МВ и ССО РСФСР
Уральский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. А. М. Горького

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Методическая разработка
по спецкурсу «Методы решения олимпиадных задач»
(для студентов IV и V курсов математико-механического факультета)

Свердловск 1982

Методическая разработка подготовлена
кафедрой алгебры и геометрии

Составитель А. Г. Гейн

© Уральский государственный университет, 1982

Утверждено учебно-методической
комиссией математико-механического
факультета 18 октября 1979 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Настоящая разработка предназначена для семинарских занятий по спецкурсу "Методы решения олимпиадных задач", а также в помощь студентам математико-механического факультета, проходящим педагогическую практику, при организации и проведении обязательной внеклассной работы по математике (математические вечера, олимпиады, викторины, кружки и т.п.).

Данная разработка содержит задачи логической природы и является продолжением методической разработки "Задачи по математике и методы их решения". Собранные здесь задачи по своим формулировкам не имеют аналогов в школьном курсе и обычно трактуются как "чисто олимпиадные". Они, как правило, не требуют глубокого владения техникой преобразований, а основаны на умении вскрывать логическую структуру задачи.

Задачи, основанные на одной идее решения, объединены в циклы, внутри которых они расположены в порядке возрастания трудности. При использовании настоящей разработки в кружковой работе каждый цикл может служить отдельной темой, рассчитанной на несколько занятий. При проведении школьной олимпиады не рекомендуется включать в вариант более одной задачи из данной разработки. Большая часть задач доступна школьникам седьмого класса; цифра в скобках, стоящая после номера задачи, указывает класс, для которого она использовалась ранее на какой-либо олимпиаде.

I. ЗАДАЧИ НА ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Основная идея, используемая при решении задач этого цикла, заключена в следующем легко доказываемом утверждении, называемом принципом Дирихле:

"Если $kn+1$ предмет разложен в k ящиков, то по крайней мере в одном ящике лежит не меньше, чем $n+1$ предмет".

При использовании принципа Дирихле надо всегда четко определять, что является предметами, а что – ящиками.

I. В классе учится 29 человек. Саша Иванов допустил в диктанте I3 ошибок, и никто другой не сделал большего числа ошибок. Доказать, что по крайней мере трое учащихся имели одинаковое количество ошибок. 1.1 (18 [illegible])

2. В Свердловске более чем I,25 миллиона жителей. На голове у каждого не более чем I00000 волос. Доказать, что есть по крайней мере I3 человек с одинаковым числом волос на голове. 1.3

3. Каждая грань куба выкрашена в белый или черный цвет. Доказать, что найдутся две грани с общим ребром, которые одинаково окрашены. Верно ли аналогичное утверждение для октаэдра? 2.2

4. Плоскость произвольным образом раскрашена в два цвета. Доказать, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии Iм друг от друга.

5. Какое наибольшее число королей можно расставить на обычной шахматной доске 8×8, чтобы они не били друг друга?

6. Доказать, что среди 82 кубиков, каждый из которых выкрашен в определенный цвет, всегда можно выбрать I0 кубиков таких, что либо все они выкрашены в разные цвета, либо все одного цвета.

7.а) Доказать, что среди любых II натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на I0. 1.7

б) Доказать, что среди любых K+I натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на K.

8. Доказать, что для каждого натурального числа K существует число вида III...I00...0, делящееся на K.

9. Пусть a – натуральное число. Доказать, что последовательность остатков от деления на m чисел $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ периодична.

I0. Доказать, что среди чисел вида 7^k найдется число, оканчивающееся на 000I. 1.12

II. В последовательности I,9,7,5,2,3,... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырех цифр

а) Встретятся ли в этой последовательности ещё раз подряд четыре цифры I975 ?

б) Встретятся ли в этой последовательности подряд четыре цифры 8I97 ?

I2. В стране Оз имеется несколько замков; из каждого замка ведет три пути. Странствующий рыцарь выехал из своего родового замка и пустился в путешествие по стране. Рыцарь любит разнообразие, поэтому доезжая до очередного замка он поворачивает налево, если предыдущий раз он повернул направо, и поворачивает направо, если до этого он повернул налево. Доказать, что когда-нибудь рыцарь вернется в свой замок.

