравится. Это дело вкуса, но поскольку для кванторов я использовал перевернутые гротесковые *) буквы $\forall$ и $\exists$, то решил использовать (перевернутую?) гротесковую заглавную букву **I** для обозначения того, что речь идет об *индивиде*. (На самом деле T, конечно, не так уж плохо, но как быть с T и F или $\top$ и $\bot$ для обозначения истинностных значений?) Независимо от обозначений семантика для этого оператора довольно очевидна, ибо:

(**I**) $\|\mathbf{I}x\Phi(x)\|_i=a$, если и только если,
$\{a\}=\{b\in D:\|\Phi(\bar{b})\|_i=1\}$.

Иными словами, имея $i\in I$, для определения значения $\|\Phi(\bar{b})\|_i$ относительно каждого $b\in D$ мы должны посмотреть, действительно ли при *единственном* b эта формула истинна. Если так, то этот индивид назовем a и будем считать его *значением* дескрипции *относительно* i. Следовательно,

*) Гротесковый шрифт — вид типографского шрифта с равномерной толщиной штрихов и без подсечек. — *Прим. перев.*

$\| \mathbf{I} x \Phi x \|$ есть *функция*, определенная на I, со значениями из D. Но какого рода эта функция? И чем тогда будут *несобственные* дескрипции? Ответ: эти функции лучше всего рассматривать как *частичные*; несобственные дескрипции имеют „неопределенные" значения.

Эта точка зрения отличается от той, которую я защищал раньше (даже в самом моем докладе на коллоквиуме в Ирвине!). Как извлечь все преимущества из идеи (нуждающейся еще в детальных объяснениях) *индивидных концептов*, я понял только тогда, когда начал в неформальной, разговорной манере излагать скопившиеся у меня соображения. Это станет яснее по мере того, как мы будем продолжать наше исследование.

Заметим, что наряду с оператором $\mathbf{I}$ мы имеем также оператор $\mathbf{I}.$, который принимает в качестве значений только действительные индивиды и определяется следующим очевидным образом:

$$(\mathbf{I}.)\ \| \mathbf{I}.x\Phi(x) \|_i = a, \text{ если и только если } \{a\} = \{b \in A_i : \| \Phi(\bar{b}) \|_i = 1\},$$

причем мы принимаем, что это значение неопределенно, если нет a, удовлетворяющего условию, записанному справа. Разумеется, оператор $\mathbf{I}.$ не является исходным, потому что он так легко определяется в терминах других понятий.

$$\mathbf{I}.x\Phi(x) = \mathbf{I}x\exists.y[x = y \wedge \Phi(y)].$$

Это последнее замечание напоминает нам, что мы еще ничего не сказали о равенстве. Как обычно, наш язык содержит *термы* и *формулы*, а также обычные операторы и необычные, которые мы еще введем. В частности, из двух термов τ и σ может быть образовано равенство $\tau = \sigma$, представляющее собой формулу. Мы хотим приписать значение каждому правильно построенному выражению без свободных переменных, поэтому предположим, что нам известно $\|\tau\|$ и $\|\sigma\|$, а именно частично определенные функции с областью определения I и областью значения. Но какой областью значения? Значения дескрипций должны принадлежать только D, а значения индивидных термов в общем случае должны лежать в V. Используем $V^{(I)}$ для обозначения множества *частичных* функций, в то время как V^{I} есть множество *всюду определенных функций*, так что

$$\|\tau\|, \|\sigma\| \in V^{(I)}.$$

Для равенства:

$(=) \|\tau = \sigma\|_i = 1$, если, и только если, $\|\tau\|_i$ и $\|\sigma\|_i$ оба либо определенны и равны, либо неопределенны.

Да, да, я слышу возражения, выкрикиваемые со всех сторон. Если мы собираемся использовать неопределенные термы, то почему нельзя использовать и неопределенные истинностные значения? Разве это не более естественно? Может быть, и так, но сначала покажите мне действительно пригодную для работы трехзначную логику. Я знаю, что такая логика может быть построена и по меньшей мере четыре раза в год кто-нибудь преподносит новую идею, но до сих пор она еще *не* разработана до такой степени, чтобы с ней было приятно работать. Может быть, такой день настанет, но меня еще нужно будет убедить. Поэтому мой совет такой: продолжать работать с двузначной логикой, потому что ее легко понимать и использовать в приложениях; а если кто-то предложит другую работающую логику, то переключиться будет нетрудно.

На основе $(=)$ становится очевидно, что следующие две формулы всегда истинны для всех $i \in I$

$$\tau = \tau \text{ и } [\tau = \sigma \wedge \tau = \theta \rightarrow \sigma = \theta],$$

что и является причиной выбора такого определения. Поскольку следующая формула, как мы покажем ниже, в общем случае *не проходит*

$$\tau = \sigma \wedge \Phi(\tau) \rightarrow \Phi(\sigma),$$

то это может кого-то смутить. Однако важный частный случай выполняется и здесь. Прежде всего мы должны сказать, что делать с (виртуальными) индивидными константами:

$$\|\bar{a}\|_i = a \text{ для всех } a \in V.$$

Это есть именно подразумевающееся значение $\bar{a}$. Теперь легко проверить, что

$$\bar{a} = \bar{b} \wedge \Phi(\bar{a}) \rightarrow \Phi(\bar{b})$$

всегда истинно. В частности, выполняется также немного более слабое утверждение:

$$\forall x\ \forall y[x = y \wedge \Phi(x) \rightarrow \Phi(y)].$$

Чтобы лучше понять предлагаемую семантику, давайте будем (более или менее) следовать терминологии Карнапа: будем называть элементы 2^I *пропозициональными концептами*, а элементы $V^{(I)}$ — *индивидными концептами*. Заметим, что

$$A_i^{(I)} \subseteq D^{(I)} \subseteq V^{(I)}$$

и, таким образом, классификация индивидных концептов параллельна классификации индивидов. Мы называем их *концептами*, потому что их значения зависят от индексов, или точек соотнесения, принадлежащих I, и образуют последовательный ряд значений, то есть *функцию*. Такой пучок индивидов (или истинностных значений) дает нам не один индивид, а индивидный концепт, зависящий от точки соотнесения. С этим каждый знаком на примере такой старой дескрипции, как „Нынешний король Франции". Заметьте, что V строится *сначала*, а $V^{(I)}$ — *после*, с тем чтобы приписывать значения термам. Это означает, что индивидный концепт есть семантический конструкт, а не исходное онтологическое понятие.

Повторяем: для терма τ и формулы Φ:

$$\|\tau\| \in V^{(I)}, \text{ а } \|\Phi\| \in 2^I.$$

Таким образом, $\|\tau\|$ есть нечто вроде фрегевского *смысла*, а $\|\tau\|_i$ — что-то вроде *значения*. Но не точно. Не будем здесь углубляться в данный вопрос. Может быть, будет лучше использовать идеи Карнапа и назвать $\|\tau\|$ *интенсионалом* τ, а $\|\tau\|_i$ — *экстенсионалом* τ в $i \in I$. Основной принцип нашей семантики таков: *интенсионал целого выражения есть функция интенсионалов его частей*.

То же самое, конечно, может быть *не* истинно для экстенсионалов. В этом и состоит наше объяснение „парадокса" равенства: естественное чтение $\tau = \sigma$ может быть только таково, что τ и σ имеют тот же самый экстенсионал (если вообще они имеют экстенсионал) по отношению к данной точке соотнесения. Это не влечет в общем случае равенства интенсионалов. Следовательно, у нас не может быть общего правила замены равных — кроме случая, когда мы имеем дело с подлинными индивидами, интенсионал которых является *константной* функцией.

Обратившись на минуту к дескрипциям, мы отметим общезначимость принципа:

$$\forall y\, [y = \text{I}x\Phi(x) \leftrightarrow \forall x\, [x = y \leftrightarrow \Phi(x)]].$$

Это фундаментальное свойство дескрипций защищалось многими из нас (назовем хотя бы некоторых: Хинтикка, ван Фрассен, Ламберт, автор настоящей статьи) и теперь кажется естественным. Следуя тому методу, каким я рассматривал индивидные концепты, мы получим некоторые результаты и для неопределенных дескрипций. Мы видим, что $\|\text{I}x\,[x \neq x]\|$ есть *всюду неопределенная* функция в множестве функций $V^{(I)}$; назовем ее $*$. Этот концепт $* \in V^{(I)}$ очень похож на фрегевский пустой объект и кажется мне теперь *более естественным*, чем *произвольный* выбор пустого элемента в $V \sim D$. Его онтологический статус вполне детерминирован, он может быть назван семантическим конструктом, что, по-видимому, ставит это понятие на место. Однако мы получим то же самое общезначимое предложение, что и раньше, если примем, что

$$\neg \exists y\, [y = \text{I}x\Phi(x)] \rightarrow \text{I}x\Phi(x) = \text{I}x\,[x \neq x].$$

IV. Интенсиональные операторы

До сих пор мы находились на уровне чистой логики: все понятия (за исключением индивидных констант) были логическими понятиями. Теперь пришло время обсудить *внелогические* понятия, чтобы прийти благодаря этому к дальнейшим логическим понятиям.

Что можно сказать относительно (атомарных) предикатов? Обсудим в качестве простого примера бинарные отношения. До сих пор единственной константой такого рода у нас было равенство, но оно слишком специфично. Поэтому мы отметим прежде всего, что наряду с равенством будем допускать выражения

$$\tau \mathbf{R} \sigma,$$

где τ и σ могут быть произвольными термами. (Разумеется, мы хотим быть в состоянии выразить в языке такие выражения, как „Ивонна есть жена нынешнего короля Франции".) Это ставит перед нами вопрос о том, как интерпретировать $\mathbf{R}$; назовем эту интерпретацию $\|\mathbf{R}\|$. Будет ли $\|\mathbf{R}\|$ отношением между индивидами или между индивидными концептами? Ответ: последнее. Почему? Потому что, даже если мы начнем с отношений между индивидами, мы сможем определить интенсиональные отношения, которые зависят от интенсионалов каждого из аргументов. (Это станет очевидным, как только мы введем модальные операторы.) Поэтому в общем случае мы примем

$$\|\mathbf{R}\| \in (2^I)^{V^{(I)} \times V^{(I)}},$$

так что в соответствующем пункте определения истины мы будем иметь

R $$\|\tau\mathbf{R}\sigma\| = \|\mathbf{R}\|(\|\tau\|, \|\sigma\|).$$

То же самое для предикатов с большим числом мест. Отметим, что подстрочный индекс i в данном случае несуществен, так как мы установили, что значение функции $\|\mathrm{R}\|$ принадлежит 2^I.

Предикаты сделаны такими сложными не для того, чтобы мучать читателей, а для того, чтобы сделать логику более *общей*. Когда формула *логически общезначима* (то есть истинна во всех интерпретациях и относительно всех точек соотнесения в интерпретации), она останется общезначимой и тогда, когда в нее вместо *предикатных букв* подставлены *формулы*. Данное соглашение есть единственно разумная конвенция. Но это, ясное дело, не мешает нам обсудить некоторые частные виды предикатов.

Одним таким видом являются *экстенсиональные* предикаты. Лучшим примером могут служить обыкновенные отношения $R \subseteq V \times V$. (Например, $2 < +\infty$, откуда видно, что отношения должны быть определены на всем множестве V.) По аналогии с индивидами ту константу языка, которая соответствует отношению R, будем обозначать $\overline{R}$. Тогда

($\overline{\mathrm{R}}$) $\|\tau R\sigma\|_i = 1$, если и только если
$(\|\tau\|_i, \|\sigma\|_i) \in R$.

Заметьте, что для того, чтобы эта атомарная формула была истинной, должны быть определены как $\|\tau\|_i$, так и $\|\sigma\|_i$. Однако для равенства мы выберем другую конвенцию, потому что особая роль равенства обусловливает различные конвенции, принимаемые для большего единообразия среди общезначимых формул. (Интересная деталь: если все атомарные формулы построены с помощью $=$ или различных $\overline{R}$ и если единственными термами являются переменные или дескрипции, то дескрипции могут быть полностью элиминированы. В общем случае это не имеет места.) Например, *принцип экстенсиональности* (для $\overline{R}$) читается:

$$\tau = \tau' \wedge \sigma = \sigma' \wedge \tau\overline{R}\sigma \rightarrow \tau'\overline{R}\sigma'.$$

Не каждый экстенсиональный в этом смысле предикат происходит от обычного R. Читатель легко может построить для себя другие примеры, а мы вернемся к этому вопросу ниже.

Интенсиональные отношения приходят на ум не так легко, как пропозициональные интенсиональные операторы. Простейшим примером является *оператор* необходимости $\Box$:

($\Box$) $\|\Box\Phi\|_i = 1$, если и только если $\|\Phi\|_j = 1$ для всех $j \in I$.

Это означает ни больше ни меньше как истинность во всех возможных мирах. Как же мы это назовем? *Логическая необходимость* кажется мне не совсем подходящим названием, потому что она зависит от I (как и значения $\|\mathbf{R}\|$). А *универсальная необходимость*? Ведь мы и в самом деле квантифицируем по всему универсуму I. Как бы мы его ни называли, но это модальный оператор системы S5, то есть очень полезный оператор Возможность, разумеется, определяется двойственным образом, поэтому нам не нужно выписывать пункт для ($\Diamond$) в определении истины.

При желании мы можем сказать, что $\Box$ имеет в качестве интерпретации $\|\Box\|$, так же как и R. В самом деле $\|\Box\|$ имеет тот же логический тип, что и $\|\neg\|$:

$$\|\Box\|, \|\neg\| \in (2^I)^{2^I}.$$

Они являются отображениями из множества пропозициональных концептов на множество пропозициональных концептов. Разница в том, что один из них экстенсионален, а другой нет. Замечание, что мы можем написать

$$\|\Box\Phi\| = \|\Box\|(\|\Phi\|)$$

(без подстрочных индексов!), делает нашу конвенцию относительно интенсионалов совершенно очевидной.

Теперь, когда логический словарь стал более богатым, полезно рассмотреть некоторые сложные фразы: например, $\Box\tau = \sigma$. По определению, мы имеем:

$\|\Box\tau = \sigma\|_i = 1$, если и только если $\|\tau\|_j = \|\sigma\|_j$ для всех $j \in I$.

Причем правое равенство выполняется и в случае, когда оба его терма неопределенны. Это означает, что $\|\Box\tau = \sigma\|$

является концептом истинного выражения, если и только если выполняется $\|\tau\|=\|\sigma\|$, то есть если $\|\tau\|$ и $\|\sigma\|$ есть *тот же самый* индивидный концепт. Введем для этого понятия особый символ:

$$\tau \equiv \sigma \leftrightarrow \Box\tau = \sigma.$$

Так мы различаем экстенсиональное равенство ($\tau=\sigma$) и интенсиональное ($\tau \equiv \sigma$). Назовем это более строгое понятие *тождеством.*

Имея в виду нашу конвенцию относительно интенсионалов (которая может быть формально обоснована семантикой), мы находим, что если τ и σ не имеют свободных переменных, то

$$\tau \equiv \sigma \wedge \Phi(\tau) \rightarrow \Phi(\sigma)$$

верно для тождества, в то время как аналогичный принцип для равенства не выполняется. Соответственно если Φ и Ψ не содержат свободных переменных и Θ' получается из Θ заменой вхождений Φ на Ψ, то

$$\Box[\Phi \leftrightarrow \Psi] \wedge \Theta \rightarrow \Theta'$$

также выполняется. Таким образом, наша логика имеет известную степень экстенсиональности: выполняется подстановочность для *логически эквивалентных* формул. Некоторые считают, что в подлинной интенсиональной логике такой принцип должен быть отброшен. Но я не видел ясного семантического анализа подобной логики. Обычно путают пропозициональные операторы и предикаты от предложений, то есть предполагают, что объектный язык должен формализовать часть синтаксиса. Но даже в этом случае я не вижу никакой подходящей общей системы. Мой совет — работать пока на этом промежуточном интенсиональном уровне, потому что, как я попытаюсь показать в последнем параграфе, тут имеется много сложных и интересных понятий.

Самая интересная комбинация содержит $\Box$ и $\forall$. Верна, например, такая формула:

$$\Box\forall x\Phi x \leftrightarrow \forall x\Box\Phi(x),$$

а такая

$$\Box\forall.x\Phi(x) \rightarrow \forall.x\Box\Phi(x)$$

не верна; и, таким образом, для $\forall.$ не верна импликация *в обе стороны.* Опровергающие примеры подобрать нетрудно. В последнее время вокруг этих принципов поднялась большая суета, но все напрасно: *есть* два вида кванторов с *разными* свойствами. Все, что сейчас нужно,— строить ясную семантику. (Это замечание было сделано Крипке и другими, но его невредно и повторить.)

Чтобы прояснить опровергающие примеры, полезно снова рассмотреть экстенсиональные предикаты. Предположим, что каждому $i \in I$ сопоставлено отношение $R_i \supseteq V \times V$ с возможно различными R_i для различных i. (Мы можем рассматривать R как функцию, значениями которой служат отношения.) Затем мы можем ввести в наш язык константу R (черточка (—) обозначает *константное* отношение, а тильда (~) — *переменное* отношение), значение которой задается так:

($\tilde{R}$) $\|\tau\tilde{R}\sigma\|=1$, если и только если $(\|\tau\|_i, \|\sigma\|_i) \in R_i$. $A_i \subseteq D$ есть как раз такой одноместный предикат, так что мы можем написать

($\tilde{A}$) $\|\tilde{A}\tau\|_i=1$, если и только если $\|\tau\|_i \in A_i$. Далее мы замечаем, что

$$\forall.x\Phi(x) \leftrightarrow \forall x[\tilde{A}(x) \rightarrow \Phi(x)]$$

истинно, а это и означает, что $\forall.$ есть *ограниченный квантор.* Теперь легко заметить, что

$$[\tilde{A}x \rightarrow \Box\Phi(x)]$$

и

$$\Box[\tilde{A}x \rightarrow \Phi(x)]$$

являются независимыми формулами. Этим и объясняются описанные выше явления.

Использование переменных предикатов указанным путем кажется мне более предпочтительным, чем тот способ, каким ван Фрассен предлагает использовать то, что он называет *логическим пространством.* Если я правильно понимаю его метод, он рассматривает D (которое сейчас может быть равным V) как множество абстрактных ячеек для индивидов. Я представляю себе это как что-то вроде гигантской корзины для яиц. На этом пространстве определены некоторые *фиксированные* предикаты. Действительные индивиды понимаются как отображенные (или заключенные) в множество D. Затем задается семейство трансформаций $T=\{t_i : i \in I\}$, и мы можем следовать за индивидом по D, наблюдая, как $a \in D$ трансформируется в $t_i a$. Разумеется, a и $t_i(a)$ имеют различные свойства по отношению к фиксированным предикатам. Есть в этой идеи что-то, что мне кажется неподходящим или по меньшей мере недостаточно общим. Я думаю, что мы можем получить тот же эффект, заменив фиксированное отношение R семейством отношений R_i, которые определяются так:

$$aR_ib \leftrightarrow t_i(a)\,Rt_i(b)$$

и сохраняют индивиды на их местах. Суть в том, что, как мне кажется, ван Фрассен путает изменяемость предикатов с интерпретацией модальных операторов. Эти вещи надо различать, и совет мой в том, чтобы принять модельные структуры вроде предложенных выше, в которых модальный оператор рассматривается отдельно.

Например, мы можем принять, что I есть система, содержащая бинарный символ композиции $\circ$; тогда, если нам нравится трансформационный подход, мы можем принять

$$t_j(t_i(a)) = t_{i\circ j}(a).$$

Далее, можно определить пропозициональный оператор $\boxed{\mapsto}$:

($\boxed{\mapsto}$) $\|\boxed{\mapsto}\Phi\|_i = 1$, если и только если $\|\Phi\|_{i\circ j}$ для всех $j \in I$.

Получается чрезвычайно интересный оператор, но в действительности это оператор довольно специального вида — он может стать предметом рассмотрения, например, во временно́й логике. И это, конечно, только один из множества различных типов операторов.

Более общо, пусть $\rho \subseteq I \times I$ будет бинарным отношением на I, тогда соответствующий ρ оператор $\boxed{\rho}$ определяется так:

($\boxed{\rho}$) $\|\boxed{\rho}\Phi\|_i - 1$, если и только если $\|\Phi\|_j = 1$ для всех $j \in I$, где $i\rho j$.

Другими словами, ρ есть просто-напросто *отношение альтернативности*, заданное на возможных мирах. Однако следует подчеркнуть, что это не единственный способ получения интересных операторов, хотя он и включает предыдущий пример.

Простейший пример оператора, который нельзя естественным образом задать с помощью какого-либо *отношения альтернативности*, встречается во временно́й логике. Предположим, что есть множество моментов времени (то есть множество действительных чисел). Мы определим *оператор продолженного времени* (progressive tense) $\boxed{\leftrightarrow}$ так:

($\boxed{\leftrightarrow}$) $\|\boxed{\leftrightarrow}\Phi\|_i = 1$, если и только если имеется открытый интервал $J \subseteq I$, такой, что $i \in J$ и $\|\Phi\|_j = 1$ для всех $j \in J$.

Давно уже Мак-Кинси и Тарский показали, что логика данного оператора является в точности S4. На любом другом индексном множестве I мы можем задать S4 с помощью отношения альтернативности, но на обыкновенном множестве действительных чисел задать таким путем $\boxed{\leftrightarrow}$ никак нельзя.

Теперь нам легко перейти к самому общему монадическому пропозициональному оператору. Сопоставим каждому $i \in I$ семейство G_i *подмножеств* I. Тогда мы можем определить следующий оператор:

($\boxed{\mathfrak{G}}$) $\|\quad\Phi\|_i = 1$, если и только если,
$\{j \in I\colon \|\Phi\|_j = 1\} \in G_i$,

что является просто тривиальной переформулировкой утверждения

$$\|\boxed{\mathfrak{G}}\| \in (2^I)^{2^I}.$$

Но почему-то это истолковывается по-другому в терминах множеств. Заметим, что в примере с $\boxed{\leftrightarrow}$ семейство G_i могло бы пониматься как собрание всех подмножеств I, содержащих *внутри* себя точку i, иными словами, как окрестность точки i.

Ясно, что только некоторые из операторов $\boxed{\mathfrak{G}}$ могут быть названы *логическими операторами*, а именно лишь те, которые не зависят от структуры I.

Имея *подходящее определение* (инвариантное относительно изменения множества I, например), мы, без сомнения, сможем показать, что единственными логическими операторами являются ┐, ┐┐, $\Box$ и $\Diamond$. Конечно, это не означает, что другие операторы не интересны — ничего подобного! По-моему, одна из самых больших ошибок всей модальной логики заключается в концентрации внимания на системах лишь с *одним* модальным оператором. Единственный способ получить какие-либо философски значимые результаты в деонтической или эпистемической логике — это комбинировать соответствующие операторы с временны́ми операторами (иначе как вы можете сформулировать принцип изменения?); логическими (иначе как вы сравните относительное и абсолютное?) операторами типа *исторической* или *физической* необходимости (иначе как вы сможете связать субъект и его окружение?) и т. д. и т. п. На чем же следует остановиться? Этот список можно продолжать и продолжать. Автор любой системы должен будет где-то остановиться, но остановиться на *одном* операторе — это, конечно, значит упустить что-то важное. Я хочу подчеркнуть, что излагаемая здесь семантика позволяет рассматривать сразу несколько операторов естественным и удобным путем: надо только выбрать подходящие координаты $i = (w, t, p, a, \ldots)$. Конечно, при этом нельзя забывать и о логических операторах. Я хочу по этому поводу возразить Хинтикке. Он использует только один оператор (который я обозначил как $\boxed{\rho}$) и старается выразить различные условия относительно подстановочности и существования в терминах равенства $\boxed{\rho}^n \tau = \sigma$ с итерированными модальностями. Я полагаю, что это слишком большая для отношения альтернативности нагрузка: фундаментальное условие для подстановочности есть $\Box\tau = \sigma$. Условия, содержащие более слабые отношения, должны быть представлены как *метатеоремы* относительно *специальных* контекстов (специальных формул $\Phi\tau$), а не как часть исходной семантики. Мне кажется, что подход настоящей работы оставляет место для важных идей Хинтикки.

V. Операторы, связывающие переменные

До сих пор мы говорили только об интенсиональных отношениях или интенсиональных операторах, действующих на предложения. Однако нам требуется бо́льшая степень общности, хотя достичь ее сложно. В частности, требуются интенсиональные двойники экстенсиональных операторов типа кванторов и операторов дескрипции. Рассмотрим теперь прежде всего оператор \$, который связывает одну переменную и навешивается на один терм и одну формулу; мы можем использовать его в языке в следующих выражениях:

$$\$x\,[\tau(x),\ \Phi(x)].$$

Теперь мы должны выбрать: считать ли это *термом* или *формулой*.

Примем первое, то есть будем считать \$ термообразующим оператором. Значениями этого сложного терма могут быть и виртуальные объекты (ср. выражение

$$\bigcup_{x \in A} \tau(x)$$

в теории классов: оно существенно зависит от A и от $\tau(x)$). Но поскольку мы занимаемся интенсиональной логикой, то значениями будут (виртуальные) индивидные концепты. Так, мы примем, что

$$\|\$x\,[\tau(x),\ \Phi(x)]\| \in V^{(I)}.$$

Каким же образом значение зависит от $\tau(x)$ и от $\Phi(x)$? Эти выражения являются *функциями* от x, а *все связанные переменные* пробегают по D. Поэтому мы приходим к утверждению, что

$$\|\$\| \in (V^{(I)})U,$$

где $U = (V^{(I)})^D \times (2^I)^D$, $(V^I)^D$ есть множество всех функций, значениями которых являются концепты, а областью определения — D; $(2^I)^D$ есть множество заданных на D функций, значениями которых служат пропозициональные концепты. Таким образом:

$$(\$)\quad \|\$x\,[\tau(x),\ \Phi(x)]\|_i = \|\$\|(f,\ F)_i,$$

где $f \in (V^I)^D$ и $F \in (2^I)^D$ определяются так:

$$f(a)_i = \|\tau(\overline{a})\|_i,$$

$$F(a)_i = \|\Phi(\overline{a})\|_i \text{ для всех } a \in D.$$

Немного затруднительно привести действительно яркие и актуальные примеры таких операторов, которые существуют сами по себе: обычно они бывают составлены из других, более простых операторов. Например,

$$Iy\forall x\Box[\Phi(x) \rightarrow y = \tau(x)]$$

как раз и является сложным оператором. (Только, пожалуйста, не просите меня дать благозвучное чтение этой дескриптивной фразы.) Не исключено, что тот или иной оператор всегда можно свести к такому сложному оператору, в котором переменные связываются только кванторами и операторами дескрипции; но опять-таки, может быть, можно, а может, и нет. Эта проблема порождает дальнейшие размышления. Заметьте, что в случае, когда \$ есть формулообразующий оператор, надо внести только одно изменение: сделать так, чтобы его значениями были пропозициональные концепты.

Чтобы еще раз указать на то, какого рода принципы взаимозаменимости существуют в этой логике, укажем, что здесь имеют место следующие формулы:

$$\forall x \Box \tau(x) = \tau'(x) \wedge \forall x \Box [\Phi(x) \leftrightarrow \Phi'(x)] \rightarrow \\ \$x[\tau(x),\ \Phi(x)] = \$x[\tau'(x),\ \Phi'(x)].$$

Рискуя повториться, мы все-таки заметим, что $\Box$ есть *единственный* модальный оператор, который подходит для выражения условий взаимозаменимости,— это одна из главных причин для включения его в число *логических* констант системы.

Важная проблема, на которую мы до сих пор не обращали внимания, состоит в использовании различных интерпретаций. В самом деле, ведь мы, по сути дела, еще не сказали, *что такое интерпретация*. Это надо сейчас же исправить. *Интерпретация* приписывает значения символам языка в соответствии с их логическим типом. Чтобы определить интерпретацию, надо прежде всего определить V, D, I и A_i для каждого $i \in I$. Затем для каждого символа \$ мы должны определить его значение. Какие символы мы будем рассматривать? Как минимум это будут $\bar{a}$ для каждого $a \in V$, $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, I, $=$, особое $\tilde{A}$, $\Box$ и, наконец, все внелогические символы \$, среди которых содержатся все термообразующие и формулообразующие операторы со связанными переменными или без них, в требующемся нам количестве. Перечисленные сначала символы являются логическими (по крайней мере по отношению к данным областям виртуальных, возможных и действительных индивидов и индексов). Остальные— внелогические. Значения логических символов *фиксированы*; значения внелогических могут *варьироваться*. До сих пор я *не выражал* эту возможность в моих обозначениях. Обозначим нашу интерпретацию $\mathfrak{A}$ (заглавное готическое A). Это какая-то богоподобная n-ка, в которой содержится вся информация относительно областей, индексов и внелогических символов. Если мы знаем $\mathfrak{A}$, то знаем все. Все наши семантические правила (вроде ($\forall$), ($=$), ($\Box$), (\$)) (—) приведены в боевую готовность, и мы можем определить значение любого правильно построенного выражения (без свободных переменных). Я буду использовать обозначения

$$\|\tau\|^{\mathfrak{A}} \text{ и } \|\Phi\|^{\mathfrak{A}},$$

тогда как Монтегю рекомендует:

$$\tau_{\mathfrak{A}} \text{ и } \Phi_{\mathfrak{A}}.$$

Это короче, но, по-моему, даже слишком коротко. В данной системе обозначений нам нечего будет написать, когда упоминание об $\mathfrak{A}$ будет устранено. (Конечно, для некоторых такое устранение есть грех, и они никогда не станут рассматривать подобную возможность.) Поэтому я предпочитаю писать двойные черточки, которые будут напоминать мне о различии между *выражением* и его *значением*. Правда, это совет такого рода, что вы можете им воспользоваться, а можете и отвергнуть его; я прошу только, чтобы вы всегда отдавали себе отчет в том, что вы делаете. Относительно себя я надеюсь, что сделал достаточно ясным *содержание* настоящего подхода.

При допущении, что интерпретации могут быть различными, определение *логической общезначимости* становится более определенным. Построим его для случая *формулы* $\Phi(x, y, \ldots)$ со *свободными* переменными. Такая формула *общезначима*, если, и только если, для всех интерпретаций $\mathfrak{A}$ и для всех индивидов $a, b, \ldots, \in D$ (возможных индивидов $\mathfrak{A}$) мы имеем

$$\|\Phi(\bar{a}, \bar{b}, \ldots)\|_i^{\mathfrak{A}}$$

для всех $i \in I$ (индексному множеству $\mathfrak{A}$). Поскольку наша логика первопорядковая (связанными являются только индивидные переменные), нет ничего удивительного в том, что множество общезначимых формул аксиоматизируемо. В действительности, аксиомы и правила хорошо известны: это предикатная логика плюс модальная логика S5 для $\Box$, плюс требуется аксиомная схема замены *необходимо* равных (и эквивалентных). Давид Каплан и я представим его доказательство полноты (стандартного генкиновского типа) в нашей совместной работе, содержащей больше технических деталей. Томасон также проделал детальное изучение теорем полноты в статье, зачитанной здесь в Ирвине. Его система, однако, является только фрагментом общей системы, описанной в данной работе, хотя развиваемые им методы будут применяться. В связи с этим, кажется, нужен еще один маленький совет: цель логики не в том, чтобы давать доказательства теорем о полноте. Действительной ее целью служит прояснение понятий. Теоремы полноты нужны, но они не самоцель.

Здесь надо сделать еще одно маленькое замечание относительно формализации. В определении логической общезначимости следует отметить, что на места свободных переменных могут подставляться константы, обозначающие элементы $a \in D$, а не $a \in V$. Основанием здесь служит то, что индивидные переменные пробегают по тем индивидам, по которым осуществляется квантификация. Метаязыковые греческие буквы τ, σ, ..., напротив, могут быть заменяемы также и выражениями для виртуальных объектов. Я советую в фундаментальных исследованиях не придавать индивидным переменным двойную функцию. (А для педагогических целей двойное использование как раз лучше, потому что учащимся не нравится такое сложное использование греческих букв!)

Следующий шаг состоит в продвижении к логике высших порядков. Сейчас же для рассмотрения данного вопроса я ограничусь лишь тем, что отошлю вас к последним работам Монтегю. Интересно отметить, что в своих хельсинкских лекциях Леммон строил модальную теорию множеств, не давая семантики. Сейчас семантику можно построить, но я еще не разработал полностью всех деталей.

VI. Случайное совпадение

versus *) равенство

Нам уже пришлось провести различие между равенством и тождеством. Мне потребовалось очень много времени, чтобы понять, в чем заключается это различие, потому что меня спутало более *слабое* отношение, которое я буду обозначать

$$\tau \approx \sigma$$

и назову *случайным совпадением*. Я был доволен (в какой-то мере), обнаружив, что та же путаница лежит, как мне кажется, и в основе недавней дискуссии Хинтикки и Фоллесдала. По-моему, настало, наконец, подходящее

*) Против; здесь — в отличие от (*лат.*).

время для того, чтобы прояснить это различие с помощью принятой нами здесь семантики.

В самом деле, мне кажется, что она больше подходит для того, чтобы дать требующиеся пояснения, чем хинтикковские модельные множества, хотя он может возразить, что его метод имеет при этом другие преимущества. Главное — мы должны четко различать индивиды и индивидные концепты, что и делает наша семантика. Я не думаю, что ситуация столь же наглядна и в случае семантики Хинтикки, но не исключено, что она может быть таковой. Я полностью обязан Монтегю и Каплану, которые указали мне путь к излагающимся здесь формулировкам.

Идея заключается в том, что два индивида, которые, вообще говоря, различны, могут иметь одни и те же свойства (определенного рода!) в данном мире (относительно данного индекса). Следовательно, они эквивалентны или случайно совпадают в этот момент. Относительно других точек соотнесения они могут и не совпадать. Допускается ветвление и слияние индивидов — по крайней мере постольку, поскольку это допускается различениями, связанными с некоторыми типами свойств. Я думаю, что путаница относительно слияния индивидов проистекает из вопроса о *допускаемых свойствах*: если класс свойств неопределенный, изменяющийся, то эквивалентность индивидов может показаться парадоксальной. Мы должны согласиться на класс свойств, данных заранее, или по крайней мере согласиться, что это понятие релятивизировано относительно фиксированного класса свойств, которые мы хотим исследовать более пристально. Я уверен, что именно это имел в виду Хинтикка. К сожалению, он использовал для отношения случайного совпадения символ равенства (=), а это, когда другие понимают равенство по-иному, приводит к бесполезным дискуссиям. Мы увидим, почему сейчас соблазнительно использовать = именно таким образом.

Как же мы можем выразить идею случайного совпадения в нашей семантике? Разумеется, мы могли бы добавить внелогическую константу $\approx$ и аксиомы для эквивалентности. Но этот подход не удовлетворителен, так как в нем не содержится никакого специфического анализа отношения случайного совпадения. Лучшим подходом является выделение класса моделей интерпретаций с более определенной структурой, чертам которой можно придать содержательно ясное и наводящее на размышления истолкование.

Итак, начнем с предположения, что каждому индивиду $a \in V$ и относительно каждого $i \in I$ мы можем сопоставить некоторые особые *характеристики*, которые определяют или индивидуализируют a по отношению к соответствующим свойствам. Будем считать, что эти элементы составляют особый класс абстрактных объектов, называемых *состоянием* a относительно i, и примем для удобства, что S есть множество, содержащее все состояния всех индивидов как свои члены. Следующий наш шаг может показаться чрезмерным упрощением: мы *отождествляем* индивид a с такой индивидуализирующей функцией. Мы принимаем, что $V \subseteq S^I$ и для каждого $a \in V$ и $i \in I$ пишем a_i для обозначения состояния a относительно i. Теперь можно определить смысл случайного совпадения:

($\approx$.) $\|\bar{a} \approx \bar{b}\|_i = 1$, если, и только если, $a_i = b_i$. (Я пишу $\approx$., потому что этот пункт касается только индивидных констант; полное определение для сложных термов будет дано позднее.)

Как можно видеть, мы принимаем, что для того, чтобы знать индивид, достаточно знать все его характеристики относительно всех точек соотнесения. На словах это звучит неплохо, но на деле равносильно предположению, что у нас имеется *достаточно* точек соотнесения и достаточно детализированные характеристики. Я могу представить себе, что в ходе дальнейшей разработки мы сможем отбросить это условие; но для цели рассмотрения способов введения непротиворечивого отношения случайного совпадения это условие не кажется необоснованным.

Заметьте, что равенство индивидов при таком предположении оказывается определимым в терминах случайного совпадения, то есть выполняется

$$\bar{a} = \bar{b} \leftrightarrow \Box\, \bar{a} \approx \bar{b}.$$

Из-за этого, несомненно, Хинтикка считает $\approx$ более фундаментальным отношением, чем то отношение, которое я обозначаю как $=$. Однако соотношение между этими понятиями он затемняет тем, что использует оператор $\boxed{\rho}$ вместо более сильного $\Box$, что приводит к некоторым усложнениям. В любом случае, я хочу теперь показать,

что независимо от рассмотрения модальностей мы *не можем* брать $\approx$ и определять через него $=$.

Трудности здесь возникнут из-за индивидных концептов. Надеюсь, что различие между индивидом и индивидным концептом стало ясным для всех. По крайней мере я достиг этой ясности благодаря семантическому подходу и замечаниям Монтегю и Каплана. Видите ли, даже если мы рассматриваем индивиды как *функции* в S^I, индивидные концепты вводятся вторично (помимо, сверх индивидов, как это и было раньше) и значениями их являются функции, значениями которых являются *индивиды*. Мне сейчас представляется, что это единственное подходящее решение. Так, для терма τ мы устанавливаем, что

$$\|\tau\| \in (S^I)^{(I)}.$$

(Напомним, что значением терма служит *частичная* функция. Кажется, что $a \in V$ лучше рассматривать как *полную функцию* $a \in S^I$, так как индивиду всегда можно придать *некоторый* абстрактный объект в качестве его состояния независимо от выбора $i \in I$.) Это требует следующей семантики:

$\|\tau \approx \sigma\|_i = 1$, если и только если
$(\|\tau\|_i)_i = (\|\sigma\|_i)_i$.

То есть прежде всего мы находим, какие индивиды обозначают τ и σ ($\|\tau\|_i$ и $\|\sigma\|_i$), а *затем* смотрим, совпадают ли их состояния. Все прекрасно (то есть истинностное значение вполне детерминировано), если оба $\|\tau\|_i$ и $\|\sigma\|_i$ определены; в противном случае мы принимаем, что утверждение *истинно*, если они оба не определены.

