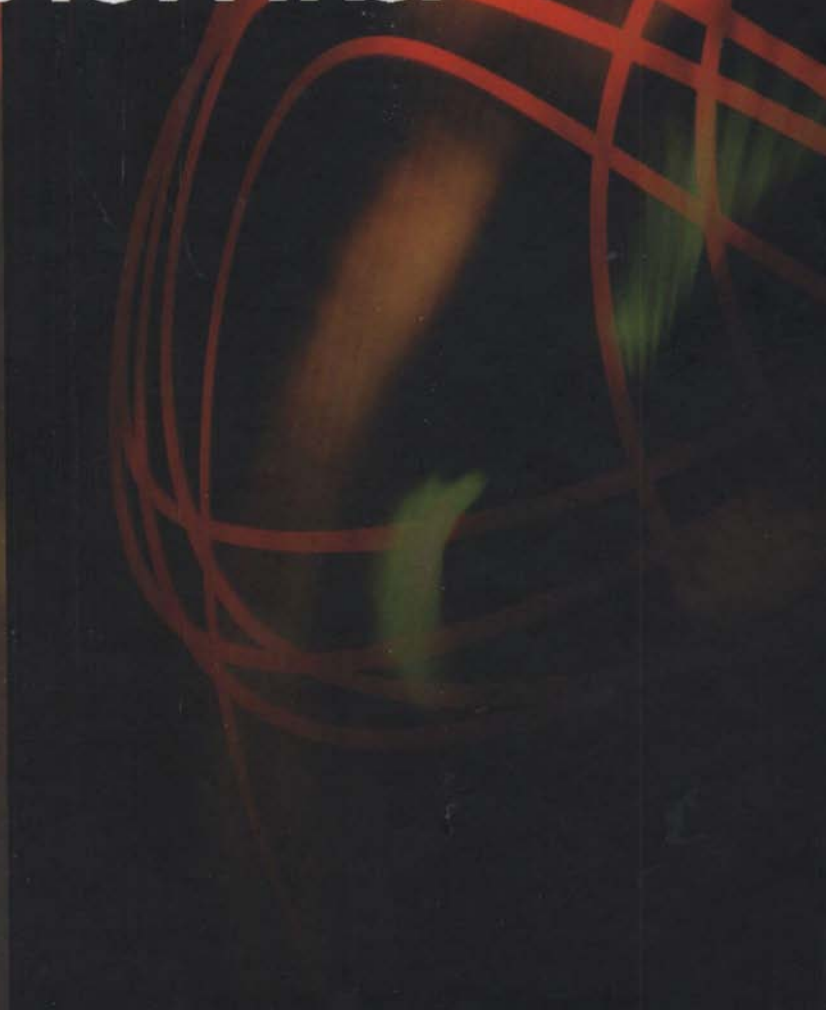
В.Л. Васюков

Квантовая логика



Российская академия наук. Институт философии

В.Л. Васюков

Квантовая логика

Per Se
Москва
2005

УДК 510
ББК 22.12

**Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского Гуманитарного Научного Фонда (РГНФ)
Проект № 04-06-16107д**

Васюков В.Л.
В 19 Квантовая логика. — М.: ПЕР СЭ, 2005. — 192 с.
ISBN 5-9292-0142-0

Книга посвящена квантовой логике — интердисциплинарной области науки, интересующей физиков, математиков, логиков и философов. Квантовая логика рассматривается автором монографии, прежде всего, с точки зрения логических исчислений и логической техники. Главное внимание уделяется синтаксической реконструкции систем квантовой логики и построению различного рода абстрактных семантик для полученных систем. Философские вопросы, возникающие в процессе построения систем квантовой логики, например, природы времени в квантовом мире, рассматриваются и решаются сквозь призму неклассических методов современной логики. Вместе с тем в книге кратко описывается история квантовой логики и дается обзор современных направлений исследований в этой области. Особый интерес представляют последние три главы книги, посвященные построенной автором так называемой квантовой логике наблюдаемых, призванной преодолеть разрыв между используемыми в большинстве квантовологических исследований формализмами и математическим аппаратом современной квантовой теории.

ISBN 5-9292-0142-0

Содержание

Предисловие

Квантовая логика вступает в период своей зрелости — почти семьдесят лет исследований в сопоставлении с возрастом человека представляются достаточным основанием для вынесения такого вердикта. Однако у тех, кто имеет представление о современном состоянии дел в квантовой логике, подобное утверждение способно вызвать лишь скептические замечания. Несмотря на сотни статей и десяток монографий, посвященных этой области современных исследований, ситуация все еще напоминает конец тридцатых годов двадцатого века — период возникновения квантовой логики.

Квантовая логика по-прежнему является обширным полем исследований, интересующим физиков, математиков, логиков и философов. Характерна в этом отношении классификация Миклоша Редеи [*Rédei 2001*], который в своей рецензии на монографию «Квантовая логика» К.Свозила [*Svozil 1998*] выделяет четыре главных группы тем, охватывающих то, что, по его мнению, можно назвать квантовой логикой:

Алгебраический подход. Недистрибутивные (главным образом ортомодулярные) решетки, образующие весьма привлекательный класс решеток, имеющих массу применений к технически нетривиальным проблемам. Для алгебраистов «квантовая логика» всего лишь экзотический синоним хорошо известной математической структуры.

Точка зрения специалистов в области теории вероятностей: квантовая логика с квантовыми состояниями, определенными на ней, есть, по сути дела, неклассическая теория вероятностей. Задача заключается в последовательной разработке и интеграции некоммутативных версий классических концепций.

Логический подход. Следуя установке алгебраической логики надо преобразовывать логические понятия и проблемы в алгебраические, что позволяет исследовать логику и ее свойства с помощью алгебраических методов. При таком подходе квантовая логика становится логикой, семантически детерминированной определенной алгебраической структурой.

Философская перспектива: философы стремятся понять, как все вышеупомянутые различные аспекты квантовой логики образуют единое целое, и может ли какой-нибудь из этих подходов прояснить интерпретационные проблемы, касающиеся квантовой механики.

В сущности, эти четыре подхода можно в разной пропорции обнаружить в любой статье или монографии, посвященной квантовой логике. Но читатель легко обнаружит, что в предлагаемой его вниманию книге доминирует логический подход. Квантовая логика интересует автора прежде всего с точки зрения логических исчислений и логической техники. В книге квантовая логика рассматривается как раздел современной неклассической логики со всеми вытекающими отсюда последствиями. Главное внимание уделяется синтаксической реконструкции систем квантовой логики и построению различного рода абстрактных семантик для полученных систем. Философские вопросы, возникающие в процессе построения систем квантовой логики, например, природы времени в квантовом мире, рассматриваются и решаются сквозь призму неклассических методов современной логики.

Сужение поля зрения, вызываемое подобной личной позицией автора, неизбежно и очевидно. Однако, можно ли вообще при исследовании таких интердисциплинарных областей как квантовая логика обойтись без концентрации усилий и фокусирования внимания на тех проблемах, которые интересны именно конкретному исследователю?

Результаты исследования обсуждались на семинарах сектора логики Института философии РАН, кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и кафедры логики университета г.Зальцбурга (Австрия). Автор выражает признательность участникам этих семинаров, чья критика и предложения способствовали уточнению принципиальных положений книги.

Введение

Работа Г. Биркгофа и Дж. фон Неймана «Логика квантовой механики» [Birkhoff Neumann 1936], как считают в настоящее время, положившая начало исследованиям этого раздела логики, вышла в свет 1936 году. Само возникновение подобного направления было свидетельством насущной необходимости философского анализа основных понятий и методов современной физики (и шире — естественнонаучных теорий). И если мы примем во внимание, что и Г. Биркгоф и И. фон Нейман были математиками, то становится ясным, что эта необходимость была осознана не только одними философами, но в равной мере и естествоиспытателями. Последнее обстоятельство подтверждается и тем фактом, что о квантовой логике шла речь на чествовании юбилеев Галилео Галилея, П.А.М. Дирака, Л. де Бройля.

Введенное И. фон Нейманом и Г. Биркгофом логическое исчисление формально было неотличимо от исчисления замкнутых подпространств гильбертова пространства, что способствовало доминированию алгебраических методов в квантовой логике. Попытки введения многозначных логических систем (Г. Рейхенбах) были подвергнуты критике со стороны физиков. И лишь значительно позже наметились пути эффективного использования результатов и методов современной логики для квантовологических исследований.

Этот процесс привел к тому, что перед квантовой логикой встала масса чисто логических проблем, связанных с традиционными логическими задачами. Так, например, использование секвенциальных методов в квантовой логике привело к возникновению проблем устранимости сечения, знакомой всем логикам.

При разработке квантовой логики стали использоваться новейшие логически и математические методы — семантика возможных миров, диалоговая семантика, плексорная семантика (диаграммы Фейнмана) и т.д. Появились модальные системы квантовой логики, а использование временных операторов позволило говорить о квантовологическом описании динамики квантовых систем.

Если стандартный квантовологический формализм фон Неймана-Биркгофа основывался на использовании ортомодулярных решеток, то в настоящее время используются и более сложные структуры — банаховы пространства, нечеткие множества. Новое рождение переживает и использование методов многозначной логики. Появившиеся в последнее время системы релятивистской квантовой логики позволяют надеяться на то, что логический анализ методов современной физики принесет свои плоды и в области синтеза теории относительности и квантовой логики.

К сожалению, следует признать, что в отечественной литературе мало внимания уделяется разработке подобных проблем. Узок круг авторов, явно недостаточно количество работ. Стоит отметить, что на русском языке имеется лишь одна монография по данному вопросу — это книга В. С. Меськова «Очерки по логике квантовой механики» [Меськов 1986]. На фоне огромного количества статей и антологий, выпущенных за все это время за рубежом, этого явно мало.

Анализ проблем современного развития квантовой логики приводит к выводу, что наблюдается определенная тенденция к различению понятий квантовой логики и логики квантовой механики. Ряд авторов даже предлагает в этой связи для первой из них термин «ортомодулярная логика» или «ортологика».

Подобная тенденция не в последнюю очередь обусловлена тем обстоятельством, что построенная для ряда систем квантовой логики теоретико-множественная семантика вытеснила классическую семантику гильбертовых пространств и во многих работах о последней даже не вспоминают. Возникла, например, операциональная интерпретация квантовой логики, с самого начала не апеллирующая к гильбертовым пространствам квантовой теории.

В то же время подобная интерпретация заставляет по-новому взглянуть на соотношение квантовой логики и классической, приводя к более широкой постановке вопроса — об отношении квантовой логики к другим логическим системам. Исследуя этот вопрос, в книге рассматривается проблема представления квантовой логики как расширения логических систем. Выясняется, в частности, что квантовая логика представима как модальное расширение системы бесконечнозначной логики Лукасевича, релевантной логики, классического пропозиционального исчисления и логики Хао Вана.

Продолжая анализ в данном направлении, в книге вводится в рассмотрение бимодальное расширение логических систем, для чего используется в качестве второго модального оператора временной оператор фон Вригта, имеющий интуитивное значение «в следующий момент». Это позволяет в рамках квантовой логики перейти от квантовой статики к квантовой динамике, т.е. перейти к описанию эволюции во времени квантовых систем. В книге рассмотрены системы квантовой логики времени, полученные путем темпорального расширения известных квантовологических систем.

Наряду с этим рассмотрены системы многозначной квантовой логики, позволяющие получить более пригодное для нужд квантовой теории формальное описание квантовых систем. Реконструируемая теоретико-множественная семантика подобных систем служит основой для дальнейшего рассмотрения и анализа современных проблем квантовой теории.

Глава первая. Квантовая логика: история и современность

1.1. О предмете и задачах квантовой логики

Рассмотрим мысленный эксперимент с прохождением электрона через одну и две щели экрана. Пусть высказывание A означает «электрон проходит через первую щель», высказывание B означает «электрон проходит через вторую щель», высказывание C означает «электрон оставляет на фотопластинке-мишени точечный след». В этом случае высказывание $(A \vee B) \wedge C$ истинно в случае, когда открыта одна из щелей.

Если открыты обе щели, то ситуация, казалось бы, должна описываться высказыванием $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, т.е. электрон проходит через первую щель и оставляет точечный след, либо электрон проходит через вторую щель и оставляет точечный след на фотопластинке-мишени. Согласно закону дистрибутивности $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ и тождество истинно в силу того, что обе части описывают один и тот же результат — точечный след на мишени. На самом же деле на фотопластинке мы получаем дифракционную картину и нарушение закона дистрибутивности (корректное описание подобного эксперимента можно найти в [Панченко 1981]).

Означает ли это, что в микромире происходит нарушение законов классической логики? Интересное свидетельство в пользу подобной точки зрения можно найти в математическом формализме квантовой механики.

В теории фон Неймана физическая система S (в качестве нее может выступать электрон из описанного эксперимента) представима гильбертовым пространством $H(S)$. Каждое свойство $\hat{a}$ системы представимо, в свою очередь, замкнутым подпространством M_a гильбертова пространства. Каковы эти свойства? Речь идет о том, что некоторая наблюдаемая величина (например, импульс) имеет определенно значение λ, или что ее значение положительно, или что значения двух одновременно измеримых величин равняются соответственно λ и μ, или что сумма квадратов этих значений больше единицы и т. п. Система может находиться в чистом состоянии, которому соответствует вектор $|\varphi\rangle$ в гильбертовом пространстве. В этом случае «да-нет»-измерение свойства $\hat{a}$, т. е. подтверждающее или опровергающее наличие свойства, представимо отображением, проектирующим вектор $|\varphi\rangle$ ортогонально в подпространство M_a. Это отображение вводит проекционный оператор P_a, определенный на $H(S)$ и имеющий областью значений M_a. Отсюда каждое свойство $\hat{a}$ системы может быть представлено проекционным оператором P_a.

В случае, когда P_a удовлетворяет соотношению $P_a|\varphi\rangle = |\varphi\rangle$, эквивалентному $|\varphi\rangle \in M_a$, свойство $\hat{a}$ подтверждается «да-нет»-экспериментом. Если же $P_a|\varphi\rangle = 0$, что равносильно $|\varphi\rangle \in M_a^{\perp}$ (где $M_a^{\perp}$ — ортогональное дополнение), то свойство $\hat{a}$ опровергается. Как оказалось, множество замкнутых подпространств (описывающих свойства системы) образует ортомодулярную решетку, для которой закон дистрибутивности не имеет место. Если бы система была классической, то вместо подобной недистрибутивной решетки должна была бы получиться булева алгебра.

Главный контраргумент против нарисованной картины известен в квантовой механике под именем гипотезы о скрытых параметрах. Он сводится к тому, что подобное описание просто неполно и более подробное рассмотрение должно привести к открытию дополнительных возможностей описания, т. е. к учету новых, скрытых параметров. Однако этого не происходит. Более того, в 1967 г. Кохен и Шпеккер [Kochen Specker 1967] нанесли сильный удар по подобным надеждам. Они доказали невозможность погружения алгебры подпространств гильбертова пространства (размерности ≥ 3) в полную булеву алгебру при условии сохранения структурных соотношений теории.

Это, однако, не мешает некоторым исследователям под разным предлогом отказывать квантовой логике в праве на существование. Так, известный канадский философ М. Бунге пишет: «... логикой, на которой построено здание почти всей математики и всей физики, является именно обычное исчисление предикатов... Эту хорошо известную вещь необходимо иметь в виду, когда приходится сталкиваться с утверждением, что квантовая теория использует свою собственную логику, в которой нарушается дистрибутивный закон исчисления высказываний ... Другими словами, даже квантовая революция не изменила нашу логику» [Бунге 1975, с.196].

Иную отрицательную точку зрения можно проиллюстрировать на примере Дж. Стейчела [Stachel 1976]. По его мнению высказывания типа «импульс электрона равен *p*» действительно описываются квантовой логикой, но их детализация типа «импульс электрона, испущенного данным ускорителем и измеренный данным прибором, равен *p*» приводит уже к классической логике. Стейчел видит здесь парадокс и это приводит его к сомнению относительно существования квантовой логики.

Показательно то, что исследования взаимоотношения классической и квантовой логик последних лет устраняет подобную мнимую парадоксальность. Укажем в этой связи на работы С. Бернини [Bernini 1981]. Его задачей было построение таких логико-синтаксических систем, которые «содержат» квантовые логики в смысле эквивалентности следующих условий:

а) $A \to B$ является теоремой;

б) $v(A) \leq v(B)$ на всякой орторешетке, где v — некоторая оценка.

Бернини построил такие аксиоматические системы K_1Q и K_2Q первопорядковой логики, $\{\to,\perp\}$-фрагмент которых является классическим. Характерная особенность этих систем — наличие в них алгебраических формул, т. е. формул без импликации. Именно они и интерпретируются на орторешетках в требуемом смысле.

Возвращаясь теперь к Стейчелу, нетрудно заключить, что алгебраические формулы, фигурирующие в системе Бернини и образующие квантовологическую систему, можно расценивать как квантовологические высказывания типа приводимых Стейчелом высказываний «электрон имеет импульс *p*». Конструирование же из алгебраических формул с помощью связки → составных формул приводит уже к высказываниям, подчиняющимся законам классической логики. Подобные высказывания и будут соответствовать высказываниям Стейчела, что особенно заметно, если преобразовать последние, например, к такому виду: «если данный ускоритель испускает электрон и если его импульс измеряется данным прибором, то величина импульса равна *p*». Итак, мы получаем классические и квантовые высказывания в рамках одного исчисления, но никакого противоречия между обоими способами описания не наблюдается.

Реконструкция логики, чья алгебраическая структура представляет собой недистрибутивную ортомодулярную решетку, соответствующую множеству подпространств гильбертова пространства, сталкивается со значительными трудностями. Фактически здесь мы имеем дело с так называемой обратной задачей семантики, когда по имеющейся некоторой готовой структуре требуется восстановить синтаксис и аксиоматику логической системы, моделью которой эта структура служит. Некоторая аналогия возможна здесь, например, с представлением групп, когда по имеющимся конкретным представлениям групп требуется восстановить их абстрактную алгебраическую структуру.

В логике при построении алгебраической семантики в общем случае можно осуществить взаимный переход от исчисления высказываний к алгебраической структуре событий, которые описываются этими высказываниями. Принимая теперь алгебру проекционных операторов как алгебру высказываний, можно, как оказалось, построить логическое исчисление, имеющее ортомодулярные решетки в качестве своих моделей. Интересно, что подобные решетки (и, следовательно, логики) в силу своего абстрактного характера не обязательно являются решетками (логиками) подпространства гильбертова пространства, но допускают и иные интерпретации, например, операциональные (Гольдблатт, Фулис и Рэндол).

Характерная трудность при построении квантовой логики — проблема импликации. Удовлетворительного понятия импликации в квантовой логике получить не удается, общепринятая трактовка сводится к принятию в качестве импликации решеточного отношения ≤ (в качестве альтернативы можно указать, например, на так называемую стрелку Сасаки [Hardegree 1981]). Это обстоятельство приводит к предпочтению секвенциальных формулировок, не требующих наличия импликации, и служит основным пунктом критики квантовой логики.

Несмотря на наблюдающийся в последние годы всплеск работ по синтаксису и семантике квантовой логики, единого общепринятого теоретико-концептуального каркаса здесь все еще не создано. Это связано в первую очередь с тем, что квантовая логика возникла на стыке физики, математики и логики, и поэтому осмысление результатов квантовологического подхода зачастую ведется с различных позиций, в силу чего исследователи не всегда находят общий язык и сходятся во мнении относительно того или иного результата. Можно, однако, отметить, что в свою очередь квантовая логика стимулирует, по принципу обратной связи, возникновение новых направлений исследований в физике, математике и логике.

Так, для физики квантовая логика дает возможность продвинуться вперед как на пути обоснования квантовой механики, выступая в качестве особого эвристического приема в процедуре обоснования квантовой теории, так и на пути построения нового языка квантовой механики. В свою очередь разработка подобного языка ставит перед математиками много новых проблем, заставляя их интенсивно развивать новые разделы математики, например, алгебраическую теорию ортомодулярных решеток (см., напр., [Beran 1984]).

Что касается логики, то существенно неклассический характер квантовой логики и необычность ее семантических моделей (гильбертовы пространства) говорят сами за себя. Возникает также вопрос статуса: логика изучает правильные формы мышления, изучает ли квантовая логика особые формы, формы правильного физического мышления? Отказ от закона дистрибутивности позволяет расценивать квантовую логику как обобщение булева пропозиционального исчисления, а существование подобного обобщения само по себе уже проблема. Наличие же не одной, но многих квантовых логик приводит к тому, что квантовая логика начинает рассматриваться в узком смысле — как пропозициональное исчисление, специфическое для той или иной конкретной задачи квантовой теории. Несомненна при этом актуальность анализа и расширения существующих систем квантовых логик обычными логическими методами, ибо дальнейшее продвижение без наличия подобного фундамента невозможно.

1.2. Краткая история квантовой логики

Исторически начало исследований логической структуры квантовой теории связывают с известной монографией И. фон Неймана «Математические основы квантовой механики» [Нейман 1964], вышедшей в свет в 1932 г. В этой книге, излагающей физическую теорию на языке чистой математики, можно найти следующее высказывание: «Мы видим, что связь между свойствами физической системы, с одной стороны, и проекционными операторами, с другой, делает возможным некое логическое исчисление над ними» [Нейман 1964, с.189].

И вот спустя четыре года И. фон Нейман в совместной с Г. Биркгофом работе «Логика квантовой механики» [Birkhoff Neumann 1936] осуществляет построение подобного логического исчисления, положившего начало исследованиям особой, неклассической логики квантовой теории.

Следует отметить, что идея особой логики для квантовой теории в это время выдвигается многими исследователями. Р.Карнап отмечает, что революционный характер принципа неопределенности Гейзенберга побудил некоторых философов и физиков к предложению изменить форму логики, используемой в физике: «Филипп Франк и Морис Шлик (Шлик был тогда философом в Вене, Франк — физиком в Праге) впервые совместно выразили взгляд, что при некоторых условиях конъюнкция двух осмысленных утверждений в физике должна рассматриваться как лишенная смысла фраза» [Карнап 1971].

Как установил В.С.Меськов [Меськов 1986, с.131] к этому же периоду относится и публикация Ф. Цвикки, в которой ставится вопрос об особой логике для квантовой механики. Комментируя статью Цвикки, Е. Т. Белл указывает, что последний пришел к идее использования в квантовой механике многозначной логики исходя из анализа положения дел в квантовой физике, а не ориентируясь на уже имеющиеся системы многозначной логики Брауэра и Лукасевича.

В том же 1936 году М. Штраус, ученик Ф. Франка, сводя регулярности, выявляемые физическим опытом, к синтаксическим правилам использования языка физики, создал так называемую «логику дополнительности» [Strauss 1936]. Затем в разработку подобной проблематики включился Г. Рейхенбах, построивший в 1944 г. [Reichenbach 1944] трехзначную логику с целью устранения «причинных аномалий», возникающих при попытке применить классическое причинное объяснение в терминах обычного евклидового пространства в квантовых явлениях. Вводя в рассмотрение наряду с оценками суждений на истинность и ложность еще и категорию неопределенности, Рейхенбах предполагал разрешить тем самым методологические трудности, вызванные развитием квантовой физики.

Но многозначные построения Рейхенбаха, а также П. Детуш-Феврие [Destouches-Fevrier 1951], чья книга вышла в начале 50-х годов с предисловием Л. де Бройля, встретили отрицательное отношение со стороны копенгагенской школы. В разгоревшейся в 1946 г. на страницах журнала «Dialectica» дискуссии главным был спор А. Эйнштейна и Н. Бора. Эйнштейн не высказался прямо о квантовой логике, а Бор отверг идею многозначной логик, причем его позиция была поддержана В. Паули и М. Борном. Это было воспринято как отрицание квантовой логики вообще, хотя копенгагенцы высказывались лишь против многозначной квантовой логики.

О подразумевавшейся ошибке, как пишут А. И. Панченко и Н. М. Роженко, «свидетельствуют хотя бы работы самого Н.Бора, который никогда не уставал подчеркивать значение концепции дополнительности в осмыслении мира. Интересно, что представитель той же копенгагенской школы К. Ф. Фон Вайцзеккер, защищающий ортодоксальную интерпретацию квантовой механики, опубликовал по случаю 70-летия Н. Бора статью «Дополнительность и логика» [Weizsäcker 1956], где попытался провести идею многозначности квантовой логики. Бор отозвался на эту попытку критически ... Однако М. Борн ... и В. Гейзенберг ... поддержали Вайцзеккера, а П.Йордан опубликовал статью, в название которой входил термин «квантовая логика». Тем самым единство в стане копенгагенцев стало разрушаться и по вопросу о логике» [Панченко Роженко 1983, с.139].

Упомянутая статья Йордана была помещена в книге материалов проведенного 26.12.1957 — 4.01.1958 г. в Калифорнийском университете (Беркли, США) симпозиума. Можно считать, что именно с этого симпозиума термин «квантовая логика» стал пониматься более широко, нежели термин «логика квантовой механики», приобретая относительную автономию.

Значительно более широкое внимание квантовой логике уделили исследователи в 60-е годы в СССР, ФРГ, Швейцарии, Франции, США, Польше, Венгрии, Канаде, Болгарии и др. странах. В СССР первые работы по квантовой логике появились в конце 50-х — начале 60-х годов (см., напр., [Кузнецов 1959], [Роженко 1964], [Пятницын 1965]), а на страницах журнала «Вопросы философии» впоследствии состоялась даже целая дискуссия, посвященная проблемам квантовой логики (1970, №2).

Своеобразным апогеем развития квантовой логики был IV Международный конгресс по логике и методологии науки (Бухарест, 1971). Квантовая логика фигурирует в докладах Г. Бодиона, Дж. Баба, С. Ватанабе, М. Мачиньского, П. Хилэна и др. Следующий (пятый) конгресс, проходивший в Канаде в 1975 г., уже обсуждал по преимуществу проблемы структуры физической теории в связи с работами Т. Куна, В.Штегмюллера, Н. Хэнсона, П. Фейерабенда, С. Тулмина, И.Лакатоша, Дж. Снида и др.

Среди представленных на VI конгресс тезисов также были тезисы и по квантовой логике, в том числе и советских авторов. Суммируя высказанные в них идеи, председательствующий секции «Основания и философия физических наук» Р. Коэн высказался следующим образом: «Продолжаются очень глубокие и фундаментальные исследования логической структуры основных физических теорий нашего времени, но преимущественно средствами, отличающимися от классической логики, что говорит о целеустремленных поисках новых способов «локализации» философских истин — способов, более близких приемам мышления диалектики» (цит по [Панченко Роженко 1983, с.140]).

Тем не менее, наметился некоторый спад интереса к теме квантовой логики — судя по отчетам, на VI конгрессе с докладом на данную тему выступил лишь один П. Миттельштедт. В качестве некоторой компенсации этого спада можно рассматривать обсуждение тематики квантовой логики на коллоквиумах, в школах, на симпозиумах, посвященных специально квантовой логике. Наблюдается также значительный количественный рост работ по квантовой логике в различных периодических и непериодических изданиях.

В этой связи заслуживает упоминания симпозиум по квантовой логике, проведенный в Гамбурге 4-5 октября 1976 г. Материалы этого симпозиума были опубликованы в специальном выпуске «Журнала философской логики« под редакцией и с предисловием П. Миттельштедта. Симпозиум привлек большое число специалистов — среди авторов числятся П. Миттельштедт, К. Пирон, Г. Кассинелли и Э.Г.Бельтраметти, М. Л. Далла Кьяра, Э.-В. Стахов, Дж. Баб, Д. Финкельстейн, В. Окс и др.

Среди других публикацией этого периода привлекают внимание результаты работы по основаниям квантовой механики, проводившихся в 1972-1973 и 1973-1974 гг. в Стэнфорде (США), под руководством П. Суппеса, опубликованные в виде антологии [Suppes 1976]. Из материалов книги можно отметить статью Х. Патнэма «Как мыслить квантовологически?» [Putnam 1974] и статью Г. М. Хардегри «Кондиционал в квантовой логике» [Hardegree 1974]. В первой из них развивается идея эмпирического статуса логики, что же касается второй, то ее автор не согласен с Яухом и Пироном, отказывающим алгебраической структуре квантовой логики в статусе логики на основании отсутствия в ней схемы дедукции. Он приводит пример, когда квантовологическая импликация переходит в обычную импликацию, и анализирует применение кондиционала в квантовой логике, привлекающего в то время все большее внимание. Кондиционал выражается логической связкой «если ..., то ...», которой в теории решеток соответствует отношение «меньше или равно», лежащее в основе ортодополнения и модулярного антецедента квантовой логики. Дальнейшее развитие идей Хардегри можно найти в публикациях [Kalmbach 1974], [Hardegree 1975], Р. Дж. Гричи [Greechie 1974], Р. Дж. Гричи и С. П. Гаддера [Greechie Gudder 1971].

Целая программа исследований по квантовой логике была организована в начале 70-х годов при университете провинции Западного Онтарио (г. Лондон, Канада). Руководитель этой программы, канадский философ К.Э.Хукер, изложил свои взгляды на этот предмет ранее в большой статье, помещенной в им же редактируемой книге [Hooker 1974]. Здесь же были помещены статьи по квантовой логике Дж. Баба, Б. К. ван Фраассена, Р. Дж. Гричи и С. П. Гаддера.

Первый том собранной К. Э. Хукером антологии работ по квантовой логике вышел в свет в 1975 г. [Hooker 1975]. В нем были представлена широкая панорама исследований — достаточно сказать, что антологию открывала известная статья Г. Биркгофа и Дж. фон Неймана, датируемая 1936 г., а заканчивала статья Б. К. ван Фраассена «Лабиринт квантовой логики», помеченная 1974 г. Здесь содержалась также работа М. Штрауса о логике дополнительности, написанная 1972 г. на основе работ автора середины 30-х годов, работа Г.Рейхенбаха о трехзначной квантовой логике, представляющая фрагмент его монографии 1944 г., работы 60-х годов Э. П. Шпеккера, С. Кохена, Й. М. Яуха, К. Пирона, П. Суппеса, П.Д.Финча, В. С. Варадараджана, Е. Лося, Н. Цирлера, Дж.Пула и др., работы 70-х годов К. Пирона, Р. Дж. Гричи и С. П. Гаддера, С. Холланда, Н. С. Кронфли.

В 1979 г. вышел второй том антологии [Hooker 1979], в который вошли работы Дж. Баба, Д. Финкельстейна, Х. Патнэма, Г. Хилэна, С. П. Гаддера, Д. Э. Кетлина, Г. М. Хардегри, Г.Т. Рюттимана и др. Естественно, этот том не смог охватить всех современных работ по квантовой логике, в том числе и наиболее значительных. Для ликвидации этого пробела был издан новый, отредактированный Хукером сборник «Физическая теория как логико-операциональная структура» [Hooker 1979a], в котором представлены работы Д. Финкельстейна, Р.Джайлза, Б. Мельника, М. Купчиньского, К. Рэндолла и Л.Дж. Фулиза, П. Миттельштедта, Э.-В. Стахова. Но и он не претендует на полноту по данному вопросу.

На разработку философской проблематики квантовой логики повлияли в значительной степени опубликованные еще в 1969 г. статьи Х. Патнэма и Д. Финкельстейна, в которых физик Финкельстейн поддержал философа Патнэма по вопросу об эмпирическом значении квантовой логики. Эти статьи были опубликованы в издаваемых на базе известных бостонских коллоквиумов по философии науки «Бостонских исследований по философии науки», уделявших большое внимание теме квантовой логики. Особый интерес представляет их т. 13 [Cohen Wartofsky 1974], целиком посвященный логическим и эпистемологическим исследованиям современной физики. Среди авторов этого тома, пишущих о квантовой логике — Б.К.ван Фраассен, Дж.Баб, П. Хилэн, Дж. Стейчел.

Работы по квантовой логике включает в себя и том 25 «Бостонских исследований», публикующих труды Ассоциации философов науки за 1974 г.

Следует отметить, что к настоящему времени изданы уже и монографии по квантовой логике. К ним можно отнести книгу П. Миттельштедта «Квантовая логика» [Mittelstaedt 1978], а также изданную в 1978 г. в Венгрии книгу Г. Фая и Р.Тороша с таким же названием [Fay Toros 1978]. Изданная в СССР книга Дж. Макки [Макки 1965] также содержит главу, посвященную изложению разработанной автором аксиоматической системы квантовой логики. Кроме этого в 1986 г. вышла в свет книга В. С. Меськова «Очерки по логике квантовой механики» [Меськов 1986], полностью посвященная теме квантовой логики.

И, наконец, о квантовой логике шла речь на чествовании юбилеев Г. Галилея, П. А. М. Дирака, Л. де Бройля, и это при том, что подобные вещи были бы немыслимы для физики прошлого века. Однако тема квантовой логики широко обсуждается не только в зарубежных логико-философских журналах, но и в физико-математических, а также является предметом обсуждения на коллоквиумах, семинарах и симпозиумах физиков. В качестве примера можно привести тот факт, что организатор и издатель трудов школы имени Э. Ферми в Болонье Г. Торальдо ди Франчиа написал в соавторстве с логиком М.Л. Далла Кьярой ряд статей по квантовой логике [Dalla Chiara Toraldo di Francia 1973; Dalla Chiara Toraldo di Francia 1976]. А в 1979 г. П. Миттельштедт прочитал доклад «Квантовая логика» для участников данной школы.

Библиография работ по квантовой логике поистине необъятна (в качестве примера отсылаем читателя к библиографии, составленной М. Павичицем в 1992 г., содержащей указания на 1851 работу по данной тематике [Pavičić 1992]). В этой связи не имеет смысла продолжать дальнейшее рассмотрение в подобном ключе, а стоит, по-видимому, сосредоточить внимание на особенностях, проблемах и трудностях современного этапа развития квантовой логики. Подобное сужение поля зрения обусловлено еще и тем обстоятельством, что спектр приложений квантовой логики также все время расширяется. В настоящее время можно говорить о квантовологической интерпретации квантовой механики и других физических теорий микромира, философских интерпретациях онтологического статуса и гносеологических функций квантовой логики в частности и логики как дисциплины в целом, об использовании квантовой логики для интерпретации механизмов исторического развития научного знания и т.п.

1.3. Проблемы современного этапа развития квантовой логики

Является ли квантовая логика логикой квантовой механики? Ответ на этот вопрос далеко не так очевиден, как кажется. Да, несомненно, квантовая логика по своему происхождению — логика квантовой механики, по крайней мере, исторически. Поэтому ее можно рассматривать как частный случай дисциплины логики, исследующей формы правильного мышления вообще и формы правильного физического мышления в частности, тем более, что квантовая механика является всего лишь одной из физических теорий.

Но логический анализ структуры квантовологических систем приводит к мысли о том, что в некоторых аспектах эти системы более общи, нежели системы классической логики. Это связано, в первую очередь, с такими особенностями квантовологических систем, как отказ от закона исключенного третьего, дистрибутивности или ассоциативности. Подобный отказ приводит к тому, что булева структура пропозиционального исчисления становится частным случаем квантовологической структуры. В таком случае исследование квантовологических систем имеет и чисто логический интерес, как продвижение в область неклассических логик, позволяющих рассматривать недистрибутивные структуры более общего, нежели классический булев, вида.

По-видимому, следует различать (насколько это возможно) указанные смыслы употребления термина «квантовая логика», различая квантовую логику в широком смысле — как обобщение классического пропозиционального исчисления, и квантовую логику в узком смысле — как некоторое пропозициональное исчисление, специфическое для той или иной квантовой теории.

Приобретая определенную дисциплинарную автономию от логики квантовой механики и многочисленные интерпретации и приложения, квантовая логика, тем не менее, столкнулась с тем обстоятельством, что под сомнением находится ее логический статус как логики. Если ранее был задан вопрос, является ли квантовая логика логикой квантовой механики, то теперь на повестке дня стал вопрос: действительно ли квантовая логика является логикой?

Как ни странно, но общепринятого ответа на этот вопрос нет. В первую очередь в подобном парадоксе повинна, по-видимому, незавершенность разработки исчислений квантовой логики. Многие считают (например, Р. Дж. Гричи и С.П.Гаддер), что квантовая логика все еще не сформулировала единого и общепринятого теоретического каркаса. Это, в свою очередь, влечет незавершенность квантовой логики как дисциплины.

Оспаривается даже неклассический характер решетки высказываний, которую обычно и называют квантовой логикой. Дж Стейчел пишет: «Мы можем прибавить к парадоксам квантовой механики парадокс, заключающийся в том, что квантовая логика — это вовсе не логика, а скорее разъяснение определенных алгебраических структур» [Stachel 1974, с.215].

В первую очередь повинна в возникновении подобных мнений проблема импликации в квантовой логике. Вот что пишет по этому поводу И. Фройндлих, также прямо утверждающий, что квантовая логика не является логикой в обычном смысле этого слова: «Решетка квантовомеханических высказываний в действительности не является логикой. Дело в том, что логическое отношение импликации само должно быть предложением логической системы. В классической логике $p \to q$ есть высказывание $\neg p \vee q$. В решетке квантовомеханических пропозиций отношение импликации не является элементом решетки: оно есть метавысказывание о решетке. Подобные метавысказывания делаются в рамках классической логики» [Freundlich 1977, p.298].

Но подобный упрек можно было бы высказать и некоторым неклассическим логикам, например, логикам типа Хао Вана [Ермолаева Мучник 1974], в которых формулы имеют вид $p \to q$, где p и q — формулы, не содержащие импликации и построенные по правилам логики со связками $\vee$, $\wedge$ и $\neg$. Здесь *импликация относится к метатеории для* ($\vee$, $\wedge$, $\neg$)-логики.

Тем не менее, проблема импликации в квантовых логиках действительно представляет собой одну из основных проблем и единого мнения по этому вопросу не существует. Диапазон высказываний и предложений по этому вопросу удивительно широк. Проводятся аналогии с многозначной импликацией, используются модальные и семантические интерпретации и т.д.

Так, Й. М. Яух и К. Пирон [Jauch Piron 1970] утверждают, что если в случае квантовой логики мы действительно имеем дело с логикой, то для любых двух высказываний p и q должно существовать условное высказывание $p \to q$. Следуя Лукасевичу, истинность этого высказывания они определяют следующим образом: $[p \to q] = \min\{1, 1 - [p] + [q]\}$, где $[p]$ и $[q]$ суть истинностные значения p и q соответственно (целью работы было рассмотрение возможности представления пропозициональной системы для квантовой механики как бесконечнозначной логики). Для связки $\to$ имеет место в этом случае и транзитивность и закон дедукции, как это и должно быть для хорошей импликации.

Продолжая подобное построение, Р. Гричи и С. Гаддер в работе «Является ли «квантовая логика» логикой» [Greechie Gudder 1971] рассматривают L-ортомодулярное, частично упорядоченное множество (представляющее некоторую пропозициональную систему для квантовой механики) и некоторое определенное относительно порядка множество состояний S в L. Некоторые $a,b \in L$ являются условными, если существует $c \in L$, такое, что для всех $m \in S$, $m(c) = \min\{1, m(a') - m(b)\}$. Если c существует, то оно единственно и условно, т.е. $c = a \to b$. Авторы называют L условным, если все пары $a,b \in L$ являются условными (кондициональными, а связка $\to$ — кондиционалом). Итак, если L является логикой с законом дедукции, то L должно быть условной. Однако оказалось, что L является условным только в том случае, если $L = [0,1]$.

Многозначные построения для получения решетки квантовых высказываний использует в своей работе «Логика абака» О.К.Малхаз [Malhas 1994]. Под абаком он понимает некоторую функцию, сопоставляющую каждой точке области определения непустое множество действительных чисел. Каждой совокупности абаков отвечает теория. Квантовая логика может рассматриваться как логика абака — решетка, изоморфная орторешетке подпространств гильбертова пространства.

Следуя аналогии с модальной системой S.4 Дж. Зиман в статье «Квантовая логика с импликацией» [Zeman 1979] предложил определить $p \supset q$ как наблюдаемую, которая ложна тогда и только тогда, когда в одной из последовательностей измерений все измерения p приводят к «истинно», а q — «ложно». Показано, что как для этого определения, так и для любого другого определения импликации, удовлетворяющей аксиомам строгой импликации в S.4 ((1) $p \wedge (p \supset q) \leq q$ и (2) если $r \wedge p \leq q$, то $r \leq p \supset q$, где r — пересечение импликаций), наблюдаемая $p \supset q$ может быть измерена одновременно с любой другой наблюдаемой r (т.е. совместно с r); отсюда следует, что в обычном L^2-формализме $p \supset q$ равно 0 или 1.

Другой подход к импликации характерен для Р. Хьюза [Hughes 1981]. Исходным пунктом для него послужило определение отношения семантической импликации $A \models B$ в классической логике, проводимое следующим образом: $A \models B$ если в любой модели, в которой истинны все формулы из A, истинна и формула B. В квантовой логике определение $A \models_a B$ как «истинность всех формул a из A влечет истинность B» (т.е. если $t(a) = 1$ при всех $a \in A$, то $t(B) = 1$) не очень реалистично, так как для реальных свойств $t(a) < 1$. Более реалистично определение $A \models_b B$ как $\Lambda_{a \in A}\, t(a) \leq t(B)$ при всех t, для которых $t(a)$ совместны ($t(a)$ — истинностное значение, a — элемент квантовой логики), и $A \models_a B$ как «$t(B)$ принадлежит любому ультрафильтру, содержащему $t(a)$ при всех $a \in A$».

Выше уже упоминалось о работе Г.М.Хардегри «Кондиционал в квантовой логике» [Hardegree 1974]. Важнейшая из вводимых им логических связок — кондиционал $\rightarrow$ — определяет линейное подпространство комплексного гильбертова пространства состояний $H = |E \rightarrow F| = \{x \in H\colon FEx = Ex\}$, где E, F — проекционные операторы, соответствующие одномерным подпространствам и логическим утверждениям. Приведены примеры перехода подобной кантовологической импликации в классическую.

Введение логических матриц, используемых при построении ортомодулярной логики, характерно для системы ЛС В.С.Меськова. Анализируя вопрос о механизме логической реконструкции теории, т.е. о механизме перестройки некоторой исходной теории в логическую, он строит логическую систему для квантовомеханической теории [Меськов 1986, с.48]. ЛС представляет собой пятизначную логику, в качестве значений истинности для предложений которой предложены следующие: логически истинно (ЛИ), логически ложно (ЛЛ), фактически истинно (ФИ), фактически ложно (ФЛ), и, наконец, фактически неопределенно (ФН). Логическими связками являются &, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\equiv$, Δ, задающиеся с помощью таблиц. Символ Δ читается «дополнительно» и представляет собой симметричное, антирефлексивное и нетранзитивное отношение. Анализ свойств Δ позволяет дать ему следующее определение: два высказывания будут находиться в отношении дополнительности, если и только если они суть простые высказывания о значениях квантовомеханических величин и истинностные значения их удовлетворяют таблице, описывающей отношение Δ.

Проблемы, возникающие в связи с различными формулировками импликации в квантовой логике, проанализированы в работе М. Л. Далла Кьяры «Некоторые металогические патологии квантовой логики» [Dalla Chiara 1981]. Основной объект исследования при этом — класс алгебраических структур $\boldsymbol{B} = \langle B, -, 1\rangle$, где $\langle B, \leq, 1\rangle$ есть решетка с наибольшим элементом 1, а унарная операция – дает минимальное дополнение в $\boldsymbol{B}$, т.е. $a \leq - -a$; $a \cap a = -1 = 0$; $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$; $-(a \cup b) = -a \cap -b$. В классе $\boldsymbol{B}$ определима импликация

$$a \twoheadrightarrow b = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad a \leq b \\ 0 & \textit{иначе} \end{cases}$$

Бинарная операция $\supset$ называется кондиционалом, если: 1) $a \supset b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$; 2) $a \cap (a \supset b) \leq b$; 3) $(a \twoheadrightarrow b) \leq (a \supset b)$. Минимальная квантовая логика определяется как логика всех полных решеток с ортодополнением, а ортомодулярная квантовая логика — как логика всех полных ортомодулярных решеток. В ней вводится кондиционал $a \supset b = -a \cup (a \cap b)$. Для этих логик известна семантика Крипке с симметричным и рефлексивным отношением достижимости, которое используется также в семантике модальной логики Брауэра *B*, на чем и основана модельная интерпретация квантовой логики в *B*, аналогичная интерпретации интуиционистской логики в S.4. Однако здесь и начинаются патологии квантовой логики.

Как известно, свойство Линденбаума состоит в том, что всякое непротиворечивое множество формул можно расширить до полного непротиворечивого множества. Оказывается, что логика Брауэра *B* обладает свойством Линденбаума, а квантовые логики этим свойством не обладает. Ситуация разрешается тем, что некоторое квантовое предложение $\tau(\gamma)$ логики *B* (т.е. перевод в *B* некоторой формулы γ квантовой логики) не имеет такого расширения *T*, что:

1) *T* содержит только квантовые предложения;
2) *T* семантически непротиворечиво в *B*;
3) для всякой квантовой формулы β $T|\equiv_B \beta$ или $T|\equiv_B \neg\beta$ ($T|\equiv_B \alpha$ означает, что α следует из некоторой конечной конъюнкции формул из *T* во всех моделях).

Однако у $\tau(\gamma)$ имеется непротиворечивое расширение *T*, такое, что:

а) в *T* имеются не только квантовые формулы;

б) *T* семантически непротиворечиво в *B*;

в) для каждой квантовой формулы β в языке логики *B* $T|\equiv_B \beta$ или $T|\equiv_B \neg\beta$.

Я.Малиновский [Malinowski 1990] также приводит некоторые негативные результаты, связанные с теоремой дедукции для квантовой логики. Согласно проведенному им исследованию никакая логика (понимаемая как операция присоединения следствий), определяемая классом ортомодулярных решеток, не допускает теоремы дедукции. То же самое оказывается справедливым и для более широкого класса логик, определяемых орторешетками.

От отмеченного Дала Кьярой парадокса свободна система квантовой ортологики Р.Голльдблатта, рассмотренная им в работе «Семантический анализ ортологики» [Goldblatt 1974], но достигается это путем ослабления свойства Линденбаума. Подобная логика характеризуется классом орто-, ортомодулярных решеток в том смысле, что $A \vdash B$ тогда и только тогда, когда $v(A) \leq v(B)$, v есть функция из множества формул в орторешетку, для которой связки отрицания и конъюнкции интерпретируются как ортодополнение и решеточное пересечение соответственно. Новым у Гольдблатта является применение орторешеток в качестве моделей для пропозициональной логики. Понимаются они следующим образом. Пусть X есть множество результатов операций, проделываемых над каким-то объектом в процессе эксперимента. Элементы x и y являются ортогональными тогда и только тогда, когда они оказываются результатами одной и той же операции. У Крипке высказывания идентифицировались с возможными мирами, в которых они рассматривались как истинные, здесь же высказывание идентифицируется с множеством результатов, которые его верифицируют. Результат x верифицирует конъюнкцию высказываний тогда и только тогда, когда x верифицирует каждое из высказываний, и x отрицает высказывание тогда и только тогда, когда результаты, ортогональные x, верифицируют это высказывание.

Секвенциальные формулировки привлекательны тем, что позволяют обойти вопрос о природе импликации квантовой логики. М. Фридман и К. Глаймур еще в 1972 г. в работе «Если квантовая механика имеет логику» [Friedman Glymour 1972] предложили систему генценовского типа, семантика которой задается следующим образом: оценка v: $H \rightarrow$ {*Истина*, *Ложь*} задана тогда и только тогда, когда а) для всех $N \in H$, $v(N)$ = *Истина* тогда и только тогда, когда $v(N^{\perp})$ = *Ложь*; б) для каждой пары $M, N \in H$ если $v(N^{\perp})$ = *Истина* и $N \leq M$, то $v(M)$ = *Истина*. Вопрос о полноте этой системы авторами не был решен, но тот факт, что ее линденбаумова алгебра является слабомодулярной решеткой с ортодополнением, позволял надеяться, что полученная система будет плодотворна. Следует отметить, что эта система была построена с целью получения точной семантики для логики квантовой механики, предложенной Х. Патнэмом [Putnam 1974].

Секвенциальную систему квантовой логики мы находим и у представителя «немецкой» школы Э.-В. Стахова [Stachow 1981]. Его Q-пропозициональная синтаксическая система представляет собой пару $\langle\langle S_a, C\rangle, S\rangle$, где S_a — множество атомных предложений, C — множество логических связок, содержащее наряду с классическими связками связки $\sqcap$ («и затем»), $\sqcup$ («или затем»), $\dashv$ («если вначале, то»). Множество предложений S получается из S_a замыканием по логическим связкам. Секвенциальное исчисление квантовой логики вводится на Q-системе. Доказана адекватность и полнота этого исчисления в операционной семантике квантовомеханических систем (гильбертовы пространства).

Х.Нишимура [Nishimura 1980], расценивая бинарное отношение выводимости Гольдблатта как аналог натурального вывода Генцена, развил секвенциальные системы для ортологики и ортомодулярной логики со связками конъюнкции и отрицания. В этих системах рассматриваются также и бесконечные секвенции, сечение не устранимо, однако справедливо утверждение: если выводима секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, то выводима некоторая секвенция $\Gamma \Rightarrow \alpha$, где $\alpha \in \Delta$. Это утверждение приводит, в частности, к теоремам о полноте и непротиворечивости относительно соответствующих семантик типа Крипке, о компактности и финитной аппроксимируемости.

Однако секвенциальное исчисление Нишимуры имеет два недостатка: 1) в квантовой логике связки конъюнкции и дизъюнкции двойственны, а в исчислении Нишимуры — нет; 2) это исчисление нерегулярно в том смысле, что не допускает формульные образы для секвенций. Более поздние результаты Нишимуры в этом направлении можно найти в [Nishimura 1994].

Свободное от указанных недостатков регулярное секвенциальное исчисление для квантовой логики предложили в 1982 г. Н.Дж.Катленд и П.Ф.Гиббинс [Cutland Gibbins 1982], т.е. спустя два года после выхода в свет работы Нишимуры. В этом исчислении, в отличие от исчисления Нишимуры, не допустимо обычное правило сечения. Генценовскую формулировку без правил сечения для орторешеток приводит в своей работе С.Тамура [Tamura 1988].

Выше уже упоминалась модальная интерпретация квантовой логики в модальной логике Брауэра, аналогичная интуиционистской интерпретации в S.4. Но связь квантовой логики с модальными логиками отнюдь не исчерпывается этими результатами. Так, некоторые интерпретации квантовой логики основаны на подмеченном сходстве ее необычных свойств со свойствами модальностей. В этой связи Т. Чэпмен [Chapman 1982] приводит новый простой аргумент в пользу точки зрения, что недистрибутивность квантовой логики не противоречит обычной логике: с физической точки зрения под истинностью любой формулы квантовой логики понимается истинность формулы $Td(p)$ («во всех измерениях выполнено p»), Td — аналог модальности, поэтому отсутствие дистрибутивности и другие свойства квантовой логики аналогичны, например, истинности $\Box(a \vee b)$, но не $\Box a$ и не $\Box b$, в модальной логике.

Предпринимаются также попытки модального расширения квантовой логики. При этом имеет место двоякий подход: с одной стороны техника модальной логики используется для анализа квантовомеханических закономерностей, с другой стороны модальная квантовая логика строится как расширение квантовой логики в гёделевской форме. В качестве примера первой ситуации можно взять работу Б.К. ван Фраассена «Модальная интерпретация квантовой механики» [Fraassen 1981], а в качестве примера второй — работу П. Миттельштэдта «Модальная логика квантовой логики» [Mittelstaedt 1981].

Б. К. Ван Фраассен рассматривает следующую интерпретацию модальности «необходимо»: $\Box A$ справедливо в мире x, если A справедливо в каждом мире, физическим возможном относительно x. Различаются отдельные оттенки физической возможности мира y относительно мира x (xRy): xR_1y — все физические законы x истинны в y; xR_2y — все физические законы x суть физические законы y; xR_3y — все физические законы x и только они суть физические законы y. При анализе отношения между событиями и наблюдаемыми и других вопросов квантовой механики используется техника реляционной семантики модальной логики .

Что касается П. Миттельштэдта [Mittelstaedt 1981], то квантовая модальность определяется им следующим образом. Пусть W — произвольное множество высказываний. Говорят, что при условии W необходимо a (обозначается $\Delta_W a$), если в любой квантовой логике (т.е. в любом исчислении, описывающем квантовую логику) из W следует a (содержательно: какое состояние мы бы ни взяли, если все измерения любой наблюдаемой из W в этом состоянии всегда дают 1, то измеряя a, мы тоже получим 1). Возможность определяется обычным путем: $\Diamond_W a \equiv_{def} \neg \Delta_W \neg a$. Произвольная формула модельной логики квантовой механики получается из элементарных формул $\Delta_W a$ и $\Diamond_W a$ с помощью пропозициональных связок. Показано, что многие формулы, истинные в обычных модальных исчислениях (например, $\Delta_W a \Rightarrow \Diamond_W(b \to a)$) в такой логике неверны. Другое отличие от обычной модальной логики состоит в том, что какую бы информацию мы не имели, всегда есть наблюдаемые, для которых мы не можем предсказать, что получится при их измерении (можно делать только вероятностные предсказания), т.е. при всех W формула $\Delta_W a \vee \Delta_W \neg a$ не является тождественно истинной. Рассмотрена аналогичная конструкция с заменой базисной логики на интуиционистский вариант и для обеих построенных модальных логик описана диалоговая семантика.

В интуиционистской перспективе рассматривает квантовую логику Б.Коеке [Coecke 2002]. Вводя «отсутствующую» в решетке свойств физической системы дизъюнкцию, он получает полную алгебру Гейтинга высказываний о физических свойствах. Подобный подход позволяет ввести чисто интуиционистскую функциональную импликацию на решетке свойств, вопреки распространенному мнению о невозможности использования подобной связки.

В последние годы некоторые алгебраические структуры были предложены для моделирования классов так называемых эффектов — ограниченных линейных операторов между 0 и 1, используемых в операциональном подходе квантовой логики. Р.Джунтини и Х.Гройлинг [Giuntini Greuling 1989] разработали так называемые слабые ортоалгебры в качестве формального языка для описания нерезких свойств квантовых систем. Другие структуры, так называемые логики Брауэра-Заде, были предложены Дж.Каттанео и Дж.Нистико [Cattaneo Nisticò

1989] для алгебраического описания расщепления дополнения на две разновидности нестандартных ортодополнений.

Как проявление дальнейшей экспансии логических методов в квантовой механике можно расценивать появление исследований, направленных на квантовологической описание сложных квантовых систем. Обычные аксиоматические системы квантовой логики основаны на рассмотрении только «чистых» пропозиций, т.е. наблюдаемых, представляемых самосопряженными операторами с двухточечным спектром, между тем реальные приборы соответствуют вероятностным комбинациям таких предложений. Как обобщить логические операции, т.е. структуру решетки, на множество E предложений самого общего вида (в частности, на вероятностные комбинации чистых пропозиций)? К. Гаролой [Garola 1980] предложен способ получения ортодополнения не только в стандартном случае, но и (при некоторых дополнительных предположениях) в более общем алгебраическом формализме. Сущность его в следующем. Отношение порядка на множестве чистых пропозиций можно определить двумя равносильными способами: как $e_1 \leq e_2 = \forall a(a(e_1) \leq a(e_2))$, где a пробегает все состояния и $a(e)$ — вероятность ответа 1 при измерении e в состоянии a, и как $e_1 \precsim e_2 = \forall a(a(e_1) = 1 \Rightarrow a(e_2) = 1)$. На E эти определения уже не равносильны, более того, $\precsim$ — только предпорядок, так что возникают две решетки: $(E, \leq)$ и L—фактор решетка $(E, \precsim)$ по отношению $e_1 \approx e_2 = (e_1 \precsim e_2 \& e_2 \precsim e_1)$. Для решетки чистых пропозиций ортодополнение $e^\perp$ — это «отрицание», т.е. наблюдаемая равна 1 тогда и только тогда, когда значение e равно 0; формально $e^\perp$ однозначно определена условием $\forall a(a(e^\perp) = 1 - a(e))$. Однако показано, что эта формула не приводит к ортодополнению на E ($e \vee e^\perp \neq 1$ для некоторых e, например, если e — бросание монеты, когда $\forall a(a(e^\perp) = 1/2)$) и не распространяется на L, так как из $e_1 \approx e_2$ не следует, вообще говоря, что $e_1^\perp \approx e_2^\perp$. Гарола показывает, что приведенное выше определение дает ортодополнение только на множестве $E_0 = \{e \in E\colon \exists a(a(e) < 1/2 \;\&\; b(e) > 1/2\}$, включающем все разумные наблюдаемые, а на L можно определить ортодополнение $e^\perp$ как класс эквивалентности $e_i^\perp$, где e_i — тот из элементов e, у которого множество $\{a: a(e_l) = 0\}$ состояний, заведомо не удовлетворяющих e_l, наибольшее.

Что касается составных квантовомеханических систем, то А. Стейерс в работе «О логике пар квантовых систем» [Stairs 1983] предложил определение тензорного произведения логик отдельных подсистем, дающих логику системы. В случае классических физических систем пространство событий системы S есть, как известно, булева алгебра (и даже σ—алгебра) $B(E)$ измеримых подмножеств множества состояний E, а состояние квантовой системы S представляют обычно единичными векторами гильбертова пространства H, пространством же *событий* служит решетка $L(H)$ замкнутых линейных подпространств H. Автор обобщает классическое $B(E)$ и квантовое $L(H)$ пространства событий в понятии системы пропозиций или логики L, являющейся полной ортомодулярной решеткой со свойством атомности. Для описания пространства событий системы $S_1 + S_2$ вводится понятие логического произведения (i_1,i_2,L) решеток $L_1 = L(H_1)$ и $L_2 = L(H_2)$, обобщающего понятие булева произведения. При некотором ограничении и условии $\dim(H_1),\dim(H_2) \geq 3$ показывается, что $L = L(H)$ для некоторого гильбертова пространства H. Изучен ряд свойств произведения, отмечена возможность по крайней мере двух различных произведений в случае обычных квантовых систем.

В начале 80-х был получен ряд критических результатов относительно некоторых выдвинутых ранее систем квантовой логики, фиксирующих их бесполезность с точки зрения физики. В значительной степени это относится к логическому формализму К. Пирона, призванного, по замыслу автора, служить единым аксиоматическим базисом для произвольных физических теорий, классических и квантовых. Н. Хаджисаввас [Hadjisavvas et al. 1980], Ф. Тьефин и М. Мугур-Шахтер (см. [Thieffine et al. 1981], [Thieffine 1983]) обнаружили, что несмотря на то, что эта система синтаксическим непротиворечива, она обладает некоторыми синтаксическими характеристиками, из-за которых попытка интерпретировать в ней квантовую механику наталкивается на столь серьезные трудности, что такая интерпретация представляется невозможной.