I3. В вершинах выпуклого 65-угольника написаны различные натуральные числа, каждое из которых не превосходит I980. Доказать, что найдутся две диагонали, для которых разности чисел, написанных у их концов, одинаковы. 2.16

I4. В компании I6 человек. Каждому из них нравится 8 человек из компании. Доказать, что есть двое, которые нравятся друг другу.

I5./8/ В квадрат со стороной I бросили 5I точку. Доказать, что найдется круг радиуса I/7, содержащий по крайней мере три из этих точек.

I6. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Доказать, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

I7. В круге единичной площади лежит I98I точка. Доказать, что можно выбрать три из них так, что площадь треугольника с вершинами в этих точках будет меньше, чем 0,00II.

I8. Пять квадратов со взаимно параллельными сторонами имеют общую точку. Доказать, что один из них содержит центр другого.

I9. Доказать, что если вершины выпуклого К-угольника ($K \geq 5$) лежат в узлах клетчатой бумаги, то найдется еще узел, лежащий внутри многоугольника или на его стороне.

20. Из чисел I, 2, ..., 200 наудачу взято I0I число. Доказать, что одно из выбранных чисел делится на другое. 1.28

При решении следующих задач используется информация о том, что в некоторых ящиках число предметов можно заранее ограничить подходящей константой (в частности, какой-то ящик может оказаться пустым).

2I. Восемь целых чисел подчинены условию: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_8 < 16$. Доказать, что всегда существует такое число К, что из данных восьми чисел можно выбрать не менее трёх пар, связанных соотношением $a_i - a_j = K$. 2.12

22. По краю круглого стола равномерно расставлены таблички с фамилиями дипломатов, участвующих в совещании. После начала

совещания оказалось, что ни один из дипломатов не сидит против своей таблички. Можно ли повернуть стол так, чтобы по крайней мере два дипломата сидели против своих табличек ?

23./10/ Доказать, что среди 65 целых чисел всегда найдутся 9 чисел, сумма которых делится на 9.

24. а) Числа a и m взаимно просты. Доказать, что найдется натуральное k, что число ka при делении на m дает в остатке 1.

б) Доказать, что для любого натурального числа a и простого p, не делящего a, число $a^{p-1}-1$ делится на p без остатка (малая теорема Ферма).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов А.И. Принцип Дирихле. - Квант, 1971, №7.
2. Болтянский В. Шесть зайцев в пяти клетках.- Квант, 1977, №2.
3. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М., 1975.

2. ЗАДАЧИ НА ИЗБЫТОК И НЕДОСТАТОК

Эта тема является естественным продолжением предыдущей. В задачах на принцип Дирихле по существу реализуется идея избыточности числа предметов по отношению к числу ящиков. Этот же подход может быть использован не только для дискретной количественной меры, но и непрерывной, такой, например, как площадь, длина и т.п.

1. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере 4 из этих окружностей.

2. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых больше 7π. Доказать, что найдется диаметр, пересекающий не менее восьми хорд.

3. Даны две окружности, каждая длиной 1982. На одной из них отмечено 1982 точки, а на другой - несколько дуг, сумма длин которых меньше 1. Доказать, что эти окружности можно так наложить друг на друга, что ни одна отмеченная точка не попадет ни на одну отмеченную дугу.

4./10/ Внутри круга радиуса 16 расположено 650 точек. Доказать, что найдется кольцо толщины 1 и внутреннего радиуса 2, содержащее не менее 10 из этих точек.

5. Доказать, что в круге радиуса 9,5 нельзя поместить 400 точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя было больше 1.

6. /9/ Доказать, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить окружность радиуса S/P.

7. Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной I, и фигура, площадь которой меньше I. Доказать, что фигуру можно положить на эту бумагу так, что ни один узел клетчатой бумаги не будет покрыт фигурой.

В ряде случаев количество ящиков больше числа предметов. Ясно тогда, что при раскладке предметов в ящики некоторый ящик окажется пустым.

8. а). В квадрате, составленном из I00 клеток, закрашено менее 50 клеток. Доказать, что можно положить косточку домино, покрывающую ровно две клетки, на незакрашенные клетки.

б) /9/ В куб с ребром $2n$ уложено $8n^3$ маленьких кубиков. Какое наибольшее число маленьких кубиков, не имеющих общей грани, можно убрать ?