Теперь перейдем к следующему: что означает вообще $\tau \approx \sigma$? С формальной точки зрения имеет место:

$\|\Box\, \tau \approx \sigma\|_i = 1$, если и только если $(\|\tau\|_j)_j = (\|\sigma\|_j)_j$ для всех $j \in I$.

Ясно, что это *не* то же самое, что $\|\tau\| = \|\sigma\|$, *если* $\|\tau\|$ и $\|\sigma\|$ не являются *константными* функциями в V^I. Давайте рассмотрим следующий простой пример. пусть τ — „президент США", а σ — „самый большой мошенник на свете". (В нашем примере какое-либо сходство с живущими или умершими лицами может быть только случайным.) Для простоты примем, что I содержит *моменты* *времени*. Тогда для каждого $i \in I$ индивид $\|\tau\|_i$ есть целиком лицо, являющееся президентом США в момент времени i. При желании мы можем считать, что $(\|\tau\|_i)_i$ есть моментальный снимок человека, причем такой, что в нем на очень чувствительной бумаге запечатлелись даже качества этого человека в данный момент времени. Переходя от одного $i \in I$ к другому, мы переходим по (довольно обширной) официальной портретной галерее, представляющей президентов США. Тем временем ФБР для своих собственных целей фотографирует в каждый момент времени самого большого мошенника на свете. Можно представить себе панику, которая разразится, если сравнение обнаружит истинность утверждения $\Box\tau \approx \sigma$. Однако самого президента можно милосердно извинить, так как только из-за своего высокого поста он попал в эту неблаговидную категорию. Утверждение, что $\Box\tau \approx \sigma$, хотя и неприятное, имеет вполне определенный смысл и не влечет $\tau \approx \sigma$.

Почему не влечет? В изложенных выше рассуждениях я замечаю некоторую слабость. Недостаточно рассматривать I как простое множество последовательных моментов времени. Наш простейший взгляд на индивиды таков, что если $a_i = b_i$ в один момент, то $a = b$ (во всякое время!). Мы должны рассматривать не только течение времени, но и *альтернативные* потоки событий. — Нет, когда об этом подумаешь, то понимаешь, что это вовсе не ответ, ибо это делает наш индивидный концепт $\|\tau\|$ более упитанным, но не более интересным. — Может быть и влечет. (Да, я вижу, что для того, чтобы сделать идею чем-то полезной, требуется гораздо больше мысли и экспериментов. Во всяком случае, я считаю, что точный и общий семантический каркас — основное, а это, как я пытался показать, теперь нам доступно.) Попробуем спасти вышеприведенный пример. Мы можем представить себе в качестве возможного индивида деятельного слугу народа, обладающего кучей положительных качеств относительно всех точек соотнесения. Теперь представим себе ловкого мошенника. Это не индивидные концепты, а возможные индивиды — различные индивиды. Слуга народа не всегда является президентом, а мошенник не всегда удачлив. Но в момент своего триумфа, когда оба достигают вершины своей карьеры, обнаруживается, что они совпадают во всех своих характеристиках.

Нет, именно не влечет. Я искажаю язык, чтобы он соответствовал абстрактно сконструированной семантике! Тем не менее я все еще думаю, что отношение $\approx$ имеет разумное значение. Затруднение состоит в том, что я пытался защитить принцип

$$\bar{a} = \bar{b} \leftrightarrow \Box\, \bar{a} \approx \bar{b},$$

а защита оказалась ложной, едва только я попытался изложить ее. Мне кажется, что $\bar{a} \approx \bar{b}$, следует читать как „a и b эквивалентны (неразличимы) по отношению к некоторым (фиксированным) свойствам„: действительно, как показал Хинтикка, имеются различные способы индивидуализации индивидов (различные восприятия), которые в моей семантике создадут различные отношения эквивалентности $\approx_1, \approx_2, \ldots, \ldots, \approx_n$. Удовлетворяют ли какие-либо из них вышеуказанной эквивалентности — вопрос спорный. Однако я хочу снова подчеркнуть, что нельзя путать эквивалентность и равенство. Мы должны, с моей точки зрения, провести различия, которые могут быть суммированы в следующих диаграммах, где стрелка означает импликацию. Заметьте, что диаграммы *различны* для индивидов и индивидных концептов. Стрелки в обе стороны строго обоснованны, стрелка в одну сторону, конечно, не может быть перевернута, кроме сомнительного случая $\rightarrow$. Я полагаю, что мы придем к отрицанию таких инверсий.

Затруднения, связанные с перекрестной идентификацией индивидов, решались Давидом Льюисом по-другому. Он считал, что

$$D = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

а A_i — непересекающиеся множества

$A_i \cap A_j = 0$, если $i \neq j$.

Это означает, что каждый мир $i \in I$ имеет свое собственное множество квазиобъектов (tokens), представляющих индивиды. Разделив индивиды, мы теперь соединим некоторые из них отношением C — *„быть дубликатом"*. Если $a \in A_i$, а $b \in A_j$, то aCb означает, что a является дубликатом b в A_i, то есть тем лицом, каким был бы b, если бы он жил в A_i, или по меньшей мере тем лицом, которое бы выглядело точно так, — если мы допустим существование нескольких таких индивидов. В случае, когда $i=j$, мы согласимся, что aCb требует, чтобы $a=b$.

$$\begin{tikzcd}
\bar{a}\equiv\bar{b} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\Box\,\bar{a}=\bar{b} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\bar{a}=\bar{b} \arrow[d, shift right] \\
\Box\,\bar{a}\approx\bar{b} \arrow[u, dashed, shift right] \arrow[d] \\
\bar{a}\approx\bar{b}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \tau\equiv\sigma \arrow[d, leftrightarrow] & \\
& \Box\,\tau=\sigma \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Box\,\tau\approx\sigma \arrow[dr] & & \tau=\sigma \arrow[dl] \\
& \tau\approx\sigma &
\end{tikzcd}$$

Мы легко можем выразить отношение Льюиса в нашем языке, используя константу $\bar{C}$ вместе с использованными ранее символами. Тогда будут выполняться следующие принципы:

$$\forall x,\ y\,[x\bar{C}y \rightarrow \tilde{A}x],$$
$$\forall x,\ y\,[x\bar{C}y \land \tilde{A}y \rightarrow x=y],$$
$$\forall x\,[\tilde{A}x \rightarrow x\bar{C}x].$$

При желании мы можем переписать это, используя кванторы $\forall.$ и $\exists.$ Льюис использует отношение „быть дубликатом" для того, чтобы ввести разновидность модального оператора, которая мне очень не нравится. Мое прочтение его оператора для формулы $\Phi(x)$ с одной связанной переменной дает тот результат, что

$$\forall y\,(y\bar{C}x \rightarrow \Phi(y))$$

выражает утверждение „*необходимо*", что $\Phi(x)$. Я считаю, что этот оператор слишком сложен, чтобы его можно было рассматривать как исходный, но обсуждение этого вопроса требует особого разговора.

Мы начали обсуждение отношения „быть дубликатом" потому, что оно имеет содержательный смысл и в его терминах очень естественно определить отношение совпадения:

$$\tau\approx\sigma \leftrightarrow \forall.\ x\,[x\bar{C}\tau \leftrightarrow x\bar{C}\sigma].$$

Затем мы обнаружим, что

$$\forall x,\ y\,[\tilde{A}x \land x\approx y \rightarrow x\bar{C}y],$$

хотя конверсия этой формулы в общем случае не выполняется. Таким образом, хотя отношение совпадения слишком слабо, чтобы в его терминах определять отношение „быть дубликатом", оно очень тесно связано с ним. Мы можем понимать $\bar{a}\approx\bar{b}$ так, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одни и те же дубликаты в действительном мире, то есть что у них большое количество свойств совпадает.

Подводя итог вышеизложенным, в общем довольно неудовлетворительным соображениям, мы можем подчеркнуть следующие моменты: (1) *имеется по меньшей мере три отношения* $\approx$, $=$, $\equiv$ (*которые легко спутать*); (2) *мы имеем теперь семантику, в которой можно ясно выразить различие между ними*; (3) *следует всегда помнить, что индивидные концепты ведут себя не так, как индивиды*. Хотя Давид Каплан подробно говорил об этих различиях в ряде публичных лекций, я обнаружил, перечитывая его записи, что на самом деле я не убежден, что мы имеем окончательное разрешение проблемы идентификации. Но у меня есть по этому поводу один совет (сюрприз); нам нужно больше экспериментировать в построении моделей. До сих пор наши указания относительно возможных миров были слишком расплывчатыми. Идея использовать $V\subseteq S'$ означает рассмотрение индивида как *процесса* (в математическом смысле этого слова). То есть это попытка анализа индивида. Такой метод еще не лишился доверия, потому что еще не был реализован во всех деталях. Просто написать S' означает очертить скелет, но не облечь его плотью. Существенный шаг в развитии такого метода анализа состоит в конкретизации рассматриваемых элементов. Это должно быть сделано до того, как мы сможем решать, чтó вложить в S. Я не думаю, что хинтикковский метод модельных множеств дает правильное решение, потому что я считаю, что мы должны иметь понятие о том, *какого рода* возможные миры даны, прежде чем выяснять какие то истины относительно них. Конечно, это подлинный философский вопрос, и кажется, что лучше всего обсуждать его после того, как будут построены интересные модели в рамках этой семантики. Мой совет состоит в том, чтобы работать над этой проблематикой.

Постскриптум (декабрь, 1969)

Эта работа писалась второпях в конце мая 1968 года. Спешка заметна и стиль ужасен; теперь мне кажется, что читать это очень неприятно. Целью этого эссе было вызвать дискуссию. Но только двое из моих коллег нашли время ответить мне письменно: Каплан и Монтегю. Их подробные критические возражения показали мне, что статью следовало бы совсем переделать, но на это я, к несчастью, не имею сейчас времени. Тем не менее редактор был достаточно любезен, чтобы поддержать публикацию статьи и в этой весьма незавершенной форме. Я хочу поблагодарить его за это и надеюсь, что очевидные изъяны моей статьи побудят других сделать лучше.

Хотя я мог учесть только часть из многочисленных замечаний, сделанных Капланом и Монтегю, однако будет полезно процитировать некоторые из них, чтобы моя работа не вызвала совершенно неправильного представления. Во-первых, из письма Давида Каплана (от 28 июля 1968 года):

„Мне не нравится, что вы называете $\equiv$ „тождеством". Это происходит, я думаю, из-за отбрасывания того, что Карнап называл „методом отношения именования" (см. „Значение и необходимость" *) и присущего ему способа выражения. С каждым термином связаны ровно два аспекта: экстенсионал и интенсионал. $=$ обозначает совпадение экстенсионалов, а $\equiv$ — совпадение интенсионалов. Однако это означает отказ от первичности экстенсиональных контекстов. Технически удобнее рассматривать все контексты как интенсиональные просто потому, что мы можем представить экстенсиональные контексты как их подмножество. Но одной из главных целей занятий интенсиональной логикой в той форме, в какой мы это делаем, является описание интенсионального объектного языка в экстенсиональном метаязыке. Если на кого-то производит слишком большое впечатление чрезмерное упрощение, состоящее в рассмотрении всех контекстов как (самое большее) интенсиональных, то можно даже считать интенсионалы денотатами особого рода и говорить, как вы это делаете в некоторых местах, что принцип интенсиональной взаимозаменимости показывает степень „экстенсиональности" языка. Чтобы обнаружить индивиды, надо смотреть на значения переменных, а затем навсегда различить индивиды и индивидные концепты. Хотя в техническом смысле и правильно будет сказать, что экстенсиональная логика есть частный случай более общей интенсиональной логики, но в некотором важном смысле также правильно сказать, что экстенсиональную логику можно считать самой общей формой. Это означает, что мы сохраняем различие между смыслом и денотатом (или отношение именования), то есть различие между тем, *о чем* мы говорим, и тем, *как* мы об этом говорим. Именно это видел Фреге и принимал Чёрч. Я думаю, что вся ситуация очень похожа на вопрос о первенстве двузначной логики, и тут могут быть приведены аргументы как „за", так и „против". Эти важные вещи должны быть ясными, но я не думаю, что этому можно помочь, называя $\equiv$ „тождеством" или утверждая, что формулы на с. 121 *) подобны закону Лейбница".

Относительно совпадения Каплан писал мне раньше (10 июля 1968 года):

„Кажется, что в районе с. 132 вы потеряли след некоторых объектов. Я думаю, что здесь есть две проблемы: (1) может ли быть $=$ определено с использованием $\approx$? (2) может ли $\tau=\sigma$ быть определено через $\Box(\tau\approx\sigma)$? На (1) ответ положительный, но только в случае, когда не допускается слияние индивидов. Так, в вашем примере, где речь идет о человеческих существах (и где, как вы заметили, слияние невозможно), мы можем использовать определение:

$$\tau=\sigma\leftrightarrow\tau\approx\sigma.$$

Но разумеется, если слияние допускается, как в случае дорог в пространстве, это определение не работает, так как $\overline{\text{U.S.60}}\approx\overline{\text{U.S.70}}$ истинно в Восточной Колумбии, но $\overline{\text{U.S.60}}=\overline{\text{U.S.70}}$ ложно в общем случае. (Здесь мы можем использовать *основные* (essential) имена дорог и принять, что $\overline{\text{U.S.60}}$ повсюду обозначает $\overline{\text{U.S.60}}$.)

Ответ на (2) всегда отрицательный, и ваш пример показывает, что $\Box\tau\approx\sigma$ не необходимо для $\tau=\sigma$. Иными словами, $\tau=\sigma$ не имплицирует $\Box(\tau\approx\sigma)$. В самом деле, предположим на минуту, что президент $=$ мошенник, тогда галерея президентов и галерея ФБР будут содержать одну общую фотографию, а именно нынешнего президента. Но если в старые времена президенты были честнее, то между обеими галереями будут большие различия, и поэтому $\Box$ (президент $\approx$ мошенник) будет ложно.

Чтобы показать, что $\Box(\tau\approx\sigma)$ недостаточно, мы, естественно, должны допустить возможность слияния и разделения индивидов (в противном случае $[\Box(\tau\approx\sigma)\to\tau\approx\sigma]$ и $[\tau\approx\sigma\leftrightarrow\tau=\sigma]$). Знаете ли вы, что Федеральная магистраль 0, которую вскоре должны строить, будет по всей длине иметь 73 ряда? (Она будет проходить через центры всех главных городов; идея возникла в Лос-Анджелесе.) Построенная

*) М., 1959, с. 160, 219, 295. — *Прим. ред.*

*) Здесь и далее в письмах указанные страницы не соответствуют страницам в оригинале статьи. По-видимому, Каплан и Монтегю читали ротапринтный вариант с другой нумерацией страниц. — *Прим. перев.*

на средства объединенных федеральных фондов, эта магистраль в каждой точке будет совпадать с какой-нибудь уже существующей магистралью, которая, разумеется будет расширена до 73 рядов на том отрезке, на котором с ней сливается Федеральная магистраль 0, а затем снова будет сужаться. Пусть точками соотнесения будут большие города, и в каждом городе верно, что: *магистраль с 73 рядами* ≈ ≈ *Федеральн. магистр.* 0, *тогда* $\Box$ (*магистраль с 73 рядами* ≈ ≈ *Федеральн. магистр.* 0) также будет истинно. Но нигде не верно, что *магистраль с 73 рядами* = *Федеральн. магистр.* 0, так как все магистрали штата где-нибудь сворачивают с Федеральной магистрали 0 (и, кроме того, не выходят за пределы своих штатов).

Для защиты принципа, который вы приводите на с. 132, замечу следующее: слева направо $\tau = \sigma \to \tau \approx \sigma$ общезначимо, поэтому общезначимо и $\Box(\tau = \sigma \to \Box(\tau \approx \sigma)$, и, как вы указали раньше, $\overline{a} = \overline{b} \to \Box(\overline{a} = \overline{b})$. (Справа налево $\Box(\overline{a} \approx \overline{b})$ означает, что для всех $i \in I$ $(\| \overline{a} \|_i)_I = (\| \overline{b} \|_i)_I$. Но, по определению, для всех $i \in I$ $\| \overline{a} \|_i = a$, поэтому мы имеем, что для всех $i \in I$ $a_i = b_i$. Но a и b суть именно функции, определенные на I, поэтому $a = b$.)"

Монтегю делает одно из своих замечаний по-другому (30 июня 1968 года).

„Вы ставите вопрос об интуитивном значении $\Box(\tau \approx \sigma)$. Ваш пример с „президентом" и „самым большим мошенником" неудачен, потому что оба терма обозначают человеческие существа, которые являются непрерывными и, следовательно, тождественными, если только совпадают (как вы это и отметили). Но пусть σ = „президент", а τ = „совокупность молекул в кресле президента". Тогда $\sigma \neq \tau$ истинно, потому что организм не есть совокупность молекул; это равенство не верно не только сейчас, но и во всякий момент времени, поэтому $\Box(\sigma \neq \tau)$ истинно. Теперь предположим, что президент (и больше никто) сидит в настоящий момент в своем кресле. Тогда $\sigma \approx \tau$ истинно. Если мы теперь предположим, что президентские обязанности поглощают столько времени, что в каждый момент времени i человек, являющийся президентом, сидит в президентском кресле (то есть, что каждый президент сидит безвылазно в своем кресле с момента избрания и до освобождения от обязанностей), тогда $\Box(\sigma \approx \tau)$ истинно. Таким образом, $\Box(\sigma \approx \tau)$ совместимо не только с $\sigma \neq \tau$, но даже с $\Box(\sigma \neq \tau)$. (Конечно, легко построить такой пример, в котором было бы $[\sigma = \tau \wedge \neg\Box(\sigma \approx \tau)]$; но, как вы заметили, мы не можем иметь $[\sigma = \tau \wedge \Box\neg(\sigma \approx \tau)]$ или $[\Box(\sigma = \tau) \wedge \neg\Box(\sigma \approx \tau)]$.)"

Далее Монтегю решительно возражает против моей интерпретации предикатных констант и утверждает, что допущение подстановки формул вместо предикатов есть „пустая догма". И он хорошо обосновывает свое утверждение. Он продолжает далее:

„Итак, я по-прежнему убежден, что естественными системами в порядке увеличения силы являются: (1) узкая модальная логика, то есть содержащая только индивидные термы и логический оператор $\Box$, — первопорядковая подсистема системы, которую я набросал (она существенно является системой Крипке—Кокьяреллы—Томасона); (2) прагматика, в которой содержатся произвольные внелогические пропозициональные операторы (одноместные или многоместные, но не связывающие переменные), в интерпретации которых мы соглашаемся; (3) расширенная прагматика, которая содержит произвольные операторы, связывающие переменные, но в связи с которой имеется известное расхождение во взглядах относительно того, какого рода операторы должны быть приняты в качестве исходных; (4) второпорядковая система, которую я набросал для вас; (5) системы высших порядков, построенные по этому образцу".

Наконец, он заключает, что моя система, улучшенная в том, что касается предикатных констант, или в которой „предикатные константы (как техническое упрощение) отброшены и вместо них используются общие (более общие, чем у вас) операторы, связывающие переменные", может рассматриваться как вариант его расширенной прагматики. Я сожалею, что не могу изложить здесь его систему и его доводы (а также последующую переписку между Капланом и Монтегю), а могу только отослать читателей к некоторым недавним публикациям, в которых Монтегю объясняет свой подход к интенсиональной логике.

Д. М. Габбай

СЕМАНТИКА ТИПА МОНТЕГЮ ДЛЯ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК С ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫМИ КВАНТОРАМИ*

В статье [1] Булл рассмотрел модальное исчисление с кванторами над пропозициональными переменными, подчиняющимися правилам вывода:

(1) Если $\vdash \varphi \to \psi$, то $\vdash (\forall q)\, \varphi \to \psi$,

(2) Если $\vdash \varphi \to \psi$, то $\vdash \varphi \to (\forall q)\, \psi$,

где q не входит свободно в φ.

Булл рассмотрел также формулу Баркан:

$$(3)\ (\forall q)\, \Box \varphi \to \Box (\forall q)\, \varphi$$

и дал семантику для $S4+(3)$ и $S5+(3)$.

В этой статье мы покажем, как семантика типа Монтегю [2] может быть использована, чтобы охарактеризовать различные модальные исчисления (с пропозициональными кванторами) с формулой или без формулы Баркан. Мы рассмотрим такие исчисления, основанные даже на более слабых системах. В частности, мы получим семантику Булла для $S4+(3)$ и $S5+(3)$. Прежде чем перейти к доказательствам, опишем и обсудим семантику для систем, основанных, например, на T. T-*моделью* называется система $(S, R, [\ ])$, где S — множество (возможных миров), отношение $R \subseteq S \times 2^S$, а $[\ ]$ — функция двух переменных со значениями из $\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$, причем область изменения первого переменного — множество предложений, а второго — S. Значение этой функции мы обозначим через $[\varphi]_x$, $x \in S$. Для A, $B \subseteq S$ имеет место:

(5) $(x, A) \in R \wedge A \subseteq B \Rightarrow (x, B) \in R$;

(6) $(x, A) \in R \Rightarrow x \in A$;

(7) $(x, A) \in R \wedge (x, B) \in R \Rightarrow (x, A \cap B) \in R$;

(8) $(x, S) \in R$.

Условия (5), (7) и (8) означают, что для всякого $x \in S$ множество $\mathrm{F}_x = \{A \mid (x, A) \in R\}$ является фильтром.

(9) $[\varphi \wedge \psi]_x = \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $[\varphi]_x = \mathbf{T}$ и $[\psi]_x = \mathbf{T}$;

(10) $[\sim \varphi]_x = \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $[\varphi]_x = \mathbf{F}$;

(11) $[\Box \varphi]_x = \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $(x, \{y \mid [\varphi]_y = \mathbf{T}\}) \in R$;

(12) $[\forall q \varphi(q)]_x = \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $[\varphi(\alpha)]_x = \mathbf{T}$

для всех собственных подстановок *) формулы α вместо q в φ. Заметим, что для каждой α можно так изменить обозначения переменных формулы φ, что получим эквивалентную φ формулу φ', в которую может быть подставлена α

(13) $[\varphi]_x = [\psi]_x$, если $\vdash_T \varphi \leftrightarrow \psi$.

(14) φ истинна в модели T тогда, когда $[\varphi]_x = \mathbf{T}$ для всех x.

(15) В случае $T+(3)$ надо добавить подходящее условие: для всех x фильтр $\mathbf{F}_x$ замкнут относительно произвольных пересечений.

З а м е ч а н и е 16. В [1] Булл принимает формулу Баркан на том основании, что вопрос о принятии этой формулы сводится, как считает Булл, к выяснению того, *совпадают ли области изменения переменных в разных возможных мирах*; а поскольку в нашем случае это очевидно, то он принимает эти аксиомы. Однако в [3], где я дал семантику типа Монтегю для предикатного исчис-

---

* D. Gabbay, Montague type semantics for modal logics with propositional quantifiers. — „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“, 1971, B. 17, h. 3, s. 245—249.

*) То есть подстановок, допустимых при обычных ограничениях в области действий кванторов. — *Прим. перев.*

Пункт (12) не является индуктивным; он может быть переформулирован следующим образом: $[\forall q \varphi(q)]_x^f = T$ тогда и только тогда, когда $[\varphi(q)]_x^{f'} = T$ для всякого f', отличающегося от f возможно только приписыванием значения q. Но при новом определении вопрос о полноте остается открытым. — *Прим. ред.*

ления **T** и без формулы Баркан, указывается, что этот вопрос сводится к условию (15), так как во всех возможных мирах в [3] у переменных одна и та же область изменения. (Мы хотели бы отметить, что первым аксиоматику для семантики Монтегю из [2] дал Д. Каплан.)

Кажется, что этот вид семантики естествен для того, чтобы характеризовать системы без формулы Баркан. Заметим, что в случае исчисления предикатов семантику типа Крипке для характеризации систем можно использовать и без формулы Баркан, так как можно рассматривать возможные миры с разными областями для переменных.

§ 1. Система K

Вводятся следующие аксиомы:

(17) Классическое пропозициональное исчисление.

(18) $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \Box \varphi$.

(19) $\vdash \Box(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \land \Box\psi$.

(20) Аксиомы Булла (1) и (2) и

$$\forall q \varphi(q) \to \varphi(q) \text{ и } \varphi(q) \to \exists q \varphi(q).$$

Теорема 21. Логика K является полной для семантики со свойствами (5) и (7)—(14).

Доказательство. Покажем сначала, что выполняются все аксиомы и правила вывода:

(17) выполняется в силу (9) и (10);

(18) выполняется в силу (8) и (11);

(19) выполняется в силу (5), (11) и (7);

(20) выполняется в силу (12) и (13).

Доказательство (20) проводится индукцией по числу кванторов в ψ.

Теперь вернемся к построению модели, в которой все недоказуемые формулы ложны. Предполагается наличие пропозициональных переменных.

Лемма 22. Пусть формула φ такова, что $\vdash \sim\varphi$, тогда существует полная теория Δ со свойствами:

(23) $\varphi \in \Delta$

(24) $\exists q \psi(q) \in \Delta \Rightarrow \psi(\alpha) \in \Delta$

для некоторого α в нашем языке.

Поскольку в нашем распоряжении аксиома (20), то Δ строится обычным образом.

Пусть S — множество всех полных теорий нашего языка, выполняющих (24). Нужно определить R и [ ]. Пусть $A \subseteq S$.

(25) Df: $(\Delta, A) \in R$ тогда и только тогда, когда для некоторого предложения ψ, такого, что $\Box\psi \in \Delta$, $\{\Delta' \mid \psi \subset \Delta'\} \subseteq A$.

Очевидно, что (5) удовлетворяет этому определению. Тогда ввиду $\vdash \Box(\varphi \to \varphi)$, выполняется (8). Чтобы доказать (7), положим, что $(\Delta, A) \in R$, $(\Delta, B) \in R$), и тогда для ψ_1, ψ_2 будем иметь $\Box\psi_1 \in \Delta$,

$$\Box\psi_2 \in \Delta \text{ и } \{\Delta' \mid \psi_1 \in \Delta'\} \subseteq A,$$
$$\{\Delta' \mid \psi_2 \in \Delta'\} \subseteq B,$$

откуда по (19) $\Box(\psi_1 \land \psi_2) \in \Delta$ и $\{\Delta' \mid \psi_1 \land \psi_2 \in \Delta'\} \subseteq A \cap B$.

Теперь надо показать, что при $\sim\Box\varphi \in \Delta$ $(\Delta, \{\Delta' \mid \varphi \in \Delta'\}) \notin R$. В противном случае для некоторого β

$$\{\Delta' \mid \beta \in \Delta'\} \subseteq \{\Delta' \mid \varphi \in \Delta'\}$$

и $\Box\beta \in \Delta$.

Но последнее условие ввиду (22) означает, что $\vdash \beta \to \varphi$ и, стало быть, $\vdash \Box\beta \to \Box\varphi$ и $\Box\varphi \in \Delta$, то есть получилось противоречие.

(26) Определим $[\varphi]_\Delta = \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Delta$.

Теперь (9) и (10) получаются немедленно, а (11) следует из (25) и (26), и таким образом получается (13). Обратимся к (12).

Пусть $[\forall q \varphi(q)]_\Delta = \mathbf{T}$, то есть $\forall q \varphi(q) \in \Delta$, а значит, для всех $\alpha \varphi(\alpha) \in \Delta$, или, другими словами, $[\varphi(\alpha)]_\Delta = \mathbf{T}$.

Если же $[\forall q \varphi(q)]_\Delta = \mathbf{F}$, то $[\exists q \sim \varphi(q)]_\Delta = \mathbf{T}$ или $\exists q \sim \varphi(q) \in \Delta$, так что (24): для некоторого α, $\sim\varphi(\alpha) \in \Delta$, то есть $[\varphi(\alpha)]_\Delta = \mathbf{F}$.

Теперь по лемме 22 получаем

(27) $\vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда для всех $\Delta \in S$ $[\varphi]_\Delta = \mathbf{T}$.

§ 2. Формула Баркан

Покажем, что логика $K + (3)$ полна относительно семантики с дополнительным условием (15).

Лемма 28. Если мы добавим (15), то выполняется (3).

Доказательство. Пусть $[\forall q \Box \varphi(q)]_x = \mathbf{T}$, тогда для всякого α $(x, S_\alpha) \in R$, где $S_\alpha = \{y \mid [\varphi(\alpha)]_y = \mathbf{T}\}$.

Теперь по (15) $\left(x, \bigcap_\alpha S_\alpha\right) \in R$, но $z \in \bigcap_\alpha S_\alpha$ тогда и только тогда, когда $[\forall q \varphi(q)]_z = \mathbf{T}$ по (12) и, таким образом, $[\Box \forall q \varphi(q)]_x = \mathbf{T}$.

Теорема 29. Логика $K + (3)$ полна относительно данной выше семантики.

Доказательство. Построим множество S и определим R как в теореме 21. Надо лишь показать теперь, что:

(30) $(\Delta, \bigcap\{A \mid (\Delta, A) \in R\}) \in R$.

Пусть $S_\alpha = \{\Delta' \mid [\alpha]_{\Delta'} = \mathbf{T}\}$. Тогда, согласно определению (25), (30) выполняется, если выполняются

(31) $\left(\Delta, \bigcap_\alpha \{S_\alpha \mid (\Delta, S_\alpha) \in R\}\right) \in R$

или

(32) $\left(\Delta, \bigcap_{\Box\alpha \in \Delta} S_\alpha\right) \in R$.

Но мы не можем это доказать. Надо модифицировать определение (25), чтобы выполнялось также и (32). (25) надо заменить на

(33) $(\Delta, A) \in R$ тогда и только тогда, когда $\bigcap_{\Box\alpha \in \Delta} S_\alpha \subseteq A$.

Теперь снова надо проверить, возможно ли $\sim\Box\psi \in \Delta$, и тем не менее $(\Delta, \{\Delta' \mid \psi \in \Delta'\}) \in R$. То есть

(34) $\bigcap_{\Box\alpha \in \Delta} S_\alpha \subseteq S_\psi$ и $\sim\Box\psi \in \Delta$.

Сейчас мы докажем, что этого не может быть.

Лемма 35. Система $\{\alpha \mid \Box\alpha \in \Delta\} \cup \{\sim\Box\psi\}$ непротиворечива.

Доказательство. В противном случае было бы

$$\vdash \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \psi,$$
$$\vdash \Box\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Box\alpha_m \to \Box\psi$$

и $\Box\psi \in \Delta$, то есть противоречие.

Теперь, кажется, осталось расширить это множество

до полной теории Δ_0 в нашем языке, удовлетворяющей (24), и доказательство завершится, потому что $\Delta_0 \in \bigcap_{\Box\alpha \in \Delta} S_\alpha$ и $\Delta_0 \notin S_\psi$.

Это представляет некоторую трудность, ибо множество леммы (35) может содержать среди α все пропозициональные переменные нашего языка и неясно, можно ли построить Δ_0 в этом же языке. Но поскольку у нас есть формула Баркан, это можно в действительности сделать по теореме Генкина [4] для счетного языка.

Теорема 36 (Генкин). Пусть Δ непротиворечивая теория, такая, что для каждой φ: если для каждой константы c языка мы имеем $\Delta \vdash \varphi(c)$, то $\Delta \vdash \forall x \varphi(x)$. Тогда Δ можно расширить до полной и насыщенной теории в этом же языке. Теория из (35) обладает свойством, требуемым теоремой 36 в силу формулы Баркан, как заметил в [5] Томасон.

§ 3. Другие системы

Лемма 40. $\mathrm{T} = \mathrm{K} + \Box\varphi \to \varphi$ является полной логикой для семантики K с дополнительным условием (6).

Доказательство. Очевидно, если $(\Delta, S_\alpha) \in R$, то ввиду $\vdash \Box\alpha \to \alpha$ мы имеем $\Delta \in S_\alpha$.

Лемма 41. Система $\mathrm{T} + (3)$ полна относительно семантики для $\mathrm{K} + (3)$ с добавленным условием (6).

Рассмотрим теперь $\mathrm{T} + (42)$:

(42) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Для описания соответствующей семантики положим

(43) $A^+ = \{y \mid (y, A) \in R\}$.

Теорема 45. $\mathrm{S4} = \mathrm{T} + (42)$ является полной логикой для T-семантики с дополнительным условием

(46) $A^+ \subseteq A^{++}$.

Доказательство. Формула (42), очевидно, выполняется, если имеется (46). И, наоборот, мы покажем, используя (42), что (46) выполняется в S.

$$A^+ = \{\Delta' \mid (\Delta', A) \in R\} = \{\Delta' \mid (\Delta', S_\psi) \in R\}$$

для $\Box\psi \in \Delta'$ и $S_\psi \subseteq A$.

Таким образом, $\Box^2\psi \in \Delta'$ и

$$(\Delta' S_{\Box\psi}) \in R, \text{ но } S_{\Box\psi} = S_{\psi}^{+},$$

и $\Delta' \in S_{\psi}^{++}$. Но $A \subseteq B \Rightarrow A^{+} \subseteq B^{+}$ и $\Delta' \in A^{++}$.

Теорема 47. S4 + (3) является полной логикой для S4-семантики с дополнительным условием (15).

Замечание 48. Для получения семантики Булла для S4 + (3) продолжаем так. Определим:

(49) $x\rho y$ тогда и только тогда, когда $y \in \bigcap_{(x,\ A) \in R} A$.

По (46) получаем транзитивность ρ, а по (6) рефлексивность. Согласно (33) имеем:

(50) $[\Box\varphi]_x = \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $[\varphi]_y = \mathbf{T}$ для всех y, таких, что $x\rho y$.

Теорема 51. Логика S5 полна для семантики с условием (52) $(x, A) \in R$ тогда и только тогда, когда $(y, A) \in R$. Таким образом, оказывается, что $(x, A) \in R$ эквивалентно $A = S$. Это приводит к выводимости (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bull R. A. On modal logics with propositional quantifiers.— "Journal of Symbolic Logic", 1969, Vol. 34, p. 257—264.
2. Montague R. Pragmatics and intensional logics. Synthese, 1970, Vol. 22, p. 68—94. (Рус. пер. см. настоящее издание, с. 223.)
3. Gabbay D. M. Montague type semantics for modal T without equality.— "Notes AMS", August 1969, p. 843.
4. Henkin L. A generalization of the concept of co-completeness.—"Journal of Symbolic Logic", 1957, Vol. 22, p. 1—14.
5. Thomason R. Some completeness results for modal predicate culculi.
6. Fine K. Propositional quantifiers in modal logic.—"Theoria", 1970, Vol. 36, p. 336—346. (Рус. пер. см. настоящее издание, с. 212.)

Н. Д. Белнап

ИНТЕНСИОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ФОРМУЛ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ *[1]

§ 1. Введение

В работе Андерсона и Белнапа [8] была развита семантика для формул следования первой степени, то есть формул $A \to B$, говорящих об отношении следования между формулами A и B, содержащих только истинностные функции (определенные в терминах „или" и „не") и кванторы. Основными идеями были: 1) понятие *структуры* $\langle \mathrm{P}, \mathrm{F_{IP}}, \mathrm{I} \rangle$, в которой P является множеством (интенсиональных) суждений, замкнутым относительно отрицания и многократной дизъюнкции, I есть область индивидов и $\mathrm{F_{IP}}$ есть множество функций из I в P; 2) семантическое отношение *след* (следования), существующее между множеством суждений, объединенных конъюнктивно, и множеством суждений, объединенных дизъюнктивно; 3) понятие атомарной структуры, то есть структуры, задаваемой множеством суждений X, замкнутым относительно отрицания и таким, что для любых непересекающихся подклассов Y и Z множества X Y не находится в отношении *след* к Z. Для фрагмента системы следования EQ с кванторами, включающего формулы первой степени, можно было бы дать доказательства непротиворечивости и полноты. В этой семантике было дано также определение понятия „значимости" для *формул первой степени*, то есть для того мно-

* Belnap N. D. Jr. Intensional Models for First Degree Formulas.—"The Journal of Symbolic Logic", 1967. vol. 32, № 1, p. 1—22.

[1] Это исследование частично было поддержано National Science Foundation Grant GS—190 (History & Philosophy of Science). Я хочу поблагодарить Дж. Барвайза за большую помощь на первой стадии этого исследования и П. Вудраффа и М. Данна за чтение более поздних набросков.

жества формул, которое содержит все формулы следования первой степени и чисто истинностно-функциональные формулы и замкнуто относительно дизъюнкции, отрицания и квантификации. Было высказано предположение о том, что фрагмент EQ, состоящий из формул первой степени, полон и непротиворечив, и были поставлены проблемы относительно эффективности понятия значимости для бескванторных формул первой степени.

Предположение оказалось справедливым. Выяснилось также, что существует разрешающая процедура для установления значимости (и, следовательно, для доказуемости в EQ) бескванторных формул первой степени. Имеет место следующий вариант теоремы Левенгейма — Скулема: если множество формул первой степени может быть одновременно ложным, то это верно и в структуре ⟨P, F_{IP}, I⟩, в котором I и образующие для P являются, самое большее, счетными[1].

Основная задача настоящей статьи состоит в обосновании этого предположения. Однако мы используем этот случай и для перестройки некоторых фундаментальных идей так, чтобы сделать более очевидной алгебраическую природу тех структур, с которыми мы имеем дело. В частности, понятие X *след* Y, где X и Y являются классами, мы заменяем понятием $\bigwedge X \leqslant \bigvee Y$, в котором $\leqslant$ является отношением порядка некоторой решетки, $\bigwedge X$ есть пересечение X, а $\bigvee Y$ — объединение Y.

1.1. Логическими системами, которые мы будем называть *интенсиональными логиками* и для которых будем доказывать полноту и непротиворечивость их фрагментов первой степени, являются: система E следования, система EQ следования с кванторами, система R релевантной импликации и система RQ релевантной импликации с кванторами. Определяя эти системы, мы предполагаем перечислимый список *пропозициональных переменных*, *индивидных переменных* и (для каждого $n > 0$) *n-арных предикатных букв*. *Формулы* строятся обычным образом из пропозициональных переменных и позитивных атомов вида $F(x_1, \ldots, x_n)$ (где F есть n-арная предикатная буква, а каждый x_i — индивидная переменная) посредством связок: $\rightarrow$ — для следования, $^-$ — для отрицания, $\vee$ — для дизъюнкции и $\exists x$ —

[1] Это исправляет утверждение, сделанное в работе Белнапа [11], согласно которому само P должно быть перечислимым.

