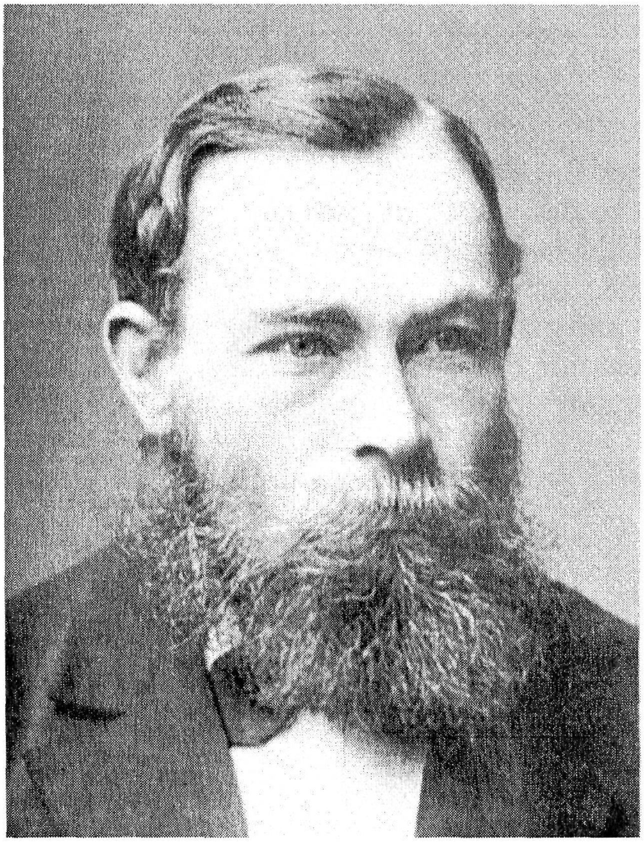
ГОТТЛОБ ФРЕГЕ

ЛОГИКА И ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА

Готтлоб ФРЕГЕ

ЛОГИКА И ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА



Готтлоб Фреге (1848–1925)

Dieses Buch ist eine Sammlung von Übersetzungen
der Werke des großen deutschen Logikers, Mathematikers
und Philosophen Gottlob Frege (1848–1925). Sie trägt den Titel
«Schriften zur Logik und logischen Semantik». Übersetzt,
eingeleitet und mit einem Nachwort versehen von B. V. Birjukov.
Redaktion der Übersetzung von Z. A. Kuzitscheva.
Anmerkungen von B. V. Birjukov und Z. A. Kuzitscheva.

Готтлоб Фреге

ЛОГИКА И ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА

Сборник трудов

Перевод с немецкого
доктора философских наук *Б. В. Бирюкова*
под редакцией
кандидата физико-математических наук *З. А. Кузичевой*
Введение и послесловие *Б. В. Бирюкова*
Комментарии *Б. В. Бирюкова* и *З. А. Кузичевой*

АСПЕНТ ПРЕСС
Москва
2000

УДК 16
ББК 87.4
Ф 86

Издание подготовлено при поддержке благотворительной организации
Институт «Открытое общество» (Фонд Сороса) — Россия

Федеральная программа книгоиздания России

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доктор философских наук
$\boxed{\text{Ю. А. Шрейдер}}$
доктор философских наук А. Л. Никифоров

Фреге Готтлоб

Ф 86 Логика и логическая семантика: Сборник трудов/Пер. с нем. Б. В. Бирюкова под ред. З. А. Кузичевой: Учебное пособие для студентов вузов. — М.: Аспект Пресс, 2000. — 512 с.

ISBN 5—7567—0128—1.

Готтлоб Фреге (1848–1925) — выдающийся немецкий ученый, основоположник современной математизированной логики и выдающийся представитель философско-математической мысли. Его труды по своему значению сопоставимы с логическим наследием Аристотеля и Лейбница. Настоящее издание включает знаменитый труд Фреге «Исчисление понятий» и его работы, положившие начало современной логической семантике.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 16
ББК 87.4

ISBN 5—7567—0128—1

Светлой памяти
Софьи Александровны Яновской
посвящается

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Настоящая книга представляет собой первый том задуманного автором этих строк издания на русском языке трудов выдающегося немецкого ученого Готтлоба Фреге в разрабатывавшихся им областях — логике, философии математики и логической семантике. В книге, предлагаемой вниманию читателя, содержатся переводы фрегевских *логических* и *логико-семантических* сочинений. Работы Фреге по основаниям и философии математики, в том числе и посмертно изданные манускрипты, не вошедшие в данную книгу, а также научная переписка должны составить последующие тома.

Эта книга имеет долгую предысторию. Как переводчик, так и редактор являются учениками замечательного отечественного мыслителя, доктора физико-математических наук, профессора механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова — Софьи Александровны Яновской. По ее инициативе пишущий эти строки, тогда аспирант кафедры логики философского факультете МГУ, занялся изучением научного творчества Фреге и опубликовал на эту тему две большие статьи, вскоре переведенные на английский язык и изданные в Голландии в виде отдельной книги. Яновская советовала мне подготовить на их основе монографию о Фреге, но я счел себя неподготовленным тогда к подобной работе, ограничившись тем, что в 1961 г. защитил кандидатскую диссертацию «Взгляды Г. Фреге на философские проблемы логики, математики и семантики». В ходе подготовки упомянутых статей и диссертации я перевел на русский язык почти весь цикл фрегевских логико-семантических работ, ныне вошедших во вторую часть настоящей книги. Однако опубликовать эти переводы — и тем более сколько-нибудь значительный сборник сочинений Фреге — в советское время было невозможно. Неоднократные предложения такого рода не имели последствий. Блюстители чистоты «марксистско-ленинской философии» считали фрегевское философско-логическое наследие ненужным для «советского человека».

Было, однако, и исключение, которым я не сумел воспользоваться. В конце 50-х гг. Физматгиз, где я тогда работал научным редактором, по инициативе той же Яновской заключил со мной договор на перевод фрегевских «Оснований арифметики». Но обязанность ежедневного пребывания на работе оставляла мало времени, к переводу я так и не приступил, и договор был расторгнут издательством. Это событие возложило на меня как бы моральный долг — выполнить завет своего учителя и, когда станет возможным, представить отечественному читателю научное творчество Фреге.

Соответствующие перспективы открылись в постсоветское время. Институт «Открытое общество» (фонд Сороса) поддержал проект издания фрегевских трудов, а частное издательство «Аспект Пресс» приняло его к осуществлению.

Основу книги составляют прижизненно опубликованные работы Фреге, но в нее включены также и некоторые материалы из его рукописного архива, который ныне опубликован в Германии.

Книга состоит из трех частей. В первую вошло знаменитое «Исчисление понятий», а также примыкающие к этому труду статьи, в которых Фреге разъяснял свою логическую систему и сопоставлял ее с исчислениями Дж. Буля, Э. Шрёдера и Дж. Пеано. Вторая часть — это работы логико-семантического характера, и в их числе замечательная статья «О смысле и значении». В центре третьей части — цикл из трех статей, относящихся к последнему периоду творчества Фреге и объединенных им под названием «Логические исследования». Этому циклу предпосланы материалы из архивного наследия, характеризующие фрегевское понимание логики. Сам же цикл «Логических исследований» дополнен работой из архива Фреге, которая должна была, по всем данным, составить четвертую часть упомянутого цикла, но так и не была завершена автором.

Все работы Фреге подробно прокомментированы. Комментарии служат цели облегчить читателю усвоение философско-логических и логико-математических понятий, введенных Фреге, и особенно его выкладок, связанных со спецификой созданного им логического аппарата. В Комментариях большое внимание уделено вопросам истории логики: это позволяет полнее вписать логико-математические воззрения Фреге в контекст соответствующих учений его эпохи. Переводчик и редактор сочли также необходимым охарактеризовать в Комментариях ряд персоналий, а также пояснить некоторые культуроведческие моменты. Мы стремились к тому, чтобы перед читателем во всем многообразии предстал духовный мир великого логика. Было решено, далее, не вводить в текст перевода фигурирующие у Фреге иноязычные цитаты и изречения — их перевод помещен в Комментариях.

Чтобы сделать для читателя понятной всю совокупность взглядов Фреге на рассматривавшиеся им проблемы, корпусу переводов фрегевских логических работ предпослана статья, в которой описан жизненный и творческий путь Фреге, а его логические и логико-семантические достижения введены в контекст общефилософских и философско-математических концепций той эпохи. Более подробное рассмотрение результатов Фреге читатель найдет в Послесловии, помещенном в конце данной книги. В нем более детально освещено логическое и философско-математическое учение Фреге; усвоение Послесловия требует подчас более основательного владения предметом (чего, впрочем, можно достичь, проработав текст самой книги).

Следует подчеркнуть, что, создавая этот том, переводчик и редактор преследовали не только научные, но и педагогические цели. Мы стремились к тому, чтобы привлечь внимание к наследию Фреге как можно более широкого круга тех, кто интересуется историей логики, философией математики и ее основаниями.

Переводчик и редактор бережно относились к фрегевским текстам, сохраняя их структуру; имеющиеся отклонения объясняются чисто типографскими соображениями. По этой же причине мы заменили используемую Фреге разрядку курсивом, а фрегевские одинарные кавычки — различные в разных его работах (и их переизданиях) — унифицировали.

Что касается литературных ссылок во Введении, Комментариях и Послесловии, то мы пошли по следующему пути. Если какой-либо источник появляется в первый раз и в дальнейшем на него встречаются ссылки, то для него вводится сокращение, выделяемое (при его появлении) полужирным курсивным либо прямым кеглем. Подобные сокращения начинаются с Введения, и в дальнейшем развернутое библиографическое описание соответствующей работы дается лишь в особых случаях.

* * *

Создание этой книги было бы невозможно, если бы не многообразное содействие, которое нам оказали отечественные и зарубежные коллеги. Прежде всего надо отметить большую помощь немецких ученых — это профессора К. Тиль из Эрлангена и В. Штельцнер из Иены. Кристиану Тилю я обязан не только замечательными фрегеведческими исследованиями, которые были использованы при составлении научного аппарата данной книги, но и самими фрегевскими текстами: большая часть изданий Фреге и значительная часть книг «фрегеаны», которой пользовался переводчик, была ему презентована эрлангенским ученым. Вернеру Штельцнеру я обязан его книгой — биографией Фреге, которой широко пользовался. И обоим ученым — оперативными ответами на вопросы, возникавшие у переводчика и редактора в ходе работы над данным изданием. Весьма важными для нас были также исследования Лотара Крайзера (Лейпциг).

Личные контакты во фрегеведении очень важны. Переводчик принимал участие в Иенской конференции 1979 г., посвященной «Исчислению понятий», и живо вспоминает о дискуссиях, которые велись К. Тилем, Л. Крайзером, Н. Метцлером и другими немецкими специалистами. Вопросы, связанные с фрегевской проблематикой, возникали также во время моего и Л. Г. Бирюковой участия в научно-исследовательском семинаре по истории логики, организованном К. Тилем в Эрлангене (1995). Наконец, в 1999 г.

благодаря инициативе В. Штельцнера и поддержке немецкой стороны я участвовал в Научном семинаре в Бремене, посвященном истории неклассических логик; на семинаре, разумеется, присутствовала и фрегевская тема; высказывания о Фреге, на нем звучавшие, были полезны с точки зрения оценки того места, которое творчество иенского ученого занимает в истории современной логики.

К сожалению, ни редактор, ни переводчик не имели доступа к относящимся к Фреге архивным материалам, которые хранятся в Мюнстере и Иене. Переводчику, правда, удалось в 1979 г. бегло просмотреть некоторые связанные с Фреге иенские документы, но для подготовки настоящей книги это дало мало. Пришлось пользоваться данными, содержащимися в работах немецких ученых, которые имели непосредственный доступ к фрегевским архивам. Ссылки на соответствующих авторов читатель найдет в подстрочных примечаниях, помещенных во Введении и Послесловии.

Известный вклад в замысел этой книги внес первый отечественный фрегевед — Александр Александрович Ерофеев, с которым мне пришлось обсуждать вопросы, связанные с периодизацией творчества Фреге. Свою роль сыграло и научное руководство аспирантом кафедры логики философского факультета МГУ С. Б. Макаркиной, побудившее меня более детально ознакомиться с теорией определений Фреге.

Из отечественных логиков я должен отметить прежде всего П. Н. Мирошниченко, подготовившего монографию о Фреге и любезно предоставившего ее текст в мое распоряжение. Некоторые материалы этой монографии были учтены при создании научного аппарата данной книги. Я обязан Петру Николаевичу также рядом немецкоязычных фрегевских материалов (в их числе «Дневник» Фреге и записи его лекций, выполненные Карнапом).

Следует сказать и об обсуждениях фрегевской тематики на кафедре логики философского факультета МГУ (заведующий кафедрой профессор Ю. В. Ивлев), а также на защитах диссертаций по логике, проходивших на соответствующем спецсовете. В этих обсуждениях особенно значимы были высказывания профессора Елены Дмитриевны Смирновой. Благодаря усилиям ее аспирантки О. А. Борисовой я смог ознакомиться с некоторыми ранее недоступными фрегеведческими источниками. Надо отметить и благожелательный прием докладов о Фреге, которые были сделаны редактором и переводчиком на Научно-исследовательском семинаре по истории математики (механико-математический факультет МГУ), руководимом И. Г. Башмаковой, С. С. Демидовым, К. А. Рыбниковым и И. А. Тюлиной.

Как переводчик текстов Фреге, я должен подчеркнуть большую редакционную работу, которую провела Зинаида Андреевна Кузичева: ее правка и критические замечания, по моему убеждению, много способствовали улучшению русского текста, уточнению русскоязычных эквивалентов фрегевских терминов.

Должен также отметить благожелательные отзывы о моем переводе рецензентов: кандидата физико-математических наук Ю. А. Шрейдера, ныне покойного, и доктора философских наук А. Л. Никифорова.

Наконец о тех, кто непосредственно стимулировал издание данной книги. Это, во-первых, сотрудники Института «Открытое общество», прежде всего Яков Михайлович Бергер. Во-вторых, это руководство и сотрудники издательства «Аспект Пресс» — Леонид Викторович и Людмила Николаевна Шиповы: они добились включения книги в Федеральную программу книгоиздания России и терпеливо сносили ту правку, которую до последнего момента производил переводчик; я должен также отметить тех работников издательства, которые справлялись с печатанием и считкой трудного текста, особенно же Ольгу Сергеевну Короткову, виртуозно набиравшую на компьютере фрегевскую «иероглифику».