9. В прямоугольнике со сторонами 20 и 25 расположено I20 квадратиков со стороной I. Доказать, что внутри прямоугольника можно поместить круг диаметра I, не налегающий ни на один из квадратиков.

I0. Сосновый лес растет на участке, имеющем форму прямоугольника со сторонами Iкм и 2км. Зная, что весь лес состоит не более, чем из 9I00 деревьев диаметром не более 50 см, доказать, что в этом лесу можно выбрать прямоугольную площадку I0м×20м, на которой не растет ни одного дерева.

II. Сосновый лес растет на участке, имеющем форму квадрата со стороной Iкм. Лес называется густым, если нет прямолинейного пути длиной I00м, свободного от деревьев. Будет ли густым лес, состоящий из а) 9850 деревьев ? б) 9920 деревьев ? (Диаметр каждого дерева - 50 см).

I2. Можно ли из I8 плиток размером I×2 выложить квадрат так, чтоб при этом не было ни одного прямого "шва", соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток? А из 32?

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Ионин Ю.И., Курляндчик Л.Д. Окрестность фигуры.- Квант, I973, № I0.

2. Васильев Н.Б. и др. Математические соревнования. Геометрия. М., I974.

3. ЗАДАЧИ НА УПОРЯДОЧЕНИЕ. ПРИНЦИП КРАЙНЕГО ЭЛЕМЕНТА

В ряде случаев, особенно в задачах, где неизвестные в том или ином смысле равноправны, бывает удобно рассматривать экстремальный по отношению к некоторому свойству элемент (самый левый, самый верхний, самый длинный, наибольший, наименьший и т.п.) и тем нарушать равноправие.

1./7/ На плоскости дано 1970 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, не содержащий ни одной из оставшихся точек.

2. На каждой из планет некоторой системы находится ровно один астроном, и он наблюдает ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны.

а) Доказать, что есть две планеты, астрономы которых наблюдают друг друга.

б)/8/ Доказать, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

3. Множество точек обладает тем свойством, что каждая его точка является серединой отрезка, соединяющего две другие точки этого же множества. Доказать, что данное множество бесконечно, если оно лежит а) на прямой, б) на плоскости.

4./7/ В каждой вершине десятиугольника записано число так, что оно равно полусумме двух чисел, написанных в соседних вершинах. Доказать, что все десять чисел равны между собой.

5./8/ На бесконечной клетчатой бумаге в каждой клетке написано натуральное число так, что оно равно среднему арифметическому своих четырех соседей. Доказать, что все числа на этой бумаге равны между собой.

6./8/ Доказать, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали, из которых можно составить треугольник.

7. На прямой дано конечное число отрезков, каждые два из которых имеют общую точку. Доказать, что все они имеют общую точку. Можно ли утверждать это для бесконечной системы отрезков ?

8./8/ Доказать, что уравнение $\frac{x^3}{xyz}+\frac{y^3}{yzx}+\frac{z^3}{zxy}=1$ не имеет решений в положительных числах x, y, z.

9./10/ Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2\ ; \quad x_2+x_3=x_4^2\ ; \\ x_3+x_4=x_5^2\ ; \quad x_4+x_5=x_1^2\ ; \\ \qquad x_5+x_1=x_2^2\ . \end{cases}$$

I0. Доказать, что не существует четверки натуральных чисел x, y, u, v, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=3(u^2+v^2)$.

II./9/ Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить треугольник площади I. Доказать, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

I2. Дан выпуклый многоугольник площади S . Доказать, что его можно поместить в прямоугольник площади $2S$.

I3. Существует ли такой многоугольник (не обязательно выпуклый), в котором проекция любой вершины на любую сторону, не проходящую через эту вершину, лежит на её продолжении ?

Развитием принципа крайнего элемента является идея расположения элементов в каком-либо порядке (возрастания, убывания или ещё как-нибудь).

I4./9/ Найти положительные решения системы уравнений:

$$x^2+y^2=1; \quad x^y=y^x.$$

I5. Решить в натуральных числах систему

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^5+y^5=z^3 \end{cases}.$$

I6./8/ Семь друзей собрали вместе I00 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового количества грибов. Доказать, что трое из них собрали не менее половины всех грибов.