для экзистенциального квантора. Мы будем использовать также знак & — для конъюнкции и (x) — для универсального квантора, предполагая, как обычно, что $(A \& B)$ определяется как $\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$ и $(x)A$ — как $\overline{\exists x \bar{A}}$. В качестве определения необходимости мы будем использовать следующее: $NA =df (A \rightarrow A) \rightarrow A$.

Аксиомами для EQ будут тогда следующие:

(1) $((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$;
(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$;
(3) $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
(4) $(A \& B) \rightarrow A$;
(5) $(A \& B) \rightarrow B$;
(6) $((A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \& C))$;
(7) $(NA \& NB) \rightarrow N(A \& B)$,
(8) $A \rightarrow (A \vee B)$;
(9) $B \rightarrow (A \vee B)$;
(10) $((A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$;
(11) $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee C)$;
(12) $(A \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A}$;
(13) $(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (B \rightarrow \bar{A})$;
(14) $\bar{\bar{A}} \rightarrow A$;
(15′) $Ay \rightarrow \exists x\, Ax$;
(16′) $(x)(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow B)$;
(17′) $(x)(\bar{A} \vee B) \rightarrow (\overline{\exists x A} \vee B)$;
(18) $(x)(A \rightarrow C) \rightarrow ((x)A \rightarrow (x)C)$;
(19) $((x)A \& (x)C) \rightarrow (x)(A \& C)$;
(20) $(x)NA \rightarrow N(x)A$.

И наконец, если A есть аксиома, то $(x)A$ — также аксиома. В аксиомах (15′)—(20) A может содержать x свободно, Ay неотличимо от Ax, за исключением того, что все свободные вхождения x в Ax заменены свободными вхождениями y в Ay, B не содержит x свободно и C есть любая формула.

Правилами будут модус поненс (из A и $A \rightarrow B$ следует B), *введение конъюнкции* (из A и B следует $A \& B$) и переименование связанных переменных.

Штрих в (15′)—(17′) указывает на то, что эти аксиомы претерпели изменение по сравнению с работой Андерсона 1959 года вследствие использования $\exists x$ вместо (x).

Система RQ получается из EQ простым добавлением новой аксиомы:

(21) $A \to NA$,

то есть $A \to ((A \to A) \to A)$.

Тогда системы E и R пропозициональной логики получаются из EQ и RQ соответственно путем устранения всех аксиом, содержащих кванторы. Система E является старейшей в этом множестве интенсиональных логик; она обсуждалась в следующих публикациях: Андерсон [1], Андерсон и Белнап [3], [4], [5], [6] и Белнап [9], [10]. EQ была впервые определена в работе Андерсона [1] и обсуждалась в работах Белнапа [11] и [12]. Системы R и RQ здесь определены по-новому, хотя их импликативные фрагменты восходят к работам Чёрча [14] и Мо Шоо-Куй [16]. В этом виде они обсуждались в работах Андерсона и Белнапа [5], Андерсона [2] и Правица [17]; последний ввел термин „релевантная импликация", который и послужил основанием для использования нами обозначений „R" и „RQ".

Под „степенью" формулы мы будем понимать количество стрелок, каждая из которых входит в сферу действия другой стрелки. Таким образом, формула *нулевой степени* не содержит стрелок вообще, в то время как *следование первой степени* имеет вид $A \to B$, где A и B являются формулами нулевой степени. *Формула первой степени* есть любая формула, построенная из формул нулевой степени и следований первой степени посредством лишь $\vee$, $^-$ и $\exists$, поэтому в формулах первой степени ни одна стрелка не встречается в области другой стрелки.

1.2. Обоснование непротиворечивости и полноты фрагментов первой степени интенсиональных логик EQ, E, RQ и R потребует наряду с (1) определением самих систем введения еще следующих понятий: (2) интенсиональной решетки, (3) теории суждений, (4) интенсиональных моделей, (5) полных нормальных ветвей и деревьев и (6) определенного рода критической модели, детерминированной полной нормальной ветвью. Наш план заключается в том, чтобы последовательно ввести эти понятия, придерживаясь данной выше нумерации и попутно доказывая

те леммы, которые могут быть сформулированы и доказаны в терминах ранее введенных понятий. Затем в § 7 мы используем ранее развитый аппарат для того, чтобы дать очень краткие доказательства наших основных теорем. Читатель может заранее заглянуть в § 7.

§ 2. Интенсиональные решетки

В этом параграфе мы определяем понятия „интенсионально дополненной дистрибутивной решетки с истинностным фильтром" и ее „полного" аналога, которые для интенсиональной логики играют ту же самую роль, какую булевы алгебры играют для экстенсиональной (двузначной) логики. Мы сформулируем также те свойства этих решеток, которые потребуются в дальнейшем.

2.1. Упорядоченная четверка $\langle A, \leqslant, N, T \rangle$ (в которой A есть некоторое множество, $\leqslant$ — отношение на A, N — некоторая функция на A и T — некоторое подмножество A) называется *дистрибутивной решеткой с интенсиональным дополнением и истинностным фильтром* (короче, *интенсиональной решеткой*) при условии, что: (DL) A есть дистрибутивная решетка по $\leqslant$ (мы используем $\wedge$ и $\vee$ для обозначения пересечения и объединения в решетке), что означает следующее: $\leqslant$ есть частичное упорядочение A, то есть $\leqslant$ рефлексивно, антисимметрично и транзитивно в A; для любых $a, b \in A$ в A существует единственный элемент $a \wedge b$ и единственный элемент $a \vee b$, такие, что для всякого $c \in A$ $c \leqslant (a \wedge b)$, если и только если $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$, и $(a \vee b) \leqslant c$, если и только если $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$; и для всяких $a, b, c \in A$ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ и $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(N_1) $NNa = a$ для всякого $a \in A$;

(N_2) если $a \leqslant b$, то $Nb \leqslant Na$ для всяких $a, b \in A$;

(T) T является *истинностным фильтром*, то есть удовлетворяет следующим трем условиям: (i) T есть *фильтр* — $(a \wedge b) \in T$, если $a \in T$ и $b \in T$, $a \wedge b \in T$, если $a \leqslant b$ и $a \in T$; (ii) T *непротиворечив* — не существует a, такого, что $a \in T$ и $Na \in T$; (iii) T является *исчерпывающим* — для каждого $a \in A$, либо $a \in T$, либо $Na \in T$.

В следующих ниже семантических применениях интенсиональных решеток A мыслится как множество суждений, $\leqslant$ — как отношение следования, пересечение и объединение в решетке — как пропозициональная конъюнкция и дизъюнкция соответственно и N — как пропозициональное отрицание. T рассматривается как представляющее истинные суждения в множестве A. В тех случаях, когда смешение невозможно, „A" будет представлять интенсиональную решетку $\langle A, \leqslant, N, T\rangle$. Мы будем использовать также символ F для обозначения теоретико-множественной разности $A - T$ между A и T, таким образом, F будет представлять множество ложных суждений в A. Мы воздержимся от утверждения, что признание T истинностным фильтром влечет, что F есть ложностный идеал.

Определенных выше интенсиональных решеток достаточно для семантики бескванторных систем E и R. Однако для систем EQ и RQ, содержащих кванторы, нам нужны не только конечные пересечения и объединения, но мы вынуждены использовать также и бесконечные пересечения и объединения в связи с универсальными и экзистенциальными кванторами. Введение бесконечных пересечений и объединений заставляет нас соответствующим образом модифицировать условия дистрибутивности и истинностного фильтра.

Интенсиональная решетка $\langle A, \leqslant, N, T\rangle$ называется соответственно *полной, полностью дистрибутивной решеткой с полным, истинностным фильтром* при условии, что:

(C) Для каждого подмножества B множества A в A существуют единственные элементы $\bigwedge B$ и $\bigvee B$, такие, что для каждого $a \in A$ $a \leqslant \bigwedge B$, если и только если $a \leqslant b$ для каждого $b \in B$ и $\bigvee B \leqslant a$, если и только если $b \leqslant a$ для каждого $b \in B$.

Там, где $\{a_x\}_{x \in X}$ является индексированным множеством, мы пишем $\bigwedge_{x \in X} a_x$ вместо $\bigwedge \{a_x\}_{x \in X}$ и $\bigvee_{x \in X} a_x$ вместо $\bigvee \{a_x\}_{x \in X}$.

(CD) $\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} a_{x,y} = \bigvee_{f \in S} \bigwedge_{x \in X} a_{x f(x)}$, и двойственно. Здесь S является множеством всех функций из X в Y.

(CT) Для каждого $B \subseteq A$, $\bigwedge B \in T$, если и только если $B \subseteq T$[1].

---

[1] В работе Белнапа и Спенсера [13] было показано, что для любой тройки $\langle A, \leqslant, N\rangle$, удовлетворяющей (DL), (N_1), (N_2), а также условию: (N_3) $a \neq Na$ для всякого $a \in A$, существует истинностный фильтр T, удовлетворяющий условию (T), но что добавление (C) не гарантирует существования T, удовлетворяющего также (CT). Теперь показано, что добавление (CD) достаточно для существования такого T.

Поскольку в дальнейшем мы не будем рассматривать интенсиональные решетки, полные в том смысле, что они удовлетворяют условию (C), но не удовлетворяют условиям (CD) и (CT), постольку в данной статье мы позволим себе понимать под полной интенсиональной решеткой только ту решетку, которая выполняет все условия (C), (CD) и (CT).

Множество G, включенное в [полную] интенсиональную решетку A, называется [*полностью*] *независимым*, если (i) для всякого $a \in A$, если $a \in G$, то $Na \notin G$, и (ii) для каждой пары конечных [и бесконечных] подмножеств $\{a_x\}_{x \in X}$ и $\{a_y\}_{y \in Y}$ множества $G \cup \{Nc : c \in G\}$, если $\bigwedge_{x \in X} a_x \leqslant \bigvee_{y \in Y} a_y$, то для некоторых $x \in X$ и $y \in Y$, $a_x \leqslant a_y$.

[Полная] интенсиональная решетка $\langle A', \leqslant', N', T'\rangle$ является [полной] подрешеткой [полной] интенсиональной решетки $\langle A, \leqslant, N, T\rangle$, если и только если (i) $A' \subseteq A$, (ii) в отношении A' $\leqslant'$ согласуется с $\leqslant$, N' согласуется с N и T' согласуется с T, и (iii) пересечения и объединения членов A' [и подмножеств A'] одни и те же относительно A' и A, последнее означает, что A' замкнуто по пересечению и объединению в смысле решетки $\langle A, \leqslant, N, T\rangle$.

Отображение h [полной] интенсиональной решетки A в [полную] интенсиональную решетку A' будет [*полным*] *гомоморфизмом* между A и A', если и только если для $a, b \in A$ и $\{a_x\}_{x \in X} \subseteq A$, $a \leqslant b$ влечет $h(a) \leqslant h(b)$, $h(Na) = Nh(a)$, $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$ $[h(\bigvee_{x \in X} a_x) = \bigvee_{x \in X} h(a_x)]$ и двойственно для $\bigwedge$) и $a \in T$ влечет $h(a) \in T'$, причем T и T' являются [полными] истинностными фильтрами A и A' соответственно. Первое условие следует из других вследствие дуального условия для $\bigwedge$ и того, что для всякого $a \in A$ $a \in F = (A - T)$ влечет $h(a) \in F' = (A' - T')$. Если к тому же h является одно-однозначным, то оно будет [полным] *изоморфизмом*, и если h есть отображение на A', то A и A' (полностью) *изоморфны*.

Если G — [полностью] независимое множество образующих для [полной] интенсиональной решетки A, то это будет необходимым и достаточным условием для того, чтобы G было множеством *свободных* образующих для A в том смысле, что если f есть любое отображение G в [полную] интенсиональную решетку A', обладающее тем свойством, что для всякого $a \in G$ $a \in T$ влечет $f(a) \in T'$

и $a \in F$ влечет $f(a) \in F'$, то f может быть расширено для [полного] гомоморфизма A в A'.

Если [полная] интенсиональная решетка задана посредством некоторого [полностью] независимого множества образующих, то сама решетка называется [полностью] независимой[1].

2.2. Легко обнаруживаемыми и широко применяемыми свойствами полных интенсиональных решеток являются следующие (конечные аналоги, очевидно, также имеют место):

(1) $a \leqslant \wedge B$, если и только если для всякого $b \in B$ $a \leqslant b$; $\vee B \leqslant a$, если и только если для всякого $b \in B$ $b \leqslant a$; $\vee B \leqslant \wedge C$, если и только если $b \leqslant c$ для всякого $b \in B$ и $c \in C$. Также $\wedge_{x \in X} \vee_{y \in Y} a_{x,y} \leqslant b$, если и только если $\wedge_{x \in X} a_{x, s(x)} \leqslant b$ для всякой функции s из X в Y, и $a \leqslant \vee_{x \in X} \wedge_{y \in Y} b_{x,y}$, если и только если $a \leqslant \vee_{x \in X} b_{x\,s(x)}$ для всякой функции s из X в Y.

(2) $C \subseteq B$ влечет $\wedge B \leqslant \wedge C$ и $\vee C \leqslant \vee B$, и если B и C имеют общий элемент, то $\wedge B \leqslant \vee C$.

(3) $N \wedge_{x \in X} a_x = \vee_{x \in X} Na_x$ и $N \vee_{x \in X} a_x = \wedge_{x \in X} Na_x$.

(4) Обобщенная ассоциативность и коммутативность для любых комбинаций конечных и бесконечных пересечений и для любой комбинации конечных и бесконечных объединений.

(5) Если множество G порождает полную интенсиональную решетку A, то любое $a \in A$ может быть представлено в конъюнктивной нормальной форме $a = \wedge_{x \in X} \vee_{y \in Y} a_{x,y}$, где для $x \in X$, $y \in Y$, $a_{x,y} \in G \cup \{Ng : g \in G\}$, а также в дизъюнктивной нормальной форме $\vee_{x \in X} \wedge_{y \in Y} a_{x,y}$.

2.3. Здесь мы изложим некоторые более специальные свойства интенсиональных и полных интенсиональных решеток, которые будут использоваться в дальнейшем.

(1) Пусть M_0 будет упорядоченной четверкой элементов $\langle M_0, \leqslant, N, T \rangle$, в которой $M_0 = \{-3, -2, -1, -0, +0, +1, +2, +3\}$; $T = \{+i\}$, где $i = 0, 1, 2, 3$; $N(\pm a) = \mp a$; и $a \leqslant b$, если и только если (i) $a = b$, или (ii) $a = -3$, или (iii) $a = +0$ и $b \in T$, или (iv) $a = -1$ и $b = +1$ или $a = -2$ и $b = +2$, или (v) $Nb \leqslant Na$, согласно (i)—(iv).

M_0 является интенсиональной и полной (как и все конечные интенсиональные решетки) решеткой, что нетрудно установить[1].

Пусть A будет интенсиональной решеткой, и пусть $a, b \in A$ будут такими, что (i) $a, b \in T$, (ii) $Na \leqslant a$, $Nb \leqslant b$, (iii) $Na \wedge b \leqslant Nb$, $Nb \wedge a \leqslant Na$ и (iv) $Na \nleqslant b$. Тогда подрешетка, порождаемая $\{a, b\}$, изоморфна решетке M_0 при естественном расширении отображения $f(a) = +1$, $f(b) = +2$. (Основное содержание этого утверждения было установлено в работе Андерсона и Белнапа [6]).

(2) Пусть $\{\langle A_x, \leqslant_x, N_x, T_x \rangle\}_{x \in X}$ будет индексированным множеством [полных] интенсиональных решеток, и пусть $\Pi_{x \in X} A_x$ определено как упорядоченная четверка $\langle A, \leqslant, N, T \rangle$, для которой справедливо следующее: $T = \times_{x \in X} T_x$, $F = \times_{x \in X} F_x$ и $A = T \cup F$, а также для $a, b \in A$, если $a = \{a_x\}_{x \in X}$ и $b = \{b_x\}_{x \in X}$, то $a \leqslant b$, если и только если $a_x \leqslant_x b_x$ для всякого $x \in X$ и $Na = \{N_x a_x\}_{x \in X}$. Тогда $\Pi_{x \in X} A_x$ также является [полной] интенсиональной решеткой.

(3) Пусть A будет полной интенсиональной решеткой, и пусть $\{\langle A_x, \leqslant, N, T_x \rangle\}_{x \in X}$ будет индексированным множеством полных подрешеток A, удовлетворяющих следующим трем условиям:

(i) для каждых $t_x, t'_x \in T_x$, где $x \in X$, если $(\wedge_{y \in (X - \{x\})} (\wedge T_y)) \wedge t_x \leqslant t'_x$, то $t_x \leqslant t'_x$, и для дуала; (ii) для $x, y \in X$, если $x \neq y$, $t_y \in T_y$ и $f_x \in F_x$, то $f_x \leqslant t_y$; (iii) для $x, y \in X$, если $x \neq y$, $t_x, t'_x \in T_x$ и $t_y \in T_y$, то $t_x \leqslant t'_x \vee t_y$, и для дуала этого выражения. Пусть также $T^* = \{\wedge B : B \in \times_{x \in X} T_{x \in X}\}$, $F^* = \{\vee B : B \in \times_{x \in X} T_x\}$, и пусть $A^* = T^* \cup F^*$. Тогда $\langle A^*, \leqslant, N, T^* \rangle$ является полной интенсиональной решеткой, целиком изоморфной $\Pi_{x \in X} A_x$.

Действительно, для $\{a_x\}_{x \in X} \in \Pi_{x \in X} A_x$ определяем $h\{a_x\}_{x \in X}$ как $\wedge_{x \in X}\{a_x\}$ или $\vee_{x \in X}\{a_x\}$, согласно тому $\{a_x\}_{x \in X} \in T$ или $\{a_x\}_{x \in X} \in F$.

Затем прежде всего $h(N(\{a_x\}_{x \in X})) = h(\{Na_x\}_{x \in X}) = N(h(\{a_x\}_{x \in X}))$ благодаря построению $\Pi_{x \in X} A_x$ и обобщению законов де-Моргана.

---

[1] То, что здесь называется „полностью независимой полной интенсиональной решеткой“, в работе Андерсона и Белнапа [8] было названо „атомарной структурой“. Последний термин принят благодаря его связи с философским понятием атомарного суждения, однако в данном случае мы модифицируем нашу терминологию так, чтобы привести ее в соответствие с терминологией алгебраистов.

[1] Матричное представление M_0 можно найти в работе Белнапа [10]. M_0 встречается также в работах Андерсона и Белнапа [5], [6] и [8].

Далее устанавливаем, что $a = h(\bigvee_{y \in Y} \{a_{x, y}\}_{x \in X}$; для доказательства гомоморфизма достаточно показать, что $a = \bigvee_{y \in Y} h(\{a_{x, y}\}_{x \in X})$. В первую очередь из $\Pi_{x \in X} A_x$ мы видим, что

$$a = h(\{\bigvee_{y \in Y} a_{x, y}\}_{x \in X}).$$

Пусть Y_T будет множеством всех $y \in Y$, таких, что $a_{x, y} \in T$, для всех $x \in X$, и пусть $Y_F = (Y - Y_T)$ будет множеством всех $y \in Y$, таких, что $a_{x, y} \in F_x$ для $x \in X$. Тогда, если Y_T пусто, мы будем иметь $\bigvee_{y \in Y} a_{x, y} \in F_x$ для каждого $x \in X$, так что по определению h получаем

$$a = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} a_{x, y}.$$

Теперь, согласно свойствам решетки,

$$\bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} a_{x, y} = \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} a_{x, y},$$

и так как для всяких $y \in Y$, $x \in X$ $a_{x, y} \in F_x$ определение h приводит к

$$a = \bigvee_{y \in Y} h(\{a_{x, y}\}_{x \in X}),$$

что и требовалось доказать.

С другой стороны, предположим, что Y_T не пусто, тогда (благодаря тому, что для каждого $x \in X$, $\bigvee_{y \in Y} a_{x, y} \in T_x$) определение h приводит к

$$a = \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} a_{x, y}.$$

Используя дистрибутивность и определяя S как множество всех функций из X в Y, мы получаем

$$a = \bigvee_{s \in S} \bigwedge_{x \in X} a_{x, s(x)}.$$

Пусть S_T будет тем подмножеством S, члены которого s обладают тем свойством, что для всякого $x \in X$ $s(x) \in Y_T$. Тогда

$$a = (\bigvee_{s \in S_T} \bigwedge_{x \in X} a_{x, s(x)}) \vee (\bigvee_{s \in (S - S_T)} \bigwedge_{x \in X} a_{x, s(x)})),$$

где в данном случае и ниже правый член дизъюнкции должен быть вычеркнут, если Y_F пусто. Однако, если Y_F не пусто, мы показываем, что

$$\bigvee_{s \in (S - S_T)} \bigwedge_{x \in X} a_{x, s(x)} = \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} a_{x, y}.$$

То, что $\bigvee_{s \in (S - S_T)} \bigwedge_{x \in X} a_{x, s(x)} \leqslant \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} a_{x, y}$ тривиально, так как для каждого $s \in (S - S_T)$, $s(x) = y$ для некоторых $y \in Y_F$ и $x \in X$, поэтому для данных x и y $a_{x, s(x)} = a_{x, y}$. Для доказательства обратного утверждения нам нужно показать, что

$$a_{x, y} \leqslant \bigvee_{s \in (S - S_T)} a_{q(s), s(q(s))},$$

где $x \in X$, $y \in Y_F$ и q есть функция из $S - S_T$ в X. Но поскольку Y_T содержит некоторый член, скажем y', постольку должен существовать некоторый член s множества $S - S_T$, такой, что $s(x) = y$ и для всякого $x' \neq x$ $s(x') = y'$. Поэтому для данного s мы будем иметь

$$a_{x, y} \leqslant a_{q(s), s(q(s))}$$

либо тривиально (если $q(s) = x$), либо согласно условию (ii) нашей гипотезы (если $q(s) \neq x$), поэтому $a_{x, y} \leqslant \bigvee_{s \in (S - S_T)} a_{q(s), s(q(s))}$ получается сразу же благодаря свойствам решетки.

Теперь обратим внимание на левый член и покажем, что

$$\bigvee_{s \in S_T} \bigvee_{x \in X} a_{x, s(x)} = \bigvee_{y \in S_T} \bigwedge_{x \in X} a_{x, y}.$$

Тривиально, что $\bigvee_{y \in Y_T} \bigwedge_{x \in X} a_{x, y} \leqslant \bigvee_{s \in S_T} \bigwedge_{x \in X} a_{x, s(x)}$, так как для каждого $y \in Y_T$ существует $s \in S_T$, такой, что для всякого $x \in X$ $s(x) = y$. Для доказательства конверсии этого утверждения нам нужно показать, что

$$\bigwedge_{x \in X} a_{x, s(x)} \leqslant \bigvee_{y \in Y_T} a_{q(y), y}$$

для каждого $s \in S_T$ и для каждой функции q из Y_T в X. Справедливость этого отношения очевидна, если для некоторого $x \in X$ $q(y) = x$ для всякого $y \in Y_T$; если, с другой стороны, q принимает по крайней мере два различных значения x и x', то это отношение справедливо благодаря условию (iii) нашей гипотезы.

Следовательно,

$$a = (\bigvee_{y \in Y_T} \bigwedge_{x \in X} a_{x, y}) \vee (\bigvee_{y \in Y_F} \bigvee_{x \in X} a_{x, y}),$$

то есть

$$\begin{aligned} a &= (\bigvee_{y \in Y_T} h(\{a_{x, y}\}_{x \in X})) \vee (\bigvee_{y \in Y_F} h(\{a_{x, y}\}_{x \in X})) = \\ &= \bigvee_{y \in Y} h(\{a_{x, y}\}_{x \in X}). \end{aligned}$$

$h(\bigwedge_{y \in Y} \{a_{x, y}\}_{x \in X}) = \bigwedge_{y \in Y} h(\{a_{x, y}\}_{x \in X})$ следует благодаря дуальности, а то, что $\{a_x\}_{x \in X} \in T$ влечет $h(\{a_x\}_{x \in X} \in T^*$, является непосредственным следствием определений h и T^*. Поэтому h является полным гомоморфным отображением

$\Pi_{x \in X} A_x$ в A^*. Свойство одно-однозначности h нетрудно вывести из условия (i) гипотезы на основе свойств решетки, добавив лишь то условие, что T^* и F^* не пересекаются. То, что h есть отображение на A^* очевидно. На этом доказательство того, что $\langle A^*, \leqslant, N, T^* \rangle$ является полностью изоморфной $\Pi_{x \in X} A_x$, заканчивается.

§ 3. Теория суждений

В этом параграфе мы дадим краткий набросок той части теории суждений, которая существенна для семантики интенсиональной логики, а затем перейдем к доказательству леммы, нужной нам в дальнейшем. Чтобы сделать совершенно ясным то, чем мы хотим заниматься, сформулируем эту теорию в виде определения и некоторого множества строгих предположений, в истинности которых мы убеждены. Предварительно мы можем сказать, что рассматриваем суждение как (внелингвистическое) *логическое* содержание предложения, так что могут существовать невыраженные суждения, и два предложения выражают одно и то же суждение только в том случае, если играют одну и ту же роль в выводе. Наряду с понятием суждения исходными элементами теории являются также пропозициональное отрицание, (интенсиональное) отношение логического следования или импликации и понятие пропозициональной истины.

3.1. Наши предположения будут иметь смысл только для таких множеств суждений, которые определенным образом замкнуты, поэтому мы начинаем с определений.

Определение. Множество суждений P [полностью] замкнуто, если и только если P замкнуто по пропозициональному отрицанию и образует [полную] решетку с отношением логического следования между суждениями.

Определение. Если P [полностью] замкнуто, $\leqslant$ является отношением пропозиционального следования на P, N есть операция пропозиционального отрицания на P и T — множество всех истинных суждений из P, то мы можем сказать, что упорядоченная четверка элементов $\langle P, \leqslant, N, T \rangle$ представляет [*полную*] *пропозициональную решетку*.

Предположение 1. Каждая [полная] пропозициональная решетка является интенсионально дополненной [полностью] дистрибутивной [полной] решеткой с [полным] истинностным фильтром.

Для суждений a и b $a \wedge b$ есть суждение о том, что a принято и b принято, $a \vee b$ — суждение о том, что a принято или b принято, и для множества суждений A, $\wedge A$ есть суждение о том, что принят каждый член A, $\vee A$ — суждение о том, что принят некоторый член A. Na есть, конечно, суждение о том, что a не принято.

Предположение 2. Для любого конечного числа n существует пропозициональная решетка, порождаемая посредством n независимых образующих.

Совместно эти два предположения приводят нас к столкновению с ортодоксальной теорией суждений, так как с классической точки зрения каждая пропозициональная решетка есть булева алгебра, в то время как свободная интенсиональная решетка с числом образующих n ею не является.

Предположение 3. Существует полная пропозициональная решетка, порождаемая полностью независимым множеством (суждений) мощности $\aleph_0$.

Из третьего предположения, конечно, вытекает второе; мы разделили их с целью указать на то, что для полноты бескванторных систем E и R требуется только второе предположение. Аналогичное замечание справедливо и для предположения 1: ссылка на полную пропозициональную решетку не является необходимой для непротиворечивости бескванторных систем. Кроме того, если принять во внимание непротиворечивость систем, содержащих кванторы, то, по-видимому, можно было бы ослабить требование дистрибутивности, постулируемое для полных пропозициональных решеток: вероятно, было бы достаточно только постулата $a \vee (\wedge_{x \in X} b_x) = \wedge_{x \in X} (a \vee b_x)$, а ограничение (CD) счетными множествами сделало бы это обязательным. Но мы думаем, что для полных пропозициональных решеток истинно более строгое предположение полной дистрибутивности, как оно истинно для полных полей множеств.

3.2. Опираясь на эти предположения, докажем теперь лемму, которая ниже потребуется для доказательства того, что различные системы интенсиональной логики семантически полны относительно подразумеваемой пропозициональной интерпретации.

Здесь и далее, если c является некоторым кардиналом, M^c будет $\Pi_{x:x<c}A_x$, где для каждого $x<c$, A_x есть M_0. (Определения Π и M_0 см. в 2.3.)

Лемма 3.2. *Для каждого кардинала* $0<c\leqslant\aleph_0$ *существует пропозициональная решетка* P^c, *изоморфная* M^c.

В самом деле, согласно предположению (3) из 3.1, существует пропозициональная решетка $P=\langle P, \leqslant, N, T\rangle$, порождаемая множеством G из $2c$ независимых генераторов, где для непересекающихся множеств $\{s_i\}$ и $\{r_i\}$ $c>i>0$, $G=\{r_i\}\cup\{s_i\}$. (Для случая конечности G требуется, очевидно, только предположение (2) из 3.1.) Мы показываем, что P имеет подрешетку $P^c=\langle P^c, \leqslant, N, T^c\rangle$, изоморфную M^c. Можно принять, что $G\subseteq T$, ибо в противном случае мы можем найти независимое множество генераторов G', такое, что $G'\subseteq T$, выбрав $G'=\{f(a): a\in G\}$, где $f(a)=Na$, если $a\notin T$ и $f(a)=a$, если $a\in T$. Приняв $NG=\{Ng:g\in G\}$, мы можем ввести следующие определения для каждого $i<c$:

$$U_i=\{a:a\in NG \text{ и } a\neq Nr_i \text{ или } a=s_i\};$$
$$V_i=\{a:a\in NG \text{ и } a\neq Ns_i \text{ или } a=r_i\};$$
$$u_i=\bigvee U_i Nu_i=\bigwedge NU_i=\bigwedge\{a:(a\in G \text{ и } a\neq r_i) \text{ или } a=Ns_i\};$$
$$v_i=\bigvee V_i Nv_i=\bigwedge NV_i=\bigwedge\{a:(a\in G \text{ и } a\neq s_i) \text{ или } a=Nr_i\};$$
$$+0_i=(u_i\wedge v_i);$$
$$+1_i=(u_i\wedge v_i)\vee Nv_i=(u_i\vee NV_i)\wedge v_i;$$
$$+2_i=(u_i\wedge v_i)\vee Nu_i=(v_i\vee Nu_i)\wedge u_i;$$
$$+3_i=(u_i\wedge v_i)\vee Nv_i\vee Nu_i=(u_i\vee Nv_i)\wedge(v_i\vee Nu_i);$$
$$-0_i=N(+0_i), -1_i=N(+1_i), -2_i=N(+2_i), -3_i=N(+3_i);$$
$$T_i=\{+0_i+1_i+2_i+3_i\},\ F_i=\{-0_i-1_i-2_i-3_i\};$$
$$P_i=(T_i\cup F_i);$$
$$T^c=\{\bigwedge B:B\in X_{i<c}T_i\};$$
$$F^c=\{\bigwedge B:B\in X_{i<c}F_i\};$$
$$P^c=T^c\cup F^c.$$

Теперь нужно показать, что $\langle P^c, \leqslant, N, T^c\rangle$ изоморфна M^c.

Прежде всего нетрудно заметить, что элементы $+1_i$ и $+2_i$ служат в качестве генераторов для P_i; действительно, $+0_i=(+1_i\wedge+2_i)$, а $+3_i=(+1_i\vee+2_i)$. Следовательно, для доказательства изоморфности P_i и M_0 для каждого i достаточно показать, что P_i выполняет условия (i)—(iv), сформулированные в (1) из 2,3 (i). Так как, по предположению, s_i, $r_i\in T$, то отсюда следует — благодаря тому, что T есть фильтр,— что u_i и v_i и соответственно каждый член T_i находятся в T; (ii) соотношения $-1_i\leqslant+1_i$ и $-2_i\leqslant+2_i$ следуют из того, что $Nu_i\leqslant u_i$ (так как U_i и NU_i содержат s_i, и поэтому Ns_i также его содержит), и аналогично для v_i; (iii) мы также имеем $-1_i\wedge+2_i\leqslant-2_i$ и $\wedge+1_i\leqslant-1_i$. То, что $-1_i\nleqslant+2_i$, следует из того факта, что $Nv_i\nleqslant u_i$, который в свою очередь вытекает из независимости G и того, что NV_i и U_i не имеют общих членов.

Благодаря тому, что P^c $T^c\cup F^c$ определено в соответствии с (3) из 2.3, остается только показать, что P^c удовлетворяет условиям (i)—(iii) из 2.3(3), из чего будет непосредственно следовать, что P^c изоморфно M^c. Сначала покажем, (i) что $(\bigwedge_{i\neq k}+0_i)\wedge t_k\leqslant t'_k$ влечет $t_k\leqslant t'_k$, где t_k, $t'_k\in T_k$. Предположим, что консеквент этого утверждения ложен; тогда на основании рассмотрения семи различных пар t_k, t'_k, для которых $t_k\nleqslant t'_k$, мы можем заключить, что если бы антецедент этого утверждения был истинным, то мы должны были бы иметь либо $\bigwedge_{i\neq k}+0_i\wedge+1_k\leqslant+2_k$, либо то же самое соотношение, но с заменой $+1_k$ на $+2_k$ и $+2_k$ на $+1_k$. Благодаря симметричности всех определений нам нужно показать только ложность первого соотношения. Если бы оно было истинным, то на основе определения и дистрибутивности мы должны были бы иметь $\bigwedge_{i\neq k}+0_i\wedge Nv_k\leqslant u_k$, то есть $\bigwedge_{i\neq k}(u_i\wedge v_i)\wedge Nv_k\leqslant u_k$.

Так как для каждого $i\neq k$ и U_i и V_i содержат Nr_k, которое находится также в NV_k, мы должны иметь $Nv_k\leqslant\leqslant u_i\wedge v_i$ для всякого $i\neq k$, что в свою очередь приводит к $NV_k\leqslant u_k$; последнее ложно вследствие независимости G. (ii) Для $i\neq k$ $f_i\leqslant t_k$, где $f_i\in F_i$ и $t_k\in T_k$ следует из того, что $Nu_i\leqslant v_k$ и $Nv_i\leqslant u_k$ для $i\neq k$; (iii) для $i\neq k$ $t_k\leqslant t'_k$, где t_k, $t'_k\in T_k$ и $t_i\in T_i$.

§ 4. Интенсиональные модели

В этом параграфе мы определяем понятие «модели» для интенсиональной логики, что приводит нас к определениям других близких понятий, нужных для построения адекватной семантики первопорядковых формул. Доказывается также непротиворечивость, связывающая различные интенсиональные логики с определенными критическими моделями.

4.1. Нижеследующее понятие модели предназначено для формул первой степени, содержащих кванторы; для пропозициональной логики было бы достаточно и более простого понятия модели. Однако с целью более краткого изложения мы не будем рассматривать пропозициональную логику в качестве отдельного случая.

Q является *интенсиональной моделью*, если и только если Q есть упорядоченная тройка элементов ⟨A, I, s⟩, в которой A есть полная интенсиональная решетка, I — не-пустая область индивидов, а s — *функция приписывания* для A и I, то есть такая функция, что для каждой индивидной переменной x, $s(x) \in I$, для каждой n-арной функциональной буквы F, $s(F)$ есть функция из I^n в A, и для каждой пропозициональной переменной p, $S(p) \in A$.

Для данной интенсиональной модели $Q = \langle A, I, s\rangle$ мы определяем *оценку* (нулевого порядка), детерминируемую Q, и *истинностное множество* (первого порядка), детерминируемое Q.

Скажем, что v_Q есть оценка (нулевого порядка), *детерминированная* $Q = \langle A, I, s\rangle$, если и только если v_Q есть функция, определенная для каждой формулы нулевого порядка и имеющая оценку в A, которая задана следующим образом. Для всякой формулы нулевой степени (фнс) A:

если A есть пропозициональная переменная, то $v_Q(A) = s(A)$;

если A имеет форму $F(x_1, \ldots, x_n)$, то $v_Q(A)$ является значением в A функции $s(F)$ для аргументов $\langle s(x_1), \ldots, s(x_n)\rangle$;

если A имеет форму $\overline{B}$, то $v_Q(A) = Nv_Q(B)$;

если A имеет форму $B \vee C$, то $v_Q(A) = v_Q(B) \vee v_Q(C)$ (здесь первое вхождение знака "$\vee$" является синтаксическим, а второе — алгебраическим; в дальнейшем различие между этими вхождениями будет ясно из контекста);

если A имеет форму $\exists xB$, то $v_Q(A) = \bigvee C$, где C представляет такое множество, что $c \in C$, если и только если $v_{Q'}(B) = c$ для некоторой интенсиональной модели $Q' = \langle A, I, s'\rangle$, в которой s' отличается от s разве что приписыванием значения x.

Обращаясь теперь к понятию истинностного множества, мы говорим, что T_Q является (первопорядковым) *истинностным множеством, детерминированным* $Q = \langle A, I, s\rangle$, если и только если для всякой формулы первой степени (фпс) A и полной интенсиональной решетки $A = \langle A, \leqslant, N, T\rangle$:

если A есть фнс, то $A \in T_Q$, если и только если $v_Q A \in T$;

если A имеет форму $B \to C$, то $A \in T_Q$, если и только если $v_Q(B) \leqslant v_Q(C)$;

если A имеет форму $\overline{B}$, то $A \in T_Q$, если и только если $B \notin T_Q$;

если A имеет форму $B \vee C$, то $A \in T_Q$, если и только если либо $B \in T_Q$, либо $C \in T_Q$;

если A имеет форму $\exists xB$, то $A \in T_Q$, если и только если $B \in T_{Q'}$ для некоторой интенсиональной модели $Q' = \langle A, I, s'\rangle$, в которой s' отличается от s только, может быть, приписыванием x.

Мы определяем также F_Q — *ложностное множество, детерминируемое* Q, — как дополнение T_Q относительно множества фпс. Тогда некоторая фпс A называется *истинной* в модели Q, если $A \in T_Q$, и *ложной* в Q, если $A \in F_Q$. Мы предоставляем читателю проверить справедливость этого утверждения по крайней мере в том отношении, что фпс A истинна в Q точно в тех же случаях, когда $\overline{A}$ ложна в Q.

Некоторая фпс общезначима в (полной интенсиональной решетке) A, если она истинна в каждой модели $Q = \langle A, I, s\rangle$, и *фальсифицируема в A*, если ложна в некоторой модели $Q = \langle A, I, s\rangle$.

Под *интенсиональной структурой* мы понимаем упорядоченную пару ⟨A, I⟩, в которой A есть полная интенсиональная решетка, а I представляет не-пустую область индивидов. Мы будем говорить, что некоторая фпс A *значима* в структуре ⟨A, I⟩ или *фальсифицируема* в структуре ⟨A, I⟩, если A истинна в каждой интенсиональной модели ⟨A, I, s⟩ или ложна в некоторой интенсиональной модели ⟨A, I, s⟩.