И последнее. Эта книга вряд ли могла возникнуть, если бы не повседневная помощь Любови Гавриловны Бирюковой, выступавшей и в качестве компьютерной машинистки, и в качестве считчика, скрупулезно проверяющего формулы, и в качестве консультанта, и в качестве придирчивого критика... Всем названным мною лицам я выражаю *глубокую благодарность.*

Б. В. Бирюков

Москва, 24 июня 2000 г.

ВВЕДЕНИЕ

ГОТТЛОБ ФРЕГЕ: СОВРЕМЕННЫЙ ВЗГЛЯД

Если Вам, читатель, доведется побывать на старинной земле Мекленбурга, в небольшом балтийском портовом городе Висмаре, то, посетив городское кладбище, Вы сможете отыскать на нем скромную могилу и на ней железный крест с надписью: «Надворный советник доктор Готтлоб Фреге, профессор Университета Иена. Род. 8 ноября 1848, ум. 26 июня 1925»[1]. Обнажите главу: Вы стоите у могилы человека, который в «табели о рангах» мировой логической мысли считается «лицом № 2» — вторым после Аристотеля; находитесь у могилы человека, судьба и наследие которого окрашены трагическим колоритом. И если Вы возложите цветы на эту могилу, — пусть они будут и от автора этих строк. Побывать ему там заведомо не придется.

Фреге явился одним из создателей современной логики, первопроходцем в области оснований математики. Ему принадлежит первая в истории науки формальная логическая система, включавшая значительную часть математики. Фреге был горячим противником психологизма в логике и субъективизма в философском осмыслении математического знания, и его яркая аргументация против этих направлений звучит актуально и в наши дни. Вместе с тем известно, что фрегевская система обоснования арифметики оказалась противоречивой. Выдающийся представитель так называемого логицизма — Бертран Рассел устранил из его системы обнаруженное в ней противоречие. И хотя расселовское решение оказалось отнюдь не бесспорным, созданный им совместно с его учителем А. Н. Уайтхедом труд «Principia mathematica» (PM) — во многом исходный пункт последующего развития логики — вряд ли стал бы возможен, если бы не труды Фреге.

ТЕРНИСТЫЙ ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ

Годы учения: Иена — Гёттинген — Иена

Основоположник современной логики и исследований логических оснований математики — Фридрих Людвиг Готтлоб Фреге родился в достопамятный год европейской революции, которая вряд ли заметно затронула маленький Висмар. Происходил он из глубоко верующей протестантской семьи. Отец Готтлоба был основателем и директором частной женской школы (höhere Töchterschule) в родном городе, а мать была в ней преподавателем; после смерти отца школой руководила его жена — мать Готтлоба — Августа Вильгельмина София Бялоблоцкая (Bialloblotzky). Фамилия матери будущего ученого говорит в пользу того, что у Г. Фреге были и славянские этнические корни: первоначальными насельниками Мекленбурга были славяне. Как отмечает один из биографов Г. Фреге –

---

[1] См.: *Kreiser L.* Zur Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges//Ruch Filosoficzny, v. 33, 1974, S. 42–47.

В. Штельцнер[2], отец будущего ученого был автором учебника немецкого языка для детей, и первую часть этой книги занимали вопросы логической структуры языка, чем впоследствии пришлось заниматься и его сыну. Но, пожалуй, более существенно то, что ему принадлежал труд «Очерк развития Божественного сознания человечества» (Висмар, 1866). По-видимому, этим во многом объясняется то, что Г. Фреге на всю жизнь сохранил лютеранские теологические интересы — свидетельством этого является его «Дневник», о котором речь впереди; как вспоминал Р. Карнап, Фреге в своих лекциях по созданному им логическому исчислению обсуждал вопрос, касающийся логической стороны онтологического доказательства бытия Бога.

После 15 лет обучения в гимназии родного города и сдачи на Пасху 1869 г. экзамена на аттестат зрелости Г. Фреге в том же году, в возрасте 20 лет, поступил в Иенский университет. На это решение, считает его биограф[3], повлияло то, что учитель математики в гимназии, где он учился, был в свое время студентом Иены и, вероятно, рассказывал о благоприятных условиях, которые имеются там для начала карьеры в математике — науке, которая интересовала его ученика. Как бы то ни было, 20 апреля 1869 г. имя Готтлоба Фреге впервые появляется в списке студентов этого университета, зачисленных для изучения математики[4]. Университет Иена — о нем мы еще будем говорить — не был крупным центром математической мысли Германии, но его руководство всячески старалось поддерживать преподавание физико-математических наук на достаточном уровне. В течение 1869—1871 гг. Фреге прослушал в нем[5] 20 учебных курсов (четыре семестра), прежде всего по математике и физике. Университетским преподавателем, оказавшим на него наибольшее влияние, был приват-доцент Эрнст Аббе (Ernst Abbe); он читал лекции по теории функций, электродинамике, гравитации, физике твердого тела, избранным главам механики, вел физический практикум; ординарный профессор Карл Снелл (Karl Snell; 1806—1886) преподавал приложения математического анализа к геометрии, аналитическую геометрию пространства, аналитическую механику, оптику и др.; экстраординарный профессор Герман Шеффер (H. Schäffer; 1824—1900), прекрасный педагог, помимо математических дисциплин (той же аналитической геометрии), читал лекции по физике и химии.

Проучившись два года, Фреге сменил университет: в Иене не было экзаменационной комиссии, и поэтому он не мог подготовить и защитить диссертационную работу. По примеру многих иенских студентов, стремившихся овладеть математикой, в том числе Э. Аббе, Фреге в 1871 г. перешел в Гёттинген, где была нужная ему

---

[2] *Stelzner W.* Gottlob Frege. Jena und die Geburt der modernen Logik. Emil und Dr. E. Richter, Stadtrode, 1996, S. 6. В жизнеописании Фреге мы в значительной степени опираемся на этот источник (в дальнейшем при ссылках: ***Stelzner***), а также на статьи Л. Крайзера (*L. Kreiser*): Geschichte und logisch-semantische Probleme des wissenschaftlichen Werkes Freges//G. Frege. Schriften zur Logik. Aus dem Nachlaß. Mit einer Einleitung von L. Kreiser. Akademie-Verlag. Berlin, 1973 (в дальнейшем при ссылках на эту статью: ***Kreiser, 1973***, а на книгу, где она помещена, — **Aus dem Nachlaß**); Einleitung. I. Gottlob Freges Lehre und Forschung im Urteil der Jenaer Mathematiker und Universitätsbehörden seiner Zeit// Frege G. Nachgelassene Schriften. Hamburg, 1983, Anhang. S. 325—345 (в дальнейшем при ссылках: ***Kreiser, 1983***): Gottlob Frege: Ein Leben in Jena//Gabriel G. Dathe U. (Hrsg.). Gottlob Frege. Werk und Wirkung. Paderborn, 2000. S. 9—24 (в дальнейшем при ссылках на эту статью: ***Kreiser***, 2000. а на книгу, где она помещена, — ***Gabriel, Dathe***). Мы также воспользовались любезно предоставленным нам текстом книги Н. Н. Мирошниченко «Готлоб Фреге и логико-философская мысль XIX — начала XX века», в настоящее время подготавливаемой к печати (в дальнейшем при ссылках: ***Мирошниченко***).

[3] *Stelzner*, S. 6.

[4] *Wegner M.* Eröffnung der Konferenz durch den Prorektor für Gesellschaftswissenschaften der Friedrich-Schiller-Universität Jena//«Begriffsschrift». Jenaer Frege-Konferenz. Jena, 1979. S. 1. При дальнейших ссылках — ***Wegner***.

[5] *Stelzner*, S. 6.

комиссия. Надо сказать, что Гёттинген был одним из ведущих в Германии центров математической мысли: в свое время здесь преподавал знаменитый Гаусс, а потом Дирихле и Риман; в этом университете сложились прочные математические традиции. В Гёттингене Фреге проучился пять семестров; он слушал таких математиков, как Альфред Клебш (Clebsch) и Эрнст Шеринг (Schering), под руководством которого подготовил и защитил (в 1873 г.) диссертацию на ученую степень «доктора философии»[6]. Тема его диссертации (Promotion) была чисто математической — «О геометрическом представлении мнимых многообразий на плоскости»[7]. Вернувшись в Иену, Фреге в 1874 г. защитил вторую диссертацию — на право преподавания в университете (Habilitation). Работа была выполнена на философском факультете, на котором — по освященной веками традиции — велось преподавание математики и физики; деканом факультета был знаменитый биолог-дарвинист Эрнст Геккель. Новая диссертация тоже была математической: «Вычислительные методы, основанные на понятии величины»[8], но в ней уже звучали мотивы «будущего Фреге»: одной из ее целей было расширение понятия функции[9]. Защита второй диссертации давала право преподавания в любом германском (шире — любом немецкоязычном) университете — право на доцентуру (venia docendi) и последующую академическую карьеру[10]. В том же году Фреге был назначен приват-доцентом математики Иенского университета — должность, в которой он пробыл до 1879 г., когда поднялся на более высокую ступень экстраординарного профессора — тоже по математике. В 1880 г. по ходатайству веймарских властей Королевское главное командование освободило его от военной службы, которую он должен был проходить как унтер-офицер Ландвера[11].

Но что же собой представлял Иенский университет, с которым были связаны полвека жизни Фреге?

«Шиллер был наш коллега и Гёте был наш министр»

Эти слова[12] с гордостью произнес на торжественном заседании 31 июня 1908 г., посвященном 350-летию Университета Иена, тогдашний его проректор профессор Дельбрюк.

Можно считать, что выбор Иенского университета явился одной из немногих жизненных удач Фреге. Во-первых, это было высшее учебное заведение с большой общекультурной традицией. Во-вторых, в университете господствовала либераль-

---

[6] Как отмечает П.Н. Мирошниченко (см. наше примечание 2 на с. 6), Шеринг был в Гёттингене преемником Гаусса на должности директора университетской обсерватории, а также редактором первого собрания сочинений последнего. Клебш, математик, известный тем, что применил теорию инвариантов к проективной геометрии, был в годы учения Фреге в Гёттингене ректором тамошнего университета.

[7] «Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene». Ныне она опубликована в издании: *Frege G.* Kleine Schriften/Herausgegeben von Ignacio Angelelli. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt, 1967 und G. Olms, Hildesheim, 1967 (второе изд. — G. Olms, 1990), S. 11—49. В дальнейшем при ссылках — **Kleine Schriften** или ***KS***.

[8] «Rechnungsmethoden, die auf einer Erweiterung des Grössenbegriffs gründen». Ныне также опубликована в Kleine Schriften, S. 50—84.

[9] ***Kreiser***, 2000. S. 12. «Предлогистический» математический период творчества Фреге подробно рассмотрен в книге *Мирошниченко.*

[10] О системе германского высшего образования — одном из достижений немецкой нации в XIX в., выдвинувшем науку в Германии на одно из первых мест в мире, — см.: *Вейль Г.* Университеты и наука в Германии//Вейль Г. Математическое мышление/Пер. с англ. и нем. М.: Наука, 1989. С. 306—326; при дальнейших ссылках на эту статью — ***Вейль.***

[11] См. *Kreiser*, 1983. S. 335.

[12] См. *Wegner M.* Op. cit. S. 2.

ная атмосфера[13], не стеснявшая свободу мысли: в этом отношении Иена отличалась, скажем, от Берлина, где в иных областях установился своего рода духовный диктат (примером может служить учение Гегеля, в определенный период ставшее чуть ли не официальной прусской философией). В-третьих, в силу своей финансовой маломощности Университет Иена не имел возможности приглашать профессоров-знаменитостей из других земель и княжеств Германии, так что выпускники университета, достойно проявившие себя в годы учения и защитившие обе требуемые диссертации, могли рассчитывать на то, что университет доверит им преподавание сразу после получения venia dozendi; стоит заметить, что приглашение Фреге на должность приват-доцента было ускорено тем, что профессор К. Снелл из-за болезни сократил педагогическую деятельность и университет остро нуждался в новом преподавателе. В-четвертых, Фреге нашел в Иене влиятельного и настойчивого покровителя — в лице своего учителя Аббе; именно благодаря ему Фреге закрепился в Иене и в своей академической карьере дошел до должности ординарного гонорар-профессора, о чем речь впереди.

Основание Иенского университета восходит к решению курфюрста Фридриха I Благочестивого, создавшего в Иене (1548 г.) «высшую школу» (Höhe Schule) как академическую гимназию; спустя 9 лет эта школа — на основании Грамоты, выданной кайзером — императором «Священной Римской империи германской нации», была преобразована в университет. Учредителями университета выступили несколько небольших германских княжеств, из которых главным было княжество Саксония — Веймар (впоследствии: Веймар — Эйзенах). Успешно развиваясь как региональный университет Тюрингии, он во второй половине XVII в. приобрел общеевропейское значение; объяснялось это не только высоким уровнем, на котором в нем были представлены философия, математика, естествознание и медицина, но и — особенно — тем, что Иена стала центром раннего немецкого Просвещения и раннего кантианства. Студентом Иенского университета был Лейбниц. Славный период в истории университета падает на правление герцога Карла Августа, сподвижником которого и министром в его правительстве был великий Гёте. Примечательно, что на рубеже XVIII–XIX вв., когда большинство германских университетов закрылось вследствие финансовых трудностей, Иена держалась; правда, над университетом долго висел Дамоклов меч[14], ему было трудно соревноваться с новыми университетами в Берлине (основан в 1809 г.)[15] и Бонне (1818 г.).

С Иеной тесно связана история немецкого классического идеализма: здесь начинали свою деятельность Фихте, Шеллинг и Гегель; когда Фреге стал учиться в университете, еще были живы ученые, не только слушавшие, скажем, Гегеля, но в свое время лично знавшие Гёте[16]. Иена была родиной раннего немецкого романтизма, отмеченного такими именами, как Август Вильгельм и Фридрих Вильгельм Шлегели, Новалис, Клеменс Брентано и Людвиг Тик, а также Гёльдерлин; представлено в ней было и раннее кантианство (К. Рейнхольд). Финансовая слабость университета не позволяла ему, однако, удерживать надолго выдающихся мыслителей и литераторов[17]. Тем не менее материальная «непривлекательность» Иены в

---

[13] О духовной свободе, присущей Иене, говорит уже то, что университет пригласил в качестве профессора Э. Геккеля.

[14] *Stelzner*, S. 12.

[15] Устав Берлинского университета был разработан Вильгельмом фон Гумбольдтом и получил признание во всех немецкоязычных университетах — не только в Германии, но и, например, в Швейцарии. См. *Вейль*.

[16] См.: *Kreiser*, 2000. S. 10–11.

[17] Эта трудность была преодолена лишь к концу XIX в. благодаря развитию оптического производства Карла Цейса и созданного по инициативе Э. Аббе «Фонда Карла Цейса» (1889); но об этом позже.