I7./8/ Дано девять различных натуральных чисел, каждое из которых меньше 55. Доказать, что среди них найдутся такие три числа a, b, c, что $a<\frac{a+b+c}{2}$, $b<\frac{a+b+c}{2}$, $c<\frac{a+b+c}{2}$.

I8./8/ Можно ли 44 монеты разложить по I0 кошелькам так, чтобы любые два из них содержали различное число монет ? (Считаем, что два пустых кошелька содержат одинаковое число монет - ноль).

I9. Двое школьников играют в такую игру. Первый загадывает 5 чисел и сообщает второму всевозможные попарные суммы (их I0 штук), а второй по этим десяти числам должен определить, какие числа задумал первый. Может ли он это сделать ?

20./8/ В четырехугольнике АБСД диагонали пересекаются в точке 0, периметры треугольников АВ0, ВС0, СД0 и ДА0 равны. Доказать, что четырехугольник - ромб.

2I./I0/ В квадрате со стороной I отмечено 500 различных точек. Доказать, что среди отмеченных точек можно выбрать I2 точек A_1, A_2, A_3, ..., A_{12} так, что длина ломаной $A_1A_2\ldots A_{12}$ меньше I.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Розенталь А. Правило "крайнего". - Квант, I976, № 8.

4. ЗАДАЧИ НА ПОИСК ИНВАРИАНТА

Отличительным признаком задач этого цикла является описание в условии задачи некоторого способа действий и вопрос о том, может ли в результате этих действий получиться тот или иной эффект. Основным методом решения является нахождение такого свойства исходного объекта, которое не меняется при выполнении действий, указанных в задаче. Такое свойство называется инвариантом Если конечный объект задачи, в отличие от исходного, не обладает найденным свойством, то он, очевидно, не может быть результатом этих действий (обратное, вообще говоря, неверно).

I./7/ Некоторые из I5 листов бумаги разрезали на IO частей, затем некоторые из получившихся листов ещё разрезали на IO частей и так далее несколько раз. Когда подсчитали общее число получившихся листов бумаги, их оказалось I963. Докажите, что подсчет произведен неверно.

2. На чудо-яблоне садовник вырастил 25 бананов и 30 апельсинов. Каждый день он срывает два плода и на их месте тут же вырастает новый, причем, если он срывает два одинаковых фрукта, то вырастает апельсин, а если он срывает два разных плода, то вырастает банан. Каким может оказаться последний фрукт на этом дереве?

3./7/ Витя и Коля по очереди берут камни из кучи, содержащей IOO камней. За один раз каждому разрешается брать либо ровно I камень, либо ровно 3 камня. Кто из них возьмет последний камень, если начинал Витя ?

4./9/ В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на концах одного ребра, можно прибавить одно и то же целое число. Можно ли за несколько шагов сделать все восемь чисел равными, если вначале числа были поставлены, как на рис. А ? Как на рис. Б ? Как на рис. В ?

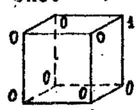


рис. А

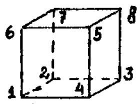


рис. Б

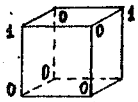


рис. В

5./8/ На доске написаны числа I, 2, 3, ..., I98I. За один ход разрешается стереть любые два числа и вместо них написать их разность. Через I980 шагов на доске останется одно число. Может ли оно равняться 0 ?

6. Даны три числа: 2; $I+\sqrt{2}$; $I-\sqrt{2}$.

а) За один ход разрешается написать новые три числа, заменив каждое из исходных чисел полусуммой двух других чисел. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, придти к набору I; $2+\sqrt{2}$; $2-\sqrt{2}$?

б) За один ход разрешается любые два из них заменить суммой, деленной на $\sqrt{2}$, и разностью, деленной на $\sqrt{2}$, оставив третье число неизменным. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, придти к набору I; $\sqrt{2}$; $I/\sqrt{2}$?

7.а)/8/ В таблице 4×4 знаки + и − расставлены так, как показано на рисунке I. Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной

+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

рис. I

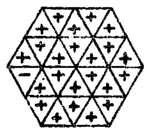


рис.2.