Помимо этого оказалось, что квантовая логика пропозиций К. Пирона несовместима с законом двойственности Де Моргана в естественной интерпретации этой логики, а одна из аксиом нарушает связь между отношением отрицания и эквивалентности, существующими в обычной логике.

Среди других результатов подобного рода следует отметить обнаружение Р. Лэтзером [Latser 1974] трех формальных дефектов в одном из фундаментальных результатов квантовой механики — доказательстве С. Кохеном и Э. П. Шпеккером [Kochen Specker 1967] невозможности погружения частичной булевой алгебры подпространств гильбертова пространства (размерности больше трех) в полную булеву алгебру при условии сохранения структурных соотношений теории.

Еще более поздний результат, полученный Д.Мейером [Meyer 1999] в этом направлении, показывает, что теорема Кохена-Шпеккера нестабильна при естественном топологическом ослаблении допущений: оригинальное доказательство Кохена-Шпеккера основывается на демонстрации того факта, что точки единичной сферы S^2 не могут быть раскрашены в два цвета таким образом, чтобы одна из трех точек, которые определяют ортогональное множество единичных векторов, отличалась по цвету от двух других. Мейер показывает, что точки на S^2, имеющие рациональные координаты, могут быть раскрашены требуемым образом. Этот результат был использован для создания неконтекстуальных моделей со скрытыми параметрами.

Появились также системы релятивистской квантовой логики, получающиеся обобщением известной квантовой логики и квантовой вероятности на случаи релятивистского пространства-времени. Так, И. Банаи [Banai 1982] при рассмотрении релятивистской квантовой логики использует предложенную Г. Такеути процедуру квантования как перехода от классического универсума фон Неймана к L—значному универсуму, где L — решетка замкнутых подпространств гильбертова пространства. Эта процедура применяется к квантованию пространства-времени, проводимому с квантованием полевых величин.

Другим путем идет П. Миттельштедт при построении системы релятивистской квантовой логики, являющейся естественным расширением построенной им ранее квантовой логики [Mittelstaedt 1978]. В работе «Релятивистская квантовая логика» [Mittelstaedt 1983] он предлагает ее модификацию, предназначенную для описания динамики квантовых систем. Основной объект, как и прежде — вопросы, т.е. наблюдаемые с возможными значениями «да», «нет», основные операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\sqcap$ ($A \sqcap B$ означает «сначала измерим A, потом измерим B»), основное отношение — $k(A,B)$ (одновременная измеримость A и B). Эволюция квантовой системы описывается так: каждой точке пространства-времени и каждой наблюдаемой сопоставляется вероятность $p(A)$ положительного ответа в данной точке пространства-времени так, что если приготовление системы описывается оператором W, в точке S проводится измерение A и ответ положительный, то в точке, причинно следующей за S, состояние есть $W \sqcap A$, и вероятность положительного ответа на A есть 1, в остальных точках — состояние W и вероятность $p(A)$. Это описание должно быть таким, что если в пространственно разделенных (т.е. причинно не связанных точках x и y) истинны соответствующие утверждения A и B, то A и B одновременно измеримы; в противном случае, измеряя или не измеряя A в точке x, мы могли бы повлиять на результаты измерения B в точке y и тем самым точка y была бы причинно следующей за x.

Еще одно направление исследований связано с системами так называемой квантовой теории множеств. Г.Такеути в работе 1981 года строит *ортозначные* модели, которые формально похожи на обычные булевозначные модели для стандартной теории множеств [Takeuti 1981] (см. также [Dalla Chiara 1986, p.461-462]). При этом множество истинностных значений имеет структуру полной ортомодулярной решетки. Стандартные теоретико-множественные аксиомы при этом справедливы лишь в ограниченных версиях. В частности, отношение равенства оказывается не-лейбницевским: два квантовых множества могут быть экстенсионально равными, но обладать разными свойствами.

Для преодоления подобного недостатка М.Л.Далла Кьяра и Дж. Торальдо ди Франчиа в статье «Индивиды, виды и имена в физике» разрабатывают концепцию квантовых квазимножеств [Dalla Chiara Toraldo di Francia 1993]. Теория квазимножеств позволяет интерпретировать в своих рамках стандартную теорию множеств: множества — это такие квазимножества, которые совпадают со своими экстенсиями, в то время как собственно квазимножества представляют собой разновидность «полуинтенсии». Микрофизика представляет собой мир интенсий, где равные объекты фундаментально неразделимы.

Возникают и предложения расширить саму концепцию квантовой логики. Например, Кенджи Токуо в работе «Расширенная квантовая логика» [Tokuo 2003] предлагает это сделать таким образом, чтобы она охватывала более общее множество предложений, связанных с нетривиальными вероятностями. Он показывает, что подобная структура может быть вложена в мультимодальные рамки, обладающие привлекательными логическими свойствами, такими как аксиоматизация, финитная аппроксимируемость и разрешимость.

Другим путем идут Дж.Каттанео, М.Л.Далла Кьяра и Р.Джунтини, отталкиваясь от концепции квантовых вычислений. В работе «Размытая квантовая логика на основе квантового вычисления» [Cattaneo *et al* 2003] они предлагают кардинальным образом поменять взгляд на семантику квантовой логики, ассоциируя с каждым предложением либо *кубит* (qubit) либо систему кубитов. Под кубитом они понимают любой унитарный вектор в гильбертовом пространстве (размерности 2), основывающийся на множестве всех упорядоченных пар комплексных чисел. В дираковском формализме кубит можно изобразить следующим образом:

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle.$$

В случае системы кубитов рассматриваются унитарные вектора в произведении гильбертовых пространств, над которыми с помощью операторов специального вида (квантовологические вентили) вводятся логические операции.

Глава вторая
Квантовая логика в топосах

2.1. Ортомодулярность в топосах

Теоретико-множественное моделирование интуиционистской логики, предложенное С. Крипке, позволило обнаружить топосы, в которых логические построения, обобщающие соответствующие конструкции в категориях множеств, оказываются переформулировкой семантических построений Крипке. К настоящему времени имеется уже довольно много теоретико-множественных моделей для квантовой логики (см., например, [Stout 1979]), в том числе и моделей крипкевского типа. Если учесть, вдобавок, что для квантовой логики имеются и иные интерпретации, то закономерным представляется вопрос: могут ли квантовые логики быть стандартным образом интерпретируемы в топосах и какова конструкция подобных топосов в случае положительного ответа?

Исходным пунктом для интерпретации квантовой логики в топосах, предлагаемой автором, послужил тот факт, что для произвольной малой категории $\boldsymbol{C}$ категория функторов $\boldsymbol{Set^C}$ является топосом [Гольдблатт 1983, с.219]. Анализ конструкции интерпретации интуиционистской логики в $\boldsymbol{Set^P}$, где $\boldsymbol{P}$ — алгебра Гейтинга, наводит на мысль о том, что можно вместо алгебры Гейтинга использовать ортомодулярную решетку, которая определяет алгебраическую структуру подавляющего числа квантовых логик.

Если взять ортомодулярную решетку E, то, как и всякая решетка, она будет представлять собой конечно кополную категорию порядка. Таким образом, при построении категории

$\mathbf{Set}^{C}$ можно попытаться взять в качестве $\mathbf{C}$ ортомодулярную решетку, т.е. построить категорию $\mathbf{Set}^{E}$.

Однако в этом случае неясно как категорно интерпретировать ортодополнение, которое выражает свойства отрицания в квантовой логике. В случае алгебры Гейтинга такой проблемы не возникает, ввиду того, что в алгебре Гейтинга отрицание не является примитивной связкой, но вводится по определению с использованием константы $\perp$ (ложь) и импликации.

Чтобы обойти эту трудность, снабдим нашу категорию предпорядка функтором, передающим свойства орттодополнения. Сама идея подобного подхода восходит к предложению А. Рискоса и Л. М. Лайты функторно моделировать классическое отрицание в категориях предпорядка (см. [Riscos Laita 1987]). Выбор категорий предпорядка выгоден здесь именно тем, что в силу единственности стрелок мы сразу можем говорить и о дедуктивных исчислениях и о категориях, поскольку мы не будем нуждаться в тождествах на стрелках: все стрелки единственны.

Определение. *Ортокатегория* $\mathbf{E}$ представляет собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $^{\perp}\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, такую, что:

(i) $\mathbf{E}$ имеет инициальный объект 0 и терминальный объект 1;

(ii) $\mathbf{E}$ имеет конечные копроизведения $[-,-]$ и конечные произведения $\langle -,- \rangle$;

(iii) функтор $^{\perp 2}$ естественно эквивалентен единице в $\mathbf{E}$, т. е. $^{\perp 2}a \cong a$ для любого объекта a из $\mathbf{E}$,

(iv) $\langle a, {}^{\perp}a \rangle \cong 0$, $[a, {}^{\perp}a] \cong 1$ для всех объектов a из $\mathbf{E}$,

(v) $^{\perp}[a,b] \cong \langle {}^{\perp}a, {}^{\perp}b \rangle$, $^{\perp}\langle a, b \rangle \cong [{}^{\perp}a, {}^{\perp}b]$ для любых двух объектов a, b из $\mathbf{E}$

Ортокатегория $\mathbf{E}$ является *ортомодулярной* категорией, когда дополнительно выполняется следующее условие:

(vi) если $a \to b$ есть стрелка в $\mathbf{E}$, то $[a, \langle {}^{\perp}a, b \rangle] \cong b$ для любых двух объектов a, b из $\mathbf{E}$.

Нетрудно видеть, что все пункты данного определения представляют собой теоретико-категорную запись алгебраических свойств ортомодулярной решетки. По сути дела, они не влекут за собой каких-либо категорных «осложнений», поэтому в дальнейшем, если это не будет специально оговорено, будем понимать, когда это следует из контекста, под ортомодулярной решеткой ортомодулярную категорию предпорядка, записывая функтор $^{\perp}$ как алгебраическую операцию (т.е. не слева, а справа от символа).

Рассмотрим наследственные множества в ортомодулярной решетке E. Для любого элемента p наследственное множество $[p)$ определяется равенством:

$[p) = \{q: p \leq q\}$

Ортодополнение $^{\perp}$ в E представляет собой инволютивную перестановку, причем $b^{\perp} \leq a^{\perp}$ всякий раз, когда $a \leq b$ ($a,b \in E$). Как известно [Биркгоф 1964, с.76], в ортомодулярной решетке каждый интервал [a,b] является ортомодулярной решеткой, замкнутой относительно $\wedge,\vee$ и операции взятия относительного дополнения $c' = (a \vee c^{\perp}) \wedge b = a \vee (c^{\perp} \wedge b)$. В наследственных множествах верхняя граница интервала равна 1, поэтому $c' = (p \vee c^{\perp}) \wedge 1 = p \vee c^{\perp}$. Следовательно, множество E^{+} наследственных множеств будет представлять собой множество ортомодулярных решеток.

Рассмотрим теперь решетку $E^{+} = (E^{+}, \subseteq)$ наследственных множеств. Чтобы превратить ее в ортомодулярную решетку необходимо определить ортодополнение. В этом случае требуется, чтобы подобная процедура определяла инволютивную операцию на E^{+}. Из определения ортодополнения следует, что если $c' = p \vee c^{\perp}$, то $c' \in [p)$. Естественно определять тогда $[p)'$ как множество таких c, что $c' \in [p)^{\perp}$. В этом случае $p \leq c^{\perp}$, а это не что иное, как определение отношения ортогональности, поскольку оно задается требованием $a \perp b \Rightarrow a \leq b^{\perp}$. Как известно, отношение ортогональности представляет собой симметричное и иррефлексивное отношение.

Определим теперь $x \perp Y$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$, $x \perp y$ и введем операцию * с помощью определения:

(i) $[p)^{*} = \{x: x \perp [p)\}$

Множество X называется замкнутым относительно *, если $(X^{*})^{*} = X$.

Однако из определения (i) следует, что $[p)^{*} = \varnothing$, поскольку $1 \in [p)$, а $x \perp 1$ если $x \leq 0$, т.е. $x = 0$. Чтобы избежать этого, модифицируем определение наследственного множества:

$$[p) = \{q: p \leq q \; \& \; q \neq 1\}$$

Подобные множества называются обычно *квази-наследственными* множествами, однако чтобы не перегружать терминологию, сохраним за ними первоначальное имя наследственных множеств. Нетрудно переформулировать все предыдущие определения с учетом принятого ограничения.

*2.1.1. Лемма. Решетка $E^+ = (E^+,\subseteq,^*)$ замкнутых относительно операции * наследственных множеств является ортомодулярной решеткой.*

Доказательство. Частично упорядоченное множество наследственных множеств, упорядоченных по включению, является ограниченной дистрибутивной решеткой, пересечения и объединения которой задаются соответствующими теоретико-множественными операциями $\cap$ и $\cup$ [Гольдблатт 1983, с.203]. Следовательно $(E^+,\subseteq)$ будет решеткой относительно $\cap$ и $\cup$. Тогда в силу замкнутости по *, симметричности и иррефлексивности отношения ортогональности $\perp$ соответственно $[p) \rightarrow [p)^*$ будет инволюцией, а $(E^+,\subseteq,^*)$ — орторешеткой [Биркгоф 1964, с.164]. Поскольку всякая дистрибутивная решетка модулярна, а всякая модулярная орторешетка является ортомодулярной, то $(E^+,\subseteq,^*)$ будет ортомодулярной решеткой.

Заметим, что полученная подобным образом орторешетка будет на самом деле представлять собой булеву алгебру [Биркгоф 1964, с.76]. Но можно определить E^+ и как недистрибутивную ортомодулярную решетку. Для этого воспользуемся следующим определением:

$$X \sqcup Y = (X^* \cap Y^*)^*.$$

Как известно, в общем случае $(X^* \cap Y^*)^* > X \cup Y$ [Биркгоф 1964, с.167]. Нетрудно убедиться, что $(E^+,\subseteq, \sqcup, \cap, ^*)$ представляет собой орторешетку. Необходимое и достаточное условие для ортомодулярности E^+ имеет вид : если $[x) \subseteq [y)$ и $[x)^* \cap [y) = \varnothing$, то $[x) = [y)$ [Биркгоф 1964, с.77]. Доказательство выполнимости дуального этому условия в E^+ можно найти в [Beran 1984, с.171]. Фактически мы получили конструкцию, двойственную вложению Яновица (см. [Beran 1984, с.173]).■

Здесь и в дальнейшем ▪ означает конец доказательства. Заметим, что в доказательстве леммы 2.1.1 фактически фигурируют две решетки E^+_1 и E^+_2, первая из которых дистрибутивна, а вторая — недистрибутивна. В последующем изложении под E^+ подразумевается вторая из них.

*2.1.2.Лемма. Решетка $[p)^+$, образованная всеми наследственными в $[p)$ множествами, замкнутыми относительно *, является ортомодулярной решеткой.*

Доказательство. Достаточно определить $[c)^*_p = [c)^* \cap [p)$. Тогда относительно этой операции интервал $[\varnothing,[p)]$ будет представлять собой ортомодулярную решетку [Биркгоф 1964, с.76]. ▪

При построении категории $\mathbf{Set}^E$ функтор Ω: $E \to \mathbf{Set}$ определяет множество $\Omega(p) = \Omega_p$ как множество p—корешет, представляющих собой некоторое подмножество S множества $E_p = \{f$: для некоторого q стрелка f: $p \to q$ принадлежит $\boldsymbol{E}\}$, замкнутое относительно левого умножения, т.е. если $f \in S$, а g: $q \to r$ — произвольная $\boldsymbol{E}$—стрелка, то $g \circ f \in S$. Отождествляя f: $p \to q$ с ее концом q, получаем E_p как множество $\{q: p \leq q\} = [p)$ и $\Omega_p = [p)^+$.

Пусть $\boldsymbol{F}_p$ обозначает значения $\boldsymbol{F}(p)$ функтора $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{E} \to \mathbf{Set}$ на объекте p. Для любых p и q, таких, что $p \leq q$, функтор $\boldsymbol{F}$ определяет функцию из $\boldsymbol{F}_p$ в $\boldsymbol{F}_q$, обозначаемую через $\boldsymbol{F}_{pq}$. Тогда для p и q, таких, что $p \leq q$, функция Ω_p: $\Omega_p \to \Omega_q$ сопоставляет каждому $S \in [p)^+$ множество $S_q = S \cap [q) \in [q)^+$, т.е. $\Omega_{pq}(S) = S_q$.

Конечным объектом категории $\mathbf{Set}^E$ служит постоянный функтор $\mathbf{1}$: $\boldsymbol{E} \to \mathbf{Set}$, определяемый условием $\mathbf{1}_p = \{0\}$ для $p \in \boldsymbol{E}$ и $\mathbf{1}_{pq} = id_{\{0\}}$ при $p \leq q$. Классификатором подобъектов *true*: $\mathbf{1} \to \Omega$ является естественное преобразование, p-я компонента которого $true_p$: $\{0\} \to \Omega_p$ определяется равенством $true_p(0) = [p)$, т.е. функция *true* выбирает наибольший элемент из каждой ортомодулярной решетки вида $[p)^+$.

Если τ: $\boldsymbol{F} \rightarrowtail \boldsymbol{G}$ — произвольный подобъект $\mathbf{Set}^E$—объекта $\boldsymbol{G}$, тогда каждая компонента τ_p инъективна и можно считать ее функцией включения $\boldsymbol{F}_p \hookrightarrow \boldsymbol{G}_p$. p—я компонента $(\chi_\tau)_p$:$\boldsymbol{G}_p \to [p)^+$ характеристической стрелки χ_τ: $\boldsymbol{G} \to \Omega$ определяется равенством

$$(\chi_\tau)_p(x) = \{q: p \leq q \;\&\; \mathbf{G}_{pq}(x) \in \mathbf{F}_q\}$$

для каждого $x \in \mathbf{G}_p$. Выполнимость Ω—аксиомы получаем так же, как и в случае алгебры Гейтинга [Гольдблатт 1983, с.231-232], так как при этом используются лишь решеточные свойства наследственных множеств.

Начальный объект $\mathbf{0}$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$ в категории $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$ будет представлять собой функтор, такой, что $\mathbf{0}_p = \varnothing$ и $\mathbf{0}_{pq} = id_\varnothing$ для $p \leq q$. Компонентами естественного преобразования $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$ являются включения $\varnothing \hookrightarrow \{0\}$. Стрелка *false* по определению является характеристической стрелкой подобъекта $!{:}\mathbf{0} \to \mathbf{1}$. Для ее компоненты $false_p : \{0\} \to \Omega_p$ имеем

$$false_p\,(0) = \{q: p \leq q \;\&\; \mathbf{1}_{pq}(0) \in \mathbf{0}_q\} = \{q: p \leq q \;\&\; 0 \in \varnothing\} = \varnothing.$$

Следовательно, естественное преобразование *false* выбирает нулевой элемент из каждой ортомодулярной решетки $[p)^+$. Стрелка *false* мономорфна.

Отрицание можно определить теперь как стрелку $\neg{:}\Omega \to \Omega$, являющуюся характеристической стрелкой подобъекта *false*. Если отождествить $false_p$ с включением $\{0\} \subseteq \Omega_p$, то p-я компонента $\neg_p$: $\Omega_p \to \Omega_p$ отрицания удовлетворяет равенствам

$$\neg_p(S) = \{q: p \leq q \;\&\; \Omega_{pq}(S) \in \{\varnothing\}\} = \{q: p \leq q \;\&\; S \cap [q) = \varnothing\} = [p) \cap S^* = S^*_p.$$

Таким образом ортодополнение в $[p)^+$ совпадает с p—й компонентой истинностной стрелки отрицания в $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$.

Конъюнкция и дизъюнкция определяются как и в случае алгебры Гейтинга [Гольдблатт 1983, с.235]. Для p—й компоненты $\langle true, true\rangle_p$: $\{0\} \to \Omega_p \times \Omega_p$ $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$-стрелки $\langle true, true\rangle$: $\mathbf{1} \to \Omega \times \Omega$ справедливо равенство $\langle true, true\rangle_p\,(0) = \langle [p), [p)\rangle$. Конъюнкция $\cap$: $\Omega \times \Omega \to \Omega$ является характеристической стрелкой для $\langle true, true\rangle$. Ее p—я компонента $\cap_p$: $\Omega_p \times \Omega_p \to \Omega_p$ удовлетворяет равенству

$$\cap_p(\langle S, T\rangle) = \{q: p \leq q \;\&\; \langle \Omega_{pq}(S), \Omega_{pq}(T)\rangle\} = \langle [q), [q)\rangle = S \cap T.$$

В рассматриваемых в дальнейшем системах квантовой логики дизъюнкция не относится к числу примитивных связок, поэтому ее определение можно опустить.

2.2. Общезначимость в Set^E: системы Гольдблатта, Нишимуры и Катленда–Гиббинса

Р. Гольдблатт в своей работе «Семантический анализ ортологики» [Goldblatt 1974] рассматривает логику не как множество правильно построенных формул, но как собрание их упорядоченных пар, удовлетворяющих определенному условию замыкания. Логики такого типа он называет бинарными. Они характеризуются классом орто-, ортомодулярных решеток в том смысле, что $A \vdash B$, если и только если $v(A) \leq v(B)$, где v есть функция из множества правильно построенных формул в орторешетку, для которой связки $\neg$ и $\wedge$ интерпретируются как ортодополнение и решеточное пересечение соответственно. Построенная им система ортологики *O*, характеризуемой классом орторешеток, определяется следующей аксиоматикой:

Аксиомы.

(1) $\alpha \vdash \alpha$

(2) $\alpha\wedge\beta \vdash \alpha$

(3) $\alpha\wedge\beta \vdash \beta$

(4) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

(5) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

(6) $\alpha\wedge\neg\alpha \vdash \beta$

Правила вывода.

(7) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$

(8) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta\wedge\gamma}$

(9) $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}$

В приведенной формулировке $\alpha \vdash \beta$ означает, что β выводима из α. Это обозначение можно расширить до $\Gamma \vdash \alpha$, где Γ является множеством правильно построенных формул, полагая, что $\Gamma \vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\beta_1, \ldots \beta_n \in \Gamma$ имеем $\beta_1\wedge \ldots \wedge\beta_n \vdash \alpha$.

Если использовать определение $\alpha\vee\beta =_{def} \neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$, то от ортологики *O* можно перейти к квантовой логике *OM*, характеризуемой классом ортомодулярных решеток, присоединяя к *O* дополнительную аксиому

(10) $\alpha\wedge(\neg\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)) \vdash \beta$

X Нишимура [Nishimura 1980], расценивая бинарное отношение выводимости Гольдблатта как аналог натурального вывода Генцена, развил аналогичные генценовским секвенциальные системы *GO* для ортологики и *GOM* для квантовой логики со связками $\wedge$ и $\neg$. Его формулировка системы *GOM* имеет следующий вид:

Аксиомы. $\alpha \vdash \alpha$

Правила вывода.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Pi, \Gamma \to \Delta, E}(\textit{ослабление})$$

$$\frac{\Gamma_1 \to \Delta_1, \alpha \quad \alpha, \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_1\ \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2}\ (\textit{сечение})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge\to) \qquad \frac{\beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge\to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta}\ (\to\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\neg\to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\neg\Delta \to \neg\Gamma}\ (\to\neg)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\neg\neg\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\neg\neg\to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \neg\neg\alpha}\ (\to\neg\neg)$$

Секвенциальная система *GOM* получается из *GO* в результате добавления следующего правила

$$\frac{\neg\beta \to \neg\alpha \quad \neg\alpha, \beta \to}{\neg\alpha \to \neg\beta}\ (\mathrm{OM})$$

В *GO* и *GOM* не устранимо сечение, однако справедливо утверждение: если выводима секвенция $\Gamma \to \Delta$, то выводима некоторая секвенция $\Gamma \to \alpha$, где $\alpha \in \Delta$. Это утверждение приводит, в частности, к теореме о нормализуемости, доказуемой для обеих систем.

Однако секвенциальное исчисление Нишимуры имеет два недостатка:

1) в квантовой логике связки $\wedge$ и $\vee$ обычно двойственны, а в исчислении Нишимуры — нет (секвенциальное исчисление является двойственным тогда и только тогда, когда для всех конечных Γ и Δ мы имеем $\vdash \Gamma \to \Delta$ тогда и только тогда, когда справедливо $\vdash \Delta^* \to \Gamma^*$, где для формулы α мы получаем α^* путем замены вхождения $\wedge$ на $\vee$ и наоборот; для множества формул Γ получаем двойственное множество в виде $\Gamma^* = \{\gamma^*: \gamma \in \Gamma\}$ и следует учесть, что такая замена в случае квантовых логик предполагает выбор одной из связок $\wedge$, $\vee$ в качестве примитивной);
2) это исчисление нерегулярно в том смысле, что не выполняется условий $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \to \Delta_1, \ldots, \Delta_m$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Gamma_n \to \Delta_1 \vee \ldots \vee \Delta_m$.

Н. Дж. Катленд и П. Ф. Гиббинс [Cutland Gibbins 1982] предложили в 1982 году регулярное секвенциальное исчисление для квантовой логики, свободное от указанных недостатков, в котором, в отличие от исчисления Нишимуры, не допустимо обычное правило вывода.

Аксиоматика системы *GO*$^+$, представляющей собой расширение системы *GO* Нишимуры, выглядит следующим образом:

Аксиомы. $\alpha \vdash \alpha$

Правила вывода.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Theta, \Gamma \to \Delta, \Sigma}\ (\textit{ослабление})$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha, \Delta_1 \quad \alpha \to \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1, \Delta_2}\ (\textit{сечение}1)$$

$$\frac{\Gamma_1 \to \alpha \quad \Gamma_2, \alpha \to \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta}\ (\textit{сечение}2)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to) \quad \frac{\beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge \to)$$

$$\frac{\Gamma\to\alpha\quad\Gamma\to\beta}{\Gamma\to\alpha\wedge\beta}\ (\to\wedge)^{\dagger}$$

$$\frac{\alpha\to\Delta\quad\beta\to\Delta}{\alpha\vee\beta\to\Delta}\ (\vee\to)^{\dagger}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,\alpha}{\Gamma\to\Delta,\alpha\vee\beta}\ (\to\vee)^{\dagger}\quad\frac{\Gamma\to\Delta,\beta}{\Gamma\to\Delta,\alpha\vee\beta}\ (\to\vee)^{\dagger}$$

$$\frac{\Gamma\to\alpha}{\Gamma,\neg\alpha\to}\ (\neg\to)^{\dagger}$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta}{\neg\Delta\to\neg\Gamma}\ (\to\neg)$$

$$\frac{\alpha,\Gamma\to\Delta}{\neg\neg\alpha,\Gamma\to\Delta}\ (\neg\neg\to)$$

$$\frac{\Gamma\to\Delta,\alpha}{\Gamma\to\Delta,\neg\neg\alpha}\ (\to\neg\neg)$$

Знаком † здесь отмечены специфические для $GO^{\dagger}$ правила. Система $GO^{\dagger}M$ квантовой логики получается путем добавления правила ортомодулярности Нишимуры, т.е. представляет собой систему $GO^{\dagger}M = GO^{\dagger}$ + (OM)

Семантика всех рассмотренных исчислений описывается с помощью понятий орто-, квантовых фреймов и моделей.

2.2.1. Определение. Ортофрейм представляет собой пару $\langle X,\perp\rangle$, где

(1) X является непустым множеством;

(2) $\perp$ есть отношение ортогональности на X, т.е. $\perp\subseteq X\times X$ симметрично и иррефлексивно.

2.2.1. Определение. Ортомодель есть тройка $\langle X,\perp,v\rangle$, где

(1) $\langle X,\perp\rangle$ есть ортофрейм;

(2) v есть функция, ставящая в соответствие каждой пропозициональной переменной α *-замкнутое подмножество $v(\alpha)\subseteq X$.

2.2.3. Определение. Квантовый фрейм представляет собой тройку $\langle X,\perp,\psi\rangle$, где

(1) $\langle X,\perp\rangle$ есть ортофрейм;

(2) ψ есть непустое множество *-замкнутых подмножеств X, таких, что

(а) ψ замкнуто относительно теоретико-множественного пересечения и операции *;

(б) для любых $Y,Z\in\psi$, $Y\subseteq Z$ и $Y^*\cap Z=\varnothing$ влечет $Y=Z$.

2.2.4. Определение. Квантовая модель представляет собой четверку $\langle X,\perp,\psi,v\rangle$, где

(1) $\langle X,\perp,\psi\rangle$ есть квантовый фрейм;

(2) v есть функция, ставящая в соответствие каждой пропозициональной переменной α *-замкнутое подмножество $v(\alpha)$ из ψ.

Нетрудно видеть, что в роли семейства ψ ортогонально замкнутых подмножеств X можно брать ортомодулярную решетку E^+, тем более, что условие (б) из определения 2.2.3 выполнимо в E^+ (это следует из того факта, что в орторешетках условие $a\leq b$ & $a^\perp\wedge b=0\Rightarrow a=b$ является необходимым и достаточным условием ортомодулярности [Биркгоф 1964, с.77]).

Определим теперь квантовую модель $\boldsymbol{M}=\langle \boldsymbol{E}^+,v\rangle$ с квантовым фреймом $\boldsymbol{E}^+$ (здесь $\boldsymbol{E}^+$ заменяет запись $\langle E,\perp,E^+\rangle$), где $v\colon F\to E^+$ — некоторая E-оценка, а F — множество пропозициональных формул. Используя v, определяем теперь $\mathbf{Set}^E$—оценку $v'\colon F\to \mathbf{Set}^E(\mathbf{1},\Omega)$. Функция v' сопоставляет каждой пропозициональной букве π истинностное значение $v'(\pi)\colon\mathbf{1}\to\Omega$ в $\mathbf{Set}^E$. Компонента $v'(\pi)_p\colon\{0\}\to\Omega_p$ этого истинностного значения определяется равенством:

(*) $v'(\pi)_p(0)=v(\pi)\cap[p)=v(\pi)_p$.

Фактически $v'(\pi)_p$ собирает все точки из $[p)$, в которых π истинна в $\boldsymbol{M}$.

Если $p\leq q$, то $v(\pi)\cap[p)\cap[q)=v(\pi)\cap[q)$. Это дает нам коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "v'(\pi)_p"] \arrow[d] & {[p)^+} \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, "v'(\pi)_q"'] & {[q)^+}
\end{tikzcd}$$

откуда явствует, что $v'(\pi)$ будет естественным преобразованием.

Пусть теперь $v(\alpha)_p = v(\alpha) \cap [p)$.

*2.2.5. **Лемма**. Для произвольной формулы $\alpha \in F$ p—я компонента $v'(\alpha)_p : \{0\} \to [p)^+$ естественного преобразования $v'(\alpha)$ удовлетворяет равенству $v'(\alpha)_p(0) = v(\alpha)_p$.*

Доказательство. Ведется индукцией по длине формулы α. Пусть $\alpha = \neg\beta$ и для β лемма справедлива.

Тогда $v'(\neg\beta)_p = (\neg \circ v'(\beta))_p = \neg_p \circ v'(\beta)_p$.

Следовательно $v'(\alpha)_p(0) = \neg_p(v'(\beta)_p(0))$

$= \neg_p(v(\beta)_p)$ (по индуктивному предположению)

$= (v(\beta))^*_p$ (по определению стрелки отрицания)

$= v(\neg\beta)_p$ (по определению оценки в квантовом фрейме)

$= v(\alpha)_p$.

Что касается $\wedge$, то здесь доказательство ничем не отличается от случая алгебры Гейтинга [Гольдблатт, 1983, с.238], а $\vee$ не относится к числу основных связок, ибо вводится по определению (см. доказательство леммы 2.2.1). Остается лишь случай секвенции, т.е. $\alpha = \Gamma \to \Delta$ для систем Нишимуры и Катленда-Гиббинса (для системы Гольдблатта доказуемо, что если $\vdash \Gamma \to \alpha$ в ***GOM***, ***GO†M***, то $\Gamma \vdash \alpha$ в ***OM***). В этих системах для секвенции требуется, чтобы

$$v(\Gamma \to \Delta) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} v(\alpha).$$

Тогда $v'(\Gamma \to \Delta)$ будет определяться как

$$v'(\wedge\Gamma) = v'(\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \alpha).$$

Поскольку множество наследственных множеств замкнуто относительно пересечения, получаем существование подобной оценки и на E^+. ▪

2.2.6. Следствие. Если $\mathbf{Set}^E \models \alpha$, то $E^+ \models \alpha$.

Доказательство. Так как $\mathbf{Set}^E \models \alpha$, то $v'(\alpha) = true$. Следовательно, для любого p имеет место $v'(\alpha)_p = true_p(0) = [p)$. Так как $p \in [p)$, то лемма 2.2.5 дает $p \in v(\alpha)_p \subseteq v(\alpha)$. Ввиду произвольности p получаем $v(\alpha) = E$. Поскольку E выбрана произвольно, то α тождественно истинна на E. ▪

Определим теперь E-оценку v: $F \to E^+$, отталкиваясь от $\mathbf{Set}^E$—оценки v': $F \to \mathbf{Set}^E(\mathbf{1},\Omega)$. Стрелка $v'(\pi)$:$\mathbf{1} \to \Omega$ выбирает для каждого $q \in E$ наследственное подмножество $v'(\pi)_q(0)$ множества $[q)$. Определим $v(\pi)$ как объединение всех этих подмножеств:

$$v(\pi) = \cup\{v'(\pi)_q(0) \colon q \in E\}.$$

иначе

(**) $r \in v(\pi)$ тогда и только тогда, когда (для некоторого q) $r \in v'(\pi)_q(0)$.

2.2.7. Лемма. Для произвольного $p \in E$ имеем $v(\pi) \cap [p) = v'(\pi)_p(0)$, где $v(\pi)$ определяется условием (**).

Доказательство. То же, что и в [Гольдблатт, 1983, с.239]. ▪

Пусть v — произвольная E-оценка и v' — оценка, определяемая равенством (*), т.е. $v'(\pi)_p(0) = v(\pi)_p$. Тогда в силу полноты решетки E^+ имеет место равенство

$$\bigcup\{v'(\pi)_p(0) \colon p \in E\} = \bigcup\{v(\pi)_p \colon p \in E\} = v(\pi).$$

Следовательно, применение (**) к v' приводит опять к v. Этот факт вместе с леммой 2.2.7 показывает, что определения (*) и (**) взаимно обратны и устанавливают биекцию между E^+-оценками и $\mathbf{Set}^E$—оценками. Можно считать, что оценка v в лемме 2.2.5 получается из оценки v', фигурирующей в этой же лемме, по определению (**).

2.2.8. Следствие. Если $E^+ \models \alpha$, то $\mathbf{Set}^E \models \alpha$.

Доказательство. Так как $E^+ \models \alpha$, то $v(\alpha) = E$, и, следовательно, для произвольного p, $v(\alpha)_p = v(\alpha) \cap [p) = [p) = true_p(0)$. По лемме 2.2.5 $v'(\alpha)_p(0) = true_p(0)$, следовательно, $v'(\alpha) = true$ в силу произвольного выбора p. ▪

2.2.9. Теорема. Для произвольной ортомодулярной решетки E и пропозициональной формулы α имеет место $\mathbf{Set}^E \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $E^+ \models \alpha$.

Доказательство. Следует из 2.2.6 и 2.2.8. ▪

2.2.10. Теорема. Если произвольная пропозициональная формула (секвенция) $\mathbf{Set}^E$—общезначима, то она выводима в ис-

численияx квантовой ортологики Гольдблатта, Нишимуры и Катленда-Гиббинса.

Доказательство. Отождествляя соответствующий канонический фрейм, упорядоченный по включению с E^+, получаем $\vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $E^+ \models \alpha$. Отсюда по теореме 2.2.9 получаем, что $\vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{Set^E} \models \alpha$. ▪

2.3. Общезначимость в Set^E: стрелка Сасаки как импликация в квантовой логике (система Г. Хардегри)

В ортомодулярной решетке введение импликации как полинома решетки неудовлетворительно по многим причинам. Во всяком случае, классическое определение импликации $a \to b = a^\perp \vee b$ здесь тоже не годится, что заставляет либо вообще отказаться от полиномиального определения (как в системах предыдущего параграфа), либо использовать модификацию классического определения. Одной из наиболее популярных модификаций является введение так называемой «стрелки Сасаки» (иначе «квазиимпликации»), вводимой следующим определением:

(SH) $a \to b = a^\perp \vee (a \wedge b)$

Стрелка Сасаки обладает следующими интересными свойствами [Hardegree 1981, p.4]:

(c1) если $a \leq b$, то $a \to b = 1$

(c2) $a \wedge (a \to b) \leq b$

(c3) $b^\perp \wedge (a \to b) \leq a^\perp$

(c4) $a \wedge b^\perp \leq (a \to b)^\perp$

(c5) существует бинарная операция $+$, такая, что для любых a,b,c, $a+b \leq c$ тогда и только тогда, когда $a \leq b \to c$.

Операция $+$ может быть определена в ортомодулярной решетке следующим равенством:

(S) $a+b = (a \vee b^\perp) \wedge b$

В булевой алгебре и алгебре Гейтинга подобная операция обычно совпадает с $\wedge$ и в этом случае (c5) позволяет определить экспоненцирование в них, когда они рассматриваются как конечно кополные категории порядка. В этом случае категорно алгебра Гейтинга и булева алгебра превращаются в декартово замкнутые конечно кополные категории порядка.

Однако нетрудно видеть, что и в ортомодулярной решетке можно определить экспоненцирование для стрелки Сасаки.

2.3.1. Лемма. *Категорно ортомодулярная решетка является декартово замкнутой конечно кополной категорией порядка.*

Доказательство. В качестве экспоненциала берем стрелку Сасаки из определения (SH). Стрелка значения $ev\colon b^a \times a \to b$ определяется по (c2). Из (c5) получаем, что для любой стрелки $g\colon c+a \to b$ существует стрелка $\hat{g}\colon c \to b^a$ (здесь $+$ — операция из (S)). Но $c \leq a \to b$ влечет $c \wedge a \leq a \wedge (a \to b)$ (изотонность отношения $\leq$), следовательно, существование $\hat{g}$ влечет существование стрелки $c{\times}a \to b^a{\times}a$. По свойству $\vee$ имеем $c \leq c \vee a^{\perp}$, тогда в силу изотонности отношения $\leq$ имеем $c \wedge a \leq (c \vee a^{\perp}) \wedge a$ но категорно это определяет стрелку $c{\times}a \to c{+}a$.

Фактически получена диаграмма

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[r, "ev"] & b \\
c{\times}a \arrow[u] \arrow[r] & c{+}a \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В силу транзитивности отношения $\leq$ из $c{\times}a \leq c{+}a$, $c{+}a \leq b$ получаем $c{\times}a \leq b$, т.е. замыкаем диаграмму до требуемой диаграммы экспоненцирования. Следовательно, ортомодулярная решетка категорно декартово замкнута. ▪

Г. Хардегри [Hardegree 1981] предложил систему ортомодулярной квантовой логики ***OMC***, примитивными связками которой являются кондиционал (которому на ортомодулярной решетке соответствует стрелка Сасаки) $\to$ и константа «ложь» f. Эта логика представляет собой наименьшее подмножество формул, удовлетворяющих следующим аксиомам:

(A1) $\vdash x \to [(x \to y) \to x]$

(A2) $\vdash [(x \to y) \to x] \to x$

(A3) $\vdash [(x \to y) \to (x \to z)] \to [(y \to x) \to (y \to z)]$

(A4) $\vdash [(x{\to}y){\to}(y{\to}x)]{\to}\{[(x{\to}z){\to}(x{\to}y)]{\to}[(x{\to}z){\to}(y{\to}z)]\}$

(A5) $\vdash f \to x$

(P1) Если $\vdash x$, и $\vdash x \to y$, то $\vdash y$.

(P2) Если $\vdash x$, то $\vdash y \to x$.

Выражение $\vdash x$ является сокращением для «$x \in$ *OMC*», которое читается «*x* является тезисом (утверждением) *OMC*». Полнота системы *OMC* доказывается путем построениям алгебры Линденбаума-Тарского для *OMC*, которая оказывается ортомодулярная решеткой, единичным элементом которой является класс теорем исчисления *OMC*.

Если перейти теперь к интерпретации системы *OMC* в $\mathbf{Set}^E$, то прежде всего требуется определить в $\mathbf{Set}^E$ истинностную стрелку $\to: \Omega \times \Omega \to \Omega$ для кондиционала. Если использовать определение (SH), то на языке стрелок требуется, чтобы для p—й компоненты $\to_p: \Omega_p \times \Omega_p \to \Omega_p$ удовлетворялось равенство:

$\to_p(\langle S, T\rangle) = \cup_p(\langle \neg_p(S), \cap_p(\langle S, T\rangle)\rangle) = \cup_p(\langle S^*_p, S \cap T\rangle) = S^*_p \cup (S \cap T)$.

В [Hardegree 1981, p.10] оценка v определяется относительно E, причем в качестве E фигурирует алгебра Линденбаума-Тарского для *OMC*, но поскольку по лемме 2.1.1 E^+ также является ортомодулярной решеткой, то нетрудно переформулировать оценку на случай E^+.

*2.3.2. **Теорема**. Если произвольная пропозициональная формула* $\mathbf{Set}^E$*—общезначима, то она выводима в системе ортомодулярной квантовой логики OMC Г. Хардегри.*

Доказательство. Распространим лемму 2.2.5 на случай кондиционала. Получаем p—ю компоненту $\mathbf{Set}^E$—оценки для этой связки в виде:

$v'(\alpha \to \beta)_p = (\to \circ \langle v'(\alpha), v'(\beta)\rangle)_p =$

$= \to_p \circ \langle v'(\alpha), v'(\beta)\rangle_p = \to_p \circ \langle v'(\alpha)_p, v'(\beta)_p\rangle$.

Следовательно $v'(\alpha \to \beta)_p(0) = \to_p\langle v'(\alpha)_p(0), v'(\beta)_p(0)\rangle =$

$= \to_p\langle v(\alpha)_p, v(\beta)_p\rangle$ (по индуктивному предположению)

$= (v(\alpha)^*_p \cup (v(\alpha)_p \cap v(\beta)_p))$ (по определению стрелки кондиционала)

$= v'(\alpha \to \beta)_p$ (по определению стрелки кондиционала в ортомодулярной решетке).

Что касается константы f, то очевидным образом $v'(f)$ будет представлять собой стрелку *false*. Все остальное остается фактически без изменений, как и в предыдущем параграфе. ▪

2.4. Общезначимость в Set^E: система Г. Кальмбах

Система ортомодулярной логики Г. Кальмбах [Kalmbach 1974] также представляет собой пропозициональное исчисление, моделями которого являются ортомодулярные решетки. Главной задачей здесь было отыскание такого определения импликации, чтобы, с одной стороны, можно было с ней сформулировать правило модус поненс, а с другой стороны удовлетворялось естественное требование, чтобы $\alpha \to \beta$ было тавтологией тогда и только тогда, когда $v(\alpha) \leq v(\beta)$ выполняется для любой оценки v на ортомодулярной решетке. При этом импликация определяется как решеточный полином p с двумя переменными, удовлетворяющими требованию:

(1) $p(a,b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$.

Кальмбах приводит следующий список «кандидатов» на импликацию:

$\alpha \to_1 \beta = (\neg\alpha\wedge\beta)\vee((\neg\alpha\wedge\neg\beta)\vee(\alpha\wedge(\neg\alpha\vee\beta)))$

$\alpha \to_2 \beta = (\neg\alpha\wedge\beta)\vee((\alpha\wedge\beta)\vee((\neg\alpha\vee\beta)\wedge\neg\beta))$

$\alpha \to_3 \beta = \neg\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)$

$\alpha \to_4 \beta = \beta\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$

$\alpha \to_5 \beta = (\neg\alpha\wedge\beta)\vee((\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta))$

Как видим, $\to_3$ представляет собой не что иное, как стрелку Сасаки из предыдущего параграфа. Каждый из полиномов позволяет ввести правило вывода

$$R_i : \frac{\alpha,\ \alpha \to_i \beta}{\beta},$$

являющееся «корректным», т.е. примененное к формуле, значимой на некоторой ортомодулярной решетке M, оно приводит к M-значимой формуле. Удивительным образом лишь наиболее громоздкий полином $\to_1$ позволяет получить удовлетворительную аксиоматизацию ортомодулярной логики. При этом справедлива лемма

$$a \to_1 (a \to_1 b) = a^{\perp} \vee b$$

Особенностью *ОМ*-логики Кальмбах является также то, что кроме обычных операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$ вводится дополнительная операция с помощью следующего определения:

$$\alpha R \beta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

Поскольку для элементов a,b некоторой ортомодулярной решетки $(a \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge b^{\perp}) = 1$ эквивалентно $a = b$, то из этого определения следует, что

(2) $\alpha R \beta \in T$ тогда и только тогда, когда $v(\alpha) = v(\beta)$ справедливо для любой оценки v.

Здесь T — множество тавтологий.

Аксиоматика подобной логики выглядит следующим образом:

A1. $\neg(\alpha R \beta) \vee (\neg\alpha \vee \beta)$
A2. $(\alpha R \beta) R (\beta R \alpha)$
A3. $\neg(\alpha R \beta)$
A4. $\alpha R(\neg(\neg\alpha))$
A5. $(\alpha R \beta) R (\neg\alpha R \neg\beta)$
A6. $\neg(\alpha R \beta) \vee ((\alpha \wedge \gamma) R (\beta \wedge \gamma))$
A7. $(\alpha \wedge \beta) R (\beta \wedge \alpha)$
A8. $\neg(\alpha \vee \beta) R (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
A9. $(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) R \alpha$
A10. $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) R ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
A11. $(\alpha \vee (\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))) R (\alpha \vee \beta)$
A12. $(\neg\alpha \wedge \alpha) R ((\neg\alpha \wedge \alpha) \wedge \beta)$

Для $M \subseteq F$, где F — множество формул, определяется $\Gamma_i M$ как наименьшее множество $S \subseteq F$, содержащее M и замкнутое относительно правила вывода R_i. При этом Кальмбах рассматривает еще и обычный вариант правила модус поненс:

$$R_0 : \frac{\alpha, \neg\alpha \vee \beta}{\beta}$$

Справедлива следующая лемма [Kalmbach 1974, p.401]:

Пусть A является некоторым множеством формул, E есть ортогональная решетка и v: $F \to E$ есть некоторая оценка. Тогда

$\nu(\Gamma_0(B_0 \cup A))$ является наименьшим р-фильтром в E, содержащим $\nu(A)$.

B_0 представляет собой множество формул типа A1-A12. Что касается p-фильтра, то его определение имеет следующий вид:

Фильтр в ортомодулярной решетке E есть непустое подмножество Φ, удовлетворяющее условиям:

если $a \in \Phi$ и $b \in E$, то $a \vee b \in \Phi$, и если $a,b \in \Phi$, то $a \wedge b \in \Phi$.

p-фильтр есть фильтр Φ, замкнутый по отношению перспективности, т.е. если $a \in \Phi$ и $a \sim b$, то $b \in \Phi$ ($a \sim b$ тогда и только тогда, когда они имеют общее дополнение, т.е. существует такой элемент $u \in E$, что $a \vee u = b \vee u = 1$ и $a \wedge u = b \wedge u = 0$).

Принятие $\rightarrow_1$ в качестве импликации и

$$R_1 : \frac{\alpha,\ \alpha \rightarrow_1 \beta}{\beta}$$

в качестве правила вывода влечет за собой принятие еще одной аксиомы:

A13. $(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow_1 (\alpha \rightarrow_1 (\alpha \rightarrow_1 \beta))$

Тогда, определяя B_1 как множество формул всех тавтологий, получим следующий результат [Kalmbach 1974, p.403]:

$\Gamma_1 B_1 = T$,

т.е. подобная аксиоматизация полна. Доказана также полнота системы ортомодулярной логики Кальмбах в ортомодулярных решетках.

Как соотносятся между собой фильтры и наследственные множества в ортомодулярных решетках? Нетрудно видеть, что наследственные множества будут фильтрами. Действительно, для любых $a,b \in E$, таких, что $b \in \Phi$ и $a \leq b$, имеем $a \vee b = b$, откуда $a \vee b \in \Phi$. Фильтры замкнуты относительно $\wedge$, а наследственные множества замкнуты еще и относительно $\vee$.

***2.4.1. Лемма**. Ортомодулярная решетка $[p)^+$ всех наследственных в $[p)$ множеств является р—фильтром.*

***Доказательство**.* Нетрудно убедиться, что $[p)^+$ является фильтром относительно $\subseteq$, $\cap$, $\cup$. Что касается перспективности, то выбирая в качестве общего дополнения для $[a)$ и $[b)$, *численияx квантовой ортологики Гольдблатта, Нишимуры и Катленда-Гиббинса.*

Доказательство. Отождествляя соответствующий канонический фрейм, упорядоченный по включению с E^+, получаем $\vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $E^+ \models \alpha$. Отсюда по теореме 2.2.9 получаем, что $\vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{Set^E} \models \alpha$. ▪

2.3. Общезначимость в *Set*^{E}: стрелка Сасаки как импликация в квантовой логике (система Г. Хардегри)

В ортомодулярной решетке введение импликации как полинома решетки неудовлетворительно по многим причинам. Во всяком случае, классическое определение импликации $a \to b = a^\perp \vee b$ здесь тоже не годится, что заставляет либо вообще отказаться от полиномиального определения (как в системах предыдущего параграфа), либо использовать модификацию классического определения. Одной из наиболее популярных модификаций является введение так называемой «стрелки Сасаки» (иначе «квазиимпликации»), вводимой следующим определением:

(SH) $a \to b = a^\perp \vee (a \wedge b)$

Стрелка Сасаки обладает следующими интересными свойствами [Hardegree 1981, p.4]:

(c1) если $a \leq b$, то $a \to b = 1$

(c2) $a \wedge (a \to b) \leq b$

(c3) $b^\perp \wedge (a \to b) \leq a^\perp$

(c4) $a \wedge b^\perp \leq (a \to b)^\perp$

(c5) существует бинарная операция $+$, такая, что для любых a,b,c, $a+b \leq c$ тогда и только тогда, когда $a \leq b \to c$.

Операция $+$ может быть определена в ортомодулярной решетке следующим равенством:

(S) $a+b = (a \vee b^\perp) \wedge b$

В булевой алгебре и алгебре Гейтинга подобная операция обычно совпадает с $\wedge$ и в этом случае (c5) позволяет определить экспоненцирование в них, когда они рассматриваются как конечно кополные категории порядка. В этом случае категорно алгебра Гейтинга и булева алгебра превращаются в декартово замкнутые конечно кополные категории порядка.

Однако нетрудно видеть, что и в ортомодулярной решетке можно определить экспоненцирование для стрелки Сасаки.

2.3.1. Лемма. Категорно ортомодулярная решетка является декартово замкнутой конечно кополной категорией порядка.

Доказательство. В качестве экспоненциала берем стрелку Сасаки из определения (SH). Стрелка значения ev: $b^a \times a \to b$ определяется по (c2). Из (c5) получаем, что для любой стрелки g: $c+a \to b$ существует стрелка $\hat{g}$: $c \to b^a$ (здесь $+$ — операция из (S)). Но $c \leq a \to b$ влечет $c \wedge a \leq a \wedge (a \to b)$ (изотонность отношения $\leq$), следовательно, существование $\hat{g}$ влечет существование стрелки $c \times a \to b^a \times a$. По свойству $\vee$ имеем $c \leq c \vee a^{\perp}$, тогда в силу изотонности отношения $\leq$ имеем $c \wedge a \leq (c \vee a^{\perp}) \wedge a$ но категорно это определяет стрелку $c \times a \to c+a$.

Фактически получена диаграмма

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[rr, "ev"] & & b \\
c \times a \arrow[u] \arrow[rr] & & c+a \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В силу транзитивности отношения $\leq$ из $c \times a \leq c+a$, $c+a \leq b$ получаем $c \times a \leq b$, т.е. замыкаем диаграмму до требуемой диаграммы экспоненцирования. Следовательно, ортомодулярная решетка категорно декартово замкнута. ▪

Г. Хардегри [Hardegree 1981] предложил систему ортомодулярной квантовой логики ***OMC***, примитивными связками которой являются кондиционал (которому на ортомодулярной решетке соответствует стрелка Сасаки) $\to$ и константа «ложь» f. Эта логика представляет собой наименьшее подмножество формул, удовлетворяющих следующим аксиомам:

(A1) $\vdash x \to [(x \to y) \to x]$

(A2) $\vdash [(x \to y) \to x] \to x$

(A3) $\vdash [(x \to y) \to (x^{\perp} \to z)] \to [(y \to x) \to (y \to z)]$

(A4) $\vdash [(x \to y) \to (y \to x)] \to \{[(x \to z) \to (x \to y)] \to [(x \to z) \to (y \to z)]\}$

(A5) $\vdash f \to x$

(P1) Если $\vdash x$, и $\vdash x \to y$, то $\vdash y$.

(P2) Если $\vdash x$, то $\vdash y \to x$.

Выражение $\vdash x$ является сокращением для «$x \in$ *OMC*», которое читается «x является тезисом (утверждением) *OMC*». Полнота системы *OMC* доказывается путем построениям алгебры Линденбаума-Тарского для *OMC*, которая оказывается ортомодулярная решеткой, единичным элементом которой является класс теорем исчисления *OMC*.

Если перейти теперь к интерпретации системы *OMC* в **Set**^{E}, то прежде всего требуется определить в **Set**^{E} истинностную стрелку $\to$: $\Omega \times \Omega \to \Omega$ для кондиционала. Если использовать определение (SH), то на языке стрелок требуется, чтобы для p—й компоненты $\to_p$: $\Omega_p \times \Omega_p \to \Omega_p$ удовлетворялось равенство:

$\to_p(\langle S, T\rangle) = \cup_p(\langle \neg_p(S), \cap_p(\langle S, T\rangle)\rangle) = \cup_p(\langle S^*_p, S \cap T\rangle) = S^*_p \cup (S \cap T)$.

В [Hardegree 1981, p.10] оценка v определяется относительно E, причем в качестве E фигурирует алгебра Линденбаума-Тарского для *OMC*, но поскольку по лемме 2.1.1 E^+ также является ортомодулярной решеткой, то нетрудно переформулировать оценку на случай E^+.

*2.3.2. **Теорема**. Если произвольная пропозициональная формула* **Set**^{E}*—общезначима, то она выводима в системе ортомодулярной квантовой логики* ***OMC*** *Г. Хардегри.*

Доказательство. Распространим лемму 2.2.5 на случай кондиционала. Получаем p—ю компоненту **Set**^{E}—оценки для этой связки в виде:

$v'(\alpha \to \beta)_p = (\to \circ \langle v'(\alpha), v'(\beta)\rangle)_p =$

$= \to_p \circ \langle v'(\alpha), v'(\beta)\rangle_p = \to_p \circ \langle v'(\alpha)_p, v'(\beta)_p\rangle$.

Следовательно $v'(\alpha \to \beta)_p(0) = \to_p\langle v'(\alpha)_p(0), v'(\beta)_p(0)\rangle =$

$= \to_p\langle v(\alpha)_p, v(\beta)_p\rangle$ (по индуктивному предположению)

$= (v(\alpha)^*_p \cup (v(\alpha)_p \cap v(\beta)_p))$ (по определению стрелки кондиционала)

$= v'(\alpha \to \beta)_p$ (по определению стрелки кондиционала в ортомодулярной решетке).

Что касается константы f, то очевидным образом $v'(f)$ будет представлять собой стрелку *false*. Все остальное остается фактически без изменений, как и в предыдущем параграфе. ▪

2.4. Общезначимость в Set^E: система Г. Кальмбах

Система ортомодулярной логики Г. Кальмбах [Kalmbach 1974] также представляет собой пропозициональное исчисление, моделями которого являются ортомодулярные решетки. Главной задачей здесь было отыскание такого определения импликации, чтобы, с одной стороны, можно было с ней сформулировать правило модус поненс, а с другой стороны удовлетворялось естественное требование, чтобы $\alpha \to \beta$ было тавтологией тогда и только тогда, когда $v(\alpha) \leq v(\beta)$ выполняется для любой оценки v на ортомодулярной решетке. При этом импликация определяется как решеточный полином p с двумя переменными, удовлетворяющими требованию:

(1) $p(a,b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$.

Кальмбах приводит следующий список «кандидатов» на импликацию:

$\alpha \to_1 \beta = (\neg\alpha\wedge\beta)\vee((\neg\alpha\wedge\neg\beta)\vee(\alpha\wedge(\neg\alpha\vee\beta)))$

$\alpha \to_2 \beta = (\neg\alpha\wedge\beta)\vee((\alpha\wedge\beta)\vee((\neg\alpha\vee\beta)\wedge\neg\beta))$.

$\alpha \to_3 \beta = \neg\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)$

$\alpha \to_4 \beta = \beta\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$

$\alpha \to_5 \beta = (\neg\alpha\wedge\beta)\vee((\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\neg\alpha\wedge\neg\beta))$

Как видим, $\to_3$ представляет собой не что иное, как стрелку Сасаки из предыдущего параграфа. Каждый из полиномов позволяет ввести правило вывода

$$R_i : \frac{\alpha,\ \alpha \to_i \beta}{\beta},$$

являющееся «корректным», т.е. примененное к формуле, значимой на некоторой ортомодулярной решетке M, оно приводит к M-значимой формуле. Удивительным образом лишь наиболее громоздкий полином $\to_1$ позволяет получить удовлетворительную аксиоматизацию ортомодулярной логики. При этом справедлива лемма

$$a \to_1 (a \to_1 b) = a^{\perp} \vee b$$

Особенностью *OM*-логики Кальмбах является также то, что кроме обычных операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$ вводится дополнительная операция с помощью следующего определения:

$$\alpha R \beta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

Поскольку для элементов a, b некоторой ортомодулярной решетки $(a \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge b^{\perp}) = 1$ эквивалентно $a = b$, то из этого определения следует, что

(2) $\alpha R \beta \in T$ тогда и только тогда, когда $v(\alpha) = v(\beta)$ справедливо для любой оценки v.

Здесь T — множество тавтологий.