Если A является полной пропозициональной решеткой, то структура ⟨A, I⟩ будет *пропозициональной структурой*, а интенсиональная модель ⟨A, I, s⟩ — *пропозициональной моделью*.

Это приводит нас к последнему и наиболее важному семантическому определению: некоторая фпс *значима* (без уточнений), если и только если она значима в каждой пропозициональной структуре, то есть истинна в каждой пропозициональной модели, и она *фальсифицируема*, если и только если фальсифицируема в некоторой пропозициональной структуре, то есть ложна в некоторой пропозициональной модели. Оправдание этих последних определений следует искать, конечно, в подразумеваемой интерпретации наших интенсиональных логик.

4.2. Здесь мы уже можем дать строгую формулировку некоторой части нашего основного результата: для формул первой степени значимость является необходимым и достаточным условием их доказуемости в EQ, а также в RQ. В качестве леммы, нужной для обоснования этого результата, мы докажем связь между доказуемостью в RQ и значимостью в интенсиональных решетках M^c.

Лемма 4.2. *Каждая* фпс, *доказуемая* в RQ, значима в M^c *для всякого* c. (*То же самое справедливо соответственно для* EQ, E *и* R.)

Для доказательства этого нам нужно ввести понятие импликативной интенсиональной решетки и соответствующим образом расширить понятия оценки и истинностного множества. Идея доказательства состоит в том, что доказательства фпс в RQ можно строить из формул, которые сами *не* являются формулами первой степени. Мы находим подходящую интерпретацию этих формул, являющуюся расширением той интерпретации, которую имеем для фпс. (Увы, эта интерпретация отчасти будет ad hoc; в противном случае мы бы имели хорошую интерпретацию для всей интенсиональной логики, а не только для ее первостепенного фрагмента.)

[*Полная*] *импликативная интенсиональная решетка* есть упорядоченная пятерка элементов $\langle A, \leqslant, N, T, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$, в которой $\langle A, \leqslant, N, T\rangle$ есть [полная] интенсиональная решетка, а $\underset{\cdot}{\rightarrow}$ — двухместная операция на A, такая, что для a, $b \in A, (a \underset{\cdot}{\rightarrow} b) \in T$, если и только если $a \leqslant b$. [Полная] импликативная интенсиональная решетка $\langle A, \leqslant, N, T, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$ называется импликативным расширением решетки $\langle A, \leqslant, N, T\rangle$. Для данного A мы записываем его расширение в виде $\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$.

Пусть $Q = \langle A, I, s\rangle$ будет интенсиональной моделью,

детерминирующей оценку v_Q и истинностное множество T_Q, и пусть $\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$ будет импликативным расширением A. Тогда $Q' = \langle\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle, I, s\rangle$ представляет собой *импликативную интенсиональную модель*, детерминирующую *импликативную оценку* $v_{Q'}$, при условии, что для каждой формулы A, если A есть фпс, то $v_{Q'}(A) = v_Q(A)$; если A имеет форму $B \rightarrow C$, то $v_{Q'}(A) = v_{Q'}(B) \underset{\cdot}{\rightarrow} v_{Q'}(C)$; если A есть не-фпс, а имеет одну из форм $\overline{B}$, $B \vee C$ или $\exists xB$, то $v_{Q'}(A)$ имеет соответственно одно из следующих значений: $Nv_{Q'}(B)$, $v_{Q'}(B) \vee v_{Q'}(C)$, или $\vee C$, где $c \in C$, если и только если $v_{Q''}(B) = c$ для некоторой импликативной интенсиональной модели $Q'' = \langle\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle, I, s''\rangle$, в которой s'' отличается от s только, может быть, приписыванием x.

Формула A называется *значимой* в импликативной интенсиональной решетке $\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$, если и только если $v_{Q'}(A) \in T$ для каждой импликативной интенсиональной модели $\langle\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle, I, s\rangle$.

Из того, что T — фильтр, легко видеть, что для фпс значимость в импликативном расширении $\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$ решетки A эквивалентна значимости в A. Кроме того, если использовать T^c для обозначения истинностного фильтра M^c, а F^c — для обозначения его дополнения относительно M^c, нетрудно заметить, что для каждого c, $(\wedge T^c) \wedge (\vee F^c) = \wedge M^c$, поэтому лемма 4.2 является следствием такого утверждения.

Пусть $A = \langle A, \leqslant, N, T\rangle$ будет полной интенсиональной решеткой, обладающей тем свойством, что если $F = (A - T)$, то $(\wedge T) \wedge (\vee F) = \wedge A$; тогда существует импликативное расширение $\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$, в котором значима каждая теорема RQ.

Действительно, пусть $\underset{\cdot}{\rightarrow}$ определена следующим образом: (I) если $a \in F$ и $b \in T$, то (i) $a \underset{\cdot}{\rightarrow} b = \wedge A$, если $a \neq b$, (ii) $a \underset{\cdot}{\rightarrow} b = \vee A$, если $a = \wedge A$ или $b = \vee A$, (iii) $a \underset{\cdot}{\rightarrow} b = (Na \wedge b)$ в других случаях; (II) если $a, b \in F$, то $a \underset{\cdot}{\rightarrow} b = Na \wedge (a \underset{\cdot}{\rightarrow} (b \vee (\wedge T)))$; (III) если $a, b \in T$, то $a \underset{\cdot}{\rightarrow} b = b \wedge ((a \wedge (\vee F)) \underset{\cdot}{\rightarrow} b)$; (IV) если $a \in T$ и $b \in F$, то $a \underset{\cdot}{\rightarrow} b = Na \wedge b \wedge (a \wedge (\vee F) \underset{\cdot}{\rightarrow} b \vee (\wedge T))$.

Убедиться в том, что $\langle A, \underset{\cdot}{\rightarrow}\rangle$ является импликативной, достаточно легко, если принять во внимание тот факт, что равенство $(\wedge T) \wedge (\vee F) = \wedge A$, постулированное для A, влечет (для случая (II)), что если $a, b \in F$, то $a \leqslant b$, если и только если $a \leqslant (b \vee (\wedge T))$, а также (для случая (III)), что если $a, b \in T$, то $a \leqslant b$, если и только если $(a \wedge (\vee F)) \leqslant b$. Действительно, предположим, что $a \leqslant (b \vee (\wedge T))$, тогда $a \leqslant (b \vee (\wedge T)) \wedge a$ (по построению решетки), $\leqslant b \vee ((\wedge T) \wedge a)$ (по дистрибутивности), $\leqslant b \vee ((\wedge T) \wedge (\vee F))$ (вследствие того, что $a \in F$ влечет $a \leqslant \vee F$), $\leqslant b \vee (\wedge A) \leqslant b$. Другой случай — дуальный. Для завершения этого рассуждения требуется лишь столь же просто (и столь же механически) установить, что каждая аксиома RQ значима в $\langle A, \dot{\rightarrow} \rangle$ и что правила сохраняют значимость.

4.3. Здесь мы добавим некоторые побочные замечания, касающиеся импликативных расширений. Они интересны главным образом с точки зрения предположения о том, что подходящие семантики для интенсиональных логик можно найти в понятии импликативного расширения.

(1) Для данной интенсиональной решетки, в которой, как и выше, $(\wedge T) \wedge (\vee F) = \wedge A$, альтернативное импликативное расширение задается следующим образом: (I) $(\wedge T \dot{\rightarrow} a) = a$, $(a \dot{\rightarrow} \vee F) = NA$, $a \dot{\rightarrow} \vee A) = \vee A$ и $(\wedge A \dot{\rightarrow} a) = \vee A$; (II) в противном случае $(a \dot{\rightarrow} b) = \wedge \mathrm{T}$ или $(a \dot{\rightarrow} b) = \wedge A$ в зависимости от того, $a \leqslant b$ или $a \nleqslant b$.

(2) Существуют полные интенсиональные решетки A, не имеющие импликативного расширения $\langle A, \dot{\rightarrow} \rangle$, такого, что каждая теорема R значима в $\langle A \dot{\rightarrow} \rangle$, например, $\langle A, \leqslant, N, T \rangle$, в которой A, T и N являются такими же, как в M_0 (см. 2.3), $\leqslant$ таково, что если $a \in F$ и $b \in T$, то $a \leqslant b$, если $b \in T$, то $+0 \leqslant b$, $a \leqslant +3$ для всякого a; $a \leqslant b$, если и только если $NB \leqslant NA$. Было бы интересно рассмотреть вопрос о том, для каждой ли полной интенсиональной решетки существует импликативное расширение, в котором значима каждая теорема системы E.

(3) Если $\langle A, \dot{\rightarrow} \rangle$ есть любая импликативная интенсиональная решетка, в которой значимы все теоремы E, то это справедливо и для решетки $\langle \Pi_{i<n} A_i \dot{\rightarrow} \rangle$, в которой n — конечно, $A_i = A$ для $i < n$ и для элементов $a = \{a_i\}_{i<n}$ и $b = \{b_i\}_{i<n}$ из $\Pi_{i<n} A_i$ $(a \dot{\rightarrow} b)$ определяется как $\{c_j\}_{j<n}$, где все c_j одинаковы и каждое $c_j = \wedge_{i<n} (a_i \rightarrow b_i)$. В том, что это так, можно убедиться, обратив внимание на то, что свойство быть теоремой в E сохраняется при том роде одновременной подстановки, который имеется в виду в определении $\langle \Pi_{i<n} A_i \dot{\rightarrow} \rangle$. Некоторый интерес представляет случай, в котором A есть M_0 и $\langle A, \dot{\rightarrow} \rangle$ определяется так же, как в 4.2; мы обнаруживаем, что в таких импликативных интенсиональных решетках каждая теорема E

значима (так как все они значимы в M_0), но теорема $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ системы R проваливается при $n > 1$.

Требуемое определение выглядит так: для данной ппф A системы E пусть $s^n(A) = s_1^n(A) \& \ldots \& s_n^n(A)$, где каждая функция s_i^n определена для всех правильно построенных частей формулы A, значениями ее являются формулы и она задается следующим образом:

(i) если p есть j-ая в алфавитном порядке переменная A, то $s_i^n(p)$ есть $((j \cdot n) + (i - 1))$-ая переменная, не встречающаяся в A;

(ii) $s_i^n(A \vee B) = s_i^n(A) \vee s_i^n(B)$;

(iii) $s_i^n(A \& B) = s_i^n(A) \& s_i^n(B)$;

(iv) $s_i^n(\overline{A}) = \overline{s_i^n(A)}$;

(v) $s_i^n(A \rightarrow B) = (s_1^n(A) \rightarrow s_1^n(B)) \& \ldots \& (s_n^n(A) \rightarrow s_n^n(B))$.

После этого очевидно, что если $s^n(A)$ значима в $\langle A, \dot{\rightarrow} \rangle$, то формула A значима в $\langle \Pi_{i<n} A_i \dot{\rightarrow} \rangle$.

Более интересным является то обстоятельство, что переход от A к $s^n(A)$ сохраняет свойство быть теоремой в E, но не в R.

(4) Импликативные интенсиональные решетки, в общем, не являются импликативными решетками в смысле Карри [15, с. 141], и обратное тоже не верно. В самом деле, хотя определение $(a \dot{\rightarrow} b)$ в $\langle A \dot{\rightarrow} \rangle$ как $\vee \{c : c \in A$ и $a \wedge c \leqslant b\}$ гарантирует, что если $a \leqslant b$, то $(a \dot{\rightarrow} b) \in \mathrm{T}$ (так как тогда $(a \dot{\rightarrow} b) = \vee A$), нет гарантий в том, что если $(a \dot{\rightarrow} b) \in T$, то $a \leqslant b$; одного $b \in T$ достаточно для $(a \dot{\rightarrow} b) \in T$, но этого не достаточно для $a \leqslant b$. Аналогичное замечание справедливо и для определения $a \dot{\rightarrow} b$ как „материальной импликации" $Na \vee b$.

§ 5. Ветви и деревья

В этом параграфе мы определяем некоторые понятия, приводящие нас в конечном счете к понятиям „полной нормальной ветви" и „полного нормального дерева", которые используются при установлении связи между доказуемостью и общезначимостью. Общий план доказательства аналогичен определенному варианту гёделевского доказательства полноты для функционального исчисления первого порядка: если нам дана некоторая формула первой степени, то мы пытаемся построить древовидное „доказательство" этой формулы, поднимаясь от „заключения" к „посылкам", если каждая ветвь построенного таким образом дерева заканчивается некоторым видом „аксиомы", формула доказуема, если же некоторая ветвь не заканчивается, то мы можем использовать ее для задания модели, в которой данная формула ложна.

5.1. Начнем с определений, требуемых для задания того сорта ветвей и деревьев, который мы используем в нашем методе доказательства.

(1) Под *атомом* мы понимаем фпс, представляющую собой либо пропозициональную переменную P, либо формулу вида $F(x_1, \ldots, x_n)$, либо отрицание одной из таких формул. Атомы разделяются на *положительные* и *отрицательные* в соответствии с тем, начинаются они со знака отрицания или нет.

Следованием является формула, имеющая вид $A \rightarrow B$, а *отрицаемое следование* имеет вид $\overline{A \rightarrow B}$.

Формула A есть *дизъюнктивная часть формулы* B, если и только если A совпадает с B, или существует формула $A \vee C$ или $C \vee A$, которая представляет собой дизъюнктивную часть формулы B.

$\varphi(A)$ есть формула, дизъюнктивной частью которой является A, и $\varphi(B)$ — результат замены A в $\varphi(A)$ на B.

Если A не имеет формы $B \vee C$, то A является *минимальной дизъюнктивной частью* $\varphi(A)$.

(2) Если X есть множество фпс, C — некоторая фпс и Z — последовательность переменных $x_1, \ldots, x_i, \ldots$, то X является *непосредственным редукционным множеством* для C относительно Z в следующих случаях: (i) $X = \{A\}$, $C = A$; (ii) $X = \{A, B\}$, $C = (A \vee B)$; (iii) $X = \{\overline{A}\}$ или $X = \{\overline{B}\}$, $C = \overline{A \vee B}$; (iv) $X = \{\overline{Ax_i}\}$ для некоторого $x_i \in Z$, $C = \overline{\exists x Ax}$; (v) $X = \{Ax_i\}_{x_i \in Z}$, $C = \exists x Ax$.

Если C имеет одну из форм, указанных в (i)—(v), то C называется *сводимой*, но если C представляет собой атом, следование или отрицаемое следование, то C не имеет непосредственного редукционного множества и называется *несводимым*.

(3) Множество X фпс называется *полностью сводимым* относительно Z, если и только если для любого сводимого $A \in X$ существует $Y \subseteq X$, такой, что Y есть непосредственное редукционное множество для A относительно Z.

(4) Следующее понятие аналогично понятию непосредственного редукционного множества. Отрицаемое следование $\overline{A \rightarrow B}$ *непосредственно представлено* в некотором множестве X, если и только если $A \in X$ или $\overline{B} \in X$. Отрицаемое следование $\overline{A \rightarrow B}$ *представлено парным образом* в паре множеств $\{X, Y\}$, если и только если либо хотя бы одно из A и B находится и в X, и в Y, либо A и $\overline{B}$ вместе находятся хотя бы в одном из множеств X, Y.

5.2. Теперь обратимся к понятию „полной нормальной ветви". Узловые точки ветвей будут последовательностями фпс, их нужно понимать как некоторый вид дизъюнкции членов этой последовательности. Для того варианта теоремы Левенгейма—Сколема, который мы хотим доказать, мы допускаем последовательности бесконечной длины, а чтобы избежать некоторых технических трудностей, будем рассматривать только „регулярные" последовательности. Последовательность называется *регулярной*, если и только если (i) каждый элемент ее представляет собой фпс, (ii) каждое следование, встречающееся в качестве правильно построенной части какого-либо элемента, имеет форму $\overline{A} \rightarrow B$, (iii) ни одна переменная не встречается в ней свободно и связанно и (iv) в нее не входит бесконечное количество переменных. Поэтому *регуляризацию* S мы определяем, во-первых, как замену каждой формулы $A \rightarrow B$ из S на формулу $\overline{\overline{A}} \rightarrow B$, а затем для любого i каждое связанное вхождение i-й переменной заменяем на $(3 \cdot i)$-ю переменную и каждое свободное вхождение i-й переменной заменяем на $((3 \cdot i) + 1)$-ю переменную. Ясно, что регуляризация S доказуема в смысле 5.4 в любой из систем EQ, E, RQ или R, если и только если S доказуема, и значима или фальсифицируема в структуре ⟨A, I⟩, если S значима или фальсифицируема в ⟨A, I⟩.

Для того чтобы иметь возможность говорить об определенных формулах и множествах формул, включенных в наши „полные нормальные ветви", мы вводим некоторые дополнительные обозначения; допустим, что $B = S_1, \ldots, S_j \ldots$ есть последовательность регулярных последовательностей фпс; тогда относительно B мы определяем:

Z есть множество переменных, не связанных в S_1;

D_j — множество всех фпс, принадлежащих некоторому $S_{j'}$, причем $j' \leqslant j$;

D — объединение всех D_j;

$E_{(i,j)}$ есть $(i+1)$-е следование в S_j, в котором каждый элемент его левой части либо сводим, либо представляет собой фпс. (Заметим, что $E_{(i,j)}$ может быть неопределенной. Интуитивная идея состоит в том, что для константы i все $E_{(i,j)}$ образуют цепочку в данной ветви — некоторую ветвь внутри ветви, в которой $E_{(i,j+1)}$ служит „посылкой" для $E_{(i,j)}$, точно так же как S_{j+1} служит „посылкой" для S_j. Эти условия наложены для того, чтобы, когда мы строим ветвь снизу вверх, нумеруя следования, не возникало путаницы вследствие присоединения новых следований к левой части уже имеющихся.)

$L_{(i,j)}$ есть множество всех A, таких, что некоторое $E_{(i,j')}$ с $j'=j$ имеет форму $\overline{\varphi(A)} \rightarrow B$ (использование „φ" см. в 5.1 (1));

$R_{(i,j)}$ — множество всех A, таких, что некоторое $E_{(i,j')}$ с $j' \leqslant j$ имеет форму $B \rightarrow \varphi(A)$;

L_i — объединение всех $L_{(i,j)}$;

R_i — объединение всех $R_{(i,j)}$.

„L" и „R" означают „левее" и „правее". Можно заметить в этой связи, что вместо более общего случая мы рассматриваем формулы вида $\overline{A} \rightarrow B$ и поэтому можем давать не дуальные, а совершенно одинаковые трактовки левой и правой частей формул следования.

Теперь можно уточнить условия, при которых последовательность $\mathbf{B} = S_1, \ldots, S_j, \ldots$ является *полной нормальной ветвью* для последовательности S фпс.

(A) S_1 есть регуляризация S.

(B) S_j — конечный элемент **B**, если S_j представляет собой *явную тавтологию* в том смысле, что существует пара атомов A и $\overline{A}$, таких, что имеет место по крайней мере одна из следующих возможностей: A и $\overline{A}$ оба являются элементами S_j; в S_j существует элемент $\overline{B} \rightarrow C$, причем такой, что либо A есть дизъюнктивная часть B, а $\overline{A}$ — дизъюнктивная часть C, либо $\overline{A}$ есть дизъюнктивная часть B, а A — дизъюнктивная часть C.

(C) S_j — конечный элемент **B**, если справедливо следующее: (1) все D_j, $L_{(i,j)}$ и $R_{(i,j)}$ (для каждого i, такого, что $E_{(i,j)}$ определено) полностью сводимы относительно Z; (2) каждое отрицаемое следование в D_j непосредственно представимо в D_j; (3) для каждого i такого, что $E_{(i,j)}$ определено, каждое отрицаемое следование в D_j парным образом представлено в $\langle L_{(i,j)}, R_{(i,j)} \rangle$.

(D) В противном случае:

(0) Если $j = 5n$, то, если каждый элемент S_j несводим, $S_{j+1} = S_j$; в ином случае S_j имеет форму:

$$A_1, \ldots, A_{q-1}, A_q, A_{q+1}, \ldots, A_{q+k}, \ldots,$$

где A_q является самым левым сводимым элементом S_j и где $k = j$, если S_j бесконечна, и S_j имеет $q+k$ элементов, если S_j конечна. Если A_q имеет форму (i) $\overline{\overline{B}}$, (ii) $B \vee C$, (iii) $\overline{B \vee C}$, (iv) $\overline{\exists x Bx}$ или (v) $\exists x Bx$, то S_{j+1} представляет собой результат замены A_q в S_j на (i) B, (ii) последовательность B, C, (iii) либо $\overline{B}$, либо C, (iv) Bx_i, где x_i есть первая в алфавитном порядке переменная в Z, не встречающаяся свободно в S_j, или (v) Bx_i, где x_i есть первая переменная в Z, такая, что Bx_i не встречается в D_j. В случае (v) для получения S_{j+1} нужно также поместить формулу $A_q = \exists x Bx$ справа от A_{q+k}.

(1) [(2)] Если $j = 5n+1$ [если $j = 5n+2$]; пусть f будет некоторой функцией, определенной на положительных числах и принимающей каждое положительное число в качестве значения бесконечное число раз, тогда если $E_{(f(n),j)}$ не определено или имеет форму $\overline{B} \rightarrow C$, причем каждая минимальная дизъюнктивная часть $B[C]$ несводима, то $S_{j+1} = S_j$. В противном случае $E_{(f(n),j)}$ будет такой, что ее антецедент имеет форму $\overline{\varphi(A)}$ [ее консеквент имеет форму $\varphi(A)$], причем A является самой левой сводимой минимальной дизъюнктивной частью $\varphi(A)$.

Если A имеет форму (i) $\overline{\overline{B}}$, (ii) $\overline{B \vee C}$, (iii) $\overline{\exists x Bx}$ или (iv) $\exists x Bx$, то S_{j+1} является результатом замены $\varphi(A)$ в S_j на (i) $\varphi(B)$, (ii) $\varphi(\overline{B})$ или $\varphi(\overline{C})$, (iii) $\varphi(\overline{Bx_i})$, причем x_i есть первая переменная в Z, не свободная в S_j, или (iv) $(\varphi(Bx_i) \vee \exists x Bx)$, причем x_i есть первая переменная в Z, такая, что Bx_i не встречается в $L_{(f(n),j)}$ [не встречается в $R_{(f(n),j)}$].

(3) Если $j = 5n+3$: если каждое отрицаемое следование, которое является элементом S_j, непосредственно представимо в D_j, то $S_{j+1} = S_j$; в противном случае, если $\overline{A \rightarrow B}$ есть самое левое отрицаемое следование в S_j, ко-

торое не будет непосредственно представимо в D_j, то S_{j+1} получается из S_j посредством присоединения либо A, либо B непосредственно справа от $\overline{A \rightarrow B}$.

(4) Если $j = 5n+4$: если для каждого i, $E_{(i,j)}$ определено и каждое отрицаемое следование, являющееся элементом S_j, представимо парным образом в $\langle L_{(i,j)}, R_{(i,j)}\rangle$, то $S_{j+1} = S_j$. В противном случае пусть $\langle k, i\rangle$ будет первой парой чисел (в некотором порядке), такой, что если $\overline{A \rightarrow B}$ есть k-е в алфавитном порядке отрицаемое следование, то $\overline{A} \rightarrow B$ является элементом S_j, $E_{(i,j)}$ определено, а $\overline{A \rightarrow B}$ не представимо парным образом в $\langle L_{(i,j)}, R_{(i,j)}\rangle$. Тогда если $E_{(i,j)}$ имеет форму $\overline{C} \rightarrow D$, то S_{j+1} будет результатом замены $E_{(i,j)}$ в S_j на одну из следующих четырех формул:

$$\overline{C \vee A} \rightarrow D \vee A;\ \overline{C \vee \overline{B}} \rightarrow D \vee \overline{B};\ \overline{C \vee A \vee \overline{B}} \rightarrow D;$$
$$\overline{C} \rightarrow D \vee A \vee \overline{B}.$$

На этом определение понятия „В есть полная нормальная ветвь для S" заканчивается.

5.3. Будем говорить, что полная нормальная ветвь для S *тавтологична* или *не-тавтологична* в зависимости от того, заканчивается ли она или не заканчивается в соответствии с 5.2 (B) явно тавтологичной последовательностью. В связи с последующим параграфом нужно заметить, что если полная нормальная ветвь **B** является нетавтологичной, то (используя обозначения 5.2):

(1) D полностью сводимо относительно Z и множество фпс в D также полностью сводимо относительно Z;

(2) если $A \rightarrow B$ встречается в D, то некоторая $E_{(i,j)}$ имеет форму $A \rightarrow B$;

(3) для каждого i, L_i и R_i—оба полностью сводимы относительно Z;

(4) каждое отрицаемое следование в D непосредственно представимо в D;

(5) для каждого i, такого, что $E_{(i,j)}$ определена для некоторого j, каждое отрицаемое следование в D представимо парным образом в $\langle L_i, R_i\rangle$;

(6) не существует такой пары атомов A и $\overline{A}$, оба члена которой встречаются в D;

(7) ни для какого i и ни для одной пары атомов A и $\overline{A}$ не встречается следующее: $A \in L_i$ и $\overline{A} \in R_i$ или $\overline{A} \in L_i$ и $A \in R_i$;

(8) если S конечна и не содержит кванторов, то **B** конечна.

5.4. Теперь мы докажем лемму, нужную для доказательства полноты интенсиональных логик. Будем говорить, что (возможно, бесконечная) последовательность формул $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ *доказуема* в EQ[E, RQ, R], если и только если существует конечное n, такое, что $\sim \exists x_1 \exists x_2, \ldots \exists x_k \cdot (A_1 \vee \ldots \vee A_n)$ является теоремой EQ[E, RQ, R].

Тогда мы имеем:

Лемма 5.4. *Если каждая полная нормальная ветвь для последовательности* S *фпс тавтологична, то можно конструктивно найти доказательство* S *в* EQ, *а значит, и в* E, *если* S *не содержит кванторов.*

В самом деле, полные нормальные ветви для последовательности S можно расположить в виде дерева—*полного нормального дерева для* S, начинающегося с регуляризации S в качестве нижней точки и раздваивающегося в тех точках, которые удовлетворяют условиям (0-iii), (1-ii), (2-ii) или (3), или разделяющегося на четыре ветви в тех точках, которые удовлетворяют условию (4) определения „полной нормальной ветви" из 5.2. Согласно лемме Кёнига, конечно ветвящееся дерево, каждая ветвь которого заканчивается, само будет конечным. Поэтому мы можем использовать индукцию, принимая в качестве индуктивного предположения гипотезу о том, что теорема верна для всех последовательностей дерева, расположенных ниже n-й точки. Предположим, что S_j есть n-я точка в полном нормальном дереве для S. Если S_j выполняет 5.2 (B), то S_j доказуема на основе соображений, изложенных в работе Белнапа [12] или Андерсона [1]. Если S_j выполняет любое из условий (0)—(4) из 5.2 (D), то методами, изложенными в работе Андерсона [1], можно показать, что соответствующая конъюнкция дизъюнкций, отвечающая первоначальной совокупности точек непосредственно выше S_j (вместе с $B \rightarrow B$, $C \rightarrow C$ и $D \rightarrow D$ в случае (4)), влечет дизъюнкцию, отвечающую совокупности точек S_j. Согласно индуктивной гипотезе, предшествующие дизъюнкции являются теоремами EQ, и, поскольку в EQ имеются правила введения конъюнкции и модус поненс,

S_1 будет доказуема в EQ. Отсюда, по индукции, следует, что и нижняя точка доказуема в EQ. Так как нижняя точка является регуляризацией S, отсюда следует, что S также доказуема в EQ.

Единственным более трудным случаем является 5.2(4), который сводится к некоторому использованию $[(D\&C \to E) \& (D \to E \vee B) \& (E \to E) \& (D \to D) \& (B \to B)] \to (\overline{B \to C} \vee (D \to E))$. Последнее выражение сводится к $[(D \& C \to E) \& (D \to E \vee B) \& (E \to E) \& (D \to D) \& (B \to C)] \to (D \to E)$. Используя технику работы Белнапа [9, с. 87], мы можем дать набросок доказательства последнего выражения следующим образом:

1.	$D \& C \to E$	гипотеза;
2.	$D \to E \vee B$	гипотеза;
3.	$E \to E$	гипотеза;
4.	$D \to D$	гипотеза;
5.	$B \to C$	гипотеза;
6.	$E \& D \to D \vee E$	из 4;
7.	$E \& D \to C \vee E$	из 3;
8.	$B \& D \to D \vee E$	из 4;
9.	$B \& D \to C \vee E$	из 5;
10.	$(E \& D) \vee (B \& D) \to (D \vee E) \& (C \vee E)$	из 6—9;
11.	$(E \vee B) \& D \to (D\&C) \vee E$	из 10, дистрибутивность.
12.	$D \to (E \vee B) \& D$	из 2 и 4;
13.	$(D\&C) \vee E \to E$	из 1 и 3;
14.	$D \to E$	из 11—13, транзитивность.

Следовательно, конъюнкция гипотез влечет заключение $D \to E$.

Вторую часть этой леммы можно доказать посредством ссылки на тот факт, что аппарат квантификации EQ не нужен, если S_j не содержит кванторов.

5.5. Для той части основной теоремы, в которой речь идет о непротиворечивости, нужна лемма, формулировка которой требует распространения семантических понятий на последовательности формул: для данной полной интенсиональной модели $Q = \langle A, I, s \rangle$ мы устанавливаем, что последовательность S фпс *истинна в* Q, если и только

если некоторый член S истинен в Q, то есть если некоторый член S принадлежит T_Q. Тогда S *значима в* A, если и только если она истинна в каждой $\langle A, I, s \rangle$.

Лемма 5.5. *Если каждая полная нормальная ветвь для последовательности S тавтологична, то S значима в каждой полной интенсиональной решетке.*

При доказательстве этой леммы заметим, что S_1, являющаяся регуляризацией S, значима в интенсиональной решетке, если и только если S значима; после этого достаточно рассмотрения случаев использования индукции, аналогичной индукции в 5.4.

§ 6. Критические модели

Этот параграф мы посвящаем лемме, связывающей определенные полные интенсиональные модели с не-тавтологичными полными нормальными ветвями; эта лемма является центральной, так как используется в основной теореме и в связи с непротиворечивостью, и в связи с полнотой.

6.1. Для каждой не-тавтологичной ветви **B** мы можем определить интенсиональную модель, в которой члены **B** одновременно фальсифицируемы. Для этой цели введем сначала определенные подмножества M_0, которые будут играть в дальнейшем важную роль:

$$I_{+1} = \{+1, -1, +0, -3\};\ I_{+2} = \{+2, -2, +0, -3\};$$
$$F_0 = \{-0, -1, -2, -3\}.$$

Интенсиональная модель, детерминируемая не-тавтологичной полной нормальной ветвью **B**, определяется как полная интенсиональная модель $Q = \langle M^c, I, s \rangle$, в которой c является наименьшим числом, большим, чем любое i, такое, что $E_{(i, j)}$ определено для некоторого j (а M^c таково, как в 3.2), I есть множество положительных чисел, а функция приписывания s определена в терминах **B** следующим образом (обозначения те же, что и в 5.2).

Если x есть i-я переменная в Z, то $s(x) = i$, и если $x \notin \mathbf{Z}$, то $s(x) = 1$.

Для каждой пропозициональной переменной p, $s(p) = a = \{a_i\}_{i<c}$ $(a \in M^c,\ a_i \in M_0)$, причем $p = A$ и для всякого $i \leqslant c$, a_i есть наименьший член M_0, выполняющий условия (1)—(6), приведенные ниже.

$^{1}/_{2}$12№ 1112

Для каждой n-арной функциональной переменной F, $s(F)$ есть та функция от n-ок членов I в M^c, которая включает n-ку $\langle j_1, \ldots, j_n\rangle$ в $a=\{a_i\}_{i<c}$, причем если x_{j_k} $(1 \leqslant k \leqslant n)$ есть j_k-я переменная в Z и $F(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})=A$, то для всякого $i<c$, a_i есть наименьший член M_0, выполняющий условия (1)—(6), изложенные ниже.

(1) Если $A \in L_i$, то $a_i \in I_{+1}$; (2) если $\overline{A} \in L_i$, то $Na_i \in I_{+1}$; (3) если $A \in R_i$, то $a_i \in I_{+2}$; (4) если $\overline{A} \in R_i$, то $Na_i \in I_{+2}$; (5) если $A \in D$, то $a_i \in F_0$; (6) если $\overline{A} \in D$, то $Na_i \in F_0$.

Очевидно, что $c \leqslant \aleph_0$.

Ясно, что существует, самое большее, одна такая модель, детерминируемая любой не-тавтологичной ветвью **B**; что по крайней мере одна такая модель существует, следует из того факта, что приписывание i-й координаты $s(A)$ на основе (1)—(6) могло бы привести к противоречию только в одном случае: если бы имело место либо $A \in L_i$ и $\overline{A} \in R_i$, либо $\overline{A} \in L_i$ и $A \in R_i$, либо $A \in D$ и $\overline{A} \in D$. Но эти возможности исключены вследствие 5.3 (6) и 5.3 (7).

Пусть $v_Q^i(A)$ будет i-й координатой (в M_0) $v_Q(A)$ (bM^c).

6.2. Прежде чем перейти к доказательству того, что модель, детерминируемая не-тавтологичной ветвью **B**, обладает нужными свойствами, мы введем некоторые новые понятия и отметим некоторые факты.

Множество Y фпс является *наследственным* относительно Z, если и только если для всякой фпс A и множества фпс X, если X представляет собой непосредственное редукционное множество для A относительно Z (см. 5.1 (1)) и если $X \subseteq Y$, то $A \in Y$.

Очевидным следствием наших определений является следующее: если (i) каждая несводимая фпс из X (см. 5.1 (2)) находится в Y, если (ii) X полностью сводимо относительно Z (см. 5.1 (3)) и если (iii) Y является наследственным относительно Z, то $X \subseteq Y$.

Этот факт мы будем использовать неоднократно в ходе доказательства, показывая, что (i)—(iii) справедливы для определенных X и Y, и заключая затем, что $X \subseteq Y$.

Впоследствии мы будем использовать также тот факт, что определенные множества являются наследственными. Пусть $Q=\langle A, I, s\rangle$ будет некоторой интенсиональной моделью, а Z — множеством переменных, таким, что для всякого $i \in I$ существует $x \in Z$, для которого $s(x)=i$. Пусть **B** будет *полным идеалом* в A в том смысле, что если $C \subseteq A$, то $C \subseteq B$, если и только если $\bigvee C \in B$. Тогда множество фпс A, такое, что $v_Q(A) \in B$, будет наследственным относительно Z. Отсюда непосредственно следует, что если $Q=\langle M^c, I, s\rangle$ детерминировано не-тавтологичной ветвью **B** (как в 6.1), то следующие множества будут наследственными относительно Z: множества фпс A, для которых либо $v_Q^i A \in I_{+1}$, либо $v_Q^i(A) \in I_{+2}$, либо $v_Q^i \in F_0$, так как I_{+1}, I_{+2} и F_0 — все являются полными идеалами в M_0. И также легко убедиться в том, что F_Q наследственно относительно Z.

6.3. Теперь мы можем доказать следующее.

Лемма 6.3. *Пусть* **B** *будет не-тавтологичной полной нормальной ветвью для последовательности* S и пусть $Q=\langle M^c, I, s\rangle$ *будет интенсиональной моделью, детерминированной* **B**, тогда $D \subseteq F_Q$, то есть члены всякого S_i из **B** *одновременно фальсифицируемы* в Q.

Предположения этой леммы мы обозначаем как „(H)“ и продолжаем использовать обозначения из 5.2.

(1) Если (H) и если A есть фнс из D, то для каждого $i<c$ $v_Q^i(A) \in F_0$. Действительно, справедливость этого свойства для атомов можно усмотреть непосредственно из 6.1(5) и 6.1(6). Согласно 5.3 (1), множество фнс из D полностью сводимо, а согласно 6.2, обсуждаемое свойство является наследственным, поэтому заключение леммы следует из 6.2.

(2) Если (H), то для всякого $i<c$ $A \in L_i$ влечет $v_Q^i(A) \in F_0$ и $A \in R_i$ влечет $v_Q^i(A) \in I_{+2}$. Справедливость этого для атомов вытекает непосредственно из 6.1(1) (4). Поскольку, согласно 5.3 (3), L_i и R_i — оба полностью сводимы относительно Z и поскольку, согласно 6.2, эти свойства являются наследственными относительно Z, постольку заключение леммы получается на основе 6.2.

(3) Если (H), то для каждого $i<c$ и каждого j, такого, что $E_{(i,j)}$ определено, $E_{(i,j)} \in F_Q$. Сначала заметим, что каждое $E_{(i,j)}$ будет иметь форму $\overline{A} \to B$. Так как в этом случае $A \in L_i$ и $B \in R_i$, мы получаем, согласно приведенному выше (2), что $v_Q^i(A) \in I_{+1}$ и $v_Q^i(B) \in I_{+2}$. Затем рассмотрение свойств M_0 показывает, что $v_Q^i(\overline{A}) \not\leqslant v_Q^i(B)$, поэтому $v_Q(\overline{A}) \not\leqslant v_Q(B)$. Следовательно, $(\overline{A} \to B) = E_{(i,j)} \in F_Q$.

(4) Если (H) и если $\overline{A \to B} \in D$, то $\overline{A \to B} \in F_Q$. Очевидно, достаточно показать, что $(A \to B) \in T_Q$; это обосновывается обнаружением того факта, что для каждого $i \leqslant c$ $v^i_Q(A) \leqslant v^i_Q(B)$. Согласно 5.3 (4) и (5), $\overline{A \to B}$ должно быть непосредственно представимо в D и парным образом представимо в $\langle L_i, R_i \rangle$ для $i < c$; рассматривая для каждого $i < c$ восемь различных случаев (см. 5.1 (4)), в которых это может произойти, мы можем показать, что $v^i_Q(A) \leqslant v^i_Q(B)$. Рассматривая один из этих случаев в качестве примера, предположим, что $A \in D$ и $\overline{B}$ находится одновременно в L_i и в R_i. Затем, согласно пункту (2), изложенному выше, $v^i_Q(\overline{B}) \in (I_{+1} \cap I_{+2})$, поэтому $v^i_Q(B) \in \{-0, +3\}$. Согласно пункту (1), изложенному выше, $v^i_Q(A) \in F_0$, поэтому доказательство того, что $v^i_Q(A) \leqslant v^i_Q(B)$ требует лишь рассмотрения свойств M_0, из которого мы заключаем, что $a \in F_0$ и $b \in \{-0, +3\}$ достаточно для $a \leqslant b$.