известной мере компенсировалась той культурной политикой, которую в княжестве Саксония — Веймар проводил либеральный герцог Карл Август. Формальный глава университета (как Rector magnificientissimus), он требовал от представителя государства в университете — его куратора — создания благоприятных условий для развития научной мысли; к этим условиям относилась и интеллектуальная свобода. Неудивительно поэтому, что в Иене мог появиться и Эрнст Геккель, и Куно Фишер.

Таковы были история и традиции университета, в котором Фреге преподавал 44 года. Можно считать, что атмосфера независимости мысли, которую старались поддерживать власть предержащие, благоприятствовала раскрытию его таланта. Окажись Фреге в ином из тогдашних университетов Германии — да в том же Берлинском, и его академическая карьера могла сложиться куда горше, чем это произошло в маленькой Иене. Но и здесь все было не так просто.

Фреге — профессор Иенского университета

Жизненный путь Фреге предельно прост. В общих чертах он выглядит так (о значимых деталях этого пути мы еще расскажем). 1879 год — веха в научной биографии будущего великого логика: выходит из печати его труд «Begriffsschrift» — буквально «Понятийная запись», «Запись в понятиях»[18]; учитывая отечественную терминологическую традицию, мы в данной книге переводим название этого небольшого сочинения как «Исчисление понятий». Непосредственно после выхода в свет этой книги Фреге получает в Иене должность экстраординарного профессора математики. В 1884 г. он публикует следующий, более объемистый, труд: «Grundlagen der Arithmetik» — «Основания арифметики». В 1887 г. Фреге женится на Маргарите Лизберг (Margarete Liesberg), но его брак омрачен бездетностью. В 1893 г. Готтлоб Фреге выпускает первый том своего главного труда — «Основные законы арифметики» («Grundgesetze der Arithmetik»). Через три года (1896) он получает должность ординарного гонорар-профессора. В 1902 г. иенский математический логик передает в печать второй том этого труда и, когда книга была уже на выходе, получает от молодого английского философа Бертрана Рассела письмо, ныне знаменитое. В письме Рассел сообщает о формальном противоречии, обнаруженном им во фрегевском обосновании арифметики. Фреге воспринял этот факт как научную трагедию, о чем мы подробно будем говорить ниже. Более 20 лет последующей его жизни проходят под знаком этой неустранимой в его системе, как счел Фреге, логической антиномии. Правда, Фреге продолжает разрабатывать и вопросы логики, и проблемы оснований геометрии (вступив по этому поводу в эпистолярную полемику с Гильбертом), но его мысль омрачена нерешенностью главной проблемы — оправдания того подхода к формализации арифметики и математического анализа, который он изложил в «Grundgesetze». В 1918 г. Фреге по болезни выходит в отставку, но, как свидетельствуют сохранившиеся материалы фрегевского архива, мысль его продолжает безуспешно биться над нерешенной для него задачей.

Своему восхождению по ступеням академической карьеры — карьеры, в ходе которой публиковались не только названные нами фрегевские труды, но и его работы, относимые ныне к логической семантике и анализу языка и вошедшие в «золотой фонд» науки, — Фреге во многом обязан поддержке своего учителя и друга Э. Аббе. Поддержка эта была тем существенней, что влияние Аббе в университетских и правительственных кругах становилось все более значительным. Аббе явился

[18] *Frege G.* Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle a/S., 1879; при последующих ссылках: **Begriffsschrift** или ***BS***.

для Фреге поистине добрым гением, что сразу же и обнаружилось: когда Аббе не стало (1905 г.), отношение к Фреге резко изменилось.

Деятельность Аббе и та поддержка, которую он оказывал Фреге, подробно описаны в книге В. Штельцнера[19]. Здесь мы отметим лишь то, что вхождение Аббе в науку как бы указывало Фреге путь, по которому нужно было идти: Аббе начал с учения в Иене, продолжил его в Гёттингене, где получил фундаментальное физико-математическое образование. Немаловажно, что его докторская диссертация (она относилась к теоретической физике) свидетельствовала об интересе автора к проблемам обоснования научного знания, чем, по-видимому, и объясняется высокая оценка им исследовательской деятельности Фреге: Аббе вряд ли вполне понимал конкретные фрегевские достижения, но чувствовал значимость для науки их общей направленности.

Для упрочения положения Фреге успехи Аббе в Иене, куда он возвратился и защитил там диссертацию на venia docendi, стал доцентом и начал сотрудничать с иенским оптиком Карлом Цейсом, оказались очень важны. Когда Фреге защищал работу на право доцентуры, Аббе написал отзыв (Gutachten), проникнутый высочайшим уважением перед необычным математическим дарованием младшего коллеги. В отзыве отмечалась способность Фреге проникать в суть рассматриваемых им фундаментальных проблем. Конечно, не один Аббе поддержал молодого ученого: Штельцнер приводит оценку Фреге как члена университетской преподавательской корпорации, данную Геккелем в связи с защитой Фреге диссертации на vinia docendi: «Г-н доктор Фреге <...> еще со студенческих лет известен математикам нашего университета с самой лучшей стороны»[20]. В свете таких отзывов понятно назначение Фреге приват-доцентом (философского факультета).

Инициативу по приглашению Фреге на должность экстраординарного профессора (о подобном приглашении университет должен был ходатайствовать перед правительством княжества) проявил тот же Аббе. Условием приглашения была публикация научной монографии, и, как полагают, именно это обстоятельство побудило Фреге поспешить с изданием «Исчисления понятий». Биографы Фреге считают, что последний не подготовил Аббе к восприятию содержания, формы и цели своего сочинения, почему в Заключении, служившем приглашению Фреге на должность экстраординарного профессора, Аббе сделал упор не на вышедшем из печати фрегевском труде, а на научных способностях его автора: «Begriffsschrift» Аббе представил «побочным продуктом» математических исследований Фреге, подчеркнув, однако, что «на способе, каким в небольшом сочинении сформулированы и критически рассмотрены абстрактнейшие логические и математические проблемы, повсюду лежит печать оригинального исследования, свидетельствующего о необычайной силе ума»[21]. А в направленном в правительственные инстанции Заключении факультета, основанном на отзыве Аббе, говорилось: «Г-н доктор Фреге чрезвычайно полезен для факультета, его весьма ценят слушатели, а сам он является самостоятельным мыслителем»[22].

Надо сказать, что материальное положение Фреге вплоть до 1886 г. было далеко не блестящим. Когда он был приват-доцентом, его доход зависел от взносов студентов, записавшихся на его лекции[23]. Звание экстраординарного профессора по-

---

[19] *Stelzner*, S. 23 f.

[20] Ibidem, S. 54–55.

[21] Цит. по кн.: *Kreiser*, 1983. S. 333.

[22] Цит. по кн.: *Stelzner*, S. 60.

[23] О связанных с этим трудностях, стоявших на пути начинающих университетских преподавателей, см. *Вейль*.

вышало, конечно, социальный статус его носителя, но не давало материального благополучия — эта была должность, не предполагавшая устойчивого оклада, хотя университет и поддерживал Фреге материально. Поэтому его мать, чтобы помогать сыну, свернула свои дела в Висмаре и в 1879/80 г. перебралась в Иену[24]. Ситуация изменилась в упомянутом выше году, когда — опять-таки по инициативе Аббе — «Министерский фонд» повысил ежегодный оклад Фреге, так что этот оклад превысил 2000 марок[25]. В 1896 г., снова благодаря влиянию Аббе, Фреге был назначен на должность ординарного гонорар-профессора. К этому времени работы Фреге получают уже признание известных математиков и логиков, таких, как Р. Дедекинд и Дж. Пеано, и это стало известно в Иене[26]. В Представлении Фреге к этой должности, направленном в правительственные инстанции и составленном, по-видимому, коллегой Фреге профессором Иоганном Томэ (Johannes Thomae)[27], дана была высокая оценка Фреге как ученого и педагога — и оценка эта принадлежала человеку, «формалистическую» философско-математическую концепцию которого Фреге подвергал критике еще в труде 1884 г., а в ряде последующих работ ополчался против нее с еще большей горячностью.

* * *

В 1850 г. проф. Г. Шеффер создал в Иене «Математическое общество», в работе которого участвовали и молодые научные работники, и заинтересованные студенты. Фреге стал членом этого Общества (заседания которого поначалу происходили на дому у его основателя) уже в год своего поступления в университет, т.е. в 1869 г.; до своего временного перехода в Гёттинген он успел выступить на его заседаниях с тремя докладами; возвратившись же в Иену, он в 1874—1875 гг. докладывал там пять раз; история сохранила для нас только названия этих докладов. В 1879 г., с образованием в Иене «Математического семинара» (Mathematisches Seminar), «Математическое общество» прекратило свое существование; руководителем «Математического семинара» стал И. Томэ, приглашенный в 1879 г. на вновь созданную кафедру математики. Деятельность по руководству Семинаром Томэ разделил с Фреге: Томэ руководил Семинаром в зимнем семестре, тогда как Фреге (вплоть до 1899 г.) — в семестре летнем. От семи докладов Фреге, сделанных в Обществе и на Семинаре, сохранились их резюме, написанные самим Фреге. Хотя они чисто математического содержания, в них проступают идеи, которые Фреге вскоре развил в своих логических и философско-математических трудах[28].

Примечательно, что Фреге ни разу не воспользовался возможностью выступить в «Математическом обществе» (так же как и на «Математическом семинаре») с изложением своих логико-математических идей, хотя, как показывает труд Фреге 1879 г., идеи эти к тому времени были им уже достаточно разработаны. Фреге предпочитал докладывать о своих результатах в логике и основаниях математики на заседаниях «Иенского медицинского и естественно-научного общества» (Jenaische

---

[24] См.: *Kreiser*, 2000. S. 18.

[25] *Stelzner*, S. 62. Для сравнения: учитель гимназии получал тогда в Иене от 2200 до 5240 марок. Сведения о финансовой поддержке «Министерского фонда», а позже «Фонда Карла Цейса» не доводились до Фреге (что соответствовало уставу фонда).

[26] *Kreiser*, 1983. S. 336.

[27] См. *Stelzner*, S. 64—65.

[28] Они теперь опубликованы Лотаром Крайзером во втором издании тома I архивного «Наследия» Фреге: *Kreiser L.* Nachschrift einer Vorlesung und Protokolle mathematischer Vortrage Freges// Frege G. Nachgelassene Schriften. Hamburg. 2. Auflage, 1983. S. 327—388. Это последнее издание при дальнейших ссылках: **Nachgelassene Schriften** либо *NS*.

Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft), членом которого он был, — тем более что здесь открывалась непосредственная возможность публикации его научных сообщений[29].

Надо сказать, что Иена долго оставалась небольшим тихим городом: лишь в 1874 г. туда провели железную дорогу. Городская жизнь во многом была связана с университетом. Фреге был свидетелем того, как Иена постепенно менялась. Лично для него многое было связано с деятельностью «Фонда Карла Цейса», основанного в 1889 г. Инициатива создания фонда принадлежала тому же Аббе.

Дело в том, что толчок технологическому и экономическому развитию Иены дал Карл Цейс: он создал в городе мастерскую по изготовлению микроскопов, переросшую со временем в большое оптическое производство. Цейс привлек Аббе — как физика и математика — к сотрудничеству со своей фирмой. Работу у Цейса Аббе сочетал с деятельностью в университете, где прошел этапы экстраординарной и ординарной гонорар-профессуры, но от высшей ступени ординариуса, т.е. должности ординарного профессора, оплачиваемой университетом, отказался, дабы иметь время для участия в предприятии Цейса; в 1875—1876 гг. Цейс и Аббе заключили договор о деловом сотрудничестве, и Аббе полностью вошел в предприятие Цейса. По мере роста фирмы Аббе располагал все большими финансовыми и организационными возможностями, которые он использовал для поддержки университета и его ученых. Аббе добился учреждения в княжестве «Министерского фонда поддержки научных исследований» (и первое же решение фонда о распределении средств означало для Фреге увеличение его оклада), а затем и «Фонда Карла Цейса» (Karl-Zeis-Stiftung), акт о создании которого был подписан в 1889 г. (и приобрел общегерманский статус в 1900 г.). В результате организованных Аббе переговоров между «Фондом Карла Цейса» и Министерством культов (в числе прочего ведавшим наукой и образованием) Великого княжества Веймар—Эйзенах (и с согласия трех остальных княжеств — учредителей университета) в Иене была введена должность профессора, финансируемая фондом Цейса; предназначалась она для Фреге, с мая 1896 г. ставшего, как мы уже упоминали, ординарным гонорар-профессором[30]. В 1903 г., ему было присвоено звание надворного советника (Hofrat).

Фреге относился к Аббе с величайшим уважением. В дневниковой записи Фреге, сделанной незадолго до смерти, мы читаем: «Профессор Аббе в Иене был одним из самых благородных (edelsten) людей, с которыми я встречался на своем жизненном пути»[31].

Фреге-преподаватель

Документы, сохранившиеся в архиве Университета Иена, дают достаточно полную картину педагогической деятельности Фреге[32]. С 1874 г. и до своей отставки Фреге нес большую педагогическую нагрузку, включавшую лекции по самым разным разделам математики. Список лекций, объявлявшихся Фреге в 1874—1918 гг., включал: аналитическую геометрию, алгебраический анализ, высшую алгебру, те-

---

[29] См. *Stelzner*, S. 50—51.

[30] Это означало значительное повышение его оклада (до 5000 марок в год); см. *Stelzner*, S. 65.

[31] *Gottlob Freges* politisches Tagebuch/Mit Einleitung und Kommentar herausgegeben von Gottfried Gabriel und Wolfgang Kienzler//Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Bd. 42, № 6, Berlin, 1994, S. 1067 (при дальнейших сносках — **Tagebuch**). Это — *первая* дневниковая запись, помеченная определенным числом (а именно: 10. 3. 1924).

[32] *Kratzsch I.* Material zu Leben und Wirken Freges aus dem Besitz der Universitätsbibliothek Jena//Jenaer Frege-Konferenz 1979 (см. примеч. 4), Anhang 1, S. 537—543.