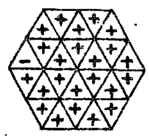


рис. 3

строке, или в одном столбце, или вдоль прямой, параллельной какой-либо диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью этих операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса ?

б)/9/ В шестиугольнике, разграфленном на треугольники, в каждом треугольнике поставлен + или − так, как показано на рисунке 2. Разрешается за один раз изменить знак на противоположный одновременно во всех треугольниках одной полосы, параллельной некоторой стороне шестиугольника. Можно ли, выполнив несколько таких преобразований, получить шестиугольник, изображенный на рисунке 3 ?

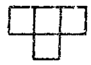
в) В шестиугольнике, разграфленном так же, как на рис. 2, в некотором треугольнике поставлен знак −, а во всех остальных +. Можно ли преобразованиями, описанными в пункте б), этот минус перенести в другой треугольник так, чтобы во всех остальных треугольниках были плюсы ?

8./8/ Три кузнечика играют в чехарду: если кузнечик из точки А прыгает через кузнечика в точке В, то он оказывается в точке С, симметричной точке А относительно В. В исходном положении кузнечики занимают три вершины квадрата. Могут ли они, играя в чехарду, попасть в его четвертую вершину ?

В задачах на клетчатой бумаге или шахматной доске искать инвариант помогает раскраска (естественная или специально выполненная).

9. У шахматной доски 8×8 вырезаны левая верхняя и правая нижняя угловые клетки. Можно ли её замостить косточками домино, покрывающими ровно две клетки доски, так, чтобы покрыть без наложений друг на друга всю такую доску ?

I0./7/ Можно ли ходом шахматного коня обойти всю шахматную доску так, чтобы, начав с левого нижнего угла, закончить в правом верхнем и побывать при этом на каждой клетке ровно один раз ?

II./9/ Можно ли из четырехклеточных фигурок вида  составить квадрат размером 50×50 клеток ?

I2. Из шахматной доски 8×8 вырезана одна угловая клетка. Можно ли оставшуюся часть покрыть без наложений прямоугольниками, составленными из трех клеток ?

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Ионин Ю.И., Курляндчик Л.Д. Поиск инварианта.- Квант, 1976, № 2.

2. Толпыго А.К. Инварианты.- Квант, 1976, № I2.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

I. Задачи на принцип Дирихле.

I. К = I4 (ошибок может быть 0,I,...,I3), n = 2.

2. К = I0000I (число волос может быть 0,I,...,I00000), n = I2.

3. Рассмотреть три грани, имеющие общую вершину; К = 2 (количество цветов), n = I.

4. Рассмотреть вершины равностороннего треугольника.

5. Разбить доску на I6 квадратов размером 2×2; К = I6.

6. Рассмотреть два случая: когда использовалось не менее I0 красок и когда не более 9. Во втором случае К = 9 ("ящики" - цвета красок).

7.а) Разность делится на I0, когда оба числа оканчиваются на одну цифру; К = I0 ("ящик" - цифра в младшем разряде числа).

б) Разность делится на К, когда оба числа имеют одинаковый остаток от деления на К. "Ящик" - остаток от деления на К.

8. Рассмотреть числа I; II; III; ...; $\underbrace{II\ldots I}_{k+1}$ и воспользоваться задачей 7б).

9. Воспользоваться 7б).

I0. Воспользоваться задачей №9, где m = I000, и взаимной простотой 7 и I000.

II. Используя конечность числа упорядоченных четверок цифр, показать, что в последовательности встретятся два одинаковых упорядоченных набора. Воспользоваться тем, что четыре числа однозначно определяют предыдущее число.

I2. Перенумеровать все замки и рассмотреть последовательность номеров замков в порядке посещения их рыцарем. Каждая тройка чисел последовательности определяет номер предшествующего замка (ср. с задачей №II).

I3. Диагоналей многоугольника $\frac{64\cdot65}{2} - 65 = 2015$, а разностей не более I979.

I4. Сравнить общее число пар людей в компании с суммарным числом симпатий.

I5. Разбить исходный квадрат на 25 квадратиков со стороной I/5.

I6. Доказать, что каждая из этих девяти прямых проходит через одну из четырех точек, являющихся концами отрезков, перпендикулярных сторонам квадрата, проходящим через их середины и длиной 2/5 от длины стороны.