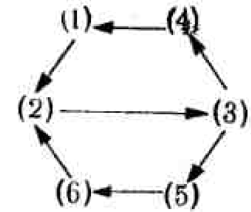
Обратившись теперь к доказательству леммы, предположим, что (H), тогда, согласно (4), все отрицаемые следования из D находятся в F_Q и, согласно (1), все фпс из D также находятся в F_Q. Далее, пункт (3) совместно с 5.3 (2) влечет, что каждое следование из D находится в F_Q, так что все несводимые фпс из D находятся в F_Q. Поэтому, поскольку D полностью сводимо относительно Z (согласно 5.3(1)) и поскольку F_Q является наследственным относительно Z (согласно 6.2), постольку на основании 6.2 следует, что $D \subseteq F_Q$.

§ 7. Основные теоремы

В этом коротком параграфе мы объединяем все ранее доказанные леммы для доказательства эквивалентности шести важных свойств.

7.1. *Последовательности, содержащие кванторы.* Первая теорема выражает главный результат в форме общей теоремы об эквивалентности, из которой в качестве следствия выводится дополнительный результат. Схема доказательства эквивалентности свойств, перечисленных в формулировке теоремы, выражается следующей диаграммой (следует обратить внимание на двойное использование импликации от (2) к (3), которая является содержанием

леммы 6.3):



Теорема. *Для данной счетной последовательности* S *первопорядковых формул следующие утверждения эквивалентны:*

(1) S *значима.*

(2) S *значима в каждой интенсиональной структуре* $\langle M^c, I \rangle$, в которой $c \leqslant \aleph_0$ и I *есть множество положительных чисел.*

(3) S *не имеет не-тавтологичной полной нормальной ветви.*

(4) S *значима в каждой полной интенсиональной структуре.*

(5) S *доказуема* в EQ.

(6) S *доказуема* в RQ.

Доказательство. Поскольку для каждой M^c с $c \leqslant \aleph_0$, согласно лемме 3.2, существует пропозициональная решетка P^c, изоморфная M^c, постольку, если бы S была фальсифицируема в $\langle M^c, I \rangle$, она была бы также фальсифицируема и в $\langle P^c, I \rangle$, поэтому, по контрапозиции, (1) влечет (2). То, что (2) влечет (3), можно усмотреть из контрапозиции леммы 6.3 и того факта, что регуляризация S фальсифицируема в некоторой структуре тогда и только тогда, когда в этой структуре фальсифицируема S. То, что (3) влечет (4), есть содержание леммы 5.5. И наконец, то, что (4) влечет (1), гарантировано предположением 1 теории суждений (§ 3.1). Поэтому (1)—(2)—(3)—(4) эквивалентны друг другу.

Как мы заметили выше, (2) влечет (3) по лемме 6.3, а согласно лемме 5.4, (3) влечет (5). Совершенно очевидно, что (5) влечет (6), так как RQ получается добавлением некоторой аксиомы к EQ, то, что (6) влечет (2), есть содержание леммы 4.2. Поэтому (2)—(3)—(5)—(6) эквивалентны друг другу. Следовательно, все утверждения (1)—(6) эквивалентны.

То обстоятельство, что (1) влечет (5) и (6), выражает *полноту* первопорядковых фрагментов EQ и RQ, а то, что и (5), и (6) влечет (1), свидетельствует о *непротиворечивости* этих фрагментов.

То обстоятельство, что отрицание (1) (или, может быть, (4)) влечет отрицание (2), равнозначно соответствующему варианту *теоремы Левенгейма—Скулема* для интенсиональной логики: если некоторое множество фпс фальсифицируемо, то оно фальсифицируемо и в полной интенсиональной структуре ⟨A, I⟩, в которой I счетно и A порождено счетным множеством.

Следующий результат мы получаем в качестве следствия.

Следствие (теорема вложения). *Каждая не более чем счетная интенсиональная решетка изоморфна некоторой подрешетке* M^c *для некоторого* $c \leqslant \aleph_0$, *а также некоторой подрешетке решетки* P^c, *порождаемой не более чем счетным множеством независимых генераторов.*

Вторая часть этого следствия является непосредственным следствием алгебраического содержания леммы 3.2. Для доказательства первой части данного следствия предположим, что у нас есть не более чем счетная интенсиональная решетка A. Рассмотрим ее *инверсную диаграмму* — ID(A), задаваемую следующим образом. Сначала упорядочим члены A; и для i-го члена A — a — пусть $f(a)$ будет i-й пропозициональной переменной. После этого для a, $b \in A$ мы устанавливаем, что $\overline{f(a) \rightarrow f(b)}$ находится в ID(A), если и только если $a \leqslant b$, а $f(a) \rightarrow f(b)$ находится в ID(A), если и только если $a \nleqslant b$. Тогда тривиально, что ID(A) одновременно фальсифицируема, поэтому, согласно теореме 4, она также одновременно фальсифицируема и в некоторой $Q = \langle M^c, I, s\rangle$, где $c \leqslant \aleph_0$. (Мы можем пренебречь I.) В таком случае функция $s(f(a))$ из A в M^c является, очевидно, гомоморфной, и тот факт, что $s(f(a)) = s(f(b))$ влечет $a = b$, представляет собой следствие того, что все члены ID(A) ложны в Q и что если $f(a) \rightarrow f(b)$ не находится в ID(A), то $\overline{f(a) \rightarrow f(b)}$ находится в ID(A). Поэтому $s(f(a))$ есть изоморфизм.

7.2. *Последовательности, не содержащие кванторов.* Вторая основная теорема строго аналогична первой, за исключением того, что она относится к последовательностям фпс, не содержащим кванторов.

Теорема 2. *Для данной последовательности* S *первопорядковых формул, не содержащих кванторов, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) S *значима.*

(2) S *значима в* M^c *с числом с вхождений знака* $\rightarrow$ *в* S.

(3) S *не имеет не-тавтологичной полной нормальной ветви.*

(4) S *значима в каждой полной интенсиональной решетке.*

(5) S *доказуема в* E.

(6) S *доказуема в* R.

Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что для формул, не содержащих кванторов, понятие интенсиональной модели можно обобщить так, что в некоторой интенсиональной модели $Q = \langle A, I, s\rangle$ A не обязательно должно быть полным, так как требование полноты используется, конечно, только в связи с кванторами. Поэтому для S, не содержащих кванторов, мы могли бы опустить слово „полный" в утверждении (4) и получить утверждение:

(4*) S значима в каждой интенсиональной решетке.

Изменив аналогичным образом (1), мы получим:

(1*) S значима в каждой пропозициональной решетке.

Доказательство. Доказательство того, что (1) или (1*) влечет (2), является точно таким же, как доказательство теоремы 1. Мы показываем, что (2) влечет (3), рассуждая по контрапозиции: предположим отрицание (3), то есть допустим, что некоторая полная нормальная ветвь для S не-тавтологична; пусть это будет **B**. Тогда S фальсифицируема в интенсиональной модели $Q = \langle M^c, I, s\rangle$, детерминируемой **B**, где c, согласно 6.1, является наименьшей верхней границей для i во всех определенных $E_{(i, j)}$ при всех изменениях j. Поскольку $E_{(i, j)}$ всегда определена как некоторое следование (если она вообще определена), постольку для фиксированного j наименьшая высшая грань для i во всех определенных $E_{(i, j)}$ не должна превосходить общего числа вхождений в S_j знака $\rightarrow$. Анализ процесса регуляризации и порождения ветвей, изложенного в 5.2, показывает, что для S, не содержащей кванторов, число вхождений знака $\rightarrow$ никогда не увеличивается при переходе от S к S_1 и от S_j к S_{j+1} в полной нормальной ветви для S, поэтому число вхождений знака

$\rightarrow$ в S является верхней границей для c. Но вследствие того, что фальсифицируемость S в M^c, очевидно, влечет фальсифицируемость S в $\langle M^{c'} \rangle$, если c' не меньше c, мы получаем требуемое отрицание (2). (Однако если S содержит кванторы, то случай (v) из 5.2(0) может привести к возрастанию числа вхождений знака $\rightarrow$ при переходе от S_j к S_{j+1}; см. последнее предложение из 5.2(0). Заметим, что это возрастание обусловлено только квантифицированными следованиями, а не следованиями между кванторами.)

То, что (3) влечет (4), есть содержание леммы 5.5; небольшая модификация леммы 5.5 показывает, что (3) влечет также (4*). И то, что (4) влечет (1) и (4*) влечет (1*), снова гарантируется предположением 1, поэтому (1)—(1*)—(2)—(3)—(4)—(4*) эквивалентны друг другу.

Выше мы показали, что (2) влечет (3). То, что (3) влечет (5), является частью содержания леммы 5.4. То, что (5) влечет (6), тривиально, так как R получается из E посредством добавления некоторой аксиомы, и то, что (6) влечет (2), снова вытекает из леммы 4.2. Поэтому (2)—(3)—(5)—(6) и соответственно (1)—(6) все эквивалентны.

То, что из (1) или (1*) следует (5) и (6), есть выражение *полноты* первопорядковых фрагментов систем E и R, в то время как следование (1) и (1*) из (5) или (6) выражает их непротиворечивость.

Тот факт, что отрицание (1) (а может быть, (4) или одного из вариантов, отмеченных звездочкой) влечет отрицание (2), равнозначен некоторому варианту *теоремы Левенгейма—Скулема* для интенсиональной пропозициональной логики: если множество фпс, не содержащее кванторов, фальсифицируемо, то оно фальсифицируемо в интенсиональной решетке, порождаемой счетным множеством.

В качестве важнейшего следствия теоремы 2 мы получаем процедуру разрешения для установления значимости и (равнозначно) доказуемости конечного S.

Следствие. *Если последовательность* S *бескванторных формул первой степени конечна, то существует механический способ установления того, является ли* S *значимой и (что эквивалентно) доказуемой в* E *или* R.

Из двух процедур, которые мы даем, первая носит более семантический, а вторая — более синтаксический характер. Во-первых, из теоремы 2 следует, что можно проверить значимость S в M^c, где c является числом вхождений в S знака $\rightarrow$. M^c, несомненно, будет конечным, так что процесс проверки всех возможных моделей $\langle M^c, I, s \rangle$ (в которых I может быть произвольным, так как оно не играет роли) должен закончиться. Во-вторых, можно построить полное нормальное дерево для S. Согласно лемме Кёнига, это дерево будет конечным, так как по 5.3 (8) конечна каждая его ветвь; поэтому можно просто проверить, является ли каждая ветвь тавтологичной, — эта процедура устанавливается теоремой 2. При этом вполне понятно, что S может состоять из отдельной бескванторной формулы A, и у нас, таким образом, есть процедура разрешения для первостепенных фрагментов E и R.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson A. R. Completeness theorems for the systems E of entailment and EQ of entailment with quantification.— „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“, vol. 6, 1959, p. 201—216.

2. Anderson A. R. Some open problems concerning the system E of entailment.— "Acta Philosophica Fennica", fasc. 16. Helsinki, 1963.

3. Anderson A. R. and Belnap N. D. A modification of Ackermann's "rigorous implication" (abstract).— "Journal of Symbolic Logic", vol. 23, 1959, p. 457—458.

4. Anderson A. R. and Belnap N. D. Jr., Enthymemes.— "The Journal of philosophy", vol. 58, 1961, p. 713—723.

5. Anderson A. R. and Belnap N. D. Jr., The pure calculus of entailment.— "Journal of Symbolic Logic", vol. 27, 1961a, p. 19—52.

6. Anderson A. R. and Belnap N. D. Jr., Tautological entailment.— "Philosophical studies", vol. 13, 1961b, p. 9—24.

7. Anderson A. R. and Belnap N. D. Jr., Entailment with negation.— „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“, vol. 11, 1965, p. 277—289.

8. Anderson A. R. and Belnap N. D. Jr., First degree entailment.— "Mathematische Annalen", vol. 149, 1963, p. 302—319.

9. Belnap W. D. Jr., A formal analysis of entailment,— "Technical Report", № 7, Contract No. SAR/Nonr—609(16), Office of Naval Research (Group Psychology Branch), New Haven, 1960.

10. Belnap N. D., Jr., Entailment and relevance.— "Journal of Symbolic Logic", vol. 25, 1960, p. 388—389.

11. Belnap N. D., Jr., First degree formulas (abstract).— "Journal of Symbolic Logic", vol. 25, 1960b, p. 388—389.

12. Belnap N. D., Jr., EQ and the first order functional calculus.— „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik“, vol. 6, 1960c, p. 217—218.

13. Belnap N. D., Jr. and Spencer J. H. Intensionally complemented distributive lattices.— "Portugalias Mathematica", forthcoming.
14. Church A. The weak theory of implication.— "Kontrolliertes Denken". Munich, 1951.
15. Curry H. B. Foundations of mathematical logic. Mc Graw-Hill, New York, 1963.
16. Moh Shaw-Kwei. The deduction theorems and two new logical systems.— "Methods", vol. 2, 1950, p. 56—75.
17. Prawitz D. Normal deductions, presented to the Association for Symbolic Logic. Hotel New Yorker, April 21, 1964.

Р. Роутлей, Р. Мейер

СЕМАНТИКА СЛЕДОВАНИЯ *

Было время, когда модальные логики „не имели семантики". Введя реальный мир G, множество миров K и отношение R относительной возможности между мирами, Саул Крипке рассмотрел эту ситуацию и, заметив, что формально она объяснима, создал модельные структуры. Вскоре оказалось, что почти каждый начал создавать модельные структуры, причем одни из них были деонтическими, другие — временными, третьи — эпистемическими, в зависимости от условий, накладываемых на бинарное отношение R.

Однако ни одна из модельных структур, которые создавали Крипке, Хинтикка, Томасон или их соратники и коллеги, не была релевантной. Это вызывало большую печаль в городе Питтсбурге, где обитают капитаны американской индустрии. Логика индустрии была представлена Андерсоном, Белнапом и К° — исследователями выводимости, ужасов материальной импликации, строгой импликации и всего того, к чему приводит их ложность или противоречивость. Почти каждый год компания "Андерсон & Белнап" выпускала новую логику, называя ее E, R, $E_{\overline{I}}$ или P—W, и она анализировала эти логики и называла их релевантными. И многими эти логики принимались благосклонно, так как они выражали интуицию, но еще больше людей относилось к ним пренебрежительно за то, что они не имели семантики.

---

* Routly R., Meyer R. The Semantics of Entailment.— "Truth, Syntax and Modality" (ed. by H. Leblanc). Amsterdam — London, 1973, p. 199—243.

Да, Андерсон и Белнап создавали логики без семантики. Одни удивлялись и радовались[1] тому, что некоторая Истинная Логика могла появиться среди нас в чисто синтаксической форме, не обремененная никаким теоретико-множественным грузом. Другие говорили, что релевантные логики являются лишь синтаксическими. Исследовавший эту ситуацию Р. Роутлей и совершенно независимо от него Уркварт нашли экспликацию ключевого понятия релевантной импликации. Основываясь на работе Роутлея [1972] и используя помощь наших друзей, в частности Данна и Уркварта, а также Андерсона, Белнапа, В. Роутлея и Вудраффа, мы развили это понимание для того, чтобы представить здесь формальные семантики для системы R релевантной импликации и дать доказательства непротиворечивости и полноты относительно этих семантик.

В развитых здесь семантиках центральным является *тернарное* отношение R, которое в релевантных логиках занимает место крипкевского бинарного отношения для стандартных модальных и интуиционистской логик. В последующей работе мы покажем, как посредством изменения постулатов для R обычно получают другие релевантные логики, в частности систему E Андерсона и Белнапа, систему P отмеченного следования и аккермановскую систему *строгой импликации*[2]. На этот раз мы присоединяем к R, развитой в работе Мейера [1968], теорию следования посредством явного добавления к R модального оператора льюисовского типа[3]. Поскольку *модальной* частью теорий следования Аккермана—Андерсона—Белнапа является, в сущности, S4, в то время как *релевантная* часть опирается на новые идеи, постольку существенно новым в развитых здесь семантиках будет трактовка основополагающей системы R, а понятие необходимости будет проанализировано аналогично крипкевскому анализу S4 в работе Крипке [1963]. Следует заметить, что в своей импликативной части (слабая теория импликации R_I Чёрча) R является старейшей из релевантных логик и, возможно, наиболее естественно мотивированной. Расширения R (R-смешение Данна) и его позитивного фрагмента R^+ (позитивная логика, интуиционистская логика) подпадают под наше рассмотрение, и им будет дана соответствующая трактовка.

Рассмотрим обычное в английской литературе представление бинарного отношения R Крипке. HRH_1 "говорит", что „мир" H_1 возможен относительно мира H. Можно предложить интересное тернарное обобщение: HRH_1, H_2, которое говорит, что „миры" H_1 и H_2 *со-возможны* (или, может быть, *совместимы*) относительно H. (Это чтение предложено Данном.) На „мирах" мы не будем задерживаться, так как используем терминологию работы Роутлея [1972], для того чтобы говорить о „конструкциях", а не о „мирах", указывая тем самым, что имеем дело с тем, что не обязательно реализовано или даже реализуемо в любом обычном смысле. (Мы думаем, что логика должна охватывать даже *экстраординарный* смысл, чтобы оправдывать как физику, так и философию и поэзию). Чтобы учесть некоторые интуитивные соображения, придающие философский интерес релевантным логикам, мы могли рассматривать конструкции не только как обычные миры, но также и как системы убеждений (не обязательно непротиворечивых). Эти системы убеждений могут представлять собой комбинации некоторого закона с сообщениями наблюдения, описывающими возможные ситуации. Здесь мы не будем обсуждать вопрос о том, принадлежит ли понятие конструкции онтологии, эпистемологии или, быть может, только психологии[1].

---

[1] Основополагающим пунктом является, конечно, то, что имеется много путей формальной экспликации неформальных логических и математических понятий и что имеет значение множество аксиом. Это делают матрицы, правила для натуральной дедукции, соответствующие алгебраические структуры и т. д., которые ранее были предложены для релевантных логик. Новизна настоящего подхода, как считает Белнап, состоит в том, что он, подобно крипкевской семантической редукции модальной логики, дает экстенсиональное—истинностно-функциональное в существенном смысле—понимание релевантной логики. Почему именно этот вид понимания оказывается особенно привлекательным—это дело *психологии* логики, в которой мы явно некомпетентны; действительно, даже чисто технические проблемы выглядят гораздо более легкими, см., например, § 8 данной статьи.

[2] P была переименована в T в работе Андерсона и Белнапа [1972], в которой см. формулировки всех упоминаемых здесь логик.

[3] Семантики для NR мы развиваем в продолжении данной статьи, опубликованной в: "The Journal of Philosophical Logic", 1972, vol. 1, № 1, 2.

[1] То же самое можно, конечно, сказать о возможном мире в семантиках льюисовских модальных логик. Но наш коллега Н. Кокьярелла в идеях, подобных представленной здесь, находит скорее эпистемологическую, чем онтологическую ориентацию; мы не столь уве-

Согласно развиваемым здесь интуитивным соображениям, две конструкции совместимы относительно третьей при условии, что всегда, когда предложения A и B имеют место соответственно в первой и второй конструкции, предложение C, которое прямо утверждает, что A и B совместимы, имеет место в третьей конструкции. [Данн приводит стандартную модель, аналогичную модели Крипке: некоторый мир возможен относительно другого при условии, что всегда, когда A справедлива в первом мире, предложение, утверждающее, что A возможно, — а именно $\Diamond$A, — справедливо во втором.]

Чтобы облегчить понимание постулатов и доказательств, мы изменим обозначения, которые известны читателю, знакомому с работами Крипке. В дальнейшем для обозначения конструкций мы вместо H, H_1 и т. д. употребляем a, b, c и т. д. Мы отказываемся также от старого способа записи; Rabc будет теперь утверждать, как мы установили неформально, что a и b совместимы относительно c[1]. Мы также вводим бинарную связь совместимости «A ∘ B», читаемую как «A совместимо с B»[2].

Если исследовать синтаксический аналог нормальных модальных семантик, модельные структуры Крипке можно рассматривать просто как содержащие в качестве своих элементов непротиворечивые и полные теории. Наши модельные структуры при исследовании их синтаксического аналога также будут содержать теории в качестве элементов. Но как в работе Роутлея [1972], так и с точки зрения наших предыдущих замечаний рассмотрение релевантности заставляет нас трактовать теории не-нормально с классической точки зрения. Класс теорий, на которые мы будем обращать внимание, будет настолько нормальным, насколько это возможно; его членами будут *первичные интенсиональные теории*. Помимо того, что в некотором смысле эти теории замкнуты по следованию, они будут непротиворечивыми и полными теориями относительно *конъюнкции* и *дизъюнкции*, как и классические теории.

рены в этом, но в данном случае оставляем этот философский вопрос без рассмотрения.

[1] *c*R*ab* в старой записи.

[2] Аналогом знака « ∘ », восходящего к работе Чёрча (1951), является $0R_1$; рассматривалась ли эта связка как совместимость, сопоставимость, интенсиональный вид конъюнкции или просто как некоторая операция в соответствующих алгебраических структурах, она оказалась весьма полезной; см., например, работу Мейер и др. [1972].

С другой стороны, *отрицание*, как в работе Роутлея [1972] и в предыдущих работах Данна, Белнапа и других, требует допущения теорий, являющихся противоречивыми, неполными или одновременно противоречивыми и неполными. Как и выше, оправдание этому может быть найдено в контекстах веры, в оценочных контекстах или даже в тех крайних случаях (например, парадокс Рассела), когда мы можем выбрать явное противоречие или когда никак (например, в аксиоматизированной арифметике) не можем добиться полноты. Тем не менее мы спасаем здесь нечто подобное привычной рекурсивной трактовке отрицания посредством различения строгого и слабого способов утверждения предложения A в данной конструкции. Строгий способ состоит в утверждении A, слабый — опускает утверждение A. Для каждой конструкции a это порождает дополнительную конструкцию a^*, такую, что строго утверждаемое в a слабо утверждается в a^*, и наоборот. Требуемый рекурсивный пункт тогда говорит, что $\overline{A}$ имеет место в a только в том случае, если A не имеет место в a^*; читатель заметит, что при нормальных обстоятельствах, когда мы утверждаем именно то, чего не отрицаем, a и a^* совпадают и значение отрицания сводится к обычному.

Релевантная импликация, хотя и является центром проблемы, получает свою характеристику через отрицание и совместимость, и A релевантно влечет B только в том случае, когда A и $\overline{B}$ *несовместимы*. Как оказывается (при фиксированной интерпретации нашего формального языка), A релевантно влечет B в конструкции c только в том случае, когда для всяких конструкций a и b, всегда, когда Rcab и A имеет место в a, B имеет место в b[1].

Реальный мир играет особую роль в наших семантических постулатах. (Поэтому мы будем обозначать его как 0, а не как G; 0 не только *выглядит* лучше [он напоминает *математическую* семантику], но и указывает на то, что он будет исполнять формальную роль тождества.) 0 необходимо выделять по следующим причинам: логические истины *не* являются *истинами* во всех конструкциях; стратегия, способная справиться с парадоксами, состоит

[1] В более слабых системах, таких, как E и T, мы будем использовать это условие для характеристики тернарного отношения достижимости R.

в том, что даже логическим тождествам разрешается иногда быть ложными. (В конце концов, что может быть лучшим основанием для отрицания того, что q влечет $p \rightarrow p$, чем допущение, что q может быть истинно тогда, когда, по существу на основе релевантности, $p \rightarrow p$ ложно?) [1]

Чем тогда является логическая истина? Конечно, истиной во всех конструкциях, *в которых все логические истины истинны!* (Это никоим образом не тавтология; возможно, что некоторая случайная не-логическая истина может пройти через все конструкции, в которых верифицированы все логические истины.) Откровенно говоря, рассматривая в качестве кандидатов на место реального мира только такие конструкции, в которых верифицированы все логические истины, мы лишь выдаем этим свою логическую ограниченность, так как для логиков они истины, которыми мы хотим характеризовать нашу формальную семантику. Наша семантика, конечно, требует от физика или экономиста *рассуждать* корректно в том смысле, что он должен использовать значимые *аргументы*, но физик *в качестве физика* столь же нужен для утверждения законов логики, как логик *в качестве логика* нужен для утверждения третьего закона термодинамики. (Таким образом, мы реконструировали определенный параллелизм между логиками и физиками; мнение о том, что физик имеет дело только со второсортными [при некотором подходе — с первосортными] истинами, ибо можно вообразить или по крайней мере представить формально, что его законы ложны, в то время как законы логики всегда истинны, обусловлено лишь недостатком воображения.)

Пожалуй, уже достаточно общих разъяснительных замечаний. Последующее формальное изложение является, конечно, независимым от них и может быть использовано для обоснования изменчивых неформальных интуитивных соображений. Главным в последующем изложении будут доказательства семантической непротиворечивости и полноты пропозициональной логики релевантной импликации R. Многочисленные применения основного результата состоят или в новых ответах, или в открытии простых доказательств проблем того рода, о котором говорится в работе Андерсона [1963]. Характеристика *нормальной* значимости, например, показывает, что множество теорем

[1] В дополнение к последующим замечаниям см. § 4 данной статьи.

R замкнуто по правилу отделения для *материальной* импликации — основной результат работы Мейера и Данна [1969]; опираясь на работу Мейера [1972 a, b], мы показываем, кроме того, что R *хорошо аксиоматизируема* в том смысле, что в общем ее фрагменты, полученные устранением некоторых связок, могут быть получены из аксиом, в которых устраненные связки не встречаются (детали см. в § 10); аналогично расширение нашего доказательства полноты на систему RM Данна — Мак-Колла проливает некоторый свет на результаты, полученные Мейером и рассмотренные в алгебраической форме в работе Данна [1970]. Теория моноидов Де-Моргана, развитая Данном в его диссертации (Питтсбургский университет, 1966) для представления алгебраического аналога системы R и суммированная в работе Мейера и др. [1962], во многих пунктах связывается с нашей семантикой, и для нее указана полезная теорема о погружении типа Стоуна. Введена теория суждений и использована для наброска расширения данной семантики на систему RP релевантной импликации Андерсона — Белнапа с пропозициональными кванторами, представленную в работе Андерсона [1972]; аналогичное расширение предложено для первопорядкового варианта RQ системы R. С другой стороны, мы предлагаем истинностно-значные семантики (в смысле Лебланка) и в случае кванторов. Как нам кажется, доказательства полноты относительно предложенных семантик квантификационных систем являются хотя и громоздкими, но прямыми. Мы ограничиваемся здесь доказательствами семантической непротиворечивости для этих систем.

Наши вводные замечания мы завершим утверждением о том, что в результате этой статьи и близкой к ней работы Уркварта [1972] релевантные логики получают теперь формальные семантики; но отношение этих семантик к тому неформальному требованию, что система логики должна выражать чьи-то интуитивные соображения, всегда будет предметом частного мнения, и это мнение мы представляем читателю.

§ 1. Предварительные замечания о синтаксисе

Пропозициональный язык SL есть тройка $\langle S, O, F\rangle$, в которой S есть счетно-бесконечное множество пропозициональных параметров, O — множество, членами которого являются унарная связка — и бинарные связки &, $\vee$, $\rightarrow$, и F — множество формул, полученных обычным образом из параметров S и связок O. (Мы используем буквы „p", „q" и т. д. для того, чтобы говорить о пропозициональных параметрах из S, а буквы «A», «B» и т. д. — для обозначения произвольных формул из F. Для облегчения чтения формул бинарные связки, включая определяемые, упорядочены по силе связи следующим образом: &, $\circ$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, и принимается ассоциация влево.) В качестве определения аксиомных схем и правил для системы R релевантной импликации мы принимаем следующие:

A1. $A \rightarrow A$;
A2. $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$;
A3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
A4. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
A5. $A \& B \rightarrow A$;
A6. $A \& B \rightarrow B$;
A7. $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C)$;
A8. $A \rightarrow A \vee B$;
A9. $B \rightarrow A \vee B$;
A.10. $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;
A11. $A \& (B \vee C) \rightarrow A \& B \vee A \& C$;
A12. $(A \rightarrow \overline{B}) \rightarrow (B \rightarrow \overline{A})$;
A13. $\overline{\overline{A}} \rightarrow A$;
D1. $A \circ B =_{df} \overline{A \rightarrow \overline{B}}$ (совместимость);
D2. $A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)$[1] (эквиваленция);
R1. Из $A \rightarrow B$ и A следует B (модус поненс);
R2. Из A и B следует $A \& B$ (введение конъюнкции).

[1] В системе R дефиниенс эквивалентен более привычному выражению $(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$.

§ 2. Предварительные замечания о семантике

Релевантная модельная структура (в дальнейшем р.м.с.) есть четверка $\langle 0, K, R, {}^*\rangle$, в которой K есть множество, $0 \in K$, R — тернарное отношение на K и * — унарная операция на K, удовлетворяющая следующим постулатам. Для того, чтобы облегчить формулировку этих постулатов, и для помощи в их интерпретации мы определяем бинарное отношение $<$ и квартернарное отношение R^2 на K для всяких a, b, c, d из K следующим образом:

d1. $a < b =_{df} R0ab$;

d2. $R^2\ abcd =_{df} \exists x\, (Rabx \,\&\, Rxcd \,\&\, x \in K)$.

d1 и d2 можно пояснить так. Мы начинаем с крипкевского понятия мира, достижимого из другого мира. Обобщая это понятие для перехода, по существу, к относительному понятию релевантности, мы вводим понятие конструкции, достижимой из *пары* конструкций. Очевидно, мы могли бы перейти к тройке конструкций, четверке и т. д. Однако в рамках интуитивных соображений относительно со-возможности, формализуемых в системе R, которая опирается на тот факт, что совместимость, вводимая посредством D1, является коммутативной и ассоциативной, все отношения достижимости высших порядков оказываются определимыми на основе тернарного R; таким образом, R^2, вводимое посредством d2, говорит, что конструкция d достижима из тройки конструкций a, b, с или, если угодно, что a, b, с со-возможны относительно d. Кроме того, уровень можно поднять посредством тернарного относительного произведения того вида, который входит в d2, но его можно и понизить благодаря привилегированному статусу 0; грубо говоря, сказать в системе R, что A совместимо с некоторым положением вещей, означает высказать само A, и наоборот, $R0ab$ возвращает нас к Крипке, просто утверждая, что b достижима из a, согласно d1. В силу того, что система R не является модальной, мы считаем $<$, определенное посредством d1, аналогичным бинарному интуиционистскому отношению из работы Крипке [1965].

Приведем постулаты, которым (для всяких a, b, c, d из K) должна удовлетворять р. м. с. $\langle 0, K, R, {}^*\rangle$:

p1. $R0aa$;

p2. $Raaa$;

p3. $R^2abcd \Rightarrow R^2acbd$;
p4. $R^2 0abc \Rightarrow Rabc$[1];
p5. $Rabc \Rightarrow Rac^*b^*$;
p6. $a^{**} = a$.

Мы надеемся, что в свете наших пояснительных замечаний допустимо, что каждый из постулатов p1—p6 может оказаться истинным. (Как уже было отмечено, изменение постулатов дает различные релевантные логики, поэтому, конечно, могут существовать точки зрения, исключающие тот или иной из этих постулатов. Соответственно допустимо и все то, чего хотим мы.)

§ 3. Оценки, интерпретации, значимость

Пусть $\langle 0, K, R, ^*\rangle$ будет некоторой р. м. с., $\{T, F\}$ — множеством классических истинностных значений, а $SL = \langle S, O, F\rangle$ — пропозициональным языком, определенным в параграфе 1. *Оценка* v языка SL в р. м. с. $\langle 0, K, R, ^*\rangle$ будет функцией, которая приписывает истинностное значение каждому параметру из S для каждой конструкции из K и удовлетворяет тому ограничению, что учитывает бинарное отношение достижимости $<$, определяемое с помощью d1. *Интерпретация I, ассоциированная* с v, есть единственное расширение v на все формулы F в каждой конструкции из K, удовлетворяющее неформальной экспликации, которую мы дали связкам. Формально:

а) v есть оценка SL в $\langle 0, K, R, ^*\rangle$ при условии, что v есть функция из $S \cdot K$ в $\{T, F\}$, которая для всякого p из S и всяких a, b из K удовлетворяет следующему условию:

(1) $a < b \,\&\, v(p, a) = T \Rightarrow v(p, b) = T$;

(b) I есть интерпретация, ассоциированная с v, при условии, что I есть функция из $F \times K$ в $\{T, F\}$, удовлетворяющая — для всякого p из S, всяких A, B из F и всякого a из K — следующим условиям:

(i) $I(p, a) = v(p, a)$;

(ii) $I(A \,\&\, B, a) = T$ тогда и только тогда, когда $I(A, a) = T$ и $I(B, a) = T$;

[1] В тексте $R^2abcd \Rightarrow Rabc$; опечатка.— *Прим. ред.*

(iii) $I(A \vee B, a) = T$ тогда и только тогда, когда $I(A, a) = T$ или $I(B, a) = T$;

(iv) $I(A \rightarrow B, a) = T$ тогда и только тогда, когда для всяких b, c из K $Rabc$ и $I(A, b) = T \Rightarrow I(B, c) = T$;

(v) $I(A \circ B, a) = T$ тогда и только тогда, когда существуют b, c из K, такие, что $Rbca$ и $I(A, b) = T$ и $I(B, c) = T$[1];

(vi) $I(\bar{A}, a) = T$ тогда и только тогда, когда $I(A, a^*) = F$.

Формула A *истинна* при оценке v, или при ассоциированной интерпретации I, в точке a из K в том случае, если $I(A, a) = T$; в противном случае A ложна при v в a[2]. Истина в 0, как замечено выше, является истиной, которая включается в число верифицированных логических истин; соответственно этому мы просто говорим, что A *верифицирована* при v, или при ассоциированной I, в том случае, когда $I(A, 0) = T$, в противном случае мы говорим, что A *фальсифицирована* при v. A значима в р.м.с. $\langle 0, K, R, ^*\rangle$ в том случае, когда A верифицирована здесь при всех оценках. И наконец, формула A R-значима в том случае, когда A значима во всех р. м. с.; в противном случае A — *R-незначима*.

§ 4. Следование

Во вводных замечаниях мы говорили о том, что, например, физику позволительно отрицать некоторые логические *законы* постольку, поскольку он *рассуждает* корректно. Под этим мы понимали, что если физик утверждает A и при этом A влечет B, то он соглашается также и с B. Таким образом, мы приходим к следующим семантическим понятиям.

[1] Поскольку $\circ$ был определен посредством D1, корректность этого определения детерминируется применением (iv), (vi) и семантических постулатов; ниже, в параграфе 10, где $\circ$ добавлен в качестве исходной связки при помощи аксиом A14, A15, условие (v) становится, конечно, исходным семантическим постулатом.

[2] Это переход к терминологии работы Мейера и Данна [1969]; заметим здесь, что если $\bar{A}$ ложна в a при v, то из этого не следует, что A истинна в a при v; благодаря (vi) отсюда следует в соответствии с вводными замечаниями, что A истинна в a^* при v.

Пусть $\langle 0, K, R, {}^* \rangle$ будет некоторой р. м. с., в которой v является оценкой, а I — ассоциированной интерпретацией. Тогда А *влечет В при* v при условии, что для всякого a из K

(2) $$I(A, a) = T \Rightarrow I(B, a) = T.$$

Мы говорим, что А *влечет* В в $\langle 0, K, R, {}^* \rangle$ в том случае, когда А влечет В при всех оценках. Наконец, А R-*влечет* В в том случае, когда А влечет В во всех р. м. с.

Следование есть ключевое понятие, которое мы собираемся здесь эксплицировать, и нужно сказать несколько слов о том, как мы его понимаем. Прежде всего, следование здесь является семантическим *отношением* между предложениями; впоследствии, когда мы добавим к R необходимость и рассмотрим стрелку системы E, у нас будут средства для рассмотрения *связки* следования*, но в данный момент наша система слишком бедна для *выражения утверждения* о том, что А влечет В в каком-либо смысле. Действительно, при отсутствии единства в нашей терминологии лучше было бы говорить об *импликации* при v, или в $\langle 0, K, R, {}^* \rangle$. Но как классическая *доказуемость* формулы $A \supset B$ классически указывает на то, что А классически влечет В, точно так же, как мы увидим, доказуемость $A \to B$ R *указывает*, что А R-влечет В в только что определенном смысле, то есть в самом общем смысле слова "влечет": всегда, когда А истинна, В истинна. Во-вторых, следование при оценке — и отсюда следование в некоторой р. м. с. — *нельзя* отождествлять со следованием в его логическом смысле; эти понятия скорее характеризуют все сохраняющие истинность аргументы в специфических контекстах; однако, принимая во внимание все интерпретации и все р. м. с., мы приходим к желаемому логическому понятию.

Теперь мы хотим соотнести следование и верификацию. Наши замечания о привилегированном статусе 0 совершенно корректно говорят, что $A \to B$ является R-значимой тогда и только тогда, когда A R-влечет В, и — более специально — что при оценке v в некоторой р. м. с. А влечет В при v тогда и только тогда, когда $A \to B$ верифицирована (то есть истинна в 0) при v. Эти вещи доказываются непосредственно; в свете сказанного можно сделать замечание о том, что главная роль 0 и относящихся к нему постулатов заключена в том, что мы хотим знать в общем, какие предложения являются логически истинными, а не просто то, какие предложения специальной формы $A \to B$ истинны. Тем не менее первая проблема может быть сведена ко второй, когда 0 и связанный с ним аппарат делаются теоретически несущественными.

Для того чтобы показать, что следование сводится к верификации, мы докажем сначала некоторые наиболее важные леммы. В дальнейшем пусть А, В, С будут произвольными формулами, $\langle 0, K, R, {}^* \rangle$ — произвольной релевантной модельной структурой, a и b — членами K, v — оценкой SL в $\langle 0, K, R, {}^* \rangle$ и I будет интерпретацией, ассоциированной с v.

Лемма 1. $a < b$ и $I(A, a) = T \Rightarrow I(A, b) = T$.