орию функций, аналитическую геометрию пространства, Абелевы интегралы, теорию определенных интегралов, аналитическую механику, синтетическую геометрию, решение алгебраических уравнений, дифференциальные уравнения, избранные главы аналитической геометрии, применение анализа к геометрии, теорию чисел, теорию римановых функций.Что касается логико-математической тематики, то документы фиксируют объявление Фреге лекций по «записи в понятиях» начиная с зимнего семестра 1883/84 учебного года, но Г. Ассер в докладе на фрегевской конференции 1979 г. утверждал[33], что автор «понятийной записи» впервые прочитал соответствующий лекционный курс в зимний семестр[34] 1879/80 учебного года. Во всяком случае, начав регулярно читать лекции под названием «Über Begriffsschrift» (или просто — «Begriffsschrift»), Фреге объявлял соответствующий курс почти каждый зимний семестр (занимали они один час в неделю); слушателей у него было немного, и тогда лекции могли не читаться вовсе. Только в 1912/13 учебном году Фреге заявил курс по своему исчислению на оба семестра. Начиная с 1889 г. Фреге стал объявлять курсы под названием «Рассмотрение основных понятий арифметики» (в этот год, впрочем, заголовок звучал более общо — он касался основных понятий математики). С 1892 по 1900 г. этот курс объявлялся почти ежегодно на летний семестр. В 1901 г. курс получил название «Основания арифметики», но чтение его в последующие годы не было продолжено. 1902 год был омрачен для Фреге получением упомянутого выше письма Бертрана Рассела, и в 1902/03 учебном году Фреге не читал никаких логико-математических лекций — ни по «записи в понятиях», ни по основаниям арифметики. Чтение лекций по своему логическому исчислению он возобновил начиная со следующего учебного года, по основаниям же арифметики — лишь в 1915—1917 гг. (в зимний семестр 1917/18 учебного года он находился в отпуске); последний раз лекции по своему логическому исчислению Фреге объявил на летний семестр 1918 г.[35].

Приведенный перечень объявлявшихся Фреге лекций математико-логической тематики позволяет сделать ряд выводов. Во-первых, Фреге никогда не отказывался от своей «понятийной записи», но, как говорит Г. Ассер, крушение его логицистской программы — программы сведения арифметики и математического анализа к «чистой» логике — «побудило его искать новые пути содержательного обоснования понятия числа»[36]. Во-вторых, обнаружение Расселом противоречивости созданной Фреге системы логического обоснования арифметики лишь на время заставило его повременить с чтением логико-математических лекций. Возобновив лекции по исчислению понятий, он пятнадцать лет (с 1901 по 1915 г.) не читал лекций по основаниям арифметики; «вместо этого он с новой силой обратился к вопросам геометрии <...> стало быть, Фреге примирился с крушением первоначальной программы, но не отказался от поисков нового пути в обосновании арифметики»[37].

Существует взгляд, что Фреге был неважным преподавателем. Этот взгляд во многом возник вследствие отрицательного отзыва о деятельности Фреге в Университете Иена, исходившего от университетского куратора — представителя прави-

---

[33] *Asser G., Alexander D., Metzler H.* Gottlob Frege — Persönlichkeit und Werk//Ibidem, S. 13—14. В дальнейшем при ссылках: ***Asser***.

[34] Зимний семестр в университетах того времени обычно начинался в октябре, а летний в апреле (после Пасхи) и продолжался до июля.

[35] Объявления о лекциях сопровождались пояснениями: pr. (privatim) — факультативно; gr. (gratis) — бесплатно; publ. (publice) — публично; в последнем случае, как свидетельствует Р. Карнап, на лекциях Фреге могли оказаться и случайные слушатели.

[36] *Asser*, S. 14.

[37] *Kreiser*, 1973, S.L.

тельства профессора Г. фон Эггелинга. Этот отзыв был дан, когда покровителя Фреге — Эрнста Аббе уже не было в живых. А как сам Аббе оценивал педагогические качества Фреге? Приведем аттестацию Фреге как преподавателя, которую Аббе дал в связи с предполагаемым предоставлением Фреге экстраординарной профессуры. Аббе писал в своем заключении: «Д-р Фреге в силу большой ясности и точности своего изложения и продуманности своих лекций прекрасно подходит для того, чтобы вводить заинтересованных слушателей в трудные вопросы математики; я сам неоднократно имел случай слушать [его лекции], и они представляются мне <...> совершенно образцовыми»[38]. Этот отзыв относится к периоду расцвета деятельности Фреге. И тем не менее в нем, наверное, присутствовало определенное преувеличение, вызываемое той целью, ради которой он был составлен.

Во всяком случае на лекциях Фреге по логике и основаниям арифметики — да и на обычных математических лекционных курсах — было немного слушателей, если они вообще бывали; воспоминания Р. Карнапа[39] свидетельствуют об этом с полной очевидностью. Карнап, будучи студентом Иены, прослушал лекции Фреге по «Begriffsschrift I» в зимнем семестре 1910/11 гг., а по «Begriffsschrift II» — в летнем семестре 1913 г.[40]. В следующем году он был слушателем фрегевского курса «Логика в математике». Вот впечатления Карнапа: «Он [Фреге] редко смотрел на аудиторию. Обычно мы видели только спину, так как он рисовал странные диаграммы своей символики на классной доске и объяснял их. Никто никогда не задавал вопросов и не делал замечаний, как во время лекции, так и после нее. О дискуссии не могло быть и речи»[41]. Отсюда и соответствующая аудитория: курс «Begriffsschrift II» слушали — Карнап, один друг Фреге и отставной майор, всего три человека. Впрочем, само содержание этих лекций, совершенно специально, да еще основанное на необычной символике, вряд ли могло привлечь сколько-нибудь значительную математическую или философскую аудиторию.

Карнап слушал Фреге в 1910—1914 гг., и лекции иенского реформатора логики в корне изменили его взгляд на эту науку: до этого он смотрел на логические сочинения как на нечто невразумительное и архаичное, но переменил свое отношение к этой области знания «после того, как познакомился с настоящей логикой благодаря лекциям Фреге»[42]. Из воспоминаний Карнапа явствует, что из сухих по форме фрегевских лекций всякий, кто пожелал бы вникнуть в суть дела, отлично усвоил бы преподносимый на лекциях материал. Но много ли в Иене тех лет было людей, желающих вникать в совершенно новые тогда вопросы?

«Нет пророка в своем отечестве»

Статус профессора немецкого университета в XIX столетии предполагал педагогическую деятельность и научные исследования, причем характер той и другой во многом определялся двумя принципами — Lehrfreiheit и Lernfreiheit[43]. Принципы эти утвердились во многом под влиянием устава Берлинского университета,

[38] *Stelzner*, S. 54.

[39] *Carnap R.* Intellectual Autobiography//The Philosophy of Rudolf Carnap, ed. bei P.A.Schilpp. La Salle, Ill./London, 1963, p. 4—6. При дальнейших ссылках: ***Carnap* — Autobiography**.

[40] Запись этих лекций, сделанная Карнапом, теперь опубликована: *Frege G.* Vorlesungen über Begriffsschrift. Nach der Mitschrift von Rudolf Carnap. Mit Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von G. Gabriel//History and Philosophy of Logic, v. 17, 1996, S. I—XVI, 1—48; при дальнейших ссылках: ***Carnap* — Mitschrift**.

[41] *Carnap* — Autobiography, p. 5.

[42] Ibidem.

[43] См. *Вейль*.

разработанного Вильгельмом фон Гумбольдтом. Первый из них означал свободу выбора профессором направления своих научных изысканий и предлагаемых студентам лекционных курсов, второй — свободу выбора студентами и преподавателей, и учебных предметов (в пределах, разумеется, определенных ограничений). Такой порядок — в соединении с существовавшей всегда университетской автономией — создавал благоприятные условия для развития знания и прогресса высшего образования. Но он имел и негативную сторону. Дело в том, что авторитет профессора в университете во многом зависел от его мастерства как лектора и от престижа той научной области, в которой он работал.

В германских университетах того времени исследования профессионального математика в сфере логики (считавшейся философской дисциплиной) и логических оснований его науки (что тоже не считалось делом математика-специалиста) не могли быть престижными. Философы тоже смотрели на подобные изыскания настороженно, не решаясь признать их вполне «своими». Все это обусловливало «периферийное» положение Фреге в научном сообществе как собственного университета, так и Германии в целом. Неудивительно, что прием, оказанный первому фрегевскому труду (1879 г.), оказался холодным: его идеи не воспринимались, новизна понятий и необычная символика вызывали раздражение. Аббе как в воду глядел, когда писал о «Begriffsschrift» в своем отзыве о Фреге в связи с приглашением последнего на доцентуру: «Его [труд Фреге], как можно предположить, по-настоящему прочитают только немногие и еще меньше поймут его и оценят»[44].

После выхода в свет сочинения «Begriffsschrift» на него в печати появилось четыре рецензии. Из них отзыв К. Лассвитца был наиболее благосклонным[45]. Но в другой рецензии выражалось сомнение в том, что математика «сможет извлечь большую пользу из исчисления понятий Фреге»[46]. Однако наиболее неприятной для Фреге была, наверное, реакция на его труд Эрнста Шрёдера, развивавшего в германской науке алгебрологическое направление; в шрёдеровском отзыве главный акцент делался на «многочисленных и подчас существенных недостатках», которые будто бы содержатся в книге; в покровительственном тоне Шрёдер выражал надежду, что его замечания «не обескуражат» автора, а побудят его «развить далее свои исследования»[47]. Подобный прием своей работы — работы, на которую Фреге, по-видимому, возлагал большие надежды, — вызвал у него чувство глубокой горечи.

Пытаясь разъяснить замысел своего исчисления понятий, Фреге печатает ряд статей (их можно найти в предлагаемом читателю издании), однако уже в 1882 г. в одном из писем жалуется на трудности с публикацией своих работ[48]. И в самом деле, обширная статья Фреге, разъясняющая его позицию в логике, — «Булева вычислительная логика и мое исчисление понятий» была отклонена тремя (!) журналами. Позже, в Предисловии к первому тому «Основных законов арифметики» (1893), Фреге говорит об унынии, которое «иногда охватывало его из-за холодного

---

[44] Цит. по статье: *Kreiser*, 1983. S. 333.

[45] *Lasswitz K.* Rezension von G. Freges «Begriffsschrift»//Jenaer Literaturzeitung, № 18, 1879, S. 248–249.

[46] *Michaelis C.Th.* Rezension von G. Freges «Begriffsschrift»//Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft, Bd. XII, 1880, S. 232–240.

[47] *Schröder E.* Rezension von Freges «Begriffsschrift»//Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXV. Jahrgang. Historisch-literarische Abteilung, 1881, S. 81–94; при дальнейших ссылках: ***Schröder* — Rezension**..

[48] См.: *Frege G.* Wissenschaftlicher Briefwechsel. Felix Meiner Verlag. Hamburg, 1976, S. 103, письмо от 29.8.1882 г., предположительно адресованное А. Марти. Данное издание в последующих сносках обозначается как **Briefwechsel** или ***BW***.

приема или, лучше сказать, неприятия» его «Исчисления понятий» и «Оснований арифметики»[49]. Несколько забегая вперед, приведем оценку судьбы второго из названных выше трудов Фреге, данную Бертраном Расселом: «Хотя эта книга очень невелика, не трудна и имеет величайшее значение, она осталась почти незамеченной, а данная в ней дефиниция числа — практически неизвестной»[50].

Неприятие радикально нового в науке — нередкое явление. Близкий к Фреге пример — судьба учения его великого современника Георга Кантора. Теория множеств последнего поначалу тоже встретила непонимание со стороны математиков, а некоторые ее решительно отвергали. Но к Кантору судьба была, пожалуй, более благосклонна...

Но вернемся к Фреге. В глазах университетского руководства и некоторых его коллег значение Фреге для Иены оценивалось все ниже. Это сразу же обнаружилось, когда умер Аббе (1905), и возможность получения должности ординарного профессора и собственной кафедры была для него окончательно закрыта. У Фреге не было даже ассистента, не говоря уже о сотрудниках и учениках, которые могли бы воспринять и развить его идеи. Иена не оценила Фреге даже тогда, когда его результаты нашли понимание, а затем и признание за границей. Впрочем, и это признание запоздало. Но подробнее обо всем этом мы скажем ниже.

НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО ВЕЛИКОГО ОДИНОЧКИ

Чтобы понять сделанный Фреге вклад в науку, необходимо очертить состояние современной ему логики и философии математики.

«Дофрегевская» логика

Путь Фреге в логике и философии математики — типичный пример деятельности исследователя, прокладывающего новый курс в науке, — курс, не соответствующий господствующим в ней установкам. Дабы наполнить сказанное конкретным содержанием, очертим состояние логической мысли и характер философско-математических воззрений того времени.

Что собой представляла логика как наука и предмет преподавания в те годы, когда Фреге приступил к ее радикальному преобразованию? Существовала логика, выступавшая как часть философии; такого рода логику часто называют традиционной, так как она следовала основоположениям, восходящим к Аристотелю, — принципам, которые не отменяли многочисленные новации эпохи Античности и Нового времени. В Германии И. Кант своим авторитетом освятил взгляд на подобную логику — формальную или, как он называл ее в «Критике чистого разума», общую (allgemeine) логику — как на завершенную науку, не способную к дальнейшему развитию[51]. Ядром этой логики была силлогистика, включая «подготовительные» разделы о понятиях, суждениях и дефинициях. Обсуждение вопросов логики велось

[49] *Frege G.* Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Bd. I. H. Pohle, Jena, 1893 (*репринтное переиздание*: *Wissenschaftliche Buchhandlung*. *Darmstadt*, 1962, *und* G. *Olms*, *Hildesheim*, 1962, 1966), S. XI. В последующих сносках обозначается: **Grundgesetze I** или ***GGI***.

[50] *Russell B.* Introduction to Mathematical Philosophy, London, 1919, p.11 (цитируется по изданию 1971 г.).

[51] См.: *Кант И.* Логика. Пособие к лекциям//Кант И. Трактаты и письма. М., 1980. С. 328. Эта «Логика» была подготовлена к печати на основе записей лекций Канта, сделанных его учеником Г. Б. Йеше; книга вышла впервые в 1800 г.

преимущественно вокруг тем, «вмещавшихся» в эти разделы[52], причем *логическое* здесь тесно переплеталось с *психологическим*.

Эта ситуация нуждается в пояснении. Середина XIX в. была временем возникновения психологии как самостоятельной науки. В Германии ее становление связано с именами Густава Теодора Фехнера и Вильгельма Вундта, который занимался также и логикой. Складывавшаяся психология являлась источником идей для ряда других областей знания, и логика здесь стояла на первом месте. Психологическая интерпретация задач и понятий логики, носящая название *логического психологизма*, в «философской» логике Германии времен Фреге преобладала, и типичными представителями данного направления, помимо Вундта, были Кристоф Зигварт, Бенно Эрдман, Теодор Липпс[53]. Логический психологизм был, как мы увидим ниже, для Фреге совершенно неприемлем.

«Традиционная» логика, по преимуществу описательная, тем не менее содержала в себе строгую часть — силлогистику и «обеспечивающие» ее разделы, касающиеся преобразований форм суждений. Эту теорию Фреге учитывал, и первый из трех разделов его труда 1879 г. завершается объяснением того, как на языке «понятийной записи» выражается известный «логический квадрат». В других своих работах Фреге показывает, как в его исчислении можно формализовать отдельные силлогистические модусы.