Аксиоматика подобной логики выглядит следующим образом:

A1. $\neg(\alpha R \beta) \vee (\neg\alpha \vee \beta)$
A2. $(\alpha R \beta) R (\beta R \alpha)$
A3. $\neg(\alpha R \beta)$
A4. $\alpha R(\neg(\neg\alpha))$
A5. $(\alpha R \beta) R (\neg\alpha R \neg\beta)$
A6. $\neg(\alpha R \beta) \vee ((\alpha \wedge \gamma) R (\beta \wedge \gamma))$
A7. $(\alpha \wedge \beta) R (\beta \wedge \alpha)$
A8. $\neg(\alpha \vee \beta) R (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
A9. $(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) R \alpha$
A10. $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) R ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
A11. $(\alpha \vee (\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))) R (\alpha \vee \beta)$
A12. $(\neg\alpha \wedge \alpha) R ((\neg\alpha \wedge \alpha) \wedge \beta)$

Для $M \subseteq F$, где F — множество формул, определяется $\Gamma_t M$ как наименьшее множество $S \subseteq F$, содержащее M и замкнутое относительно правила вывода R_t. При этом Кальмбах рассматривает еще и обычный вариант правила модус поненс:

$$R_0 : \frac{\alpha, \neg\alpha \vee \beta}{\beta}$$

Справедлива следующая лемма [Kalmbach 1974, p.401]:

Пусть A является некоторым множеством формул, E есть ортогональная решетка и v: $F \to E$ есть некоторая оценка. Тогда

$\nu(\Gamma_0(B_0 \cup A))$ является наименьшим р-фильтром в E, содержащим $\nu(A)$.

B_0 представляет собой множество формул типа A1-A12. Что касается p-фильтра, то его определение имеет следующий вид:

Фильтр в ортомодулярной решетке E есть непустое подмножество Φ, удовлетворяющее условиям:

если $a \in \Phi$ и $b \in E$, то $a \vee b \in \Phi$, и если $a, b \in \Phi$, то $a \wedge b \in \Phi$.

p-фильтр есть фильтр Φ, замкнутый по отношению перспективности, т.е. если $a \in \Phi$ и $a \sim b$, то $b \in \Phi$ ($a \sim b$ тогда и только тогда, когда они имеют общее дополнение, т.е. существует такой элемент $u \in E$, что $a \vee u = b \vee u = 1$ и $a \wedge u = b \wedge u = 0$).

Принятие $\to_1$ в качестве импликации и

$$R_1 : \frac{\alpha,\ \alpha \to_1 \beta}{\beta}$$

в качестве правила вывода влечет за собой принятие еще одной аксиомы:

A13. $(\neg\alpha \vee \beta) \to_1 (\alpha \to_1 (\alpha \to_1 \beta))$

Тогда, определяя B_1 как множество формул всех тавтологий, получим следующий результат [Kalmbach 1974, p.403]:

$\Gamma_1 B_1 = T,$

т.е. подобная аксиоматизация полна. Доказана также полнота системы ортомодулярной логики Кальмбах в ортомодулярных решетках.

Как соотносятся между собой фильтры и наследственные множества в ортомодулярных решетках? Нетрудно видеть, что наследственные множества будут фильтрами. Действительно, для любых $a, b \in E$, таких, что $b \in \Phi$ и $a \leq b$, имеем $a \vee b = b$, откуда $a \vee b \in \Phi$. Фильтры замкнуты относительно $\wedge$, а наследственные множества замкнуты еще и относительно $\vee$.

2.4.1. Лемма. *Ортомодулярная решетка $[p)^+$ всех наследственных в $[p)$ множеств является р—фильтром.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $[p)^+$ является фильтром относительно $\subseteq$, $\cap$, $\cup$. Что касается перспективности, то выбирая в качестве общего дополнения для $[a)$ и $[b)$, таких, что $[a) \subseteq [b)$, элемент $[a)^*_p$ из леммы 2.1.2, из условия $[a)^*_p \cap [b) = \varnothing$ получаем $[a) = [b)$ ввиду того, что в ортородешетках условие $a \leq b$ & $a^\perp \wedge b = 0 \Rightarrow a = b$ является необходимым и достаточным условием ортомодулярности [Биркгоф 1964, с.77]. Отсюда и следует выполнение требования замкнутости по отношению перспективности, поскольку для этого достаточно, чтобы $[b) \in [p)^+$. ▪

Таким образом, если при некоторой оценке v: $F \rightarrow E$, $v(\Gamma_1(B_1 \cup A))$ является наименьшим p—фильтром, содержащим $v(A)$, то при переходе к оценке v_1: $F \rightarrow E^+$, сопоставляющей каждому элементу $p \in E$ фильтр $[p)^+ \in E^+$, точно так же $v_1(\Gamma_1(B_1 \cup A))$ есть наименьший p—фильтр, содержащий $v_1(A)$. Нетрудно теперь перейти от оценки v_1 к соответствующей новой оценке $v' : F \rightarrow$ **Set**$^E(\mathbf{1},\Omega)$, а отсюда и к теореме об общезначимости.

2.4.2. Теорема*. Если произвольная пропозициональная формула* **Set**^{E}*—общезначима, то она выводима в системе ортомодулярной логики Г. Кальмбах.*

Доказательство*.* При распространении леммы 2.2.5 на случай системы Кальмбах новый случай есть $\alpha = \beta R \gamma$. Но $\beta R \gamma$ по определению равно $(\beta \wedge \gamma) \vee (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$, следовательно, этот случай не нов. Случай $\alpha = \beta \rightarrow_1 \gamma$ сводится точно так же по определению к $\alpha = (\neg\beta \wedge \gamma) \vee ((\neg\beta \wedge \neg\gamma) \vee (\beta \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma)))$. Фактически можно ввести в рассмотрение две новые стрелки в **Set**^{E}:

$= : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$;

$\rightarrow_1 : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$;

p-е компоненты которых определяются соответственно как

$=_p (\langle S, T\rangle) = (S \cap T) \cup (S^*_p \cap T^*_p)$;

$\rightarrow_{1p}$: $(\langle S, T\rangle) = (S^*_p \cap T^*_p)^* \cup ((S^*_p \cap T^*_p) \cup (S \cup (S^*_p \cap T^*_p))))$.

В остальном все остается без изменений как в доказательстве 2.2.10. ▪

Глава третья Квантовая логика как расширение логических систем

3.1. Квантовая логика как модальное расширение бесконечнозначной логики Лукасевича

Проблему соотношения квантовой логики и классической в настоящее время можно рассматривать в рамках более общей проблемы — соотношения квантовой логики и других логических систем, поскольку в последнее время получены результаты, позволяющие говорить о связи квантовой логики с многозначной и релевантной логиками. В связи с этим начнем с анализа связи квантовой логики с бесконечнозначной логикой Лукасевича, а выработанные при этом понятия, как будет показано, лягут в основу единой точки зрения на проблему в целом.

В свое время Я. Лукасевич предлагал рассматривать систему бесконечнозначной логики как вариант вероятностной логики. Учитывая, что Дж. Макки [Макки 1965] выводил свою квантовую логику из системы аксиом для вероятностей квантово-механических экспериментов, Г.Дишкант [Dishkant 1978] предложил включить аксиомы Макки в исчисление Лукасевича $Ł_{\aleph_0}$ и построил модальное расширение логики, обогатив систему модальным символом Q и четырьмя модальными правилами вывода. Высказывание Q*A* при этом означает «*A* подтверждается экспериментом», а наиболее специфическое правило вывода можно сформулировать так: для совместных измерений импликация эквивалентна подтверждению материальной импликации.

Семантически построенную Дишкантом систему ŁQ можно проинтерпретировать следующим образом. Функция $I: W^0 \to S$ называется интерпретацией ŁQ, если она удовлетворяет следующим условиям:

(I) $I(A \to B) = \min(1, 1 - I(A) + I(\mathrm{B}))$;

(II) $I(\neg A) = 1 - I(A)$;

(III) $I(\mathrm{Q}A) = q(I(A))$;

для любых $A, B \in W^0$, где W^0 — множество формул ŁQ. При этом $1: \psi \to \{1\}$, где ψ — множество всех состояний объекта, причем состояние, как обычно, представляет собой вектор гильбертова пространства, а любая функция $g: \psi \to [0,1]$ называется обобщенным вопросом. Далее, $P \subseteq S$, где S — множество всех обобщенных вопросов, а P – множество обычных квантовологичесих вопросов («да-нет»-измерений), и функция $q: S \to P$ определяется условиями:

a1. $g \le h \Rightarrow q(g) \le q(h)$;

a2. $q(p) = p$;

для любых $g, h \in S$; $p \in P$. Очевидным образом при таком определении для модальных формул ŁQ функция q играет ту же роль, что и функция p у Макки [Макки 1965, с.105], ставящая в соответствие каждой тройке (A, α, E) (где $A \in \boldsymbol{A}$, $\alpha \in S$, $E \in \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}$ – множество наблюдаемых, S — множество состояний, $\boldsymbol{B}$ — множество всех борелевских подмножеств действительной числовой прямой) число $p(A, \alpha, E)$, $0 \le p(A, \alpha, E) \le 1$. Роль множества наблюдаемых выполняет W^0, множества состояний — $\mathrm{dom}(S)$, множества $\boldsymbol{B}$ — $\mathrm{rng}(S)$.

В работе [Vasyukov 1993] было показано, что $Ł_{\aleph}$ имеет (в некотором специфическом смысле) кроме истинностной матрицы $[0,1]$ еще и дискретную матрицу Карпенко $M_{\Sigma} = \langle \Sigma, \urcorner, \rightarrowtail, \{0^-\} \rangle$, где ординальный тип множества Σ есть $\omega + \omega^*$, т.е.

```
|——|——|——|——.————|———|———|———|
0+  1   2   3   ......  -3    -2    -1    0-
```

Множество $\{0^-\}$ является здесь множеством выделенных значений, а операции $\urcorner$ и $\rightarrowtail$ определяются следующим образом:

$$\neg x = -x, x \mapsto y = \begin{cases} 0^{-}, & \text{если} \quad x \leq y \\ y - x, & \text{иначе} \end{cases}$$

В этом случае условия (I)-(III) переходят в следующие:

(IV) $S(x \to y) = \begin{cases} 0^{-}, & \text{если} \quad S(x) \leq S(y) \\ S(y) - S(x), & \text{иначе} \end{cases}$;

(V) $S(\neg x) = -x$;

(VI) $S(Qx) = q(S(x))$;

но теперь 0^{-}: $\psi \to \{1\}$. Указанный специфический смысл использования истинностной матрицы определяется при этом следующей метатеоремой [Vasyukov 1993, с.157]:

Если $M_{Ł_{\aleph_0}}$ есть логическая матрица для $Ł_{\aleph_0}$ и $Ł_{\aleph_0}$ семантически непротиворечива по отношению к семантике в стиле Крипке с оценкой в $M_{Ł_{\aleph_0}}$, то $M_{Ł_{\aleph_0}}$ обеспечивает полноту $Ł_{\aleph_0}$ по отношению к этой семантике.

Таким образом, на первый взгляд, ничего не изменилось при смене истинностной матрицы. Можно было бы сменить функцию g: $\psi \to [0,1]$ на g': $\psi \to E$, где E — подмножество действительной (натуральной) прямой, оставив при этом q:$S \to P$ и сохранив P. Но тогда фактически получаем, что ŁQ описывает квантовологический случай, когда спектр наблюдаемых является подмножеством множества Σ, порядковый тип которого $\omega+\omega^*$.

Сам Дишкант определяет «дедуктивную мощность» ŁQ как лежащую между мощностью пропозициональной квантовой логики и мощностью обычной схемы квантовой механики, основывающейся на формализме гильбертовых пространств. Однако ему не удалось доказать полноту ŁQ, а удалось установить лишь относительную полноту по отношению к квантовой пропозициональной логике [Dishkant 1978]. В связи с этим была сформулирована проблема конструирования семантической модели типа Крипке-Гжегорчика для ŁQ.

В работе [Vasyukov 1993] подобная модель типа Крипке была построена для $Ł_{\aleph_0}$ (о ней и идет речь в вышеприведенной метатеореме), но с той особенностью, что ее отношение достижимости было тернарным. Покажем, что эту модель можно расширить до модели для ŁQ и что система ŁQ является непротиворечивой и полной относительно тернарной семантики.

Система ŁQ состоит из четырех аксиом и пяти правил вывода.

A1. $A \to (B \to A)$

A2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

A3. $((A \to B) \to B) \to ((B \to A) \to A)$

A4. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

B5. $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$

B6. $\dfrac{A}{QA}$

B7. $\dfrac{A}{\neg Q \neg A}$

B8. $\dfrac{A \to B}{QA \to QB}$

B9. $\dfrac{QA \to QB}{(QB \to QA) \leftrightarrow Q(QB \supset QA)}$

Здесь {A1-A4,B5} — система Лукасевича $Ł_{\aleph_0}$. Используются следующие определения:

D1. $A \vee B =_{def} (A \to B) \to B$

D2. $A \wedge B =_{def} \neg(\neg A \vee \neg B)$

D3. $A \leftrightarrow B =_{def} (A \to B) \wedge (B \to A)$

D4. $A \supset B =_{def} \neg A \vee B$

D5. $A + B =_{def} \neg A \to B$

D6. $A \circ B =_{def} \neg(A \to \neg B)$

К приведенным аксиомам может быть добавлена еще одна:

A10. $QA \leftrightarrow \neg Q \neg A$

Отметим еще следующие, выводимые в ŁQ формулы:

Q1. $QA \leftrightarrow QQA$

Q2. $\neg QA \leftrightarrow Q \neg QA$

Семантика для $Ł_{\aleph_0}$ согласно [Vasyukov 1993] описывается следующим образом. Ł-фрейм представляет собой четверку $\langle O, K, R, * \rangle$, где K есть непустое множество, $O \in K$, R — тернарное отношение достижимости на K и $*$ — унарная операция на K. Постулаты для R и $*$ выглядят следующим образом:

$p1.\ ROaa$

$p2.\ Raaa$

$p3.\ R^2abcd \Rightarrow R^2acbd$

$p4.\ R^2Oabc \Rightarrow Rabc$

$p5.\ Rabc \Rightarrow Rac^*b^*$

$p6.\ a^{**} = a$

$p7.\ ROab \veebar ROba$

Здесь и далее $\Rightarrow$, & и $\veebar$ представляют собой метатеоретические связки импликации, конъюнкции и дизъюнкции соответственно. Используются следующие определения

$d1.\ a < b =_{def} Roab$

$d2.\ R^2abcd =_{def} \exists x(Rabx\ \&\ Rxcd\ \&\ x \in K)$

Наряду с этим мы будем использовать также следующий производный квазипостулат из [Vasyukov 1993, p.147]:

$q1.\ Rabc \Rightarrow Rbac$

Оценка v представляет собой отображение, которое приписывает истинностное значение из истинностной матрицы для $Ł_{\aleph_0}$ пропозициональным переменным в каждой точке K с учетом бинарного отношения $<$ из $d1$. Интерпретация I, ассоциированная с v, представляет собой естественное расширение v на все формулы $Ł_{\aleph_0}$, при условии, что в каждой точке K имеет место обычная экспликация связок.

Формальное определение выглядит следующим образом:

a) v есть оценка в $Ł$-фрейме, т.е. v является функцией v: $S \times K \to S_{[0,1]}$ (S есть множество пропозициональных переменных и $S_{[0,1]}$ есть обычная логическая матрица для $Ł_{\aleph_0}$, т.е. $S_{[0,1]} = \langle [0,1], \urcorner, \rightarrowtail, \{1\} \rangle$, где $\urcorner x = 1 - x$; $x \rightarrowtail y = min(1, 1 - x + y)$), которая для всякого $p \in S$ и всяких $a, b \in K$ удовлетворяет следующему условию:

(1) $a < b\ \&\ v(p,a) \neq 0 \Rightarrow v(p,b) \neq 0$;

b) I есть интерпретация, ассоциированная с v, т.е. I есть функция I: $F \times K \to S_{[0,1]}$ (F есть множество формул), удовлетворяющая — для всякого $p \in S$, всяких $A, B \in F$ и всякого $a \in K$ — следующим условиям:

(i) $I(p,a) = v(p,a)$;

(ii) $I(\neg A,a) = 1 - x$ тогда и только тогда, когда $I(A,a^*) = x$;

(iii) $I(A \to B,a) = min(1, 1 - x + y)$ тогда и только тогда, когда для всяких $b, c \in K$ $Rabc$ и $I(A,b) = x \Rightarrow I(B,c) = y$.

Наконец, понятия достоверности, истинности, ложности и верифицируемости определяются следующим образом:

Определение. Формула A *достоверна* при оценке v или при ассоциированной интерпретации I в точке a из K если $I(A,a)\neq 0$; если же $I(A,a) = 0$, то A *ложна* при v и A *истинна* при v, если $I(A,a) = 1$. A *верифицируема* при v или при I, если $I(A,O) \neq 0$; A *истинно верифицируема* при v, если $I(A,O) = 1$. Если $I(A,O) = 0$, то A *фальсифицируема* при v или при I. A *значима* в Ł-фрейме, если A верифицируема в нем при любой оценке; A *истинно значима* в Ł-фрейме, если A истинно верифицируема в нем при любой оценке. A *Ł-значима* в случае, если A значима в любом фрейме; в противном случае A *Ł-незначима*.

Чтобы перейти к модели для системы ŁQ , необходимо расширить введенные понятия на случай Q—формул. Воспользуемся следующим обстоятельством. Как известно, существует перевод Tr ортологики Р. Гольдблатта в модальную логику Брауэра [Goldblatt 1974], который выглядит следующим образом:

$Tr(p_i) = \Box\Diamond q_i\ (i<\omega)$;

$Tr(A\wedge B) = Tr(A)\wedge Tr(B)$;

$Tr(\neg A) = \Box\neg\ Tr(A)$.

Подобный перевод наводит на мысль истолковать оператор Q семантически так же, как $\Box\Diamond$ истолковывается обычно в модальных логиках при построении семантики возможных миров. Это можно сформулировать в виде следующего правила интерпретации:

(iv) $I(QA,a) = 1$ тогда и только тогда, когда для всякого $b\in K$ $(R0ab \Rightarrow \exists c\in K(R0bc \Rightarrow I(A,c)\neq 0))$.

Рассмотрим теперь вопросы непротиворечивости и полноты системы ŁQ в рамках принятой интерпретации. Это сведется, фактически, к пополнению доказательств и расширению исходных понятий для ŁQ.

Следуя [Vasyukov 1993], будем трактовать импликацию Лукасевича как многозначное релевантное следование. Соответственно, A влечет B, если для всякого a из K

(12) $I(A,a)\neq 0 \Rightarrow I(B,a)\neq 0$

A влечет B в Ł-фрейме, если A влечет B при всякой оценке. A Ł-влечет B, если A влечет B во всяком Ł-фрейме.

Лемма 3.1.1. $a<b$ *и* $I(A,a) \neq 0 \Rightarrow I(A,b) \neq 0$.

Доказательство. Все как в [Vasyukov 1993]. Нам необходимо лишь разобраться с дополнительным случаем $A = QB$. Но $I(QB,b) = 1$ означает по (iv), что $\exists c \in K(R0bc \Rightarrow I(B,c) \neq 0)$, если $R0ab$. Но $R0bc \Rightarrow_{q1} Rb0c \Rightarrow_{p4} R^2 0b0c \Rightarrow_{d2} R0bd \,\&\, Rd0c \Rightarrow_{q1} R0bd \,\&\, R0dc$. Поскольку $I(B,c) \neq 0$, то по (iv) мы получаем $I(A,b) = 1$. ▪

Определение регулярной теории остается таким же, как и в [Vasyukov 1993, p.150], а именно:

Определение. Множество формул, верифицируемых в точке a, называется теорией, определяемой v в a, и обозначается $Th(v,a)$. Множество формул, верифицируемых при v, называется регулярной теорией, определяемой v, и обозначается $Th(v)$.

Так как в ŁQ нет новых аксиом по сравнению с $Ł_{\aleph_0}$ (если отбросить A10, ввиду ее необязательности), то верифицируемость аксиом ŁQ следует из доказательства верифицируемости аксиом $Ł_{\aleph_0}$ в [Vasyukov 1993]. Впрочем, не составляет труда проверить, что добавление A10 ничего не меняет. Зато верификация правил вывода требует от нас доказательства следующей леммы:

3.1.2. Лемма. $Th(v,a)$ замкнута по следованию при v, по модус поненс и по B6-B9. $Th(v)$ также замкнута по всем указанным правилам, кроме следования.

Доказательство. Замкнутость $Th(v,a)$ по B6-B7 и B8 получаем по $p2$, $p6$ и (iv). Что касается B9, то по (iv), $p6$ и определению $\supset$ получаем, что правая часть принадлежит a, если истинна левая часть, что и завершает доказательство, поскольку для $Th(v)$ все сказанное также будет справедливо. ▪

Теорема 3.1.3 *Регулярная теория $Th(v)$ формул, верифицируемых при v для всякого Ł-фрейма и всякой оценки, содержит все теоремы ŁQ. Рассмотренная выше семантика адекватна ŁQ в том смысле, что все теоремы ŁQ Ł-значимы.*

Доказательство. Подобная теория $Th(v)$ должна содержать все аксиомы, а по лемме 3.1.2 она замкнута по модус поненс и по правилам B6-B9. Поэтому все теоремы ŁQ принадлежат к $Th(v)$ для всякого Ł-фрейма. Следовательно, некоторая ŁQ теорема A принадлежит к каждой такой $Th(v)$, в которой A Ł-значима. ▪

Переходя теперь к проблеме полноты системы ŁQ, приведем вначале определение *Q-алгебры Вайсберга*, представляющей собой очевидное расширение понятия алгебры Вайсберга, используемой в [Vasyukov 1993, p.145-146].

Определение. Пусть $W=\langle A, \mapsto, \urcorner, 1\rangle$ будет алгебра Вайсберга, список аксиом которой выглядит следующим образом:

(1.1) $1 \mapsto x = x$

(1.2) $(x \mapsto y) \mapsto ((y \mapsto z) \mapsto (x \mapsto z)) = 1$

(1.3) $(x \mapsto y) \mapsto y = (y \mapsto x) \mapsto x$

(1.4) $(\urcorner x \mapsto \urcorner y) = (y \mapsto x)$

Тогда $WQ=\langle A, \mapsto, \urcorner, \mathrm{Q}, 1\rangle$ будет *Q-алгеброй Вайсберга*, получаемой посредством добавления к аксиомам W следующих аксиом:

(1.5) $\mathrm{Q}x \leq x$

(1.6) $\mathrm{Q}(x \mapsto y) = (\mathrm{Q}x \mapsto \mathrm{Q}y)$

(1.7) $\mathrm{QQ}x = \mathrm{Q}x$

(1.8) $\mathrm{Q}\urcorner x = \urcorner \mathrm{Q}x$

Будем говорить, что F представляет собой импликативный фильтр в WQ, если F есть импликативный фильтр в W и всегда, когда $x \in F$, то $\mathrm{Q}x \in F$. Аналогично понятию алгебраического импликативного фильтра квантовой алгебры Вайсберга мы вводим понятие *ŁQ*-теории.

Определение. Всякое собственное непротиворечивое подмножество *Th* формул ŁQ является *ŁQ* -теорией, если выполняются следующие условия:

(i) если $A \in Th$ и $A \to B$ есть теорема ŁQ, то $B \in Th$;

(ii) если $A \in Th$, то $\mathrm{Q}A \in Th$.

То свойство, что *ŁQ*-теория содержит все аксиомы и теоремы ŁQ, будет называться регулярностью. *ŁQ*-теория называется простой *ŁQ*-теорией, если из $A \vee B \in Th$ следует, что $A \in Th$ или $B \in Th$.

Понятие *ŁQ*-теории связано с $Th(a,v)$ следующим образом:

Лемма 3.1.4. *Пусть v будет оценкой в Ł-фрейме и $a \in K$. Тогда теория $Th(a,v)$, определяемая v в a, будет ŁQ-теорией и, более того, простой ŁQ-теорией. Если $O < a$, то $Th(a,v)$ является регулярной.*

Доказательство. Из [Vasyukov 1993, p.151] следует, что $Th(a,v)$ будет *ŁQ*-теорией. Предположим, что $A \in Th(a,v)$. Тогда по лемме 3.1.2 $B \in Th(a,v)$. Следовательно, $Th(a,v)$ является *ŁQ*-теорией. По лемме 3.1.1 все теоремы ŁQ достоверны при v в точке a, когда $O < a$. Поэтому, если $O < a$, то $Th(a,v)$ будет регулярной. ▪

Пусть H будет множеством всех $ŁQ$-теорий. Мы определяем оператор Q на H следующим образом:

$\forall a \in H\,(Qa = \{A\colon QA \in a\})$.

Исчисление $ŁQ$-теорий представляет собой структуру $ŁQ = \langle H, \supseteq, \mapsto, \urcorner, Q, 1\rangle$, где $\langle H, \supseteq, \mapsto, \urcorner, 1\rangle$ есть исчисление L-теорий и Q определено выше (в исчислении L-теорий операции $\mapsto$ и $\urcorner$ определяются следующим образом:

$\forall ab \in H\,(a \mapsto b = \{C\colon \exists A \exists B\,(A \in a \;\&\; B \in b) \vdash_{\aleph_0} (A \to B) \to C\}$;

$\forall a \in H\,(\urcorner a = \{A\colon \neg A \notin a\})$,

а 1 есть множество всех аксиом и теорем.

Лемма 3.1.5. Исчисление $ŁQ$-теорий является Q-алгеброй Вайсберга, т. е. алгеброй Вайсберга с Q*-оператором и аксиомами* (*1.5*) — (*1.8*).

Доказательство. Единственной проблемой является определение Q на H. Корректно ли это определение? Пусть a будет замкнута по ŁQ-следованию, $A \in Qa$ и $A \to B$ будет теоремой ŁQ. Нетрудно видеть, что из B8 мы получаем, что $QA \to QB$ также будет теоремой ŁQ. Поскольку $QA \in a$ по определению Q-операции, то ввиду ŁQ-замкнутости мы получаем $QB \in a$. Окончательно мы получаем $B \in Qa$.

Опять, пусть Qa будет замкнута по B7 и $A \in Qa$. Тогда по B7 мы получаем $\neg Q \neg A \in Qa$. Согласно определению $\urcorner$-операции это означает, что $Q\neg A \notin \urcorner Qa$, и затем, по определению Q-оператора, $\neg A \notin Q \urcorner Qa$, что приводит к $A \in \urcorner Q \urcorner Qa$. Ясно, что $\neg Q \neg A \in \urcorner Q \urcorner Qa$. Тем не менее, пусть $\neg Q \neg A \notin \urcorner Q \urcorner Qa$. Согласно определению $\urcorner$-оператора и по (2.3) мы получаем $Q\neg A \in Q \urcorner Qa$. Тогда по определению Q-оператора $\neg A \in \urcorner Qa$ и, наконец, $A \notin Qa$, что противоречит гипотезе $A \in Qa$ и показывает, что Qa замкнута по B7. Таким образом, применение Q к элементам H не может вывести за H, что, наряду с вышесказанным, означает, что Q представляет собой оператор, правильно определенный на H.

Остается проверить аксиомы (1.5)-(1.8). Если $A \in Qa$, то $QA \in a$ по определению операции Q. Следовательно, $Qa \supseteq a$, что дает нам (1.5).

Если $A \in Q(a \mapsto b)$, $B \in Q(a \mapsto b)$, то $A \to B \in Q(a \mapsto b)$ и $Q(A \to B) \in a \mapsto b$, согласно определению Q-оператора. Поскольку $A \to B \vdash (QA \to QB)$ есть правило вывода B8 системы LQ, то $QA \to QB \in Q(a \mapsto b)$

по определению LQ-теории. Таким образом, $Q(A \to B) \to (QA \to QB) \in (a \mapsto b) \mapsto (a \mapsto b) = 1$ и наоборот.

В случае (1.7), если $A \in QQa$, то $QA \in Qa$ и $QQA \in a$ Поскольку $QQA \to QA$ является аксиомой, то тогда также $QA \in a$ и, соответственно $QQA \to QA \in a \mapsto a = 1$. ▪

Лемма 3.1.6. *Для регулярной* $ŁQ$ *-теории* Th *структура* $ŁQ_{Th} = \langle H_{Th}, \supseteq, \mapsto, Q, 1_{Th} \rangle$ *есть подалгебра алгебры* $ŁQ$.

Доказательство. Покажем, что H_{Th} замкнута по Q. Если $a \in H_{Th}$ замкнута по Th-следованию, $A \in Qa$ и $A \to B \in Th$, то, принимая во внимание, что B8 будет Th-правилом, мы получаем $QA \in a$, $QA \to QB \in Th$ и, как следствие, $QB \in Qa$ и $B \in a$. Таким образом, применение Q к элементам H_{Th} не выводит нас за пределы H_{Th}. Остальное очевидно. ▪

Лемма 3.1.7. *Для данных* Th, v_c *и* $N = \langle O_{Th}, H_{Th}, R_{Th}, {}^{*}{}' \rangle$ *пусть* I_c *будет интерпретацией в Ł-фрейме, ассоциированной с Th-канонической оценкой* v_c. *Тогда для каждой формулы А и для каждого а в подобном Ł-фрейме* $I_c(A,a) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $A \in a$.

Доказательство. Проводится индукцией по длине формул. Нас интересует только случай $A = QB$. В этом случае $I_c(QB,a) \neq 0$ тогда и только тогда, когда для всяких точек b и c из N, если $R_{Th}a{}^{*}bc$, то $I_c(B,b) \leq I_c(B,c)$ тогда и только тогда, когда (по индуктивной гипотезе) (1) для всяких b и c из N, если $R_{Th}a{}^{*}bc$ и $B \in b$, $B \in c$, то $b < c$. Нам остается показать, что это имеет место тогда и только тогда, когда (2) $QB \in a$.

В исчислении Th-теорий $R_{Th}a{}^{*}bc$ означает $⌉\, a \supseteq b \mapsto c$. Следовательно, (2) влечет (1), поскольку $b \vee c = c$ (где $b \vee c =_{def} (b \mapsto c) \mapsto c$) отражает условие $I_c(B,b) \leq I_c(B,c)$, что означает, что $b \leq c$ и $b \supseteq c$. Но это как раз и есть условие $b < c$ согласно лемме 3.4.

Чтобы доказать, что (1) влечет (2), предположим, что $QB \notin a$. Необходимо показать, что существуют такие b и c в N, что $R_{Th}a{}^{*}bc$, $B \in b$, $B \in c$ и не имеет место $b < c$; тогда по контрапозиции мы получаем, что (1) влечет (2).

Если $QB \notin a$, то мы получаем $\neg QB \in ⌉\, a$ в соответствии с определением $⌉$. Соответственно мы получаем из $\neg QB \in ⌉\, a$, что $\neg QQB \in ⌉\, a$ (ввиду Th-доказуемости $\neg QB \to \neg QQB$). Тот факт, что $⌉\, a$ является Th-теорией, приводит к тому, что $\neg QB \to \neg QQB \in ⌉\, a$. Если мы теперь положим, что $|\neg QB|$, $|\neg QQB|$ будут множествами формул, являющимися Th-следствиями $\neg QB$ и $\neg QQB$ соответственно, то $\urcorner a \supseteq |\neg QB| \mapsto |\neg QQB|$, и если мы возьмем такие Th-теории b и c, что $|\neg QB| \subseteq b$, $|\neg QQB| \subseteq c$, то $\urcorner a \supseteq b \mapsto c$ (ясно, что $|\neg QB|$ и $|\neg QQB|$ являются Th-теориями). Но в случае $b < c$ нам требуется, чтобы $\neg QQB \rightarrow \neg QB$ были Th-теоремами, а это не так (это равносильно $QB \rightarrow QQB$, что выводит нас за рамки LQ). Отсюда по контрапозиции следует, что (2) влечет (1). ▪

Окончательно мы получаем следующую теорему

Теорема 3.1.8. *Система ŁQ полна по отношению к данной семантике в том смысле, что все ŁQ-истинно-значимые формулы являются теоремами.*

Доказательство. Аргументация с соответствующими изменениями следует аргументации из [Vasyukov 1993, p.156]. ▪

3.2. Релевантная логика и недистрибутивность

То обстоятельство, что для интерпретации оператора Q в тернарной семантике типа Крипке для $Ł_{\aleph_0}$ не потребовалось новых понятий, наводит на мысль о том, нельзя ли подобным образом проинтерпретировать оператор в случае релевантной логики R. Дело в том, что конструкция Ł—фрейма из [Vasyukov 1993] и релевантной модельной структуры Роутлея-Мейера для R [Роутлей Мейер 1981, с.371] совпадают между собой, а различие возникает лишь при введении интерпретации, поскольку система R двузначна, а для $Ł_{\aleph_0}$ в качестве истинностной матрицы берется интервал [0,1]. Но для правила (iv) из предыдущего параграфа это не столь существенно, поскольку его для R легко можно принять в следующем виде:

(v) $I(QA,a) = \mathrm{T}$ тогда и только тогда, когда для всякого $b \in K$ $(R0ab \Rightarrow \exists c \in K(R0bc \Rightarrow I(A,c) = \mathrm{T}))$,
естественным образом заменяя $\{0,1\}$ на $\{\mathrm{F},\mathrm{T}\}$.

Можно ли, однако, на этом основании ожидать, что модальное расширение системы R с помощью Q—правила Дишканта дает квантовую логику? Покажем, что для этого достаточно внести небольшие изменения.

Аксиомы и правила вывода системы RQ будут иметь следующий вид:

A1. $A \to A$

A2. $A \to ((A \to B) \to B)$

A3. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

A4. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

A5. $A \wedge B \to A$

A6. $A \wedge B \to B$

A7. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$

A8. $A \to A \vee B$

A9. $B \to A \vee B$

A10. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

A11. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A12. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

A13. $\neg\neg A \to A$

B14. $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$

B15. $\dfrac{A,\ B}{A \wedge B}$

B16. $\dfrac{A}{\mathrm{Q}A}$

B17. $\dfrac{\neg A}{\neg \mathrm{Q} \neg A}$

B18. $\dfrac{A \to B}{\mathrm{Q}A \to \mathrm{Q}B}$

B19. $\dfrac{\mathrm{Q}A \to \mathrm{Q}B}{(\mathrm{Q}B \to \mathrm{Q}A) \leftrightarrow \mathrm{Q}(\mathrm{Q}B \supset \mathrm{Q}A)}$

Используются следующие определения:

D1. $A \circ B =_{def} \neg(A \to \neg B)$

D3. $A \leftrightarrow B =_{def} (A \to B) \wedge (B \to A)$

Крон, Марич и Вуйосевич [Kron *et al* 1981] показали, что алгебраическая структура релевантных логик (в частности, системы R) может быть получена путем введения на ортомодулярной решетке дополнительной операции $\to$, при этом если $\vdash_{\mathrm{R}} A \to B$, то $v(A) \leq v(B)$, где v — оценка на ортомодулярных решетках, а $\vdash_{\mathrm{R}}$ знак выводимости в системе R. Здесь A, B обязательно должны представлять собой формулы без знака импликации. Однако аксиому дистрибутивности приходится удалить, заменяя ее на

A11′. $A\wedge(\neg A\vee(A\wedge B)) \rightarrow B$

Фактически подобная замена сказывается в расширении класса интенсиональных R—теорий при доказательстве полноты получающейся модификации системы R, поскольку теперь нет нужды рассматривать лишь простые теории, что значительно сокращает доказательство (интенсиональная теория T является простой, если из $A\vee B\in T$ следует, что $A\in T$ или $B\in T$). Но для RQ подобная замена не обязательна, поскольку, как нетрудно убедиться, из A11, используя B14-B18, дистрибутивность для Q—формул получить не удается.

В качестве дополнительных аксиом вводятся формулы типа формул из предыдущего параграфа:

A20. $QA \leftrightarrow \neg Q\neg A$

A21. $QA \leftrightarrow QQA$

A22. $\neg QA \leftrightarrow Q\neg QA$

Проверка того, что аксиомы A20-A22 верифицируемы с учетом (v) и приводимых в [Роутлей Мейер 1981, с.372] правил интерпретации несложна. Чтобы доказать семантическую непротиворечивость RQ, необходимо рассмотреть еще замкнутость регулярных теорий $Th(v)$ относительно правил B16-B19, однако и здесь не возникает никаких затруднений.

Если перейти к доказательству полноты RQ, то вместо интенсиональных R—теорий придется рассматривать интенсиональные RQ—теории, которые отличаются от первых тем, что всегда, когда $A\in T$, то $QA\in T$, $\neg Q\neg A\in T$ и когда $A\rightarrow B\in T$, то $QA\rightarrow QB\in T$ (здесь T — интенсиональная R(RQ)-теория). Исчисление интенсиональных RQ—теорий представляет собой структуру $HQ = \langle HQ, \subseteq, \circ, O, Q\rangle$, где HQ - совокупность RQ-теорий, O – множество теорем, $\subseteq$ — теоретико-множественное включение, операция $\circ$ определяется как в [Роутлей Мейер 1981, с.380] для R-теорий, а Q представляет собой идемпотентный эндоморфизм. Лемма 9 из [Роутлей Мейер 1981, с.381], характеризующая исчисление R—теорий, перепишется теперь в виде:

3.2.1. Лемма. *Определенное выше исчисление интенсиональных RQ-теорий является частично упорядоченным коммутативным моноидом с идемпотентным эндоморфизмом, т.е. $\circ$ коммутативна и ассоциативна, а O является тождеством относительно $\circ$;*

далее, для всяких a, b, c из HQ если $a \subseteq b$, то $a \circ c \subseteq b \circ c$ и $Qa \subseteq Qb$. Кроме того, в HQ отсутствуют степени, т.е. $a \circ a = a$.

Доказательство. Все как в [Роутлей Мейер 1981, с.361]. Операция Q на *HQ* получается как и для ŁQ:

$Qa = \{A: QA \in a\}$.

Свойство $a \subseteq b \Rightarrow Qa \subseteq Qb$ очевидно. ▪

Нетрудно ввести понятие исчисления интенсиональных *TQ*-теорий и доказать, что оно является подполугруппой *HQ* с идемпотентным эндоморфизмом. Если же теперь перейти к понятию квантовой релевантной позитивной модельной структуры (к.р$^+$.м.с.), добавляя эндоморфизмы к структуре $\langle O,K,R\rangle$, то беря любой коммутативный, частично упорядоченный, не имеющий степеней моноид с идемпотентным эндоморфизмом (в смысле леммы 3.2.1), под к.р$^+$.м.с., ассоциированной с подобным моноидом *MQ*, будем понимать структуру $\langle O,MK,R,Q\rangle$, в которой к определению *R* добавляется то свойство, что *ROaa* тогда и только тогда, когда $a \leq Qa$. Но поскольку по определению $a \subseteq Qa$, то и $a \leq Qa$, откуда вытекает законность определения к.р$^+$.м.с. по расширению леммы 11 из [Роутлей Мейер 1981, с.363].

Переходя теперь к к.р.м.с., т.е. вводя операцию *, нетрудно убедиться путем проверки, что введение операции Q не отражается на этом переходе. Остается теперь перейти, в свою очередь, к каноническим р.м.с. и оценке. Доказательство леммы 14 из [Роутлей Мейер 1981, с.387] в этом случае следует пополнить следующим образом:

Случай 5. *A* есть Q*B*. $v(QB,a) = T$ тогда и только тогда, когда для всякой точки *b* из HQ'_T, такой, что *ROab* влечет существование точки *c* из HQ'_T такой, что *RObc* влечет $v(B,c) = T$ тогда и только тогда, когда (по индуктивному предположению) $a \leq b$ влечет $b \leq c$, что дает в силу транзитивности частичного упорядочения $a \leq c$, откуда $Qa \leq c$ и $QB \in Qa$. Но в таком случае $QQB \in a \Rightarrow QB \in a$, что и требовалось доказать. ▪

Больше никаких препятствий не возникает, и это позволяет, продолжая аргументацию из [Роутлей Мейер 1981], получить доказательство следующей теоремы:

*3.2.2. **Теорема.** Система* RQ *семантически полна в том смысле, что все* RQ*—значимые формулы являются теоремами.*

3.3. Квантовая логика как модальное расширение классической логики

Как известно [Роутлей Мейер 1981, с.393], если добавить к системе R новую аксиомную схему $A \to (A \to A)$, то получаем систему RM, для интерпретации которой необходимо добавить следующий семантический постулат:

p7. $O < a$ или $O < a^*$

Однако, если усилить этот постулат до постулата

p7'. $O < a$

то получаем классическую логику [Роутлей Мейер 1981, с.393]. Но что в этом случае происходит с Q-правилами вывода? Получим ли мы при этом Q—модальное расширение классической логики?

Как ранее уже упоминалось, С. Бернини [Bernini 1981] было получено квантовое расширение классической логики. Однако оно было получено несколько иным путем. Бернини построил первопорядковые логические системы K_1Q и K_2Q, содержащие в себе как классическую, так и квантовые логики. Исходной при этом была интерпретация связок на ортомодулярных решетках, и, как и для Крона и др. [Kron *et al* 1981], существенным моментом была выводимость формулы $A \to B$ (где A и B не содержат знака импликации) лишь в том случае, когда $v(A) \leq v(B)$ во всякой полной орторешетке. Система K_1Q родственна фрагменту брауэровской модальной логики B, в котором $\neg A =_{def} \Box{\sim}A$, $A \underline{\vee} B =_{def} \neg\neg(A \vee B)$, а система K_2Q, родственна фрагменту B, в котором $\neg A =_{def} {\sim}\Box A$, $A \bar{\wedge} B =_{def} \neg\neg(A \wedge B)$.

Секвенциальные формулировка квантовой логики также позволяют выявить ту же самую связь между классической и квантовой логиками. Х. Нишимура [Nishimura 1980, p.342] указывает, что отбрасывая в его секвенциальной системе квантовой ортологики три правила и замещая правило $(\to\neg)$ на его классический вариант, можно получить и классическую секвенциальную систему. Правда, настораживает отсутствие в его системе структурных правил сокращения и перестановки.

Подобное расширение, по-видимому, возникло в силу того обстоятельства, что в любой орторешетке некоторое подмножество всегда порождает булеву алгебру [Биркгоф 1964, с.76]. С другой стороны, любая булева алгебра является дистрибутивной орторешеткой (и ортомодулярной решеткой [Beran 1984, с.42]). Поэтому если бы мы захотели пойти в противоположном направлении, попытавшись построить квантовую логику на булевой алгебре, то именно наличие дистрибутивности было бы первым препятствием на этом пути.

В случае системы R дистрибутивность определялась аксиоматически, что позволяло просто заменить соответствующую аксиому. В классической логике дистрибутивность неизбежно выводима, поэтому для Q—формул имеет смысл добавить аксиому

$Q(QA \wedge Q(Q\neg A \vee Q(QA \wedge QB))) \to QB$

Вместо правила B9 следует взять правило

$$\text{B9}'.\ \frac{QA \to QB}{(QB \to QA) \leftrightarrow Q(Q\neg B \vee QA)}$$

Не составляет труда показать выводимость Q1 и Q2 из 3.1.

Как и для случая $Ł_{\aleph_0}$ множество всех Q—формул оказывается ортомодулярной решеткой (доказательство аналогично [Dishkant 1978]). Относительную полноту полученной системы ***CQ*** можно доказать, воспользовавшись системой ***OM*** Гольдблатта. Перевод π системы ***OM*** в ***CQ*** можно осуществить с помощью следующей рекурсии:

$\pi(A) = QA$

$\pi(\neg A) = Q\neg A$

$\pi(A \wedge B) = Q(\pi(A) \wedge \pi(B))$

для любых формул $A, B \in OM$, допуская, что ***OM*** и ***CQ*** имеют одно и то же множество пропозициональных переменных.

3.3.1. Теорема. *Если* $\vdash_{OM} A$, *то* $\vdash_{CQ} \pi(A)$.

Доказательство. Проводится индукцией по длине формул. ▪

Как можно семантически понимать действие Q—оператора в данном случае? Поскольку для ***CQ*** тернарная семантика типа Крипке уже не имеет места, то скорее всего можно описать ситуацию с помощью стоуновского пространства. В случае тернарной семантики для ŁQ и RQ нетрудно было перейти к алгебраической семантике, сопоставляя каждой формуле множество точек из K, на которых оценка формулы отлична от нуля. Для *CQ* можно считать, что Q-оператор расширяет каждое подмножество стоуновского пространства, сопоставляемое с некоторой формулой. Отсюда $v(Q\neg A)$ будут представлять собой подмножество дополнений к A. Но существенно, что при этом не следует добавлять к *CQ* аксиому А10, ибо тогда $Q\neg A \leftrightarrow \neg QA$.

3.4. Логика Хао Вана и квантовая импликация

Близкими свойствами к квантовой импликации обладает, как уже ранее отмечалось, импликация в логике Хао Вана [Wang 1961]. Последний рассматривал два варианта импликации в трехзначной логике, которые являются по существу двуместными предикатами на множестве формул трехзначной логики со связками $\wedge$, $\vee$, $\neg$ Лукасевича и родственны секвенциям Генцена. В логике Хао Вана формулы имеют вид $P \to Q$, где P и Q — формулы, не содержащие импликации и построенные по правилам логики со связками $\wedge$, $\vee$, $\neg$, что приводит к тому, что импликация относится к метатеории для ($\wedge$, $\vee$, $\neg$)-логики.

Схемы аксиом Хао Вана [Ермолаева Мучник 1974] имеют следующий вид (p, q — пропозициональные переменные):

А1. $p \to p\vee q$

А2. $p\vee q \to q\vee p$

А3. $p\wedge q \to p$

А4. $p\wedge q \to q\wedge p$

А5. $\neg\neg p \to p$

А6. $p \to \neg\neg p$

А7. $p\wedge(q\vee r) \to (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

А8. $\neg(p\wedge q) \to \neg p\vee\neg q$

А9. $\neg p\vee\neg q \to \neg(p\wedge q)$

А10. $\neg(p\vee q) \to \neg p\wedge\neg q$

А11. $\neg p\wedge\neg q \to \neg(p\vee q)$

А12. $p\wedge\neg p \to q$

Правила вывода:

R1. $\dfrac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}$

R2. $\dfrac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}$

R3. $\dfrac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$

где A, B, C — формулы, не содержащие импликации.

R4. $\dfrac{\Phi}{C_p^B \lfloor \Phi \rfloor}$

где $C_p^B \lfloor \Phi \rfloor$ — результат замены в формуле Ф всех вхождений p на формулу B, причем B не содержит $\to$.

Нетрудно видеть, что если заменить A7 на аксиому ортомодулярности

A7′. $p \wedge (\neg p \vee (p \wedge q)) \to q$

то получаем, обозначая подобную систему через ***HWOM***, следующий результат:

3.4.1. Теорема. *Если* $\vdash_{OM} p$, *то* $\vdash_{HWOM} p$, *где* ***OM*** *— система квантовой ортологики Гольдблатта.*

Доказательство. Это следует из того, что все аксиомы ***OM*** содержатся в ***HWOM***. Не хватает только правила

$$\frac{p \to q}{\neg q \to \neg p}$$

но его нетрудно получить, используя R4. ▪

Таким образом, недистрибутивный вариант логики Хао Вана можно интерпретировать на ортомодулярных решетках. Обратно, если воспользоваться Q-правилами, то можно получить квантовое расширение системы Хао Ванна как в случае классической логики. Это следует хотя бы из того, что классическая логика получается путем добавления схемы аксиом

A13. $p \to q \vee \neg q$

к системе Хао Вана. Следовательно, обозначив через ***HWQ*** квантовое расширение системы Хао Вана, получаем:

3.4.2. Теорема. *Если* $\vdash_{OM} p$, *то* $\vdash_{HWQ} p$.

Глава четвертая Квантовая динамика и квантовая логика времени

4.1. Квантовая ортологика времени

Все рассмотренные ранее системы квантовой логики имели дело с квантовой статикой — взаимоотношением между состояниями и наблюдаемыми в некоторый момент времени. Однако еще Дж. Макки [Макки 1965] в 9-й аксиоме своей системы рассмотрел случай квантовой динамики, когда состояния меняются с течением времени так, что состояние в момент времени $t_1 > t_2$ однозначно определяется отрезком времени $t_2 — t_1$ и состоянием в момент времени t_1. Это приводит к однопараметрической полугруппе $t \to V_{0t}$ преобразований множества состояний S в себя, такой, что если состояние системы при $t = t_1$ было α, то при $t = t_2$ оно будет $V_{t_2 - t_1}(\alpha)$.

В рамках формализма квантовой логике удается получить подобную картину путем введения временного оператора и конструирования варианта *логики времени*, *немодальное ядро* которой представляет собой квантовую логику. По традиционной схеме построения модальной логики (а время в этом случае выступает как модальность) обычно к некоторому исходному множеству аксиом добавляется некоторое множество дополнительных аксиом (и правил вывода), описывающее свойства времени. Более других для этой цели (если иметь в виду однопараметрическую полугруппу Макки) подходят аксиомы логики времени фон Вригта [Сегерберг 1979], в которых фигурирует унарный оператор **O**, понимаемый интуитивно как «следующий», «завтра».

Близость семантической интерпретации оператора фон Вригта к однопараметрической полугруппе, рассматриваемой Макки, станет ясной в процессе дальнейшего рассмотрения. Отметим, что рассматриваемая ситуация в некотором смысле может быть охарактеризована как абстрактная форма частного случая уравнения Шредингера.

Беря в качестве исходной системы систему *OM* Гольдблатта, можно как и в случае логики *W* фон Вригта получить логику *OMW*, добавляя к системе *OM* следующие аксиомы:

(11) $\mathbf{O}\neg\alpha \vdash \neg\mathbf{O}\alpha$

(12) $\neg\mathbf{O}\alpha \vdash \mathbf{O}\neg\alpha$

(13) $\mathbf{O}(\alpha\wedge\beta) \vdash \mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta$

(14) $\mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta \vdash \mathbf{O}(\alpha\wedge\beta)$

и правила вывода

(15) $\dfrac{\alpha}{\mathbf{O}\alpha}$

Остановимся, однако, на секвенциальной формулировке Нишимуры [Nishimura 1980]. В этом случае секвенциальная система логики *GOMW*, аналогичная системе *OMW*, получится при добавлении следующих двух правил вывода к системе *GOM*:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \mathbf{O}\alpha}\ (\to \mathbf{O})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\mathbf{O}\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\mathbf{O} \to)$$

Можно показать, что приводимая секвенциальная формулировка эквивалентна формулировке системы *OMW*. Будем писать $\vdash \Gamma \to \Delta$ в *GOMW*, если $\Gamma \to \Delta$ доказуема в *GOMW*.

4.1.1. Теорема. *Если* $\alpha \vdash \beta$ *в OMW, то* $\vdash \alpha \to \beta$ *в GOMW.*

Доказательство. Достаточно показать, что аксиомы (11)-(14) доказуемы в *GOMW* и правило (15) сохраняет доказуемость в *GOMW*, поскольку для остальных аксиом и правил вывода это уже доказано в . Для аксиом (11)-(14) получаем:

$$\text{(11)}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\to\alpha}{\mathbf{O}\alpha\to\alpha}\,(\mathbf{O}\to)}{\neg\alpha\to\neg\mathbf{O}\alpha}\,(\to\neg)}{\mathbf{O}\neg\alpha\to\neg\mathbf{O}\alpha}\,(\mathbf{O}\to)$$

$$\text{(12)}\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\to\alpha}{\alpha\to\mathbf{O}\alpha}\,(\to\mathbf{O})}{\neg\mathbf{O}\alpha\to\neg\alpha}\,(\to\neg)}{\neg\mathbf{O}\alpha\to\mathbf{O}\neg\alpha}\,(\to\mathbf{O})$$

$$\text{(13)}\quad \dfrac{\dfrac{(\to\mathbf{O})\,\dfrac{(\wedge\to)\,\dfrac{\alpha\to\alpha}{\alpha\wedge\beta\to\alpha}}{\alpha\wedge\beta\to\mathbf{O}\alpha}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\beta\to\beta}{\alpha\wedge\beta\to\beta}\,(\wedge\to)}{\alpha\wedge\beta\to\mathbf{O}\beta}\,(\wedge\to\mathbf{O})}{\alpha\wedge\beta\to\mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta}\,(\to\wedge)}{\mathbf{O}(\alpha\wedge\beta)\to\mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta}\,(\mathbf{O}\to)$$

$$\text{(14)}\quad \dfrac{\dfrac{(\wedge\to)\,\dfrac{(\mathbf{O}\to)\,\dfrac{\alpha\to\alpha}{\mathbf{O}\alpha\to\alpha}}{\mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta\to\alpha}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\beta\to\beta}{\mathbf{O}\beta\to\beta}\,(\mathbf{O}\to)}{\mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta\to\beta}\,(\wedge\to)}{\mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta\to\alpha\wedge\beta}\,(\to\wedge)}{\mathbf{O}\alpha\wedge\mathbf{O}\beta\to\mathbf{O}(\alpha\wedge\beta)}\,(\mathbf{O}\to)$$

Что же касается правила вывода (15), то его выполнимость очевидна. ▪

4.1.2. Предложение. *Если* $\Gamma \vdash \alpha$ *в* ***OMW***, *то* $\vdash \Gamma \to \alpha$ *в* ***GOMW***.

Как и в [Nishimura 1980], для доказательства конверсии предложения 4.1.2 придется рассмотреть вопрос о нормализации и конечности секвенций. Если распространить результаты *GOM* на *GOMW*, то следует доказать такие теоремы:

4.1.3. Теорема. *Если конечная секвенция* $\Gamma \to \Delta$ *доказуема в* ***GOMW***, *то каждая секвенция, появляющаяся в любом из доказательств секвенции* $\Gamma \to \Delta$, *является также конечной.*

4.1.4. Теорема. *Если* $\vdash \Gamma \to \Delta$ *в* ***GOMW***, *то существует конечная подсеквенция* $\Gamma' \to \Delta'$ *секвенции* $\Gamma \to \Delta$, *такая, что* $\vdash \Gamma' \to \Delta'$ *в* ***GOMW***.

Как и в *GOM*, доказательство получается индукцией по конструкции доказательств, но в отличие от *GOM* теперь следует учитывать то обстоятельство, что в секвенциях $\mathbf{O}^n\alpha,\Gamma \to \Delta$, и $\Gamma \to \Delta,\mathbf{O}^n\alpha$ у нас $n\in N$. Последнее еще более очевидно в системе *GOMW* + $(\mathbf{O}^n \equiv \mathbf{O}^{n+k})$.

Секвенция называется нормальной, если ее сукцедент состоит самое большое из одной ппф, т.е. нормальная форма секвенции имеет вид $\Gamma \to$ или $\Gamma \to \alpha$. Доказательство в *GOMW* будет называться нормальным, если любая секвенция, появляющаяся в нем, является нормальной.

Распространяя результаты [Nishimura 1980] на нашу систему *GOMW*, докажем следующую теорему:

4.1.5. Теорема (нормализуемости). *Если* $\vdash \Gamma \to \Delta$ *в GOMW, то существует нормальная подсеквенция* $\Gamma \to \Delta'$ *секвенции* $\Gamma \to \Delta$, *такая, что* $\vdash \Gamma \to \Delta'$ *в GOMW и* $\Gamma \to \Delta'$ *имеет нормальное доказательство.*

Доказательство. Нам остается рассмотреть лишь случаи, когда последними правилами вывода являются $(\to\mathbf{O})$ и $(\mathbf{O}\to)$. Итак, в первом случае имеем:

$$p_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\Delta,\alpha\end{array}\right.\qquad \dfrac{\Gamma\to\Delta,\alpha}{\Gamma\to\Delta,\mathbf{O}\alpha}\ (\to\mathbf{O})$$

Но подобный вывод, во-первых, нетрудно посредством сечения продолжить до окончательного вида

$$\dfrac{p_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ (\to\mathbf{O})\dfrac{\Gamma\to\Delta,\alpha}{\Gamma\to\Delta,\mathbf{O}\alpha}\end{array}\right. \qquad \Delta\to}{\Gamma\to\mathbf{O}\alpha}\ (\textit{сечение})$$

Во-вторых же, собственно говоря, нормальной формой будет $\Gamma \to \mathbf{O}\alpha$, а она существует всегда, когда есть $\Gamma \to \alpha$.

Во втором случае имеем:

$$p_2\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \alpha,\Gamma\to\Delta\end{array}\right.\qquad \dfrac{\alpha,\Gamma\to\Delta}{\mathbf{O}\alpha,\Gamma\to\Delta}\ (\mathbf{O}\to)$$

В этом случае все определяется Δ: если существует нормальная подсеквенция $\alpha,\Gamma \to \Delta'$ для секвенции $\alpha,\Gamma \to \Delta$ с нормальным доказательством, то она будет определять и нормальную форму секвенции $\mathbf{O}\alpha,\Gamma \to \Delta$. Но поскольку в *GOM* всегда существует нормальная подсеквенция, то, следовательно, она будет существовать и в *GOMW*. ▪

Теперь нетрудно доказать и конверсию предложения 4.1.2:

4.1.6. Теорема. *Если* $\vdash \Gamma \to \alpha$ *в* ***GOMW***, *то* $\Gamma \vdash \alpha$ *в* ***OMW***.

Доказательство. Согласно теореме нормализуемости достаточно определить лишь нормальное доказательство. Все остальное получается индукцией по конструкции нормальных доказательств. ▪

4.1.7. Теорема (эквивалентность OMW и GOMW). $\Gamma \vdash \alpha$ *в* ***OMW*** *тогда и только тогда, когда* $\vdash \Gamma \to \alpha$ *в* ***GOMW***.

Доказательство. Непосредственно следует из предложения 4.1.2 и теоремы 4.1.6. ▪

Секвенцию $\Gamma \to \Delta$ назовем *GOMW*-доказуемой, если $\vdash \Gamma \to \Delta$ в *GOMW*. В противном случае секвенция $\Gamma \to \Delta$ будет называться *GOMW*-совместимой.

4.1.8. Теорема (дизъюнктивная теорема для GOMW). *Пусть* $\Gamma \to \Delta$ *будет секвенцией, такой, что* Δ *не пусто. Тогда* Δ *является* ***GOMW*** *доказуемой тогда и только тогда, когда для некоторых* $\alpha \in \Delta$, $\Gamma \to \alpha$ *является* ***GOMW****-доказуемой.*

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы нормализуемости. ▪

4.1.9. Следствие. *Пусть* $\Gamma \to \Delta$ *будет секвенцией, такой, что* Δ *не пусто. Тогда* $\Gamma \to \Delta$ *будет* ***GOMW****-совместимой, если и только если для любого* $\alpha \in \Delta$, $\Gamma \to \alpha$ *является* ***GOMW****-совместимой.*

Очевидным образом все полученные результаты справедливы и для ортологики *GOW*.

Реляционную семантику для *GOW* определим путем модификации семантики для *GO* [Nishimura 1980, p.346].

OW-фрейм представляет собой тройку $(X,\perp,S)$, где:

(1) X есть непустое множество;

(2) $\perp$ является отношением ортогональности на X, т.е. $\perp$ является бинарным отношением на X, которое иррефлексивно и симметрично;

(3) S является отношением следования за на X, иррефлексивным и антисимметричным.