Доказательство проводится индукцией по длине формулы А. Ограничение (1) на с. 372 обеспечивает справедливость леммы для базисного случая. Аргументация, использующая индуктивное предположение, тривиальна, когда главными связками являются & или $\vee$. Поскольку $\circ$ является связкой, вводимой по определению, остается рассмотреть всего два случая: (a) если А имеет форму $\overline{B}$, то если $b > a$ и $I(A, a) = T$, по p6, $b^* < a^*$, и поэтому, по (vi), $I(B, a^*) = F$. Отсюда, по индуктивному предположению, $I(B, b) = F$ и, следовательно, $I(A, b) = T$; (b) если А имеет форму $B \to C$ и $I(A, a) = T$, то, согласно (iv), это означает, что если $I(B, d) = T$ и $Radc$, то $I(C, c) = T$ для любых d, c из K. Предположим затем, что $a < b$, $I(B, d) = T$ и $Rbdc$. Согласно d1 и d2, $R^2 0adc$, откуда, по p4, $Radc$, и отсюда, по предположению, $I(C, c) = T$; следовательно, по (iv), $I(A, b) = T$, что и завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. А *влечет* В *при* $v \Rightarrow A \to B$ *верифицирована при* v.

Доказательство. Предположим, что для всякого c из K если $I(A, c) = T$, то $I(B, c) = T$. Мы должны показать, что $I(A \to B, 0) = T$. Для произвольных a, b из K

* Эта гипотеза авторов не подтвердилась. Г. Е. Минц привел контрпример. Формула $(p \to .q \to r) \& (q \to p \vee r) \to q \to r$ доказуема в RN с модальными операторами, но не доказуема в E. Семантическое обоснование недоказуемости этой формулы дано Л. Л. Максимовой ("Bulletin of the Section of Logic", Wrocław, 1973, vol. 2, № 1).— *Прим. ред.*

допустим, что $I(A, a)=T$ и $R0ab$. Согласно d1, $a<b$. По лемме 1, $I(A, b)=T$. По предположению, $I(B, b)=T$, что благодаря (iv) дает нам нужный результат.

Лемма 3. $A \to B$ *верифицирована при* $v \Rightarrow A$ *влечет* B *при* v.

Доказательство. Предположим, что для всяких *a*, *b* из *K*, если $R0ab$ и $I(A, a)=T$, то $I(B, b)=T$. Применяя d1 и p1, получаем, что A влечет B при v.

Теорема, связывающая следование и верификацию, подготовлена.

Теорема 1. A *влечет* B *при* v *тогда и только тогда, когда* $A \to B$ *верифицирована при* v. *Поэтому* A *влечет* B *в* $\langle 0, K, R, {}^{*}\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $A \to B$ *является значимой, и* A R-*влечет* B *тогда и только тогда, когда* $A \to B$ R-*значима*.

Доказательство: согласно определениям и леммам 2 и 3.

§ 5. Семантическая непротиворечивость R (адекватность постулатов)

В этом параграфе мы покажем, что каждая теорема R является R-значимой. Сохраняются обозначения § 4, и мы вновь доказываем некоторые предварительные леммы.

Лемма 4. *Если* A *является аксиомой* R, *то* $I(A, 0)=T$.

Доказательство. В силу того, что каждая из аксиом R имеет форму $B \to C$, для каждой такой аксиомы, согласно лемме 2, достаточно показать, что (a) если $I(B, a)=T$, то $I(C, a)=T$. Поэтому для каждого примера A1—A13 мы принимаем антецедент (a) и доказываем его консеквент. A1—тривиальна. Для A2 достаточно показать, что если A и $A \to B$ истинны при v в точках *a* и *b* соответственно и если $Rabc$, то отсюда следует, что C истинна в *c*; ввиду того, что $Rabc \Rightarrow R^2 0abc \Rightarrow R^2 0bac \Rightarrow Rbac$, согласно p1, p3 и p4, C действительно истинна в *c*, что и верифицирует A2. Для A3 достаточно показать, что если $A \to B$ истинна в *a* и $Rabc$ и если $B \to C$ истинна в *b* и $Rcde$ и *A* истинна в *d* при оценке v, то C истинна в *e*; но если $Rabc$ и $Rcde$, то, по d2, R^2abde и, по p3, R^2adbe, откуда если $I(A \to B, a)=I(A, d)=I(B \to C, b)=T$, то, по d2, существует *x* в *K*, такой, что $I(B, x)=T$ и $Rxbe$. Следовательно, $Rbxe$ (см. верификацию A2) и C истинна в *e*, что и верифицирует A3. Для A4 предположим, что $I(A \to (A \to B), a)=T$ и $I(A, b)=T$ и $Rabc$, покажем, что $I(B, c)=T$. Но $Rabc \Rightarrow Rbac$, как и выше, откуда, по p2 и d2, R^2bbac; по p3, R^2babc; применяя d2 и коммутацию, снова получаем R^2abbc, откуда, по предположению, d2 и iv получаем, что $I(B, C)=T$, что верифицирует A4.

Аксиомы для конъюнкции и дизъюнкции верифицируются тривиально, если дана характеристика (b) того, что считается интерпретацией. Рассмотрим, например, A7. Примем, что $A \to B$ и $A \to C$—обе истинны в *a*; покажем, что $A \to B\&C$ также истинна в *a*. Предположим, что $I(A, b)=T$ и $Rabc$, и покажем, что B&C истинна в *c*. Но, по предположению, $I(A \to B, a)=I(A \to C, a)=T$, откуда $I(B, c)=I(C, c)=T$ и, по (ii) на с. 372, $I(B\&C, c)=T$, что и требовалось доказать. Верификация других аксиом из числа A5—A11 является аналогичной.

Для верификации A12 предположим, что $A \to \bar{B}$ истинна в *a*. Покажем, что $B \to \bar{A}$ истинна в *a*. Предположим, что $Rabc$ и B истинна в *b*; покажем, что $\bar{A}$ истинна в *c*, то есть что $I(A, c^*)=F$. Для приведения к абсурду предположим, что $I(A, c^*)=T$; по p5, Rac^*b^* и, следовательно, $I(\bar{B}, b^*)=T$, так как $A \to \bar{B}$ истинна в *a*. Поэтому $I(B, b^{**})=F$, по (vi), и отсюда, по p6, $I(B, b)=F$ — противоречие. Аналогично A13 верифицируется путем допущения, что $\bar{\bar{A}}$ истинна в *a*, следовательно, $\bar{A}$ ложна в a^*, поэтому A истинна в a^{**}, отсюда, по p6, A истинна в *a*. На этом доказательство леммы 4 заканчивается.

Для того чтобы рассмотреть варианты основной логики, важно исследовать, что от чего зависит в доказательстве леммы 4. Из постулатов только p4 существенно входит в верификацию A1 и аксиом для конъюнкции и дизъюнкции благодаря своей роли в доказательстве леммы 1. Следует заметить, что постулаты для отрицания p5 и p6 существенно входят только в верификацию аксиом для отрицания; если нужно, эти постулаты могут быть ослаблены так, что будут давать другую теорию отрицания, например интуиционистски приемлемую при отсутствии

A13. Весь постулат рефлексивности p2 входит в верификацию аксиомы сокращения A4; устранение постулата приводит к устранению аксиомы, и наоборот. И наконец, p3, называемый Данном „*законом Паша*", поскольку его аналог в форме известного постулата был введен в геометрию Пашем (где R*abc* означает „*c* находится между *a* и *b*"), оказывается нужным при верификации аксиомы транзитивности A3; другое его использование может быть заменено, как видно из доказательства леммы 4, более слабым постулатом.

Чтобы закончить доказательство того, что наши постулаты адекватны, нужно еще показать, что R1 и R2 сохраняют верифицируемость; мы доказываем несколько больше, начиная с определения. Пусть $\langle 0, K, R, {}^{*}\rangle$ есть р. м. с., $a \in K$ и v — произвольная оценка в $\langle 0, K, R, {}^{*}\rangle$; тогда *теория, детерминируемая посредством* v в a — символически $T(v, a)$, — будет множеством предложений, истинных в a при v; *регулярная теория, детерминируемая посредством* v, будет множеством предложений, верифицированных при v, то есть $T(v, 0)$, что в дальнейшем мы сокращаем как $T(v)$.

Лемма 5. *Множество предложений* $T(v, a)$, *истинных при* v в a, *замкнуто по введению конъюнкции, то есть если* A, $B \in T(v, a)$, то $A \& B \in T(v, a)$. *Соответственно множество предложений* $T(v)$, *верифицированных при* v, *замкнуто по введению конъюнкции.*

Доказательство: непосредственно из определений.

Лемма 6. $T(v, a)$ *замкнуто по следованию при* v, *то есть если* $A \in T(v, a)$ и $A \to B \in T(v, a)$, *то* $B \in T(v, a)$. *Соответственно* $T(v)$ *замкнуто по модус поненс.*

Доказательство: непосредственно из определений и теоремы 1.

Лемма 7. $T(v, a)$ *замкнута по модус поненс, то есть если* $A \in T(v, a)$ и $A \to B \in T(v, a)$, то $B \in T(v, a)$. *Соответственно* $T(v)$ *замкнута по модус поненс.*

Доказательство: непосредственно из определений и p2.

Теорема 2. *Регулярная теория* $T(v)$ *предложений, верифицированных при* v, *для всякой релевантной модельной структуры и всякой оценки содержит все теоремы* R. *Соответственно, семантика, развитая выше, адекватна для* R *в том смысле, что все теоремы* R *являются* R-*значимыми.*

Доказательство. Если $T(v)$ такова, как утверждается в этой теореме, то, по лемме 4, она содержит все аксиомы R и, по лемме 5 и лемме 6 (или 7), замкнута по введению конъюнкции и модус поненс. Поэтому все теоремы R принадлежат к $T(v)$ для произвольной v и произвольной р. м. с. Следовательно, некоторая R-теорема A принадлежит ко всякой такой $T(v)$, в которой она R-значима.

§ 6. Предварительные замечания о полноте: теория интенсиональных теорий

Пусть пропозициональный язык $SL = \langle S, 0, F\rangle$ будет таким же, как в § 1. Подмножество T из F является *интенсиональной* R-*теорией*, если T замкнуто по введению конъюнкции и если всегда, когда $A \in T$ и $A \to B$ является теоремой R, $B \in T$. (Последнее условие вводит замыкание по R-следованию в синтаксическом смысле, которое, как мы должны доказать, совпадает с R-следованием, охарактеризованным семантически.)

Пусть T будет интенсиональной R-теорией. T является *простой*, если $A \vee B \in T$, то $A \in T$ или $B \in T$. T регулярна, если она содержит все теоремы R [1], и *непротиворечива*, если не содержит отрицания некоторой теоремы R [2]. И наконец, T является *нормальной*, как в работе Мейера и Данна [1969], если она регулярна, непротиворечива и проста. Мы замечаем, что нормальность влечет непротиворечивость и полноту в обычном классическом смысле.

Связь с идеями предыдущего параграфа может быть установлена следующим образом.

---

[1] То, что называется здесь *регулярной теорией*, в предыдущих публикациях — например, в работах Мейера и Данна [1969] и Мейера и др. [1972] — было названо *теорией*.

[2] Так как $\overline{A \& \overline{A}}$ является теоремой R, то из двух формул A, $\overline{A}$ лишь одна может принадлежать непротиворечивой теории.

Лемма 8. *Пусть* v *будет оценкой в некоторой р. м. с.* $\langle 0, K, R, {}^*\rangle$ *и пусть* $a \in K$. *Тогда теория* $T(v, a)$, *детерминируемая посредством* v в a, *будет интенсиональной* R-*теорией*; кроме того, $T(v, a)$ *является простой. Если* $0 < a$, *то* $T(v, a)$ *регулярна, в частности*, $T(v)$ *будет регулярной. И наконец, достаточным условием для того, чтобы* $T(v)$ *была нормальной, является тот факт, что* $0 < 0^*$ *имеет место в* $\langle 0, K, R, {}^*\rangle$, *где* <*определено выше посредством* d1.

Доказательство. По лемме 5, $T(v, a)$ замкнута по введению конъюнкции. Предположим, что $A \in T(v, a)$ и $A \to B$ есть теорема R. Согласно теореме 2, A влечет B при v и, по лемме 6, $B \in T(v, a)$. Поэтому $T(v, a)$ является интенсиональной R-теорией. Кроме того, благодаря условиям рекурсивности, наложенным на v, $T(v, a)$ является простой.

В силу того что, по теореме 2, все теоремы R верифицированы при v, если $0 < a$, то, по лемме 1, все теоремы R истинны при v в a; поэтому если $0 < a$, то $T(v, a)$ будет регулярной. И наконец, предположим, что $0 < 0^*$. По p2, $R0^*0^*0^*$ всегда имеет место, откуда, согласно p5—p6, $R0^*00$, и, произведя коммутацию по p3—p4, получим $R00^*0$, то есть $0^* < 0$ имеет место во всех р. м. с. Затем, согласно предположению, $T(v) = T(v, 0) = T(v, 0)^*$ в силу леммы 1; то есть одни и те же формулы истинны в 0 и 0^* при v. Поскольку все теоремы R истинны в 0 при v, они, согласно предположению, все истинны также и в 0^*, следовательно, отрицания теорем не истинны в 0. Этого достаточно для непротиворечивости $T(v)$, и, поскольку $T(v)$ всегда регулярна и проста, $0 < 0^*$ влечет, что $T(v)$ является нормальной, что и завершает доказательство леммы.

Теперь мы обратимся к развитию *исчисления интенсиональных* R-*теорий*. Пусть $\mathcal{H}$ будет совокупностью всех интенсиональных R-теорий. Мы определяем операцию $\circ$ на $\mathcal{H}$, устанавливая для всех S, T из $\mathcal{H}$, что $S \circ T$ равно множеству формул U, такому, что $C \in U$ тогда и только тогда, когда существует A в S и B в T, такие, что $A \circ B \to C$ является теоремой R, то есть $S \circ T = \{C : \exists A \exists B (A \in S \& B \in T) \vdash_R A \circ B \to C\}$. Под исчислением интенсиональных R-теорий мы понимаем структуру $\mathcal{H} = \langle \mathcal{H}, \subseteq, \circ, 0\rangle$, где $\mathcal{H}$ и $\circ$ были только что определены.

0 есть множество теорем R, а $\subseteq$ — теоретико-множественное включение.

Лемма 9. *Определенное выше исчисление* $\mathcal{H}$ *интенсиональных* R-*теорий является частично упорядоченным коммутативным моноидом; то есть* $\circ$ *коммутативна и ассоциативна и* 0 *является тождеством относительно* $\circ$; *далее для всяких* a, b, c из $\mathcal{H}$ *если* $a \subseteq b$, *то* $a \circ c \subseteq b \circ c$. *Кроме того, в* $\mathcal{H}$ *отсутствуют степени, то есть* $a \circ a = a$.

Доказательство. Сначала мы верифицируем, что $\circ$ является операцией на $\mathcal{H}$, то есть что если $a, b \in \mathcal{H}$, то $a \circ b \in \mathcal{H}$. Тривиально, что $a \circ b$ замкнуто по доказуемому R-следованию. Чтобы показать, что оно замкнуто по введению конъюнкции, предположим, что C и D обе принадлежат к $a \circ b$. Тогда имеются A, A' в a и B, B' в b, такие, что $A \circ B \to C$ и $A' \circ B' \to D$ являются теоремами R, откуда $(A \circ B) \& (A' \circ B') \to C \& D$ будет теоремой R, согласно элементарным свойствам конъюнкции. Но легко показать, что $(A \& A') \circ (B \& B') \to (A \circ B) \& (A' \circ B')$ также является R-теоремой; антецедент, очевидно, находится в $a \circ b$ благодаря замыканию a, b по введению конъюнкции; откуда, по транзитивности и замыканию $a \circ b$ по доказуемому R-следованию, $C \& D \in a \circ b$, из чего видно, что $a \circ b$ есть интенсиональная R-теория.

Коммутативность и ассоциативность $\circ$ как операции на $\mathcal{H}$ легко получаются из тех же свойств $\circ$ как связки R. То, что $0 \circ a$ содержит a, очевидно, так как если $A \in a$, то это R-эквивалентно $(A \to A) \circ A \in 0 \circ a$, и наоборот, если $B \in 0 \circ a$, то в a существуют R-теоремы C и A такие, что $C \circ A \to B$ доказуема в R, поэтому (так как для $\circ$ имеет место экспортация) $A \to B$ является теоремой R, следовательно, $B \in a$. Свойство монотонности $\circ$ при $\subseteq$ и свойство отсутствия степеней опять-таки очевидны. Последнее обусловлено тем, что замкнутость по & влечет замкнутость по $\circ$ для R-теории благодаря теореме $A \& B \to A \circ B$ из R, что и завершает доказательство леммы 9.

Пусть T будет любой *регулярной* интенсиональной R-теорией. Пусть *интенсиональная* T-*теория* будет любым множеством формул пропозиционального языка SL, которое замкнуто по введению конъюнкции и T-*следованию*, то есть таким, что a будет интенсиональной T-теорией, если a является интенсиональной R-теорией и, кроме того, если $A \to B \in T$ и $A \in a$, то $B \in a$. Исчисление *интенсиональных* T-*теорий* $\mathcal{H}_T = \langle \mathcal{H}_T, \subseteq, \circ, 0_T \rangle$ для регулярной R-теории T определяется установлением того, что $\mathcal{H}_T$ равно множеству всех интенсиональных T-теорий и при этом T есть 0_T, а $\circ$ и $\subseteq$ определены так, как это сделано выше.

Лемма 10. *Если T является регулярной R-теорией, то определенное выше исчисление $\mathcal{H}_T$ является под-полугруппой $\mathcal{H}$ и, следовательно, частично упорядочено, коммутативно и не имеет степеней в смысле леммы 9; кроме того, $\mathcal{H}_T$ есть моноид с тождеством 0_T.*

Доказательство. Так как все T-теории являются R-теориями, то ясно, что $\mathcal{H}_T \subseteq \mathcal{H}$. Для того чтобы показать, что $\mathcal{H}_T$ есть под-полугруппа и, следовательно, коммутативна, ассоциативна, частично упорядочена и не имеет степеней, достаточно показать, что $\mathcal{H}_T$ замкнута по $\circ$. Предположим, что a и b принадлежат $\mathcal{H}_T$. Мы должны показать, что $a \circ b$ замкнуто по T-*следованию*, то есть что если $C \in a \circ b$ и $C \to D \in T$, то $D \in a \circ b$. Но если $C \in a \circ b$, то имеется A в a и B в b, такие, что $A \circ B \to C$ является теоремой R. Затем, по транзитивности, $A \circ B \to D \in T$ (так как она есть R-следствие формулы $C \to D$). Благодаря экспортации $A \to (B \to D)$ принадлежит к T, откуда, согласно замкнутости a по T-следованию, $B \to D \in a$. Тогда $(B \to D) \circ B$ принадлежит к $a \circ b$, по определению; но это R-влечет D, следовательно, $D \in a \circ b$, что и требовалось доказать.

Чтобы показать, что 0_T есть тождество, заметим, что так как T регулярно, как и прежде, имеет место $a \subseteq a \circ 0_T$. Предположим, что $B \in a \circ 0_T$. Тогда имеются A в a и C в T, такие, что $A \circ C \to B$ является теоремой R. Но в таком случае, используя экспортацию, получаем $A \to B \in T$, что благодаря замкнутости a по T-следованию дает $B \in a$. На этом доказательство леммы 10 заканчивается.

Под p⁺ м. с. будем понимать структуру $\langle 0, K, R \rangle$, в которой K есть множество, $0 \in K$ и R — тернарное отношение на K, удовлетворяющее p1 — p4. (Очевидно, что все р. м. с. будут p⁺ м. с., так как первые получаются из последних посредством добавления знака "+" и связанного с ним аппарата, но не наоборот.) Пусть $\mathbf{M} = \langle M, \leqslant, \circ, 0 \rangle$ будет любым коммутативным, частично упорядоченным, не имеющим степеней моноидом в смысле лемм 9 и 10, то есть $\circ$ является коммутативной и ассоциативной, 0 — тождеством, $\leqslant$ — частичным упорядочением, удовлетворяющим $a \leqslant b \Rightarrow a \circ c \leqslant b \circ c$ и $a \circ a \leqslant a$. Под p⁺ м. с., ассоциированной с $\mathbf{M}$, мы понимаем структуру $\langle 0, M, R \rangle$, определенную тем, что 0 равен тождеству $\mathbf{M}$, M рассматривается как фундаментальное множество $\mathbf{M}$, а R является тернарным отношением на M, таким, что Rabc имеет место тогда и только тогда, когда $a \circ b \leqslant c$ в M. Тогда:

Лемма 11. *Если* M *есть коммутативный, не имеющий степеней частично упорядоченный моноид,* то p⁺ м. с. $\langle 0, M, R \rangle$, *ассоциированная с* $\mathbf{M}$, *удовлетворяет* p1 — p4. *Кроме того, для любых a, b, c, d из M, $a < b$* в $\langle 0, M, R \rangle$ *тогда и только тогда, когда $a \leqslant b$ в* $\mathbf{M}$, и R^2abcd *тогда и только тогда, когда $a \circ b \circ c \leqslant d$* в $\mathbf{M}$, *что дает интерпретацию* d1 и d2. *В частности, исчисления $\mathcal{H}$ леммы* 9 *и $\mathcal{H}_T$ леммы* 10 *ассоциированы* с p⁺ м. с. $\langle 0, \mathcal{H}, \mathbf{R} \rangle$ и $\langle 0_T, \mathcal{H}_T, R_T \rangle$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{M}$ и тернарное отношение R будут таковы, как было охарактеризовано выше. Тогда R$0ab$ тогда и только тогда, когда $0 \circ a = a \leqslant b$, что оправдывает d1. R^2abcd тогда и только тогда, когда существует x в M, такой, что $a \circ b \leqslant x$ и $x \circ c \leqslant d$. Но в этом случае условие монотонности моноидов дает $a \circ b \circ c \leqslant x \circ c \leqslant d$, что дает интерпретацию d2 в одном направлении; и, наоборот, пусть $a \circ b = x$. Тогда постулаты выполняются следующим образом: p1 — в силу того, что $a \leqslant a$ в любом частичном порядке; p2 — благодаря условию отсутствия степеней $a \circ a \leqslant a$ на $\mathbf{M}$; p3 — в силу коммутативности и ассоциативности $\circ$; p4 — поскольку 0 есть тождество $\mathbf{M}$. Таким образом, $\langle 0, \mathcal{H}, R \rangle$ и $\langle 0_T, \mathcal{H}_T, R_T \rangle$ являются p⁺ м. с. для регулярных интенсиональных R-теорий T, так как, согласно леммам 9 и 10, соответствующие исчисления теорий удовлетворяют условиям, налагаемым на $\mathbf{M}$. На этом доказательство леммы 11 заканчивается.

Развитие исчисления интенсиональных теорий выводит нас на главный путь доказательства полноты наших семантик. Остаются еще два препятствия. Во-первых, произвольная интенсиональная R-теория не обладает достаточной различительной силой относительно дизъюнкции;

во-вторых, + естественным образом не является операцией на всех $\mathcal{H}$ или на различных $\mathcal{H}_T$. Эти две проблемы мы решим в следующем параграфе, перейдя к *простым* теориям.

§ 7. Семантическая полнота системы R: простые интенсиональные теории

Пусть T будет простой регулярной R-теорией, а $\langle 0_T, \mathcal{H}_T, R_T\rangle$ — p^+ м. с., ассоциированной с T по лемме 11. Пусть $\mathcal{H}'_T$ будет подмножеством $\mathcal{H}_T$, состоящим из всех простых интенсиональных теорий в $\mathcal{H}_T$, а R'_T — ограничением R_T до $\mathcal{H}'_T$. Тогда:

Лемма 12. *Пусть T будет простой регулярной интенсиональной R-теорий и пусть $\mathcal{H}'_T$ и R'_T таковы, как определено выше. Пусть $0'_1$ будет T. Тогда $\langle 0'_T, \mathcal{H}'_T, R'_T\rangle$ удовлетворяет* p1—p4, *то есть является* p^+ м. с.

Доказательство. Поскольку $0'_1 = T = 0_T$ и поскольку R'_T является ограничением R_T до подмножества $\mathcal{H}'_T$ множества $\mathcal{H}_T$, постольку условия p1, p2 и p4 выполнены в $\langle 0_T, \mathcal{H}'_T, R'_T\rangle$ вследствие того, что они выполнены в $\langle 0_T, \mathcal{H}_T, R_T\rangle$. Таким образом, только верификация закона Паша, p3, может представлять трудности, так как он содержит экзистенциальное утверждение о том, что если $R'^2_T abcd$, то в $\mathcal{H}'_T$ существует x, такой, что $R_T acx$ и $R_T xbd$. Проблема заключается в том, что хотя такой x безусловно принадлежит к $\mathcal{H}_T$ — согласно лемме 11, $a \circ c$ само будет принадлежать к $\mathcal{H}_T$ — нет гарантий, что существует простая теория x, исполняющая функцию посредника, требуемая условием p3. Оставшаяся часть доказательства леммы 12 состоит в нахождении таких гарантий.

Предположим, что $R'^2_T abcd$. Согласно тому, что было сказано выше, в $\mathcal{H}_T$ существует x, такой, что $R_T acx$ и $R_T xbd$; мы покажем, что в $\mathcal{H}'_T$ существует x', такой, что $R'_T acx'$ и $R'_T x'bd$, из чего вытекает $R'_T x'bd$, что и верифицирует p3. В любом случае, согласно определению R и, следовательно, R_T на $\mathcal{H}_T$, существует максимальная Т-теория x', удовлетворяющая условию: (1) $x < x'$ и $R_T x'bd$ в $\langle 0_T, \mathcal{H}_T, R_T\rangle$. Поскольку само x удовлетворяет условию (1), легко видеть, что объединение совокупности интенсиональных Т-теорий, удовлетворяющих условию (1) и упорядоченных посредством $\subseteq$, само является интенсиональной Т-теорией, удовлетворяющей (1), из чего, согласно лемме Цорна, можно заключить, что существует интенсиональная Т-теория x', включающая x и такая, что $x \circ b \subseteq d$, в то время как собственные расширения множества x' не являются интенсиональными Т-теориями, удовлетворяющими (1).

Остается показать, что x' является простым. Предположим, что это не так. Тогда имеется формула $A \vee B$, такая, что $A \vee B \notin x'$, $A \notin x'$ и $B \notin x'$. Пусть $[x', A]$ и $[x', B]$ будут соответственно множествами формул D, такими, что существует член x' — C, такой, что $C \& A \to D$, $C \& B \to D$ являются членами T. Легко видеть, что $[x', A]$ и $[x', B]$ — расширения множества x', замкнутые по введению конъюнкции и Т-следованию; соответственно, они представляют интенсиональные Т-теории, которые благодаря максимальности x' не удовлетворяют условию (1). Поэтому ни $[x', A] \circ b$, ни $[x', B] \circ b$ не является подмножеством d. Соответственно, существуют формулы E в $[x', A]$ и F в b, такие, что $\vdash_R E \circ F \to D$, но $D \notin d$; кроме того, согласно определению $[x', A]$, имеется формула C в x', такая, что $C \& A \to E \in T$, откуда, по экспортации и на основании регулярности T, $E \to (F \to D) \in T$ и, по введению конъюнкции, транзитивности и импортации $\circ$, $(C \& A) \circ F \mapsto D \in T$. Аналогично этому имеются формулы C′ в x,′F′ в b и формула D′, не находящаяся в d, такие, что $(C' \& B) \circ F' \to D' \in T$. В силу того что T замкнута по введению конъюнкции, можно использовать элементарные синтаксические аргументы для того, чтобы показать, что формула $(C \& C' \& (A \vee B)) \circ (F \& F') \to D \vee D'$ принадлежит к T, и из того, что $C \& C' \& (A \vee B)$ принадлежит к x', $F \& F'$ — к b и $x' \circ b \subseteq d$, можно заключить, что $D \vee D' \in d$. Но d является простым, поэтому либо $D \in d$, либо $D' \in d$ в противоположность нашему выбору D и D′ так, чтобы они не были членами d; гипотеза о том, что x' не является простым, оказалась несостоятельной, поэтому мы заключаем, что x' будет простым и что, следовательно, $x' \in \mathcal{H}'_T$ (наряду с a, b, c, d).

Теперь мы должны показать, что $R'_T x'bd$, $R_T acx$ и $R_T 0_T xx'$. Согласно p3—p4, $R_T acx'$, что — в силу простоты

a, c, x' — дает $R'_T acx'$, поэтому, по d2, $R'^2_T acbd$, что и заканчивает верификацию p3 и доказательство леммы 12.

Лемма 12 позволяет нам при образовании $\mathcal{H}'_T$ устранить из $\mathcal{H}_T$ все, кроме простых теорий. Она также позволяет нам иметь дело с отрицанием, так как операция * может быть естественно определена на $\mathcal{H}'_T$. Действительно, если a является простой интенсиональной теорией, то пусть a^* будет множеством всех формул A, таких, что $\overline{A}$ не принадлежит к a, символически $a^* = \{A : \overline{A} \notin a\}$. Тогда:

Лемма 13. *Пусть T будет простой интенсиональной теорией, и пусть p^+ м. с. $\langle 0'_T, \mathcal{H}'_T, R'_T\rangle$ будет такой же, как в лемме 12. Пусть * определена так, как выше, и пусть $*'$ будет ее ограничением до $\mathcal{H}'_T$. Тогда $\langle 0'_T, \mathcal{H}'_T, R'_T, *'\rangle$ есть р. м. с.*

Доказательство. Мы должны показать, что (a) применение $*'$ к членам $\mathcal{H}'_T$ не выводит за пределы $\mathcal{H}'_T$ и что (b) p5—p6 выполнены, ибо оставшаяся часть леммы следует из леммы 12. При доказательстве (a) мы сначала показываем, что применение * к простым теориям дает простые теории; во-вторых, что если a замкнуто по T-следованию, то замкнуто и a^*. Предположим тогда, что a является простой теорией, что $A \in a^*$ и что $A \to B$ есть теорема R. Для сведения к абсурду предположим, что $B \notin a^*$. Тогда $\overline{B} \in a$, откуда, по контрапозиции и замкнутости a по доказуемому R-следованию, получаем $\overline{A} \in a$, что противоречит предположению о том, что $A \in a^*$ и показывает замкнутость a^* по доказуемому R-следованию. Для того чтобы показать, что a^* замкнуто по введению конъюнкции, предположим, что A, $B \in a^*$, но что для приведения к абсурду $A \& B \notin a^*$. Тогда $\overline{A \& B} \in a$, откуда согласно законам де-Моргана и простоте a, либо $\overline{A}$, либо $\overline{B}$ принадлежит к a в противоположность предположению о том, что A и B находятся в a^*. И наконец, покажем, что a^* является простой: если ни A, ни B не принадлежат к a^*, то $\overline{A}$, $\overline{B}$ — обе находятся в a, откуда благодаря введению конъюнкции и законам де-Моргана следует, что $\overline{A \vee B}$ находится в a и $A \vee B \notin a^*$. С другой стороны, если $A \vee B \in a^*$, то $A \in a^*$ или $B \in a^*$. Это завершает доказательство того, что если a является простой интенсиональной теорией, то такой же будет и a^*. И последнее: если a замкнута по T-следованию, A принадлежат к a^* и $A \to B \in T$ и если B не находится в a^*, то $\overline{B}$ и, следовательно, $\overline{A}$ принадлежит, как и прежде, к a и A не принадлежит к a^*, что опять-таки абсурдно. Таким образом, пункт (a) доказан: применение $*'$ к членам H'_T не выводит за пределы H'_T.

Верификацию пункта (b) мы начинаем с p. 6. $A \in a^{**}$ тогда и только тогда, когда $A \notin a^*$; последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\overline{\overline{A}} \in a$, что в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда $A \in a$ — в силу двойного отрицания, если a является интенсиональной R-теорией. Для верификации p5 предположим, что $R'_T abc$. Согласно определению R'_T, $a \circ b \sqsubseteq c$. Предположим, что $D \in a \circ c^*$; мы покажем, что $D \in b^*$. Допустим, что это не так; тогда $\overline{D} \in b$. Благодаря тому, что $D \in a \circ c^*$, имеется формула A в a и формула E в c^*, такие, что $\vdash_R A \circ E \to D$, что по контрапозиции дает $\vdash_R \overline{D} \to (A \to \overline{E})$. Так как b замкнуто по доказуемому R-следованию, $A \to \overline{E} \in b$; следовательно, $A \circ (A \to \overline{E}) \in a \circ b \sqsubseteq c$. Но из $A \circ (A \to \overline{E})$ доказуемо R-следует $\overline{E}$, что дает $\overline{E} \in c$, то есть $E \notin c^*$ — противоречие. Это показывает, что имеет место $a \circ c^* \sqsubseteq b^*$, и следовательно, на основании определения, $R'_T ac^*b^*$, что и заканчивает верификацию p5 и доказательство леммы 13.

Практически мы уже получили семантическую полноту. Если T есть любая регулярная простая интенсиональная R-теория, то пусть $\langle 0'_T, H'_T, R'_T, *'\rangle$, ассоциированная с T по лемме 13, называется *T-канонической* р.м.с. H'_T. *T-каноническая оценка* v_T будет функцией, которая приписывает для каждого пропозиционального параметра p и каждой простой T-теории a в H'_T $v_T(p, a) = T$ тогда и только тогда, когда $p \in a$. Короче говоря, v_T делает параметр истинным в теории тогда и только тогда, когда этот параметр находится в теории; мы покажем, что это имеет место для всех формул.

Лемма 14. *Пусть T, v_T и H'_T таковы, как сказано выше, и пусть I будет интерпретацией в р.м.с. H'_T, ассоциированной с T-канонической оценкой v_T. Тогда для каждой формулы A пропозиционального языка SL и для всякого a в H'_T $I(A, a) = T$ тогда и только тогда, когда* $A \in a$. (Короче, в записи лемм 5—7, $T(v_T, a) = a$.)

Доказательство. По индуктивному предположению для любого a из H'_T лемма имеет место для всякой формулы А, в которой встречается меньше, чем k, связок, и мы показываем, что это продолжает иметь место для произвольной формулы А и любого a в том случае, когда число логических связок в А равно k. Для случая, когда $k=0$, это очевидно по определению v_T. Когда $k>0$, имеется четыре случая в зависимости от того, какая связка является главной в формуле А.

Случай 1. А есть В&С. Тогда $I(B\&C, a)=T$ тогда и только тогда, когда $I(B, a)=I(C, a)=T$, тогда и только тогда, когда (на основе индуктивного предположения) $B\in a$ и $C\in a$, тогда и только тогда, когда $B\&C\in a$.

Случай 2. А есть $B\vee C$. $I(B\vee C, a)=T$ тогда и только тогда, когда $I(B, a)=T$ или $I(C, a)=T$, тогда и только тогда, когда (на основе индуктивного предположения) $B\in a$ или $C\in a$, тогда и только тогда, когда $B\vee C\in a$ (так как a является простой).

Случай 3. А есть $\overline{B}$. $I(\overline{B}, a)=T$ тогда и только тогда, когда $I(B, a^*)=F$, тогда и только тогда, когда (на основании индуктивного предположения) $B\notin a^*$, тогда и только тогда, когда $\overline{B}_T\in a$.

Случай 4. А есть $B\rightarrow C$. $I(B\rightarrow C, a)=T$ тогда и только тогда, когда для всяких b, c из H'_T, если дано R'_Tabc и $I(B, b)=T$, то $I(C, c)=T$, тогда и только тогда, когда (на основе индуктивного предположения) (1) для всяких b, c из H'_T если дано R'_Tabc и $B\in b$, то $C\in c$. Мы должны показать, что (1) имеет место тогда и только тогда, когда (2) $B\rightarrow C\in a$.

Мы вспоминаем, что R'_Tabc означает, что $a\circ b\sqsubseteq c$ в исчислении интенсиональных R-теорий. Соответственно, то, что (2) влечет (1), тривиально, так как если $B\rightarrow C$ находится в a и В находится в b, то $(B\rightarrow C)\circ B$ находится в $a\circ b$ и, следовательно, в c при данном $a\circ b\sqsubseteq c$. Но формула $(B\rightarrow C)\circ B$ доказуемо R-влечет С, откуда $C\in c$, так как c есть интенсиональная R-теория.

Для того чтобы показать, что (1) влечет (2), достаточно применить максимизирующий аргумент леммы 12. Предположим, что $B\rightarrow C\notin a$. Мы показываем, что существуют b, c из H'_T, такие, что R'_Tabc, $B\in b$ и $C\notin c$; тогда по контрапозиции отсюда следует, что (1) влечет (2).

Если $B\rightarrow C\notin a$, то благодаря двойному отрицанию и определению $\circ$, $B\circ\overline{C}\in a^*$. Пусть [В], [$\overline{C}$] будут множествами формул, которые являются Т-следствиями В и $\overline{C}$ соответственно. Ясно, что они будут интенсиональными Т-теориями и $[B]\circ[\overline{C}]\sqsubseteq a^*$, так как мы можем принять, что a и, следовательно, a^* есть простые интенсиональные Т-теории. Но если a^* является простой, то, согласно лемме 12, мы можем найти простые интенсиональные Т-теории b и d, такие, что $[B]\sqsubseteq b$, $[\overline{C}]\sqsubseteq d$ и $b\circ d\sqsubseteq a^*$, и, используя аргумент, верифицирующий p5 и p6, получаем $a\circ b\sqsubseteq d^*$. Принимая c в качестве d^*, получаем R'_Tabc и $B\in b$; кроме того, С не находится в $c=d^*$ вследствие того, что $\overline{C}\in d=c^*$. А это как раз то, что требовалось; следовательно, мы закончили верификацию случая 4 и доказательство леммы 14.

Лемма 14 сводит проблему доказательства полноты для R к проблеме доказательства того, что каждая нетеорема не принадлежит к регулярной простой R-теории. Это было доказано уже в работе Мейера и Данна (1969), однако с целью полноты изложения мы приведем здесь это доказательство.

Лемма 15. *Пусть* А *будет не-теоремой системы* R *релевантной импликации. Тогда существует простая регулярная* R-*теория, не содержащая* А.

Доказательство. Согласно предположению, множество теорем является регулярной R-теорией, не содер жащей А. Упорядочивая множество всех регулярных R-теорий, не содержащих А, посредством теоретико-множественного включения, мы обнаруживаем, что каждая цепочка в этом множестве ограничена его объединением и, следовательно, по лемме Цорна, существует максимальная регулярная R-теория, не содержащая А. Назовем ее теорией T. Если $B\vee C\in T$, $B\notin T$ и $C\notin T$, то вследствие максимальности T R-теории $[T, B]$ и $[T, C]$, образованные так, как в доказательстве леммы 12, обе содержат А, откуда, согласно элементарным свойствам дизъюнкции и конъюнкции, вытекает, что T содержит А. Последнее невозможно, что и завершает доказательство леммы.