«Философская» логика — т.е. логика, излагавшаяся философами, — являлась именно той логикой, которую отверг Фреге из-за ее неспособности служить средством выражения математических понятий и представления математических определений и доказательств. Истоки логики, которая для этого нужна, он видел в логико-математическом наследии Лейбница, а именно в его идее, касающейся разработки искусственного языка науки (Caracteristica universalis) и основанного на нем исчисления умозаключений (Calculus raciocinator), в совокупности долженствующих составить «универсальную математику» — Mathesis universalis, или «универсальную науку» (Scientia universalis).

Надо сказать, что замыслы искусственного универсального совершенного языка и универсальной математики владели умами многих ученых XVIII в. «Идеальные языки» пытались разрабатывать и в Англии, например Вилкинс (J. Wilkins), и во Франции — в кругу так называемых «идеологов», представленном, в частности, А. Л. Дестютом де Траси (Destutt de Tracy), и конечно же в Германии, где крупнейшим деятелем данного направления явился Иоганн Генрих Ламберт, автор труда «Новый Органон», само название которого говорило о замысле автора[54]. Идея Mathesis universalis выдвигалась еще Декартом, но Фреге ссылается именно на Лейбница, что и неудивительно, так как соответствующий замысел был представлен после-

---

[52] В немецкой философской логике XIX в. эта структура была по-своему закреплена тем же Кантом в его «Логике».

[53] К. Зигварт (Chr. Sigwart, 1830—1904) был автором труда «Логика» (т. 1 и 2, 1873—1878), изданного в русском переводе в 1908—1909 гг.; «Логика» Б. Эрдмана (B. Erdmann, 1851—1921) вышла в 1892 г.; книга «Основы логики» («Grundzüge der Logik») Т. Липпса (Th. Lipps, 1851—1914) увидела свет в 1893 г.

[54] См., например: *Кузичева З. А.* Из истории языков представления знаний//Вопросы кибернетики. Кибернетика и математическая логика в историко-методологическом аспекте. М., 1984 (при дальнейших ссылках на эту книгу: **Вопросы кибернетики II**); *Кузичева З. А.* Становление и развитие математической логики//Очерки по истории математики/Под ред. Б.В. Гнеденко. [М.]: Изд-во МГУ, 1997 (в дальнейшем при ссылках: ***Кузичева*, 1997**); *Бирюкова Н.Б.* «Основы идеологии» Антуана Луи Дестюта де Траси как явление в истории логики//Международная конференция «Развитие логики в России: итоги и перспективы». М., 1997. Дань увлечению «универсальными языками» отдал и А. Кондорсе. Впрочем, одно лишь упоминание мыслителей, в XVIII в. ломавших голову над подобными проектами, завело бы нас слишком далеко.

дним как некая развернутая программа[55], которой у Декарта, пренебрегавшего логикой, быть не могло. Примечательно, что Лейбниц не ограничился «общепрограммными» положениями, а предпринял ряд попыток формализации — арифметизации и алгебраизации — логических процедур[56]. Правда, когда Фреге разрабатывал свое исчисление, лейбницевские логико-математические опыты были в значительной части не известны; публикация Лейбницевых манускриптов на данную тему была осуществлена лишь в конце XIX в. Луи Кутюра. Отсюда весьма общее, малоконкретное обращение Фреге к авторитету Лейбница.

Импульс «математизации» логики, данный Лейбницем, не остался, однако, втуне. Так, уже упоминавшийся нами И. Г. Ламберт в «Новом Органоне» ~~(1764) и других~~ работах предвосхитил многое в последующей алгебре логики. Но труды большинства мыслителей, которые после Лейбница пытались математизировать логику (или логизировать математику), остались Фреге не известными, во всяком случае это относится к периоду формирования им основных положений своего логического исчисления. В числе «пропущенных» Фреге фигур — это примечательное обстоятельство — был Бернард Больцано, автор четырехтомного труда «Учение о науке»[57], в котором Фреге мог бы найти идеи, в каком-то смысле опережавшие его собственные. К этим идеям относятся: убеждение в объективном характере логики и ее законов, четко выраженный антипсихологизм (обо всем этом применительно к Фреге мы еще будем говорить) и введение понятий о «представлениях самих по себе» (an sich), «суждениях самих по себе», т.е. безотносительно к их носителям; у Больцано иенский новатор обнаружил бы понимание сути логического следования, а также предвосхищение понятия переменной в логике и категории логической общезначимости[58].

Было, однако, одно направление в логике (и отчасти в философии математики), которое Фреге имел перед глазами и от которого — негативным образом — отталкивался. Это была *алгебра логики*. Созданная Дж. Булем и другими представителями данного направления[59] — Ст. Джевонсом, Хью Макколом, Дж. Венном, Германом и Робертом Грассманами, с одной стороны, и Августом Де Морганом, заложившим основы формализованной силлогистики и логической теории отношений, впоследствии получившей продолжение в труда Чарльза Пирса, — с другой, она, алгебра логики, кульминировала в трудах Эрнста Шрёдера (и П. С. Порецкого); к моменту создания «Исчисления понятий» из работ Шрёдера свет увидели только «Учебник арифметики и алгебры» (1873) и вышедший через четыре года небольшой труд — «Сфера операций логического исчисления»[60].

---

[55] См.: *Кузичева З. А.* Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и кибернетики//Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты истории и методологии. М., 1982 (при дальнейших ссылках на эту книгу: **Вопросы кибернетики I**).

[56] Отечественный читатель может в этом убедиться, раскрыв том 3 издания: *Лейбниц Г. В.* Соч.: В 4 т. М., 1984; логические результаты великого мыслителя в этом томе проанализированы А. Л. Субботиным во вступительной статье «Логические труды Лейбница»; см. также его примечания к части VI данного тома. Отметим также работы: *Гетманова А. Д.* О взглядах Лейбница на соотношение математики и логики//Философские вопросы естествознания. II. Некоторые философско-теоретические вопросы физики, математики и химии. [М.]: Изд-во МГУ, 1959.

[57] *Bolzano B.* Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstenteils neuen Darstellung der Logik mit Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Bd. I—IV, Sulzbach, 1837; 2. Neudruck der 2. Auflage, Leipzig, 1926 (репринтное издание: Scientia Verlag Aalen, Darmstadt, 1961); в дальнейшем при ссылках: ***Bolzano***. В отечественной философской литературе — после появления перевода труда И. Г. Фихте, имеющего то же название, — утвердилась не очень осмысленная передача по-русски названия «Wissenschaftslehre» как «Наукоучение». Мы решительно отходим здесь от этой традиции.

[58] См.: *Федоров Б. М.* Логика Бернарда Больцано. Л., 1980. В дальнейшем при ссылках: ***Федоров***.

[59] Заметим, что не все из них были известны Фреге.

[60] *Schröder E.* Der Operationskreis des Logikkalkuls. Leipzig, 1877. В дальнейшем при ссылках: ***Schröder*, 1877**.

Истолкование суждений как равенств наподобие арифметических восходит по крайней мере к Лейбницу и в дальнейшем присутствует (неоднократно переоткрываясь) в трудах многих ученых, даже весьма далеких от математики. Но только Булю удалось создать стройную теорию алгебраизированной логики — применить к логическим процедурам некоторые важные математические идеи. В трудах Буля, при всем их многообразии и богатстве содержания (Буль, например, занимался вопросами логики, связанными с теорией вероятностей), имелись неясности (их Фреге впоследствии и отметил), устраненные лишь Ст. Джевонсом и Дж. Венном, который раскрыл «тайну» булевского логического «деления на нуль» — понятия, доставлявшего столько хлопот интерпретаторам системы Буля[61].

Во фрегевском труде 1879 г. Буль не упоминается (что потом многие оппоненты Фреге ставили ему в вину). Чем это объясняется? По-видимому, следующим. Если исходить из соотношения «математика — логика», то подход Фреге был прямой противоположностью Булевому. Фреге был озабочен построением математики (точнее, арифметики и математического анализа) на базе логики, — в отличие от Буля и Де Моргана, а также ученых, работавших в «булевском» и «деморгановском» стиле: все они старались применить к логике методы математики. Для уяснения природы математического знания, т.е. того, чем были поглощены все помыслы Фреге, подобный подход был мало плодотворен, — тем более что логическая теория Буля была недостаточно сильна для формализации мало-мальски сложных математических понятий.

Впоследствии, когда рецензенты фрегевского труда 1879 г. упрекнули автора в том, что он игнорирует алгебрологическое направление, Фреге написал ряд статей, в которых исчерпывающим образом разъяснил свою позицию[62].

О «дофрегевской» философии математики

Замысел Фреге — подвести под математику (исключая геометрию, о чем речь ниже) строгий *логический* базис — опережал современные ему философско-математические представления. Развивая идеи обоснования математического знания, Фреге, по его собственным словам, следовал Лейбницевой установке на логизацию науки; вместе с тем он отталкивался от широко известного учения Иммануила Канта о природе математики и ее суждений как синтетических суждений *a priori*[63]. Из упоминавшегося выше письма Фреге, датированного 29 августа 1882 г. и предположительно адресованного А. Марти (A. Marty), письма, написанного еще *до* публикации «Оснований арифметики», следует, что Фреге частично принимал кантовское учение о математике, противопоставляя при этом арифметике геометрию. «Я вижу великую заслугу Канта, — говорится в этом письме, — в том, что он понял: предложения геометрии являются синтетическими суждениями; но я не могу

---

[61] Литература, посвященная алгебре логики XIX в., огромна. Из работ на русском языке укажем фундаментальный труд: *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М., 1967, а также книгу: *Кузичев А. С.* Диаграммы Венна. История и применения. М., 1968 (в дальнейшем при ссылках: ***Кузичев***), и статью: *Кузичева*, 1997. См. также рассчитанную на широкого читателя книгу автора этих строк — «Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времен до эпохи кибернетики» (М., 1985), написанную совместно с В. Н. Тростниковым.

[62] Перевод этих статей помещен в первой части настоящей книги.

[63] Синтетичность, грубо говоря, означала внелогический характер этих суждений, а априорность — их независимость от опыта.

вместе с ним признать того же для арифметики. <...> Область геометрии есть область пространственно наглядного, арифметика же не знает подобного ограничения. Подсчитывать можно все — не только то, что в пространстве расположено одно за другим, не только то, что следует одно за другим во времени, не только то, что находится вне нас, но и то, что в нас: психические процессы и явления, понятия, которые не соотносятся друг с другом во времени и пространстве, а лишь логически связаны между собою. <...> Таким образом, область того, что поддается счету, — такова же, что и область понятийного мышления, и познавательный источник, ограниченный, например, пространственно-наглядными представлениями, чувственным восприятием, недостаточен для того, чтобы обеспечить общезначимость арифметических предложений»[64].

Во фрегевских «Основаниях арифметики» (1884) Лейбниц и Кант упоминаются на десятках страниц[65]. Здесь надо заметить, что оба обильно упоминаемых и цитируемых Фреге мыслителя не были авторитетами для творчески работающих математиков его времени. Не ломая голову, последние склонны были считать, что в познании математических истин используется «обычная» логика, излагаемая в учебниках, написанных философами. Явное привлечение *этой* логики при решении философско-математических вопросов считалось ненужным; не привлекало внимания математиков и логическое учение Буля и его последователей. Подобная позиция была вполне здравой: «старая» логика изобиловала неясностями, а булевская (это убедительно показал Фреге) для целей обоснования математики была недостаточно сильной — не поднималась до уровня, представленного исчислением многоместных предикатов.

Неудивительно, что Георг Кантор, создатель теории множеств[66], еще до логических работ Фреге предложивший известное определение кардинального числа, или мощности множества[67] (совпадавшее с фрегевским понятием количественного числа, или численности — Anzahl), не использовал каких-либо строгих логических понятий и законов. Рихард Дедекинд в знаменитой работе «Что такое числа и чем они должны быть?»[68] (вышедшей в 1888 г., то есть *после* «Оснований арифметики» Фреге) последовательно — в теоретико-множественном стиле — развил теорию чисел, но логику при этом не привлекал[69]. Как констатирует Франц Кучера, «Кантор первым ввел понятие численности (Anzahl), Фреге впервые определил натуральные числа в рамках строгой логической системы, а Дедекинд впервые предпринял детальную разработку арифметики»; при этом, однако, «ни Кантор, ни Дедекинд не строили свои системы в рамках каких-либо строгих систем логики»[70]. Особняком при этом стоял подход к основаниям арифметики и к логике, развитый Германом Грассманом (и его братом Робертом): к Грассманам восходит *рекурсивное* обоснование арифметики и сведение логики (в ее элементарных частях — как ре-

---

[64] Briefwechsel, S. 163–164.

[65] Третьим по числу упоминаний следует Дж. Ст. Милль.

[66] Канторовское «Mengenlehre» — в силу его неформального характера — по-русски точнее передавать как «учение о множествах». Однако мы не будем отклоняться от сложившейся отечественной терминологической традиции.

[67] В русск. переводе: *Кантор Г.* Труды по теории множеств/Пер. с нем. М., 1985.

[68] *Dedekind R.* Was sind und was sollen die Zahlen. Braunschweig, 1888. В дальнейшем при ссылках: ***Dedekind*, 1888**.

[69] Впрочем — на это обстоятельство обращает внимание Г. Ассер с соавторами — впоследствии Фреге и Дедекинд признали общность своих взглядов на природу числа — при всем различии их подходов к определению этого понятия. См. *Asser*, S. 21.

[70] *Kutschera F. von.* Gottlob Frege. Eine Einfürung in sein Werk. Walter de Gruyter. Berlin, N.Y., 1989, S. 5, 4. В дальнейшем при ссылках — ***Kutschera***.

шетки и булевой алгебры) к математике, истолковываемой в виде «общей теории форм»[71].

Труды Фреге 1879 и 1884 гг. не убедили выдающихся математиков его времени в необходимости выявления логической базы своей науки. Когда Фреге создавал «Основания арифметики», ему были известны и положительно оценены идеи Кантора[72], рецензия же последнего на фрегевский труд 1884 г. свидетельствует о том, что Кантор не понял сути подхода Фреге[73]. Сила фрегевских идей была осознана лишь на рубеже веков — когда открытие антиномий логики и теории множеств заставило математиков задуматься над логической базой их теоретических конструкций.

Философская «пропедевтика» Фреге

Труды Фреге относятся к пограничной области — «стыку» двух наук: математики и философии. Существует даже взгляд, согласно которому логицистская установка Фреге — осуществить обоснование арифметики (и математического анализа) средствами одной лишь логики — носила прежде всего *философский* характер, ибо Фреге рассматривал логику как «вполне философскую дисциплину»[74].