Как и раньше будем писать $x \perp Y$, где $x \in X$ и $Y \subseteq X$, если для любого $y \in Y$ имеет место $x \perp y$. Для данного $Y \subseteq X$ будем обозначать через Y^* множество $\{x: x \perp Y\}$. Подмножество Y множества X называется *-замкнутым, если $Y^{**} = Y$.

Будем считать, что рассматриваемый фрейм функционален, т.е. $\forall x \forall y \forall z(xSy \wedge xSz \rightarrow y = z)$, и является фреймом с последующим элементом, т.е. $\forall x \exists ! y(xSy)$. Подобная особенность с содержательной стороны означает принятие концепции времени, в которой день следует за днем, нет никакого последнего дня (момента); кроме того, каждый наступающий момент времени единственен, никакой день (момент) не имеет двух завтрашних дней (моментов). Введем на множестве X частично определенную функцию f, тогда будем писать YSZ, где $Y, Z \subseteq X$, а для данного $Y \subseteq X$ будем обозначать через Y^+ множество $\{x: \forall y \in Y(ySx)\}$ или $\{x: \forall y \in Y(f(y) = x)\}$.

OW-моделью называется четверка $(X, \perp, S, D)$, где:

(1) $(X, \perp, S)$ есть *OW*-фрейм;

(2) D является функцией, сопоставляющей каждой пропозициональной переменной p *-замкнутое подмножество $D(p)$ множества X.

Для данной *OW*-модели $(X, \perp, S, D)$ определим значение формулы в модели $\|\alpha\|$, где α является ппф, следующим образом:

(1) $\|p\| = D(p)$;

(2) $\|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| \cap \|\beta\|$;

(3) $\|\neg\alpha\| = \|\alpha\|^*$;

(4) $\|\mathbf{O}\alpha\| = \|\alpha\|^+$.

Будем писать $Val(\alpha;x) = 1$ и $Val(\alpha;x) = 0$ вместо $x \in \|\alpha\|$ и $x \notin \|\alpha\|$ соответственно. Распространим это обозначение на секвенции. Определим $Val(\Gamma \rightarrow \Delta;x)$ следующим образом:

(1) $Val(\Gamma \rightarrow \Delta;x) = 1$, если для любого $\alpha \in \Gamma$ имеет место $Val(\alpha;x) = 1$ и для любого $\beta \in \Delta$ имеет место $Val(\alpha;x) = 0$;

(2) $Val(\Gamma \rightarrow \Delta;x) = 0$ в противном случае.

Секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$ называется *OW*-определимой, если для некоторой *OW*-модели $(X, \perp, S, D)$ и некоторого $x \in X$ имеет место

$Val(\Gamma \to \Delta; x) = 1$. Секвенция $\Gamma \to \Delta$, не являющаяся OW-определимой, называется OW-значимой.

4.1.10. Лемма. Для данной OW-модели $(X, \perp, S, D)$

(1) если $K \subseteq X$ является *-замкнутым, то K^+ также является *-замкнутым;

(2) если $Y, Z \subseteq K^+$ *-замкнуты, то *-замкнуто также и $Y \cap Z$;

(3) для любого $Y \subseteq K^+$ Y^* является *-замкнутым;

(4) $\|\alpha\| \subseteq K^+$ *-замкнуто для любой ппф.

Доказательство. Утверждение (1) следует из функциональности OW-шкалы. Все остальные утверждения являются частными случаями доказанной в [Nishimura 1980, p.347] леммы 3.1. ▪

4.1.11.Теорема (непротиворечивость GOW). Любая GOW—доказуемая секвенция является GOW-значимой.

Доказательство. Доказывается индукцией по конструкции доказательства в каждом случае. Нам необходимо рассмотреть лишь секвенции $\Gamma \to \mathbf{O}\alpha$ и $\mathbf{O}\alpha \to \beta$. Если $\vdash \Gamma \to \mathbf{O}\alpha$, то OW—значимость предполагает, что $Val(\Gamma \to \mathbf{O}\alpha; x) = 0$, что в свою очередь влечет $Val(\Gamma; x) = 0$ и $Val(\mathbf{O}\alpha; x) = 1$. Но последнее вполне очевидно из построения множества Y^+ (антисимметричность отношения S) и леммы 4.1.10. Точно так же все проходит и в случае $\vdash \mathbf{O}\alpha \to \beta$. ▪

4.1.12.Теорема (совместимость GOW). Пустая секвенция $\to$ является GOW-совместимой.

Доказательство. Следует из теоремы 4.1.11, поскольку предполагает, что антецедент и сукцедент имеют одно и то же значение на модели, и, следовательно, $Val(\to; x) = 0$ по определению. ▪

Перейдем теперь к системе ***GOMW***. ***OMW***-шкалой называется четверка $(X, \perp, S, \Phi)$, где

(1) $(X, \perp, S)$ есть OW-шкала;

(2) Φ является непустым семейством *-замкнутых подмножеств X, таких, что

(а) Φ замкнуто относительно пересечения и операции *;

(б) для любых $Y, Z \in \Phi$, таких, что $Y \subseteq Z$ и $Y^* \cap Z = \varnothing$, имеем $Y = Z$.

4.1.13.Лемма. *Пусть $(X, \perp, S)$ будет **OW**-шкалой и Φ пусть будет непустым семейством *-замкнутых подмножеств мно-*

*жества X, замкнутых относительно пересечения и операции *. Тогда* $(X,\perp,S,\Phi)$ *есть* ***OMW****-шкала, если и только если Φ удовлетворяет следующим условиям:*

(1) $\Phi = \bigcup_{k\in N} \Phi^{k(+)}$ (*здесь* $\Phi^{k(+)} = \Phi^{\underbrace{+++\ldots+++}_{k}}$);

(2) *для любых* $Y,Z\in\Phi^{k(+)}$, *таких, что* $Y\subseteq Z_k$ *и для любого* $x\in Z$ *имеет место* $x\perp(Y^*\cap Z)$ *влечет* $x\in Y$.

Доказательство. Условие (1) выполняется вследствие леммы 4.1.10. Доказательство условия (2) не отличается от случая для *OM*-шкалы [Nishimura 1980, p.347], лишь вместо ψ фигурирует $\Phi^{k(+)}$. ▪

OMW-моделью называется пятерка $(X,\perp,S,\Phi,D)$, где

(1) $(X,\perp,S,\Phi)$ есть ***OMW***-шкала;

(2) D является функцией, сопоставляющей каждой пропозициональной переменной p подмножество $D(p)$ из Φ.

Обозначения $\|\alpha\|$, $Val(\alpha;x)$ и $Val(\Gamma\to\Delta;x)$ вводятся и определяются аналогично введенным ранее для ***OW***-моделей.

Будем говорить, что секвенция $\Gamma\to\Delta$ является ***OMW***—определимой, если для некоторой ***OMW***-модели $(X,\perp,S,\Phi,D)$ и некоторого $x\in X$ $Val(\Gamma\to\Delta;x) = 1$. Секвенция $\Gamma\to\Delta$, которая не является ***OMW***-определимой, называется ***OMW***-значимой.

Нетрудно видеть, что индукцией по конструкции выводов и используя лемму 4.11.13, как и в случае ***OW***-моделей, получаем доказательства следующих теорем:

4.1.14.Теорема (непротиворечивость GOMW). *Любая* ***GOMW****-доказуемая секвенция является* ***GOMW****-значимой.*

4.1.15.Теорема (совместимость GOMW). *Пустая секвенция* $\to$ *является* ***GOMW****-совместимой.*

Пусть ***M*** будет обозначать ***GOW*** или ***GOMW*** соответственно. Множество Ω ппф называется допустимым, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) для любой подформулы β формулы α $\alpha\in\Omega$ влечет $\beta\in\Omega$;

(2) для любой пропозициональной переменной p имеет место $p\in\Omega$ влечет $\neg p\in\Omega$;

(3) для любой пропозициональной переменной p имеет место $p\in\Omega$ влечет $\mathbf{O}p\in\Omega$.

Зафиксируем какое-нибудь допустимое множество Ω.

Секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$ называется $M(\Omega)$-полной, если $\Gamma \rightarrow \Delta$ M-совместимой и $\Gamma \cup \Delta = \Omega$. Легко видеть, что в $M(\Omega)$-полной секвенции $\Gamma \rightarrow \Delta$ Γ и Δ являются дизъюнктивными.

4.1.16. Лемма (лемма Линденбаума). *Любая M-совместимая секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$, где $\Gamma \cup \Delta \subseteq \Omega$ может быть расширена до некоторой $M(\Omega)$-полной секвенции.*

Прежде чем приступить к доказательству этой леммы, введем ряд дополнительных понятий.

Секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$ называется $M(\Omega)$-плотной, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\Gamma \cup \Delta = \Omega$; $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ и $\Delta \neq \Omega$;

(2) для любой $\alpha \in \Omega$ $\vdash \Gamma \rightarrow \alpha$ в M влечет $\alpha \in \Gamma$.

Докажем теперь следующую теорему, использующую введенные понятия:

4.1.17. Теорема. *Секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$ является $M(\Omega)$-полной, если и только если она $M(\Omega)$-плотна.*

Доказательство. То же, что и для случая $GO(GOM)$-системы в [Nishimura 1980, p.358]. ▪

Возвращаясь теперь к лемме 4.1.16, нетрудно заметить, что и здесь доказательство ничем не будет отличаться от доказательства в случае $GO(GOM)$-системы.

Итак, искомое расширение будет иметь вид $\bar{\Gamma} \rightarrow \bar{\Delta}$, где

(1) $\bar{\Gamma} = \{\alpha \in \Omega: \Gamma \rightarrow \alpha \text{ в } M\}$;

(2) $\bar{\Delta} = \Omega - \Gamma$.

Определим теперь $M(\Omega)$-каноническую OW-модель $MW(\Omega,M) = (X,\perp,S,D)$, где:

(1) $X = \{\Gamma \rightarrow \Delta: \Gamma \rightarrow \Delta$ является $M(\Omega)$-полной$\}$;

(2) $(\Gamma \rightarrow \Delta)\perp(\Gamma' \rightarrow \Delta')$, если и только если для некоторого $\neg\alpha \in \Omega$ либо

(а) $\alpha \in \Gamma$ и $\neg\alpha \in \Gamma'$, либо

(б) $\neg\alpha \in \Gamma$ и $\alpha \in \Gamma'$.

(3) $(\Gamma \rightarrow \Delta)S(\Gamma' \rightarrow \Delta')$, если и только если для некоторого $\mathbf{O}\alpha \in \Omega$ имеем $\alpha \in \Gamma$ и $\mathbf{O}\alpha \in \Gamma'$ (но не наоборот);

(4) $D(p) = \{\Gamma \rightarrow \Delta: p \notin \Delta \text{ и } (\Gamma \rightarrow \Delta) \in X\}$.

Покажем, что $MW(\Omega,M)$ является OW-моделью.

4.1.18. Теорема. *$MW(\Omega,M)$ является OW-моделью.*

Доказательство. Остается только показать, что S является отношением следования за. Предположим, что для некоторой секвенции $(\Gamma\to\Delta)\in X$ имеем $(\Gamma\to\Delta)S(\Gamma\to\Delta)$. Тогда для какого-нибудь $\mathbf{O}\alpha\in\Omega$ имеем $\alpha\in\Gamma$ и $\mathbf{O}\alpha\in\Gamma$. В этом случае можно показать, что $\Gamma\to\Delta$ является *M*—доказуемой. Действительно:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\mathbf{O}\to)\dfrac{\alpha\to\alpha}{\mathbf{O}\alpha\to\alpha}\qquad \alpha\to\Delta}{\mathbf{O}\alpha\to\Delta}\ (\textit{сечение})}{\alpha,\mathbf{O}\alpha\to\Delta}\ (\textit{ослабление})}{\Gamma\to\Delta}\ (\textit{ослабление})$$

Но это противоречит условию *M*-совместимости. Отсюда приходим к заключению, что S иррефлексивно. Теперь предположим, что $(\Gamma\to\Delta)S(\Gamma'\to\Delta')$ и $(\Gamma'\to\Delta')S(\Gamma\to\Delta)$. Но это противоречит условию (3) в определении $MW(\Omega,M)$, следовательно S антисимметрично. Отсюда приходим к выводу, что S является отношением следования за. ▪

***4.1.19. Лемма**. Для любой $M(\Omega)$-полной секвенции $\Gamma\to\Delta$ и любых $\Pi,\Sigma\subseteq\Omega$, таких, что $\Pi,\Gamma\to\Delta,\Sigma$ является M-совместимой, имеет место $\Pi\subseteq\Gamma$ и $\Sigma\subseteq\Delta$.*

Доказательство. Следует из $M(\Omega)$-плотности секвенции $\Gamma\to\Delta$. ▪

***4.1.20. Теорема ($MW(\Omega,M)$-фундаментальная теорема)**. Для любой секвенции $(\Gamma\to\Delta)\in X$ и любого $\alpha\in\Omega$ имеем $(\Gamma\to\Delta)\in\|\alpha\|$, если $\alpha\in\Gamma$, и $(\Gamma\to\Delta)\notin\|\alpha\|$, если $\alpha\in\Delta$. Отсюда $Val(\Gamma\to\Delta;\Gamma\to\Delta) = 1$.*

Доказательство. Проводится индукцией по конструкции формул. Нам остается рассмотреть лишь два следующих случая:

(1) $\alpha = \mathbf{O}\beta\in\Gamma$. Допустим, что $\|\beta\| = \{(\bar\Gamma\to\bar\Delta)\in X\colon \beta\in\bar\Gamma\}$. Тогда имеем $\|\beta\|S(\Gamma\to\Delta)$, следовательно $(\Gamma\to\Delta)\in\|\mathbf{O}\beta\|$.

(2) $\alpha = \mathbf{O}\beta\in\Delta$. Рассмотрим секвенцию $\Gamma\to\Delta,\beta$. Предположим, что она является *M*-доказуемой. Но в таком случае мы получаем, что $\Gamma\to\Delta,\mathbf{O}\beta$ также доказуема:

$$\frac{\Gamma\to\Delta,\beta}{\Gamma\to\Delta,\mathbf{O}\beta}\,(\to\mathbf{O})$$

Поскольку $\Gamma\to\Delta,\mathbf{O}\beta$ является *M*-совместимой, то очевидно, что и секвенция $\Gamma\to\Delta,\beta$ также будет *M*-совместимой. В таком случае из леммы 4.1.19 следует, что $\{\beta\}\subseteq\Omega$. Отсюда получаем, что $(\Gamma\to\Delta)\notin\|\beta\|$ и тогда можно прийти к заключению, что $(\Gamma\to\Delta)\notin\|\mathbf{O}\beta\|$. ▪

Из полученного результата следуют следующие важные теоремы:

4.1.21. Теорема (полнота GOW). *Секвенция является GOW-совместимой, если и только если она является GOW-определимой.*

Доказательство. 1) Если: следует непосредственно из теоремы о непротиворечивости *GOW*.

2) Только если: будем рассматривать Ω как множество всех ппф. В этом случае доказательство следует из фундаментальной теоремы и леммы Линденбаума. ▪

4.1.22. Теорема (компактность GOW). *Секвенция* $\Gamma\to\Delta$ *является OW-определимой, если и только если любая конечная последовательность подсеквенций секвенции* $\Gamma\to\Delta$ *является OW-определимой.*

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 4.1.4 и теоремы 4.1.21. ▪

4.1.23. Теорема (Ω-компактность GOW). *Секвенция* $\Gamma\to\Delta$, *где* $\Delta\neq\varnothing$, *является OW-ропределимой, если и только если для любой* $\alpha\in\Delta$ $\Gamma\to\alpha$ *является OW-определимой.*

Доказательство. Очевидным образом следует из предложения 4.1.9 и теоремы о полноте *GOW*. ▪

4.1.24. Теорема (финитная аппроксимируемость GOW). *Любая конечная GOW-совместимая секвенция* $\Gamma\to\Delta$ *может быть определимой в некоторой конечной OW-модели.*

Доказательство. Возьмем в качестве Ω множество $\{\alpha$: α является подформулой некоторой ппф из $\Gamma\cup\Delta\}\cup\{\neg p$: $p\in\Gamma\cup\Delta\}\cup\{\mathbf{O}p$: $p\in\Gamma\cup\Delta\}$. Тогда доказательство данной теоремы очевидным образом вытекает из леммы Линденбаума и фундаментальной теоремы. ▪

4.1.25. Следствие. *GOW* является разрешимой.

Обратимся теперь к системе *GOMW*. Поскольку, как указывает Нишимура [Nishimura 1980, p.351], для *GOW* проблема финитной аппроксимируемости еще до конца не исследована, постольку ограничимся в случае *GOMW* лишь теоремой полноты и ее следствиями.

Определим нашу модель как пятерку $NW = (X, \perp, S, \Phi, D)$, где

(1) $(X, \perp, S, D) = MW(\text{ППФ}, GOW)$, где в свою очередь ППФ является множеством всех ппф;

(2) $\Phi = \{\|\alpha\|: \alpha$ является ппф$\}$.

4.1.26. Лемма. $NW = (X, \perp, S, \Phi, D)$ *является OMW-моделью.*

Доказательство. Согласно теореме 4.1.20 $\|\alpha\|^+ = \|\mathbf{O}\alpha\|$. Следовательно

$$\Phi = \bigcup_{k \in N} \Phi^{k(+)},$$

где каждое $\Phi^{k(+)}$ определяется на множестве $\text{ППФ}^{k(+)}$ и замкнуто относительно пересечения и операции *. Ввиду этого, как нетрудно видеть, выполняются все условия леммы 4.1.13 (здесь $\text{ППФ}^{k(+)} \subseteq \text{ППФ}$). Остальное очевидно. ▪

Доказательства всех нижеприведенных теорем полностью совпадают с доказательствами соответствующих теорем для *GOW*:

4.1.27. Теорема (полнота GOMW). *Секвенция является GOMW-совместимой, если и только если она является GOMW-определимой.*

4.1.28. Теорема (компактность GOMW). *Секвенция является OMW-определимой, если и только если ее любая конечная подсеквенция является OMW—определимой.*

4.1.28. Теорема (Ω-компактность GOMW). *Секвенция* $\Gamma \rightarrow \Delta$, *где* $\Delta \neq \varnothing$, *является OMW-определимой, если и только если для любой* $\alpha \in \Delta$ $\Gamma \rightarrow \alpha$ *является OMW-определимой.*

4.2. Бесконечнозначная логика направленного времени

Еще одной возможностью получения квантоводинамического описания является не получение темпоральной логики на основе квантовой, а построение квантового расширения существующей временной логики с помощью оператора Дишканта. Однако в этом случае нам требуется предварительно построить временную логику на базе бесконечнозначной логики Лукасевича (см. [Васюков 1999], [Vasyukov 2000]), чем мы и займемся в этом параграфе.

Хорошо известно, что система $Ł_{\aleph_0}$ бесконечнозначной логики Лукасевича может быть семантически интерпретирована как система логики времени (см. [Urquhart 1973]). В то же время сам Я. Лукасевич скорее всего не согласился бы с подобной интерпретацией, поскольку он строил свою систему бесконечнозначной логики в предположении, что истинностные значения представляют собой значения вероятности. В этой связи попытка построения логики времени как расширения системы $Ł_{\aleph_0}$ представляется более естественной и согласованной с намерениями Лукасевича.

Еще более обещающей кажется подобная попытка с точки зрения семантики возможных миров с тернарным отношением достижимости и бесконечнозначной матрицей истинности, предложенная в [Vasyukov 1993] для $Ł_{\aleph_0}$. Действительно, коль скоро мы имеем дело с возможными мирами, то применение техники временных логик в рамках подобной семантики представляется очевидным: достаточно лишь обзавестись соответствующим бинарным отношением достижимости, пригодным для семантической интерпретации темпоральных аспектов. Но так ли уж необходимо нам это бинарное отношение достижимости, влекущее за собой анализ и учет сложных проблем взаимодействия обеих отношений достижимости (тернарного и бинарного)? И не выглядит ли более естественным (с точки зрения бритвы Оккама) попытаться интерпретировать темпоральные аспекты с помощью уже имеющихся в наличии семантических средств?

Система $Ł_{\aleph_0}F$ бесконечнозначной логики направленного времени получается путем использования оператора "будущего времени" **F** («будет так, что») и добавления к системе $Ł_{\aleph_0}$ следующих аксиом:

A5. $\mathbf{F}(A\to B)\to(\mathbf{F}A\to\mathbf{F}B)$

A6. $\mathbf{FF}A\to\mathbf{F}A$

и правила вывода:

$$\text{R2. } \frac{A}{\mathbf{G}A},$$

где $\mathbf{G}A =_{\text{def}} \neg\mathbf{F}\neg A$ («всегда будет так, что A»).

Семантика для $Ł_{\aleph_0}F$, как и для логики $ŁQ$, основывается на семантике, предложенной в [Vasyukov 1993]. Она уже была описана в главе 3 (параграф 3.1). В рамках данной семантики семантический эквивалент F-оператора получается с помощью следующего интерпретационного правила:

(iv) $I(\mathrm{F}A,a) = \min\{I(A,b)\}$ тогда и только тогда, когда для всяких $b,c \in K$ $Ra^*bc \Rightarrow I(A,b) \leq I(A,c)$

Чтобы прокомментировать это правило, процитируем следующий достаточно обширный пассаж из книги «Направление времени» Г. Рейхенбаха: «Дискуссия по проблеме времени во многом страдает от того, что путают два понятия, пренебрегая различием между порядком и направлением. Точки, находящиеся на прямой линии, простирающейся в бесконечность в обе стороны, расположены в определенном порядке, однако сама линия не обладает направлением». И далее: «...для случая одномерного континуума отрицательных и положительных вещественных чисел ...числа подчиняются отношению *меньше чем*, которое асимметрично, связно и транзитивно, подобно отношению *налево от*, следовательно последовательность чисел упорядочена. Однако, кроме того, отношение *меньше чем* обладает направлением, то есть его структура отличается от структуры обратного ему отношения *больше чем*. Это видно хотя бы из того, что мы можем провести различие между отрицательными и положительными числами следующим образом. Квадрат положительного числа есть число положительное, квадрат отрицательного числа также число положительное. Следовательно, мы можем сформулировать следующее утверждение относительно класса вещественных чисел: любое число, являющееся квадратом другого числа, больше, чем любое число, которое не является квадратом другого числа. Таким образом, мы определили отношение *больше чем*, а тем самым и отношение *меньше чем*, не прибегая к помощи диаграммы, а путем рассмотрения различий в их структуре». И, наконец, «... время, как нам обычно представляется, имеет не только порядок, но и направление. Отношение *раньше чем* рассматривается как отношение, идентичное отношению *меньше чем*, а не как ненаправленное отношение, подобно отношению *налево от*. Значит, мы считаем, что структура отношения *раньше чем* отличается от структуры своей конверсии, от структуры отношения *позже чем*» [Рейхенбах 1962, с.26-27].

Подразумеваемая аналогия становится более прозрачной, если вспомнить, что главной целью [Vasyukov 1993] было доказательство полноты $\text{Ł}_{\aleph}$ по отношению к матрице Карпенко $M_\Sigma = \langle \Sigma, \neg, \mapsto, \{0^-\}\rangle$, где ординальный тип Σ есть $\omega + \omega^*$, т.е.

|——|——|——|——.——|——|——|——|

$$0^+ \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots\ldots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0^-$$

Была показана полнота $\text{Ł}_{\aleph_0}$ по отношению к L-фрейму (с тернарным отношением достижимости), в котором роль множества истинностных значений играет M_Σ. Таким образом, если мы положим, что (для каждой формулы) каждая точка из K связана с некоторым моментом времени, индексированным истинностным значением из M_Σ, то, согласно (iv), мы получим отношение *позже чем*, определенное на этих моментах, следуя рассуждению Рейхенбаха, приведенному выше. Это можно было бы понимать как становление направления времени, принимая во внимание бесконечность M_Σ. Интерпретационное правило (iv) предполагает как раз подобное интуитивное понимание этого понятия, использующее преимущества многозначного подхода в логике времени.

К сожалению, у каждой аналогии есть свои пределы: как мы уже упоминали ранее, в [Vasyukov 1993, p.157] доказывается следующая метатеорема:

Если $M_{\text{Ł}_{\aleph_0}}$ есть логическая матрица для $\text{Ł}_{\aleph_0}$ и $\text{Ł}_{\aleph_0}$ семантически непротиворечива по отношению к семантике в стиле Крипке с оценкой в $M_{\text{Ł}_{\aleph_0}}$, то $M_{\text{Ł}_{\aleph_0}}$ обеспечивает полноту $\text{Ł}_{\aleph_0}$ по отношению к этой семантике.

Как следствие, обычная матрица $S_{[0,1]}$ также подходит для индексации моментов времени, однако ясно, что в этом случае рейхенбаховское определение направления времени не пригодно. Создается впечатление, что наше «направление» времени скорее следует истолковывать как разновидность метафоры со всеми ее особенностями и слабостями.

Тем не менее, даже в случае $S_{[0,1]}$ существует возможность настаивать на направленном характере оператора **F** в предложенной логике. Действительно, вспомним еще раз предложенную самим Лукасевичем интуитивную вероятностную интерпретацию многозначности. Оставляя в стороне вопрос о том, насколько удачно вообще вероятностное понимание истинностных значений (впоследствии Лукасевич отказался от подобной интерпретации), можно, тем не менее, в некотором смысле рассматривать их как степени достоверности, правдоподобия и т. д.

В этом случае правило (iv) следует понимать как указывающее на увеличение достоверности «будущих событий», т.е. становление будущего. Если нечто становится все более и более «реальным», если шансы его реализации все время увеличиваются, то тогда очевидно, что оно появится в действительности, независимо от того, известно ли нам совершенно достоверно точное время его появления или нет. Более того, обратимость или исчезновение этой тенденции не приводит к симметричной ситуации. Даже если допустить, что мы в действительности имеем дело в нашей семантике не с обычным, а с лексикографическим упорядочением (что означает упорядоченность сначала по первой компоненте, а потом по второй), то и тогда изменение одной из компонент (упорядочение по истинностным значениям) не влечет за собой изменение второй (упорядочение последовательности возможных миров). Поэтому даже в этом случае наша стрела времени по-прежнему необратима.

В дальнейшем мы для удобства будем использовать матрицу $S_{[0,1]}$, поскольку вышеприведенная метатеорема позволяет распространить все полученные с использованием $S_{[0,1]}$ результаты на случай матрицы Карпенко. Тем не менее, читатель всегда будет в состоянии проверить, не выводит ли использование правила (iv) за пределы M_{Σ}.

Как и ранее, мы будем трактовать импликацию Лукасевича как многозначное следование. Соответственно, *A* влечет *B*, если для всякого *a* из *K*

(2) $I(A,a) \neq 0 \Rightarrow I(B,a) \neq 0$

Мы говорим, что *A* влечет *B* в *LF*-фрейме, если *A* влечет *B* при всякой оценке. A LF-влечет B, если A влечет B во всяком LF-фрейме.

Лемма 4.2.1. $a<b$ и $I(A,a) \neq 0 \Rightarrow I(A,b) \neq 0$.

Доказательство. Все как в [Vasyukov 1993]. Нам необходимо лишь разобраться с дополнительным случаем $A = \mathbf{F}B$. Но $I(\mathbf{F}B,b) \neq 0$ означает по (iv), что $I(\mathbf{F}B,a) = \min\{I(B,c)\} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $Ra^*cd \Rightarrow I(B,c) \leq I(B,d)$. Таким образом, мы имеем Ra^*cd & & $ROab$. Но $ROab \Rightarrow_{p5'} ROb^*a^*$ и затем ROb^*a^* & $Ra^*cd \Rightarrow_{d2} R^2Ob^*cd \Rightarrow_{p4} Rb^*cd$. Поскольку мы имеем $I(B,c) \leq I(B,d)$, то по (iv) мы получаем $I(\mathbf{F}B,b) \neq 0$. ▪

Mutatis mutandis леммы 4.2.2, 4.2.3 и теорема 4.2.4 остаются такими же, как и в [Vasyukov 1993], а именно:

Лемма 4.2.2. A влечет B при $v \Rightarrow A \rightarrow B$ верифицируемо при v.

Лемма 4.2.3. $A \rightarrow B$ верифицируема при $v \Rightarrow A$ влечет B при v.

Теорема 4.2.4. A влечет B при v тогда и только тогда, когда $A \rightarrow B$ верифицируемо при v. Следовательно, A влечет B в некотором LF-фрейме тогда и только тогда, когда $A \rightarrow B$ значимо и A LF-влечет B тогда и только тогда, когда $A \rightarrow B$ LF-значимо.

Более сложен случай леммы 4.2.5 [Vasyukov 1993, p.149]. Здесь нам нужно расширить предыдущее доказательство на случай аксиом А5-А6.

Лемма 4.2.5. Если A есть аксиома $Ł_{\aleph_0}F$, то $I(A,O) = 1$, т.е. все аксиомы истинно верифицируемы.

Доказательство. Мы начнем со случая А5, потому что А1-А4 уже были верифицированы в [Vasyukov 1993, с.149]. Как и там, поскольку каждая аксиома имеет вид $B \rightarrow C$, достаточно показать, что для каждой аксиомы $I(b, a) \neq 0 \Rightarrow I(c,a) \neq 0$. Мы имеем $I((A \rightarrow B),a) \neq 0$, что означает $I(\mathbf{F}(A \rightarrow B),a) = \min\{I(A \rightarrow B,b))\} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $Ra^*bc \Rightarrow I(A \rightarrow B,b) \leq I(A \rightarrow B,c)$. Отсюда мы получаем, что поскольку $Rbbb$ & $Rccc$ по $p2$, то $I(A,b) \neq 0$, $I(A,c) \neq 0$, $I(B,b) \neq 0$, $I(B,c) \neq 0$. Следовательно, если $I(\mathbf{F}A,a) \neq 0$, то $I(\mathbf{F}B,a) \neq 0$, поскольку из $1-I(A,b)+I(B,b) \leq 1-I(A,c)+I(B,c)$ и $I(A,b) \leq I(A,c)$ следует $I(B,b) \leq I(B,c)$. Наконец, $I(\mathbf{F}A \rightarrow \mathbf{F}B,a) \neq 0$, принимая во внимание, что $Raaa$ по $p2$.

В случае А6, когда $I(\mathbf{FF}A,a) \neq 0$, мы должны рассмотреть случай, когда $I(\mathbf{FF}A,a) = \min\{I(\mathbf{F}A,b)\} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $Ra^*bc \Rightarrow I(\mathbf{F}A,b) \leq I(\mathbf{F}A,c)$. Принимая во внимание, что $I($-

$\mathbf{F}A,b) \neq 0$ дает нам $Rb{*}de$ и $I(A,d) \neq 0$, $I(A,d) \leq I(A,e)$, мы приходим к заключению, что $Ra{*}bc \,\&\, Rb{*}de \Rightarrow_{p5} Ra{*}c{*}b{*} \,\&\, Rb{*}de \Rightarrow_{d2} R^2a{*}c{*}de \Rightarrow_{p3} R^2a{*}dc{*}e \Rightarrow_{d2} \exists x{\in}K\,(Ra{*}dx \,\&\, Rxc{*}e) \Rightarrow_{q1} \exists x{\in}K\,(Ra{*}dx \,\&\, Rc{*}xe)$. Согласно $p7$ у нас имеется две альтернативы: $d < x$ или $x < d$. Вторая из них приводит к $Ra{*}dx \,\&\, ROxd \Rightarrow_{q1} Ra{*}dx \,\&\, RxOd \Rightarrow_{d2} R^2a{*}dOd \Rightarrow_{p3,\,p4} Ra{*}dd$ и, таким образом, $I(\mathbf{F}A,a) = I(A,d) \neq 0$. Первая альтернатива дает нам $Rc{*}xe \,\&\, ROdx \Rightarrow_{q1} ROdx \,\&\, Rxc{*}e \Rightarrow_{d2} R^2Odc{*}e \Rightarrow_{p3,\,q1} Rc{*}de$. Это означает, что $I(\mathbf{F}A,c) = I(\mathbf{F}A,b) = \min\{I(A,d)\}$ и согласно (iv) это приводит нас к $I(\mathbf{F}A,a) \neq 0$. ▪

Определение регулярной теории остается таким же, как и в [Vasyukov 1993, p.150], а именно:

Определение. Множество формул, верифицируемых в точке a, называется теорией, определяемой v в a, и обозначается $Th(a,v)$. Множество формул, верифицируемых при v, называется регулярной теорией, определяемой v, и обозначается $Th(v)$.

Лемма 4.2.6. $Th(a,v)$ замкнута по следованию при v и $Th(v)$ замкнута по R1, R2. $Th(a,v)$ также замкнута при v по R1, R2.

Доказательство. В случае R2 замкнутость $Th(v)$ означает, что $I(A,O) = 1$ влечет $I(\neg\mathbf{F}\neg A,O) = 1$. Действительно, $I(\neg A,O^*) = 0$ согласно (ii) и $I(\mathbf{F}\neg A,O^*) = \min\{I(\neg A,b)\}$ тогда и только тогда, когда $RO^*bc \Rightarrow I(\neg A,b) \leq I(\neg A,c)$. Но по $p2$ $ROOO \Rightarrow_{p5} ROO{*}O{*}$ и, следовательно, $I(\mathbf{F}\neg A,O^*) = 0$, поскольку $I(\neg A,O^*) = 0$. Таким образом, мы получаем $I(\neg\mathbf{F}\neg A,O) = 1$ согласно (ii) и $Th(v)$ будет замкнута по R2. То же самое будет иметь место для $Th(a,v)$, ввиду того, что $Raaa \Rightarrow_{p5} Raa{*}a{*}$.▪

Теорема 4.2.7. *Регулярная теория $Th(v)$ формул, верифицируемых при v для всякого LF-фрейма и всякой оценки, содержит все теоремы $Ł_{\aleph_0}.F$. Рассмотренная выше семантика адекватна $Ł_{\aleph_0}F$ в том смысле, что все теоремы $Ł_{\aleph_0}F$ LF-значимы.*

Доказательство. Подобная теория $Th(v)$ должна содержать все аксиомы и по лемме 3.6 она замкнута по R1, R2. Поэтому все теоремы $Ł_{\aleph_0}F$ принадлежат к $Th(v)$ для всякого LF-фрейма. Следовательно, некоторая $Ł_{\aleph_0}F$ теорема A принадлежит к каждой такой $Th(v)$, в которой A LF-значима. ▪

Приведем вначале определение темпоральной алгебры Вайсберга, представляющей собой очевидное расширение понятия алгебры Вайсберга, используемой в [Vasyukov 1993, p.145-146].

Определение. Пусть $W = \langle A, \mapsto, _{\ulcorner}, 1\rangle$ будет алгебра Вайсберга, список аксиом которой выглядит следующим образом:

(1.1) $1 \mapsto x = x$

(1.2) $(x \mapsto y) \mapsto ((y \mapsto z) \mapsto (x \mapsto z)) = 1$

(1.3) $(x \mapsto y) \mapsto y = (y \mapsto x) \mapsto x$

(1.4) $(_{\ulcorner}x \mapsto {_{\ulcorner}}y) = (y \mapsto x)$

Тогда $WF = \langle A, \mapsto, _{\ulcorner}, F, 1\rangle$ будет *темпоральной алгеброй Вайсберга*, получаемой посредством добавления к аксиомам W следующих аксиом:

(1.5) $F(x \mapsto y) \leq (Fx \mapsto Fy)$

(1.6) $FFx \leq Fx$

Будем говорить, что $\mathcal{F}$ представляет собой импликативный фильтр в WF, если $\mathcal{F}$ есть импликативный фильтр в W и всегда, когда $x \in \mathcal{F}$, то $Fx \in \mathcal{F}$. Аналогично понятию алгебраического импликативного фильтра темпоральной алгебры Вайсберга мы вводим понятие LF-теории.

Определение. Всякое собственное непротиворечивое подмножество Th формул $Ł_{\aleph_0}F$ является LF-теорией, если всегда, (i) когда $A \in Th$ и $A \rightarrow B$ есть теорема $Ł_{\aleph_0}F$, то $B \in Th$ и (ii) когда $A \in Th$, то $\mathbf{G}A \in Th$. То свойство, что LF-теория содержит все аксиомы и теоремы $Ł_{\aleph_0}F$, будет называться регулярностью. LF-теория называется простой LF-теорией, если из $A \vee B \in Th$ следует, что $A \in Th$ или $B \in Th$.

Понятие LF-теории связано с $Th(a,v)$ следующим образом:

Лемма 4.2.8. Пусть v будет оценкой в LF-фрейме и $a \in K$. Тогда теория $Th(a,v)$, определяемая v в a, будет LF-теорией и, более того, простой LF-теорией. Если $O < a$, то $Th(a,v)$ является регулярной.

Доказательство. Из [Vasyukov 1993, p.151] следует, что $Th(a,v)$ будет LF-теорией. Предположим, что $A \in Th(a,v)$. Тогда по лемме 3.6 из [Vasyukov 1993, p.150] $B \in Th(a,v)$. Следовательно, $Th(a,v)$ является LF-теорией. По лемме 3.1 из [Vasyukov 1993, p.148] все теоремы $Ł_{\aleph_0}F$ достоверны при v в точке a, когда $O < a$. Поэтому, если $O < a$, то $Th(a,v)$ будет регулярной. ▪

Пусть H будет множеством всех LF-теорий. Мы определяем оператор F на H следующим образом:

$\forall a \in H\,(Fa = \{A\colon \mathbf{F}A \in a\})$.

Исчисление LF-теорий представляет собой структуру $\mathcal{LF} = \langle H, \supseteq, \mapsto, \urcorner, F, 1\rangle$, где $\langle H, \supseteq, \mapsto, \urcorner, 1\rangle$ есть исчисление L-теорий и F определено выше.

Лемма 4.2.9. Исчисление $\mathcal{LF}$ LF-теорий является темпоральной алгеброй Вайсберга, т.е. алгеброй Вайсберга с F-оператором и аксиомами (1.5) — (1.6).

Доказательство. Единственной проблемой является определение F на H. Корректно ли это определение? Пусть a будет замкнута по $Ł_{\aleph_0}F$-следованию, $A \in Fa$ и $A \to B$ будет теоремой $Ł_{\aleph_0}F$. Нетрудно видеть, что из R2 мы получаем производное правило

$$\frac{A \to B}{\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B}$$

и, как следствие, $\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B$ также будет теоремой $Ł_{\aleph_0}F$. Поскольку $\mathbf{F}A \in a$ по определению F-операции, то ввиду $Ł_{\aleph_0}F$-замкнутости мы получаем $\mathbf{F}B \in a$. Окончательно мы получаем $B \in Fa$.

Опять, пусть Fa будет замкнута по R2 и $A \in Fa$. Тогда по R2 мы получаем $\neg\mathbf{F}\neg A \in Fa$. Согласно определению $\urcorner$-операции это означает, что $\mathbf{F}\neg A \notin \urcorner Fa$, и затем, по определению F-оператора, $\neg A \notin F\urcorner Fa$, что приводит к $A \in \urcorner F \urcorner Fa$. Ясно, что $\neg\mathbf{F}\neg A \in \urcorner F \urcorner Fa$. Тем не менее, пусть имеет место $\neg\mathbf{F}\neg A \notin \urcorner F \urcorner Fa$. Согласно определению $\urcorner$-оператора и по (2.3) мы получаем $\mathbf{F}\neg A \in F\urcorner Fa$. Тогда по определению F-оператора $\neg A \in \urcorner Fa$ и, наконец, $A \notin Fa$, что противоречит гипотезе $A \in Fa$ и показывает, что Fa замкнута по R2. Таким образом, применение F к элементам H не может вывести за H, что, наряду с вышесказанным, означает, что F представляет собой оператор, правильно определенный на H.

Остается проверить аксиомы (1.5)-(1.6). Если $A \in F(a \mapsto b)$, $B \in F(a \mapsto b)$, то $A \to B \in F(a \mapsto b)$ и $\mathbf{F}(A \to B) \in a \mapsto b$, согласно определению F-оператора. Поскольку $\mathbf{F}(A \to B) \to (\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B)$ представляет собой аксиому $Ł_{\aleph_0}F$, то $\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B \in a \mapsto b$ по определению LF-теории. Таким образом, $\mathbf{F}(A \to B) \to (\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B) \in (a \mapsto b) \mapsto (a \mapsto b) = 1$.

В случае (1.6), если $A \in FFa$, то $\mathbf{F}A \in Fa$ и $\mathbf{F}\mathbf{F}A \in a$ Поскольку

$\mathbf{FF}A \to \mathbf{F}A$ является аксиомой $Ł_{\aleph_0}F$, то тогда также $\mathbf{F}A \in a$ и, соответственно, $\mathbf{FF}A \to \mathbf{F}A \in a \mapsto a = 1$. ▪

Лемма 4.2.10. *Для регулярной LF-теории Th структура* $\mathcal{LF}_{Th} = \langle H_{Th}, \supseteq, \mapsto, F, 1_{Th} \rangle$ *есть подалгебра алгебры* $\mathcal{LF}^{Ł}$

Доказательство. Покажем, что H_{Th} замкнута по F. Если $a \in H_{Th}$ замкнута по Th-следованию, $A \in Fa$ и $A \to B \in Th$, то, принимая во внимание, что производное правило

$$\frac{A \to B}{\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B}$$

также будет Th-правилом, мы получаем $\mathbf{F}A \in a$, $\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B \in Th$ и, как следствие, $\mathbf{F}B \in Fa$ и $B \in a$. Таким образом, применение F к элементам H_{Th} не выводит нас за пределы H_{Th}. Остальное очевидно. ▪

Лемма 4.2.11. *Для данных Th,* v_c *и* $\mathcal{N} = \langle O_{Th}, H_{Th}, R_{Th}, {}^{*}\rangle$ *пусть* I_c *будет интерпретацией в LF-фрейме, ассоциированной с Th-канонической оценкой* v_c*. Тогда для каждой формулы A и для каждого a в подобном LF-фрейме* $I_c(A,a) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $A \in a$.

Доказательство. Проводится индукцией по длине формул. Нас интересует только случай $A = \mathbf{F}B$. В этом случае $I_c(\mathbf{F}B,a) \neq 0$ тогда и только тогда, когда для всяких точек b и c из $\mathcal{N}$, если $R_{Th}a^{*}bc$, то $I_c(B,b) \leq I_c(B,c)$ тогда и только тогда, когда (по индуктивной гипотезе) (1) для всяких b и c из $\mathcal{N}$, если $R_{Th}a^{*}bc$ и $B \in b$, $B \in c$, то $b < c$. Нам остается показать, что это имеет место тогда и только тогда, когда (2) $\mathbf{F}B \in a$.

В исчислении Th-теорий $R_{Th}a^{*}bc$ означает $\urcorner a \supseteq b \mapsto c$. Следовательно, (2) влечет (1), поскольку $b \vee c = c$ (где $b \vee c =_{\text{def}} (b \mapsto c) \mapsto c$) отражает условие $I_c(B,b) \leq I_c(B,c)$, что означает, что $b \leq c$ и $b \supseteq c$. Но это как раз и есть условие $b < c$ согласно лемме 4.4.

Чтобы доказать, что (1) влечет (2), предположим, что $\mathbf{F}B \notin a$. Необходимо показать, что существуют такие b и c в $\mathcal{N}$, что $R_{Th}a^{*}bc$, $B \in b$, $B \in c$ и не имеет место $b < c$; тогда по контрапозиции мы получаем, что (1) влечет (2).

Если $\mathbf{F}B \notin a$, то мы получаем $\neg\mathbf{F}B \in \urcorner a$ в соответствии с определением $\urcorner$. Соответственно мы получаем из $\neg\mathbf{F}B \in \urcorner a$, что $\neg\mathbf{FF}B \in \urcorner a$ (ввиду Th-доказуемости $\neg\mathbf{F}B \to \neg\mathbf{FF}B$). Тот факт, что

$\urcorner a$ является *Th*-теорией, приводит к тому, что $\neg \mathbf{F}B \rightarrow \neg \mathbf{FF}B \in \urcorner a$. Если мы теперь положим, что $|\neg \mathbf{F}B|$, $|\neg \mathbf{FF}B|$ будут множествами формул, являющимися *Th*-следствиями $\neg \mathbf{F}B$ и $\neg \mathbf{FF}B$ соответственно, то $\urcorner a \supseteq |\neg \mathbf{F}B| \mapsto |\neg \mathbf{FF}B|$, и если мы возьмем такие *Th*-теории b и c, что $|\neg \mathbf{F}B| \subseteq b$, $|\neg \mathbf{FF}B| \subseteq c$, то $\urcorner a \supseteq b \mapsto c$ (ясно, что $|\neg \mathbf{F}B|$ и $|\neg \mathbf{FF}B|$ являются *Th*-теориями). Но в случае $b < c$ нам требуется, чтобы $\neg \mathbf{FF}B \rightarrow \neg \mathbf{F}B$ были *Th*-теоремами, а это не так (это равносильно $\mathbf{F}B \rightarrow \mathbf{FF}B$, что выводит нас за рамки $Ł_{\aleph_0}F$). Отсюда по контрапозиции следует, что (2) влечет (1). ▪

Окончательно мы получаем следующую теорему

Теорема 4.2.12. *Система $Ł_{\aleph_0}F$ полна по отношению к данной семантике в том смысле, что все LF-истинно-значимые формулы являются теоремами.*

Доказательство. Аргументация с соответствующими изменениями следует аргументации из [Vasyukov 1993, p.156]. ▪

4.3. Квантовая логика времени как бимодальное расширение бесконечнозначной логики Лукасевича

Перейдем теперь к построению квантовой логики времени, основываясь на системе логики времени с оператором **F**, построенной в предыдущем параграфе. С этой целью добавим к аксиоматике системы ŁQ аксиомы A5, A6, правило R2 и две новых аксиомы:

A7. $Q\mathbf{F}A \rightarrow \mathbf{F}QA$

A8. $A \wedge Q(A \rightarrow \mathbf{F}A) \rightarrow QA$

Обозначим полученную систему квантовой логики времени как ŁS. Нетрудно видеть, что ŁS-фрейм для данной системы совпадает с Ł-фреймом как и в случае ŁQ- и ŁF-фреймов. Поэтому мы сразу переходим к доказательству следующей леммы:

Лемма 4.3.1. *Если A есть аксиома ŁS, то $I(A,O) = 1$, т.е. все аксиомы истинно верифицируемы.*

Доказательство. Нам нужно рассмотреть лишь случаи аксиом A7 и A8.

Предположим, что QFA достоверна в точке a, что означает, что $I(QFA,a) = 1$ (ввиду двузначности оператора Q) тогда и только тогда, когда для всякого x из K справедливо $(a < x \Rightarrow \exists y \in K(x < y \Rightarrow I(FA,y) \neq 0))$. Далее, $I(FA,y) \neq 0$ в силу определения дает нам $I(FA,y) = \min\{I(A,b)\}$ тогда и только тогда, когда для любых b,c мы имеем $Ry^*bc \Rightarrow I(A,b) \leq I(A,c)$. Так как это означает, что $I(A,b) \neq 0$ и $I(A,c) \neq 0$, то ввиду определения оператора Q это, в частности, дает нам, что $I(QA,b) = 1$ и $I(QA,c) = 1$. Но Ry^*bc позволяет заключить, что $I(FQA,y) = 1$. Поскольку у нас было, по допущению, $a < y$ (учитывая транзитивность и рефлексивность $<$) и $I(QFA,a) = 1$, то по определению импликации мы получаем, что $I(QFA \to FQA, O) = 1$.

В случае A8 предположение о том, что $A \wedge Q(A \to FA)$ достоверна в некоторой точке a, приводит к тому, что истинностное значение на матрице определяется как минимум истинностных значений A и $Q(A \to FA)$. Но в этом случае оно будет совпадать со значением A, поскольку $(A \to FA)$ дает 1 в силу свойств Q-оператора. Тогда, если d — точка, в которой $I(A,d) \neq 0$, то $I(QA,d) = 1$ и, следовательно, $I(A \wedge Q(A \to FA) \to QA, O) = 1$. ▪

Формулировка следующей леммы получается объединением соответствующих формулировок для бесконечнозначной логики направленного времени и логики Дишканта.

Лемма 4.3.2. *$Th(a,v)$ замкнута по следованию при v, по модус понеис и по B6-B9,R1, R2. $Th(v)$ замкнута по R1, R2.*

Доказательство получается объединением соответствующих лемм. ▪

Теорему непротиворечивости получаем в следующем виде:

Теорема 4.3.3. *Регулярная теория $Th(v)$ формул, верифицируемых при v для всякого LS-фрейма и всякой оценки, содержит все теоремы ŁS. Рассмотренная выше семантика адекватна ŁS в том смысле, что все теоремы ŁS LS-значимы.*

Доказательство. Ясно, что *LS*-фрейм ничем существенным не отличается от *L*—фрейма. Такая, как в приведенной формулировке, теория $Th(v)$ по лемме 4.3.1 содержит все аксиомы *ŁS*, а по лемме 4.3.2 замкнута по модус поненс и *B6-B9,R1, R2.* Поэтому все теоремы *ŁS* принадлежат для произвольной v и произвольного *LS*-фрейма к $Th(v)$. Следовательно, некоторая

$ŁS$—теорема принадлежит ко всякой такой $Th(v)$, в которой она $ŁS$—значима, что и заканчивает доказательство. ▪

Определение квантовой темпоральной алгебры Вайсберга, представляющей собой очевидное расширение понятия алгебры Вайсберга, будет выглядеть следующим образом.

Определение. Пусть $W = \langle A, \mapsto, \urcorner, 1\rangle$ будет алгебра Вайсберга, список аксиом которой выглядит следующим образом:

(1.1) $1 \mapsto x = x$

(1.2) $(x \mapsto y) \mapsto ((y \mapsto z) \mapsto (x \mapsto z)) = 1$

(1.3) $(x \mapsto y) \mapsto y = (y \mapsto x) \mapsto x$

(1.4) $(\urcorner x \mapsto \urcorner y) = (y \mapsto x)$

Тогда $QWF = \langle A, \mapsto, \urcorner, F, \mathrm{Q}, 1\rangle$ будет *квантовой темпоральной алгеброй Вайсберга*, получаемой посредством добавления к аксиомам W следующих аксиом:

(1.5) $F(x \mapsto y) \leq (Fx \mapsto Fy)$

(1.6) $FFx \leq Fx$

(1.7) $\mathrm{Q}x \leq x$

(1.8) $\mathrm{Q}(x \mapsto y) = (\mathrm{Q}x \mapsto \mathrm{Q}y)$

(1.9) $\mathrm{QQ}x = \mathrm{Q}x$

(1.10) $\mathrm{Q}\urcorner x = \urcorner \mathrm{Q}x$

(1.11) $\mathrm{Q}Fx \leq F\mathrm{Q}x$

(1.12) $x \wedge \mathrm{Q}(x \mapsto Fx) \leq \mathrm{Q}x$

где $x \wedge y = \urcorner((\urcorner x \mapsto \urcorner y) \mapsto \urcorner y)$.

Будем говорить, что $\mathcal{F}$ представляет собой импликативный фильтр в QWF, если $\mathcal{F}$ есть импликативный фильтр в W и всегда, когда $x \in \mathcal{F}$, то $\mathrm{Q}x, Fx \in \mathcal{F}$. Аналогично понятию алгебраического импликативного фильтра темпоральной алгебры Вайсберга мы вводим понятие QLF-теории.

Определение. Всякое собственное непротиворечивое подмножество Th формул $ŁS$ является LS-теорией, если всегда, (i) когда $A \in Th$ и $A \rightarrow B$ есть теорема $ŁS$, то $B \in Th$ и (ii) когда $A \in Th$, то $\mathrm{Q}A, \mathrm{G}A \in Th$. То свойство, что LS-теория содержит все аксиомы и теоремы $ŁS$, будет называться регулярностью. LS-теория называется простой LS-теорией, если из $A \vee B \in Th$ следует, что $A \in Th$ или $B \in Th$.

Понятие LS-теории связано с $Th(a,v)$ следующим образом:

Лемма 4.3.4. *Пусть v будет оценкой в LS-фрейме и $a \in K$.*

Тогда теория $Th(a,v)$, определяемая v в a, будет LS-теорией и, более того, простой LS-теорией. Если $O < a$, то $Th(a,v)$ является регулярной.

Доказательство. Аргументация та же, что и в случае логики Дишканта и бесонечнозначной логики времени. ▪

Исчисление LS-теорий представляет собой структуру $\mathcal{QLF}$ = $\langle H, \supseteq, \rightarrowtail, \urcorner, F, Q, 1\rangle$, где $\langle H, \supseteq, \rightarrowtail, \urcorner, 1\rangle$ есть исчисление L-теорий, а F и Q были ранее определены следующим образом:

$\forall a \in H\,(Qa = \{A\colon QA \in a\})$;

$\forall a \in H\,(Fa = \{A\colon FA \in a\})$.

Лемма 4.3.5. *Исчисление $\mathcal{QLF}$ LS-теорий является квантовой темпоральной алгеброй Вайсберга, т.е. алгеброй Вайсберга с Q,F-операторами и аксиомами (1.5) — (1.12).*

Доказательство. Остается проверить аксиомы (1.11)-(1.12). Если $A \in QFa$, то $QFA \in a$ согласно определению F- и Q-оператора. Поскольку $QFA \to FQA$ представляет собой аксиому $ŁS$, то $QFa \leq FQa$ по определению LS-теории.

В случае (1.12), если $A \in a \wedge Q(a \rightarrowtail Fa)$, то $A \in a$ и $A \in Q(a \rightarrowtail Fa)$. По правилу вывода в системе Дишканта получаем $QA \in a$ и $A \in Qa$. Отсюда получаем $A \to A \in a \wedge Q(a \rightarrowtail Fa) \rightarrowtail Qa = 1$. ▪

Лемма 4.3.6. *Для регулярной LS-теории Th структура$_{Th}$ = $\langle H_{Th}, \supseteq, \rightarrowtail, \urcorner, F, Q, 1_{Th}\rangle$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{QLF}$ ⅼ*

Доказательство. H_{Th} замкнута по F, Q. Остальное очевидно. ▪

Лемма 4.3.7. *Для данных Th, v_c и $\mathcal{N}$ $=\langle O_{Th}, H_{Th}, R_{Th}, {}^{*}\rangle$ пусть I_c будет интерпретацией в LS-фрейме, ассоциированной с Th-канонической оценкой v_c. Тогда для каждой формулы A и для каждого a в подобном LS-фрейме $I_c(A,a) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $A \in a$.*

Доказательство. Проводится индукцией по длине формул. ▪

Окончательно мы получаем следующую теорему

Теорема 4.3.8. *Система $ŁS$ полна по отношению к данной семантике в том смысле, что все LS-истинно-значимые формулы являются теоремами.*

Доказательство. Проводится путем объединения доказательств для случаев логики Дишканта и бесконечнозначной логики времени. ▪

Глава пятая
От семантики к синтаксису: квантовая логика наблюдаемых

5.1. Квантовая логика наблюдаемых как обратная задача семантики

Вначале уточним некоторые понятия. Начнем с понятия логико-алгебраического подхода. Предметом изучения в рамках данного подхода служат пропозициональные исчисления и алгебры наблюдаемых, которыми оперируют физические теории – такова обычная формулировка. При этом в литературе по квантовой логике сложилась ситуация, когда квантовой логикой называют как некоторое логическое исчисление, так и алгебраическую структуру - обычно ортомодулярную решетку.

Но если для соответствующего квантовологического исчисления почти всегда можно перейти к алгебре (например, к алгебре Линденбаума-Тарского данного исчисления), то обратная процедура далеко не всегда осуществима: общепринятого метода для подобного перехода не существует. Следовательно, с логической точки зрения, единым логико-алгебраический подход можно считать лишь условно: логическая часть всегда алгебраична, алгебраическая же часть далеко не всегда эквивалентна логической.

Подобная ситуация обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, далеко не всякая логическая теория аксиоматизируема, а во-вторых, алгебры наблюдаемых – термин, понимаемый (в принципе) по-разному. Алгебры наблюдаемых, с которыми обычно имеют дело физики при алгебраическом подходе (в отличие от логико-алгебраического подхода), в квантовой теории отнюдь не сводятся к ортомодулярным решеткам, а представляют собой гораздо более сложные структуры – так называемые операторные алгебры (см., например, [Брателли Робинсон 1982], [Эмх 1976]).

Помимо этого, соотношение логики и алгебры в рамках логико-алгебраического подхода имеет еще один аспект, связанный с проблемой, которую можно условно назвать проблемой прямой и обратной задачи логической семантики. Суть ее в следующем. Прямая задача семантики в математической логике сводится к поискам какой-нибудь логической семантики для готового синтаксиса некоторой формально построенной теории. Так, например, семантика возможных миров была вызвана к жизни проблемами модальных логик, для интуиционистской логики была построена топологическая семантика, для многозначных логик – *T*-*F*-семантика и т.д. Обратная же задача логической семантики – это построение некоторой формальной системы, ее синтаксиса по имеющейся (неформальной в общем случае) системе, трактуемой в данном случае как некоторая готовая семантика. В сущности, квантовая логика и представляет собой пример решения подобной задачи.

При таком определении возникает искушение рассматривать алгебраическую формулировку квантовой теории как не доведенную до конца обратную задачу семантики, т.е. лишь как исходный пункт для реконструкции синтаксической формулировки. Но этому препятстствуют многие обстоятельства. В частности, как уже говорилось, далеко не всякая логика конечно аксиоматизируема, поэтому не всегда обратная задача вообще имеет решение. Помимо этого само понятие аксиоматизируемости понимается в физике и логике по-разному.

Так, для физиков построения квантовой механики, выполненные Дираком и фон Нейманом, являются примером аксиоматической теории, в то время как философы расценивают их лишь как попытку гипотетико-дедуктивного подхода, противопоставляя им системы квантовой логики, которые они квалифицируют как переход к категорически-дедуктивному подходу [Алексеев и др. 1984, с.233-234].

Что же касается неаксиоматизируемости, то в некоторых случаях она обусловлена использованием, или стремлением использовать, классические логические связки и методы аксиоматизации. В то же время переход к неклассическим методам и связкам позволяет обойти возникающие трудности, хотя и порождает новые проблемы, особенно проблему логического обоснования необходимости подобного перехода. В сущности, многие системы квантовой логики и обязаны своим существованием использованию неклассических связок, что и оставляет до сих пор открытым вопрос: логики ли они? Проблема квантовой импликации в этом случае особенно показательна.

Но даже если стать на точку зрения сторонников неклассических методов, то сложность реконструкции синтаксической системы от этого не уменьшается, и не в последнюю очередь в силу отмеченного уже отсутствия метода подобной реконструкции.