I7. Разбить круг на 990 конгруэнтных секторов. Площадь каждого сектора меньше 0,0011.

18. Провести через общую точку две прямые, параллельные сторонам. Рассмотреть центры тех квадратов, которые попали в одну из четырех частей плоскости, на которые она разбилась этими прямыми.

19. Ввести систему координат. Доказать, что найдутся две вершины, у которых первые координаты одной четности и вторые координаты тоже одной четности. Рассмотреть середину отрезка, соединяющего эти две вершины.

20. "Ящик" определяется наибольшим нечетным делителем каждого числа.

21. Сравнить число возможных разностей с числом возможных пар. Заметить, что разность 14 может быть получена только одним способом.

22. В качестве "ящиков" рассмотреть положительные углы в 0°, $\frac{360^\circ}{K}$, $2\cdot\frac{360^\circ}{K}$, ..., $(K-1)\cdot\frac{360^\circ}{K}$. Каждому дипломату соответствует угол, на который надо повернуть стол, чтобы совместилась табличка. Воспользоваться тем, что поворот на 0° не удовлетворяет ни одного дипломата.

23. "Ящики" - остатки от деления на 9. Либо каждый "ящик" содержит число (тогда их сумма делится на 9), либо один "ящик" пуст.

24. а) Для чисел $a, 2a, \ldots, (m-1)a$ рассмотреть остатки от деления на m. Либо среди них встречаются всевозможные ненулевые остатки, либо есть два одинаковых. Во втором случае получить противоречие.

б) Поскольку среди чисел $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ встречаются все ненулевые остатки от деления на p, числа $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)$ и $a\cdot 2a\cdot\ldots\cdot(p-1)a$ дают один и тот же остаток при делении на p. Воспользоваться взаимной простотой $(p-1)!$ и p.

2. Задачи на избыток и недостаток.

1. Сумма длин проекций окружностей на сторону квадрата равна $10/\pi$, следовательно, существует точка на этой стороне, покрытая не менее четырех раз.

2. Рассмотреть центральные проекции хорд на полуокружность.

3. Взять на первой окружности ещё одну точку A и отметить все её положения, когда хотя бы одна из отмеченных точек попадает в какую-либо отмеченную дугу. Отмеченные положения запол-

няют несколько дуг, суммарная длина которых меньше 1982. Поместить A в неотмеченное положение.

4. Каждую из 650 точек окружить кольцом указанных размеров, а радиус круга увеличить до 19. Сравнивая суммарную площадь всех колец с площадью большого круга, показать, что есть точка, покрытая десятью кольцами. Взять её за центр искомого кольца.

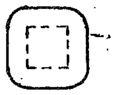
5. Каждую из точек окружить кругом радиуса 0,5, а радиус круга увеличить до 10. Сравнить площади.

6. К каждой стороне приклеить во внутрь многоугольника прямоугольную полоску шириной S/P. Сравнить площади многоугольника и оклеенной части.

7. Наложить произвольно клетчатую бумагу на фигуру и показать, что в каждом квадратике есть одинаково расположенная точка, не покрытая фигурой. Перенести параллельно клетчатую бумагу так, чтобы одна из вершин была бы в этой точке.

8.а) 50 косточек домино, покрывающие полностью квадрат без наложений, дают 50 ящиков и потому хотя бы один пуст.

б) Ответ: $4n^3$.

9. Каждый квадрат заменить фигурой , а размеры прямоугольника уменьшить до 19×24.

10. Каждое дерево заменить прямоугольником $10,5 \times 20,5$. Сравнить площади.

11. Разместить в указанном квадрате а) 9851, б) 9921 прямоугольников размером $100,5 \times 1$.

12. Ответ: из 18 нельзя, из 32 можно.

3. Задачи на упорядочение. Принцип крайнего элемента.

1. Рассмотреть треугольник наименьшей площади (или периметра).

2. Рассмотреть пару планет с наименьшим расстоянием между ними.

3. Если множество конечно, рассмотреть самую а) крайнюю точку на прямой, б) левую из всех самых нижних точек (если их несколько).

4. Рассмотреть наименьшее (или наибольшее) число.

5. Рассмотреть наименьшее число.