Каковой же в философии была атмосфера, в которой формировались воззрения Фреге? Здесь мы должны вернуться к его студенческим годам. В Иене одним из его учителей был Карл Снелл, имевший выраженные натурфилософские интересы, которые были окрашены духом развивавшейся Э. Геккелем эволюционистской концепции; это привело Снелла к естественно-историческому взгляду на человеческое мышление и природу психического[75].

Кроме Геккеля, слава Йенского университета в годы научного становления Фреге была связана с именем Куно Фишера, известного историка философии. В 1856 г. Фишер был приглашен в Йену и возглавил в университете кафедру философии; он преподавал в Иене до 1871 г. включительно. Последователь Гегеля и знаток Канта, отдавший, подобно Снеллу, дань увлечению эволюционизмом, Фишер пользовался в Иене широкой известностью; он читал лекции по логике и метафизике, истории философской мысли и специально по философии Канта. Фреге, обязанный сдавать экзамен по философии, слушал лекции Фишера по Канту «критического» периода.

Взгляды и Снелла, и Фишера не находили отклика у Фреге — они шли вразрез с формировавшейся у него концепцией природы математики и логики, и можно сказать, что естественно-научный подход к мышлению и связанная с ним психо-

---

[71] Имеются в виду, в частности, «Учебник арифметики» Г. Грассмана (1861) и книги его брата Роберта «Учение о формах, или Математика» и «Учение о понятиях, или Логика» (1872). В истории математики имя Германа Грассмана обычно связывается с трудом «Учение о протяженностях» (1844), в то время как философско-математические и логические достижения братьев Грассманов обычно остаются в тени. Пробел этот восполнен в работах: *Бирюков Б. В., Бирюкова Л. Г.* «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грасманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. I//Вопросы кибернетики I; *Бирюкова Л. Г.* «Учение о формах (величинах)» Германа и Роберта Грасманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. II//Вопросы кибернетики II.

[72] В труде 1884 г. он с пониманием цитирует (на с. 97 и далее) Канторовы «Основания общей теории многообразий».

[73] См. его рецензию в «Немецком литературном журнале» (Deutsche Literaturzeitschrift, Bd. 6, № 20) от 16 мая 1885 г.; она перепечатана в юбилейном издании фрегевских «Grundlagen» (Centenarausgabe. Meiner Verlag, Hamburg, 1986). С. 117–119.

[74] *Asser.* Op. cit., S. 24.

[75] Ср. приводимые в книге В. Штельцнера названия его работ: «Die Streitfrage des Materialismus» (1858); «Die Schöpfung des Menschen» (1863); «Vorlesungen über die Abstammung des Menschen. Aus dem handschriftlichen Nachlasse» (1887).

логизация логического служили для Фреге, разрабатывавшего совершенно иную концепцию, своего рода негативным стимулом. Так, если Фишер считал все математические понятия основанными на наглядности, то есть опосредованными чувствами, то Фреге — по крайней мере в случае арифметики — с самого начала отвергал подобный взгляд.

Отношение Фреге к воззрениям Фишера достаточно освещено новейшими исследованиями. Фреге соглашался с этим историком философии в том, что геометрия предполагает наглядное представление, но решительно отвергал это в случае арифметики (и, значит, математического анализа). Этот фрегевский взгляд мы обнаруживаем уже в диссертации, представленной Фреге для получения доцентуры (Habilitationsschrift). «Поскольку объект арифметики лишен наглядности, — писал он, — ее основные законы также не могут проистекать из наглядного представления»[76]. Впоследствии, в «Основаниях арифметики», Фреге подверг критике утверждение Фишера, будто числа возникают в процессе счета — прибавления единицы к единице, совершающемся во времени. Подобный взгляд, когда вычисление объявляют «агрегативным, механическим мышлением», совершенно неприемлем, был убежден Фреге[77].

В отличие от Иены, в Гёттингене Фреге имел возможность познакомиться со взглядами совсем иного рода. Их развивал Рудольф Герман Лотце — религиозный философ, естествоиспытатель, логик[78], лекции которого слушал будущий создатель «исчисления понятий». Не ясно, в какой мере Фреге-студент познакомился с антипсихологизмом Лотце, с его учением о «значимости» (Geltung) истины — истинных суждений — независимо от их носителей, с развивавшейся Лотце критикой некоторых аспектов логического учения Канта[79]. Но бесспорно, что взгляды Лотце в ряде пунктов предвосхищали фрегевские.

Имеется, однако, один аспект воззрений Лотце, который, судя по всему, не прошел мимо внимания Фреге. Дело в том, что в своих лекциях Лотце различал «мир мысли» (Gedankenwelt), или «мир идей» (Ideenwelt), с одной стороны, и «царство содержаний» — с другой; здесь предполагалось разграничение ментального и физического (психофизического). Следуя Платону, Лотце противопоставлял друг другу «царство мыслей и понятий» и «царство сущего» (Seienden), подразделяя последнее на то, что относится к природе, и на то, что относится к психике, — противопоставление, столь характерное впоследствии для фрегевской концепции. Мало того, в своих лекциях по философии религии — а именно их слушал Фреге, — размышляя о связи между «божественной мыслью» и «вечными истинами», он относил к последним ~~также и истины~~ логики и математики, завершая все это тезисом о том, что Бог есть «царство (Reich, империя) вечных истин»[80].

В литературе о Фреге нередко говорят о его онтологии и гносеологии, и это имеет свой резон, если не считать то и другое в мировоззрении Фреге чем-то самодовлеющим. Во всяком случае взгляды философских учителей Фреге (пусть эти взгляды найдут преломление в его творчестве спустя годы) не могли пройти бесследно для гносеолого-онтологических аспектов его учения.

---

[76] Kleine Schriften, S. 50.

[77] *Frege G.* Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, 1884, S. 17. В последующем при ссылках — **Grundlagen** или ***GL***.

[78] Герман Лотце (Hermann Lotze, 1817—1881) был автором книги «Logik», выпущенной в 1843 г. в Лейпциге; пересмотренное издание этого труда выходило в 70—80-х гг. XIX в.

[79] См.: *Stelzner,* S. 6—7; *Gabriel G.* Einige Einseitigkeiten des Fregeschen Logikbegriffs//Studien zu Frege, Bd. II [Logik und Sprachphilosophie]. Stuttgart — Bad Cannstatt, 1976.

[80] См.: Tagebuch/Einleitung von G. Gabriel. В дальнейшем при ссылках: ***Gabriel*** — **Tagebuch. Einleitung**.

Вехи научных свершений: от исчисления понятий к основным законам арифметики

В № 22 за 1879 г. «Иенской литературной газеты» издательство Л. Неберта в Галле (на р. Заале) извещало читателей о том, что оно выпустило книгу д-ра Фреге «Исчисление понятий» и что ее можно приобрести за три марки[81]. Это, как мы теперь понимаем, было извещением об историческом для науки событии... Но событие это осталось практически незамеченным учеными — как математиками, так и философами. Из числа упомянутых выше рецензентов книги единственным специалистом-логиком был Э. Шрёдер, автор сочинения 1877 г. — «Сфера операций логического исчисления». И книге Фреге в его рецензии была дана, как мы уже говорили, несправедливая оценка. Шрёдера, видимо, задело то, что автор обошел молчанием существующую литературу вопроса — труды Буля и его, Шрёдера, недавно вышедшую книжку. Подвергая критике фрегевскую символику, Шрёдер не удосужился вникнуть в суть дела, ошибочно утверждая, например, что исчисление Буля сильнее фрегевского.

Поняв, что его подход требует дополнительных разъяснений, Фреге публикует серию статей: «Применения исчисления понятий» (1879), «О научной правомерности исчисления понятий» (1882), «О цели исчисления понятий» (1883), а позже, когда он познакомился с идеями Дж. Пеано и вступил с ним в полемику, — работу «Об исчислении понятий господина Пеано и моем собственном исчислении» (1897)[82].

Почему исчисление Фреге встретило непонимание? Не потому, что к логике он шел от математики — в том же направлении шел ведь и Буль (озабоченный, правда, не уяснением понятий математики в терминах логики, а применением к логике методов математики). Не новой была и идея о том, что математика (в случае Фреге — арифметика) может быть обоснована *логически*: для многих математиков и философов эта мысль была как бы общим местом, не требующим размышлений. Не новым, наконец, было и убеждение Фреге в том, что имеющегося в распоряжении науки логического аппарата для этой цели недостаточно — это понимал уже Буль. Новаторство Фреге заключалось в создании детально разработанной совершенно новой логической системы, выраженной на специально придуманном для этого искусственном языке[83].

Но разрабатываемая новая логика интересовала Фреге не столько сама по себе (подобный интерес проявился у него лишь к концу жизни, когда он создавал работы, объединенные названием «Логические исследования», о чем ниже), сколько — и прежде всего — как средство уяснения фундамента арифметики и ее «продолжения» — математического анализа. Решение этой задачи требовало решительного отказа от взгляда на теорию чисел как на эмпирическую область знания. Арифметика рассматривалась Фреге как наука, лишенная наглядности: только тогда, считал он, возможно ее логическое обоснование.

Создавая свое логическое исчисление, Фреге решительно порывал с философской традицией начинать логику с учения о понятии и только потом, на его базе, переходить к суждениям и умозаключениям. Фреге начинает с суждений и умозаключений и, отправляясь от них, обращается к понятиям и их объемам — множествам, выступающим у него результатом акта абстракции. Понятия истолковывались им как функции в математическом смысле — функции, аргументами которых явля-

[81] Jenaer Literaturzeitung. Neue Folge, Leipzig, № 22, S. 312. См. *Asser*, S. 7.

[82] Переводы всех этих работ читатель найдет в этом томе.

[83] Ср. *Kutschera*, S. 2–3.

ются предметы, а значениями — абстрактные объекты «истина» и «ложь», которым он дал название *истинностных значений* (значений истинности)[84]. Такого рода подход позволил Фреге построить логику высказываний и предикатов как единую систему. Именно этим ходом фрегевской мысли объясняется выбранное им название для своего построения — «Begriffsschrift», то есть «Понятийная запись» («Запись в понятиях»). Но название это может вводить в заблуждение, что впоследствии Фреге и понял, признав свое решение не очень удачным.

В труде 1879 г. Фреге представил оригинальный двумерный искусственный символический язык и его средствами — впервые в логике — построил дедуктивно-аксиоматическую систему расширенной (второй ступени) *логики предикатов с равенством* при *импликации* и *отрицании* в качестве исходных пропозициональных операций и *кванторе общности* на логико-функциональном уровне, а также применил эту систему для формулировки некоторых математических понятий и доказательства относящихся к ним теорем.

Уже в «Begriffsschrift» — во второй части этого сочинения — Фреге заложил основы своей будущей дефиниции чисел (численностей) как «свойств понятий»[85]. Это очень важно для понимания главной задачи, которую он ставил перед собой, разрабатывая свое исчисление, — чисто логически определить числа и на этой основе доказать основные законы арифметики. Неизбежно возникающий при этом вопрос, какими являются предложения теории чисел — аналитическими или, по Канту, синтетическими, получал ответ в Лейбницевом стиле: аналитическими.

Спустя пять лет после публикации «Исчисления понятий», в 1884 г., вышла вторая важная монография Фреге — «Основания арифметики. Логико-математическое исследование понятия числа». В ней он продолжил изучение логического фундамента арифметики, обосновав сводимость ее основных понятий и принципов к чисто логическим категориям. Книга распадалась как бы на две половины: первая была критической, вторая позитивной. Объектами критики Фреге оказываются воззрения современных ему математиков — Г. Ганкеля, Г. Кантора, Р. Липшица, О. Шломильха, Э. Шрёдера и др., а также таких философов, как Дж. Локк, Дж. Ст. Милль, Ст. Джевонс и др. Затем следует изложение основных идей разработанного Фреге определения натуральных и количественных чисел — численностей (Zahlen und Anzahlen), причем изложение неформальное: «запись в понятиях» не используется, поэтому соответствующие доказательства не приводятся, а только намечаются.

В начале 90-х гг. Фреге печатает в различных журналах и изданиях статьи: «Функция и понятие» (доклад, прочитанный в Иене в 1891 г.), «О смысле и значении» (1892), «О понятии и предмете» (1892), «Критическое освещение некоторых пунктов в “Лекциях по алгебре логики” Э. Шрёдера» (1895), а также рецензию на книгу Э. Гуссерля «Философия арифметики» (1894). К тематике этих публикаций примыкает более поздняя работа «Что такое функция?» (1904). В этих работах — из них наиболее значима статья «О смысле и значении» — предпринимается тщательный анализ таких логико-семантических и экстралингвистических сущностей, как «понятие» и «предмет»; «функция», «аргумент» (функции) и «переменная»; «пробег значений функции» (в случае понятия оказывающийся его «объемом»), «отноше-

---

[84] Считается, что первое явное использование «истины» и «лжи» в качестве истинностных значений мы находим у Ч. Пирса (1839–1914). У Фреге соответствующее понятие появляется лишь в статье 1891 г. — «О функции и понятии», но зато в четкой форме: как двух возможных «предметных» оценок утвердительно-повествовательных (утверждающих) предложений — носителей суждений.

[85] См. об этом Послесловие в данной книге.

ние» и «всеобщность»; (предметное) «значение» и «смысл» имен как дескриптивных выражений; «суждение» как носитель «мысли», обладающее «истинностным значением», и др.

В 1893 г. вышел первый, а через десять лет второй том самой великой работы Фреге: «Основные законы арифметики, развитые с помощью исчисления понятий». В первом томе в сжатой форме излагается «понятийная запись», причем в усовершенствованной по сравнению с «Begriffsschrift» форме. На этой базе строится элементарная арифметика. Во втором томе Фреге обращается к основам анализа, причем сначала предпринимается критический разбор существующих теорий вещественных и иррациональных чисел: рассматривается работа Р. Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» (1872), теории Г. Кантора и К. Вейерштрасса, причем тон критики весьма категоричен. Далее следует обоснование собственной теории вещественных чисел; что касается теории чисел иррациональных, то хотя Фреге и проводит для этого необходимую подготовительную работу — в виде «учения о величинах» — ее, эту теорию, он не излагает. Зато большое внимание уделяется разработке теории определений, причем определений (дефиниций) явных.

«Основания арифметики», том I и том II «Основных законов арифметики» разделяют, в каждом случае, почти 10 лет, и создается впечатление, что Фреге не очень спешил с выпуском своей главной работы. Это объясняют[86] тем разочарованием, которое испытал Фреге из-за отсутствия понимания его трудов математиками и испытываемым им ощущением того, что господствующая атмосфера философско-математической мысли не благоприятствует в математике *логическому* подходу. Сам Фреге в качестве первой причины подобного «запоздания» указал на те усовершенствования своего исчисления, которые он сделал после 1884 г.; он выпускает первый том своих «Основных законов», когда его труд «созрел», писал он в Предисловии к нему[87].