Заметим, что под высказыванием квантовой логики обычно понимают наблюдаемые (проекционные операторы), термин «пропозиция» для которых оправдывается тем, что в состояниях с нулевой дисперсией наблюдаемые, удовлетворяющие соотношению $P^2 = P$, принимают значения 0 и 1, т.е. их спектр содержит ровно две точки: 0 и 1. В сущности, эта двузначность и явилась основой аналогии с пропозициональным исчислением обычной логики. Возникает вопрос: нельзя ли провести аналогию между наблюдаемыми с более сложным спектром и многозначными логиками?

Если стремиться к максимальности описания, то следовало бы рассматривать наблюдаемые со спектром самого общего вида, т.е. подмножествами действительной числовой оси. В таком случае главным препятствием послужило бы то обстоятельство, что область истинности многозначных логик обычно представляет собой подмножество интервала [0,1] (или весь интервал в случае бесконечнозначной логики Лукасевича $Ł_{\aleph_0}$). Однако, как мы знаем (см. [Vasyukov 1993]), $Ł_{\aleph_0}$ имеет также модель, использующую дискретную матрицу Карпенко [Карпенко 1985], порядковый тип которой есть $\omega+\omega^*$. Поскольку булева алгебра вложима в MV-алгебру, а алгебра высказываний квантовой логики (ортомодулярная решетка) вложима, согласно формулировке алгебраического подхода в квантовой механике, в алгебру наблюдаемых со спектром любого вида, то следует ожидать, что синтаксически подобному вложению соответствует выполнимость аксиом и теорем какого-нибудь квантового пропозиционального исчисления в соответствующем «спектрально-многозначном» исчислении наблюдаемых, подобно тому, как сохраняется истинность двузначных высказываний в логике $Ł_{\aleph_0}$.

Сформулируем задачу: построить синтаксическую систему, соответствующую алгебраической структуре квантовой теории, рассматриваемой в качестве алгебраической семантики. Поскольку речь йдет об алгебре наблюдаемых с произвольным спектром, в отличие от квантового пропозиционального исчисления, где спектр двузначен, в дальнейшем искомая синтаксическая формулировка подобной системы будет называться квантовой логикой наблюдаемых и обозначаться как QLO.

Что побуждает к подобной постановке вопроса? В первую очередь недовольство физиков системами квантовой логики: с их точки зрения они недостаточно математичны и чересчур абстрактны по сравнению с математическим аппаратом работающих физиков. А он достаточно разнообразен: C*-алгебры, алгебры фон Неймана, группы симметрии, представления и т.п. Поэтому хотя квантовая пропозициональная логика и позволяет решать вопросы обоснования квантовой теории, ее полноты, проблемы скрытых параметров и т.п. вопросы, но физикам квантовая логика высказываний предоставляет, по их мнению, слишком мало возможностей по сравнению с алгебраическим подходом. Попытка же, например, К.Пирона перестроить квантовую теорию на фундаменте квантовой логики провалилась, и не в последнюю очередь из-за дефектов принятого им квантовологического аппарата.

Существует и чисто логический интерес: будучи построенной, система QLO была бы достаточно нестандартной в качестве системы многозначной логики. Это связано, конечно, в первую очередь с тем, что область ее значений истинности – действительная числовая ось. Но кроме того, ее алгебра должна представлять собой алгебру наблюдаемых, а это означает, что она должна иметь сложную алгебраическую структуру, например, не сводиться ни к какой разновидности решеток, быть банаховым пространством относительно индуцированной на нем естественной нормы и т.д.

Исходным положением алгебраического подхода служит следующая аксиома:

Всякой физической системе Σ можно поставить в соответствие упорядоченную тройку $(\mathfrak{R},\mathfrak{C},\langle;\rangle)$, образованную множеством $\mathfrak{R}$ всех ее наблюдаемых, множеством $\mathfrak{C}$ всех ее состояний и отображение $\langle;\rangle$, которое с каждой парой (A,φ) из $(\mathfrak{R},\mathfrak{C})$ связывает действительную величину $\langle\varphi;A\rangle$. Эту величину мы интерпретируем как среднее значение наблюдаемой A, когда система находится в состоянии φ [Эмх 1976, с.55].

Что можно сказать по поводу наблюдаемых, состояний и средних значений наблюдаемой в некотором состоянии с точки зрения логики? Интуитивно под состоянием физической системы в физике понимают всю совокупность сведений о средних значениях наблюдаемых рассматриваемой системы. Но нечто подобное можно встретить сегодня и в логике. Таковы, например, понятия эпистемического состояния у Н. Белнапа [Белнап Стил 1981, с.241]. Приведем соответствующие определения.

Сетапом называется отображение множества всех атомарных формул во множество значений истинности (у Белнапа рассматривается четырехзначная логика). Пусть S – множество всех сетапов. Эпистемическим состоянием называется непустая совокупность сетапов, т.е. непустое подмножество S. Обозначим множество всех эпистемических состояний через E. Значение некоторого предложения A в эпистемическом состоянии определяется посредством пересечения всех значений предложения в отдельных состояниях:

$E(A) = \cap\{s(A)\colon s\in E\},\ s\in S$

(у Белнапа берется решеточное пересечение).

Если проводить аналогию между эпистемическими состояниями, значениями некоторого предложения и самим предложением, с одной стороны, и физическими состояниями, функцией ⟨;⟩ и наблюдаемой – с другой, то нетрудно видеть, что ввиду отсутствия дисперсии сетап можно отождествить с единичным измерением всех наблюдаемых системы, эпистемическое состояние – с последовательностью независимых пробных измерений над системами, приготовленными одним и тем же способом, а значение предложения A – со средним значением наблюдаемой A в состоянии φ, т.е. с величиной $\langle A;\varphi\rangle$. В последнем случае процедура нахождения пересечения становится аналогом нахождения среднего значения, что, конечно, следует рассматривать как следствие приблизительности аналогии.

Как ни спекулятивна подобная аналогия, но ее можно продолжить. Так, если естественным образом распространить сетапы не только на атомарные формулы, но и на любые формулы, то тогда сетап можно рассматривать как оценку в некоторой точке множества возможных миров, а совокупностью этих оценок характеризовать данный мир как некоторое эпистемическое состояние, не определяя какой-либо операции на оценках значения формулы A в данной точке, либо рассматривая их объединение, поскольку в двузначном случае речь идет лишь о том, чтобы ни при каком оценивании формула не была бы ложной. Отсюда транзитивно можно получить параллель с физическими состояниями: оценка - пробное измерение, возможный мир — физическое состояние, значение формулы в точке фрейма – среднее значение наблюдаемой в данном состоянии.

Если еще раз обратиться к системе квантовой ортологики Р. Гольдблатта [Goldblatt 1974], то нетрудно видеть, что ее семантика представляет собой семантику типа Монтегю, так как каждой формуле в ней сопоставляется некоторое подмножество, на которой она выполнима. Поскольку высказывание, как уже ранее говорилось, представляет собой наблюдаемую с двухточечным спектром, то в рамках рассматриваемой аналогии можно было бы рассматривать множество ортомодели как аналог множества состояний. В таком случае оценка сопоставляет каждому высказыванию (пропозиции) множество состояний, в которых измерение приводит к значению 1, а ортогоальное ему множество описывает множество состояний, в которых измерение дает среднее значение 0. Если объединение этих множеств не исчерпывает модельное множество, то его дополнение представляет собой множество состояний, в которых наблюдаемая (пропозиция) не существует.

Продолжая аналогию дальше, можно было бы попытаться перейти от квантовых пропозиций к наблюдаемым. Но в этом случае следовало бы в качестве значений истинности рассматривать такие подмножества модельного множества, т.е. множества состояний, в которых наблюдаемая принимает значения, отличные от 0 и 1. Правда в этом случае возникает проблема отрицания: какое отношение следует поставить на место ортогональности?

Вернемся вновь к аксиомам алгебраического подхода. В силу 2-й и 3-й аксиом [Эмх 1976, с.56] множество всех наблюдаемых $\mathfrak{R}$ системы Σ наделяется структурой действительного векторного пространства. Третье из положений алгебраического подхода гласит:

1) В $\mathfrak{R}$ существуют два элемента O и I, такие, что для всех $\varphi\in\mathfrak{C}$ выполняется равенства $\langle\varphi;O\rangle = 0$ и $\langle\varphi; I\rangle = 1$.

2) Для любой наблюдаемой $A\in\mathfrak{R}$ и любой действительной величины λ существует элемент $\lambda A\in\mathfrak{R}$, такой, что $\langle\varphi;\lambda A\rangle=\lambda\langle\varphi;A\rangle$ для всех $\varphi\in\mathfrak{C}$.

3) Для любой пары наблюдаемых A и B из $\mathfrak{R}$ существует элемент $(A + B)\in\mathfrak{R}$, такой, что $\langle\varphi;A + B\rangle = \langle\varphi;A\rangle + \langle\varphi;B\rangle$ для всех $\varphi\in\mathfrak{C}$.

Как можно было бы интерпретировать эту аксиому? Поскольку все эти операции задаются на средних значениях наблюдаемых в каком-либо состоянии, то согласно проведенной выше аналогии они фактически определяются на значениях истинности, т.е. их следует определять как операции на истинностной матрице для QLO.

Что касается операции +, то ее, по-видимому, можно расценивать как аналог дизъюнкции, поскольку она действительно для двух наблюдаемых определяет их некий максимум – сумму, что не расходится с обычным употреблением в многозначной логике. Сложнее обстоит дело с определением операции умножения на действительную величину. Воспользуемся для ее определения понятием J–функции. Обычно она определяется следующим образом:

$$J_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \alpha \\ 0, & \text{если } x \neq \alpha \end{cases}$$

где α принадлежит области значений истинности. Но если переформулировать ее определение как $J_\alpha(x) = \alpha x$, то нетрудно убедиться, что это дает требуемый результат, хотя и довольно необычно на первый взгляд.

Но трудности на этом не кончаются. 6-я аксиома алгебраического подхода требует существования симметризованного произведения двух наблюдаемых, причем для значений наблюдаемых требуется, чтобы $\langle\varphi;A\circ B\rangle = \langle\varphi;A\rangle\,\langle\varphi;B\rangle$ для всех $\varphi\in\mathfrak{C}_A\cap\mathfrak{C}_B$ (здесь $\mathfrak{C}_A$ – множество всех состояний с нулевой дисперсией для наблюдаемой A). Ясно, что требуется ввести некоторую операцию на истинностной матрице, ибо сконструировать умножение наблюдаемых из их сложения не удастся. Если определить операцию умножения на матрице как конъюнкцию, т.е. $(x)\wedge(y) = xy$, то единственным оправданием для введения подобного определения послужило бы то обстоятельство, что на интервале $[0,1]$ подобная операция действительно дает некоторый минимум для двух наблюдаемых – их произведение, которое будет меньше любого из сомножителей.

Остался нерешенным еще один из главных вопросов - определение отрицания. В случае квантовых пропозиций ввиду двузначности их спектра определение очевидно. Случай многозначного спектра подобной очевидности не допускает. На помощь приходят алгебраические свойства сложения наблюдаемых.

Дело в том, что в случае действительного пространства его элементы относительно операции + образуют абелеву группу. Но в таком случае для любой наблюдаемой A существует обратная наблюдаемая - A, что для значений наблюдаемых в некотором состоянии дает $\langle\varphi;-A\rangle = -\langle\varphi;A\rangle$ и, кроме того, $--A = A$. Но это наталкивает на мысль о введении на истинностной матрице операции отрицания, определяя ее как $\neg(x) = -x$.

Ранее уже был задан вопрос: какое отношение в QLO следует поставить на место ортогональности? По-видимому, принятие такого определения матричного отрицания сохраняет ортогональность, но придает ей частичный характер, ибо в силу единственности значения наблюдаемой в некотором состоянии об ортогональности на модели типа моделей квантовой ортологики можно говорить лишь для тех подмножеств, на которых наблюдаемая имеет одинаковое значение, что очевидным образом не всегда будет иметь место.

Что касается элементов O и I, то если O можно сконструировать из элементов алгебры наблюдаемых или элементов истинностной матрицы (например, как $A - A$ или $\neg(x\vee\neg x)$), то для I, такой конструкции получить не удается. Дело в том, что относительно умножения элементы алгебры $\mathfrak{R}$ группы не образуют, что влечет отсутствие обязательного обратного элемента. На логической матрице эту трудности можно обойти путем введения константы 1 с помощью определения

$1(x) = 1$.

Остался невыясненным последний, и, пожалуй, наиболее трудный вопрос – что принимать в качестве выделенных значений на истинностной матрице. Конечно, определение операции отрицания сразу наводит на мысль о том, что в роли требуемого множества выделенных значений следует принять $\mathbb{R}^+$, т.е. действительную положительную числовую полуось. Поддержку подобному решению можно найти в том, что класс положительных элементов С*-алгебры, к которым при дальнейшем усложнении структуры с целью удовлетворения требований алгебраического подхода принадлежит и алгебра наблюдаемых $\mathfrak{R}$, действительно является самым важным (см. [Брателли Робинсон 1982, с.39]) в алгебраическом формализме.

Суммируем введенные определения. Истинностная матрица квантовой логики наблюдаемых представляет собой, в силу вышеизложенного, следующую структуру:

$\mathfrak{M}_{QLO} = \langle \mathbb{R}, \{\mathbb{R}^+\}, \neg, \vee, \wedge, J_\alpha, \mathbf{1} \rangle$

где для $x, y \in \mathbb{R}$ имеем:

$\neg(x) = -x;$

$(x) \vee (y) = x + y$

$(x) \wedge (y) = xy;$

$J_\alpha(x) = \alpha x;$

$\mathbf{1}(x) = 1.$

Отметим, что истинностная матрица QLO позволяет обойти следующую трудность. Дело в том, что в каждом состоянии φ для любой наблюдаемой A будут существовать наблюдаемые, определяемые относительно операций $+$, $\circ$ и умножения на некоторое действительное число, т.е. речь идет о замыкании множества $\{A\}$ относительно указанных операций. Тогда наряду с A в состоянии φ будет существовать и наблюдаемая $-A$, что дает нам $\langle \varphi; -A \rangle = -\langle \varphi; A \rangle$. Но чем же подобная наблюдаемая будет отличаться от отрицания A? Истинностная матрица позволяет классифицировать подобную наблюдаемую как определяемую на матрице посредством выражения $\neg\mathbf{1}(x) \wedge (x)$, совпадающим по результату с $\neg(x)$, но формально от него отличающимся.

5.2. QLO: синтаксис

Хотя теперь и имеется истинностная матрица для QLO, тем не менее, осуществить по ней прямую реконструкцию синтаксиса не удается, не прибегая к дополнительным аналогиям и гипотезам. Подобная ситуация, на самом деле, типична для многих логик. Так, например, ситуацию в случае непрерывной логики Σ, которую можно рассматривать как многозначную логику самого общего вида, Г.Кейслер и Ч.Чэн характеризовали следующим образом: «Мы считаем нужным отметить, что в то время как двузначная логика имеет развитую теорию средств выражения (т.е. синтаксис) со своими понятиями выводимости, доказуемости и аксиоматизируемости, для множества предложений Σ в случае произвольного пространства X значений истинности предложений такой теории, вообще говоря, нет.

Следовательно, имеется совершенно особая проблема построения синтаксиса для Σ, которая до настоящего времени совсем не исследовалась в общем случае» [Кейслер Чэн 1971, с.9].

В качестве первого шага будем рассматривать QLO как многозначное расширение квантовой ортологики Гольдблатта [Goldblatt 1974]. Многозначность при этом, как уже отмечалось выше, будет означать, что пропозициональные переменные будут представлять собой наблюдаемые с многозначным спектром, а не идемпотентные наблюдаемые, как это делается обычно. Квантовая ортологика представляет собой в терминологии Гольдблатта бинарную логику, т.е. систему, близкую к системе естественного вывода Генцена. С этой точки зрения логика рассматривается не как множество правильно построенных формул (ппф), но как семейство упорядоченных пар ппф, удовлетворяющих некоторым условиям замыкания, исходящих из того, что существование пары интуитивно означает выводимость B из A. Имея в виду подобную интерпретацию, вместо $\langle A,B\rangle \in \mathrm{L}$, где L - некоторая логика, будем писать $A \prec B$.

Примитивными терминами объектного языка QLO являются:

(i) счетное множество $\{P_i\colon i<\omega\}$ пропозициональных переменных;

(ii) связки $\neg, \vee, \wedge$;

(iii) J-функции и константа **1**;

(iv) Скобки (и).

Множество ппф Φ конструируется из них обычным способом. Буквы A, B и т.д. используются как метапеременные над Φ. Использование скобок обычное. Конец доказательства, как и ранее, будет обозначаться знаком ▪.

Схемы аксиом QLO имеют следующий вид:

Ax1. $\neg(A\vee B) \prec\succ \neg A\vee\neg B$

Ax2. $A\prec\succ\neg\neg A$

Ax3. $A\wedge(B\wedge C)\prec\succ(A\wedge B)\wedge C$

Ax4. $A\vee(B\vee C)\prec\succ(A\vee B)\vee C$

Ax5. $A\wedge(B\vee C)\prec\succ(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

Ax6. $\neg(A\vee\neg A)\prec B\wedge B$

Ax7. $A\wedge\neg A\prec\neg(B\vee\neg B)$

Ax8. $1 \wedge A \prec\succ A$

Ax9. $J_0 A \prec\succ \neg(B \vee \neg B)$

Ax10. $J_1 A \prec\succ A$

Ax11. $J_\alpha(A \wedge B) \prec J_\alpha B \wedge A$

Ax12. $J_\alpha(A \vee B) \prec J_\alpha B \vee J_\alpha A$

Ax13. $\neg J_\alpha A \prec\succ J_\alpha \neg A$

Ax1 4. $J_{\alpha+\beta} A \prec\succ J_\alpha A \vee J_\beta A$

Ax15. $J_{\alpha\beta} A \prec\succ J_\alpha J_\beta A$

Правила вывода:

Rx1. $\dfrac{A \prec B}{\neg B \prec \neg A}$

Rx2. $\dfrac{A \prec B}{J_{|\alpha|} A \prec J_{|\alpha|} B}$

Rx3. $\dfrac{A \prec B \; B \prec C}{A \prec C}$

Rx4. $\dfrac{A \prec B \, C \prec D}{A \vee C \prec B \vee D}$

Rx5. $\dfrac{A \wedge A \prec B \, C \wedge C \prec D}{(A \wedge A) \wedge (C \wedge C) \prec B \wedge D}$

Принцип неопределенности:

Ax16. $\neg[(A \wedge B) \vee \neg(B \wedge A)]^2 \prec (A \vee \neg A)^2 \wedge (B \vee \neg B)^2$

(здесь A^2 означает $A \wedge A$).

Что касается принципа неопределенности, то данная аксиома занимает особое место. Аксиома алгебраического подхода, относящегося к случаю действительной алгебры наблюдаемых, гласит следующее [Эмх 1976, с.103]:

Каждой паре наблюдаемых A и B в $\mathfrak{R}$ соответствует наблюдаемая $C \in \mathfrak{R}$, устанавливающая нижнюю грань одновременной наблюдаемости A и B в том смысле, что

$\langle \varphi; (A - I\langle \varphi; A \rangle)^2 \rangle \langle \varphi; (B - I\langle \varphi; B \rangle)^2 \rangle \geq \langle \varphi; C \rangle^2 \; \forall \varphi \in \mathfrak{R}$.

Если попытаться теперь перенести эту аксиому непосредственно в QLO, то пришлось бы перейти к квантификации по высказываниям, что было бы крайне нежелательно. Для комплексной алгебры наблюдаемых принцип неопределенности в обычной форме выглядит следующим образом:

$\langle \varphi; (A - I\langle \varphi; A \rangle)^2 \rangle \langle \varphi; (B - I\langle \varphi; B \rangle)^2 \rangle \geq \langle \varphi; i[A, B] \rangle^2$.

Последняя формулировка более подходяща, так как в левой части, как и в правой, фигурируют одни и те же переменные, так что отпадает надобность в квантификации. Неясно лишь как быть с выражением $i[A,B]$. Однако при обычной формулировке [Эмх 1976, с.14] просто полагают

$C = i[A,B]$,

что практически нивелирует действительный и комплексный случаи. Но поскольку

$[A,B] = A \circ B - B \circ A$,

то возведение в квадрат дает

$\langle \varphi; i[A,B] \rangle^2 = \langle \varphi; - [A,B]^2 \rangle$.

Отсюда нетрудно перейти к требуемой формулировке аксиомы Ax16.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема, которую можно получить из Ax2 с помощью Rx3:

Ax0. $A \prec A$

Определение 5.2.1. Пусть QLO будет квантовой логикой наблюдаемых, а Г – непустое множество ппф. Ппф A QLO-*следует* из Г, $\Gamma \prec A$, если существует $B_1,\dots,B_n \in \Gamma$, такие, что

(а) либо $B_1 \vee \dots \vee B_n \prec A$;

(б) либо $(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \dots \wedge B_1) \prec A$;

(в) либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$, $i = 1,2,\dots,n$.

Если A QLO-следует из $\neg(A \vee \neg A)$, то A QLO-*выводима* или является QLO–*теоремой*, что записывается как $\prec A$. Г является QLO–*совместимым*, если существует хотя бы одна ппф, которая не QLO–следует из Г, в противном случае Г является QLO–*несовместимым* (можно показать, что Г является QLO-совместимым тогда и только тогда, когда не имеет места одновременно $\Gamma \prec A$ и $\Gamma \prec \neg A$). Г является QLO–*полным*, если оно QLO–совместимо и замкнуто относительно $\vee$, $\wedge$, J, и QLO–следования, т.е. тогда и только тогда, когда

(1) для некоторой ппф не имеет место $\Gamma \prec A$;

(2) если $A \in \Gamma$ и $A \prec B$, то $B \in \Gamma$:

(3) $A, B \in \Gamma$ влечет $A \wedge B, A \vee B \in \Gamma$;

(4) $A \in \Gamma$ влечет $J_{|\alpha|} A \in \Gamma$.

Лемма 5.2.2. *Если* $x \subseteq \Phi$, *где* Φ *– множество ппф, является* QLO–*полным, тогда* *(i) $x \prec A$ тогда и только тогда, когда $A \in x$;*

(ii) $\neg(A \vee \neg A) \in x$ *для всех ппф* A.

Доказательство. (i) Поскольку по Ax0 $A \prec A$, достаточность следует из определения QLO–следования. Необходимость следует из 5.2.1(2), (3), (4).

(ii) По определению x непусто, следовательно, существует $B \in x$. Но по 5.2.1(4) $J_0 B \in x$, а отсюда по Ax8 и 5.2.1(2) получаем требуемое. ▪

QLO-полные множества и QLO-следование связывает между собой следующая версия леммы Линденбаума:

Теорема 5.2.3. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда A принадлежит каждому QLO–полному расширению* Γ.

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существуют $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что либо $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$ либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$ $(1 \le i \le n)$. Если x является QLO–полным и $\Gamma \subseteq x$, то $B_1, \ldots, B_n \in x$. Применяя 5.2.1(3),(4) и затем 5.2.1(2), получаем $A \in x$.

Обратно, пусть A не QLO-следует из Γ. Пусть $x = \{B : \Gamma \prec B\}$. По Ax0 имеем $\Gamma \subseteq x$, и по предположению $A \notin x$. Доказательство будет завершено, если удастся показать, что x является QLO–полным. Положим $B \in x$ и $B \prec C$, тогда существует $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec B$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec B$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec B$ $(1 \le i \le n)$. Отсюда по Rx3 получаем $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec C$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec C$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec C$, следовательно, $\Gamma \prec C$, т.е. $C \in x$.

С другой стороны, если $B, C \in x$, то существуют $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec B$ и $C_1 \vee \ldots \vee C_n \prec C$. Тогда по Rx4 получаем $B_1 \vee \ldots \vee B_n \vee C_1 \vee \ldots \vee C_n \prec B \vee C$. Отсюда $\Gamma \prec B \vee C$, и следовательно, $B \vee C \in x$.

Далее, если $B \in x$, то существует $B' \in \Gamma$, такая, что $J_{|\alpha'|} B' \prec B$. Но по Rx2 получаем $J_{|\beta|} J_{|\alpha'|} B' \prec J_{|\beta|} B$, и по Ax15 получаем $J_{|\beta\alpha'|} B' \prec J_{|\beta|} B$, следовательно, $\Gamma \prec J_{|\beta|} B \in x$.

Пусть теперь $B, C \in x$. Тогда существуют $B_1, \ldots, B_n$, $C_1, \ldots, C_n \in \Gamma$, такие, что $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec B$ и $(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \wedge (C_n \wedge \ldots \wedge C_1) \prec C$. Но тогда по Rx5 получаем $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \wedge (C_n \wedge \ldots \wedge C_1 \wedge B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec B \wedge C$. Следовательно, $\Gamma \prec B \wedge C$, $B \wedge C \in x$.

Отсюда заключаем, что x замкнуто относительно QLO–следования, конъюнкции, дизъюнкции и J–оператора. Поскольку $A \notin x$, то A не QLO-следует из x, поэтому x является QLO-совместимым, что и заканчивает доказательство теоремы. ▪

Теорема 5.2.4. *Если x является QLO–полным и $\neg A \notin x$, тогда существует QLO–полное множество y, такое, что $A \in y$, и для всех B либо $\neg B \notin x$, либо $B \notin y$.*

Доказательство. Положим $y = \{B\colon A \prec B\}$. По Ax0 $A \in y$. Пусть теперь $\neg B \in x$. Тогда $B \notin y$, иначе $A \prec B$, откуда $\neg B \prec \neg A$ по Rx1, откуда, в свою очередь, по 5.2.1(2), $\neg A \in x$, в противоположность предположению. Далее, по 5.2.2(ii) имеем $\neg(A \vee \neg A) \in x$. Согласно вышедоказанному, получаем $A \vee \neg A \notin y$. Действуя аналогично доказательству теоремы 5.2.3, можно показать, что y замкнуто относительно $\vee, \wedge; J$ и QLO–следованию. Тогда ввиду того, что $A \vee \neg A$ не QLO–следует из y, т.е. y является QLO–совместимым, получаем, что y является QLO–полным. ▪

Подводя некоторые итоги, следует отметить, что QLO также присущи некоторые черты, характерные для квантовой ортологики. Так, в QLO, как и в квантовой ортологике, доказательство леммы Линденбаума, не потребовало применения таких сильных методов, как, например, лемма Цорна, что для квантовой ортологики было отмечено как беспрецедентный случай для логических систем. Что касается понятия QLO-полных множеств, то с топологической точки зрения они представляют собой собственные фильтры, а не ультрафильтры, поскольку последнему мешает свойство 5.2.1(4). Это в свою очередь ведет к тому, что, как и для квантовой ортологики, для QLO нет необходимости в использовании какого-нибудь варианта аксиомы выбора, без чего нельзя было бы обойтись при доказательстве существования ультрафильтров. Если же учесть, что отрицание в QLO, согласно теореме 5.2.4 обладает такими же свойствами, что и отрицание в квантовой ортологике, то следует ожидать, что стоуново пространство QLO также является компактным пространством, аналогично стоунову пространству ортоструктуры.

Заслуживает внимания и следующее обстоятельство, связанное с определением QLO-полных множеств. 9-я аксиома алгебраического подхода гласит:

Алгебру $\mathfrak{R}$ можно отождествить с множеством всех самосопряженных элементов действительной или комплексной ассоциативной алгебры $\mathfrak{I}$ с инволюцией, удовлетворяющей следующим двум условиям [Эмх 1976, с.97]:

1) для каждого элемента $R \in \mathfrak{I}$ существует элемент $A \in \mathfrak{R}$, такой, что $R^*R = A^2$;

2) если $R^*R = O$, то $R = O$.

Но, как оказывается, требование о том, что $\mathfrak{R}$ можно было бы отождествить с множеством всех самосопряженных элементов алгебры с инволюцией $\mathfrak{I}$, с математической точки зрения заменяемо требованием, чтобы алгебры $\mathfrak{R}$ была обратимой в $\mathfrak{I}$. Это означает, что $\mathfrak{R}$ допускает следующее обобщение симметризованного произведения:

для любой конечной последовательности $\{A_i\}$ элементов алгебры $\mathfrak{R}$ элемент

$$\prod_{i=1}^{n} A_i + \prod_{i=n}^{1} A_i$$

также принадлежит $\mathfrak{R}$. Но если обратиться к определению QLO–полного множества, то подобную функцию, как нетрудно показать, выполняют 5.2.1(а), (б). Следовательно, можно показать, что аналог 9-й аксиомы проходит и для алгебры Линденбаума QLO, что важно по той причине, что позволяет свести комплексный и действительный случаи алгебры наблюдаемых к действительной подалгебре, а матрица QLO по определению действительна.

5.3. QLO: семантика

Прежде всего следует проверить, является ли алгебра, соответствующая QLO, алгеброй наблюдаемых, удовлетворяющих аксиоме алгебраического подхода в том виде, как они даны в [Эмх 1976].

Определение 5.3.1. Две ппф A и B эквивалентны, $A \sim B$, если $\vdash A \prec\succ B$.

Действительно, отношение $\sim$ рефлексивно по Ax0 и транзитивно по Rx3, и, очевидным образом, симметрично. Пусть теперь $P/_{\sim} = \{A\colon P\sim A\}$ и пусть $F = \{P/_{\sim}\colon P$ есть формула$\}$. Обозначая через $[A]$ множество $A/_{\sim}$, можно определить:

$[A] + [B] = [A\vee B]$

$[A] \circ [B] = [A\wedge B]$

$-[A] = [\neg A]$

$0 = [\neg(A\vee\neg A)]$

$1 = [1]$

$\alpha[A] = [J_{|\alpha|}A]$

Теорема 5.3.2. Структура $\mathcal{F}=\langle F,+,\circ,-,\alpha,0,1\rangle$, *где* $\alpha\in\mathbb{R}$, *является алгеброй (наблюдаемых), а* $\mathcal{F}= \langle F,+,-,\alpha,0\rangle$ *является векторным (линейным) пространством. 0 является тождеством относительно +, а* 1 *является тождеством относительно -.*

Доказательство. Коммутативность операции + получаем следующим способом. Согласно Ax10 получаем $\vdash A\prec\succ J_1A$ и $\vdash B\prec\succ J_1B$, а затем по Rx4 получаем $A\vee B\prec\succ J_1A\vee J_1B$. Но по Ax12 имеем $J_1A\vee J_1B\prec\succ J_1(A\vee B)$, и по Rx3,Ax10 получаем $\vdash A\vee B\prec\succ B\vee A$. Следовательно, $[A] + [B] = [B] + [A]$. Ассоциативность операции + получаем по Ax4.

В случае $[A] + 0$ путем использования Ax14, Ax9, Ax10 получаем $[A] + 0 = [A]$. Выполнимость аксиом произведения элементов на число очевидным образом следует из аксиом для J–операторов. Отсюда получаем, что $\langle F,+,-,\alpha,0\rangle$ является векторным пространством. Элементы $(-1)(-[A])$ и $1((-1)[A])$ совпадают вследствие аксиомы Ax13.

Далее, коммутативность операции $\circ$ получаем следующим образом. По Ax11 и Ax10 получаем $[J_1(A\wedge B)] = [J_1B\wedge A] = [J_1B] \circ [A] = [B] \circ [A]$ и $[J_1(A\wedge B)] = [A\wedge B] = [A] \circ [B]$, следовательно $[A] \circ [B] = [B] \circ [A]$. Ассоциативность следует из Ax3. Дистрибутивность + и $\circ$ определяет Ax5, а $1\circ[A] = [A]$ согласно Ax10. $1\circ 0 = 0$ согласно Ax10, а $1 + 0 = 1$ в силу вышедоказанного свойства 0. Таким образом, $\mathcal{F}$ является алгеброй (наблюдаемых). Нетрудно видеть, что введенные операции на классах эквивалентности не зависят от конкретных представителей и, следовательно, являются правильно определенными, т.е. не выводят за пределы $\mathcal{F}$.

Что касается упорядоченности на $\mathcal{F}$, то $[A] \leq [B]$ определяется как справедливость $A \prec B$ для всякого $A \in [A]$ и $B \in [B]$. Очевидным образом определенное так отношение порядка согласуется со 2-й аксиомой алгебраического подхода [Эмх 1976, с.56]. ▪

Перейдем теперь к определению моделей и фреймов для QLO. Нетрудно заметить, что приводимые ниже определения отношения ортогональности ничем не отличаются от случая квантовой ортологики.

Определение 5.3.3. QLO-моделью называется четверка $\mathfrak{M} = \langle X, \perp, \xi, v \rangle$, где

(i) $\langle X, \perp, \xi \rangle$ является квантовым фреймом из определения 2.2.3;

(ii) v является оценкой (функцией верификации), сопоставляющей действительное число каждой пропозициональной переменной и формуле QLO для каждой точки (каждого элемента) из X, т.е. $v{:}(\mathrm{S} \cup \Phi) \times X \to \mathbb{R}$, где S - множество пропозициональных переменных, Φ - множество ппф.

Обозначая множество $\{x \in X{:}\ v(A,x) = a\}$ как $\|A\|_a$, рекурсивно определяем значение формулы в QLO–модели следующим образом:

(1) $\|p_i\|_a = \{x \in X{:}\ v(p_i,x) = a\} \in \xi$;

(2) $\|A \vee B\|_a = \{x \in X{:}\ x \in \|A\|_b \cap \|B\|_c\ \&\ a = b + c\}$;

(3) $\|A \wedge B\|_a = \{x \in X{:}\ x \in \|A\|_b \cap \|B\|_c\ \&\ a = bc\}$;

(4) $\|\neg A\|_a = \{x \in X{:}\ x \perp \|A\|_{-a}\ \&\ v(\neg A,x) = a\}$;

(5) $\|J_{|\alpha|}A\|_a = \{x \in X{:}\ x \in \|A\|_b\ \&\ a = \alpha b\}$;

(6) $\|I\|_1 = X$, т.е. $v(I,x) = 1$ для всех $x \in X$.

Если Γ является непустым множеством ппф, тогда говорим, что Γ влечет A в x в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$: $\Gamma \models_x A$, тогда и только тогда, когда $\forall B \in \Gamma(v(B,x) \leq v(A,x))$, Γ $\mathfrak{M}$–влечет A, $\mathfrak{M}$: $\Gamma \models A$, тогда и только тогда, когда либо $\exists B \in \Gamma(x \notin \|B\|_{(-)})$, т.е. когда B не верифицирована в x (верифицируемость, а не истинность, поскольку имеем дело с многозначной истинностной матрицей), либо Γ влечет A во всех x в $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{I}$ является QLO–фреймом, то Γ $\mathfrak{I}$–влечет A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$: $\Gamma \models A$ для всех QLO–моделей $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{I}$. Если же $\wp$ является классом QLO–фреймов (т.е. квантовых фреймов), то Γ $\wp$–влечет A, $\wp$: $\mathfrak{I}$:$\Gamma \models A$, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$: $\Gamma \models A$ для всех $\mathfrak{I} \in \wp$. Класс $\wp$ детерминирует QLO тогда и только тогда, когда для всех $A,B \in \Phi$, $A \prec B$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $A \models B$. $\wp$ сильно детерминирует QLO тогда и только тогда, когда для всех Γ,A, $\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $\Gamma \models A$.

Если определить область значений формулы A как

$$\|A\| = \bigcup_{a \in \mathrm{R}} \|A\|_a ,$$

то, распространяя это определение на 5.3.3(1)-(5), в дальнейшем $\|p_i\|$, $\|A \vee B\|$, $\|A \wedge B\|$, $\|\neg A\|$, $\|J_{|\alpha|}A\|$ будут обозначать области значений соответствующих формул, а $\|A\|_{(-)}$ будет обозначать произвольное значение соответствующей формулы.

Лемма 5.3.4. Для любой QLO-модели $\mathfrak{M}$ и любой $A \in \Phi$, $\|A\|_{(-)} \in \xi$.

Доказательство. Получаем индукцией по длине A, используя 5.3.3. ▪

Теорема 5.3.5 (непротиворечивость QLO). *$\Gamma \prec A$ только, если Θ: $\Gamma \models A$, где Θ - класс всех QLO-фреймов.*

Доказательство. Сводится путем индукции по QLO-следованию к демонстрации того факта, что этот результат справедлив для Ax1-Ax16 и сохраняется при применении Rx1-Rx5. Приводим наименее очевидные случаи.

Ax2. Пусть $x \in \|A\|_a$. Тогда если $y \in \|\neg A\|_{-a}$, то по 5.3.3(4) $y \perp x$, откуда (симметричность) $x \perp y$. 5.3.3(4) вновь дает $x \in \|\neg\neg A\|_a$.

Пусть $x \in \|\neg\neg A\|_a$. Тогда $y \in \|\neg A\|_{-a}$ только если $x \perp y$, т.е. $y \perp \|A\|_a$ только если $x \perp y$. Но $\|A\|_a$ является *-замкнутым по 5.3.4, и, следовательно, $x \in \|A\|_a$.

Ax6. Нетрудно убедиться, что $v(\neg(A \vee \neg A),x) = 0$ для любой точки $x \in X$, и точно так же $v(A \vee \neg A,x) = 0$. Но если $x \in \|\neg(A \vee \neg A)\|_0$, то $y \in \|A \vee \neg A\|_0$ только если $x \perp y$. По 5.3.3(2) $y \in \|A\|_b \cap \|\neg A\|_c$ и $b + c = 0$, т.е. $c = -b$. Но тогда по 5.3.3(4) $y \perp y$, а это противоречит иррефлексивности $\perp$. Следовательно, ни для какого y ни в какой $\mathfrak{M}$ не имеет места $y \perp \|A \vee \neg A\|_0$, откуда по определению $x \in \|\neg(A \vee \neg A)\|_0$ для любого x. При этом для произвольного B $v(B \wedge B,x) \geq 0$ по 5.3.3(3).

Ax7. Пусть $x \in \|1 \wedge A\|_a$. Тогда $y \in \|1\|_1 \cap \|A\|_a$ по 5.3.3(3) и $v(1 \wedge A,x) = v(1,x)\ v(A,x)$. Но $v(1,x) = 1$ для любой точки $x \in X$ в силу определения константы 1 (см. 5.3.3(6)). Следовательно, $v(1 \wedge A,x) = v(A,x)$, откуда $\mathfrak{M}$: $1 \wedge A \models A$ и $\mathfrak{M}$: $A \models 1 \wedge A$ для любой A.

Ax11. Пусть $x \in \|J_\alpha(A \wedge B)\|_a$. Тогда по 5.3.3(5) $x \in \|A \wedge B\|_b$ и $a = \alpha b$. По 5.3.3(5) $x \in \|A\|_c \cap \|B\|_d$ и $b = cd$. Следовательно, $a = \alpha dc$. Но по 5.3.3(5) $x \in \|J_\alpha A\|_{\alpha c} \cap \|B\|_d$ и по 5.3.3(3) $x \in \|J_\alpha A \wedge B\|_{\alpha cd = a}$.

Ax13. Пусть $x \in \|A\|_a$. Тогда по 5.3.3(5) $x \in \|J_\alpha A\|_{\alpha a}$ и по 5.3.3(4) $y \in \|\neg J_\alpha A\|_{-\alpha a}$, только если $x \perp y$. Но тогда $y \in \|\neg A\|_{-a}$ ввиду $x \perp y$ и по 5.3.3(5) $y \in \|J_\alpha A\|_{-\alpha a}$.

Rx1. Предположим $\mathcal{M}$: $A \models B$ и пусть $x \in \|\neg B\|_{-a}$. Тогда $y \in \|A\|_b$ только если $y \in \|B\|_a$ (по индуктивному предположению), только если $x \perp y$. Это доказывает, что $x \in \|\neg A\|_{-b}$. Остальное очевидно. ▪

Определение 5.3.6. Если L является квантовой логикой наблюдаемых, то каноническая QLO–модель для L есть структура $\mathcal{M}_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L, v_L \rangle$, где:

(1) $X_L = \{x \subseteq \Phi$: x является QLO–полным множеством$\}$;

(2) $x \perp_L y$ тогда и только тогда, когда существует ппф A, такая, что $\neg A \in x$, $A \in y$;

(3) $\xi_L = \{|A|^L$: $A \in \Phi\}$, где $|A|^L = \{x \in X_L$: $A \in x\}$;

(4) v_L: $(\mathrm{S} \cup \Phi) \times X_L \to \mathbb{R}$.

Обозначая множество $\{x \in X_L$: $v(A,x) = a\}$ как $\|A\|^L{}_a$, получаем определения значений формул и областей значения в канонической модели $\mathcal{M}_L$ аналогично 5.3.3(1)-(6).

Лемма 5.3.7. $\mathcal{F}_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L \rangle$ является QLO–фреймом.

Доказательство. Пусть $x \in X_L$. Тогда для любой A либо не имеет места $\neg A, A \in x$, либо по Ax7 x будет QLO–несовместимой. Следовательно, $x \perp_L x$ не имеет места. Если $x \perp_L y$, то для некоторой ппф A имеем $\neg A \in x$, $A \in y$. Используя Ax2, приходим к заключению $\neg B \in y$, $B \in x$, где $B = \neg A$. Таким образом $x \perp_L y$. Следовательно, $\perp_L$ является отношением ортогональности. Проверим, является ли $\|A\|^L$ $*_L$-замкнутым. Предположим, что $x \notin \|A\|^L$, т.е. $A \notin x$. По Ax2 $\neg\neg A \notin x$, откуда по 5.2.4 существует $y \in X_L$, такой, что $x \perp_L y$ не имеет места и $\neg A \in y$. Тогда если $z \in \|A\|^L$, то $A \in z$ и, следовательно, $y \perp_L z$. Отсюда $y \perp_L \|A\|^L$ как и требовалось. Очевидным образом ξ_L будет замкнуто относительно пересечения (в силу свойств QLO–следования и QLO–полноты). ▪

Теорема 5.3.8 (фундаментальная теорема для QLO). *Для каждой ппф A и для всякого $x \in X$, $x \in \|A\|^L$ тогда и только тогда, когда $A \in x$.*

Доказательство. Доказывается индукцией по длине A. В случаях $A = B \vee C$, $A = B \wedge C$, $A = J_\alpha B$ нетрудно видеть, что из условия $B \vee C, B \wedge C, J_\alpha B \in x$ следует $B, C \in x$. Достаточно обратиться к 5.3.3(2),(3),(5). Конверсия следует из 5.2.1(3),(4).

Предположим теперь, что $A = \neg B$ и для B теорема выполнима. Пусть $\neg B \in x$. Тогда если $y \in \|B\|^{L}_{(-)}$, то по индуктивному предположению $B \in y$ и отсюда $x \perp_L y$. По 5.3.3(4) следует $x \in \|B\|^{L}_{(-)}$. С другой стороны, если $\neg B \notin x$, то согласно 5.2.4 существует $y \in X_L$, такой, что $B \in y$, откуда по индуктивному предположению $y \in \|B\|^{L}_{(-)}$, но $x \perp_L y$ не имеет места. По 5.3.3(4) приходим к выводу, что $x \notin \|B\|^{L}_{(-)}$. ▪

Следствие 5.3.9. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_L$:$\Gamma \models A$.*

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существует $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$ ($1 \leq i \leq n$). Если $x \in \|B\|^{L}_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, тогда по 5.3.8 $B_1,\ldots,B_n \in x$. По 5.2.1(2)-(4) следует, что $A \in x$, откуда $x \in \|A\|^{L}_{(-)}$.

Наоборот, если A не является QLO–выводимой из Γ, то по 5.2.3 существует $x \in X_L$, такой, что $\Gamma \subseteq x$ и $A \notin x$. Тогда по 5.3.8 $x \in \|B\|^{L}_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, но $x \notin \|A\|^{L}_{(-)}$. ▪

Теорема 5.3.10. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}_L$:$\Gamma \models A$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ будет произвольной QLO–моделью на $\mathcal{J}_L$; для каждого $i < \omega$, $\|p_i\|^{\mathfrak{M}} \in \xi_L$, тогда существует B_i, такая, что $\|p_i\|^{\mathfrak{M}}_{(\ )} = |B_i|^{L}_{(-)}$ ($|B_i|^{L}_{(-)}$ определяется как в 5.3.6) и $|B_i|^{L}_{(-)} = \|B_i\|^{L}_{(-)}$. Для любой ппф C пусть C' будет результатом подстановки B_i, вместо каждого вхождения p_i. Очевидным образом в Γ существуют $A_1,\ldots,A_n$, такие, что $A_1 \vee \ldots \vee A_n \prec A$, либо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} A_i \prec A$ ($1 \leq i \leq n$). Используя предложенную подстановку, получаем $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \prec A'$ и т.д. Тогда по 5.3.9 $\mathfrak{M}_L$: $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \models A'$, либо $\mathfrak{M}_L$: $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_n) \wedge (A'_n \wedge \ldots \wedge A'_1) \models A'$, либо $\mathfrak{M}_L$: $J_{|\alpha|} A'_i \models A'$. Но простой индукцией получаем, что $\|C\|^{\mathfrak{M}} = \|C'\|^{\mathfrak{M}}_L$; откуда $\mathfrak{M}_L$: $A_1 \vee \ldots \vee A_n \models A$, либо $\mathfrak{M}_L$: $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \models A$, либо $\mathfrak{M}_L$: $J_{|\alpha|} A_i \models A$, откуда $\mathfrak{M}$: $\Gamma \models A$. Поскольку все это выполнимо в любой модели $\mathfrak{M}$ на $\mathcal{J}_L$, то отсюда заключаем, что $\mathcal{J}_L$: $\Gamma \models A$. ▪

Следствие 5.3.11 (сильная полнота QLO). *Θ: $\Gamma \models A$ только если $\Gamma \prec A$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{J}_L$ является по 5.3.7 QLO-фреймом, то Θ содержит $\mathcal{J}_L$ в качестве элемента. Остальное очевидно. ▪

Таким образом, 5.3.11 устанавливает тот факт, что QLO сильно детерминирована классом всех QLO–фреймов.

Вернемся теперь к квантовым пропозициям, т.е. элементам алгебры наблюдаемых, удовлетворяющих соотношению $P^2 = P$. В состояниях с нулевой дисперсией их спектр содержит ровно две точки: 0 и 1. Докажем, что для пропозиций QLO–модели переходят в модели Гольдблатта для ортологики.

Теорема 5.3.12. *Для квантовых пропозиций QLO-модели переходят в квантовые ортомодели.*

Доказательство. Что касается отношения ортогональности в QLO-моделях, то оно такое же, как и в квантовых ортомоделях. Однако если для квантового фрейма необходима согласованность теоретико-множественного включения и ортогональности, то для QLO-фрейма в этом нет необходимости. В то же время подобное условие выполнимо в QLO-модели для двузначного спектра, поскольку в этом случае отрицание приводит к тому, что каждой формуле сопоставляется подмножество $Y \subseteq X$, в точках которого оценка формулы дает значение 1. Поскольку оценка теперь двузначна, то исчезает определение для J–операторов, а для конъюнкции значение определяется пересечением, причем дизъюнкция также исчезает. Отсюда переходим к определению значений формул в квантовых ортомоделях. ▪

Глава шестая
Расширения квантовой логики наблюдаемых

6.1. Нормированная квантовая логика наблюдаемых

При формулировке QLO остались неохваченными аспекты алгебраического подхода к теории квантовых систем, связанные с топологической структурой алгебры наблюдаемых. Как известно, с целью получения естественной топологии на алгебре наблюдаемых множество наблюдаемых наделяется структурой действительного банахова пространства относительно индуцированной на нем естественной нормы [Эмх 1976, с.72]. Вводимая при этом норма для любой наблюдаемой $A \in \mathfrak{R}$ совпадает с $\|A\| \equiv \sup_{\varphi \in \mathfrak{R}} |\langle \varphi; A \rangle|$

С феноменологической точки зрения при этом отмечается, что в действительности в лаборатории никогда не приходится иметь дело с наблюдаемой A, для которой матричный элемент $\langle \varphi; A \rangle$ не был бы конечным.

Если взглянуть на подобную ситуацию с точки зрения QLO, то последнее обстоятельство свидетельствует о том, что на матрице $\mathcal{M}_{\mathrm{QLO}}$ значения из области истинностных значений для какой-либо наблюдаемой всегда были бы конечны при переходе к логике наблюдаемых с нормой. Помимо этого норму любой наблюдаемой на $\mathcal{M}_{\mathrm{QLO}}$ легко можно отождествить с некоторым sup на $X \subseteq \mathbb{R}^{+}$, где X — множество истинностных значений наблюдаемой.

Аналог подобного явления можно обнаружить в многозначных логиках первого порядка. Так, например, Ч.Чэн [Chang 1982] при исследовании логики с положительными и отрицательными значениями истинности определяет на логической матрице следующую операцию. Для $x,y \in [-1,+1]$ и подмножества $X \subseteq [-1,+1]$

$$\exists(X) = \sup X.$$

Подобная же тенденция матричной интерпретации квантора существования как sup присуща и непрерывным логикам.

Исходя из этого, можно определить на $\mathfrak{M}_{\mathrm{QLO}}$ аналог нормы наблюдаемой как

$$\exists(X) = \sup |X|,$$

т.е. беря супремум по модулю истинностного значения. Обозначим подобную модифицированную матрицу как $\mathfrak{M}_{\mathrm{NQLO}}$. Можно попробовать с ее помощью реконструировать синтаксис логики наблюдаемых с нормой. Подобная система в дальнейшем будет называться нормированной квантовой логикой наблюдаемых и обозначаться как NQLO.

Следует учесть, что квантифицироваться должна любая наблюдаемая, поскольку переменная квантификации фигурирует только в неявном виде. Таким образом, квантор всегда будет писаться в виде $\exists u$, т.е. фактически подразумевается, что все наблюдаемые представляют собой предикаты от одной и той же переменной.

Аксиоматика нормированной квантовой логики наблюдаемых получается в результате добавления к аксиомам QLO следующих новых аксиом:

Ax17. $A \prec \exists u A$
Ax18. $\neg\exists u A \prec \exists u \neg A$
Ax19. $\exists u J_\alpha A \prec\succ J_\alpha \exists u A$
Ax20. $\exists \mathrm{u}(A \vee B) \prec\succ \exists u A \vee \exists u B$
Ax21. $\exists \mathrm{u}(A \wedge B) \prec\succ \exists u A \wedge \exists u B$
и правила вывода:

Rx6. $\dfrac{A \prec\succ B}{\exists u A \prec\succ \exists u B}$

Следует еще раз напомнить, что согласно 7-й аксиоме алгебраического подхода норма любого элемента алгебры наблюдаемых конечна, следовательно, $\sup |X| < \infty$, т.е. sup всегда существует и конечен.

Нетрудно видеть, что QLO-следование становится NQLO-следованием, т.е. они совпадают.

Определение 6.1.1. Непустое множество ппф Г является NQLO-полным, если

(i) Г является QLO-полным;

(ii) $A \in \Gamma$ влечет $\exists u A \in \Gamma$.

Версия леммы Линденбаума для NQLO выглядит следующим образом

Теорема 6.1.2. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда A принадлежит каждому NQLO—полному расширению* Г.

Доказательство. Необходимо проверить лишь выполнимость пункта 6.1.1(ii). Если $\Gamma \prec A$, то $A \in \Gamma$. Но по Ax17 и Rx3 имеем $\exists u A \in \Gamma$.

Если A не QLO—следует из Г, то пусть $x = \{B: \Gamma \prec B\}$. По Ax0 $\Gamma \subseteq x$ и по предположению $A \notin x$. Если $B \in x$, то согласно вышесказанному $\exists u B \in x$ и x является QLO—полным и замкнутым относительно $\exists u$—квантора. Так как $A \notin x$, то A не QLO—следует из x, поэтому x является QLO—совместимым и x является NQLO—полным. ▪

Лемма 6.1.3. *Структура $N\mathcal{F} = \langle F,+,\circ,-,\alpha,|...|,0,1\rangle$ является банаховым пространством.*

Доказательство. Согласно 5.3.2 $\mathcal{F} = \langle F,+,\circ,-,\alpha,0,1\rangle$ является алгеброй (наблюдаемых), а $\mathcal{F} = \langle F,+,-,\alpha,0\rangle$ является векторным (линейным) пространством. Операцию $|...|$ определяем как $\|[A]\| = |\exists u A|$. Правильность ее определения очевидна. Для нормированной алгебры $N\mathcal{F}$ необходимо выполнение соотношений

$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$

$\|A+B\| = \|A\| + \|B\|$

$\|A \circ B\| = \|A\| \circ \|B\|$

$\|A\| = 0$ лишь тогда, когда $A = 0$.

Нетрудно видеть, что первые три условия выполнимы вследствие Ax19-Ax21. Четвертое условие выполнимо по Ax20, Ax18. ▪

QLO-модель переходит в NQLO-модель путем пополнения 5.3.3 следующим пунктом:

Определение 6.1.4. $\|\exists uA\|_a = \{x \in X\colon x \in \|A\|\ \&\ \forall y \in \|A\|(a = \sup |v(A,y)|\}$.

Ясно, что $\|\exists uA\|_a = \|\exists uA\|$. Кроме того очевидна выполнимость леммы 5.3.4.

Теорема 6.1.5 (непротиворечивость NQLO). *$\Gamma \prec A$ только если Θ: $\Gamma \models A$, где Θ — класс всех NQLO-фреймов.*

Доказательство. Приводим доказательство наиболее сложных случаев. Остальное очевидно.

Ax18. Пусть $x \in \|\exists uA\|_a$. Тогда по 5.3.3(4) $y \in \|\neg\exists uA\|_{-a}$ только если $y \perp x$. Но по 6.1.4 $x \in \|A\|_a$ и в силу $y \perp x$ получаем $y \in \|\neg A\|_{-a}$. Отсюда по 6.1.4 $y \in \|\exists u \neg A\|_a$. Тогда $v(\neg\exists uA, y) \leq v(\exists u \neg A, y)$ и $\mathfrak{M}$: $\neg\exists uA \models_y \exists u \neg A$. ▪

Отметим, что в некоторых работах банаховы пространства используются как семантика для логических исчислений, например, в [Bugajski 1983]. Однако это использование осуществляется с помощью иных методов: подхода Джайлса к структурам доверия, его обобщения на небулев (квантовый случай) и нечетких расширений булевой, а также небулевых семантик.

Что касается канонической NQLO-модели, то она получается из канонической QLO-модели пополнением соответствующим определением области значения $\|\exists uA\|^{\mathrm{NL}}$, лемма 5.3.7 при этом остается справедливой.

Теорема 6.1.6 (фундаментальная теорема для NQLO). *Для любой ппф A и какого-нибудь $x \in X_{NL}$, $x \in \|A\|^{\mathrm{NL}}$ тогда и только тогда, когда $A \in x$.*

Доказательство. Доказывается индукцией по длине формулы. В случае $A = \exists uB$, если $B \in x$, то по Ax17 в силу свойств QLO-следования $\exists uB \in x$. Конверсия следует из определения 6.1.4 (поскольку $\|\exists uA\|$ и $\|A\|$ совпадают). ▪

Теорема 6.1.7. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_{\mathrm{NL}}\colon \Gamma \models A$.*

Доказательство. Идентично доказательству следствия 5.3.9. ▪

Теорема 6.1.8. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_{\mathrm{NL}}\colon \Gamma \models A$.*

Доказательство. То же, что и в случае 5.3.10. ▪

Теорема 6.1.9 (сильная полнота NQLO). Θ: $\Gamma \models A$ *только если* $\Gamma \prec A$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{J}_{NL}$ является NQLO-фреймом, то аналогично доказательству 5.3.11 Θ содержит $\mathcal{J}_{NL}$ в качестве элемента. ▪

Таким образом, NQLO сильно детерминирована классом всех NQLO-фреймов.

6.2. Временна́я квантовая логика наблюдаемых

Если, как и в случае квантовой ортологики, воспользоваться временным оператором фон Вригта **O**, понимаемым интуитивно как «следующий момент», «завтра», то систему временной квантовой логики наблюдаемых, описывающей динамику квантовой системы, можно получить путем добавления к QLO следующих схем аксиом:

Ax22. $\mathbf{O}\neg A \prec\succ \neg\mathbf{O}A$

Ax23. $\mathbf{O}(A \vee B) \prec\succ \mathbf{O}A \vee \mathbf{O}B$

Ax24. $\mathbf{O}(A \wedge B) \prec\succ \mathbf{O}A \wedge \mathbf{O}B$

Ax25. $\mathbf{O}J_\alpha A \prec\succ J_\alpha \mathbf{O}A$

Ax26. $\mathbf{O}^{-1}\mathbf{O}\,A \prec\succ A$

и правила вывода:

Rx7. $\dfrac{A}{\mathbf{O}A}$

Полученное подобным образом расширение системы QLO будем в дальнейшем обозначать как TQLO.

Определение 6.2.1. Непустое множество ппф Γ является TQLO-полным, если:

(i) Γ является QLO-полным;

(ii) $A \in \Gamma$ влечет $\mathbf{O}A \in \Gamma$..

Понятие TQLO-следования совпадает с QLO-следованием. Версия леммы Линденбаума для TQLO выглядит следующим образом

Теорема 6.2.2. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда A принадлежит каждому TQLO—полному расширению* Γ.

Доказательство. Необходимо проверить лишь выполнимость пункта 6.2.1(ii). Если $\Gamma \prec A$, то $A \in \Gamma$. Но по Rx7 получаем $\mathbf{O}A \in \Gamma$.

Если A не QLO—следует из Г, то пусть $x = \{B: \Gamma \prec B\}$. По Ax0 $\Gamma \subseteq x$ и по предположению $A \notin x$. Поскольку по Rx7 для любой $B \in x$ имеем $\mathbf{O}B \in x$, то x является QLO—полным и замкнутым относительно **O**-оператора. Так как $A \notin x$, то A не QLO—следует из x, поэтому x является QLO—совместимым и x является TQLO—полным. ▪

Реляционная семантика для TQLO получается путем модификации семантики QLO.

Определение 6.2.3. TQLO-фреймом называется четверка $\Im = \langle X, \perp, \xi, S \rangle$, где

(1) $\langle X, \perp, \xi \rangle$ есть фрейм;

(2) S является отношением следования за на X, иррефлексивным и антисимметричным.