Полнота формулируется в следующей теореме.

Теорема 3. *Система* R *релевантной импликации* *семантически полна в том смысле, что все* R-*значимые формулы являются теоремами.*

Доказательство. Проведем рассуждение по контрапозиции. Допустим, что формула A системы R не является теоремой R. Мы доказываем, что A незначима. Действительно, если A не теорема, то, по лемме 15, существует регулярная простая R-теория T, такая, что $A \notin T$. Рассмотрим затем T-каноническую р.м.с. $\langle 0'_T, H'_T, R'_T, *' \rangle$, получаемую по лемме 13. Согласно лемме 14, $T(\nu_T, a) = a$ для каждого члена a из H'_T, где ν_T есть T-каноническая оценка; в частности, множество $T(\nu_T)$ формул, верифицированных при ν_T, есть, таким образом, 0_T, то есть само T. Поэтому A, в частности, не верифицировано при ν_T и, следовательно, является R-незначимой. На этом заканчивается доказательство теоремы 3 и соответственно семантической полноты R.

§ 8. Нормальные релевантные семантики: гамма принцип

В работе Мейера и Данна [1969] и других работах было затрачено много усилий для того, чтобы показать, что, когда A и $\overline{A} \vee B$ являются теоремами R (или близкой системы), тогда и B будет теоремой R. Обоснование этого принципа, известного со времен Аккермана как γ, потребовало сложной аргументации в работе Мейера и Данна [1969], но здесь это может быть сделано проще.

Пусть $\langle 0, K, R, * \rangle$ будет некоторой р.м.с. Будем называть $\langle 0, K, R, * \rangle$ *нормальной* при условии, что выполнен следующий постулат:

$$\text{p0.} \qquad 0 = 0^*.$$

Благодаря лемме 8 мы замечаем, что множество формул, верифицированных при некоторой оценке в нормальной р.м.с., образует нормальную R-теорию. Соответственно, множество формул, *значимых* в нормальной р.м.с., всегда замкнуто по γ, так как если A принадлежит к каждой из совокупности нормальных R-теорий, то $\overline{A}$ не может принадлежать ни одной из них, ибо нормальность предполагает непротиворечивость, и поэтому, если $\overline{A} \vee B$ принадлежит к каждому члену этой совокупности, формула B должна также принадлежать ко всем из них, так как нормальность предполагает также и простоту. Кроме того, можно доказать, что если мы всерьез хотим допустить мысль о том, что 0 образует реальный мир, то, может быть, следовало бы потребовать, чтобы значимость для системы R была охарактеризована как значимость во всех нормальных р.м.с., которую мы будем называть *нормальной* R-*значимостью*. Работа Мейера и Данна [1969] показывает, что значимость и нормальная значимость для R совпадают; это легко доказать.

Лемма 16. *Пусть* $\langle 0, K, R, * \rangle$ *будет некоторой р.м.с. Под ее нормализацией будем понимать структуру* $\langle 0', K', R', *' \rangle$, *в которой* $0'$ *есть новый элемент,* K' *получается посредством добавления* $0'$ *к* K, $*'$ *есть расширение* $*$ *на* K^*, *детерминированное условием* $0'^* = 0'$, и если a, b, c *являются элементами* K, *то для тройки элементов* K' *отношение* R' *должно удовлетворять следующим условиям:*

(i) $R'0'0'0'$;

(ii) $R'0'0'a$ тогда и только тогда, когда $R00a$;

[iii] $R'0'a0'$ и $R'a0'0'$ тогда и только тогда, когда $R0a0^*$;

(iv) $R'ab0'$ тогда и только тогда, когда $Rab0^*$,

(v) $R'0'ab$ и $R'a0'b$ тогда и только тогда, когда $R0ab$;

(vi) $R'abc$ тогда и только тогда, когда $Rabc$.

Тогда нормализация $\langle 0', K', R', *' \rangle$ *является нормальной р.м.с.*

Доказательство. Выполнение p0 декретировано; в то же время выполнение p1, p2 и p6 следует из того, что они имеют место для $\langle 0, K, R, * \rangle$, и из приведенных выше тривиальных спецификаций, включающих $0'$. Верификация p3—p5 требует несколько больших усилий, однако решающим является то, что R' имеет место среди членов K' тогда и только тогда, когда R имеет место среди членов K при замене вхождений $0'$ на первых двух аргументных местах на 0, а на последнем аргументном месте—на 0^*, за исключением случая $R'0'0'0'$. В верификации p3—p4 помощь оказывает тот факт, что $0^* < 0$ во всех р.м.с. Остальное—пустяки, которые едва ли заинтересуют читателя.

Теорема 4. R *непротиворечива и полна относительно нормальной семантики, представленной в этом* *параграфе, то есть формула* A *является теоремой* R *тогда и только тогда, когда* A *нормально* R*-значима.*

Доказательство. Если A является теоремой R, то, согласно теореме 2, она значима во всех р.м.с., включая нормальные, что и обосновывает нормальную семантическую непротиворечивость. И наоборот, если A не является теоремой R, то, согласно теореме 3, она не значима в некоторой р.м.с. $\langle 0, K, R, {}^*\rangle$ (короче — K), то есть существует оценка v с ассоциированной интерпретацией I, такая что $I(A, 0) = F$ в K. Пусть $\langle 0', K', R', {}^{*\prime}\rangle$ (короче — K') будет нормализацией K, существование которой гарантировано леммой 16. Расширяя v до оценки v' в K' таким образом, что v' согласуется с v, там, где v определена, и устанавливая $v(p, 0') = v(p, 0)$ для всякого параметра p, мы показываем, что (a) v' продолжает выполнять ограничивающее условие (1) на с. 372 и, следовательно, действительно является оценкой. Предположим, что для параметра p и точки a из K', $v'(p, a) = T$ и $R'0'ab$, $b \in K$. Мы показываем, что (b) $v'(p, b) = T$. Если a и b являются $0'$, то показывать нечего; если же ни одна из них не $0'$, то, согласно (v), $a < b$ в K и в силу того, что v есть оценка, (b) имеет место. Если $a = 0'$ и $b \in K$, то, по (ii), $0 < b$ находится в K и (b) имеет место, так как если p истинно в $0'$ по соглашению, то оно истинно в 0; наконец, если $a \in K$ и $b = 0'$, то, по (iii), $a < 0^*$ в K, и если $v(p, a) = T$, то $v(p, 0^*) = v(p, 0) = T$, так как $0^* < 0$, откуда, по соглашению, $v'(p, 0) = T$, что доказывает (a).

Пусть I' будет интерпретацией, ассоциированной с v'. Теперь мы показываем, что (c) для всякого a из K и для всякой формулы B $I'(B, a) = I(B, a)$ и (d) если $I(B, 0) = F$, то $I'(B, 0') = F$.

Доказываем (c) и (d) вместе индукцией по длине формулы B. Базисный случай, в котором B является параметром, уже доказан благодаря (a). Остается четыре случая в соответствии с тем, является ли главной связкой B &, v, — или →. По индуктивному предположению, (c) тривиально в первых трех случаях и благодаря этому (d) в этих случаях следует из леммы 1, так как $0' < 0$.

Предположим теперь, что B имеет форму C → D. Для доказательства (c) предположим сначала, что $a \neq 0'$ и $I(C \to D, d) = F$, тогда имеются b, c в K, такие, что $Rabc$, $I(C, b) = T$ и $I(D, c) = F$. Согласно (vi), $R'abc$ и, по индуктивному предположению, $I'(C, b) = T$ и $I'(D, c) = F$, откуда $I'(C \to D, a) = F$. Предположим, наоборот, что $a \neq 0'$ и $I'(C \to D, a) = F$. Тогда имеются b, c в K, такие, что $R'abc$, $I'(C, b) = T$ и $I'(D, c) = F$. Если $b, c \in K$, то, по индуктивному предположению, получаем $I(C \to D, a) = F$, обращая предыдущий аргумент. Предположим, что $b = 0'$, $c \in K$. По (d) и индуктивному предположению $I(C, 0) = T$, по (v), $R0ac$, что, по p3—p4, влечет $Ra0c$, а этого достаточно для того, чтобы показать, что $I(C \to D, a) = F$. Предположим, что $b \in K$ и $c = 0'$. Поскольку $0^* < 0$, то, по лемме 1, $I'(D, 0^*) = F$; в то же время, по (iv), $Rab0^*$ — этого достаточно для фальсификации C → D в a при I, согласно индуктивному предположению. Наконец, предположим, что $b = c = 0'$. Используя коммутацию и (iii), получаем $Ra00^*$, в то же время, по индуктивному предположению и лемме 1, $I(C, 0) = T$ и $I(D, 0^*) = F$, что фальсифицирует C → D в a при I и обосновывает, что для всякого a в K и всякой формулы B $I'(B, a) = I(B, a)$; (c) и (d) следуют отсюда, как и прежде, по лемме 1.

В заключение мы замечаем, что, поскольку для избранной нами не-теоремы A системы R $I(A, 0) = F$, то, согласно только что доказанному принципу (d), $I'(A, 0) = F$; в соответствии с этим A не является нормально R-значимой, что и завершает доказательство теоремы 4.

Следствие 4.1. γ *имеет место для* R, *то есть если* A *и* A∨B — *теоремы, то теоремой будет и* B.

Доказательство. Множество $T(v)$ формул, верифицированных при оценке v в нормальной р.м.с., замкнуто по модус поненс для материальной импликации, следовательно, таким же является и пересечение всех таких $T(v)$ для р.м.с., которая, согласно теореме, представляет множество доказуемых формул R.

§ 9. R-смешение и другие системы

Расширения семантики

Система R-смешения Данна и Мак-Колла получается из R посредством добавления новой аксиомной схемы A → (A → A). Соответствующим семантическим постулатом будет следующий:

$$\text{p7. } 0 < a \text{ или } 0 < a^*.$$

Соответственно, *р.м.с. смешения* пусть будет любая р.м.с., удовлетворяющая p1—p7, *а нормальной р.м.с. смешения* будет р.м.с. смешения, которая для всех элементов K удовлетворяет также p0. Пусть A будет RM-значима тогда и только тогда, когда A значима во всех р.м.с. смешения, и нормально RM-значима тогда и только тогда, когда A значима во всех нормальных р.м.с. смешения. Тогда мы получаем очевидное следствие предыдущей теоремы следующим образом.

Теорема 5. *Для всякой пропозициональной формулы* A *следующие условия эквивалентны:* (1) A *является теоремой* RM; (2) A—*RM-значима*, (3) A *нормально RM-значима*.

Доказательство. Доказательство теоремы 2 показывает, что (1) влечет (2) при условии, если мы покажем, что $A \to (A \to A)$ является RM-значимой. Достаточно заметить, что в RM, хотя она избегает наиболее грубых парадоксов, тем не менее из очень плохих формул следуют очень хорошие, то есть если B и C являются RM-значимыми, то $\overline{B}$ RM-влечет C. (Для доказательства этого примем, что B и C RM-значимы, и пусть $\overline{B}$ будет истинна в точке a в р.м.с. смешения при I. Тогда $a < 0^*$ не имеет места, так как в противном случае B, по лемме 1, была бы ложной в 0—в противоречии с ее значимостью; эквивалентно, согласно p5—p6, $0 < a^*$ не имеет места, откуда, по p7, $0 < a$; но тогда, по лемме 1, все RM-значимые формулы, включая C, истинны при I в a, так как, по определению RM-значимости, все они истинны в 0). Поэтому, в частности, так как $\overline{A \to A}$ R-значима и, следовательно, RM-значима, ее отрицание влечет саму эту формулу. Заметим, что в следующей последовательности формул каждый член R-следует из своего предшественника: $\overline{\overline{A \to A}} \to (A \to A)$, $A \to (\overline{A \to A} \to A)$, $A \to (\overline{A} \to (A \to A))$, $A \to (A \to (\overline{\overline{A}} \to A))$, $A \to (A \to A)$. Так как множество RM-значимых формул, очевидно, замкнуто по R-следованию, RM-значима, в частности, и формула $A \to (A \to A)$. После этого ясно, что (1) влечет (2) и (2) влечет (3). Метод теоремы 4 показывает, что если (2) влечет (1), то и (3) влечет (1). Мы заканчиваем доказательство теоремы 5, показывая, что (3) влечет (1).

Предположим, что C не является теоремой RM. Лемма 15 производит простую регулярную RM-теорию, не содержащую C, скажем теорию T, а теорема 3 показывает, что каноническая р.м.с. $\langle 0'_T, H'_T, R'_T, {}^{*\prime} \rangle$ делает C незначимой. Остается показать, что p7 истинен для этой р.м.с. Предположим, что для некоторого $a \in H'_T$, $0'_T = T \not\subseteq a$; мы показываем, что $T \subseteq a^*$. Пусть A принадлежит к T, но не к a; по определению *, $\overline{A} \in a^*$. Пусть B будет любым членом T. По стандартам, T, $\overline{A}$—плохая формула, а B—хорошая; и поскольку парадоксальные склонности RM являются как синтаксическими, так и семантическими, постольку благодаря RM-теореме $A\&B \to (\overline{A} \to B)$ оказывается, что $\overline{A} \to B$ принадлежит к T. Но тогда $B \in a^*$, так как члены H'_T замкнуты по T-следованию. B была произвольной формулой, поэтому $T \subseteq a^*$, что и требовалось доказать. Это завершает демонстрацию того, что избранная нами не-теорема C является RM-незначимой и на основе обобщения и контрапозиции все RM-значимые формулы представляют собой теоремы RM, что и заканчивает доказательство теоремы 5.

Однако p7 есть лишь один из многих постулатов, которые мы могли бы принять для того, чтобы получить R-смешение; из него следует, что $<$ является всеобщей в том смысле, что если $\langle 0, K, R^* \rangle$ есть р.м.с. смешения, то или $a < b$ или $b < a$ для всяких $a, b \in K$. При заданном постулате нормальности p0 всеобщее упорядочение тривиально влечет p7, хотя без p0 это не имеет места в общем[1]. Мы избираем p7 потому, что он точно указывает, как надо этот богатый семантический универсум для R сократить до R-смешения; грубо говоря, этот принцип добавляет только то, что „реальный мир" 0 будет рассматриваться как одна из альтернатив для RM. Если, в частности, мы требуем, чтобы 0 был нормальным и, следовательно, в принципе, описываемом непротиворечивой и полной теорией T, то p7 содержит то условие, что альтернативы к 0 должны описываться или посредством непротиворечивых под-теорий, или полной сверх-теорией T.

В работе Мейера [1968b] было доказано, что RM разрешима и имеет простую модель. Настоящий теорети-

[1] У нас есть конкретный контрпример.

ко-модельный подход дает эквивалентный результат: каждая не-теорема RM опровержима в конечной р.м.с. Сугихары ⟨0, K, R, *⟩, в которой K состоит из всех целых чисел в некотором интервале $[-m, m]$, 0 есть 0, * — есть? и Rabc имеет место для чисел a, b, c из K тогда и только тогда, когда наибольшее число из a, b по абсолютной величине $\leqslant c$; если a, b одинаковы по абсолютной величине, то наибольшее из этих чисел не превосходит c. Отсюда вытекает разрешимость RM. Единственным другим пунктом, ничего не изменяющим относительно данной здесь семантики для RM, является то, что в работах Мейера [1968b] и Данна [1970] введение числа 0 в модель делало эту модель не-нормальной, так как 0 был отрицанием; здесь не-нормальность не касается 0, так как в качестве реального мира принимается $+1$.

Если некоторая логика является расширением RM в том смысле, что она содержит все теоремы RM и замкнута по введению конъюнкции, модус поненс и подстановке, то, согласно результату работы Данна [1970], она имеет конечную характеристическую матрицу. Соответственно, естественным требованием к расширениям RM было бы введение в постулаты требования конечности; посредством добавления к p1—p7 постулата, говорящего о том, что K имеет не более чем, скажем, 9 членов, мы получаем расширение RM Данна; мы предоставляем Данну решать вопрос о том, а не получим ли мы их все, сокращая число членов до единственного элемента 0, когда все различия релевантности сливаются и мы возвращаемся к классической логике.

Несколько более интересным путем получения классической логики является усиление p7 до такого постулата:

$$\text{p7}'.\ 0 < a.$$

Демонстрация того, что p7′ дает классическую логику, требует окольного пути через *-постулат и является неполной без него. Для всякого a из K достаточно показать, что из $a < 0$ вытекает значимость всех классических теорем в р.м.с., удовлетворяющей p7′. Но это очевидно по p5—p6, так как $0 < a^*$, откуда $a = a^{**} < 0^* < 0$. Благодаря условию монотонности (1), наложенному на оценку, для всякого параметра p и всяких a, b из K имеет место $v(p, a) = v(p, b)$ для всякой оценки v всегда, когда выполнен постулат p7′, так как $a < 0 < b$, и наоборот; отсюда, согласно лемме 1, для всякой формулы A $I(\text{A}, a) = I(\text{A}, b) = I(\text{A}, 0)$, где I есть интерпретация, ассоциированная с v. Этого достаточно для того, чтобы сделать реальный мир действительно единственным, а все тавтологии значимыми.

§ 10. В сфере R+. Семантика позитивной логики

Мы вводим понятие p^+м.с. методом теоремы 3 как тройку элементов ⟨0, K, R⟩, для которой имеют место p1—p4. Возникает вопрос: предоставляет ли p^+м.с. жизнеспособную семантику для системы $R+$, задаваемой аксиомами A1—A11 системы R, не содержащими отрицания, и правилами R1—R2, в частности, для черчевской слабой теории импликации R_J, задаваемой с помощью A1—A4 и R1? Пусть семантические понятия охарактеризованы так же, как и выше, включая операцию * с ее постулатами и опуская отрицание и все, что с ним связано. В частности, пусть не содержащая отрицания формула R будет значима в p^+м.с. ⟨0, K, R⟩ тогда и только тогда, когда она истинна в каждой оценке, и пусть она будет R+-значима тогда и только тогда, когда она значима во всех p^+м.с. В дальнейшем мы опираемся на результаты некоторых предыдущих статей[1].

Лемма 17. *Пусть* A *будет не содержащей отрицания формулой системы* R. *Тогда* A *является теоремой* R, *если и только если* A R^+*-значима.*

Доказательство. Каждая р.м.с. есть, очевидно, также p^+.м.с., поэтому, если A R+-значима, то она и R-значима, откуда, по теореме 3, A есть теорема R. И наоборот, предположим, что A является теоремой R. В работе Мейера [1972b] было доказано, что A имеет доказательство в некоторой системе (назовем ее R++), которая получается из R+ посредством добавления интенсиональной конъюнкции ∘ в качестве дополнительного исходного знака и аксиомных схем:

A14. $\text{A} \to (\text{B} \to (\text{A} \circ \text{B}))$;
A15. $(\text{A} \to (\text{B} \to \text{C})) \to ((\text{A} \circ \text{B}) \to \text{C})$.

[1] В частности, на работы Мейера в [1972a] и [1972b].

Теперь мы принимаем рекурсивное условие $\mathbf{v}$ на с.372 в качестве исходного семантического постулата, как отмечено в примечании 10. Легко показать, что А14 и А15 являются R+-значимыми; другие леммы, приводящие к теореме 2, не затрагиваются, поэтому аргументация этой теоремы показывает, что все не содержащие отрицания теоремы R, будучи теоремами R++, являются R+-значимыми, включая, в частности, нашу теорему А, что и заканчивает доказательство теоремы 17.

Лемма 18. *Если формула* А *не является теоремой слабой теории импликации Чёрча* R_I *и если единственной связкой, встречающейся в* А, *является* →, *то* А *не будет* R+-*значимой*.

Доказательство. В работе Мейера [1972*a*] доказано, что при условии леммы А не является теоремой R, откуда заключение следует по лемме 17.

Лемма 19. *Пусть* А *будет не содержащей отрицания формулой* R. *В этом случае* А *будет теоремой* R *тогда и только тогда, когда* А *является теоремой* R+.

Доказательство. Доказательство слева направо почти тривиально. Предположим, что А есть теорема R. Как отмечено в доказательстве леммы 17, А является тогда теоремой системы R++. Остается показать, что R++ будет консервативным расширением R+, то есть что добавление ∘ и А14, А15 не производит новых теорем со связками &, ∨, → системы R+.

Для того чтобы это сделать, мы строим новое исчисление интенсиональных теорий для R+, как было сделано выше для R. Пусть R+-*теория* будет множеством T формул пропозиционального языка SL, не содержащих отрицания, которое замкнуто по введению конъюнкции и R+-следованию, то есть такое, что если $A \to B$ выводима из А—А11, R1, R2 и если $A \in T$, то $B \in T$. Пусть H^{+} будет множеством всех R+-теорий, и операция ∘ определяется на H^{+} следующим образом: для всяких a, b из $H+ \; a \circ b = \{C : C$ является не содержащей отрицания формулой и существуют А в a и В в b, такие, что $A \to (B \to C)$ есть теорема R+$\}$.

Исчисление интенсиональных R+-теорий в соответствии с предыдущими рассуждениями является структурой $H+ = \langle H+, \subseteq, \circ, 0+\rangle$, в которой $H+$, ∘ только что были определены, ⊆ — теоретико-множественное включение, 0+ есть множество теорем R+. Затем, как и в лемме 9, мы показываем, что определенная нами структура $H+$ есть частично упорядоченный, не имеющий степеней, коммутативный моноид с тождеством 0+; срабатывает стратегия доказательства леммы 9, выбор тактики предоставляется читателю.

Теперь мы переходим к подсовокупности $H+'$, состоящей из простых R+-теорий; в отличие от того, что было ранее, она включает 0+, что обосновывается методами работы Мейера [1972*c*]. Соответственно, рассмотрим структуру $\langle 0+, H+', R'\rangle$, в которой 0+ и $H+'$ таковы, как определено, и для всяких a, b, c из $H+'$ $R'abc$ тогда и только тогда, когда $a \circ b \subseteq c$. Как и в лемме 12, мы хотим показать, что $H+'$ есть p_{+}. м. с. Верификация p1, p2 и p4 опять является непосредственной; верификация закона Паша, p3, вновь зависит от доказательства того, что для всяких a, b из $H+$ и всякого c' из $H+'$ если $a \circ b \subseteq c'$, то благодаря простоте c' существует простое a' из $H+'$, такое, что $a \subseteq a'$ и $a' \circ b \subseteq c'$, что, будучи доказанным, обеспечивает следование закона Паша из ассоциативности операции ∘, определенной на интенсиональных теориях. Как легко может проверить читатель, аргумент леммы 12 в самом деле проходит беспрепятственно, показывая, что $\langle 0+, H+, R'\rangle$ является p_{+}. м. с. Соответственно, все теоремы R++ значимы в $\langle 0+, H+, R'\rangle$, поэтому мы можем закончить доказательство настоящей леммы, показав, что все не-теоремы R+ незначимы в $\langle 0+, H+', R'\rangle$.

Пусть *каноническая оценка* $\mathbf{v}+$ для каждого параметра p и простой R+ теории a из $H+'$ приписывает $\mathbf{v}+(p, a) = T$ тогда и только тогда, когда $p \in a$. Как и в лемме 14, мы хотим показать, что там, где $J+$ является интерпретацией, ассоциированной с $\mathbf{v}+$, $J+(A, a) = T$ тогда и только тогда, когда $A \in a$ для всякой формулы А системы R+ и члена a из $H+'$. Доказательство вновь проводится по индукции, в которой все случаи очевидны, кроме того, в котором А имеет форму $B \to C$, индуктивное предположение опять сводит этот случай к проблеме показа того, что $B \to C \in a$ тогда и только тогда, когда для всяких b, c из $H+'$ $B \in b$ и $R'abc$ влекут $C \in c$. Но $R'abc$ означает, что $a \circ b \subseteq c$, откуда, по определению, следует, что для всяких формул C, A и B, если $A \to (B \to C)$ есть теорема R+, $A \in a$ и $B \in b$, то $C \in c$. Импликация слева направо тривиальна, если принять само $B \to C$ в качестве требуемой подстановки для A. Предположим, наоборот, что $B \to C \in a$; мы хотим показать, что существуют b, c из $H+'$,такие, что $R'abc$, $B \in b$, но $C \in c$. Во всяком случае, в $H+$ такие элементы существуют. Примем, что [B] есть множество формул, которые доказуемо R+-следуют из B, и допустим, что c^+ есть $a \circ [B]$; тогда, если бы C находилась в c^+, существовали бы элементы A из a и B′, доказуемо следующий из B, такие, что формула $A \to (B' \to C)$ являлась бы теоремой R+, из чего благодаря замкнутости a по доказуемому R+-следованию легко вытекало бы, что $B \to C$ принадлежит к a — в противоречии с предположением. Но в таком случае, расширяя c^+ до максимальной и с помощью обычного рассуждения до простой теории c, которая не содержит C, а затем расширяя [B] до простой теории b, такой, что $a \circ b \subseteq c$, получаем благодаря результату, приведенному в середине последнего параграфа, все, что нам нужно; b и c — обе простые, $R'abc$ имеет место, $B \in b$ и $C \notin c$. Это завершает доказательство того, что v^+ выполняет то, что от нее требуется: произвольную формулу A она делает истинной тогда и только тогда, когда $A \in a$. В частности, благодаря тому, что 0+ является множеством теорем R+, $v+$ не делает истинной в 0+ любую не-теорему R+, что заканчивает доказательство того факта, что не-теоремы R+ остаются не-теоремами R++ и, следовательно, нетеоремами R. При данной выше конверсии лемма 19 доказана.

Теорема 6. *Пусть A будет не содержащей отрицания формулой R. Тогда A является теоремой R+* (то есть *выводится из не содержащих отрицания аксиом, исключая аксиомы для* o), *если и только если A — R+-значима. Кроме того, если A — чисто импликативная формула, то она будет теоремой слабой теории импликации* R_J *Чёрча тогда и только тогда*, когда *A — R+-значима.*

Доказательство. По лемме 17 и 19, если A не содержит отрицания, то она будет теоремой R+ тогда и только тогда, когда является теоремой R, что имеет место тогда и только тогда, когда она R+-значима. Это

доказывает первую часть теоремы. Вторая часть следует из первой и леммы 18.

Эта теорема вместе с родственными результатами работ Мейера [1972a] и [1972b] позволяет нам утвердительно ответить на важные вопросы относительно консервативного расширения системы R.

Теорема 7. R *вполне аксиоматизируема; для каждой из следующих комбинаций связок все теоремы с этими связками выводимы из аксиомных схем и правил* A1—A15, *содержащих лишь эти связки* [o-аксиомами являются A14, A15]:

$$\to;\ \to,\ -;\ \to,\ \circ;\ \to,\ -,\ \circ;\ \to,\ \&;\ \to,\ \vee,\ \&;\ \to,\ \circ,\ \&;\ \to,\ \circ,\ \&,\ \vee;\ \to,\ -,\ \&,\ \vee.$$

Доказательство. Во всех случаях доказательство или уже было дано, или может быть найдено в работах Мейера [1972a] и [1972b], либо легко следует из результатов, данных в одной из этих работ.

Теорема 7 отвечает для системы R на вопрос, заданный в работе Андерсона [1963] относительно системы E.

§ 11. Интуиционизм. Расширение позитивной семантики

Выше мы заметили, что добавление к постулатам для р. м. с. постулата $0 < a$ приводит к классической логике. Но тот же результат может быть достигнут через *-постулаты, то есть через отрицание. Менее сильным средством будет добавление к постулатам для p^+.м.с. постулата $p7' : 0 < a$. Это делает значимыми не все классически значимые формулы, не содержащие отрицания, а только те, которые интуиционистски значимы. Этот результат мы представляем в виде теоремы.

Теорема 8. *Пусть и.м.с. будет такой же структурой* ⟨0, K, R⟩, как и выше, удовлетворяющей p1—p4, p7′. *Тогда формула A значима во всякой и.м.с. тогда и только тогда, когда A является не содержащей отрицания теоремой интуиционистского пропозиционального исчисления I. Посредством расширения понятия интерпретации так, что для всякого* $a \in K$ $I(\neg A, b) = T$ *тогда и только тогда, когда для всякого* b, *такого, что* $a < b$, $I(A, b) = F$, *мы можем охарактеризовать интуиционист-*

ское отрицание также и в стиле Крипке; так что теоремы I, и только они, будут значимы во всех и. м. с.

Доказательство. Оно было дано в работе Крипке [1965] и здесь едва ли необходимо. Мы просто замечаем, что $Rabc$ влечет $b < c$ и $a < c$ при данных постулатах p7′, p3—p4 и d1, d2. И наоборот, если $b < c$ и $a < c$, то, согласно p2, $Rccc$, отсюда следует $Rabc$, по p3—p4, p7′. Соответственно, R может быть определено через отношение $<$, и простая проверка показывает, что постулаты требуют от $<$ рефлексивности, транзитивности и того, чтобы 0 находился в этом отношении ко всякому a из K. Хотя Крипке не требует последнего свойства от своего бинарного отношения достижимости для интуиционистской семантики, но его *древовидная м. с.* обладает им, поэтому отношение Крипке можно отождествить с нашим отношением $<$. На этом и заканчивается доказательство того, что только интуиционистски значимые формулы значимы во всех и. м. с.

Теорема 8 точно выражает тот аспект, в котором интуитивные соображения, лежащие в основе релевантных логик, отходят от тех соображений, на которых покоится пропозициональная часть интуиционизма. В терминах нашей исходной мотивировки оказывается, что все то, в чем нуждается интуиционизм и, *между прочим*, классическая логика, есть приемлемый способ утверждать *совместимость* двух предложений A и B. Один способ сделать это состоит в утверждении A&B, другим — является утверждение $\urcorner(A \supset \urcorner B)$, что эквивалентно формуле $\urcorner\urcorner(A\&B)$, которая выглядит не намного лучше. В любом случае, как показывает доказательство теоремы 8, мы ослабляем позитивные релевантные интуитивные соображения до интуиционистской интуиции, когда считаем, что две теории совместимы относительно третьей, если всегда, когда A имеет место в первой и B — во второй, A&B имеет место в третьей. Не удивительно, можем мы добавить, что интуиционистская логика не устраняет парадоксов релевантной.

И все-таки, интуиционизм, особенно в той его части, которая не содержит отрицания, представляет удобный промежуточный путь между классической и релевантной логиками. (Промежуточным в другом смысле является R-смешение, см. работу Мейера [1968]). На этот факт

указывает следующее простое следствие теоремы 8 (доказанное в работе Мейера [1972b], но заслуживающее упоминания и здесь).

Следствие 8.1. *Все не содержащие отрицания теоремы R интуиционистски значимы.*

Доказательство проводится, согласно теоремам 6 и 8, так как все и. м. с. являются р. м. с.

Другие системы, промежуточные между R+ и классической пропозициональной логикой, например система Даммета LC, позитивная часть RM+-системы R-смешения Данна, могут быть получены посредством добавления различных постулатов.

§ 12. Введение к пропозициональной квантификации. Теория суждений

Как было показано Андерсоном, Белнапом, Гровером и другими, большой интерес вызывает добавление к релевантным логикам теории пропозициональной квантификации[1]. В связи с этим интересом и для полноты философского рассмотрения мы в последующих параграфах наметим несколько способов введения пропозициональной квантификации в нашу семантику.

Прежде чем погрузиться в формализм пропозициональной квантификации, естественно поставить вопрос: к чему относятся пропозициональные кванторы? У нас есть два ответа: а) к суждениям, b) к предложениям. Многие содрогаются, когда дают первый ответ, или по крайней мере опираются на него. Сегодня нетрудно сохранять хладнокровие, ибо выяснилось, что суждения могут быть построены просто как *множества*, а против этих полезных *экстенсиональных* фикций едва ли стоит возражать.

Отложив в сторону окончательные онтологические обязательства, суждение с современной точки зрения рассматривают как нечто такое, что соответствует определенному распределению истинностных значений в мире, а суждения, истинностные значения которых являются одними и теми же во всех мирах, отождествляются. Чтобы не

[1] См. работы Андерсона и Белнапа [1961], Мейера [1972d], Андерсона [1972] и докторскую диссертацию Гровера (Питтсбургский университет, 1969).

отстать от моды, суждение можно строить как множество, а именно как множество всех миров, в которых суждение истинно.

Пусть $\mathbf{K}=\langle 0, K, R, ^*\rangle$ будет р.м.с. Принимая во внимание условие (1) и данные выше пояснительные замечания, *суждение в* $\mathbf{K}$ будем считать любым подмножеством $J\subseteq K$, которое *замкнуто сверху*, то есть такое, что всегда, когда $a\in J$, $b\in K$ и (привлекая d1) $a<b$, имеет место $b\in J$. Пусть *алгебра суждений* $\Pi(\mathbf{K})$, *детерминируемая посредством* $\mathbf{K}$, *будет пятеркой элементов* $\langle\Pi, \circ, \cup, -, 1\rangle$, охарактеризованных следующим образом:

(1) Π есть множество всех суждений в K;

(2) $\cup$ — обобщенная операция теоретико-множественного объединения подмножеств Γ из Π.

(3) $1=\{a:a\in K$ и $0<a\}$;

(4) для $F, G\in\Pi$;

a) $F\circ G=\{c:\exists a\exists b\,(a\in F\&b\in G\&Rabc)\}$;

b) $\overline{F}=\{c:c\in K\&c^*\in F\}$.

Первая серьезная попытка снабдить релевантные логики R и E — или, скорее их первопорядковые части — теорией суждений была сделана в работе Белнапа [1967]. Белнап не пояснил, что он понимает под суждениями, и хотя он ассоциирует суждения с логическим содержание предложений, это мало помогает[1]. Но он удивительно ясно осознал тот вид алгебраической структуры, который, с его точки зрения, характеризует их, а именно: суждения могли быть построены как интенсионально дополненные дистрибутивные решетки с истинностным фильтром[2].

Алгебраические идеи Белнапа были развиты и усовершенствованы с особым вниманием к системе R для создания понятия *моноида де-Моргана*, использованного, как уже отмечалось ранее, Данном для доказательства алгебраической полноты R[3]. Кроме того, для развитой здесь

[1] В работе Белнапа [1967], с. 8.

[2] Терминологию и ее применение см. опять в работе Белнапа, [1967]. Мейер везде называет эти структуры „решетками Белнапа". В качестве другого названия Белнап предложил термин „нормальная решетка де-Моргана".

[3] Наиболее доступное изложение см. в работе Мейера и др. [1972]; более полное извлечение из диссертации Данна дано в работе Андерсона и Белнапа [1972].

теории суждений эти идеи оказываются существенно корректными; если дана некоторая р.м.с., то алгебра суждений, ассоциированная с ней, действительно является моноидом де-Моргана, что будет показано ниже после приведения соответствующих определений.

Грубо говоря, структура $\mathbf{D}=\langle D, \circ, \vee, -, 1\rangle$ представляет собой моноид де-Моргана, если D есть множество $1\in D$ и $\circ$, $\vee$-бинарные, а $-$ унарная операция на D, такие, что если $a\wedge b$ определено посредством закона де-Моргана как $-(-a\vee -b)$, то D служит дистрибутивной решеткой при $\wedge$, а $\vee$ — коммутативным моноидом при $\circ$ (с 1 в качестве моноидного тождества) и вдобавок имеют место следующие определения и постулаты:

q1. $a<b$ тогда и только тогда, когда $a\vee b=b$;

q2. $a\to b=_{\mathrm{df}}-(a\circ -b)$;

q3. $a^2=_{\mathrm{df}}a\circ a$;

q4. $a<a^2$ (постулат наличия *квадратов*);

q5. $a\circ(b\vee c)=(a\circ b)\vee(a\circ c)$;

q6. $a\circ(a\to b)<b$;

q7. $--a=a$.

О моноидах де-Моргана см. работу Мейера и др. [1972] и работы Данна, цитируемые здесь.

Моноид де-Моргана является *полным* при условии, что он будет полным в качестве решетки, то есть при условии, что для каждого подмножества S множества D существует наибольшая нижняя граница $\wedge S$ и наименьшая верхняя $\vee S$; они принадлежат к D и бесконечные дистрибутивные законы имеют место в следующей форме для всякого $a\in D$ и $S\subseteq D$.

$$\text{q8. } a\wedge\vee S=\vee\{a\wedge s:s\in s\};$$
$$\text{q9. } a\circ\vee S=\{\vee a\circ s:s\in s\}.$$

Теорема 9. *Алгебра суждений, детерминируемая посредством р.м.с.* $\langle 0, K, R, ^*\rangle$, *является полным моноидом де-Моргана.*

Доказательство. Пусть $\Pi(\mathbf{K})=\langle\Pi, \circ, \cup, -1\rangle$ будет алгеброй суждений, определенной выше. Мы замечаем, что $\circ$ и, $-$, применяемые к членам Π и $\cup$, применяемая к подмножествам Π, дают замкнутые сверху подмножества K, то есть опять члены Π. Определяя для членов F и G и подмножества Γ из П:

$$(c)\ F \vee G =_{df} \cup \{F, G\},$$

$$(d)\ \cap \Gamma =_{df} \overline{\cup} \{F : \overline{F} \in \Gamma\};$$

$$(e)\ F \wedge G =_{df} \cap \{F, G\},$$

мы замечаем, что все постулаты и определения для полного моноида де-Моргана выполнены для $\Pi(K)$, что и завершает доказательство.

Следствие 9.1[1]. *Каждый простой моноид де-Моргана можно вложить в простой полный моноид де-Моргана, элементами которого являются множества с обобщенным моноидным пересечением* $\cap$, *объединением* $\cup$ *и упорядочением* $\subseteq$, *которые могут быть отождествлены с соответствующими теоретико-множественными пересечением, объединением и включением.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{D} = \langle D, \circ, \vee, -, 1\rangle$ будет простым моноидом де-Моргана. $F \subseteq D$ является, как обычно, *фильтром* на $\mathbf{D}$ при условии, что для всяких x, $y \in D$, $x \wedge y \in F$ тогда и только тогда, когда x и y — оба находятся в F, кроме того, F будет *простым фильтром* тогда и только тогда, когда для всяких $x, y \in D$, $x \vee y \in F$ тогда и только тогда, когда по крайней мере или x или y принадлежит к F. Пусть K есть множество всех простых фильтров на D; 0 будет главным фильтром, детерминируемым посредством 1, то есть $0 = \{x : 1 < x \text{ в } D\}$; R — тернарное отношение, которое имеет место между a, b, c из K тогда и только тогда, когда для всяких x, y из D всегда если $x \in a$ и $y \in b$, то $x \circ y \in c$; $*$ — операция на K, такая, что для всякого $x \in D$ и $a \in K$, $x \in a^*$ тогда и только тогда, когда $\overline{x} \notin a$. Все это в алгебраической форме выражает просто то, что уже было в синтаксической форме развито в параграфах 6 и 7 и методами этих параграфов легко доказывается, а именно, что $\langle 0, K, R, *\rangle$ есть р.м.с.