6. Рассмотреть наибольшую диагональ.

7. Рассмотреть самый правый из всех левых концов отрезков и самый левый из всех правых.

8. Пусть $x = max\{x, y, z\}$. Тогда $\frac{x^3}{xyz} \geq 1$.

9. Пусть $x_1 = max\{x_i\}$. Тогда из двух последних уравнений $0 \geq x_4 - x_1 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)x_3^2 \geq 0$. Ответ: (2;2;2;2;2) и (0;0;0;0;0).

10. Рассмотреть наименьшее решение; показать, что x, y, u, v

делятся на 3 и получить противоречие.

II. Рассмотреть треугольник наибольшей площади с вершинами в вершинах многоугольника. Через эти вершины провести прямые, параллельные сторонам треугольника.

I2. Рассмотреть наибольшую диагональ и через вершины, наиболее удаленные от неё, провести прямые, параллельные этой диагонали.

I3. Рассмотреть проекции на наибольшую сторону. Ответ: не существует.

I4, I5. Положить $x \leq y$.

I6. Пусть $X_I \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4 \leq X_5 \leq X_6 \leq X_7$. Если $X_4 \leq I4$, то $X_3 \leq I3$, $X_2 \leq I2$, $X_I \leq II$, т.е. $X_I+X_2+X_3+X_4 \leq 50$. Если $X_4 \geq I5$, то $X_5 \geq I6$, $X_6 \geq I7$, $X_7 \geq I8$, т.е. $X_5+X_6+X_7 \geq 5I$.

I7. Упорядочить эти девять чисел и, предположив противное, показать, что $X_{к+I} \geq X_к+X_{к-I}$. Поскольку $X_I \geq I$, $X_2 \geq 2$, то $X_9 \geq 55$.

I8. Предположить противное и упорядочить кошельки по числу монет, тогда в К-ом кошельке не менее К монет. Но $0+I+2+\ldots+9=$ $=45>44$.

I9. Упорядочить неизвестные и их попарные суммы.

20. Упорядочить отрезки диагоналей по величине. Рассмотреть два треугольника с вертикальными углами таких, чтобы две стороны одного были меньше двух сторон другого.

2I. Сначала разбить квадрат на 44 прямоугольника размером $I/2 \times I/22$. По принципу Дирихле хотя бы в одном есть I2 точек. Занумеровать эти точки в порядке следования их проекций на сторону прямоугольника I/2.

4. Задачи на поиск инварианта.

I. Инвариант – делимость на 3.

2. Инвариант – нечетность числа бананов. Ответ: банан.

3. Инвариант – нечетность числа оставшихся камней после хода Вити. Ответ: Коля.

4. А. Инвариант – нечетность суммы чисел во всех вершинах куба. Ответ: нельзя. Б. Ответ: можно. В. Ответ: нельзя.

5. Инвариант – нечетность суммы всех чисел на доске после каждого преобразования.

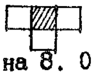
6. Инвариант – а) сумма чисел, б) сумма квадратов чисел.

7. Ответ: нельзя.

8. Ответ: не могут.

9. Каждая косточка покрывает ровно одну черную и одну белую клетку. Вырезаны две клетки одинакового цвета. Ответ: нельзя.

10. Каждый ход коня меняет цвет поля на противоположный. Ответ нельзя.

11. Раскрасить доску в шахматном порядке. Тогда число черных и белых клеток одинаково и потому должно быть одинаковым число фигурок  и . Тогда общее число клеток должно делиться на 8. Ответ: нельзя.

12. Раскрасить доску тремя красками:

1	2	3	1	2
2	3	1	2	3
3	1	2	3	1
1	2	3	1	2
2	3	1	2	

Логические задачи и методы их решения
Методическая разработка по спецкурсу
"Методы решения олимпиадных задач".
(для студентов IУ и У курсов
математико-механического факультета)
Технический редактор Э.А.Максимова

Подписано к печати 09.II.82. Формат 60x84 I/I6.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Уч.-изд.л. I,06. Усл.печ.л. I,05. Заказ 636
Тираж 700 экз. Бесплатно.
Уральский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им.А.М.Горького.
Свердловск, пр.Ленина, 5I.

Типолаборатория УрГУ, пр.Ленина, 5I.