Будем считать, что рассматриваемый TQLO-фрейм функционален, т.е. $\forall x \forall y \forall z (xSy \wedge xSz \to y = z)$, и является фреймом с последующим элементом, т.е. $\forall x \exists ! y (xSy)$. Как было сказано ранее в главе 4, подобная особенность с содержательной стороны означает принятие концепции времени, в которой день следует за днем, нет никакого последнего дня (момента); кроме того, каждый наступающий момент времени единствевенен, никакой день (момент) не имеет двух завтрашних дней (моментов). Введем на множестве X частично определенную функцию f, тогда будем писать YSZ, где $Y, Z \subseteq X$, а для данного $Y \subseteq X$ будем обозначать через Y^{+} множество $\{x: \forall y \in Y(ySx)\}$ или $\{x: \forall y \in Y(f(y) = x)\}$. Присутствие в $Ax26$ обратного оператора фон Вригта требует отсутствия ветвления времени в прошлое, и тем самым приводит к наличию обратной для f функции f^{-1}.

Определение 6.2.4. Отношение следованпия за согласовано с ортогональностью на , т.е. если $x \perp y$, то $x^{+} \perp y^{+}$.

Определение 6.2.5. TQLO-моделью называется пятерка $\mathfrak{M} = \langle X, \perp, \xi, S, v \rangle$, где

(i) $\langle X, \perp, \xi, S \rangle$ является TQLO-фреймом;

(ii) v совпадает с функцией верификации QLO-модели.

Определение значений формул в TQLO-модели получается путем пополнения определения значений формулы в QLO-модели следующим пунктом:

(1) $\|\mathbf{O}A\|_a = \{x\in\|A\|^+ : a = v(A,x)\}$.

Лемма 6.2.6. Для данного TQLO-фрейма $\Im = \langle X,\perp,\xi,S\rangle$

(1) если $Y^+,Z^+\subseteq X$ $\perp$-замкнуты, то $\perp$—замкнуто также их пересечение $Y^+\cap Z^+$;

(2) для любого $Y\subseteq X$ Y^+является $\perp$—замкнутым;

(3) $\|A\|^+\subseteq X$ $\perp$-замкнуто для любой ппф A.

Доказательство. Все утверждения являются следствиями функциональности TQLO-фрейма. ▪

Лемма 6.2.7. Пусть $\Im = \langle X,\perp,\xi,S\rangle$ *является TQLO-фреймом. Тогда* ξ *является замкнутым относительно операции* $^+$.

Доказательство. Следует из леммы 6.2.6. ▪

Лемма 6.2.8. Для любой TQLO-модели $\mathfrak{M}$ *и любой* $A\in\Phi$, $\|A\|_{(-)}\in\xi$.

Доказательство. Для всех QLO-формул это следует из леммы 5.3.6. В случае $A = \mathbf{O}B$ это следует из леммы 6.2.6. ▪

Теорема 6.2.9 (непротиворечивость TQLO). $\Gamma\prec A$ *только если* Θ: $\Gamma\models A$, *где* Θ *— класс всех TQLO-фреймов.*

Доказательство. Сводится путем индукции по TQLO-следованию к демонстрации справедливости данного результата для аксиом Ax22-Ax26 и сохранения при применении правила Rx7, поскольку для остальных аксиом и правил вывода все это было продемонстрировано ранее.

Ax22. Пусть $x\in\|A\|_a$. Тогда если $y\in\|\neg A\|_{-a}$, то $x\perp y$ по определению. Далее по 6.2.5.(1) получаем $y+\in\|\mathbf{O}\neg A\|_{v(\neg A,y+)}$.

Теперь пусть $x^+\in\|\mathbf{O}A\|_{v(A,x^+)}$. По 6.2.4 если $x\perp y$, то $x^+\perp y^+$. Тогда $y+\in\|\neg\mathbf{O}A\|_{-v(A,x+)}$. Но $v(\neg A,y^+) = -v(A,x^+)$. Следовательно, $\|\neg\mathbf{O}A\|$ и $\|\mathbf{O}\neg A\|$ совпадают.

Ax23 и Ax24 доказываются путем использования 6.2.6(1).

Ax25. Очевидно.

Ax26. Здесь приходится принимать во внимание обратный оператор фон Вригта. Ранее уже говорилось об отсутствии ветвления времени в прошлое и об обратной функции. Обозначим $f^{-1}(x)$ как x^-. Пусть $x\in\|A\|_a$. Тогда $x^+\in\|\mathbf{O}A\|_{v(A,x^+)}$ и $(x^+)^- = x\in\|\mathbf{O}^{-1}\mathbf{O}A\|_{v(A,(x^+)^-)}$. Но $v(\mathbf{O}A,(x^+)^-) = v(\mathbf{O}A,x) = v(A,x)$ в силу композиции f и f^{-1} и 6.2.5(1).

Rx7. Следует из 6.2.5(1), поскольку $v(\mathbf{O}A,x) = v(A,x)$. ▪

Определение 6.2.10. *Если T является временной квантовой логикой наблюдаемых, то каноническая TQLO-модель для T есть структура* $\mathfrak{M}_T = \langle X_T, \perp_T, \xi_T, S_T, v_T \rangle$, *где:*

(1) $X_T = \{x \subseteq \Phi$: x является TQLO—полным множеством$\}$;

(2) $x \perp_T y$ тогда и только тогда, когда существует ппф A, такая, что $\neg A \in x$, $A \in y$;

(3) $\xi_T = \{|A|^T: A \in \Phi\}$, где $|A|^T = \{x \in X_T: A \in x\}$;

(4) $x S_T y$ тогда и только тогда, когда существует ппф A, такая, что $\mathbf{O}A \in y$, $A \in x$ (но не наоборот);

(5) v_T: $(S \cup \Phi) \times X_T \to \mathbb{R}$.

Обозначая множество $\{x \in X_T$: $v(A,x) = a\}$ как $\|A\|^T_a$, получаем определения значений истинности формул и областей значений в канонической модели $\mathfrak{M}_T$, аналогично 6.2.5(1).

Лемма 6.2.11. $\mathcal{F}_T = \langle X_T, \perp_T, \xi_T, S_T \rangle$ *является* TQLO*—фреймом.*

Доказательство. Согласно 5.3.7 $\langle X_T, \perp_T, \xi_T \rangle$ является QLO-фреймом. Проверим, является ли S_T отношением следования за. Пусть для некоторого $x \in X_T$, $A, \mathbf{O}A \in x$. Тогда $\neg A \in y$, где $y \perp x$, а $\mathbf{O}\neg A \in y^+$. Далее, поскольку $\mathbf{O}A \in x$, то $\neg \mathbf{O}A \in y$. Но тогда $\mathbf{O}\neg A \in y^+$, а $\neg \mathbf{O}A \in y$, следовательно Ax22 выполнимо только если $y^+ = y$, и отношение S вообще исчезает. Следовательно, определенное подобным образом S_T является иррефлексивным. Если же предположить, что $x S_T y$ и $y S_T x$, то нарушается условие 6.2.10-(4). Следовательно, S_T антисимметрично. Согласованность S_T и $\perp_T$ следует из Ax22. ▪

Теорема 6.2.12 (***фундаментальная теорема для TQLO***). *Для всех ппф A и всех* $x \in X_T$, $x \in \|A\|^T$ *тогда и только тогда, когда* $A \in x$.

Доказательство. Доказывается индукцией по длине формулы A. Требуется рассмотреть только случай $A = \mathbf{O}B$. Пусть для B теорема выполнена и пусть $\mathbf{O}B \in x$. Тогда если $y \in \|B\|^T_{(-)}$, то по индуктивному предположению $B \in y$ и отсюда $y S_T x$. По 6.2.5(1) следует $x \in \|B\|^{T+}_{(-)}$. С другой стороны, если $\mathbf{O}B \in x$, то $\mathbf{O}B \in y$, такому, что $x S_T y$ (согласно 6.2.10(4)). Но тогда по индуктивному предположению $y \in \|\mathbf{O}B\|^T_{(-)}$ и по 6.2.5(1) $y \in \|B\|^{T+}_{(-)}$. ▪

Следствие 6.2.13. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}_T: \Gamma \models A$.

Доказательство. Выполняется вследствие 5.3.9, поскольку TQLO-следование совпадает с QLO-следованием, а $\mathfrak{M}_T$ представляет собой согласованное с $\perp$ расширение $\mathfrak{M}_{QLO}$. ▪

Теорема 6.2.14. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}:\Gamma \vDash A$.

Доказательство. Доказывается так же как и 5.3.10 в силу совпадения TQLO- и QLO-следования. ▪

***Следствие 6.2.15* (*сильная полнота TQLO*).** Θ: $\Gamma \vDash A$ *только если* $\Gamma \prec A$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ является TQLO-фреймом, то Θ содержит $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ в качестве элемента. Остальное очевидно. ▪

6.3. Временная нормированная квантовая логика наблюдаемых

Приступим теперь к овременению с помощью оператора фон Вригта нормированной квантовой логики наблюдаемых. Нетрудно видеть, что временную логику на основе NQLO можно получить путем добавления к рассмотренным ранее аксиомам A0-A26 и правилам вывода Rx1-Rx7 дополнительной аксиомы следующего вида:

Ax27. $\mathbf{O}\exists uA \prec\succ \exists u\mathbf{O}A$

Обозначим полученную систему как TNQLO. Очевидным образом TNQLO-следование совпадает с QLO-следованием, а определение полных множеств получается путем объединения определений 6.1.1 и 6.2.1, т.е. определений NQLO- и TQLO-полных множеств. Нетрудно убедиться, что лемма Линденбаума также выполнима для TNQLO, поскольку фактически ее доказательство будет состоять в объединении доказательств данной леммы для NQLO и TQLO. Точно так же, путем объединения определений для NQLO и TQLO, вводится понятие TNQLO-шкалы и TNQLO-модели.

***Теорема 6.3.1* (*непротиворечивость TNQLO*).** $\Gamma \prec A$ *только если* Θ: $\Gamma \vDash A$, *где* Θ *— класс всех TNQLO-фреймов.*

Доказательство. В случае Ax27 пусть $x \in \|A\|_a$. Тогда $x \in \|\exists uA\|_b$, где $b = \sup|v(A,(-))|$. По 6.2.5(1) получаем $x^+ \in \|\exists u\mathbf{O}A\|_c$, где $c = v(\exists uA, x^+) = b$.

С другой стороны, по 6.2.3(1) $x^+ \in \|\mathbf{O}A\|_d$, где $d = v(A,x^+)$. По 5.4.4 получаем $x^+ \in \|\exists u\mathbf{O}A\|_e$, где $e = \sup|v(\mathbf{O}A,(-))|$. Но поскольку $\sup|v(\mathbf{O}A,(-))| \le \sup|v(A,(-))|$, то $e \le b$ (подобная ситуация может возникнуть в силу того, что не исключен случай, когда $v(A,x) \geq v(\mathbf{O}A,x^+)$. ▪

Что касается всех остальных результатов (фундаментальная теорема, сильная полнота), то нетрудно убедиться, что все они получаются путем объединения соответствующих доказательств для TQLO и NQLO.

Несколько слов следует еще сказать о роли **O**-оператора фон Вригта в квантовой логике наблюдаемых. С матричной точки зрения, по-видимому, его можно расценивать как эндоморфизм на матрице $\mathfrak{M}_{QLO}$. Наличие обратного оператора фон Вригта приводит, соответственно к обратимости данного эндоморфизма на истинностной матрице.

Введение в рассмотрение обратного оператора фон Вригта в аксиоме Ax26 обусловлено было стремлением охватить случай обратимых квантовых систем, поскольку требование обратимости всегда играет физически важную роль при рассмотрении временных трансляций в рамках алгебраического подхода к квантовым теориям. Фактически задание обратного оператора фон Вригта привело к заданию на QLO-фрейме не только отношения S следования *за*, но и отношения S^{-1} следования *перед*, для которых имеет место $xSyS^{-1}x$. Но поскольку изменения, вызываемые подобным пополнением QLO-фрейма в сущности не велики и очевидны, то в явном виде введение отношения S^{-1} не было сделано.

6.4. Эффекты в квантовой логике наблюдаемых

В работе [Mundici 1986] Д.Мундичи показал, что каждая аппроксимативно-мерная C^*-алгебра с решеточной группой размерности может быть вложена в счетную MV-алгебру. Поскольку такая MV-алгебра будет также алгеброй Линденбаума бесконечнозначной логики Лукасевича, то этот результат можно было бы понимать как дающий возможность рассматривать свойства квантовых систем в рамках логики Лукасевича. Нет необходимости говорить, что с физической точки зрения мы в этом случае должны рассматривать элементы MV-алгебры как класс операторов, чей спектр содержится в дйствительном числовом интервале [0,1].

Однако отсутствие достаточно разработанной интерпретации подобных операторов вынуждает нас рассматривать их как так называемые *эффекты* в гильбертовом пространстве, представляющие собой ограниченные линейные операторы, такие, что для каждого эффекта E и для всех операторов плотности D, $0 \leq \mathrm{Tr}(DE) \leq 1$ (борновская вероятность). Р.Джунтини в работе [Giuntini 1996] было показано, что класс всех эффектов в любом гильбертовом пространстве представляет собой алгебраическую структуру, называемую *квантовой MV-алгеброй.*

Подобные алгебры обладают всеми свойствами обычных MV-алгебр, но в них нарушается ключевая аксиома MV-алгебр — так называемая аксиома Лукасевича. Квантовые MV-алгебры представляют собой неидемпотентные расширения ортомодулярных решеток подобно тому, как обычные MV-алгебры являются расширениями булевых алгебр.

В случае переноса метода Мундичи на квантовые эффекты, мы можем интерпретировать их как задающие некоторую разновидность борновской вероятности для квантовых наблюдаемых, представленных операторами в гильбертовом пространстве, но образующие обычные MV-алгебры, а не квантовый MV-алгебры. Фактически, эти вероятности можно было бы рассматривать как вероятности того, что результат измерения наблюдаемой даст нам некоторое действительное число (подобно тому, как проекторы в гильбертовом пространстве рассматриваются как «да-нет»-ответы на тот же самый вопрос) (см. [Cattaneo 1993, p.245]).

В дальнейшем изложении также будет использована следующая теорема QLO:

Bx1. $\neg(A \vee \neg A) \vee B \prec\succ B$

Bx1 доказывается с помощью Ax9, Ax10, Ax14.

Чтобы ввести эффекты в QLO, обогатим язык QLO за счет унарного оператора ∇, а аксиоматику расширим с помощью следующих аксиом и правила вывода:

Ax28. $\nabla A \prec\succ \nabla\nabla A$

Ax29. $\nabla\neg A \prec\succ 1 \vee \neg\nabla A$

Ax30. $\nabla\mathbf{1} \prec\succ \mathbf{1}$

Ax31. $\nabla(A \vee B) \prec\succ (\nabla A \vee \nabla B)$

Ax32. $\neg(B \vee \neg B) \prec \nabla A \prec \mathbf{1}$

Ax33. $\mathbf{1} \prec\succ \mathbf{1} \vee \nabla A$

Rx8. $\dfrac{A \prec B}{\nabla A \prec \nabla B}$

Обозначим систему QLO + {Ax28-Ax33, Rx8} как QLO-MV. Чтобы доказать, что QLO-MV действительно описывает эффекты, вначале напомним определение алгебраической структуры, ответственной за них. Согласно П.Мангани (см. [Mangani 1973]) MV алгебры могут быть описаны следующим образом:

($MV1$) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

($MV2$) $a \oplus 0 = a$

($MV3$) $a \oplus b = b \oplus a$

($MV4$) $a \oplus 1 = 1$

($MV5$) $(a^*)^* = a$

($MV6$) $0^* = 1$

($MV7$) $a \oplus a^* = 1$

($MV8$) $(a^* \oplus b)^* \oplus b = (a \oplus b^*)^* \oplus a$ (*аксиома Лукасевича*)

Как и в QLO мы определяем $[A] \oplus [B] = [\nabla A \vee \nabla B]$ и $[A]^* = [\nabla \neg A]$.

Теорема 6.4.1. *Структура $F = \langle Frm, \oplus, {}^*, 0, 1\rangle$, где $Frm = \{P/_{\sim} :$ P есть формула с префиксом $\nabla\}$, $0 = [\neg(A \vee \neg A)]$, $1 = [\mathbf{1}]$, представляет собой MV алгебру.*

Доказательство. Ассоциативность $\oplus$ для ($MV1$) следует из определения $\oplus$ и ассоциативности $\vee$ в QLO, так же как и коммутативность для ($MV3$). ($MV2$) выполняется, поскольку $[A] \oplus 0$ определяется с помощью $\nabla A \vee \nabla \neg(A \vee \neg A) \prec\succ \nabla(A \vee \neg(A \vee \neg A))$, а затем по Bx1 это будет эквивалентно ∇A, что в силу определения P дает $[A]$. В случае ($MV4$) имеем $\nabla A \vee \nabla \mathbf{1} \prec\succ \nabla A \vee \mathbf{1}$ по Ax19. Но, принимая во внимание Ax33, $\nabla A \vee \mathbf{1} \prec\succ \mathbf{1}$. Что касается ($MV5$), то $[A]^{**}$ определяется посредством $\nabla \neg \nabla \neg A$, а по Ax29, Ax28 это дает $\nabla \neg \nabla \neg A \prec\succ \mathbf{1} \vee \neg \nabla \neg A \prec\succ \mathbf{1} \vee \neg(\nabla \neg A) \prec\succ \mathbf{1} \vee \neg \mathbf{1} \vee \nabla A$. Но мы получаем $\mathbf{1} \vee \neg \mathbf{1} \prec\succ \neg\neg \mathbf{1} \vee \neg\neg\neg \mathbf{1} \prec\succ \neg(\neg \mathbf{1} \vee \neg\neg \mathbf{1}) \prec\succ \neg(\mathbf{1} \vee \neg \mathbf{1})$ с помощью Ax2, Ax1. Таким образом, по Bx1 мы получаем $(1\vee\neg 1)\vee\nabla A \prec\succ \nabla A$. ($MV6$) следует из того, что $\nabla\neg\neg(A\vee\neg A)$ $\prec\succ \nabla(A\vee\neg A) \prec\succ \nabla A\vee\nabla\neg A \prec\succ \nabla A\vee 1\vee\neg\nabla A \prec\succ \mathbf{1}$.

Чтобы получить ($MV7$), мы имеем $\nabla A\vee\nabla\neg A$ по определению и Ax28. Тогда, как и в случае ($MV6$), получаем $\nabla A\vee\nabla\neg A \prec\succ \mathbf{1}$.

В случае аксиомы Лукасевича для левой части мы имеем $\nabla\neg(\nabla\neg A\vee\nabla B)\vee\nabla B$ по определению и Ax28. Теперь по Ax29 и Ax28 получаем $\nabla\neg(\nabla\neg A\vee\nabla B)\vee\nabla B \prec\succ \nabla\neg\nabla\neg A\vee\nabla\neg\nabla B\vee\nabla B \prec\succ$ $1\vee\neg\nabla\neg A\vee\nabla\neg\nabla B\vee\nabla B \prec\succ 1\vee\neg(1\vee\neg\nabla A)\vee 1\vee\neg\nabla B\vee\nabla B$. По Ax1, Ax2, Ax1 имеем $1\vee\neg(1\vee\neg\nabla A)\vee 1\vee\neg\nabla B\vee\nabla B \prec\succ \nabla A\vee 1 \prec\succ \mathbf{1}$. Для правой части подобным образом получаем $\nabla\neg(\nabla\neg B\vee\nabla A)\vee\nabla A \prec\succ \nabla B\vee 1 \prec\succ \mathbf{1}$, что и определяет выполнимость аксиомы Лукасевича.▪

В дальнейшем везде под ппф будем иметь в виду ппф с префиксом ∇.

Определение 6.4.2.. Пусть Γ представляет собой непустое множество ппф. Ппф A с префиксом ∇ QLO-MV-*следует* из Γ, $\Gamma\prec A$, если A QLO-*следует* из Γ и существуют $B_1,\ldots,B_n\in\Gamma$, такие, что

(a) $\nabla B_i\prec A$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Если A QLO-MV—следует из $\mathbf{1}$, то A QLO-MV-*выводима* или является QLO-MV-*теоремой*, что записывается как $\prec A$. Γ является QLO-MV-*совместимым*, если существует хотя бы одна ппф, которая не QLO-MV—следует из Γ, в противном случае Γ является QLO-MV-*несовместимым*. Γ является QLO-MV-*полным*, если оно QLO-MV-совместимо и замкнуто относительно QLO-MV-следования, т.е. тогда и только тогда, когда

(1) Γ является QLO-полным;

(2) $A\in\Gamma$ влечет $\nabla A\in\Gamma$.

Лемма 6.4.3. *Если $x\subseteq\Phi$, где Φ — множество ппф, является QLO-MV-полным, тогда*

(i) *$x\prec\nabla A$ тогда и только тогда, когда $A\in x$;*

(ii) *$\nabla\neg(A\vee\neg A)\in x$ для всех ппф A с префиксом ∇.*

Доказательство. (i) Поскольку в QLO-MV имеет место $A\prec A$, достаточность следует из определения QLO-MV-следования. Необходимость следует из 6.4.2(1), (2).

(ii) По определению x непусто, следовательно, существует $B\in x$. Но по 6.4.2(1) $J_0B\in x$, а отсюда по Ax9 и 6.4.2(1) получаем $\neg(A\vee\neg A)\in x$. Отсюда используя Rx8, получаем требуемый результат. ▪

QLO-MV-полные множества и QLO-MV-следование связывает между собой следующая версия леммы Линденбаума:

Теорема 6.4.4. *$\Gamma\prec A$ тогда и только тогда, когда A принадлежит каждому QLO-MV-полному расширению* Γ.

Доказательство. Если $\Gamma\prec A$, то существуют $B_1,\dots,B_n\in\Gamma$, такие, что либо $B_1\vee\dots\vee B_n\prec A$, либо $(B_1\wedge\dots\wedge B_n)\wedge(B_n\wedge\dots\wedge B_1)\prec A$, либо $J_{|\alpha|}B_i\prec A$, либо $\nabla B_i\prec A$ $(1\leq i\leq n)$. Если x является QLO-MV—полным и $\Gamma\subseteq x$, то $B_1,\dots,B_n\in x$. Применяя 6.4.2(1), (2), получаем $A\in x$.

Обратно, пусть A не QLO-MV-следует из Γ. Пусть $x=\{B\colon \Gamma\prec B\}$. По Ax0 имеем $\Gamma\subseteq x$, и по предположению $A\notin x$. Доказательство будет завершено, если удастся показать, что x является MV—полным, поскольку QLO-полнота очевидна в силу определения. Положим $B\in x$ и $B\prec C$, тогда существует $B_1,\dots,B_n\in\Gamma$, такие, что $\nabla B_i\prec C$, следовательно, $\Gamma\prec C$, т.е. $C\in x$.

С другой стороны, если $B\in x$, тогда существует $B'\in\Gamma$, такая, что $\nabla B'\prec B$. Поскольку по Rx8 $\nabla\nabla B'\prec\nabla B$, то по Ax28 мы имеем $\nabla B'\prec\nabla B$. Таким образом, $\Gamma\prec\nabla B\in x$.

Отсюда заключаем, что x замкнуто относительно QLO-MV-следования, конъюнкции, дизъюнкции, J-оператора и ∇-оператора. Поскольку $A\notin x$, то A не QLO-MV-следует из x, поэтому x является QLO-MV-совместимым, что и заканчивает доказательство теоремы. ▪

Теорема 6.4.5. *Если x является QLO-MV-полным и $\nabla\neg A\notin x$, тогда существует QLO-MV-полное множество y, такое, что $A\in y$, и для всех B либо $\nabla\neg B\notin x$, либо $B\notin y$.*

Доказательство. Положим $y=\{B\colon A\prec B\}$. По Ax0 $A\in y$. Пусть теперь $\nabla\neg B\in x$. Тогда $B\notin y$, иначе $A\prec B$, откуда $\neg B\prec\neg A$ по Rx1, откуда по Rx8 и, в свою очередь, по 6.4.2(1), $\nabla\neg A\in x$, в противоположность предположению. Далее, по 6.4.3(ii) имеем $\nabla\neg(A\vee\neg A)\in x$. Согласно вышедоказанному, получаем $A\vee\neg A\notin y$. Действуя аналогично доказательству теоремы 6.4.4, можно показать, что y замкнуто относительно $\vee,\wedge,J,\nabla$ и QLO-MV-следованию. Тогда ввиду того, что $A\vee\neg A$ не QLO-MV-следует из y, т.е. y является QLO-MV-совместимым, получаем, что y является QLO-MV—полным. ▪

Поскольку наша система представляет собой расширение QLO, то для описания ее семантики воспользуемся определениями семантики QLO, модифицируя их по мере необходимости для передачи специфики QLO-MV.

Определение 6.4.6. QLO-MV-моделью называется четверка $\mathfrak{M}= \langle X,\perp,\xi,v\rangle$, где

(i) $\langle X,\perp,\xi\rangle$ является квантовым фреймом из определения 2.2.3;

(ii) v является оценкой (функцией верификации), сопоставляющей действительное число каждой пропозициональной переменной и формуле QLO-MV для каждой точки (каждого элемента) из X, т.е. $v{:}(\mathrm{S}\cup\Phi) \times X \to \mathbb{R}$, где S — множество пропозициональных переменных, Φ — множество ппф.

Обозначая множество $\{x\in X\colon v(A,x) = a\}$ как $\|A\|_a$, рекурсивно определяем значение формулы в QLO-MV—модели путем добавления к определению значения формулы в QLO-модели следующего пункта:

(7) $\|\nabla A\|_a = \{x\in X\colon x\in\|A\|_b \& \ a = q(A,x,b)\}$, где $q\colon v \to [0,1]$, такая, что

(i) $q(q(A,x,a)) = q(A,x,a)$;

(ii) если $v(A,x)$ негативно, то за $q(A,x,a)$ принимается $1\text{-}q(A,x,-a)$;

(iii) $q(1,x,1) = 1$ и $q(\neg(A\vee\neg A),x,0) = 0$;

(iv) $q(\nabla(A\vee B),x,a) = \min\{q(\nabla A,x,b) + q(\nabla B,x,c),1\}$;

(v) $q(\nabla\neg A,x,a) = 1-q(A,x,a)$.

Очевидно, что при таком определении q играет роль v для формул с префиксом ∇, т.е., например, $q(\nabla A\vee\nabla B,x,a) = q(\nabla A,x,c) + q(\nabla B,x,d) = c + d = a$.

Если Γ является непустым множеством ппф, тогда говорим, что Γ влечет A в x в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$: $\Gamma\models_x A$, тогда и только тогда, когда $\forall B\in\Gamma(q(B,x,b) \leq q(A,x,a))$, Γ $\mathfrak{M}$—влечет A, $\mathfrak{M}$: $\Gamma\models A$, тогда и только тогда, когда либо $\exists B\in\Gamma(x\notin\|B\|_{(-)})$, т.е. когда B не верифицирована в x (верифицируемость, а не истинность, поскольку имеем дело с многозначной истинностной матрицей), либо Γ влечет A во всех x в $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{I}$ является QLO-MV—фреймом, то Γ $\mathfrak{I}$—влечет A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$: $\Gamma\models A$ для всех QLO-MV—моделей $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{I}$. Если же $\wp$ является классом QLO-

MV—фреймов (т.е. квантовых фреймов), то Γ $\wp$—влечет A, $\wp$: $\Gamma \models A$, тогда и только тогда, когда $\Im$: $\Gamma \models A$ для всех $\Im \in \wp$. Класс $\wp$ детерминирует QLO-MV тогда и только тогда, когда для всех $A,B \in \Phi$, $A \prec B$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $A \models B$. $\wp$ сильно детерминирует QLO-MV тогда и только тогда, когда для всех Γ, A, $\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $\Gamma \models A$.

Если определить область значений формулы A как

$$\|A\| = \bigcup_{a \in \mathrm{R}} \|A\|_a ,$$

то, распространяя это определение на 6.4.6(1)-(7), в дальнейшем $\|p_i\|$, $\|A \vee B\|$, $\|A \wedge B\|$, $\|\neg A\|$, $\|J_{|\alpha'|}A\|$, $\|\nabla A\|$ будут обозначать области значений соответствующих формул, а $\|A\|_{(-)}$ будет обозначать произвольное значение соответствующей формулы.

Лемма 6.4.7. Для любой QLO-MV-модели $\mathfrak{M}$ *и любой* $A \in \Phi$, $\|A\|_{(-)} \in \xi$.

Доказательство. Получаем индукцией по длине A, используя 6.4.6. ▪

Теорема 6.4.8 (непротиворечивость QLO-MV). $\Gamma \prec A$ *только, если* Θ: $\Gamma \models A$, *где* Θ *— класс всех QLO-MV-фреймов.*

Доказательство. Сводится путем индукции по QLO-MV-следованию к демонстрации того факта, что этот результат справедлив для Ax1-Ax16, Ax28-Ax33 и сохраняется при применении Rx1-Rx5, Rx8. Приводим наименее очевидные случаи (с учетом доказательства для QLO).

Ax28. Пусть $x \in \|\nabla\nabla A\|_a$. Тогда по 6.4.6(7) $x \in \|\nabla A\|_b$ и $a = q(\nabla A,x,b)$. Вновь, по 6.4.6(7) это влечет $x \in \|A\|_c$ и $b = q(A,x,c)$. Мы получаем $q(\nabla A,x,b) = q(q(A,x,c)) = q(A,x,c)$ по свойству q и отсюда $a = q(A,x,c)$.

Ax29. Пусть $x \in \|A\|_a$. Тогда по 6.4.6(3) $y \in \|\neg A\|_{-a}$ только если $x \perp y$, т.е.. $y \perp \|A\|_a$ только если $x \perp y$. Далее, по 6.4.6(7) $y \in \|\nabla\neg A\|_b$ и $b = q(\neg A,y,-a) = 1 - q(A,x,a)$ согласно свойствам q. Но нетрудно убедиться, что этот результат получается и для правой стороны Ax18, т.е. $y \in \|1 \vee \neg\nabla A\|_c$ и $c = 1 - q(A,x,a)$.▪

Определение 6.4.9. Если L является квантовой логикой наблюдаемых и эффектов, то каноническая QLO-MV—модель для L есть структура $\mathfrak{M}_{\mathrm{L}} = \langle X_{\mathrm{L}}, \perp_{\mathrm{L}}, \xi_{\mathrm{L}}, v_{\mathrm{L}} \rangle$, где:

(1) $X_L = \{x \subseteq \Phi$: x является QLO—MV-полным множеством$\}$;

(2) $x \perp_L y$ тогда и только тогда, когда существует ппф A, такая, что $\nabla\neg A \in x$, $A \in y$;

(3) $\xi_L = \{|A|^L: A \in \Phi\}$, где $|A|^L = \{x \in X_L: A \in x\}$;

(4) $v_L: (S \cup \Phi) \times X_L \to \mathbb{R}$.

Обозначая множество $\{x \in X_L: v(A,x) = a\}$ как $\|A\|^L_a$, получаем определения значений формул и областей значения в канонической модели $\mathcal{M}_L$ аналогично 6.4.6(1)-(7).

Лемма 6.4.10. $\mathcal{F}_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L \rangle$ *является QLO-MV—фреймом.*

Доказательство. Пусть $x \in X_L$. Тогда для любой A либо не имеет места $\nabla\neg A, A \in x$, либо по Ax7 x будет QLO-MV—несовместимой. Следовательно, $x \perp_L x$ не имеет места. Если $x \perp_L y$, то для некоторой ппф A имеем $\nabla\neg A \in x$, $A \in y$. Используя Ax2, приходим к заключению $\nabla\neg B \in y$, $B \in x$, где $B = \nabla\neg A$. Таким образом $x \perp_L y$. Следовательно, $\perp_L$ является отношением ортогональности. Проверим, является ли $\|A\|^L$ $*_L$-замкнутым. Предположим, что $x \notin \|A\|^L$, т.е. $A \notin x$. По Ax2 $\neg\neg A \notin x$, откуда по 6.4.5 существует $y \in X_L$, такой, что $x \perp_L y$ не имеет места и $\neg A \in y$. Тогда если $z \in \|A\|^L$, то $A \in z$ и, следовательно, $y \perp_L z$. Отсюда $y \perp_L \|A\|^L$ как и требовалось. Очевидным образом ξ_L будет замкнуто относительно пересечения (в силу свойств QLO-MV—следования и QLO-MV—полноты). ▪

***Теорема 6.4.11* (*фундаментальная теорема для QLO-MV*).** *Для каждой ппф A и для всякого $x \in X$, $x \in \|A\|^L$ тогда и только тогда, когда $A \in x$.*

Доказательство. Доказывается индукцией по длине A. В случаях $A = B \vee C$, $A = B \wedge C$, $A = J_\alpha B$, $A = \nabla B$ нетрудно видеть, что из условия $B \vee C, B \wedge C, J_\alpha B, \nabla B \in x$ следует $B, C \in x$. Достаточно обратиться к 6.4.6(2),(3),(5),(7). Конверсия следует из 6.4.2(1).

Предположим теперь, что $A = \neg B$ и для B теорема выполнима. Пусть $\nabla\neg B \in x$. Тогда если $y \in \|B\|^L_{(-)}$, то по индуктивному предположению $B \in y$ и отсюда $x \perp_L y$. По 6.4.6(4) следует $x \in \|B\|^L_{(-)}$. С другой стороны, если $\nabla\neg B \notin x$, то согласно 6.4.5 существует $y \in X_L$, такой, что $B \in y$, откуда по индуктивному предположению $y \in \|B\|^L_{(-)}$, но $x \perp_L y$ не имеет места. По 5.3.3(4) приходим к выводу, что $x \notin \|B\|^L_{(-)}$. ▪

Следствие 6.4.12. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_{L}:\Gamma \models A$.*

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существует $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$, и $\nabla B_i \prec A$ $(1 \leq i \leq n)$. Если $x \in \|B\|^{L}_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, тогда по 6.4.11 $B_1,\ldots,B_n \in x$. По 5.2.1(2)-(4) следует, что $A \in x$, откуда $x \in \|A\|^{L}_{(-)}$.

Наоборот, если A не является QLO—выводимой из Γ, то по 5.2.3 существует $x \in X_{L}$, такой, что $\Gamma \subseteq x$ и $A \notin x$. Тогда по 6.4.8 $x \in \|B\|^{L}_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, но $x \notin \|A\|^{L}_{(-)}$. ▪

Теорема 6.4.13. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_{L}:\Gamma \models A$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ будет произвольной QLO—моделью на $\mathcal{F}_{L}$; для каждого $i<\omega$, $\|p_i\|^{m} \in \xi_{L}$, тогда существует B_i, такая, что $\|p_i\|^{m}_{(-)} = |B_i|^{L}_{(-)}$ ($|B_i|^{L}_{(-)}$ определяется как в 5.3.6) и $|B_i|^{L}_{(-)} = \|B_i\|^{L}_{(-)}$. Для любой ппф C пусть C' будет результатом подстановки B_i вместо каждого вхождения p_i. Очевидным образом в Γ существуют $A_1,\ldots,A_n$, такие, что $A_1 \vee \ldots \vee A_n \prec A$, либо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} A_i \prec A$ и $\nabla A_i \prec A$ $(1 \leq i \leq n)$. Используя предложенную подстановку, получаем $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \prec A'$ и т.д. Тогда по 5.3.9 $\mathfrak{M}_{L}$: $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \models A'$, либо $\mathfrak{M}_{L}$: $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_n) \wedge (A'_n \wedge \ldots \wedge A'_1) \models A'$, либо $\mathfrak{M}_{L}$: $J_{|\alpha|} A'_i \models A'$ и $\mathfrak{M}_{L}$: $\nabla A'_i \models A'$. Но простой индукцией получаем, что $\|C\|^{m} = \|C'\|^{m}_{L}$; откуда $\mathfrak{M}_{L}$: $A_1 \vee \ldots \vee A_n \models A$, либо $\mathfrak{M}_{L}$: $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \models A$, либо $\mathfrak{M}_{L}$: $J_{|\alpha|} A_i \models A$, и $\mathfrak{M}_{L}$: $\nabla A_i \models A$, откуда $\mathfrak{M}$: $\Gamma \models A$. Поскольку все это выполнимо в любой модели $\mathfrak{M}$ на $\mathcal{F}_{L}$, то отсюда заключаем, что $\mathcal{F}_{L}$: $\Gamma \models A$. ▪

Следствие 6.4.14 (сильная полнота QLO-MV). *Θ: $\Gamma \models A$ только если $\Gamma \prec A$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{F}_{L}$ является по 6.4.10 QLO-MV-фреймом, то Θ содержит $\mathcal{F}_{L}$ в качестве элемента. Остальное очевидно. ▪

Таким образом, 6.4.14 устанавливает тот факт, что QLO-MV сильно детерминирована классом всех QLO-MV-фреймов.

6.5. Бимодальная квантовая логика эффектов

Рассматривая эффекты гильбертова пространства как ограниченные линейные операторы E, такие, что для всех операторов плотности D, $0 \leq \mathrm{Tr}(DE) \leq 1$, можно определить на классе всех

$E(\mathcal{H})$ эффектов частичное упорядочение $\sqsubseteq$ следующим образом [Giuntini 1996, p.397]. Для любых $E,H \in E(\mathcal{H})$:

$E \sqsubseteq H$ тогда и только тогда, когда для всех операторов плотности D: $\mathrm{Tr}(DE) \leq \mathrm{Tr}(DF)$.

Соответственно класс всех эффектов совпадает с классом всех ограниченных линейных операторов между 0 и 1. Очевидным образом $E(\mathcal{H})$ содержит класс всех λI (с $\lambda \in [0,1]$), где для всякого вектора состояния $\varphi \in \mathcal{H}$ $(\lambda I)\varphi := \lambda\varphi$. Определяем теперь для любых $E,H \in E(\mathcal{H})$:

$$E \oplus F := \begin{cases} E+F, & \text{если} \quad E+F \in E(\mathcal{H}) \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где + представляет собой обычную операторную сумму,

$E^* := 1 - E.$

Как нетрудно убедиться, $E \oplus F = E + F$ тогда и только тогда, когда $E + F \sqsubseteq 1$.

Точно так же нетрудно убедиться, что структура $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \langle E(\mathcal{H}), \oplus, *, 1, 0 \rangle$ не выполняет аксиому Лукасевича MV-алгебры. Действительно, рассмотрим два нетривиальных эффекта E,F, таких, что $E \not\sqsubseteq F$ и $F \not\sqsubseteq E$. В этом случае по определению операции $\oplus$ имеем $E \oplus F^* = 1$ и $F \oplus E^* = 1$. Но тогда $(E^* \oplus F)^* \oplus F = 0 \oplus F = F \neq E = 0 \oplus E = (E \oplus F^*)^* \oplus E$. Отсюда следует, что аксиома Лукасевича не выполняется в структуре $\mathcal{E}(\mathcal{H})$.

Напомним, что Р.Джунтини показал, что класс всех эффектов (определяемых борновской вероятностью) любого гильбертова пространства представляет собой пример алгебраической структуры, называемой *квантовой MV алгеброй*. Квантовая MV алгебра (QMV алгебра) [Giuntini 1996, p.399] представляет собой структуру $\boldsymbol{M} = \langle M, \oplus, *, 1, 0 \rangle$, где M есть непустое множество, 0 и 1 являются константами M, $\oplus$ и $*$ являются бинарной и унарной операциями соответственно, удовлетворяющей следующим аксиомам (где $a \otimes b := (a^* \oplus b^*)^*$, $a \sqcap b := (a \oplus b^*) \otimes b$ и $a \sqcup b := (a \otimes b^*) \oplus b$):

($QMV1$) $(a \oplus b) \oplus c = (a \oplus b) \oplus c$

($QMV2$) $a \oplus 0 = a$

($QMV3$) $a \oplus b = b \oplus a$

($QMV4$) $a \oplus 1 = 1$

($QMV5$) $(a^*)^* = a$

($QMV6$) $0^* = 1$

($QMV7$) $a \oplus a^* = 1$

($QMV8$) $a \sqcup (b \sqcap a) = a$

($QMV9$) $(a \sqcap b) \sqcap c = (a \sqcap b) \sqcap (b \sqcap c)$

($QMV10$) $a \oplus (b \sqcap (a \oplus c)^*) = (a \oplus b) \sqcap (a \oplus (a \oplus c)^*)$

($QMV11$) $a \oplus (a^* \sqcap b) = a \oplus b$

($QMV12$) $a \oplus (a^* \oplus b) \sqcup (b^* \oplus a) = 1$

Оказывается можно построить логику эффектов, соответствующую квантовой MV алгебре, в рамках QLO. Например, мы можем обогатить язык QLO с помощью бинарного оператора $\oplus$ и унарного оператора *. В этом случае нужно расширить аксиоматику QLO за счет следующих правил вывода:

$$\text{Rx9.}\ \frac{\neg(C \vee \neg C) \prec A \prec 1 \quad \neg(C \vee \neg C) \prec B \prec 1 \quad A \vee B \prec 1}{A \oplus B \prec\succ A \vee B}$$

$$\text{Rx10.}\ \frac{1 \prec A \oplus B}{1 \prec\succ A \oplus B}$$

$$\text{Rx11.}\ \frac{\neg(A \vee \neg A) \prec A \prec 1}{1 \vee \neg A \prec\succ A^*}$$

(двойная черта означает выводимость в обе стороны).

Обозначим систему QLO + {Rx9-Rx11} как QLO-QMV (с Ax0). Как и в QLO мы определяем $[A] \oplus [B] = [A \oplus B]$ и $[A]^* = [A^*]$.

Теорема 6.5.1. *Структура $F = \langle Frm, \oplus, {}^*, 0, 1\rangle$, где $Frm = \{P/_{\sim} : P$ есть формула и $\neg(A \vee \neg A) \prec P \prec 1\}$, $0 = [\neg(A \vee \neg A)]$, $1 = [1]$, представляет собой QMV алгебру.*

Доказательство. Выполнимость аксиом ($QMV1$) и ($QMV3$), как легко видеть, является следствием ассоциативности и коммутативности $\vee$. ($QMV2$) выполняется в силу Bx2. ($QMV4$) выполняется ввиду того, что из $\neg(A \vee \neg A) \prec B$ (что имеет место в силу Rx9) получаем $\neg(A \vee \neg A) \oplus 1 \prec B \oplus 1$ по Rx4 и поскольку по Bx1 $\neg(A \vee \neg A) \oplus 1 \prec\succ 1$, то по Rx8 $1 \prec\succ B \oplus 1$. В случае ($QMV5$) по Rx11 имеем $1 \vee \neg A \prec\succ A^*$, откуда вновь применением Rx11 получаем $1 \vee \neg(1 \vee \neg A) \prec\succ A^{**}$. Но по Bx1 это сводится к $1 \vee \neg 1 \vee \neg\neg A) \prec\succ A^{**}$, что ввиду $1 \vee \neg 1 \prec\succ \neg\neg 1 \vee \neg\neg\neg 1 \prec\succ \neg(\neg 1 \vee \neg\neg 1) \prec\succ \neg(1 \vee \neg 1)$

(по Ax2, Ax1) и Ax2, Ax1 сводится, в свою очередь, к $A \prec\succ A^{**}$. Аналогичные манипуляции позволяют удостовериться в выполнимости (*QMV6*) и (*QMV7*).

Чтобы проверить выполнимость остальных аксиом, определяем $A \otimes B \prec\succ (A^* \oplus B^*)^* \prec\succ A \vee B \vee \neg\mathbf{1}$, $A \otimes B \prec\succ (A^* \oplus B^*)^*$, $A \sqcap B \prec\succ (A \oplus B^*) \otimes B$ и $A \sqcup B \prec\succ (A \otimes B^*) \oplus B$. Более того, получаем, что

$$A \sqcap B \prec\succ \begin{cases} A, & \text{если} \quad A \prec B \\ B, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$A \sqcup B \prec\succ \begin{cases} A, & \text{если} \quad B \prec A \\ B, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Действительно, по определению $A \sqcap B \prec\succ (A \oplus B^*) \otimes B \prec\succ (A \oplus B^*) \vee B \vee \neg\mathbf{1}$. Если $A \prec B$, то $A \oplus B^* \prec B \oplus B^* \prec\succ \mathbf{1}$ и в силу Rx9 и Rx11 $A \oplus B^* \prec\succ A \vee \neg B \vee \mathbf{1}$, откуда $A \sqcap B \prec\succ A$. В противном случае по Rx11 $A \oplus B^* \prec\succ \mathbf{1}$ и $A \sqcap B \prec\succ B$.

Далее, по определению $A \sqcup B \prec\succ (A \otimes B^*) \oplus B$. Если $B \prec A$, то $B \otimes B^* \prec A \otimes B^*$, откуда $\neg(B \vee \neg B) \prec A \otimes B^*$. Это дает нам возможность использовать Rx9 для вычисления $(A \otimes B^*) \oplus B$, что дает $(A \otimes B^*) \oplus B \prec\succ (A \otimes B^*) \vee B \prec\succ A \vee B^* \vee B \vee \neg\mathbf{1} \prec\succ A \vee \mathbf{1} \vee \neg B \vee B \vee \neg\mathbf{1} \prec\succ A$. В противном случае получаем $A \otimes B^* \prec \neg(B \vee \neg B)$. Но из Rx9 получаем, что из $A \oplus B \prec \neg(B \vee \neg B)$ следует $A \oplus B \prec\succ \neg(B \vee \neg B)$, откуда $A \otimes B^* \prec\succ \neg(B \vee \neg B)$ и $(A \otimes B^*) \oplus B \prec\succ B$.

В случае (*QMV8*) если $A \prec B$, то $A \sqcup (B \sqcap A) \prec\succ A \sqcup B \prec\succ A$. Если $A \not\prec B$, то $A \sqcup (B \sqcap A) \prec\succ A \sqcup A \prec\succ A$.

Для выполнимости (*QMV9*) нам требуется, чтобы $(A \sqcap B) \sqcap C \prec\succ (A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C)$. Возможны два случая:

1) $B \prec C$,

2) $B \not\prec C$.

Случай 1). Если $A \prec B$, то в силу Rx3 $A \prec C$. Тогда $(A \sqcap B) \sqcap C \prec\succ A \sqcap C \prec\succ A \prec\succ A \sqcap B \prec\succ (A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C)$. Если же $A \not\prec B$, то $(A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C) \prec\succ B \sqcap B \prec\succ B \prec\succ B \sqcap C \prec\succ (A \sqcap B) \sqcap C$.

Случай 2). Поскольку $B \not\prec C$, то получаем, что $B \sqcap C \prec\succ C$. Отсюда $(A \sqcap B) \sqcap (B \sqcap C) \prec\succ (A \sqcap B) \sqcap C$.

Для выполнимости (*QMV10*) нам необходимо, чтобы $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \prec\succ (A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*)$. Возможны два случая:

1) $A \oplus C \prec\succ \mathbf{1}$,

2) неверно, что $A \oplus C \prec\succ \mathbf{1}$.

Случай 1). $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \prec\succ A \oplus (B \sqcap \neg(A \vee \neg A)) \prec\succ A$ и $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*) \prec\succ (A \oplus B) \sqcap (A \oplus \neg(A \vee \neg A)) \prec\succ ((A \oplus B) \oplus A^*) \otimes A \prec\succ ((B \oplus (A \oplus B^*)) \otimes A \prec\succ (B \oplus \mathbf{1})) \otimes A \prec\succ A$.

Случай 2) имеет два подслучая:

а) $B \prec (A \oplus C)^*$,

б) $B \not\prec (A \oplus C)^*$.

Подслучай а). По предположению $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \prec\succ A \oplus B$ и $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*) \prec\succ (A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \vee C)^*)$. Если $(A \oplus (A \vee C)^*) \prec\succ \mathbf{1}$, то все в порядке. Поэтому предположим, что $(A \oplus (A \vee C)^*) \prec\succ \mathbf{1}$ не имеет места. Тогда $(A \oplus (A \vee C)^*) \prec\succ (A \vee (A \vee C)^*) \prec\succ C^*$. Поэтому $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \vee C)^*) \prec\succ (A \oplus B) \sqcap C^*$. По предположению $B \prec (A \oplus C)^* \prec\succ \mathbf{1} \vee \neg A \vee \neg C$, откуда $A \vee B \prec C^*$. Следовательно, $(A \oplus B) \sqcap C^* \prec\succ A \oplus B$.

Подслучай б). По предположению мы имеем, что $A \oplus (B \sqcap (A \oplus C)^*) \prec\succ A \oplus (B \sqcap (A \vee C)^*) \prec\succ A \oplus (A \vee C)^* \prec\succ A \vee (A \vee C)^* \prec\succ C^*$. Теперь $(A \oplus B) \sqcap (A \oplus (A \oplus C)^*) \prec\succ (A \oplus B) \sqcap C^*$. По предположению $B \not\prec (A \oplus C)^*$. Тогда $C \not\prec (A \oplus B)^*$, откуда $(A \oplus B) \not\prec C^*$. Таким образом, $(A \oplus B) \sqcap C^* \prec\succ C^*$.

Случаи (*QMV11*) и (*QMV12*) получаем простой проверкой.▪

В дальнейшем везде под ппф будем иметь в виду ппф P, для которой справедливо $\neg(A \vee \neg A) \prec P \prec \mathbf{1}$.

Определение 6.5.2.. Пусть Γ представляет собой непустое множество ппф. Ппф A QLO-QMV-*следует* из Γ, $\Gamma \prec A$, если A QLO-*следует* из Γ и существуют $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что

(а) $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \prec A$.

Если A QLO-QMV—следует из $\mathbf{1}$, то A QLO-QMV-*выводима* или является QLO-QMV-*теоремой*, что записывается как $\prec A$. Γ является QLO-QMV-*совместимым*, если существует хотя бы одна ппф, которая не QLO-QMV—следует из Γ, в противном случае Γ является QLO-QMV-*несовместимым*. Γ является QLO-QMV-*полным*, если оно QLO-QMV-совместимо и замкнуто относительно QLO-QMV-следования, т.е. тогда и только тогда, когда

(1) для некоторой ппф A не имеет место $\Gamma \prec A$;

(2) если $A \in \Gamma$ и $A \prec B$, то $B \in \Gamma$;

(3) $A, B \in \Gamma$ влечет $A \wedge B, A \vee B, A \oplus B \in \Gamma$;

(4) $A \in \Gamma$ влечет $J_{|\alpha|} A \in \Gamma$;

Лемма 6.5.3. Если $x \subseteq \Phi$, где Φ — множество ппф, является QLO-QMV-полным, тогда

(i) *$x \prec A$ тогда и только тогда, когда $A \in x$;*

(ii) *$1 \in x$ для всех ппф A.*

Доказательство. (i) Поскольку в QLO-QMV $A \prec A$, достаточность следует из определения QLO-QMV-следования. Необходимость следует из 6.5.2.(2), (3), (4).

(ii) По определению x непусто, следовательно, существует $B \in x$. Но по 6.5.2(4) $J_0 B \in x$, а отсюда по Ax9 и 6.5.2(2) получаем $\neg(A \vee \neg A) \in x$. Но поскольку для ппф P всегда справедливо $\neg(A \vee \neg A) \prec P \prec 1$, по 6.5.2(4) получаем требуемый результат. ▪

QLO-MV-полные множества и QLO-MV-следование связывает между собой следующая версия леммы Линденбаума:

Теорема 6.5.4. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда A принадлежит каждому QLO-QMV—полному расширению Γ.*

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существуют $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что либо $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$ либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \prec A$ либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$ $(1 \leq i \leq n)$. Если x является QLO-QMV—полным и $\Gamma \subseteq x$, то $B_1, \ldots, B_n \in x$. Применяя 6.5.2(3), (4), и затем 6.5.2(2), получаем $A \in x$.

Обратно, пусть A не QLO-QMV-следует из Г. Пусть $x = \{B: \Gamma \prec B\}$. По Ax0 имеем $\Gamma \subseteq x$, и по предположению $A \notin x$. Доказательство будет завершено, если удастся показать, что x является QLO-QMV—полным. Положим $B \in x$ и $B \prec C$, тогда существует $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec B$, либо $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \prec B$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec B$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec B$. Отсюда по Rx3 получаем $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec C$, либо $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \prec C$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec C$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec C$, следовательно, $\Gamma \prec C$, т.е. $C \in x$.

С другой стороны, если $B, C \in x$, то существуют $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec B$ и $C_1 \vee \ldots \vee C_n \prec C$. Тогда по Rx4 получаем $B_1 \vee \ldots \vee B_n \vee C_1 \vee \ldots \vee C_n \prec B \vee C$. Отсюда $\Gamma \prec B \vee C$, и, следовательно, $B \vee C \in x$. Учитывая условия, налагаемые на ппф, получаем отсюда $B \oplus C \in x$.

Далее, если $B \in x$, то существует $B' \in \Gamma$, такая, что $J_{|\alpha|} B' \prec B$. Но по Rx2 получаем $J_{|\beta|}J_{|\alpha'|}B' \prec J_{|\beta|}B$, и по Ax15 получаем $J_{|\beta\alpha'|}B' \prec J_{|\beta|}B$, следовательно, $\Gamma \prec J_{|\beta|}B \in x$.

Пусть теперь $B, C \in x$. Тогда существуют $B_1,\ldots,B_n$, $C_1,\ldots,C_n \in \Gamma$, такие, что $(B_1 \wedge\ldots\wedge B_n)\wedge(B_n\wedge\ldots\wedge B_1) \prec B$ и $(C_1\wedge\ldots\wedge C_n)\wedge(C_n\wedge\ldots\wedge C_1) \prec C$. Но тогда по Rx5 получаем $(B_1\wedge\ldots\wedge B_n\wedge C_1\wedge\ldots\wedge C_n)\wedge(C_n\wedge\ldots\wedge C_1\wedge B_n\wedge\ldots\wedge B_1) \prec B\wedge C$. Следовательно, $\Gamma \prec B\wedge C$, $B\wedge C \in x$.

Отсюда заключаем, что x замкнуто относительно QLO-QMV—следования, конъюнкции, дизъюнкции, J—оператора. Поскольку $A \notin x$, то A не QLO-QMV-следует из x, поэтому x является QLO-QMV-совместимым, что и заканчивает доказательство теоремы. ▪

Теорема 6.5.5. *Если x является QLO-QMV—полным и $A^* \notin x$, тогда существует QLO-QMV—полное множество y, такое, что $A \in y$, и для всех B либо $B^* \notin x$, либо $B \notin y$.*

Доказательство. Положим $y = \{B\colon \Gamma \prec B\}$. По Ax0 $A \in y$. Пусть теперь $B^* \in x$, что влечет $\neg B \in x$ по Rx11. Тогда $B \notin y$, иначе $A \prec B$, откуда $\neg B \prec \neg A$ по Rx1, $\neg A \in x$, а затем $A^* \in x$ в противоположность предположению. Далее, по 6.5.3(ii) имеем $\mathbf{1} \in x$. Согласно вышедоказанному, по Rx11 получаем $(\mathbf{1}\vee\neg\mathbf{1}) \notin y$. Действуя аналогично доказательству теоремы 6.5.4, можно показать, что y замкнуто относительно $\vee,\wedge;J$, и QLO-MV—следованию. Тогда ввиду того, что $(\mathbf{1}\vee\neg\mathbf{1})$ не QLO-QMV—следует из y, т.е. y является QLO-QMV—совместимым, получаем, что y является QLO-QMV—полным.▪

Поскольку наша система представляет собой расширение QLO, то для описания ее семантики воспользуемся определениями семантики QLO, модифицируя их по мере необходимости для передачи специфики QLO-QMV.

Определение 6.5.6. QLO-QMV-моделью называется четверка $\mathfrak{M} = \langle X, \perp, \xi, v\rangle$, где

(i) $\langle X, \perp, \xi\rangle$ является квантовым фреймом из определения 2.2.3;

(ii) v является оценкой (функцией верификации), сопоставляющей действительное число каждой пропозициональной переменной и формуле QLO-QMV для каждой точки (каждого элемента) из X, т.е. $v\colon(S\cup\Phi) \times X \to \mathbb{R}$, где S — множество пропозициональных переменных, Ф — множество ппф.

Обозначая множество $\{x \in X\colon v(A,x) = a\}$ как $\|A\|_a$, рекурсивно определяем значение формулы в QLO-QMV-модели путем добавления к определению значения формулы в QLO-модели следующих двух пунктов:

(7) $\|A \oplus B\|_a = \{x \in X\colon x \in \|A\|_b \cap \|B\|_c \;\&\; a = \min(1, b + c)\}$;

(8) $\|A^*\|_a = \{x \in X\colon x \perp \|A\|_{1-a} \;\&\; v(A^*, x) = 1 - a\}$.

Если Г является непустым множеством ппф, тогда говорим, что Г влечет A в x в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$: $\Gamma \models_x A$, тогда и только тогда, когда $\forall B \in \Gamma (v(B,x) \leq v(A,x))$, Г $\mathfrak{M}$—влечет A, $\mathfrak{M}$: $\Gamma \models A$, тогда и только тогда, когда либо $\exists B \in \Gamma (x \notin \|B\|_{(-)})$, т.е. когда B не верифицирована в x (верифицируемость, а не истинность, поскольку имеем дело с многозначной истинностной матрицей), либо Г влечет A во всех x в $\mathfrak{M}$. Если $\Im$ является QLO-QMV—фреймом, то Г $\Im$—влечет A тогда и только тогда, когда $\Im$: $\Gamma \models A$ для всех QLO-QMV—моделей $\mathfrak{M}$ на $\Im$. Если же $\wp$ является классом QLO-QMV—фреймов (т.е. квантовых фреймов), то Г $\wp$—влечет A, $\wp$: $\Gamma \models A$, тогда и только тогда, когда $\Im$: $\Gamma \models A$ для всех $\Im \in \wp$. Класс $\wp$ детерминирует QLO-QMV тогда и только тогда, когда для всех $A, B \in \Phi$, $A \prec B$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $A \models B$. $\wp$ сильно детерминирует QLO-QMV тогда и только тогда, когда для всех Γ, A, $\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $\Gamma \models A$.

Если определить область значений формулы A как

$$\|A\| = \bigcup_{a \in \mathrm{R}} \|A\|_a,$$

то, распространяя это определение на 6.5.6(1)-(8), в дальнейшем $\|p_i\|$, $\|A \vee B\|$, $\|A \wedge B\|$, $\|\neg A\|$, $\|J_{|\alpha|}A\|$, $\|A \oplus B\|$, $\|A^*\|$ будут обозначать области значений соответствующих формул, а $\|A\|_{(-)}$ будет обозначать произвольное значение соответствующей формулы.

Лемма 6.5.7. *Для любой QLO-QMV-модели $\mathfrak{M}$ и любой $A \in \Phi$, $\|A\|_{(-)} \in \xi$.*

Доказательство. Получаем индукцией по длине A, используя 6.5.6. ▪

Теорема 6.5.8 (непротиворечивость QLO-QMV). *$\Gamma \prec A$ только, если Θ: $\Gamma \models A$, где Θ — класс всех QLO-QMV-фреймов.*

Доказательство. Сводится путем индукции по QLO-QMV-следованию к демонстрации того факта, что этот результат справедлив для Ax1-Ax16 и сохраняется при применении Rx1--Rx5, Rx9-Rx11. Нас, естественно, будут интересовать только случаи Rx9-Rx11 (с учетом доказательства для QLO).