Рассмотрим теперь алгебру суждений $\Pi(\mathbf{K})$, определенную посредством условий (1)—(4) этого параграфа. $\Pi(\mathbf{K})$ является полным моноидом де-Моргана, по теореме 9, а $\cap$, $\cup$ и $\subseteq$ есть, по определению, пересечение, объединение и включение. Предположим, что для некоторого подмножества I множества $\Pi(K)$ тождество $1_{\Pi(K)}$ множества $\Pi(K)$ включено в $\cup I$. Так как, по определению, $1_{\Pi(K)}$ есть множество супермножеств 0, которые принадлежат к $\Pi(K)$, то 0, в частности, принадлежит к $1_{\Pi(K)}$, из чего вытекает, согласно предположению, что 0 принадлежит к некоторому I_i в I. Но I_i, по определению, замкнуто сверху, и поэтому не только $\{0\}$, но и все элементы из $1_{\Pi(K)} \subseteq I_i$. Это доказывает как то, что $\Pi(K)$ является простым, так и то, что оно полно в том смысле, что всегда, когда $1_{\Pi(K)}$ есть подмножество обобщенного объединения элементов $\Pi(K)$, оно будет подмножеством одного из этих элементов.

Пусть h будет функцией из D в $\Pi(K)$, которая отображает каждый элемент x из D в множество $h(x)$ простых фильтров на D, к которому принадлежит x. Благодаря репрезентационной теореме Стоуна для дистрибутивных решеток добавление h сохраняет $\wedge$ и $\vee$; методы Бялыницкой-Бируля и Расевой [1957] могут быть приспособлены для работы с —, и несложная проверка показывает, что $-h(x) = h(-x)$; наконец, чтобы показать, что h сохраняет $\circ$, констатируем, что $a \in h(x \circ y)$ тогда и только тогда, когда $x \circ y \in a$; последнее имеет место тогда и только тогда, когда (алгебраизируя рассуждение леммы 12) существуют простые фильтры b, c на D, такие, что $x \in b$, $y \in c$ и $Rbca$, а это в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда $a \in h(x) \circ h(y)$. Это показывает, что h есть изоморфное отображение $\mathbf{D}$ в простой полный моноид де-Моргана $\Pi(\mathbf{K})$ и заканчивает доказательство следствия 9.1.

Следствие 9.2. *Каждый моноид де-Моргана можно вложить в полный моноид де-Моргана.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{D}$ будет моноидом де-Моргана и пусть $\{F_i\}_{i \in I}$ будет индексированным множеством всех простых фильтров, которые содержат тождество 1 моноида $\mathbf{D}$. Структуры $\langle 0_i, K_i, R_i, {}^{*}_{i}\rangle$ для каждого i в I определим следующим образом: 0_i есть F_i, K_i есть множество всех простых фильтров на $\mathbf{D}$, которые замкнуты по модулю F_i, то есть таких, что простой фильтр G принадлежит K_i тогда и только тогда, когда если $x \in G$ и $x \to y \in F_i$, то $y \in G$; заметим, что $0_i \in K_i$; R_i есть терна-

[1] Данное и дальнейшее следствия используют методы Стоуна (см. Расева и Сикорский [1963]) погружения моноидов де-Моргана в полные моноиды де-Моргана. Как и в работе Мейера и др. [1972] моноид де-Моргана прост, если всегда, когда $1 < a \vee b$, $1 < a$ или $1 < b$.

ное отношение на K_i такое, что $R_i abc$ тогда и только тогда, когда если $x \in a$ и $y \in b$, то $x \circ y \in c$; $\overset{*}{i}$ есть операция на K_i такая, что $x \in a^*$ тогда и только тогда, когда $-x \notin a$, заметим, что R_i и $\overset{*}{i}$ являются ограничениями до K_i определенных выше R и * и доказательство того, что для каждого i в I структуре $\langle 0_i, K_i, R_i, \overset{*}{i} \rangle$ является р.м.с. может быть проведено, как и прежде.

Теперь мы определяем *произведение структур* $x_{i \in I} \langle 0_i, K_i, R_i, \overset{*}{i} \rangle = \langle 0, K, R^* \rangle$, устанавливая, что K есть декартово произведение $x_{i \in I} I_i$, 0 — элемент K, который является 0_i для каждой координаты i и $R abc$ и $a^* = b$ имеют место соответственно тогда и только тогда, когда для каждого i в I $R_i a_i b_i c_i$ и $a_i^* = b_i$. Легко проверить, что произведение структур есть р.м.с., если известно, что́ представляет собой каждый компонент этой структуры. Рассмотрим снова алгебру суждений $\Pi(K)$, которая, согласно теореме, представляет полный моноид де-Моргана. Определим функцию h из D в $\Pi(K)$, устанавливая, что i-й компонент $h(a)$ будет множеством членов K_i, к которым принадлежит a. Заметим, что если $a \nless b$ в **D**, $1 \nless a \to b$, то по теореме Стоуна, существует простой F_i, такой, что $1 \in F_i$, но $a \to b \in F_i$; если рассмотреть множество всех фильтров на **D**, которые замкнуты по модулю F_i и содержат a, но не содержат b, то применение леммы Цорна дает некоторый максимальный фильтр, который оказывается простым и поэтому принадлежит к K_i; отсюда следует, что если $a \neq b$, то на некоторых компонентах множества $h(a)$ и $h(b)$ будут различаться, то есть h есть 1 — 1. Теперь остается только доказать, что h сохраняет операции **D**. Так как они определены на точках, это доказательство будет таким же, как в доказательстве предыдущего следствия. На этом доказательство следствия 9.2 заканчивается.

Так как моноиды де-Моргана алгебраизируют R, наши следствия можно рассматривать как выражение некоторой синтаксической информации, например информация о том, что система RP системы R с пропозициональными кванторами является консервативным расширением бескванторной системы. Но мы не будем задерживаться на обсуждении этого вопроса.

Наша теория суждений оказывается алгебраической (исходя из того, что нам уже известно, было бы весьма удивительно, если бы это было не так), но она имеет большее отношение к логике, чем к развитию некоторой формы репрезентационной теоремы Стоуна. Как, например, наша теория суждений относится к утверждению о том, что каждое суждение истинно или ложно — этому важному свойству описанной выше теории Белнапа? Действительно, что значит для суждения быть истинным или ложным?

Как можно предполагать, мы допускаем различные ответы. При доказательстве полноты мы видели, что регулярные простые теории дают начало релевантным модельным структурам, а последние могут быть нормальными или не-нормальными. Если основополагающая р. м. с. нормальна, то есть если $0 = 0^*$, то и алгебра суждений $\Pi(\mathbf{K})$ будет нормальной в том смысле, что для каждого суждения F из $\Pi(\mathbf{K})$ мы имеем только $1 \subseteq F$ или $1 \subseteq \overline{F}$, где алгебраическое тождество 1 функционирует как то, что Кокьярелла назвал *суждением о мире*, то есть таким суждением, которое истинно в «реальном» мире 0 и во всех мирах, содержащих его, и ложно в остальных случаях. Поэтому принимая $1 \subseteq F$ в качестве стандарта для *истинности* суждения F, мы получаем, что нормальные теории, нормальные р. м. с. и нормальные пропозициональные структуры развертываются совместно. (То, что нормальные теории детерминируют нормальные р. м. с., мы видели и выше. Предположим, что $\langle 0, K, R, ^* \rangle$ нормальна, для доказательства того, что $\Pi(\mathbf{K})$ нормальна, предположим, для сведения к абсурду, что имеет место и $1 \subseteq F$ и $1 \subseteq \overline{F}$. Тогда, в частности в силу того, что $0 \in 1$, получим $0 \in F$ и $0 \in \overline{F}$, то есть $0^* \notin F$, но $0 = 0^*$, согласно предположению нормальности $\langle 0, K, R, ^* \rangle$, — противоречие. С другой стороны, предположим в общем, что $1 \not\subseteq F$. Тогда некоторый член 1 не принадлежит F, и, так как 1 замкнуто сверху и содержит наименьший член 0, получаем, в частности, $0 \notin F$. Отсюда, по определению, $0^* \in \overline{F}$. Но $0^* < 0$, и в силу того, что $\overline{F}$ замкнуто сверху, $0 \in \overline{F}$; следовательно, $1 \subseteq \overline{F}$.)

Последняя часть только что представленного доказательства кажется, к сожалению, асимметричной. Независимо от того, является *р. м. с.* нормальной или нет, наш критерий истины для суждений позволяет, по-видимому, *и* суждению, *и* его отрицанию быть истинным, но не допускает возможности того, что *ни одно* из них не истинно. Об этом можно было бы поговорить (непротиворечивость кажется нам более важной, чем полнота), но едва ли это нужно. Мы характеризовали истинность суждений относительно «реального» мира 0, и наши условия, наложенные на реальный мир, допускали противоречивость, но не неполноту; желаемую неполноту (не обязательно относительно истин) можно получить, просто приняв нашу характеристику суждения как истинного или ложного относительно некоторого другого положения дел. Мы можем сделать это даже в том случае, если захотим, чтобы реальный мир был нормальным, то есть чтобы $0=0^*$. И наоборот, мы можем сделать реальный мир даже еще более не-нормальным — допуская неполноту — посредством ослабления постулатов таким образом, чтобы предотвратить выведение $0^* < 0$; общий постулат рефлексивности p2, разрешающий сведение к абсурду и закон исключенного третьего, по-видимому, должен быть ослаблен в первую очередь.

В любом случае, имея суждения, мы располагаем тем, что позволяет нам ввести квантификацию.

§ 13. Пропозициональные семантики для RP

Имея теорию суждений, развитую в последнем параграфе, мы рассмотрим здесь результат добавления к R аппарата пропозициональной квантификации. *Пропозициональным языком* PL будет пятерка элементов $\langle S, V, O, Q, F\rangle$, в которой S, как и прежде, есть множество параметров, V — счетно-бесконечное множество пропозициональных *переменных*, O — как и прежде, множество связок $\{\rightarrow, \&, \vee, -\}$, Q — множество универсальных кванторов (P) (один для каждой переменной P в V) и F — наименьшее множество, такое, что $S \cup V \subseteq F$, и такое, что оно содержит $A \& B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\overline{A}$ и $(P)A$, если оно содержит A и B для всякого P в V. Мы продолжаем использовать буквы „p“, „q“ и т. д. для пропозициональных параметров и будем использовать „P“, „Q“ и т. д. для пропозициональных переменных. Члены F называются *формулами* PL; формулы, в которых переменные не встречаются свободно, называются *предложениями*. (С точки зрения синтаксиса, нас будут интересовать только предложения, синтаксическую роль которых пришлось бы приписать свободным переменным, выступающим вместо параметров, которые могут встречаться в предложениях.) Пусть A будет любой формулой PL. *Замыканием* A будет, как обычно, любое предложение B, которое получается из A посредством постановки перед ним нуля или большего числа универсальных пропозициональных кванторов.

Пусть B будет какой-либо формулой. A [B/P] будет результатом подстановки формулы B вместо каждого свободного вхождения P в A, переименовывая связанные переменные, если это необходимо, для того, чтобы избежать смешения.

Теперь мы охарактеризуем релевантное *пропозициональное* исчисление RP. (Первая явная формулировка RP встречается в работе Андерсона [1972].) В качестве аксиом мы принимаем *все замкнутые* формулы вида A1 — A13 вместе со следующими новыми аксиомными схемами:

A16. $(P)A \rightarrow A[B/P]$;
A17. $(P)(A \rightarrow B) \rightarrow ((P)A \rightarrow (P)B)$;
A18. $(P)(A \vee B) \rightarrow ((P)A \vee B)$, если P не свободна в B;
A19. $B \rightarrow (P)B$, если P не свободна в B;
A20. $(P)A \& (P)B \rightarrow (P)(A \& B)$.

Правилами, как и прежде, являются модус поненс и введение конъюнкции.

Связки $\circ$ и $\leftrightarrow$ вводятся прежними определениями. Обычным образом определяются $\exists$ и некоторые полезные константы[1]:

D3. $\exists PA =_{df} \overline{(P)\overline{A}}$;
D4. $t =_{df} (P)(P \rightarrow P)$;
D5. $f =_{df} \overline{t}$;
D6. $F =_{df} (P)P$;
D7. $T =_{df} \overline{F}$.

Пусть теперь $\langle 0, K, R, {}^*\rangle$ будет некоторой р. м. с., и пусть $\Pi(K) = \langle \Pi, \circ, \cup, -, 1\rangle$ будет соответствующей алгеброй суждений, определенной в предшествующем параграфе. *Приписывание суждений* в K есть функция α,

[1] См. работу Мейера [1972d]; несущественные отличия в формулировке RP имеются как там, так и в работе Андерсона [1972].

определенная на S, $\cup$, V со значениями в Π. Мы приспосабливаем технику Лебланка, характеризуя приписывание α как P-вариант α' при условии, что α и α' согласуются на $S \cup V - \{P\}$, то есть два приписывания являются P-вариантами одно другого, если они различаются, *самое большее*, p приписыванием различных суждений P.

Приписывание суждений α в р. м. с. K детерминирует ассоциированную *оценку* v и *интерпретацию* I в смысле параграфа 3, то есть для каждой пропозициональной переменной или параметра A в PL мы будем иметь оценку v, ассоциированную с α:

(i) $v(A, \alpha) = T$ тогда и только тогда, когда $a \in \alpha(A)$. Рекурсивные пункты (ii) — (vi) на с. 14 могут быть оставлены без изменений.

Для пропозициональных кванторов мы добавляем (причем Π определено выше):

(vii) $I(P)(A, a) = T$ тогда и только тогда, когда для каждой интерпретации I', детерминируемой посредством P-варианта $\alpha - \alpha'$, $\alpha'(P) \in \Pi$; $I'(A, a) = T$;

(viii) $I(\exists PA, a) = T$ тогда и только тогда, когда для некоторой интерпретации I', детерминируемой посредством *P-варианта* $\alpha - \alpha'$, $\alpha'(P) \in \Pi$, $I'(A, a) = T$.

(Поскольку мы не принимаем $\exists$ в качестве исходного знака, заметим, что (vii) вместе с (vi) влечет (viii).)

Понятия *истинности при приписывании* или *при ассоциированной оценке, верификации, следования* и *значимости* могут быть взяты из параграфа 3. В частности, формула A является RP-*значимой* тогда и только тогда, когда она истинна при всех приписываниях суждений ее пропозициональным переменным во всех р. м. с. $\langle 0, K, R, ^* \rangle$. Следует заметить, что так как суждения, по определению, замкнуты сверху, ограничение (1) из параграфа 3 автоматически выполнено.

§ 14. Непротиворечивость пропозициональной семантики. Вторичные р. м. с.

Доказать, что RP непротиворечива относительно предполагаемой семантической интерпретации, означает повторить аргументы параграфов 4 и 5, сохраняя все леммы при расширенном словаре. Поэтому мы непосредственно устанавливаем:

Теорема 10. *Все теоремы* RP *являются* RP-*значимыми.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно, расширяя лемму 1 и теорему 1 на новые контексты, снова показать, что все аксиомы значимы и все правила сохраняют значимость. Некоторый интерес представляет только A16. Примем для произвольного р. м. с., что $I((P)A, a) = T$; достаточно посредством нашей усовершенствованной теоремы 1 показать, что $I(A[B/P], a) = T$ для произвольного B. Действительно, пусть $\beta(B)$ будет множеством всех b в K, таких, что $I(B, b) = T$. По лемме 1, $\beta(B)$ замкнуто сверху, поэтому $\beta(B) \in \Pi$. Но так как $(P)A$ истинно в a при I, A истинна при интерпретации I', которая во всем подобна I для пропозициональных переменных, за исключением того, что устанавливается $I'(P, b) = T$ тогда и только тогда, когда $b \in \beta(B)$, то есть тогда и только тогда, когда $I(B, b) = T$ для всякого b в K. Очевидный индуктивный аргумент по длине A дает в заключение $I(A[B/P]) = T$, что и заканчивает наше доказательство теоремы.

Хотя в настоящее время у нас нет доказательства, имеются, к сожалению, основания думать, что конверсия теоремы 10 неверна. Эти основания могут быть различными, но проще всего было бы сказать, что пропозициональная квантификация является существенно второпорядковой, ибо пропозициональные буквы рассматриваются как 0-арные *предикаты*. Поэтому способ доказательства полноты для RP состоит, кажется, в модификации того аппарата, посредством которого Генкин [1950] доказал полноту для логик высшего прядка, но со ссылкой не только на предполагаемую *первичную* интерпретацию, а на класс *вторичных* интерпретаций, в которых кванторы относятся не ко *всем* суждениям, а к суждениям некоторого *подмножества* множества всех суждений. Хорошо известно, что не каждое подмножество пригодно для этого.

Этот *принцип сокращения* был применен Буллом [1969] при доказательстве полноты пропозиционального варианта S4 и S5[1]. Здесь мы применяем его посредством характеристики *вторичной* (р. м. с. как пары элементов $\langle K, \Gamma \rangle$, в которой $K = \langle 0, K, R, ^* \rangle$ есть р. м. с. и $\Gamma \subseteq \Pi$, где Π, как и выше, есть множество всех суждений в K. Прини-

[1] Выражение «принцип сокращения» принадлежит, насколько нам известно, Кокьярелле.

сывание характеризуется, как и выше, при том ограничении, что его значениями при α всегда будут члены Г. Аналогично, α' не рассматривается как P-вариант α, если не имеет места $\alpha'(P) \in \Gamma$. Оценки, интерпретации и т. д. могут затем быть охарактеризованы, как и прежде, за исключением того, что (ранее пустой) пункт $\alpha'(P) \in \Pi$ в (vii) и (viii) устанавливается как $\alpha'(P) \in \Gamma$. Тогда некоторая формула будет значима во вторичной модели $\langle K, \Gamma \rangle$ тогда и только тогда, когда она верифицирована при всех приписываниях в этой модели.

В любом случае мы имеем:

Теорема 11. *Каждая теорема* RP, *доказательство которой не требует* A16, *значима во всех вторичных р. м. с.* $\langle K, \Gamma \rangle$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.

Наш обход A16 является обычным в этих случаях; действительно, хотя A16 имеет место, когда другая переменная или параметр подставляется вместо универсально квантифицированного P, мы можем найти вторичную модель $\langle K, \Gamma \rangle$, которая будет опровергать такое простое следствие из нее, как $\exists R\,(R \leftrightarrow p \,\&\, q)$. (См. работу Генкина [1953] относительно связанной с этим дискуссии.) Так как именно спецификация является тем главным, что заставляет налагать странные ограничения на модели для логики второго порядка и теории типов, то, по существу, мы отбираем привилегированную вторичную р. м. с. (то есть ту, в которой все аксиомы, в частности A16, значимы). Но это не настолько произвольно, как может показаться, поскольку равнозначно обычному требованию, чтобы в привилегированной р. м. с. суждения были замкнуты в определенном разумном смысле. Это означает, что выбор $X \subseteq \Pi$, сокращающий область пропозиционального квантора, не является произвольным, так как мы должны принимать во внимание не только те суждения, которые приписываются пропозициональным переменным, но также и сложные суждения, которые могут быть образованы из них; отсутствие конъюнкции, например, происходит вследствие отсутствия замыкания множества суждений по пересечению, которое позволяет ввести логическую операцию конъюнкции.

Таков набросок нашей пропозициональной семантики; теперь мы переходим к рассмотрению интерпретации пропозициональных кванторов как относящихся к предложениям.

§ 15. Подстановочная семантика. Первопорядковая семантика

Мы получаем более простую технику благодаря принятию подстановочной интерпретации пропозициональных кванторов. В частности, мы сохраняем семантические определения параграфа 3 (*не* расширяя на пропозициональные переменные определяемую в нем оценку v). Для пропозициональной квантификации просто добавляются следующие пункты, в которых B есть предложение, а в A нет свободных переменных, за исключением, возможно, P:

(ix) $I((P)\,A, a) = T$ тогда и только тогда, когда для всякого предложения B языка PL $I(A\,[B/P], a) = T$;

(x) $I((\exists P)\,A, a) = T$ тогда и только тогда, когда имеется некоторое предложение B языка PL, такое, что $I(A\,[B/P], a = T$.

И снова пункт (x) следует, по определению, из (ix) и (vi). Заметим, что наша подстановочная семантика в противоположность пропозициональной семантике определяет семантические понятия только для предложений, а не для произвольных формул. В обоих случаях это дело конвенции, частично предвосхищенной здесь тем установлением, которое делает теоремами только предложения. Значимость и т. п. определяются как и прежде. При этом подходе очень легко показать непротиворечивость. Соответственно мы тотчас же формулируем:

Теорема 12. *Все теоремы* RP *значимы в подстановочной семантике.*

Доказательство опускается.

Как было доказано в работе Лебланка и Мейера [1969], на уровнях высших порядков очень многое говорит за подстановочную или истинностно-значную семантику; действительно, доказательство полноты Генкина [1950] показывает, как об этом упоминает сам Генкин, преимущество скорее лингвистической, а не онтологической интерпретации; хотя интересно размышлять, как мы делали выше, о суждениях, но типичное доказательство полноты для исчислений, подобных RP, будет иметь дело только с предложениями, только с *поименованными суждениями* с онтологической точки зрения или, более пессимистично, со всем, к чему может относиться квантификация.

Первопорядковый вариант RQ системы R может быть сформулирован подобно RP, за исключением того, что в этом случае специфические трудности, связанные со вторым порядком, не возрастают. Мы предполагаем, что RQ сформулирована так, как это сделано в работе Мейера и др. [1972]; для читателя, не знакомого с данной статьей, укажем, что это обычный первопорядковый язык без тождества, с предикатными буквами G и т. д., параметрами b и т. д. и индивидными переменными x и т. д.; формулы и предложения образуются, как обычно, с помощью связок и индивидных кванторов. Адекватная аксиоматизация получается посредством подстановки «x» вместо «p» в A16—A20 и принятия вместо «B» в A16 произвольного терма «t», подставляемого вместо «x». Соответствующей семантикой является следующая.

Релевантная квантификационная модельная структура (*р. к. м. с.*) представляет собой пару элементов $\langle \mathbf{K}, D\rangle$, в которой $\mathbf{K}$ есть р. м. с. и D — непустое множество. *Оценка* $\mathbf{v}$ в р. к. м. с. есть функция, приписывающая всем переменным и параметрам члены D и всем n-арным предикатным буквам G на каждой точке a из K n-арные отношения[1] на D; тогда $\mathbf{v}$ приписывает T или F атомарному предложению $Gt_1, \ldots, t_n$ в a тогда и только тогда, когда $\langle \mathbf{v}(t_1), \ldots, \mathbf{v}(t_n)\rangle \in \mathbf{v}(G, a)$. Интерпретация I, ассоциированная с $\mathbf{v}$, по-прежнему удовлетворяет (ii) — (vi). (Пропозициональная константа f должна быть сделана исходной для RQ в работе Мейера и др. [1972]; мы замечаем, что для этого достаточно принять условие: $I(\mathrm{f}, a) = \mathrm{T}$ тогда и только тогда, когда $0 \not\leq a^*$). И снова, следуя Лебланку, определяем $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ как x-варианты тогда и только тогда, когда они согласуются на всех переменных параметрах, за исключением, возможно, x. Принимая, что I и I' будут x-вариантами, если ими являются $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ мы устанавливаем для кванторов:

(xi). $I((x)\mathrm{A}, a)$ T тогда и только тогда, когда $I'(\mathrm{A}, a) = \mathrm{T}$ для всякого x-варианта I I'.

(xii) $I(\exists x\mathrm{A}, a) = \mathrm{T}$ тогда и только тогда, когда $I'(\mathrm{A}, a) = \mathrm{T}$ для некоторого x-варианта I - I'.

Определяя истинность, верификацию и т. д., как и прежде, мы получаем:

Т е о р е м а 13. *Все теоремы RQ значимы во всех р. к. м.с.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в предыдущем параграфе, расширяем леммы 1—3 и теорему 1 и верифицируем аксиомы на произвольной оценке в произвольной р.к.м.с. Для правил проблемы не возникает (обобщений среди них не будет ввиду того, что в качестве предложений принимаются только теоремы), откуда следует, что все теоремы истинны на произвольной $\mathbf{v}$ и, следовательно, значимы во всякой р. к. м. с.

С нашей квантификационной семантикой довольно тяжело работать, и вполне возможно, что она делает значимыми некоторые известные не-теоремы RQ. Однако мы в этом сомневаемся. Более интересно, конечно, было бы вставить релевантность в нашу квантификационную семантику посредством различных областей с различными конструкциями, возможно модифицируя (xi), (xii) и аксиомы RQ. Для сравнения R с интуиционистским исчислением I можно заметить, что на квантификационном уровне RQ определенно выходит за пределы IQ относительно принципа $(x)(p \vee Fx) \to p \vee (x)Fx$, подробно обсуждаемого в работе Крипке [1965]. Но в данном случае это имеет место, поскольку этот принцип может быть принят в качестве аксиомы RQ; выбор семантики в интуиционистском направлении, по-видимому, не выдвигает принципиальных трудностей; является ли такой выбор желательным с релевантной точки зрения — это другой вопрос, обсуждаемый в работе Мейер и др. [1972].

Первопорядковая истинностно-значная семантика, соответствующая семантике предыдущего параграфа, для RP, может быть получена таким же образом. И снова заметим, что семантическая непротиворечивость — это не проблема; мы думаем, что полнота тоже.

---

[1] (I) продолжает сохраняться в том смысле, что $a < b \Rightarrow \mathbf{v}(G, a) \subseteq \mathbf{v}(G, b)$.

§ 16. Последние замечания

Открытые проблемы. Мелочи

Наше главное обещание выполнено. Система R имеет крипкевскую семантику. То же самое относится и к родственным системам. Нашу семантику мы обосновывали с различных точек зрения, но имеются и другие, которых мы не касались. Мы показали, что в некоторых отношениях наша семантика хороша; легкость, с которой мы получили наши результаты, позволяет надеяться на то, что и другие трудные проблемы, в частности проблема разрешимости, окажутся более доступными для анализа и решения. О некоторых из этих проблем можно сказать здесь.

Алгебраическая сущность нашего доказательства полноты заключается в том, что оно дает нам средство превратить простой моноид де-Моргана в релевантную модельную структуру; можно просто рассмотреть множество K простых фильтров этих моноидов и использовать моноидную операцию для определения R естественным образом; операция * обычно не создает трудностей. С другой стороны, определение р. м. с. может оказаться напрасной тратой времени; читатель, заинтересованный в восстановлении подробностей, должен принять меры предосторожности относительно закона Паша, p3. Поэтому способ нашего доказательства полноты, более ясно выраженный в следствии 9.1, можно приветствовать; в частности, на примере преобразования моноидов де-Моргана в р. м. с. можно увидеть, как проблемы, решаемые с помощью матричного метода, могут обсуждаться в нашей семантике.

Рассмотрим р. м. с. $\mathbf{K}=\langle 0, K, R, *\rangle$:

$$K=\{0, 1, 2\};$$
$$0^*=0;\ 1^*=2;\ 2^*=1.$$

R справедливо для следующих троек и не имеет места в остальных случаях: 000, 011, 101, 022, 202, 111, 222, 121, 122, 120, 211, 212, 210.

K была независимо открыта Урквартом в применении этих семантических методов к моноиду де-Моргана [1] $\mathbf{M}_0$,

[1] Строго говоря, в работах Белнапа [1967] и Данна и Белнапа [1968] $\mathbf{M}_0$ рассматривается как решетка де-Моргана, то есть $\circ$ не определена на нем; но в работе Белнапа [1960] она первоначально появляется в качестве матрицы; определение $\circ$ через $-(a \to b)$ делает ее моноидом.

которых в работах Белнапа [1960], Андерсона и Белнапа [1962] и других использовался для обоснования центральных семантических факторов относительно релевантных логик. Мы замечаем также, что $\mathbf{K}_0$ в некотором смысле является минимальной, ибо служит наименьшей р. м. с., для которой справедливы все следующие условия: (a) нормальность в смысле $0^*=0$; (b) $<$ не является линейно упорядочивающим (поэтому **K** не смешанная р. м. с.); (c)* не тождество. Мы замечаем, что если эти условия даны, то постулаты вынуждают тернарное отношение иметь место по крайней мере в перечисленных тройках.

Впервые $\mathbf{M}_0$ была использована в работе Белнапа [1960] для обоснования *принципа релевантности:* если A R-влечет B, то (на пропозициональном уровне) A и B имеют общий параметр. Покажем это в K, предположив, что A и B не имеют общего параметра. Если p встречается в A, устанавливаем $v(p, 1)=T$; если p встречается в B, устанавливаем $v(p, 2)=T$; устанавливаем, далее $v(p, a)=F$ для всякого a в K, за исключением того, что сказано в этих условиях. Посредством индукции покажем, что для каждой подформулы A′ формулы A и B′ формулы B $I(A', 1)=T$ и $I(B', 1)=F$, а также, то что относится к 2. Нам нужно рассмотреть только индуктивный случай: & и $\vee$ индуктивно тривиальны; если A′ есть F в 2, то $\bar{A}'$ есть T в $2^*=1$, что показывает стратегию для случая —. И наконец, рассмотрим $A' \to A''$, во-первых, эта формула, несомненно, имеет F в 2, так как R212 и, по индуктивному предположению, $I(A', 1)=T$ и $I(A'', 2)=F$. С другой стороны, эта формула истинна в 1, так как в пяти случаях, в которых 1 служит первым аргументом R—101, 111, 121, 122, 120,— для первых трех случаев контрпример нельзя получить, поскольку с A″ есть T в 1, а для последних двух этого нельзя сделать в силу того, что A′ ложно в 2 на основании индуктивного предположения; поэтому $A' \to A''$ есть T в 1. Случай с B трактуется симметрично, что и заканчивает индуктивный аргумент, показывая, что $I(A, 1)=T$ и $I(B, 1)=F$. Этого достаточно для того, чтобы показать, что A не влечет B при I и что, следовательно, A не R-влечет B. По контрапозиции мы получаем принцип релевантности.

Второй случай использования $\mathbf{M}_0$ встречается в работе Андерсона и Белнапа [1962]; этот моноид был использован для того, чтобы показать, что $A_1\&\ldots\&A_m \to .B_1 \vee \ldots \vee B_n$ будет теоремой тогда и только тогда, когда все A_i и B_j являются пропозициональными переменными или их отрицаниями и некоторое A_i идентично некоторому B_j. Случай „если" тривиален, поэтому мы, как и прежде, принимаем, что в настоящем случае, утверждая $A_i \neq B_j$ для всяких i, j, нужно показать „и только если" посредством контрапозиции Если для некоторого p $A(i)=p$, устанавливаем $v(A_i, 1)=T$; если $A_i=\bar{p}$, устанавливаем $v(A_i, 2)=F$; если $B_j=p$, устанавливаем $v(B_j, 1)=F$; если $B_j=\bar{p}$, устанавливаем $v(B_j, 2)=T$. Так как эти спецификации не конфликтуют между собой, то, произвольно выбирая v, за исключением данных спецификаций, мы снова делаем антецедент истинным, а консеквент ложным в 1 при v и фальсифицируем следование, а затем по контрапозиции обосновываем то, что нужно было показать. (Рассуждения этого вида подробно оправдываются в работе Роутлея [1972], здесь нас интересует только $\mathbf{K}_0$)

По-видимому, о тех скромных результатах, которые могут быть получены, сказано уже достаточно; все это, конечно, нетрудно, ибо эти результаты были уже получены ранее, и если принять во внимание некоторые пропозиционные мотивировки, данные Андерсоном и Белнапом в их статье и повторенные в их работе [1972], то наши результаты не дают существенного улучшения в работе с $\mathbf{K}_0$. Но можно получить и такие результаты, которые были бы новыми; например, приняв декартово произведение р. м. с., как это сделано в следствии 9.2. можно доказать, что R приемлема в смысле Холдена, то есть если $A \supset B$ является теоремой и при этом знак „$\supset$" определен истинностно-функционально, то или одна из формул A, B будет теоремой, или (на пропозициональном уровне) у A и B имеется общий параметр. Благодаря результату Крипке это влечет, что R имеет нормальную характеристическую матрицу, если выполнены другие условия. Последняя приятная новость использована в работе Мейера [1972d], поэтому мы о ней и скажем. Как было замечено, RP есть консервативное расширение R. С целью доказательства возьмем не теорему A системы R и найдем р. м. с., которая опровергает эту не-теорему; приписывая каждому параметру A, множество

миров, в которых этот параметр истинен, мы получаем пропозициональное *приписывание* в смысле параграфа 13 в той же самой р. м. с., которая фальсифицирует A. Отсюда, по теореме 10, A остается не-теоремой RP, что и заканчивает доказательство.

Вот некоторые проблемы, которые должны быть решены и относительно которых, как мы надеемся, настоящая семантика окажется полезной.

1. Проблема разрешения для пропозициональных релевантных логик.

2. Расширение этих методов на логики высшего порядка с нетривиальными математическими приложениями и соответствующее доказательство полноты. Если есть выбор, мы предпочитаем приложения.

3. Более серьезный анализ отношения между интуиционистской и релевантными логиками. Насколько, в частности, релевантность гарантирует *безвредность* отклонения в сторону не-конструктивных аргументов? (Некоторые результаты в этой области встречаются в работе Мейера [1972e].)

4. Является ли RP разрешимой? (Мейер полагает, что у него есть основания сказать „нет", но не вполне уверен.) И в общем чему подобна RP? Может ли наша теория суждений быть охарактеризована более сжатым образом? Что из результатов работы Мейера [1972d], в который пропозициональная квантификация применяется к родственным логикам, подобным I и D Карри, приложимо к R? Имеют ли они легкие доказательства в настоящей семантике?

5. Необходимость будет добавлена к R в дальнейшем. Но что можно сказать относительно других модальностей, пропозициональных отношений и т. д.? Могут ли они быть добавлены при помощи прямой аналогии с другими трактовками или потребовали бы более глубокого рассмотрения релевантной импликации?

6. Семантические таблицы. Генценовские формулировки. Как настоящая семантика помогает механизировать и изображать релевантную дедукцию? Поскольку она противопоставляется формулировке R в виде *натуральной дедукции*, здесь возможны сложности; генценизация R+ Данна является лучшим результатом. Может ло он быть расширен на всю R?

ЛИТЕРАТУРА

Anderson A. R. Some Open Problems Concerning the System of Entailment — "Acta Philosophica Fennica", vol. 16, 1963, p. 7—

Anderson A. R. An Intensional Interpretation of Truth-Valu 1972.

Anderson A. R. and Belnap. Jr., N. D. Enthymemes.—"T Journal of Philosophy", vol. 58, 1961, p. 713—723.

Anderson A. R. and Belnap Jr., N. D., Tautological Entaments.—"Philosophical Studies", vol. 13. 1962. p. 9—24.

Anderson A. R. and Belnap Jr., N. D. Entailment. Princton, 1972.

Belnap Jr., N. D. Entailment and Relevance.—"The Jour of Symbolic Logic", vol. 25, 1960, p. 144—146.

Belnap Jr., N. D. Intensional Models for First Degree Formlas.—"The Journal of Symbolic Logic", vol. 32, 1967, p. 1—22.

Bilanicki-Birula A. and Rasiowa H. On the Represetation of Quasi — Boolen Algebras, Bull. Acad. Polon. Sci., vol. 1957, p. 259—261.

Bull R. A. On Model Logic with Propositional Quantifiers.—"The Journal of Symbolic Logic"., vol. 34, 1969, p. 257—263.

Church A. The Weak Theory of Implication.—"Kontrolliert Denken", eds. Menne A., Wilhelmy A. and Angsil H. in honor Prof. W. Britzelmayr. Munich, 1951, p. 22—37.

Dunn J. M. Algebraic Completeness Results for R., Mingle a its Extensions.— "The Journal of Symbolic Logic". Vol. 35, 197 p. 1—13.

Dunn J. M. and Belnap Jr., N. D. Homomorphisms of Intesionally Complemented Distributive lattices.—"Mathematische Anlen". vol. 176, 1968, p. 23—28.

Henkin L. Compliteness in the Theory of Types.—"The Jonal of Symbolic Logic", vol. 15, 1950, p. 81—91.

Henkin L. Banishing the Rule of Substitution for Functinal Variables.— "The Journal of Symbolic Logic", vol. 18, 195 p. 201—208.

Kripke S. Semantical Analysis of Modal Logic I.—"Zeitschrift f mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", vol. 9, 1963, p. 67 96. (рус. пер. в кн.: Фейс. Модальная логика, М., 1974 ,с. 254—30

Kripke S. Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I — "Formal Systems and Recursive Functions", eds. Crossley J. N. a Dummet M. A. E.) Amsterdam, North—Holland, 1965, p. 2—12

Leblanc H. and Meyer R. K. Truth — Value Semantics f the Theory of Types.—"Philosophical Problems in Logic, Some Rece Developments" (ed. Lamberd K.) Dordrecht. 1969, p. 77—101

Meyer R. K. Entailment and Relevant Implication.—"Lo que et Analyse" no. 44, 1968, p. 472—479.

Meyer R. K. A Characteristic Matric for RM, Mimeograph 1968 b.

Meyer R. K. Conservative Extension in Relevant Implication.—"Studia Logica", 1972a.

Meyer R. K. On Conserving Positive Logics.—"Notre Da Journal of Formal Logic", 1972b.

Meyer R. K. Metacompleteness. 1972c.

Meyer R. K. Entailment, Intuitionism, Negation "Truth, Syntax and Modality", Amsterdam — London, [illegible]

Meyer R. K. Negation Disarmed [illegible] — "The Journal of Symbolic Logic", 1972e.

Meyer R. K. and Dunn J. M. E, R and γ. — "The Journal of Symbolic Logic", vol. 34, 1969, p. 460—474.

Meyer R. K., Dunn J. M. and Leblanc H. Completeness of Relevant Quantification Theories.— "Notre Dame Journal of Formal Logic", 1972.

Rasiowa H. and Sikorski R. The Mathematics of Metamathematics. Warsaw, 1963 (рус. пер., М., 1972)

Routley R. The Semantics of First degree Entailment, 1972.

Urquart A. Semantics for Relevant Logics.— "The Journal of Symbolic Logic", 1972.