Публикуя «Основания арифметики», Фреге еще надеялся, что его подход встретит одобрение, по крайней мере в своей основе, у тех ученых, которые дадут себе труд вдуматься в его аргументацию. Однако таких ученых не нашлось. И в Предисловии к первому тому «Основных законов арифметики» Фреге горько сетует на то, что специалисты не откликаются на его работы, что таким математикам, как Р. Дедекинд и Л. Кронекер, они, по-видимому, остались неизвестными[88]. Публикуя свое великое произведение, Фреге уже не рассчитывал на благосклонный прием и понимание читателей. Математики, писал он, «натолкнувшись на логические выражения, такие, как «понятие», «отношение», «суждение», подумают: «*metaphysica sunt, non leguntur!*», и равным образом философы, увидев формулы, воскликнут: «*mathematica sunt, non leguntur!*»[89]. И Фреге констатировал: «Я далеко отклонился от традиционных воззрений, в силу чего мои взгляды приобрели парадоксальный оттенок»[90].

---

[86] *Kutschera*, S. 5.

[87] Grundgesetze I, S. X.

[88] В отношении Дедекинда Фреге ошибался. «Приблизительно через год после выхода в свет моей работы [1888 г.], — писал Дедекинд в Предисловии ко второму изданию, — я познакомился с выпущенными еще в 1884 г. «Основаниями арифметики» Г. Фреге. Как ни отличен [от моего] изложенный в этой книге взгляд на сущность числа, все же он содержит <...> существенные [sehr nahe] точки соприкосновения с моим сочинением <...> Правда, осознать это соответствие из-за различия в способах выражения не легко; однако уже та определенность, с которой автор говорит о логическом переходе [Schlussweise] от n к $n + 1$ <...> отчетливо показывает, что он стоит здесь на той же почве, что и я» (*Dedekind*, 1888, Vorwort zur zweiten Auflage, S. X).

[89] Grundgesetze I, S. XII.

[90] Grundgesetze I, S. X–XI.

Противник эмпиризма, субъективизма и психологизма

Сквозной нитью в *философских* воззрениях Фреге проходит тема несостоятельности *эмпиризма* в логике и философии математики — тема, которую Фреге связывает с *субъективизмом, логическим психологизмом*, а в философии математики — с *формализмом*.

Против субъективного психологического направления в логике философии математики Фреге выступал очень резко. К этому вопросу он не раз возвращался в своих работах. Ярким примером тому является его Предисловие к тому I «Основных законов арифметики». Рассматривая воззрения одного из представителей этого направления — Бенно Эрдмана, автора распространенного во времена Фреге труда по формальной логике[91], — Фреге показывает, к чему, по его убеждению, ведет «пагубное сползание к идеализму». У Эрдмана, пишет Фреге, все включается в область субъективного, даже действительные предметы рассматриваются как представления. Субъективный идеализм несостоятелен уже потому, что с его точки зрения субъект суждения зависим от процесса представления и от человека, имеющего представления. Как математика, Фреге возмущало то, что Эрдман помещает числа на одной ступени с галлюцинациями. «Какое сопоставление»! <...> господин Эрдман застрял в психолого-метафизическом болоте»[92].

Для Фреге — тончайшего логика — неприемлема непоследовательность представителей субъективизма. Природа самого дела, настаивает он, сопротивляется сползанию в идеализм. Эрдман чувствует это и не хочет признавать, что его точка зрения отвергает существование объективного. Но, указывает Фреге, безрезультатность этих потуг очевидна. Чтобы прикрыть абсурдность своих взглядов, Эрдман употребляет слово «представление» в различных смыслах — то в субъективно-психологическом плане, то с неким объективным содержанием, как нечто одинаково противостоящее тому и другому. Аналогичным приемом пользуется он и в случае слов «представляемое» и «предмет» — приемом, который, считает Фреге, используется для того, чтобы затемнить дело. Сначала эти слова обозначают как будто нечто объективное — в противоположность представлению; однако это только кажется, ибо в конце концов получается, что они обозначают одно и то же. Мы читаем у Фреге: «всюду здесь (у Эрдмана. — *Б. Б.*) предмет, о котором я составляю себе представление, смешивается с этим представлением, после чего все-таки снова приходится их различать»[93]. Однако попытки Эрдмана выбраться из болота, в котором он оказался, пишет Фреге, напрасны. Преподносимая им мешанина является следствием субъективизма, результатом стремления идти наперекор природе вещей.

Фреге убежден: никакими увертками субъективисты не могут замазать кричащие противоречия в своих взглядах. Одной из таких уверток было использование выражения «как таковое». Фреге писал по этому поводу: «Пусть кто-то хочет мне внушить: все предметы суть будто бы не что иное, как образы на сетчатке моего глаза. Ну, хорошо! Я пока не возражаю. Но затем он говорит, что вот эта башня больше, чем окно, через которое, по моему мнению, я на нее смотрю. На это, однако, я возражаю: либо оба — и башня, и окно — не являются образами на сетчатке в моем глазу, и тогда башня может быть больше, чем окно; либо башня и окно суть, как ты говоришь, образы на моей сетчатке; но тогда башня не больше, чем окно, а меньше его. Тут-то он и пытается выйти из затруднения с помощью этого «как таковое» и говорит: образ башни [на сетчатке] как таковой действитель-

[91] См. выше, примеч. 53.
[92] Grundgesetze I, S. XIX–XX.
[93] Ibidem, S. XXII.

но не больше, чем образ окна. Тогда я уже выхожу из себя и кричу ему: значит образ башни на сетчатке глаза вообще не больше, чем образ окна, и если бы башня была образом башни, а окно было бы образом окна, то сама башня была бы не больше, чем окно, и если твоя логика учит тебя другому, то она никуда не годится. Это «как таковое» есть превосходное изобретение для туманных писателей, которые не говорят ни да, ни нет»[94].

Фреге ставит здесь вопрос, к которому он впоследствии возвращается в «Логических исследованиях»: является ли представление действительным предметом суждения? Если нет, то надо признать существование мира действительных вещей. Сам он безоговорочно стоит на этой точке зрения. «Если мы вообще хотим выйти за пределы субъективного, — пишет он, — мы должны понимать познание как деятельность, которая не создает познаваемого, а лишь схватывает существующее. Образ схватывания хорошо подходит для уяснения вопроса. Если я схватываю карандаш, то в моем теле совершаются различные изменения: происходит возбуждение нервов, меняется напряжение и сокращение мышц, связок и костей, изменяется циркуляция крови. Но совокупность этих процессов не есть карандаш и не порождает его. Последний существует независимо от этих процессов. И для схватывания существенно, что имеется то, что схватывается; одни только внутренние изменения не являются еще схватыванием. Так и то, что мы мысленно схватываем, существует независимо от этой нашей деятельности, от тех представлений и их изменений, которые принадлежат к этому схватыванию или его сопровождают; оно не есть ни совокупность этих процессов, ни создается ими как часть нашей душевной жизни»[95].

* * *

Будучи решительным противником психологического направления в логике, считая вторжение психологии в логику пагубным, он с сожалением констатировал, что формальная логика насквозь заражена психологизмом. Впрочем, от логического психологизма был свободен его учитель в Гёттингене — Лотце[96]. Тем не менее лишь немногие тогда были в состоянии воспринять фрегевские воззрения. Но среди тех, кто внял аргументации Фреге, был Э. Гуссерль, в будущем основатель философской школы *феноменологии*. Во многом под влиянием критики, которой Фреге подверг его книгу «Философия арифметики»[97], он навсегда отказался от логического и логико-математического психологизма.

Во Введении к книге «Основания арифметики» в числе главных принципов своего исследования Фреге формулирует: «надлежит резко отделять психологическое от логического, субъективное от объективного»[98], а выпуская в свет первый том «Основных законов арифметики», он выражает надежду, что его книга поможет ниспровергнуть психологическую логику.

Итак, современная Фреге логика, ориентирующаяся на психологию, была неприемлема для него прежде всего в силу своего субъективистского характера. Ведь

---

[94] Ibidem, S. XXIII.

[95] Ibidem, S. XXIV.

[96] Хотя, как отмечалось выше, прямых данных о влиянии Лотце на Фреге, во всяком случае в студенческие годы последнего, нет, схождение их взглядов во многих пунктах примечательно.

[97] Обстоятельная рецензия Фреге на книгу Э. Гуссерля «Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchung». Bd. I. Leipzig, 1891, была помещена в томе 103 журнала «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik» (1894); перепечатана в Kleine Schriften, S. 179–192. Относительно степени влияния Фреге на Гуссерля существуют различные мнения. В монографии П. Н. Мирошниченко этому вопросу посвящен отдельный параграф.

[98] *Grundlagen*, S. X.

если вместо вещей рассматривать их субъективные отображения, представления, то для логики будут потеряны все тонкие и существенные различения, а без этого развитие этой науки невозможно, ибо в ней речь идет об истине как объективной данности.

Проблема *истины* — вот что подрезает корни у логического психологизма; ибо «этот взгляд все сводит к субъективному и, будучи доведенным до конца, отменяет истину»[99]. Фреге возмущало то, что для субъективно-психологических логиков «все является представлением». «Так все завершается идеализмом, а при наибольшей последовательности — солипсизмом. Если бы каждый именем «Луна» обозначал нечто другое, — именно, одно из своих представлений, примерно так, как выражают возгласом «ой!» свою боль, то, конечно, психологический подход к делу был бы оправдан; однако всякий спор о свойствах Луны стал бы беспредметным: один человек с таким же правом мог бы утверждать о своей Луне прямо противоположное тому, что другой с таким же правом говорил бы о своей. Если бы мы не могли постигать ничего, кроме того, что имеется в нас самих, то был бы невозможен ни спор между людьми, ни взаимное понимание»[100]. В этом случае не существовало бы никакой логики, которая была бы призвана служить судьей в борьбе мнений.

Категорически отвергал Фреге и теорию суждения как связи представлений. Он был убежден, что пихологизированная логика стоит на ложном пути, рассматривая субъект (логическое подлежащее) и предикат (логическое сказуемое) суждения как представления в смысле психологии. Ибо если все субъекты и предикаты являются только представлениями, то нельзя достичь чего-либо объективного.

Если бы были правы психологисты-идеалисты, то на предложение «Карл Великий победил саксов» следовало бы смотреть так же, как и на предложение «Несс перенес Деяниру через реку Эвен»[101]; но неверно, говорит Фреге, считать, что, говоря о Карле Великом, я будто бы высказываю нечто о моем представлении; это просто идеалистическая подделка. На самом деле мы обозначаем именем и производим высказывание о реальном человеке, который не зависит от нашего представления о нем. «В предложении "эта травинка зеленая" я не высказываю ничего о моем представлении»; неверно также, «будто мое представление о зеленом высказывается о моем представлении об этой травинке»[102].

По Фреге, в суждении высказываемое относится к самому предмету, и именно поэтому может идти речь о его истинности или ложности. Предложение «Несс не перенес Деяниру через реку Эвен» как раз потому не может претендовать на истинность, что в нем нет речи о реальных предметах, ибо Несс и Деянира никогда не существовали.

Согласно Фреге, решающим для логики является правильное понимание *логических законов*; последние должны служить *руководством* для мышления при достижении истины. Источник спора с психологистами виделся ему в различном понимании истины, истинности. Поэтому он так резко критиковал Б. Эрдмана, который в первом томе своей «Логики» (1892) отождествлял истину с общезначимостью, сводя ее ко всеобщему согласию тех, кто высказывает суждение. Для меня, писал Фреге, истинное — «это нечто объективное, независимое от того, кто выносит суждение. Для психологических логиков это не так»[103]. В процессе суждения, по Фреге,

---

99 Ibidem, S. VII.

100 Grundgesetze I, S. XIX.

101 *Несс* и *Деянира* — персонажи древнегреческой мифологии; Деянира — супруга Геракла, Несс — один из кентавров.

102 Grundgesetze I, S. XXI.

103 Ibidem, S. XVII.

выражается *мысль* и совершается переход от мысли к *признанию ее истинности*. «Я понимаю под мыслью *не субъективную деятельность мышления*, но его *объективное содержание*, которое может быть общим достоянием многих»[104] — таково было его основополагающее убеждение.

Отвержение «творческих» определений

Фреге был решительным противником крайнего *эмпиризма*, считающего, что существуют только чувственно воспринимаемые вещи, и отрицающего реальность общего. Критикуя Гейне[105], автора работы «Элементы учения о функциях», Фреге писал: «Неблагоприятным для моей книги (речь идет о первом томе «Основных законов арифметики». — *Б.Б.*) является также широко распространившаяся склонность признавать наличным только чувственно воспринимаемое. Что нельзя воспринять чувствами, то пытаются отрицать или просто обходят молчанием. Но ведь предметы арифметики — числа, это не чувственно воспринимаемые вещи; как же с ними-то быть? Очень просто! Объявить числами знаки чисел. Тогда в знаках мы обретем нечто нами видимое, а ведь в этом главное. Конечно, знаки имеют совершенно другие свойства, чем сами числа; но что из того? Мы просто присочиним им желаемые свойства с помощью так называемых дефиниций. Правда, остается загадкой, как может состояться дефиниция, если и речи нет о связи между знаком и обозначаемым»[106].

Здесь надо пояснить, что́ Фреге понимал под дефинициями и определениями. Он четко разводил термины Definition — *дефиниция* и Erklärung — *объяснение*, *разъяснение*. Дефиниции как «настоящие определения, определения в собственном смысле» он противопоставлял определениям-объяснениям. Развивая науку, указывал он, мы нуждаемся в словах естественного языка. Но слова эти по большей части не очень подходят для научных целей. Поэтому требуются искусственные выражения, которые имеют совершенно определенное значение; кроме того, уточнению подлежат и те слова, которые уже имеются в языке, но нуждаются в уточнении. Обе задачи и решают определения-объяснения. Они обеспечивают научное понимание и предохраняют от недоразумений. В соответствии с подобным взглядом он назвал первую часть труда 1879 г. «Разъяснение (Erläuterung) обозначений»[107].

Дефиниция же, согласно Фреге, играет совершенно иную роль. Она вводит *сокращенное обозначение*, знак или термин в качестве представителя группы знаков или выражений, обладающих *смыслом* и составляющих часть *мысли*, которая выражается неким *предложением*[108]. Ныне это называют введением новых знаков «по определению», что обычно выражается с помощью знака = Df (или $\overset{\mathrm{Df}}{=}$, $\underset{\mathrm{Df}}{=}$). Критика Фреге была направлена против использования дефиниций, а именно таких, которые, с его точки зрения, недопустимы: против применения так называемых «твор-

---

[104] С. 234 настоящего издания (статья «О смысле и значении»; курсив мой. — *Б.Б.*).