Rx9. Предположим $\mathfrak{M}:\neg(C\vee\neg C)\models A$, $\mathfrak{M}:A\models\mathbf{1}$, $\mathfrak{M}:\neg(C\vee\neg C)\models B$, $\mathfrak{M}:B\models\mathbf{1}$, $\mathfrak{M}:A\vee B\models\mathbf{1}$. Согласно определению $\mathfrak{M}:\neg(C\vee\neg C)\models_x A$ тогда и только тогда, когда $v(\neg(C\vee\neg C),x)\leq v(A,x)$, т.е. $0\leq v(A,x)$, и $\mathfrak{M}:A\models_x\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $v(A,x)\leq v(\mathbf{1},x)$, т.е. $v(A,x)\leq 1$. То же самое справедливо для B. Помимо этого получаем $v(A\vee B,x)\leq v(\mathbf{1},x)$. Тогда по 6.5.6(2),(7) получаем, что $v(A\vee B,x)=v(A,x)+v(B,x)=v(A\oplus B,x)$. В обратную сторону доказательство очевидно.

Rx10. По предположению $\mathfrak{M}:\mathbf{1}\models A\oplus B$. Тогда имеем $\mathfrak{M}:\mathbf{1}\models_x A\oplus B$ тогда и только тогда, когда $1\leq v(A\oplus B,x)$. Но поскольку $v(A\oplus B,x)=\min(1,v(A,x)+v(B,x))$, то очевидным образом $1=v(A\oplus B,x)$.

Rx11. Пусть $\mathfrak{M}:\neg(C\vee\neg C)\models A$, $\mathfrak{M}:A\models\mathbf{1}$. Тогда $\mathfrak{M}:\neg(C\vee\neg C)\models_x A$ тогда и только тогда, когда $0\leq v(A,x)$, и $\mathfrak{M}:A\models_x\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $a=v(A,x)\leq 1$. Далее, $y\in\|\neg A\|_{-a}$ только если $x\perp y$. По 6.5.6(2) получаем $y\in\|\mathbf{1}\vee\neg A\|_c$ тогда и только тогда, когда $y\in\|\mathbf{1}\|_1\cap\|\neg A\|_{-a}$ и $c=1-a$. Но по 6.5.6(8) получаем, что $y\in\|A^*\|_c$. ▪

Определение 6.5.9. Если L является бимодальной квантовой логикой эффектов, то каноническая QLO-QMV—модель для L есть структура $\mathfrak{M}_\mathrm{L}=\langle X_\mathrm{L},\perp_\mathrm{L},\xi_\mathrm{L},v_\mathrm{L}\rangle$, где:

(5) $X_\mathrm{L}=\{x\subseteq\Phi$: x является QLO—QMV-полным множеством$\}$;

(6) $x\perp_\mathrm{L}y$ тогда и только тогда, когда существует ппф A, такая, что $A^*\in x$, $A\in y$;

(7) $\xi_\mathrm{L}=\{|A|^\mathrm{L}\colon A\in\Phi\}$, где $|A|^\mathrm{L}=\{x\in X_\mathrm{L}\colon A\in x\}$;

(8) $v_\mathrm{L}\colon(\mathrm{S}\cup\Phi)\times X_\mathrm{L}\to\mathbb{R}$.

Обозначая множество $\{x\in X_\mathrm{L}\colon v(A,x)=a\}$ как $\|A\|^\mathrm{L}{}_a$, получаем определения значений формул и областей значения в канонической модели $\mathfrak{M}_\mathrm{L}$ аналогично 6.5.6(1)-(8).

Лемма 6.5.10. *$\mathcal{F}_\mathrm{L}=\langle X_\mathrm{L},\perp_\mathrm{L},\xi_\mathrm{L}\rangle$ является QLO-QMV—фреймом.*

Доказательство. Пусть $x\in X_\mathrm{L}$. Тогда для любой A либо не имеет места $A^*, A \in x$, либо по Ax7 x будет QLO-QMV—несовместимой. Следовательно, $x \perp_L x$ не имеет места. Если $x \perp_L y$, то для некоторой ппф A имеем $A^* \in x$, $A \in y$. Используя Ax2, приходим к заключению $B^* \in y$, $B \in x$, где $B = A^*$. Таким образом $x \perp_L y$. Следовательно, $\perp_L$ является отношением ортогональности. Проверим, является ли $\|A\|^L$ $*_L$-замкнутым. Предположим, что $x \notin \|A\|^L$, т.е. $A \notin x$. По Ax2 $\neg\neg A \notin x$, откуда по 6.4.5 существует $y \in X_L$, такой, что $x \perp_L y$ не имеет места и $\neg A \in y$. Тогда если $z \in \|A\|^L$, то $A \in z$ и, следовательно, $y \perp_L z$. Отсюда $y \perp_L \|A\|^L$ как и требовалось. Очевидным образом ξ_L будет замкнуто относительно пересечения (в силу свойств QLO-QMV—следования и QLO-QMV—полноты). ▪

Теорема 6.5.11 **(*фундаментальная теорема для QLO-QMV*).** *Для каждой ппф A и для всякого $x \in X$, $x \in \|A\|^L$ тогда и только тогда, когда $A \in x$.*

Доказательство. Доказывается индукцией по длине A. В случаях $A = B \vee C$, $A = B \wedge C$, $A = J_\alpha B$, $A = B \oplus C$ нетрудно видеть, что из условия $B \vee C, B \wedge C, J_\alpha B, B \oplus C \in x$ следует $B, C \in x$. Достаточно обратиться к 6.5.6(2),(3),(5),(7). Конверсия следует из 6.5.2(3),(4).

Предположим теперь, что $A = B^*$ и для B теорема выполнима. Пусть $B^* \in x$. Тогда если $y \in \|B\|^L_{(-)}$, то по индуктивному предположению $B \in y$ и отсюда $x \perp_L y$. По 6.5.6(8) следует $x \in \|B\|^L_{(-)}$. С другой стороны, если $B^* \notin x$, то согласно 6.5.5 существует $y \in X_L$, такой, что $B \in y$, откуда по индуктивному предположению $y \in \|B\|^L_{(-)}$, но $x \perp_L y$ не имеет места. По 5.3.3(4) приходим к выводу, что $x \notin \|B\|^L_{(-)}$. ▪

Следствие 6.5.12. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}_L : \Gamma \models A$.

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существует $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$, либо $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A (1 \leq i \leq n)$. Если $x \in \|B\|^L_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, тогда по 6.5.11. $B_1, \ldots, B_n \in x$. По 5.2.1(2)-(4) следует, что $A \in x$, откуда $x \in \|A\|^L_{(-)}$.

Наоборот, если A не является QLO-QMV—выводимой из Γ, то по 5.2.3 существует $x \in X_L$, такой, что $\Gamma \subseteq x$ и $A \notin x$. Тогда по 6.5.8 $x \in \|B\|^L_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, но $x \notin \|A\|^L_{(-)}$. ▪

Теорема 6.5.13. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F}_L : \Gamma \models A$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ будет произвольной QLO-QMV—

моделью на $\mathcal{J}_L$; для каждого $i<\omega$, $\|p_i\|^m \in \xi_L$, тогда существует B_i, такая, что $\|p_i\|^m_{(-)} = |B_i|^L_{(-)}$ ($|B_i|^L_{(-)}$ определяется как в 5.3.6) и $|B_i|^L_{(-)} = \|B_i\|^L_{(-)}$. Для любой ппф C пусть C' будет результатом подстановки B_i вместо каждого вхождения p_i. Очевидным образом в Г существуют $A_1,\ldots,A_n$, такие, что $A_1\vee\ldots\vee A_n \prec A$, либо $A_1\oplus\ldots\oplus A_n \prec A$, либо $(A_1\wedge\ldots\wedge A_n) \wedge (A_n\wedge \ldots \wedge A_1)\prec A$, либо $J_{|\alpha|}A_i \prec A$ ($1 \le i \le n$). Используя предложенную подстановку, получаем $A'_1\vee\ldots\vee A'_n \prec A'$ и т.д. Тогда по 5.3.9 $\mathcal{M}_L$: $A'_1\vee\ldots\vee A'_n \models A'$, либо $\mathcal{M}_L$: $A'_1\oplus\ldots\oplus A'_n \models A'$, либо $\mathcal{M}_L$: $(A'_1\wedge\ldots\wedge A'_n) \wedge (A'_n\wedge\ldots\wedge A'_1) \models A'$, либо $\mathcal{M}_L$: $J_{|\alpha|}A'_i \models A'$. Но простой индукцией получаем, что $\|C\|^m = \|C'\|^m_L$; откуда $\mathcal{M}_L$: $A_1\vee\ldots\vee A_n \models A$, либо $\mathcal{M}_L$: $A_1\oplus\ldots\oplus A_n \models A$, либо $\mathcal{M}_L$: $(A_1\wedge\ldots\wedge A_n) \wedge (A_n\wedge\ldots\wedge A_1) \models A$, либо $\mathcal{M}_L$: $J_{|\alpha|}A_i \models A$, откуда $\mathcal{M}$: $\Gamma \models A$. Поскольку все это выполнимо в любой модели $\mathcal{M}$ на $\mathcal{J}_L$, то отсюда заключаем, что $\mathcal{J}_L : \Gamma \models A$. ▪

***Следствие 6.5.14* (*сильная полнота QLO-QMV*).** Θ: $\Gamma \models A$ *только если* $\Gamma \prec A$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{J}_L$ является по 6.5.10 QLO-QMV-фреймом, то Θ содержит $\mathcal{J}_L$ в качестве элемента. Остальное очевидно. ▪

Таким образом, 6.5.14 устанавливает тот факт, что система QLO-QMV сильно детерминирована классом всех QLO-QMV-фреймов.

6.6. Стрела времени в квантовой логике наблюдаемых

Полученная система QLO-MV модальной логики эффектов ввиду ее семантической (алгебраической) близости к бесконечнозначной логике Лукасевича заставляет задуматься о возможности расширения ее языка с помощью оператора направленного времени. Напомним, что система $Ł_{\aleph_0}F$ бесконечнозначной логики направленного времени была построена с помощью оператора «будущего времени» **F** («будет так, что») и добавления к системе $Ł_{\aleph_0}$ следующих аксиом и правила вывода:

$\mathbf{F}(A \to B) \to (\mathbf{F}A \to \mathbf{F}B)$

$\mathbf{FF}A \to \mathbf{F}A$

$$\frac{A}{\mathbf{G}A}$$

Если попытаться ввести оператор **F** в QLO-MV, то первая проблема, с которой мы сталкиваемся в этом случае, состоит в том, что в QLO-MV отсутствует связка импликации, т.е. прямое добавление этих аксиом к QLO-MV невозможно. Однако это препятствие легко преодолимо, если учесть, что в MV-алгебре импликация вводится с помощью определения

$a \to b = a^* \oplus b$

Это означает, что вместо импликации основное внимание следует уделить операции $\oplus$. Тогда можно ввести следующие аксиомы

AxF1. $\mathbf{F}(\nabla A \vee \nabla B) \prec (\mathbf{F}\nabla A \vee \mathbf{F}\nabla B)$

AxF2. $\mathbf{FF}\nabla A \prec \mathbf{F}\nabla A$

и правило вывода

RxF1. $\dfrac{\nabla A \prec \nabla B}{\mathbf{F}\nabla A \prec \mathbf{F}\nabla B}$

как эквивалент аксиоматики системы $Ł_{\aleph_0}F$. Обозначим систему, полученную добавлением к системе QLO-MV аксиом AxF1, AxF2 и правила RxF1 как QLO-MVF.

Определим теперь $F[A] = [\mathbf{F}A]$, $[A] \oplus [B] = [\nabla A \vee \nabla B]$, $[A] \mapsto [B] = [\neg\nabla A \vee \nabla B]$, $[A]^* = [\nabla\neg A]$.

Теорема 6.6.1. *Структура* $FW = \langle Frm, \mapsto, ^*, F, 1\rangle$, *где* $Frm = \{P/_{\sim}$: *P есть формула с префиксом* $\nabla\}$, $1 = [\mathbf{1}]$, *представляет собой темпоральную алгебру Вайсберга.*

Доказательство. По теореме 6.4.1. структура $F = \langle Frm, \oplus, ^*, 0, 1\rangle$, где $0 = [\neg(A \vee \neg A)]$; представляет собой MV алгебру. Как известно (см. [Font *et al* 1984, p.13]), при определении $a \to b = a^* \oplus b$ любая MV алгебра будет алгеброй Вайсберга. Остается только проверить выполнимость темпоральных аксиом (1.15), (1.16), т.е.

$F(x \mapsto y) \leq (Fx \mapsto Fy)$

$FFx \leq Fx$

Но их выполнимость является прямым следствие аксиом AxF1 и AxF2. ▪

В дальнейшем, как и в случае QLO-MV, везде под ппф будем иметь в виду ппф с префиксом ∇.

Определение 6.6.2. Пусть Г представляет собой непустое множество ппф. Ппф A QLO-MVF-*следует* из Г, $\Gamma \prec A$, если A QLO-MV-*следует* из Г и существуют $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$, такие, что

(a) $\mathrm{F}B_i \prec A$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Если A QLO-MVF-следует из 1, то A QLO-MVF-*выводима* или является QLO-MVF-*теоремой*, что записывается как $\prec A$. Г является QLO-MVF-*совместимым*, если существует хотя бы одна ппф, которая не QLO-MVF—следует из Г, в противном случае Г является QLO-MVF-*несовместимым.* Г является QLO-MVF-*полным*, если оно QLO-MVF-совместимо и замкнуто относительно QLO-MV-следования, т.е. тогда и только тогда, когда

(1) Г является QLO-MV-полным;

(2) $A \in \Gamma$ влечет $\mathrm{F}A \in \Gamma$.

Лемма 6.6.3. Если $x \subseteq \Phi$, где Φ — множество ппф, является QLO-MVF-полным, тогда

(i) $x \prec \mathrm{F}A$ *тогда и только тогда, когда* $A \in x$;

(ii) $\mathrm{F}\nabla\neg(A \vee \neg A) \in x$ *для всех ппф A с префиксом* ∇.

Доказательство. (i) Поскольку $\vdash_{\text{QLO-MVF}} A \prec A$, достаточность следует из определения QLO-MVF-следования. Необходимость следует из 6.6.2(1), (2).

(ii) По 6.4.3(ii) $\nabla\neg(A \vee \neg A) \in x$. Отсюда используя RxF1, получаем требуемый результат. ▪

QLO-MVF-полные множества и QLO-MVF-следование связывает между собой следующая версия леммы Линденбаума:

Теорема 6.6.4. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда A принадлежит каждому QLO-MVF-полному расширению* Г.

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существуют $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$, такие, что либо $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|}B_i \prec A$, либо $\nabla B_i \prec A$, либо $\mathrm{F}\nabla B_i \prec A$ $(1 \le i \le n)$. Если x является QLO-MVF-полным и $\Gamma \subseteq x$, то $B_1,\ldots,B_n \in x$. Применяя 6.6.2(1), (2), получаем $A \in x$.

Обратно, пусть A не QLO-MVF-следует из Г. Пусть $x = \{B\colon \Gamma \prec B\}$. По Ax0 имеем $\Gamma \subseteq x$, и по предположению $A \notin x$. Доказательство будет завершено, если удастся показать, что x

является F—полным, поскольку QLO-MV-полнота очевидна в силу определения. Положим $B \in x$ и $B \prec C$, тогда существует $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$, такие, что $\mathbf{F}B_i \prec C$, следовательно, $\Gamma \prec C$, т.е. $C \in x$.

С другой стороны, если $B \in x$, тогда существует $B' \in \Gamma$, такая, что $B' \prec B$. Поскольку по RxF1 $\mathbf{F}B' \prec \mathbf{F}B$, то $\Gamma \prec \mathbf{F}B \in x$.

Отсюда заключаем, что x замкнуто относительно QLO-MV-следования, конъюнкции, дизъюнкции, J-оператора, ∇-оператора и F-оператора. Поскольку $A \notin x$, то A не QLO-MVF-следует из x, поэтому x является QLO-MVF-совместимым, что и заканчивает доказательство теоремы. ▪

Чтобы описать семантику F-оператора в рассматриваемой квантовой логике эффектов, напомним, что в системе $Ł_{\aleph_0}F$ семантическая интерпретация этого оператора существенно основывалась на реляционной структуре с тернарным отношением достижимости. Но откуда в QLO-MVF может появиться подобное отношение и подобная структура?

В связи с $Ł_{\aleph_0}F$ ранее уже упоминалась следующая метатеорема [Vasyukov 1993, p.157]:

Если $M_{Ł_{\aleph_0}}$ есть логическая матрица для $Ł_{\aleph_0}$ и $Ł_{\aleph_0}$ семантически непротиворечива по отношению к семантике в стиле Крипке с оценкой в $M_{Ł_{\aleph_0}}$, то $M_{Ł_{\aleph_0}}$ обеспечивает полноту $Ł_{\aleph_0}$ по отношению к этой семантике.

Согласно этому результату, мы можем использовать функцию $q\colon v \to [0,1]$, позволяющую получить логическую матрицу для $Ł_{\aleph_0}$, в качестве оценки, ассоциированной с возможными мирами (в нашем случае — состояниями квантовой системы). Это и дает нам возможность рассматривать тернарное отношение достижимости между состояниями, удовлетворяющее соответствующим постулатам и позволяющее рассматривать семантику F-оператора в соответствии с ранее формулированными определениями.

Поскольку наша система представляет собой расширение QLO-MV, то для описания ее семантики воспользуемся определениями семантики QLO-MV, модифицируя их по мере необходимости для передачи специфики QLO-MVF. Первая модификация заключается в изменении определения QLO-MV-модели.

Определение 6.6.5. QLO-MVF-моделью называется пятерка $\mathfrak{M} = \langle X, \perp, R, \xi, v \rangle$, где

(i) $\langle X, \perp, \xi \rangle$ является квантовым фреймом из определения 2.2.3;

(ii) R представляет собой тернарное отношение на X, такое, что выполняются следующие постулаты:

$p1$. $ROaa$

$p2$. $Raaa$

$p3$. $R^2abcd \Rightarrow R^2acbd$

$p4$. $R^2Oabc \Rightarrow Rabc$

p5. $Rabc \Rightarrow Rac^{\perp}b^{\perp}$

$p6$. $a^{\perp\perp} = a$

$p7$. $ROab \veebar ROba$

Здесь $O \in X$, $a^{\perp}$ означает $x \in X$, такой, что $x \perp a$ и используются следующие определения:

$d1$. $a < b =_{def} Roab$

$d2$. $R^2abcd =_{def} \exists x(Rabx \,\&\, Rxcd \,\&\, x \in K)$

(iii) v является оценкой (функцией верификации), сопоставляющей действительное число каждой пропозициональной переменной и формуле QLO-MVF для каждой точки (каждого элемента) из X, т.е. $v:(S \cup \Phi) \times X \rightarrow \mathbb{R}$, где S — множество пропозициональных переменных, Ф — множество ппф.

Вторая модификация сводится к добавлению к определению значения формулы в QLO-MV-модели следующего пункта:

(8) $\|\mathbf{F}A\|_a = \{x \in X$: $a = \min\{q(A,y,b)\}$ и для всяких $y,z \in X$ $Rx^{\perp}yz \Rightarrow q(A,y,b) \leq q(A,z,c)\}$.

Интуитивно это означает, что тернарное отношение между состояниями вместе с возрастанием значения q определяет направление времени.

Теорема 6.6.7 (непротиворечивость QLO-MVF). $\Gamma \prec A$ *только, если* Θ: $\Gamma \models A$, *где* Θ *— класс всех QLO-MVF-фреймов.*

Доказательство. Требуется рассмотреть только случаи аксиом и правил вывода с **F**-оператором.

AxF1. Пусть $x \in \|\mathbf{F}(\nabla A \vee \nabla B)\|_a$. Тогда по 6.6.6(8) $a = \min\{q(\nabla A \vee \nabla B, y, b)\}$ и для всяких $y,z \in X$ $Rx^{\perp}yz \Rightarrow q(\nabla A \vee \nabla B, y, b) \leq q(\nabla A \vee \nabla B, z, c)$. Это означает, что $y \in \|\nabla A\|_d \cap \|\nabla B\|_e$ где $d = q(\nabla A, y, f)$,

$e = q(\nabla B,y,g)$. То же самое справедливо в отношении z, т.е. $z \in \|\nabla A\|_h \cap \|\nabla B\|_k$ где $h = q(\nabla A,z,l)$, $k = q(\nabla B,z,m)$. Таким образом, $d + e \leq h + k$ и $a = \min\{d + e\}$.

Выбор минимального из значений $d + e$ означает в нашем случае выбор минимумов d и e, т.е. мы явно выбираем наименьшие из значений d и e для случая $d \leq h$ и $e \leq k$. Это означает, что будет выполняться условие: для всяких $y,z \in X$ $Rx^{\perp}yz \Rightarrow q(\nabla A,y,b') \leq q(\nabla A,z,c')$ и $q(\nabla B,y,b'') \leq q(\nabla A,z,c'')$. Но тогда по 6.6.6(8) получаем $x \in \|\mathbf{F}\nabla A\|_a$, $x \in \|\mathbf{F}\nabla B\|_a$, и $a' = \min\{q(A,x,b')\}$, $a'' = \min\{q(\nabla A,x,b'')\}$. Отсюда $x \in \|\mathbf{F}\nabla A\|_a \cap \|\mathbf{F}\nabla B\|_a$, и, следовательно, $x \in \|\mathbf{F}\nabla A \vee \mathbf{F}\nabla B)\|_a$, $a = a' + a''$.

AxF2. Пусть $x \in \|\mathbf{FF}\nabla A\|_a$. Тогда $a = \min\{q(\mathbf{F}\nabla A,y,b)\}$ и для всяких $y,z \in X$ $Rx^{\perp}yz \Rightarrow q(\mathbf{F}\nabla A,y,b) \leq q(\mathbf{F}\nabla A,z,c)$. Далее, так как $y \in \|\mathbf{F}\nabla A\|_b$, то это дает нам $Ry^{\perp}y'z'$ и $q(\nabla A,y',b') \leq q(\nabla A,z',c')$. Отсюда приходим к заключению, что $Rx^{\perp}yz\ \&\ Ry^{\perp}y'z' \Rightarrow_{p5} Rx^{\perp}z^{\perp}y^{\perp}\ \&\ Ry^{\perp}y'z' \Rightarrow_{d2} R^2x^{\perp}z^{\perp}y'z' \Rightarrow_{p3} R^2x^{\perp}y'z^{\perp}z' \Rightarrow_{d2} \exists x' \in X\,(Rx^{\perp}y'x'\ \&\ Rx'z^{\perp}z') \Rightarrow_{q1} Rx^{\perp}y'x'\ \&\ Rz^{\perp}x'z'$. Согласно $p7$ у нас имеется две альтернативы: $x' < y'$ или $y' < x'$. Первая из них приводит к $Rx^{\perp}y'x'\ \&\ ROx'y' \Rightarrow_{q1} Rx^{\perp}y'x'\ \&\ Rx'Oy' \Rightarrow_{d2} R^2x^{\perp}y'Oy' \Rightarrow_{p3,\,p4} Rx^{\perp}y'y'$ и, таким образом, $x \in \|\mathbf{F}\nabla A\|_b$. Вторая альтернатива дает нам $Rz^{\perp}x'z'\ \&\ ROy'x' \Rightarrow_{q1} ROy'x'\ \&\ Rx'z^{\perp}z' \Rightarrow_{d2} R^2Oy'z^{\perp}z' \Rightarrow_{p3,\,q1} Rz^{\perp}y'z'$. Это означает, что $q(\mathbf{F}\nabla A,z,b) = q(\mathbf{F}\nabla A,y,b) = \min\{q(\nabla A,y',b')\}$. Но тогда и $a = \min\{q(\nabla A,y',b')\}$ и $x \in \|\mathbf{F}\nabla A\|_b$, ввиду $Rx^{\perp}yz$.

RxF1. В этом случае выполнимость очевидна из определения отношения $\models$. ▪

Определение 6.6.8. Если L является модальной квантовой логикой наблюдаемых с F-оператором, то каноническая QLO-MVF-модель для L есть структура $\mathfrak{M}_L = \langle X_L, \perp_L, R_L, \xi_L, v_L\rangle$, где:

(1) $X_L = \{x \subseteq \Phi$: x является QLO-MVF-полным множеством$\}$;

(2) $x \perp_L y$ тогда и только тогда, когда существует ппф A, такая, что $\nabla\neg A \in x$, $A \in y$;

(3) $R_L xyz$ тогда и только тогда, когда существует ппф ∇A, такая, что $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in x$, $\nabla A \in y$, $\nabla A \in z$;

(4) $\xi_L = \{|A|^L: A \in \Phi\}$, где $|A|^L = \{x \in X_L: A \in x\}$;

(5) $v_L: (S \cup \Phi) \times X_L \rightarrow \mathbb{R}$.

Обозначая множество $\{x \in X_L: v(A,x) = a\}$ как $\|A\|^L_a$, получаем определения значений формул и областей значения в канонической модели $\mathfrak{M}_L$ аналогично 6.4.6(1)-(7) (плюс новый пункт (8)).

Лемма 6.6.9. $\mathcal{F}_L = \langle X_L, \perp_L, R_L, \xi_L \rangle$ *является QLO-MVF-фреймом.*

Доказательство. Пусть $x \in X_L$. Тогда для любой A либо не имеет места $\nabla\neg A, A \in x$, либо по ∇-следствиям Ax7 x будет QLO-MVF-несовместимой. Следовательно, $x \perp_L x$ не имеет места. Если $x \perp_L y$, то для некоторой ппф A имеем $\nabla\neg A \in x$, $A \in y$. Используя Ax2, приходим к заключению $\nabla\neg B \in y$, $B \in x$, где $B = \nabla\neg A$. Таким образом, $x \perp_L y$. Следовательно, $\perp_L$ является отношением ортогональности. Проверим, является ли $\|A\|^L$ $*_L$-замкнутым. Предположим, что $x \notin \|A\|^L$, т.е. $A \notin x$. По Ax2 $\neg\neg A \notin x$, откуда по 6.4.5 существует $y \in X_L$, такой, что $x \perp_L y$ не имеет места и $\neg A \in y$. Тогда если $z \in \|A\|^L$, то $A \in z$ и, следовательно, $y \perp_L z$. Отсюда $y \perp_L \|A\|^L$ как и требовалось.

Пусть O есть множество теорем QLO-MVF и $\nabla A \notin O$. Поскольку O QLO-MVF-полно, то $\mathbf{F}\nabla A \notin O$. Но тогда $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in O$. Пусть x есть некоторое QLO-MVF-полное множество формул и $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in x$ (это возможно, потому что O представляет собой максимальное множество). Но тогда $\mathbf{F}\nabla A \in x^{\perp_L}$ (где $x^{\perp_L}$ есть $y \in X_L$, такое, что $y \perp_L x$) и $\nabla A \in x^{\perp_L}$ в силу QLO-MVF-полноты. Это дает нам выполнимость свойства $R_L Oaa$.

С другой стороны, если сразу выбрать $\nabla\neg A \in x^{\perp_L}$, то точно так же получаем $\mathbf{F}\nabla\neg A \in x^{\perp_L}$, $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla\neg A \in x$. Но, с другой стороны, получаем по определению $\nabla A \in x$, что дает нам выполнимость свойства $R_L aaa$.

Допустим теперь, что $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in x$, $\nabla A \in y$, $\nabla A \in z$ и $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in z$, $\nabla A \in s$, $\nabla A \in t$. Нетрудно перегруппировать это с соответствующей заменой z на r как $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in x$, $\nabla A \in s$, $\nabla A \in r$ и $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in r$, $\nabla A \in y$, $\nabla A \in t$. Но это дает выполнение постулата $R_L^2 abcd \Rightarrow R_L^2 acbd$.

Теперь допустим, что $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in O$, $\nabla A \in y$, $\nabla A \in z$ и $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in z$, $\nabla A \in s$, $\nabla A \in t$. Мы всегда можем выбрать y таким образом, что $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in y$ (учитывая свойство $\mathrm{R}_L aaa$), а в этом случае $\nabla\neg\mathbf{F}\nabla A \in y$, $\nabla A \in s$, $\nabla A \in t$ обеспечат нам выполнимость постулата

$R_L^2Oabc \Rightarrow R_L abc$. Нетрудно проверить остальные постулаты, действуя подобным же образом.

Очевидным образом ξ_L будет замкнуто относительно пересечения (в силу свойств QLO-MVF-следования и QLO-MVF-полноты). ▪

Теорема 6.6.10 (***фундаментальная теорема для QLO-MVF***). *Для каждой ппф A и для всякого $x \in X$, $x \in \|A\|^L$ тогда и только тогда, когда $A \in x$.*

Доказательство. Доказывается индукцией по длине A. В случаях $A = B \vee C$, $A = B \wedge C$, $A = J_\alpha B$, $A = \nabla B$, $A = \mathrm{F}\nabla B$ нетрудно видеть, что из условия $B \vee C, B \wedge C, J_\alpha B, \nabla B, \mathrm{F}\nabla B \in x$ следует $B, C \in x$. Достаточно обратиться к 6.4.6(2),(3),(5),(7), 6.6.5(8). Конверсия следует из 6.6.2(1).

Для случая $A = \neg B$ доказательство то же, что и в случае QLO-MV. ▪

Следствие 6.6.11. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}_L : \Gamma \models A$.

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существуют $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$, либо $\nabla B_i \prec A$, либо $\mathrm{F} B_i \prec A$ $(1 \leq i \leq n)$. Если $x \in \|B\|^L_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, тогда по 6.6.10. $B_1, \ldots, B_n \in x$. По 5.2.1(2)-(4) следует, что $A \in x$, откуда $x \in \|A\|^L_{(-)}$.

Наоборот, если A не является QLO-MVF—выводимой из Γ, то по 5.2.3 существует $x \in X_L$, такой, что $\Gamma \subseteq x$ и $A \notin x$. Тогда по 6.6.8 $x \in \|B\|^L_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, но $x \notin \|A\|^L_{(-)}$. ▪

Теорема 6.6.12. $\Gamma \prec A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F}_L : \Gamma \models A$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ будет произвольной QLO—моделью на $\mathcal{F}_L$; для каждого $i < \omega$, $\|p_i\|^{\mathcal{M}} \in \xi_L$, тогда существует B_i, такая, что $\|p_i\|^{\mathcal{M}}_{(-)} = |B_i|^L_{(-)}$ ($|B_i|^L_{(-)}$ определяется как в 5.3.6) и $|B_i|^L_{(-)} = \|B_i\|^L_{(-)}$. Для любой ппф C пусть C' будет результатом подстановки B_i вместо каждого вхождения p_i. Очевидным образом в Γ существуют $A_1, \ldots, A_n$, такие, что $A_1 \vee \ldots \vee A_n \prec A$, либо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} A_i \prec A$, либо $\nabla A_i \prec A$, либо $\mathrm{F}\nabla A_i \prec A$ $(1 \leq i \leq n)$. Используя предложенную подстановку, получаем $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \prec A'$ и т.д. Тогда по 5.3.9 $\mathcal{M}_L : A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \models A'$, либо $\mathcal{M}_L : (A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_n) \wedge (A'_n \wedge \ldots \wedge A'_1) \models A'$, либо $\mathcal{M}_L : J_{|\alpha|} A'_i \models A'$ или $\mathcal{M}_L : \nabla A'_i \models A'$, или $\mathcal{M}_L : \mathrm{F}\nabla A'_i \models A'$. Но индукцией получаем, что $\|C\|^{\mathcal{M}} = \|C'\|^{\mathcal{M}}_L$; откуда $\mathcal{M}_L : A_1 \vee \ldots \vee A_n \models A$, либо $\mathcal{M}_L : (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \models A$, либо $\mathcal{M}_L$: $J_{|\alpha|}A_i \vDash A$, или $\mathcal{M}_L$: $\nabla A_i \vDash A$, или $\mathcal{M}_L$: $\mathrm{F}\nabla A_i \vDash A$, откуда $\mathcal{M}$: $\Gamma \vDash A$. Поскольку все это выполнимо в любой модели $\mathcal{M}$ на $\mathcal{J}_L$, то отсюда заключаем, что $\mathcal{J}_L$: $\Gamma \vDash A$. ▪

***Следствие 6.6.13* (*сильная полнота QLO-MVF*).** Θ: $\Gamma \vDash A$ *только если* $\Gamma \prec A$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{J}_L$ является по 6.6.9 QLO-MVF-фреймом, то Θ содержит $\mathcal{J}_L$ в качестве элемента. Остальное очевидно. ▪

Таким образом, 6.6.13 устанавливает тот факт, что QLO-MVF сильно детерминирована классом всех QLO-MVF-фреймов.

Глава седьмая
Комплекснозначная квантовая логика наблюдаемых

7.1. Логические основания комплекснозначности

В целом можно считать, что при формулировке QLO и NQLO были учтены и логически интерпретированы все 10 аксиом общего обоснования алгебраического подхода в том виде, как они сформулированы Ж. Эмхом [Эмх 1976]. Более того, системы TQLO и TNQLO описывают некоторые случаи, относящиеся уже к проблематике глобальных теорий квантовых систем. В то же время можно задаться вопросом: как выразить в QLO тот факт, что фундаментальными пространствами квантовой механики являются бесконечномерные гильбертовы пространства над полем комплексных чисел?

Этот вопрос задавал еще Й. Яух, правда его интересовала лишь причина этого явления. Как ни странно, в рамках QLO подобный вопрос встает лишь при формулировке понятия QLO-полных множеств, но на аксиоматику он влияния не оказал. Но если попытаться явно перейти к комплексной алгебре наблюдаемых, то в QLO это скажется в формулировке оценки на QLO-фрейме или матрице m_{QLO}. Можно показать, что если ввести еще один оператор отрицания (т.е. провести различие между видами отрицания, аналогично, например, различию между контрарным и контрадикторным отрицаниями в логике), то аксиоматика QLO при этом потребует весьма незначительной модификации. Но поскольку алгебраически этому оператору будет соответствовать инволюция, то матрица

m_{QLO} превращается в комплексную матрицу, а тогда встает вопрос: что представляют собой комплексное истинностное значение с логической точки зрения?

Оказывается, можно дать логическое объяснение комплексному значению истинности (например, считать его мнимую часть контекстуальной истинностью) и даже более того: построить комплекснозначные расширения некоторых известных логических систем (см. [Васюков 1987]). С математической точки зрения переход от действительных чисел к комплексным в качестве области значений истинности достаточно тривиален — он обусловлен тем фактом, что комплексные числа представляют собой расширение поля действительных чисел. Логические основания подобного перехода далеко не так очевидны и требуют детального анализа.

Рассмотрим в качестве иллюстрации высказывание «Сократ - грек». Представим себе ситуацию, когда из четырех беседующих двое утверждают, что так оно и есть, а двое оспаривают их мнение. Но всегда ли одно и то же утверждают согласные друг с другом собеседники?

Допустим, что на самом деле, с учетом подразумеваемого каждым из собеседников, их высказывания можно представить более точно в следующем виде:

1.1. Сократ — грек (а не перс).

1.2. Сократ - не грек (и не перс).

1.3. Сократ — не грек (он перс).

1.4. Сократ — грек (и перс).

Первое из высказываний в комментариях не нуждается. Что касается второго, то подобное мнение по данному вопросу можно было бы объяснить тем, что говорящему известен, например, тот факт, что среди предков Сократа были не греки, но и не персы (фракийцы, к примеру). Третьему же собеседнику, допустим, было точно известно, что дед Сократа был перс (о чем не знает второй из собеседников). И, наконец, четвертый собеседник точно знает, что дед Сократа (по материнской линии) был перс, но ему же известно, что отец Сократа — грек. С учетом всех этих обстоятельств высказывания 1.1. — 1.4 приобретают следующий вид:

2.1. Сократ — грек (а не перс: дед и отец были греки).

2.2. Сократ — не грек (и не перс: среди предков были фракийцы).

2.3. Сократ — не грек (он перс: дед по материнской линии — перс).

2.4. Сократ — грек (и перс: дед по материнской линии перс, отец — грек).

При таком представлении структуры высказываний попарное согласие между собой говорящих носит весьма поверхностный характер (что, впрочем, и дает себя знать при дальнейшем развитии беседы). Еще хуже может быть то обстоятельство, что все это говорится отнюдь не современниками Сократа (а, например, людьми XXI века). Стоит, по-видимому, истинность подобных высказываний реально оценивать лишь с некоторой степенью достоверности, например, в рамках многозначной логики. Отсюда нетрудно теперь прийти к мысли, что еще более адекватным было бы представление значений истинности анализируемых высказываний в виде комплексных чисел, что позволило бы в явном виде оценивать вклад правых частей высказываний 2.1-2.4 в окончательный итог оценки истинности высказываний. Таким образом, истинность 2.1-2.4 можно окончательно представить в виде

3.1. $x + \bar{y}i$

3.2. $\bar{x} + \bar{y}i$

3.3. $\bar{x} + yi$

3.4. $x + yi$

где x — истинностное значение высказывания «Сократ — грек», y — истинность высказывания «Сократ — перс», а $\bar{x}$, $\bar{y}$ — истинностные значения их отрицаний.

С подобной же точки зрения можно рассматривать, например, понятие *несовместимости* атомарных высказываний. Согласно К.Дюрру [Dürr 1935], если дано атомарное высказывание Fx и известно множество (конечное) всех свойств Qx, Hx и т.д., которые несовместимы с Fx для любых подстановок вместо x одних и тех же предметных констант, то NFa означает, что среди свойств, несовместимых с Fx, имеется, по крайней мере, одно, которое является свойством a. Если, например, имеются два несовместимых с Fx свойства Qx и Hx, то $NFx =_{def} Qx \vee Hx$, где дизъюнкция понимается в вышеупомянутом смысле и предполагает фактическую обоснованность или Qx, или Hx.

Если оценивать истинность высказываний комплексными числами, то мнимую часть комплексного значения истинности можно было бы рассматривать как ложность дизъюнкции высказываний, несовместимых с высказываниями, чья истинность оценивается действительной частью комплексного числа. В этом случае $x + yi$ выступает в роли полной информации об истинности с учетом несовместимости высказываний, релятивизирующих подобным образом смысл исходного высказывания. Иначе это можно квалифицировать как контекстуализацию высказывания, что в свою очередь приводит к истолкованию значений $x + \bar{y} i$ как бесконтекстной истинности. Отсюда $\bar{x} + yi$ и $\bar{x} + \bar{y}i$ в этом случае можно рассматривать как контекстное или бесконтекстное отрицания соответственно.

И, наконец, подобным же способом можно оценивать истинность высказываний типа «Снег голубоват» (высказывание о подобии). Нетрудно рассматривать истинность этого высказывания (обозначая скобками значение истинности) по аналогии с 3.1.-3.4 следующим образом:

4.1. (Снег голубой) + (снег не синий и/или снег не серый и/или ...).

4.2. (Снег не голубой) + (снег не синий и/или ...).

4.3. (Снег не голубой) + (снег синий и/или снег серый и/или ...).

4.4. (Снег голубой) + (снег синий и/или снег серый и/или ...).

Оттенки подобного словоупотребления для говорящих вполне очевидны и в лингвистическом и в логическом смыслах, хотя в процессе логического анализа подобные различия могут нивелироваться и исчезать совсем.

Общим для приведенных примеров является то, что на уровне оценки истинности высказываний комплексные числа позволяют вполне определенным образом оценить ситуацию, образуя пригодную для этой цели шкалу. Отметим также бросающееся в глаза обстоятельство: по отношению к значению $x + yi$ случаи $x + \bar{y}i$, $\bar{x} + yi$ и $\bar{x} + \bar{y}i$ можно расценивать как результат наличия двух типов отрицания на логической матрице. Действительно, вводя, например, две операции отрицания на логической матрице определениями

$$\neg(x + yi) =_{\text{def}} \bar{x} + \bar{y}i$$

$$\sim(x + yi) =_{\text{def}} x + \bar{y}i$$

(где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — отрицание на обычной логической матрице), получаем значение $\bar{x} + yi$ как результат суперпозиции операций $\neg$ и $\sim$. В то же время двойное применение однотипных операций отрицания дает значение, не совпадающее с указанной суперпозицией.

7.2. Комплекснозначное расширение пропозиционального исчисления и формализация отрицания в естественном языке

Классическое пропозициональное исчисление является двухзначной системой в том смысле, что предполагает два значения истинности: «истина» и «ложь», на логической матрице часто обозначаемые 1 и 0 соответственно. Если перейти к комплекснозначным расширениям значений истинности, то множеством истинностных значений будет $\{0, 1, i, 1+i\}$. Определяя логические операции на такой матрице, нетрудно заметить, что специфика комплексных чисел проявляется только тогда, когда используется умножение. Поскольку в большинстве истинностных матриц оно не применяется, то фактически множество истинностных значений можно рассматривать как множество упорядоченных пар чисел. Действительно, применяя метод умножения матриц Яськовского к пропозициональному классическому исчислению, переходим к четырехзначной логической системе, когда вполне понятное соотношение связывает два множества истинностных значений $\{1+i, 1, i, 0\}$ и $\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$.

Отсюда логическая система с требуемой матрицей истинностных значений представляет собой не что иное, как C-N-δ-p-систему четырехзначной логики Я.Лукасевича [Лукасевич 1959, с.255]. Единственная принимаемая ею аксиома имеет вид

a1. $\delta p \to \delta(\neg p \to q)$

где δ — переменный функтор. К ней добавляется аксиоматически отбрасываемое выражение p, для того, чтобы выявить все отбрасываемые выражения. Правилами вывода здесь являются модус поненс и правило подстановки на место пропозициональных и функториальных переменных. Импликация и отрицание на истинностной матрице определяются с помощью равенств

$\to (a+bi, c+di) = (a \to c) + (b \to d)i;$

$\neg(a+bi) = \neg a + \neg bi;$

где в правой части соответственно стоят двузначные операции.

Согласно Лукасевичу [Лукасевич 1959, с.229], в двузначной логике существуют четыре и только четыре различных функтора от одного аргумента, обозначаемые как V, S, N, F (N совпадает с $\neg$) и определяемые следующей матрицей:

p	V	S	N	F
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Контекстное отрицание с их помощью можно определить следующим равенством:

$\sim(a+bi) = Sa + Nbi.$

Комплекснозначное расширение пропозиционального исчисления в этом случае получается путем добавления к C-N-δ-p-системе аксиом

a2. $\sim\sim p \leftrightarrow p$

a3. $\neg\sim p \leftrightarrow \sim\neg p$

обеспечивающих инволютивность операции $\sim$ на множестве формул C-N-δ-p-системы. К сожалению, Лукасевич не приводит доказательства полноты и непротиворечивости C-N-δ-p-системы (хотя и указывает, что оно у него имеется [Лукасевич 1959, с.235]), что не позволяет сразу говорить о полноте и непротиворечивости полученной C-N- ~ -δ-p-системы и требует дополнительного исследования.

Однако сразу же можно указать интересное приложение и развитие C-N- ~ -δ-p-системы. Суть его в следующем. С целью формализации отрицания в естественном языке Х.Кюстнер [Küstner 1984] предложил рассматривать два вида отрицания — классическое и избирательное. Это вызывается тем обстоятельством, что отрицание в естественном языке может действовать не на все высказывание, а на некоторые его части. С этой целью отрицаемые части высказывания выделяются специальным символом ×. Например, Mary didn't call on ×(John) отрицает лишь то, что Мэри звонила именно Джону. Таким образом, кроме классического отрицания можно рассматривать избирательное отрицание как действующее на те подформулы, которые отмечены символом ×. Вводится еще двойственное отрицание, определяемое как композиция классического и избирательного отрицаний.

Связки, возникающие таким образом, Кюстнер описывает формальными эквивалентностями. С помощью этих эквивалентностей всякая формула p языка сводится к некоторой канонической формально эквивалентной пропозициональной формуле $\Phi(p)$. Каждому высказыванию приписывается значение $(v,w)\in\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$ таким образом, что v оказывается значением $\Phi(p)$, а w – значением $\Phi(\neg p)$.

С точки зрения C-N- ~ -δ-p-системы подобное различение отрицания вполне оправданно: в этом случае избирательное отрицание отождествляется с контекстуальным отрицанием, а двойственное — с полным. Неясен только статус символа ×. В символике C-N- ~ -δ-p-системы основные эквивалентности, приводимые Кюстнером, можно записать в виде

$\sim\times A \leftrightarrow \times\neg A$

$\neg\times A \leftrightarrow \times\sim A$

$\sim(A\wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow (\sim A\wedge\sim B)$

$\neg(A\wedge \mathrm{B}) \leftrightarrow (\neg A\vee\neg B)$

$\neg p_i \leftrightarrow p_i$

$\neg p_i \leftrightarrow {\sim} p_i$

где p_i — пропозициональная переменная.

Анализ эквивалентностей наводит на мысль об интерпретации символа × как модального оператора. Действительно, если ввести оператор × с помощью равенства

$\times(a+bi) = Va + Sbi,$

то он фактически совпадает с оператором W-возможности Лукасевича и отсюда путем замены × на W нетрудно убедиться в выполнимости эквивалентности

${\sim} WA \leftrightarrow W\neg A.$

Однако эквивалентность

$\neg WA \leftrightarrow W{\sim}A$

при этом не выполняется. Чтобы преодолеть эту трудность, нужно было бы и в правой части заменить оператор W на двойственный ему оператор, т.е. на оператор W-возможности Лукасевича. С точки зрения первоначального значения ×-оператора это не существенно, поскольку для него важно лишь значение истинности подформулы, а оно при этом неизменно.

Случай конъюнктивных эквивалентностей тривиален, а что касается эквивалентностей с пропозициональными переменными, то ими можно пренебречь в силу того, что они не всеобщи. Действительно, в системе бесконечнозначной логики Лукасевича $Ł_{\aleph_0}$ отрицание на матрице истинности определяется равенством

$\neg a = 1 - a,$

где $a \in [0,1]$, и в этом случае, если = 0.5, то для формулы с этим истинностным значением подобная эквивалентность тоже имеет место, однако это не служит основанием для ее выполнимости в аксиоматике $Ł_{\aleph_0}$.

Таким образом, система логики, требуемая по Кюстнеру для формализации отрицания в естественном языке, могла бы быть, по-видимому, получена путем модального расширения C-N- ~ -δ-p-системы с помощью принимаемой аксиомы

а5. $p \rightarrow Wp$

и отбрасыванием аксиом

*а6. $Wp \rightarrow p$

*а7. Wp

Аксиомы а5, *а6, *а7 являются обычными аксиомами четырехзначной модальной логики Лукасевича. Но наличие приводимой Кюстнером эквивалентности

$\times(A \wedge B) \leftrightarrow (\times A \wedge \times B) \vee (\times A \wedge B) \vee (A \wedge \times B)$

требует дальнейшего исследования проблемы, поскольку в полученной C-N- ~ -W-S-p-системе согласно Лукасевичу имеет место лишь выполнимость формулы

$Wp \wedge Wq \rightarrow W(p \wedge q)$,

но не обратной ей, принимаемой Льюисом.

7.3. Комплекснозначное расширение бесконечнозначной логики Лукасевича

В системе $Ł_{\aleph_0}$ Лукасевича, как известно, в качестве значений истинности берется замкнутый интервал [0,1]. Если попытаться перейти к комплексным значениям истинности, то в качестве области значений истинности можно взять интервал $[0+i, 1+i]$, т.е. комплексные числа с $0 \leq Re(x) \leq 1$, $0 \leq Im(x) \leq 1$. При этом добавляется, согласно сказанному ранее, еще одна пропозициональная связка контекстуального отрицания ~ и окончательно определения пропозициональных связок выглядят следующим образом:

$\neg(x+yi) =_{def} (1-x) + (1-y)i;$

$\sim(x+yi) =_{def} x + (1-y)i;$

$\rightarrow (x_1 + y_1 i, x_2 + y_2 i) =_{def} \min(1, 1 - x_1 + x_2) + \min(1, 1 - y_1 + y_2)i.$

Как нетрудно заметить, подобное определение пропозициональных связок практически не затрагивает основные аксиомы логики Лукасевича и требует лишь добавления аксиом, относящихся к новой связке отрицания ~. В качестве последних примем три следующие схемы аксиом:

А5. $\sim(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)$

А6. $\neg\sim A \leftrightarrow \sim\neg A$

А7. $A \leftrightarrow \sim\sim A$

Правила вывода остаются без изменения. Полученная подобным образом система $CŁ_{\aleph_0}$ является комплекснозначным расширением системы Лукасевича.

Легко прийти к выводу, что соответствующую ей алгебру можно получить из алгебры Вайсберга $W = \langle A, \mapsto, \urcorner, 1\rangle$ путем добавления к списку операторов из алгебры Вайсберга оператора * и соответствующих аксиом, описывающих его действие:

(1.6*) $(x \mapsto y)^* = (x^* \mapsto y^*)$

(1.7*) $(\urcorner x)^* = \urcorner(x^*)$

(1.8*) $x^{**} = x$

Обозначая полученную алгебру как CW и определяя стандартным образом эквивалентность на множестве формул, классы эквивалентности и операции на классах эквивалентности как

$[A] \mapsto \{B\} = [A \rightarrow B]$

$\urcorner[A] = [\neg A]$

$[A]^* = [\sim A]$

нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 7.3.1. *Система $\langle F/_{\equiv}, \mapsto, \urcorner, *, 1\rangle$, где $F/_{\equiv}$ есть множество классов эквивалентности формул $CŁ_{\aleph_0}$, является CW-алгеброй.*

Доказательство. Все сводится фактически к рассмотрению выполнимости аксиом A5-A7. Но их выполнимость очевидна, так же как и тот факт, что операции, $\mapsto, \urcorner, *$ не выводит за пределы множества $F/_{\equiv}$. ▪

Рассмотрим теперь вопрос представимости CW-алгебр. Пусть $\langle G,+,-,0,\leq\rangle$ является тотально упорядоченной абелевой группой и $e \in G$, е > 0. В позитивном фрагменте $[0,e] = \{x \in G: 0 \leq x \leq e\}$ определим $x \mapsto y = \min(e, y + e - x)$ и $\urcorner x = e - x$. Тогда $G(e) = \langle [0,e], \mapsto, \urcorner, e\rangle$ будет алгеброй Вайсберга [Font *et al* 1984, p.17].

Теорема 7.3.2. *Каждая CW-алгебра является лексикографическим произведением алгебр Вайсберга формы $G(e)$, с заданным на нем инволютивным эндоморфизмом *.*

Доказательство. Согласно [Font *et al* 1984, p.24] каждая алгебра Вайсберга является подпрямым произведением линейных W-алгебр типа $G(e)$. Если рассмотреть прямое произведение двух алгебр типа $G(e)$, то согласно вышесказанному его можно представить в виде

$$\langle \prod_{i \in I} G_i(e_i) \times \prod_{j \in J} G_i(e_j), \mapsto, \urcorner, 1\rangle.$$

На произведение абелевых групп структура группы переносится стандартным образом, так же как операции $\rightarrow, \urcorner$. Что касается упорядоченности, то для ее сохранения придется рассматривать лексикографическое произведение абелевых групп. Нетрудно видеть, что при этом будут существовать элементы $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$, для которых имеет место $a_1 = a_2$, а $b_1 \neq b_2$. Всегда можно выбрать среди них элементы, для которых выполняется условие $b_1 = e_1 - b_2$, и, подбирая пары подобных элементов, получаем определение операции * на произведении *CW*—алгебр. Таким образом, мы получаем *CW*-алгебры как лексикографическое произведение подалгебр прямого произведения *W*-алгебр $G(e)$, где операция * будет очевидным образом определять инволютивный эндоморфизм.

С другой стороны, если взять *CW*—алгебру, то нетрудно видеть, что множество A^* (т.е. $Z \times A$), с помощью которого строится изоморфизм между упорядоченной абелевой группой и упорядоченной *W*-алгеброй [Font *et al* 1984, p.24] ничем не отличается от соответствующего множества с операциями для *CW*-алгебры, поскольку операция * не выводит за пределы множества A^*. Все остальное очевидно. ▪

7.4. Комплекснозначное расширение логики Чэна с положительными и отрицательными значениями истинности

Более широкий диапазон истинностных значений дает нам логика Чэна с положительными и отрицательными значениями истинности. Согласно [Chang 1982] логика Чэна *C* определяется следующей логической матрицей. Для $x,y \in [-1,+1]$ имеем:

$\mathbf{1}(x) = 1;$

$\neg(x) = -x;$

$\rightarrow(x,y) = min(1, max(-1, y-x)).$

Здесь **1** является пропозициональной константой.

Проводя комплекснозначное расширение подобной логики, определяем, как и в случае логики $C\text{Ł}_{\aleph_0}$, следующие истинностные функции на интервале $[-1,+1]$:

$\mathbf{1}(x+yi) = 1+i;$

$\neg(x+yi) = -x-yi;$

$\to(x_1+y_1i, x_2+y_2i) = min\,(1, max\,(-1, x_2-x_1) + min\,(1, max\,(-1, y_2-y_1)i)),$

и аналогично случаю $CŁ_{\aleph_0}$ вводим связку ~, определяя ее как

$\sim(x+yi) = x-yi.$

Аксиоматика логики C выглядит следующим образом

P1. $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$

P2. $Q\leftrightarrow ((P\to P)\to Q)$

P3. $\neg(P\to Q)\leftrightarrow(Q\to P)$

P4. $P\to\mathbf{1}$

P5. $\mathbf{1}\leftrightarrow ((P\to P)\to Q)$

P6. $[(P\to\mathbf{1})\to((Q\to\mathbf{1})\to R)]\to[(Q\to\mathbf{1})\to((P\to\mathbf{1})\to R)]$

P7. $(P\to Q)\leftrightarrow[(Q^+\to P^+)\to(P^-\to Q^-)]$

P8. $(P\to(\neg P\to Q))^+\leftrightarrow(P^+\to(\neg(P^+)\to Q^+))^-$

P9. $(P\to(Q\vee R))\leftrightarrow(P\to R)\vee(P\to Q)$

P10. $(P\vee(Q\vee R))\leftrightarrow((P\vee Q)\vee R)$

Правила вывода:

PR1. $\dfrac{P, P\to Q}{Q}$

PR2. $\dfrac{P\to Q, R\to S}{(Q\to R)\to(P\to S)}$

PR3. $\dfrac{P}{P^-}$

Здесь

$P^+ = (P\to\mathbf{1})\to\mathbf{1},$

$P^- = (P\to\neg\mathbf{1})\to\neg\mathbf{1},$

$P\vee Q = [(P^+\to Q^+)^+\to(\neg P)^-]\to[(P^-\to Q^-)^-\to P^-].$

Как и в случае бесконечнозначной логики Лукасевича, пополним аксиоматику системы C следующими аксиомами, получая систему CC комплекснозначной логики Чэна:

P11. $\sim(P\to Q)\to(\sim P\to\sim Q)$

P12. $\neg\sim P\leftrightarrow\sim\neg P$

P13. $P\leftrightarrow\sim\sim P$

Системе логики C будет соответствовать MV*-алгебра

[Chang 1982, p.22], представляющая собой систему $\langle B,+,C,0,1\rangle$, где B есть непустое множество, + является бинарной, а C — унарной операциями на B, 0 и 1 представляют собой выделенные элементы B. B является замкнутым относительно операций + и C, и для него выполняются следующие аксиомы (x,y,z будут обозначать произвольные элементы B):

Bx1. $x + y = y + x$

Ax1. $(1 + x) + (y + (1 + z)) = ((1 + x) + y) + (1 + z)$

Bx3. $x + Cx = 0$

Bx4. $(x + 1) + 1 = 1$

Bx5. $x + 0 = x$

Bx6. $C(x + y) = Cx + Cy$

Bx7. $CCx = x$

Воспользуемся следующими определениями:

$-1 = C1$,

$x^+ = 1 + (-1 + x)$

$x^- = -1 + (1 + x)$

$x \vee y = [x^+ + (C(x^+) + y^+)^+] + [x^- + (C(x^-) + y)^+]$

Оставшиеся аксиомы выглядят следующим образом:

Bx8. $x + y = (x^+ + y^+) + (x^- + y^-)$

Bx9. $(Cx + (x + y))^+ = C(x^+) + (x^+ + y^+)$

Bx10. $x \vee y = y \vee x$

Bx11. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

Bx12. $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$

Системе CC будет соответствовать CMV*-алгебра, представляющаяся собой расширение MV*-алгебры Чэна с помощью следующих четырех аксиом:

Bx13. $Cx^* = (Cx)^*$

Bx14. $x^{**} = x$

Bx15. $(x + y)^* = x^* + y^*$

Таким образом система CMV*-алгебра является системой $\langle B,+,C,^*,0,1\rangle$, где * есть унарная операция на B. Нетрудно убедиться, что операция * не выводит за пределы B, так что B замкнуто относительно операций +, C, * и удовлетворяет аксиомам Bx1-Bx15.

Теорема 7.4.1. *Каждая CMV*-алгебра является лексикографическим произведением двух подалгебр прямого произведения*

MV^*-алгебра формы $G(p)$, с заданным на нем инволютивным эндоморфизмом $*$, где G является упорядоченной абелевой группой и p является позитивным элементом G.

Доказательство. Согласно [Chang 1982], если B является MV*-алгеброй, то B представима с помощью MV*-изоморфизма h*:

$$h^*: B \to \prod_{i \in I} G_i(p_i) \text{ , где } \prod_{i \in I} G_i(p_i)$$

представляет собой MV*-произведение MV*-алгебр $\langle G_i(p_i), +, C, 0, (p_i) \rangle$ (здесь $G_i(p_i) = \{x: x \in G \text{ и } -p_i \le x \le p_i\}$, G_i — упорядоченная абелева группа, p_i — какой-либо позитивный элемент G_i). Для рассматриваемого в теореме случая, если B является CMV*-алгеброй, то B представима с помощью изоморфизма h^*_C:

$$h^*_C: B \to \prod_{i \in I} G_i(p_i) \times \prod_{j \in J} G_j(p_j) \text{ .}$$

Как и в случае теоремы 7.3.2 нетрудно убедиться, что лексикографическое упорядочение позволяет определить структуру CMV*-алгебры на произведении. Разница лишь в интервале изменения: теперь это $[-1-i, 1+i]$. Все остальное достаточно тривиально. ▪

Две формулы P и Q эквивалентны, $P \equiv Q$, если $\vdash P \leftrightarrow Q$. Пусть $P/_{\equiv} = \{Q: P \equiv Q\}$ и пусть $F = \{P/_{\equiv}: P \text{ является формулой}\}$. Определим фактор-операции и константы следующим образом:

$0 = (P \to P)/_{\equiv}$
$C(P/_{\equiv}) = \neg P/_{\equiv}$
$P/_{\equiv} + Q/_{\equiv} = (\neg P \to Q)/_{\equiv}$
$(P/_{\equiv})^* = P^*/_{\equiv}$

Теорема 7.4.2. *Система $\langle F, +, C, *, 0, 1/_{\equiv} \rangle$ является CMV*-алгеброй.*

Доказательство. Проверке подлежат аксиомы Bx13-Bx15, но их выполнимость очевидна. ▪

Теорема 7.4.3. *$\vdash P$ если и только если $P \in CC$.*

Доказательство. а) Если: непосредственная проверка выполнимости P11-P13 подтверждает справедливость того, что $\vdash P$, если $P \in CC$.

б) Только если: так как по теоремам 7.4.1-7.4.3 CMV*-алгебра для CC представима в виде лексикографического произведения двух подалгебр прямого произведения MV*-алгебр $G(p)$ с инволютивным эндоморфизмом, то после введения на лексикографическом произведении структуры упорядоченной абелевой группы доказательство не отличается существенно от случая MV*-алгебры в [Chang 1982]. ▪

7.5. Модальность и комплекснозначная система *MCC*

Анализ комплекснозначных расширений логических систем подсказывает следующую возможность. В [Фейс 1974, с.42] при рассмотрении системы М"ПК, эквивалентной модальной логике М фон Вригта, принято определение модальностей посредством квантификации по дополнительной переменной t, определяющей случаи, в которых истинны или ложны рассматриваемые факты. При этом операторы $\Box$ и $\Diamond$ интерпретируются как $\forall t$ и $\exists t$ соответственно, т.е. утверждение «событие p происходит с необходимостью» выражается как $\forall tpt$, а утверждение «событие p возможно» – как $\exists tpt$. Отсюда, если принять, что мнимая часть значения истинности высказываний оценивает истинность дополнительной переменной t для случаев, то нетрудно перейти к определению модальных формул как таких формул, у которых мнимая часть значений истинности не равна нулю и представляет собой истинность соответствующего квантифицированного выражения.

Но этого мало. Возникающие на этом пути трудности связаны с фактом квантификации: *поскольку модальность определяется через квантификацию*, то она будет зависеть от правил употребления кванторов, т.е. от соответствующего их определения на логической матрице и аксиоматики предикатного исчисления. Если обратиться к системам $Ł_{\aleph_0}$ и C, то, например, согласно [Chang 1982] квантор $\exists$ *определяется для* $X \subseteq [-1,1]$как $\exists(X) =_{def} \sup(X)$.

Следовательно, если ввести в комплекснозначных системах $CŁ_{\aleph_0}$ и CC квантификацию по мнимой части, то соответствующая CMV- или CMV*-алгебра получится по-прежнему как лексикографическое произведение двух алгебр, но одна из них в этом случае должна быть полной, т.е. обладать sup для каждого подмножества, что определит на ней существование соответствующей операции $\exists$.

Возьмем в качестве исходной систему *CC*. Аналогично приведенным выше определениям квантора существования получаем, беря определение $\exists$ в качестве образца, следующее определения модального оператора возможности:

$\Diamond(X+Yi)\ ) =_{def} X + (\sup Y)i$

Тогда, если обратиться к аксиоматике предикатной сильно-неотрицательной логики Чэна [Chang 1982,p.35], дополнительные модальные аксиомы и правила вывода получаются из соответствующих кванторных правил и аксиом в виде:

P14. $P \to \Diamond P$

P15. $\Diamond(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \Diamond Q)$, где P — немодальная формула (т.е. мнимая часть всегда равна 0).

P15. $\Diamond(\neg P \to P) \leftrightarrow (\neg \Diamond P \to \Diamond P)$

PR4. $\dfrac{P}{\Box P}$

PR5. $\dfrac{P \leftrightarrow Q}{\Diamond P \leftrightarrow \Diamond Q}$

Сразу же бросается в глаза то обстоятельство, что в силу определения оператора $\Diamond$ необходимо добавить еще одну аксиому:

P16. $\Diamond\Diamond P \leftrightarrow \Diamond P$,

фиксирующую очевидный результат получения sup(sup(X)), ввиду того, что sup всегда единственен (см., например, [Кон 1968, с.32]). Если при обычной интерпретации формула $\exists u \exists u P$ явно абсурдна, то здесь это далеко не очевидно и требует специального синтаксического выделения.

Обозначим полученную систему как *MCC*. Нетрудно видеть, что благодаря PR5, имеем:

$\Diamond(P/_{\equiv}) = \Diamond P/_{\equiv}$.

Таким образом получаем на CMV*-алгебре дополнительную операцию $\Diamond$. В силу симметричности определения операторов $\neg$, $\to$ на логической матрице, получаем как и в [Chang

1982, p.37] выполнимость постулатов для кванторов на системе $\langle F,+,C,*,0,1/_{\equiv}\rangle$. Тогда, как уже было упомянуто выше, рассматривая лексикографическое произведение двух CMV*—алгебр, на одной из которых определена операция $\exists$, получаем как и в [Chang 1982] доказательство следующей теоремы:

Теорема 7.5.1. *Для каждой* $P/_{\equiv}$, $h^*_c(\Diamond(P/_{\equiv})) = \sup^*_c h^*_c(P^u{}_n/_{\equiv})$.

Здесь h^*_c — отображение из F в $G(p)$, аналогично случаю теоремы 7.4.1, $\sup^*_c$ означает наименьшую верхнюю грань элементов одного из сомножителей теоремы 7.4.1, $P^u{}_n$ получается из P путем замещения всех n—х переменных, а затем замещением всех свободных вхождений переменной u на n—ю переменную.

И, наконец, перенося конструкцию доказательства из [Chang 1982, p.38] на рассматриваемый случай системы *MCC*, очевидным образом получаем доказательство следующей теоремы:

Теорема 7.4.2. $\vdash P$ если и только если $P \in MCC$.

В заключение можно отметить, что построение аналогичных комплекснозначных систем можно продолжить, комбинируя рассмотренные выше расширения. Так, например, рассматривая определение квантора существования в виде

$\exists(X+Yi)\,) =_{def} \sup X + (\sup Y)i$

нетрудно получить системы *MPCC* и *PCC* путем добавления кванторных аксиом и правил вывода к системам *MCC* и *CC* соответственно. Используя при этом конструкцию лексикографического произведения MV*-алгебр, можно получить доказательство аналогов рассмотренных выше теорем. Полученная подобным образом система *MPCC* будет представлять собой модальную бесконечнозначную логику первого порядка, а *PCC* — строго немодальную бесконечнозначную логику первого порядка (немодальность понимается здесь в духе аксиомы P15).

7.6. Комплекснозначная квантовая логика наблюдаемых

Нетрудно заметить, что в построенных комплекснозначных расширениях логических систем введение дополнительного (контекстуального) отрицания приводило к пополнению алгебраической структуры инволютивным эндоморфизмом. При этом в двузначном случае потребовалась полная перестройка аксиоматики (переход к четырехзначной логике), а бесконечнозначном случае лишь приходилось пополнять исходную аксиоматику дополнительными аксиомами. В последнем случае это объяснимо тем, что мощность истинностных матриц при применении метода Яськовского не изменялась.

Особый интерес представляет в этой связи комплекснозначное расширение квантовой логики наблюдаемых. Во-первых, ввиду специфического смысла истинностных значений в этой логике, а во-вторых, ввиду того, что здесь мы сталкиваемся с умножением комплексных чисел, выражающих значение истинности формул, что не позволяет применить на истинностной матрице квантовой логики наблюдаемых метод раздельного (отдельно для действительной и мнимой частей) определения логических операций из предыдущих параграфов.

Помимо этого, следует иметь в виду, что фундаментальное фазовое пространство квантовой механики представляет собой бесконечномерное гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Это обстоятельство приводит к тому, что алгебра наблюдаемых становится комплексной алгеброй с инволюцией. Под инволюцией здесь имеется в виду инволютивный антиавтоморфизм (обозначаемый звездочкой *) алгебры $\mathfrak{R}$, т.е. ее отображения на себя, обладающие следующими свойствами:

$(R^*)^* = R$

$(R + S)^* = R^* + S^*$

$(\lambda R)^* = \lambda^* R^*$

$(RS)^* = S^* R^*$

для всех $R, S \in \mathfrak{R}$ и всех комплексных λ (λ^*– это величина, комплексно сопряжненная к с λ) [Эмх 1976, с.96]. Если алгебра действительная, то $\lambda^* = \lambda$.

Если теперь обратиться к матрице $\mathfrak{M}_{\mathrm{QLO}}$, то нетрудно прийти к выводу, что синтаксическим аналогом инволюции * могла бы послужить операция контекстуального отрицания следующего вида:

$\sim(x+yi) = x-yi$

если обратиться к множеству комплексных чисел $\mathbb{C}$ в качестве множества значений истинности. Действительно, в этом случае подобное комплексное сопряжение синтаксически можно описать аксиомами

Ах34. $\sim\sim A \prec\succ A$

Ах35. $\sim(A \vee B) \prec\succ \sim A \vee \sim B$

Ах36. $\sim(A \wedge B) \prec\succ \sim B \wedge \sim A$

Ах37. $\sim J_\alpha A \prec\succ J_{\bar{\alpha}} \sim A$

где $\bar{\alpha}$ — комплексно сопряженное к α число.

Покажем теперь, что алгебраическая структура логики QLO + {Ах34-Ах37} может представлять собой алгебру с инволюцией. Следует учесть, что для отрицания $\neg$ на $C\mathfrak{M}_{\mathrm{QLO}}$ (т.е. комплекснозначной версии матрицы $\mathfrak{M}_{\mathrm{QLO}}$) будем иметь

$\neg(x+yi) = -x-yi,$

в то время как все остальные операции остаются без изменения.

Напомним, что две ппф A и B эквивалентны, $A \sim B$, если $\vdash A \prec\succ B$. Пусть теперь $P/_{\sim} = \{A\colon P \sim A\}$ и пусть $F = \{P/_{\sim}\colon P$ есть формула$\}$. Обозначая через $[A]$ множество $A/_{\sim}$, определяем, как и раньше:

$[A] + [B] = [A \vee B]$

$[A] \circ [B] = [A \wedge B]$

$-[A] = [\neg A]$

$0 = [\neg(A \vee \neg A)]$

$1 = [1]$

$\alpha[A] = [J_{|\alpha'|}A]$

и добавляем новое определение:

$[A]^* = [\sim A].$

Теорема 7.6.1. *Структура* $\mathcal{F} = \langle F, +, \circ, -, ^*, \alpha, 0, 1\rangle$, *где* $\alpha \in \mathbb{C}$, *является алгеброй наблюдаемых с инволюцией.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что, как и в теореме 5.3.2, $\langle F, +, \circ, -, \alpha, 0, 1\rangle$ будет представлять собой алгебру наблюдаемых. По Ах34 $([A]^*)^* = [\sim\sim A] = [A]$, по Ах35 $([A] + [B])^* = [A \vee B]^* = [\sim(A \vee B)] = [\sim A \vee \sim B] = [\sim A] + [\sim B] = [A]^* + [B]^*$, по Ах36 $([A] \circ [B])^* = [A \wedge B]^* = [\sim(A \wedge B)] = [\sim B \wedge \sim A] = [\sim B] \circ [\sim A] = [B]^* \circ [A]^*$, по Ах27 $(\alpha[A])^* = ([J_{|\alpha'|}A])^* = [\sim J_{|\alpha'|}A] = [J_{\overline{|\alpha'|}} \sim A] = \alpha^*[A]^*$. Следовательно, * – инволюция, а $\mathcal{F}$ представляет собой искомую структуру, что и заканчивает доказательство.▪

Определение 7.6.2.. Пусть CQLO будет комплекснозначной квантовой логикой наблюдаемых, а Γ — непустое множество ппф. Ппф A CQLO-*следует* из Γ, $\Gamma \prec A$, если существует $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$, такие, что

(а) либо $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$;

(б) либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$;

(в) либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$, $i = 1,2,\ldots,n$;

(г) либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (\sim B_n \wedge \ldots \wedge \sim B_1) \prec A$;

Если A CQLO-следует из $\neg(A \vee \neg A)$, то A CQLO-*выводима* или является CQLO-*теоремой*, что записывается как $\prec A$. Γ является CQLO-*совместимым*, если существует хотя бы одна ппф, которая не CQLO-следует из Γ, в противном случае Γ является CQLO-*несовместимым* (можно показать, что Γ является CQLO-совместимым тогда и только тогда, когда не имеет места одновременно $\Gamma \prec A$ и $\Gamma \prec \neg A$). Γ является CQLO-*полным*, если оно CQLO-совместимо и замкнуто относительно $\vee$, $\wedge$, J, $\sim$ и CQLO-следования, т.е. тогда и только тогда, когда

(1) для некоторой ппф не имеет место $\Gamma \prec A$;

(2) если $A \in \Gamma$ и $A \prec B$, то $B \in \Gamma$;

(3) $A, B \in \Gamma$ влечет $A \wedge B, A \vee B \in \Gamma$;

(4) $A \in \Gamma$ влечет $J_{|\alpha|} A \in \Gamma$;

(5) $A \in \Gamma$ влечет $\sim A \in \Gamma$.

Лемма 7.6.3. *Если $x \subseteq \Phi$, где Φ — множество ппф, является* CQLO-*полным, тогда*

(i) *$x \prec A$ тогда и только тогда, когда $A \in x$;*

(ii) *$\neg(A \vee \neg A) \in x$ для всех ппф A.*

Доказательство. (i) Поскольку по Ax0 $A \prec A$, достаточность следует из определения CQLO—следования. Необходимость следует из 7.6.2(2), (3), (4), (5).

(ii) По определению x непусто, следовательно, существует $B \in x$. Но по 7.6.2(4) $J_0 B \in x$, а отсюда по Ax8 и 7.6.2(2) получаем требуемое. ▪

CQLO-полные множества и CQLO-следование связывает между собой следующая версия леммы Линденбаума:

Теорема 7.6.4. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда A принадлежит каждому CQLO-полному расширению* Γ.

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существуют $B_1,\ldots,B_n \in \Gamma$, такие, что либо $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$ либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|}B_i \prec A$ $(1 \le i \le n)$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge ({\sim}B_n \wedge \ldots \wedge {\sim}B_1) \prec A$. Если x является CQLO-полным и $\Gamma \subseteq x$, то $B_1, \ldots, B_n \in x$. Применяя 7.6.2(3),(4),(5) и затем 7.6.2(2), получаем $A \in x$.

Обратно, пусть A не CQLO-следует из Γ. Пусть $x = \{B\colon \Gamma \prec B\}$. По Ax0 имеем $\Gamma \subseteq x$, и по предположению $A \notin x$. Доказательство будет завершено, если удастся показать, что x является CQLO—полным. Положим $B \in x$ и $B \prec C$, тогда существует $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec B$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec B$, либо $J_{|\alpha|}B_i \prec B$ $(1 \le i \le n)$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge ({\sim}B_n \wedge \ldots \wedge {\sim}B_1) \prec B$. Отсюда по Rx3 получаем $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec C$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec C$, либо $J_{|\alpha|}B_i \prec C$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge ({\sim}B_n \wedge \ldots \wedge {\sim}B_1) \prec C$, следовательно, $\Gamma \prec C$, т.е. $C \in x$.

С другой стороны, если $B, C \in x$, то существуют $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec B$ и $C_1 \vee \ldots \vee C_n \prec C$. Тогда по Rx4 получаем $B_1 \vee \ldots \vee B_n \vee C_1 \vee \ldots \vee C_n \prec B \vee C$. Отсюда $\Gamma \prec B \vee C$, и следовательно, $B \vee C \in x$.

Далее, если $B \in x$, то существует $B' \in \Gamma$, такая, что $J_{|\alpha'|}B' \prec B$. Но по Rx2 получаем $J_{|\beta|}J_{|\alpha'|}B' \prec J_{|\beta|}B$, и по Ax15 получаем $J_{|\beta\alpha'|}B' \prec J_{|\beta|}B$, следовательно, $\Gamma \prec J_{|\beta|}B \in x$.

Пусть теперь $B, C \in x$. Тогда существуют $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n \in \Gamma$, такие, что $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec B$ и $(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \wedge (C_n \wedge \ldots \wedge C_1) \prec C$. Но тогда по Rx5 получаем $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \wedge (C_n \wedge \ldots \wedge C_1 \wedge B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec B \wedge C$. Следовательно, $\Gamma \prec B \wedge C$, $B \wedge C \in x$.

Точно так же существуют $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n \in \Gamma$, такие, что $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge ({\sim}B_n \wedge \ldots \wedge {\sim}B_1) \prec B$ и $(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \wedge ({\sim}C_n \wedge \ldots \wedge {\sim}C_1) \prec C$. Но тогда по Rx5 получаем $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \wedge ({\sim}C_n \wedge \ldots \wedge {\sim}C_1 \wedge {\sim}B_n \wedge \ldots \wedge {\sim}B_1) \prec B \wedge C$. Следовательно, $\Gamma \prec B \wedge C$, $B \wedge C \in x$.

Отсюда заключаем, что x замкнуто относительно CQLO-следования, конъюнкции, дизъюнкции, J- и $\sim$-операторов. Поскольку $A \notin x$, то A не CQLO-следует из x, поэтому x является CQLO-совместимым, что и заканчивает доказательство теоремы. ▪

Теорема 7.6.5. *Если x является CQLO-полным и $\neg A \notin x$, тогда существует CQLO-полное множество y, такое, что $A \in y$, и для всех B либо $\neg B \notin x$, либо $B \notin y$.*

Доказательство. Положим $y = \{B\colon \Gamma \prec B\}$. По Ax0 $A \in y$. Пусть теперь $\neg B \in x$. Тогда $B \notin y$, иначе $A \prec B$, откуда $\neg B \prec \neg A$ по Rx1, откуда, в свою очередь, по 7.6.2(2), $\neg A \in x$, в противоположность предположению. Далее, по 7.6.3(ii) имеем $\neg(A\vee\neg A)\in x$. Согласно вышедоказанному, получаем $A\vee\neg A\notin y$. Действуя аналогично доказательству теоремы 7.6.4, можно показать, что y замкнуто относительно $\vee,\wedge; J, \sim$ и CQLO-следованию. Тогда ввиду того, что $A\vee\neg A$ не CQLO-следует из y, т.е. y является CQLO-совместимым, получаем, что y является CQLO-полным. ▪

Перейдем теперь к определению моделей и фреймов для CQLO. Нетрудно заметить, что приводимые ниже определения отношения ортогональности ничем не отличаются от случая квантовой ортологики.

Определение 7.6.6. CQLO-моделью называется четверка $\mathcal{M}=\langle X,\perp,\xi,v\rangle$, где

(i) $\langle X,\perp,\xi\rangle$ является квантовым фреймом из определения 2.2.3;

(ii) v является оценкой (функцией верификации), сопоставляющей комплексное число каждой пропозициональной переменной и формуле CQLO для каждой точки (каждого элемента) из X, т.е. v: $(\mathrm{S}\cup\Phi)\times X\to\mathbb{C}$, где S – множество пропозициональных переменных, Φ – множество ппф.

Обозначая множество $\{x\in X\colon v(A,x)=a\}$ как $\|A\|_a$, рекурсивно определяем значение формулы в CQLO—модели следующим образом:

(1) $\|p_i\|_a=\{x\in X\colon v(p_i,x)=a\}\in\xi$;
(2) $\|A\vee B\|_a=\{x\in X\colon x\in\|A\|_b\cap\|B\|_c\ \&\ a=b+c\}$;
(3) $\|A\wedge B\|_a=\{x\in X\colon x\in\|A\|_b\cap\|B\|_c\ \&\ a=bc\}$;
(4) $\|\neg A\|_a=\{x\in X\colon x\perp\|A\|_{-a}\ \&\ v(\neg A,x)=a\}$;
(5) $\|J_\alpha A\|_a=\{x\in X\colon x\in\|A\|_b\ \&\ a=\alpha b\}$;
(6) $\|I\|_1=X$, т.е. $v(I,x)=1$ для всех $x\in X$;
(7) $\|{\sim}A\|_a=\{x\in X\colon x\in\|A\|_{\bar a}\ \&\ v({\sim}A,x)=a\}$.

Если Γ является непустым множеством ппф, тогда говорим, что Γ влечет A в x в $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$: $\Gamma\models_x A$, тогда и только тогда, когда $\forall B\in\Gamma(v(B,x)\le v(A,x))$, Γ $\mathcal{M}$-влечет A, $\mathcal{M}$: $\Gamma\models A$, тогда и только тогда, когда либо $\exists B\in\Gamma(x\notin\|B\|_{(\cdot)})$, т.е. когда B не верифицирована в x (верифицируемость, а не истинность, поскольку имеем дело с многозначной истинностной матрицей), либо Γ влечет A во всех x в $\mathcal{M}$. Если $\mathfrak{I}$ является CQLO-фреймом, то Γ $\mathfrak{I}$-влечет A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$: $\Gamma\models A$ для всех CQLO-моделей $\mathcal{M}$ на $\mathfrak{I}$. Если же $\wp$ является классом CQLO-фреймов (т.е. квантовых фреймов), то Γ $\wp$-влечет A, $\wp$: $\Gamma\models A$, тогда и только тогда, когда $\Im$: $\Gamma\models A$ для всех $\Im\in\wp$. Класс $\wp$ детерминирует CQLO тогда и только тогда, когда для всех $A,B\in\Phi$, $A\prec B$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $A\models B$. $\wp$ сильно детерминирует CQLO тогда и только тогда, когда для всех Γ,A, $\Gamma\prec A$ тогда и только тогда, когда $\wp$: $\Gamma\models A$.

Если определить область значений формулы A как

$$\|A\| = \bigcup_{a\in C}\|A\|_a\ ,$$

то, распространяя это определение на 7.6.6(1)-(7), в дальнейшем $\|p_i\|$, $\|A\vee B\|$, $\|A\wedge B\|$, $\|\neg A\|$, $\|J_{|\alpha|}A\|$, $\|{\sim}A\|$ будут обозначать области значений соответствующих формул, а $\|A\|_{(-)}$ будет обозначать произвольное значение соответствующей формулы.

Лемма 7.6.7. Для любой CQLO-модели $\mathfrak{M}$ и любой $A\in\Phi$, $\|A\|_{(-)}\in\xi$.

Доказательство. Получаем индукцией по длине A, используя 7.6.6. ▪

Теорема 7.6.8 (непротиворечивость CQLO). *$\Gamma\prec A$ только, если Θ: $\Gamma\models A$, где Θ — класс всех CQLO-фреймов.*

Доказательство. Сводится путем индукции по CQLO-следованию к демонстрации того факта, что этот результат справедлив для Ax1-Ax16 и сохраняется при применении Rx1-Rx5. Приводим случаи аксиом с инволюцией.

Ax34. Пусть $x\in\|A\|_a$. Тогда $x\in\|{\sim}A\|_{\bar a}$ по 7.6.6(7), что вновь по 7.6.6(7) дает $x\in\|{\sim}{\sim}A\|_a$.

Пусть $x\in\|{\sim}{\sim}A\|_a$. Тогда $x\in\|{\sim}A\|_{\bar a}$ по 7.6.6(7) и, следовательно, по 7.6.6(7) $x\in\|A\|_a$.

Ax35. Пусть $x\in\|{\sim}(A\vee B)\|_a$. Тогда по 7.6.6(7) $x\in\|A\vee B\|_{\bar a}$ & $v({\sim}(A\vee B),x) = a$. По 7.6.6(2) $x\in\|A\|_c\cap\|B\|_d$ и $c + d = \bar a$. Но поскольку $\bar c + \bar d = a$, получаем, что $x\in\|{\sim}A\|_{\bar c}\cap\|{\sim}B\|_{\bar d}$, и по 7.6.6.(2) $x\in\|{\sim}A\vee{\sim}B)\|_a$. То же самое проходит и в обратную сторону.

Ax36. Пусть $x\in\|{\sim}(A\wedge B)\|_a$. Тогда по 7.6.6(7) $x\in\|A\wedge B\|_{\bar a}$ & $v({\sim}(A\wedge B),x) = a$. По 7.6.6(3) $x\in\|A\|_c\cap\|B\|_d$ и $cd = \bar a$. Но так как $\bar d\,\bar c = a$, получаем, что $x\in\|{\sim}B\|_{\bar d}\cap\|{\sim}A\|_{\bar c}$, и по 7.6.6.(3) $x\in\|{\sim}B\wedge{\sim}A)\|_a$. То же самое проходит и в обратную сторону.

Ax37. Пусть $x\in\|{\sim}J_\alpha A\|_a$. Тогда по 7.6.6(7) $x\in\|J_\alpha A\|_{\bar a}$ & $v({\sim}J_\alpha A,x) = a$.

По 7.6.6(5) $y \in \|A\|_b$ и $\bar{a} = \alpha b$. Поскольку $a = \bar{\alpha}\ \bar{b}$, то вся аргументация та же, что и в предыдущих случаях. ▪

Определение 7.6.9. Если L является комплекснозначной квантовой логикой наблюдаемых, то каноническая CQLO-модель для L есть структура $\mathfrak{M}_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L, v_L \rangle$, где:

(1) $X_L = \{x \subseteq \Phi$: x является CQLO—полным множеством$\}$;

(2) $x \perp_L y$ тогда и только тогда, когда существует ппф A, такая, что $\neg A \in x$, $A \in y$;

(3) $\xi_L = \{|A|^L: A \in \Phi\}$, где $|A|^L = \{x \in X_L: A \in x\}$;

(4) $v_L: (S \cup \Phi) \times X_L \to \mathbb{C}$.

Обозначая множество $\{x \in X_L: v(A,x) = a\}$ как $\|A\|^L_a$, получаем определения значений формул и областей значения в канонической модели $\mathfrak{M}_L$ аналогично 7.6.6(1)-(7).

Лемма 7.6.10. *$\mathcal{F}_L = \langle X_L, \perp_L, \xi_L \rangle$ является CQLO-фреймом.*

Доказательство. Пусть $x \in X_L$. Тогда для любой A либо не имеет места $\neg A, A \in x$, либо по Ax7 x будет CQLO-несовместимой. Следовательно, $x \perp_L x$ не имеет места. Если $x \perp_L y$, то для некоторой ппф A имеем $\neg A \in x$, $A \in y$. Используя Ax2, приходим к заключению $\neg B \in y$, $B \in x$, где $B = \neg A$. Таким образом $x \perp_L y$. То же самое получаем при использовании Ax34 для случая $\sim A$. Следовательно, $\perp_L$ является отношением ортогональности. Проверим, является ли $\|A\|^L$ $*_L$-замкнутым. Предположим, что $x \notin \|A\|^L$, т.е. $A \notin x$. По Ax2 $\neg\neg A \notin x$, откуда по 5.2.4 существует $y \in X_L$, такой, что $x \perp_L y$ не имеет места и $\neg A \in y$. Тогда если $z \in \|A\|^L$, то $A \in z$ и, следовательно, $y \perp_L z$. Отсюда $y \perp_L \|A\|^L$ как и требовалось. Очевидным образом ξ_L будет замкнуто относительно пересечения (в силу свойств CQLO-следования и CQLO-полноты). ▪

Теорема 7.6.11 (фундаментальная теорема для CQLO). *Для каждой ппф A и для всякого $x \in X$, $x \in \|A\|^L$ тогда и только тогда, когда $A \in x$.*

Доказательство. Доказывается индукцией по длине A. В случаях $A = B \vee C$, $A = B \wedge C$, $A = J_\alpha B$, $A = \sim B$ нетрудно видеть, что из условия $B \vee C, B \wedge C, J_\alpha B, \sim B \in x$ следует $B, C \in x$. Достаточно обратиться к 7.6.6(2),(3),(5),(7). Конверсия следует из 7.6.2(3),(4),(5).

Предположим теперь, что $A = \neg B$ и для B теорема выполнима. Пусть $\neg B \in x$. Тогда если $y \in \|B\|^L_{(-)}$, то по индуктивному предположению $B \in y$ и отсюда $x \perp_L y$. По 7.6.6(4) следует $x \in \|\neg B\|^L_{(-)}$. С другой стороны, если $\neg B \notin x$, то согласно 7.6.5

существует $y \in X_L$, такой, что $B \in y$, откуда по индуктивному предположению $y \in \|B\|^L_{(-)}$, но $x \perp_L y$ не имеет места. По 7.6.6(4) приходим к выводу, что $x \notin \|B\|^L_{(-)}$. ▪

Следствие 7.6.12. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_L : \Gamma \models A$.*

Доказательство. Если $\Gamma \prec A$, то существует $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$, такие, что $B_1 \vee \ldots \vee B_n \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge (B_n \wedge \ldots \wedge B_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} B_i \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge ({\sim}B_n \wedge \ldots \wedge {\sim}B_1) \prec A$ $(1 \le i \le n)$. Если $x \in \|B\|^L_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$, тогда по 7.6.11 $B_1, \ldots, B_n \in x$. По 7.6.2(2)-(5) следует, что $A \in x$, откуда $x \in \|A\|^L_{(-)}$.

Наоборот, если A не является QLO—выводимой из Γ, то по 7.6.4 существует $x \in X_L$, такой, что $\Gamma \subseteq x$ и $A \notin x$. Тогда по 7.6.11 $x \in \|B\|^L_{(-)}$ для всех $B \in \Gamma$; но $x \notin \|A\|^L_{(-)}$. ▪

Теорема 7.6.13. *$\Gamma \prec A$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_L : \Gamma \models A$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ будет произвольной CQLO-моделью на $\mathcal{F}_L$; для каждого $i < \omega$, $\|p_i\|^m \in \xi_L$, тогда существует B_i, такая, что $\|p_i\|^m_{(-)} = |B_i|^L_{(-)}$ ($|B_i|^L_{(-)}$ определяется как в 7.6.9) и $|B_i|^L_{(-)} = \|B_i\|^L_{(\,)}$. Для любой ппф C пусть C' будет результатом подстановки B_i вместо каждого вхождения p_i. Очевидным образом в Γ существуют $A_1, \ldots, A_n$, такие, что $A_1 \vee \ldots \vee A_n \prec A$, либо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \prec A$, либо $J_{|\alpha|} A_i \prec A$, либо $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \wedge ({\sim}B_n \wedge \ldots \wedge {\sim}B_1) \prec A$ $(1 \le i \le n)$. Используя предложенную подстановку, получаем $A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \prec A'$ и т.д. Тогда по 7.6.12 $\mathcal{M}_L : A'_1 \vee \ldots \vee A'_n \models A'$, либо $\mathcal{M}_L : (A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_n) \wedge (A'_n \wedge \ldots \wedge A'_1) \models A'$, либо $\mathcal{M}_L : J_{|\alpha|} A'_i \models A'$, либо $\mathcal{M}_L : (A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_n) \wedge ({\sim}A'_n \wedge \ldots \wedge {\sim}A'_1) \models A'$,. Но по индукции получаем, что $\|C\|^m = \|C'\|^m_L$; откуда $\mathcal{M}_L : A_1 \vee \ldots \vee A_n \models A$, либо $\mathcal{M}_L : (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge (A_n \wedge \ldots \wedge A_1) \models A$, либо $\mathcal{M}_L : J_{|\alpha|} A_i \models A$, либо $\mathcal{M}_L : (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge ({\sim}A_n \wedge \ldots \wedge {\sim}A_1) \models A$, откуда $\mathcal{M}$: $\Gamma \models A$. Поскольку все это выполнимо в любой модели $\mathcal{M}$ на $\mathcal{F}_L$, то отсюда заключаем, что $\mathcal{F}_L : \Gamma \models A$. ▪

Следствие 7.6.14 (сильная полнота CQLO). Θ: $\Gamma \models A$ *только если* $\Gamma \prec A$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{F}_L$ является по 7.6.10 CQLO-фреймом, то Θ содержит $\mathcal{F}_L$ в качестве элемента. Остальное очевидно. ▪

Таким образом, 7.6.14 устанавливает тот факт, что CQLO сильно детерминирована классом всех CQLO—фреймов.

В случае нормированной квантовой логики наблюдаемых если мы прибегнем к дополнительной аксиоме

Ax38. $\exists u{\sim}A \prec\succ \exists uA$

то алгебраическая структура, соответствующая подобному расширению CQLO будет представлять собой не только банахову алгебру с инволюцией, но даже С*-алгебру, поскольку Ax38 вместе с Ax21 дают нам теорему

$\exists u({\sim}A \wedge A) \prec\succ \exists uA \wedge \exists uA,$

требующуюся согласно алгебраическому подходу в случае существования у наблюдаемых нормы. Покажем это.

Теорема 7.6.15. *Структура* $\mathrm{N}\mathcal{F}^* = \langle \mathrm{F},+,\circ, -,\alpha,|...|,0,1\rangle$, *где* $\alpha \in \mathbb{C}$, *является С*-алгеброй.*

Доказательство. Согласно 5.3.2 $\mathcal{F} = \langle \mathrm{F},+,\circ, -,\alpha,0,1\rangle$ является алгеброй (наблюдаемых), а $\mathcal{F} = \langle \mathrm{F},+, -,\alpha,0\rangle$ является векторным (линейным) пространством. Операция $|...|$ была определена как $|[A]| = [\exists uA]$. Поскольку $\mathrm{N}\mathcal{F}^* = \langle \mathrm{F},+,\circ, -,\alpha,|...|,0,1\rangle$, как мы уже знаем, является банаховой алгеброй, то нам необходимо лишь выполнение следующего соотношения:

$|[A]^* \circ [A]| = |[A]|^2$ (т.е. $|[A]| \circ |[A]|$)

Но подобное условие в $\mathrm{N}\mathcal{F}^*$ выполняется в силу Ax20, Ax21 и Rx6, что и завершает доказательство. ▪

Для того, чтобы доказать непротиворечивость и полноту системы комплекснозначной нормированной квантовой логики наблюдаемых CNQLO, получающейся при добавлении к NQLO аксиомы Ax38, нам необходима лишь следующая теорема (все понятия нормированной квантовой логики наблюдаемых автоматически переходят в понятия комплекснозначной нормированной квантовой логики наблюдаемых):

Теорема 7.6.15 (непротиворечивость CNQLO). $\Gamma \prec A$ *только если* Θ: $\Gamma \vDash A$, *где* Θ *— класс всех CNQLO-фреймов.*

Доказательство. Приводим доказательство новой аксиомы. Остальное остается без изменений.

Ax38. Пусть $x \in \|\exists u{\sim}A\|_a$. Тогда по 5.4.4 $x \in \|{\sim}A\|_b$ и $b \leq a$. Далее, по 7.6.6.(7) $x \in \|A\|_{\bar{b}}$, а отсюда по 5.4.4 $x \in \|\exists uA\|_a$, где $a = \sup|v(A,y)|\}$ для всякого $y \in \|A\|$. При этом, ввиду того, что супремум определяется по модулю комплексного числа, доказательство в обратную сторону приводит к тому же самому значению истинности, не взирая на операцию сопряжения. ▪

Заключение

Не следует думать, что квантовая логика наблюдаемых в том виде, в котором она здесь изложена, всего лишь та же алгебра наблюдаемых в новой, несколько непривычной для физиков и математиков, логической «одежде». Даже если считать формализм алгебры наблюдаемых в гильбертовых пространствах языком квантовой теории, то и тогда квантовая логика наблюдаемых может быть расценена как перевод на другой язык, а принципы подобного перевода, как и в случае естественного языка, далеко не очевидны, что приводит к явной неоднозначности оригинала и перевода, не говоря уже о том, что перевод на другой язык сам по себе способствует привлечению новых, иноязычных читателей (в данном случае логиков).

Если еще Биркгоф и фон Нейман реконструировали свое исчисление квантовых высказываний в виде формальной аксиоматической системы, для которой можно сконструировать много различных моделей, то то же самое можно сказать и о квантовой логике наблюдаемых. Сама по себе сильная детерминация QLO классом всех QLO-фреймов может расцениваться абсолютно независимо от свойств квантовых систем, рассматриваемых при алгебраическом подходе, и служить характеристикой некоторых «физических» систем вообще. В то же время подобная детерминация может быть принята в качестве основной характеристики квантовых систем, выделяющей их среди широкого класса физических систем вообще.

В этой связи нельзя не отметить, что та особенность QLO, характерная для всех логических систем, что доказательство их полноты и непротиворечивости требует их мультимодельности (т.е. интерпретируемости для всех оценок на всех фреймах определенного вида) удивительно похожа на требование, предъявляемое конструкцией Гельфанда-Наймарка-Сигала к современной физической теории, полностью отсутствовавшее в традиционном формализме квантовой теории (излагаемой, например, в духе Дирака). Это требование состоит в том, что гильбертово пространство, в котором действуют наблюдаемые как операторы, не должно являться неотъемлемой принадлежностью ни теории, ни даже изучаемой модели, а должно зависеть от состояния или лишь от способа приготовления исследуемой системы. Таким образом, существенной чертой теории становится ее многопространственность. Аналогия с сильной детерминируемостью QLO весьма прозрачна.

Если попытаться построить логику направленного времени с F-оператором, основываясь на системе QLO-QMV бимодальной логики эффектов, то возникающая на этом пути трудность носит не столько формальный, сколько содержательный характер. Дело в том, что семантика F-оператора основывалась на тернарном отношении достижимости, введение которого оправдывалось метатеоремой, доказанной автором для бесконечнозначной логики Лукасевича. Однако в случае QLO-QMV мы имеем дело не с MV-, но с QMV-алгебрами, а для них подобный результат не имеет места. Конечно, можно ввести требуемое тернарное отношение, основываясь на аналогии между ролью F-оператора в расширении QLO-QMV и QLO-MV систем, однако природа подобного введения требует дальнейшего исследования. Точно такое же затруднение возникает и в случае комплекснозначного расширения системы QLO.

И, наконец, что касается построения релятивистского варианта QLO, то здесь можно ожидать, что переход к системе с более сложным временным оператором, а затем и к пространственно-временным операторам, смог бы удовлетворить требованиям, предъявляемым к релятивистской теории квантовых систем.

Литература

[Алексеев и др. 1984] *Алексеев И. С., Овчинников Н. Ф., Печенкин А. А.* Методология обоснования квантовой теории (История и современность) М.: Наука 1984.

[Белнап Стил 1981] *Белнап Н., Стил Т.* Логика вопросов и ответов М.: Прогресс. 1981.

[Бирктоф 1964] *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука. 1964.

[Брателли Робинсон 1982] *Брателли У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистика М.. Мир. 1982.

[Бунге 1975] *Бунге М.* Философия физики. Прогресс, М., 1975.

[Васюков 1983] *Васюков В.Л.* Квантовая логика времени // Логические исследования (Труды научн.-иссл. семинара по логике ИФАН СССР), М., 1983. С.93-102

[Васюков 1987] *Васюков В.Л.* Комплекснозначные логики или как учитывать контекст в логических системах // Нестандартные семантики для неклассических логик. / Труды научно-исследовательского семинара по логике ИФАН СССР, М., 1987. С.15-38.

[Васюков 1989] *Васюков В.Л.* Квантовая логика в топосах // Исследования по неклассическим логикам, Наука, М., 1989. С. 338-348

[Васюков 1989а] *Васюков В.Л.* Квантовая логика наблюдаемых: реконструкция и семантический анализ // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик, Наука, М., 1989. С. 120-169.

[Васюков 1989в] *Васюков В.Л.* Квантовая логика и расширения логических систем // Современные исследования по квантовой логике, изд-во МГУ, М., 1989. С.76-89.

[Васюков 1998] *Васюков В.Л.* Формальная феноменология, Наука, М., 1998.

[Васюков 1999] *Васюков В Л* Направление времени в семантике многозначных возможных миров // Труды научн.-исслед. семинара логического центра Института философии РАН, М., 1999. С.143-155.

[Гольдблатт 1983] *Гольдблатт Р.* Топосы: Категорный анализ логии. Мир, М., 1983

[Ермолаева Мучник 1974] *Ермолаева Н. М., Мучник А. А.* Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука. 1974. С.172-193.

[Карнап 1971] *Карнап Р.* Философские основания физики. Прогресс, М., 1971.

[Карпенко 1985] *Карпенко А. С.* Фактор-семантика для бесконечнозначной логики Лукасевича // Неклассические логики (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР), М., 1985. С.20-26.

[Кейслер Чэн 1971] *Кейслер Г. Дж., Чэн чен-чунь.* Теория непрерывных моделей. М.: Мир, 1971.

[Кон 1968] *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

[Лукасевич 1959] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения формальной логики. М.: Изд-во иностр.лит-ры, 1959.

[Макки 1965] *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.

[Меськов 1986] *Меськов В. С.* Очерки по логике квантовой механики. М.: изд-во МГУ, 1986.

[Нейман 1964] *Нейман И. фон.* Математические основы квантовой механики. М.: 1964.

[Панченко 1981] *Панченко А. И.* Логико-гносеологические проблемы квантовой физики. Наука, М., 1981.

[Панченко Роженко 1983] *Панченко А. И., Роженко Н. М.* Развитие квантовой логики в зарубежной литературе. Период между IV (Бухарест, 1971) и VII (Зальцбург, 1983) международными конгрессами по логике, методологии и философии науки: Обзор // Материалы к VII Международному конгрессу по логике, методологии и философии науки: современные зарубежные исследования. М., 1983. С.136-167.

[Пятницын 1965] *Пятницын Б. Н.* О логике физики микромира // Логическая структура научного знания. М.: Наука, 1965. С.336-348.

[Рейхенбах 1962] *Рейхенбах Г.* Направление времени. Изд-во иностр. лит., М., 1962.

[Роженко 1964] *Роженко Н. М.* Дополнительность и квантовая логика // Философские вопросы современной физики, Киев: Наукова думка, 1964. С.265-270.

[Роутлей Мейер 1981] *Роутлей Р., Мейер Р.* Семантика следования // Семантика модальных и интенсиональных логик. Прогресс, М., 1981. С.363-423.

[Сегерберг 1979] *Сегерберг К.* Временная логика фон Вригта // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С.173-205.

[Фейс 1974] *Фейс Р.* Модальная логика. М.: Наука. 1974.

[Эмх 1976] *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.

[Banai 1982] *Banai M.* A new approach to quantum field theory and a space-time quantization // Hadronic J. 5. No 5. pp.1812-1841.

[Beran 1984] *Beran L.* Orthomodular Lattices: Algebraic Approach. Prague: Academia. 1984.

[Bernini 1981] *Bernini S.* Quantum logic as an extension of classical logic // Current Issues on quantum logic / Eds. Beltrametti S., Fraassen B. Van. New York, London: Plenum, 1981, pp. 161- 171.

[Birkhoff Neumann 1936] *Birkhoff G., Neumann J. von.* The logic of quantum mechanics // Annal. Math., v.37, 1936. pp. 823-843.

[Bugajski 1983] *Bugajski S.* Semantics in Banach spaces // Studia Logica 42, No 1, 1983. pp.81-88.

[Cattaneo Nisticò 1989] *Cattaneo G., Nisticò G.* Brouwer-Zadeh posets and three-valued Lukasiewicz posets // Fuzzy Sets and Systems. 33. 1989. pp. 165-190.

[Cattaneo 1993] *Cattaneo G.* The 'Logical' Approach to Axiomatic Quantum Theory // Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics and Physics / G.Corsi *et al.* (eds.). Kluwer, Dordrecht, 1993. pp. 225-260.

[Cattaneo *et al* 2003] *Cattaneo G., Dalla Chiara M. L., Giuntini R.* An Unsharp

Quantum Logic from Quantum Computation // Alternative Logics. Do Sciences Need Them? / Paul Weingartner (Ed.). Springer. Berlin, Heidelberg, 2004, pp. 323-338

[Chang 1982] *Chang C. C.* Logic with Positive and Negative Truth Values // Proceedings of a Colloquium on Modal and Many-valued Logics. Helsinki, 23-26 August, 1962. Acta Phil Fennica, Fasc XVI, 1963. pp 19-39.

[Chapman 1982] *Chapman T.* Quantum logic and modality // Log.et Anal. 24, No 93. 1982. pp. 99-111.

[Coecke 2002]] *Coecke B.* Quantum Logic in Intuitionistic Perspective // Studia Logica Vol.70. No 3. 2002 pp.411-440.

[Cohen Wartofsky 1974] Logical and epistemological studies in contemporary physics / Ed. by Cohen R.S , Wartofsky M.W Dordrecht etc · Reidel. 1974. (Boston Studies in the philosophy of science, vol.13)

[Cutland Gibbins 1982] *Cutland N. J., Gibbins P. F.* A regular sequent calculus for quantum logic in which ∧ and ∨ are dual // Log.et Anal. 25, No 95. 1982. pp.221-248.

[Dalla Chiara 1981] *Dalla Chiara M. L* Some metalogical pathologies of quantum logic // Current Issues on quantum logic / Eds. Beltrametti S., Fraassen B. Van. New York, London: Plenum, 1981, pp.147-158.

[Dalla Chiara 1986] *Dalla Chiara M. L.* Quantum Logic // Handbook of Philosophical Logic Vol. III / D.Gabbay and F.Guenthner (eds.) Dordrecht, Reidel. 1986. pp. 427-469.

[Dalla Chiara Toraldo di Francia 1973] *Dalla Chiara M. L., Toraldo di Francia G.* A logical analysis of physical theories // Nuovo Cimento, v.3, No 1, 1973. pp.1-20.

[Dalla Chiara Toraldo di Francia 1976] *Dalla Chiara M. L., Toraldo di Francia G.* The logical dividing line between deterministic and indeterministic physics // Studia Logica, v 36, No 1, 1976. pp.1-5.

[Dalla Chiara Toraldo di Francia 1993] *Dalla Chiara M. L., Toraldo di Francia G.* Individuals, Kinds and Names in Physics // Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics and Physics / G.Corsi *et al.* (eds). Kluwer, Dordrecht, 1993. pp. 261-283.

[Destouches-Fevrier 1951] *Destouches-Fevrier P.* La structure des theories phisiques. Pref. de Broglie L. de. Paris: Presses Univ. de France, 1951.

[Durr 1935] *Durr K.* Die Bedeutung der Negation. Grundzuge der empirischen Logik // Erkenntnis. Bd. 5. 1951.

[Dishkant 1978] *Dishkant H.* An Extension of the Łukasiewicz's logic to the modal logic of quantum mechanics // Studia Logica. V. 37. No 2. 1976, pp.149-155.

[Fay Toros 1978] *Fay G., Toros R* Kvantum logika. Budapest. Gondolat, 1978.

[Font *et al* 1984] *Font J.M., Rodriguez A.J. and Torrens A.* Wajsberg algebras // Stochastica. 8 (1984). pp.5-31.

[Fraassen 1981] *Fraassen B. C.van.* A modal interpretation of quantum mechanics // Current Issues in quantum logic / Eds. Beltrametti S., Fraassen B. Van. New York, London: Plenum, 1981, pp.229-258.

[Friedman Glymour 1972] *Friedman M , Glymour C.* If quanta had logic // J Phil Log. 1, No 1. 1972. pp.16-28.

[Freundlich 1977] *Freundlicht V.* Two views of an objective quantum theory // Found. Phys. 7, No 3-4. 1977. pp.279-300.

[Garola 1980] *Garolat C.* Propositions and orthocomplementation in quantum logic // Int J.Theor.Phys. 19, No 5. 1980. pp.369-378.

[Giuntini 1996] *Giuntini R.* Quantum MV Algebras // Studia Logica, 56, 393-417, 1996.

[Giuntini Greuling 1989] *Giuntini R., Greuling H.* Toward a formal language for unsharp properties // Found.Phys. 20. 1989. pp.931-935.

[Goldblatt 1974] *Goldblatt R. I.* Semantic analysis of orthologic // J.Phil.Log. 3, No 1-2. 1974. pp.19-35.

[Greechie Gudder 1971] *Greechie R. J., Gudder S. P.* Is quantum logic a logic? // Helv Phys.Acta, v.44, No 2, 1971. pp.236-240.

[Greechie 1974] *Greechie R. J.* Some results from the combinatorial approach to quantum logic // Synthese, 29, No ¼, 1974. pp.113-130.

[Hadjisavvas et al. 1980] *Hadjisavvas N., Thieffine F., Mugur-Schachter M* Study of the Piron's system of questions and propositions // Found Phys., 10. No 9-10. 1980. pp.751-756.

[Hardegree 1974] *Hardegree G. M.* The conditional in quantum logic // Syntheses, 29, No ¼, 1974. pp.63-80.

[Hardegree 1975] *Hardegree G. M.* Quasi-implicative lattice and the logic of quantum mechanics // Zeitschr.Naturforschung, Tubingen, v 30A, No 11, 1975. pp. 1347-1360.

[Hardegree 1981] *Hardegree G. M.* An axiom system for orthomodular quantum logic // Studia Logica 40, No 1 (1981), pp. 1-12.

[Hooker 1974] Contemporary research in Foundations and philosophy of quantum theory / Ed. by Hooker C.A Dordrecht etc.: Reidel, 1973.

[Hooker 1975] The logico-algebraic approach in quantum mechanics (vol 1, Historical evaluation) / Ed. by Hooker C.A., Dordrecht etc.: Reidel, 1975.

[Hooker 1979] The logico-algebraic approach in quantum mechanics (vol 1, Contemporary consolidation) / Ed. by Hooker C.A., Dordrecht etc.: Reidel, 1979.

[Hooker 1979a] Physical theory as logico-algebraic structure / Ed. by Hooker C.A., Dordrecht etc.: Reidel, 1979.

[Hughes 1981] *Highes R. I. G.* Realism and quantum logic // Current Issues in quantum logic / Eds. Beltrametti S., Fraassen B Van. New York, London: Plenum, 1981, pp.77-87.

[Jauch Piron 1970] *Jauch J. M., Piron C.* What is «Quantum logic»? // Quanta / Eds. Freund P.G.C., Goebel G.I. and Nambu J — Chicago, London: The University of Chicago Press, 1970. pp. 166-181.

[Kalmbach 1974] *Kalmbach G.* Orthomodular Logic // Zeitschr. Math.Log. und Grundl.Math., Bd.20, H.5, 1974. S.395-406.

[Kron *et al* 1981] *Kron A., Marič Z., Vujosevič S.* Entailment and quantum logic // Current Issues in quantum logic / Eds. Beltrametti S., Fraassen B. Van. New York, London: Plenum, 1981, pp.193-207.

[Kochen Specker 1967] *Kochen C., Specker E. P.* The problem of hidden variables in quantum mechanics // J.Math.Mech., v.17, No 1, 1967, pp.59-88.

[Kustner 1984] *Kustner H.* How to formalize natural language negation — a proposition and some consequences // Prague Bull.Math.Linguist.., No 2, 1984. pp.15-25.

[Latser 1974] *Latser R.* Errors in the no hidden variables proof of Kochen and Specker // Synthese. 29. No 1-4. 1974. pp.331-372.

[Malhas 1994] *Malhas O Q* Abacus Logic the lattice of quantum propositions as the poset of a theory // J Symb Log 59 No 2 1994 pp 501-515
[Malinowski 1990] *Malinowski J* The deduction theorem for quantum logic — some negative results // J Symb Logic vol 55 No 2 1990 pp 615-625
[Mangani 1973] *Mangani P* Su certe algebra connesse con logiche a piu valore // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana 8, 1973 pp 68-78
[Meyer 1999] *Meyer D A* Finite Precision Measurement Nullifies the Kochen-Spekker Theorem // Los-Alamos E-print Archive quant-ph/9905080, 1999
[Mittelstaedt 1978] *Mittelstaedt P* Quantum Logic Dordrecht etc Reidel, 1978
[Mittelstaedt 1981] *Mittelstaedt P* The modal logic of quantum logic // Current Issues in quantum logic / Eds Beltrametti S , Fraassen B Van New York, London Plenum, 1981, pp 479-504
[Mittelstaedt 1983] *Mittelstaedt P* Relativistic quantum logic // Int J Theor Phys 22 No 4 1983 pp 293-352
[Mundici 1986] *Mundici D* Interpretation of AF C*-Algebras in Łukasiewicz Sentential Calculus // Journal of Functional Analysis 65, 15-63 (1986)
[Nishimura 1980] *Nishimura H* Sequential method in quantum logic // J Symb Log , 45, No 2, 1980 pp 335-352
[Nishimura 1994] *Nishimura H* Proof theory for minimal quantum logic I and II // Intern J Theoret Phys 33, 1994 pp 103-113 and 1427-1443
[Pavičic 1992] *Pavičic M* Bibliography on quantum logics and related structures // Int J of Theoretical Physics Vol 31 No 3 1992 pp 373-460
[Putnam 1974] *Putnam H* How to think quantum-logically? // Synthese, 29, No ½, 1974 pp 55-61
[Redei 2001] *Redei M* Facets of Quantum Logic // Stud Hist Mod Phys Vol 32 No 1 2001 pp 101-111
[Reichenbach 1944] *Reichenbach H* Philosophic foundations of quantum mechanics Berkeley, Los Angeles Univ of California Press, 1944
[Riscos Laita 1987] *Riscos A , Laita L M* N-categories in logic // Zeitschr Math Log Grundl Math , Bd 33 (1987), s 507-516
[Suppes 1976] Logics and Probability in Quantum Mechanics / Ed by Suppes P , Dordrecht etc Reidel 1976
[Stachel 1974] *Stachel J* Comments on "The formal representation of physical quantities" // Logical and epistemological studies in contemporary physics / Ed by Cohen R S , Wartofsky M W Dordrecht etc Reidel 1974 pp 214-223
[Stachel 1976] *Stachel J* The "logic" of "quantum logic" // PSA 1974 Proc 1974 Biennial Meet Phil Sci Assoc , Dordrecht etc Reidel, 1976, pp 515-526
[Stachow 1981] *Stachow E -W* Sequential quantum logic // Current Issues in quantum logic / Eds Beltrametti S , Fraassen B Van New York, London Plenum, 1981, pp 173-191
[Stairs 1983] *Stairs A* On the logic of pairs of quantum systems // Synthese 56, No 1 1983 pp 47-60
[Stout 1979] *Stout L N* Laminations, or How to Build a Quantum-Logic-Valued Model of Set Theory // Manuscripta Mathematica Vol 28 1979 pp 379-403
[Strauss 1936] *Strauss M* Zur Begrundung der statistischen transformatuins theorie der quantenphysik // Berliner Berichte 1936 S 38-398

[Svozil 1998] *Svozil K.* Quantum Logic. Singapore Springer, 1998

[Takeuti 1981] *Takeuti G.* Quantum Set Theory // Current Issues in quantum logic / Eds. Beltrametti S., Fraassen B. Van New York, London. Plenum, 1981. pp 302-322.

[Tamura 1988] *Tamura S.* A Gentzen formulation without the cut rule for ortholattices // Kobe Journal of Mathematics 5 (1988), pp.133-150.

[Thieffine et al. 1981] *Thieffine F., Hadjisavvas N., Mugur-Schachter M.* Supplement to a critique of Piron's system of questions and propositions // Found Phys. 11. No 7-8. 1981. pp.645-649.

[Thieffine 1983] *Thieffine F.* Compatible complement and Piron's system and ordinary modal logic // Lett.Nuovo Cim 36 No 112. 1983 pp 377-381

[Tokuo 2003] *Tokuo K.* Extended Quantum Logic // Journal of Philosophical Logic Vol. 32. 2003. pp. 549-563.

[Urquhart 1973] *Urquhart A.* An Interpretation of many-valued logic // Zeitschr. Math.Log. und Grundl.Math., 19 (1973), pp. 111- 114.

[Vasyukov 1993] *Vasyukov V. L.* The Completeness of the Factor Semantics for Łukasiewicz's Infinite-valued Logics // Studia Logica 52, 1 (1993), pp 143-167.

[Vasyukov 2000] *Vasyukov V. L.* Many-valued Logic of Directed Time // Multple-Valued Logic, vol.5, 2000, pp.163-173.

[Vasyukov 2003] *Vasyukov V. L.* Effects in Quantum Logic of Observables // Логические исследования, вып. 10, М.: Наука, 2003. С.241-256.

[Vasyukov 2003] *Vasyukov V. L.* From Semantics to Syntax: Quantum Logic of Observables // Alternative Logics. Do Sciences Need Them? / Paul Weingartner (Ed.). Springer, Berlin, Heidelberg, 2004, pp.299-322.

[Wang 1961] *Wang H.* The calculus of partial predicates and its extension to set theory I // Zeitschr. Math.Log und Grundl.Math., Bd.7, 1961.

[Weizsacker 1956] *Weizsacker C. F. von.* Komplimentaritat und Logik // Naturwissenschaften. Bd.42, H.19, 1956, S.521-529.

[Zeman 1979] *Zeman J. J.* Quantum logic with implication // Notre Dame J.Form.Log. 20, No 4. 1979. pp 723-728.

Научное издание

Васюков В.Л.
Квантовая логика

Художник: П.П. Ефремов
Компьютерная верстка: Ю.В. Балабанов

Лицензия ИД №01018 от 21 февраля 2000 г.
Издательство «ПЕР СЭ»
129366, Москва, ул.Ярославская, 13, к.120
тел./факс: (095) 682-60-95. e-mail: aperse@psychol.ras.ru
Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.П.001292.09.03 от 03.09.2003 г.

Подписано в печать 18.10.05. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Печ. л. 6,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 783.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «ИПП «Уральский рабочий»
620219, Екатеринбург, ул. Тургенева, 13.
http://www.uralprint.ru
e-mail: book@uralprint.ru

Квантовая логика

Существует ли особая логика микромира — мира квантовых явлений? Можно ли войти в этот мир, руководствуясь только лишь понятиями и концепциями классической логики, выработанной человечеством на протяжении нескольких тысячелетий освоения окружающего и доступного его чувствам макромира?

Возможность построения иной, особой логики микромира была впервые осознана И.фон Нейманом еще в 1932 году, однако первая версия подобной логики была получена им в соавторстве с Г. Биркгофом лишь спустя четыре года. Но хотя с той поры прошло уже более семидесяти лет, ожесточенная полемика физиков, математиков, логиков и философов вокруг построенных за это время разнообразных систем квантовой логики не утихает.

В предлагаемой вниманию читателя книге квантовая логика рассматривается, прежде всего, как раздел современной неклассической логики со всеми вытекающими отсюда последствиями. Главное внимание уделяется синтаксической реконструкции систем квантовой логики и построению различного рода абстрактных семантик для полученных систем. Философские вопросы, возникающие в процессе построения систем квантовой логики, например, природы времени в квантовом мире, рассматриваются и решаются сквозь призму неклассических методов современной логики.

ISBN 5-9292-0142-