[105] *Г.Э. Гейне* (Heine; 1821–1881) был профессором математики в университетах Бонна и Галле, членом-корреспондентом Берлинской академии наук. Упоминаемое Фреге сочинение Гейне опубликовано в основанном А. Крелле (A. Crelle) издании «Journal für reine und angewandte Mathematik», Bd. 74, 1872.

[106] Grundgesetze I, S. XVII.

[107] В предлагаемом читателю переводе «Исчисления понятий» мы озаглавили эту часть просто «Обозначения».

[108] Поэтому передача по-английски упомянутого выше заголовка в известном сборнике «From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931»//Ed. by J. van Heijenoort (Harvard Univ. Press. Cambridge, Mass., London, Engl., 1981; при последующих ссылках: ***Heijenoort***), как «Definition of the Symbols» смазывает тонкость фрегевского различения.

ческих» определений — креативных дефиниций. Против такого рода определительных процедур Фреге выступал неустанно, в течение всей своей жизни. Правда, эти выступления — а они были частью его общего борения с субъективизмом — сталкивали его и с Гильбертом, и с нарождавшимся интуционистски-конструктивистским пониманием математики и логики. Но что из того? Он оставался непреклонен.

Как во времена Фреге понимались в математике «творческие, креативные» дефиниции? Тогда был распространен прием (возникший значительно раньше) — вводить новые числа (отрицательные, мнимые, рациональные, иррациональные) с помощью «постулатов» или созидательных (творческих) определений. Например, постулировали существование числа x нового вида, такого, что $xx = 2$, и давали этому числу название $\sqrt{2}$. Для «созданных» таким образом чисел устанавливали правила операций, «примыкающие» к правилам для рациональных чисел. Математики полагали, что этого достаточно для обоснования арифметики иррациональных чисел.

Подход к делу, когда ученый присваивает себе право «создавать» то, что ему нужно, Фреге осудил ясно и определенно. Он высмеивал наивный взгляд, будто можно выдумывать все что угодно — даже то, что не существует, даже то, что вообще немыслимо. «Нет! — восклицал Фреге. — Математик тоже не может создавать все, что ему вздумается; он так же мало имеет на это права, как и географ; он тоже может лишь открывать то, что существует, и давать ему название»[109].

В другом месте Фреге писал: вопрос состоит в том, «что́ представляет собой дефиниция и чего с ее помощью можно достичь. Кажется, ей часто приписывают творческую силу, между тем как при этом не происходит ничего иного, кроме того, что нечто выделяется указанием его границ и обозначается именем. Как географ не создает моря, проводя его границы и говоря: ограниченную этими линиями часть водной поверхности я буду называть Желтым морем, так и математик ничего, собственно, не может создать своей дефиницией. Нельзя также простой дефиницией как по волшебству вложить в вещь свойства, которых она так-таки не имеет, за исключением одного-единственного — называться впредь так, как ее решили назвать. Но что овальный предмет, который мы нарисовали чернилами на бумаге, может по определению получить то свойство, что, будучи прибавленным к единице, он дает единицу, я могу считать только научным суеверием. С таким же успехом можно было бы посредством простой дефиниции превратить ленивого ученика в прилежного»[110].

Нелепо считать, что дефиниция, определение является гарантией существования определяемого, — в этом Фреге был твердо убежден. «С помощью дефиниции нельзя ни создать предмет с любыми свойствами, ни приворожить любые свойства пустому имени или символу», — писал он[111]. Критикуя Шрёдера, который в «Лекциях по алгебре логики» определял тождественный нуль как обозначение области (класса), содержащейся в любой области данного многообразия, и в то же время допускал такие выражения, как: «символ 0 причисляется к областям нашего многообразия», «нашим определением мы ввели символ 0 как многообразие» и пр., Фреге писал: «Знак нуля — это овальная фигура, нанесенная, скажем, на бумагу с помощью типографской краски. Что же здесь может сделать определение? Может ли оно придать этой фигуре какое-либо свойство? Пожалуй, единственное свойство, которое оно может ей придать, — это свойство служить знаком того, что установлено в качестве ее значения. Разве только от того только, что я скажу: эта

---

[109] Grundlagen, S. 107–108.

[110] Grundgesetze I, S. XIII–XIV.

[111] Настоящая книга, с. 276 (статья «Критическое освещение некоторых пунктов в “Лекциях по алгебре логики” Э. Шрёдера»), в немецком оригинале с. 456 первоначального издания.

фигура является областью, содержащейся в каждой области какого-то многообразия, — она станет таковой? Будь это так, то нетрудно было бы и бриллианты изготовлять»[112].

Нельзя, указывал Фреге, выставлять в виде определения то, что требует доказательства или иного обоснования своей истинности. С этой мыслью Фреге вступил в полемику с Гильбертом, вызванную тем подходом в философии математики, который лежал в основе выпущенных последним в 1899 г. «Оснований геометрии»[113], главные положения которых стали известны Фреге еще до публикации труда Гильберта. В первом письме Гильберту, датированном 27 декабря упомянутого года, он писал: «Ныне в математике уже укоренилась путаница в отношении дефиниций, и многие как будто действуют по правилу:

Чего нельзя по-настоящему доказать,
То определением можно считать»[114].

Пытаться избавиться от *бремени доказательства*, прибегая к определению, есть логическое фокусничество, был уверен Фреге. Эту позицию автора записи в понятиях можно правильно оценить, только приняв во внимание, что весь пафос фрегевской борьбы против «креативной» способности дефиниций имел смысл постольку, поскольку Фреге говорил лишь о *явных* определениях и не допускал неявных. Отсюда его несогласие с Гильбертом, трактовавшим систему аксиом как неявное определение вводимых объектов.

Критика философско-математического формализма

В том же русле идут и возражения Фреге против формализма в математике. Суть дела здесь состояла в следующем. В обосновании арифметики он выделял два основных направления — *формальное* и *содержательное*. Сторонники первого «называют числами некоторые фигуры, возникающие при письме. С этими фигурами оперируют по *произвольным* правилам (курсив мой. — *Б.Б.*) <...> Для содержательной арифметики такие фигуры являются только знаками, обозначающими настоящие предметы [арифметики], только числовыми знаками, внешними, вспомогательными средствами. <...> — Для нас только содержательная арифметика может подлежать рассмотрению»[115]. Ибо при «формалистическом» подходе к математике — так же как при отказе от явных определений понятий — исчезают сами объекты математических рассмотрений.

Во втором томе «Основных законов арифметики» так понимаемая формальная теория арифметики подвергается детальному разбору и критике. Фреге ополчается против И. Томэ, считая, что его иенский коллега превращает математику в подобие шахматной игры, сводящейся только к оперированию со знаками по определенным правилам. При таком подходе знак не обозначает ничего, в нем самом состоит все дело. «Правда, при этом упускают из виду одну мелочь, а именно то, что мы с помощью записи ‘$3^2 + 4^2 = 5^2$’ выражаем некоторую мысль, в то время как расположение фигур на шахматной доске не означает ничего»[116].

---

[112] Там же, с. 273.

[113] В русском переводе: *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л., 1948. В дальнейшем при ссылках: ***Гильберт*, 1948**.

[114] Briefwechsel, S. 62.

[115] *Frege G.* Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Bd. *II*. H. Pohle. Jena, 1903 (репрографическое переиздание: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt, 1962, 1966, und G. Olms. Hildesheim, 1962). S. 154. В последующих сносках обозначается: **Grundgesetze II** или ***GG*II**.

[116] Grundgesetze I, S. XIII.

Несостоятельность «формальной арифметики» Фреге виделась в том, что она не в состоянии объяснить, почему предложения математики оказываются приложимыми к действительности. Если принять точку зрения формализма, то разрыв между арифметическими формулами и их применением «будет неустраним»[117]. Для его устранения надо, чтобы формулы математики выражали смысл и ее правила имели свое оправдание в значении знаков. «Почему расположение шахматных фигур не допускает никаких приложений? — спрашивает Фреге. — Очевидно потому, что оно не выражает никакой мысли. <...> Почему возможны приложения арифметических уравнений? Только потому, что они выражают мысль. Как могли бы мы применять такое — ничего не выражающее — уравнение, являющееся не чем иным, как группой фигур, которые превращаются по определенным правилам в другую группу?»[118] Целью должно быть *познание*, и этим определяется все, что делается в математике.

С аналогичных позиций Фреге критиковал и Гильбертово «формалистическое» обоснование геометрии. Заметим, однако, что, говоря о фрегевской критике формализма, мы должны отдавать себе отчет в том, что это был не совсем тот формализм, который впоследствии, когда появились математико-логические работы Гильберта, стал ему приписываться (хотя сам Гильберт предпочитал не пользоваться этим термином и о своей философско-математической позиции склонен был говорить как о «финитизме»). Гильбертовский формализм-финитизм был тоньше и глубже воззрений названного выше иенского оппонента Фреге; он был сформулирован исходя из совершенно иного круга идей, нежели тот, который явился предметом критики Фреге. Но вряд ли можно сомневаться в том, что если Фреге не принял подхода, развитого Гильбертом в его «Основаниях геометрии» 1899 г., то тем более отрицательно отнесся бы он к Гильбертовой установке использовать при доказательстве непротиворечивости математики формулы, от которых не требуется, чтобы отдельные из них «сами по себе были изъясняемы»; а убеждение Гильберта, выраженное в словах: «сущности теории соответствует, что при ее развитии нет необходимости <...> возвращаться к наглядности или значимости»[119], было, разумеется, вполне «антифрегевским».

Объективность логики и ее законов

В основе фрегевского понимания логики и ее законов лежало глубокое убеждение в их объективности. Объективность эту он считал покоящейся на объективности *мысли*. Мир, царство, империя (Reich) мыслей столь же реален — имеет такое же независимое от человека существование, — что и мир действительных вещей, пребывающих во времени и пространстве. Но в отличие от мира эмпирических реалий, мир мыслей носит вневременной и внепространственный характер.

Этот основополагающий для гносеологических и онтологических воззрений Фреге тезис — тезис в духе схоластического *реализма* — не был, конечно, его открытием. Здесь достаточно вспомнить о философии Платона и Лейбница, а из мыслителей более близкого Фреге времени — об учении Б. Больцано и философской концепции И. Ф. Гербарта — да и Лотце тоже. Но Фреге развивает собственный, весьма оригинальный вариант концепции реализма-платонизма. В «Основаниях арифметики» мы читаем: «Я отграничиваю объективное от осязаемого, пространственного, реально-

[117] Grundgesetze II, S. 100.

[118] Ibidem.

[119] *Гильберт*, 1948, с. 381–382. Добавление IX.

го (wirkliches). Земная ось, центр тяжести Солнечной системы объективны, но я не могу назвать их реальными, в отличие от самой Земли. Экватор называют *мыслимой* (gedachte) линией, но было бы неправильным назвать эту линию *выдуманной* (erdachte); экватор не создается мышлением»[120]; число «столь же безосновательно считать предметом психологии или порождением психических процессов, что и, например, Северное море. <...> Таким образом число тоже есть нечто объективное»[121]. Под объективностью, продолжает Фреге, понимается независимость от процессов ощущений, восприятий и представлений человека.

Согласно Фреге, *мысль* как ~~нечто~~ *объективное* не нуждается для своего бытия в мыслящем человеке — *носителе мысли*, тем более что последний всегда обладает пространственно-временными характеристиками. Мышление, далее, не *создает* мыслей — оно только постигает, *схватывает* (begreifen) их, и этот процесс Фреге считает «самым таинственным»[122] из всего, с чем имеет дело человек. Соответственно этому законы, относящиеся к мысли, — законы логики — не похожи на нормы морали или законы права; они скорее подобны законам природы, которые открываются естественными науками; но законы природы воплощают то общее, что есть в *естественных* процессах, *естественных* событиях (Geschehen), — законы же мысли внеприродны, так как относятся к *бытию истины*. Поэтому они неизменны и вневременны. Отсюда фрегевское определение: «логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины (Wahrsein)»[123]; отсюда же противопоставление *истины* (с которой имеет дело логика) и *признания истины* (которое относится к ведению психологии).

Мысли составляют содержание утвердительно-повествовательных — *утверждающих предложений* (Behauptungssätze), каждое из которых выражает какой-нибудь *смысл*, какое-то содержание, могущее быть как истинным, так и ложным. Исходя из этого Фреге критикует манеру математиков говорить о доказательстве *предложений*: предметом доказательства как процедуры подтверждения истины является не предложение как знаковое образование, а выражаемая в нем мысль.

Подобный взгляд на логику и ее законы во многом определил характер построенного Фреге логического исчисления — то, что оно имело характер расширенного логического функционального исчисления, в котором обобщалось понятие функции и ее аргумента (аргументов) так, что их значениями могли выступать любые предметы, а относительно кванторов предполагалось, что они могут связывать не только предметные, но и предикатные переменные, и (в принципе) допускалась неограниченная иерархия функций. Все это делало систему Фреге очень сильной, а явное использование *принципа абстракции* позволило ему определить категорию натурального числа и численности (Anzahl) — кардинального числа.

Уже в труде 1879 г., благодаря допущению функций от функций и тем самым неограниченной иерархии функций, была заложена *возможность* противоречия. Возможность эта стала явью благодаря неограниченному использованию упомянутого принципа — принципа, позволющего вводить абстрактные, объективно-нереальные предметы («пробеги значений функций»[124]) и определившего *универсальность предметной области* фрегевской логики. Противоречивость логико-математической системы Фреге, как она была развита в его главном труде 1893 г., была в 1902 г. обнаружена, как мы уже говорили (и еще будем говорить), Б. Расселом (и соответствующая

---

[120] Grundlagen, S. 34.

[121] Ibidem.

[122] Nachgelassene Schriften, S. 157; наст. издание, с. 321.

[123] Nachgelassene Schriften, S. 139; наст. издание, с. 307.

[124] См. об этом Послесловие в данной книге.

антиномия была названа его именем). Последующая история логики и оснований математики, в частности работы по аксиоматизации теории множеств — а систему Фреге можно рассматривать как *логизированную теорию множеств*, — была во многом связана с развитием научных идей Фреге и, в частности, с преодолением обнаруженного в его системе противоречия; исторически первая попытка такого преодоления была связана с расселовской *теорией типов*. Сам Фреге выхода из возникшей трудности не нашел. Но обо всем этом подробнее мы скажем позже.

Логическое учение Фреге в своей основе носило, как говорят, объемный характер — было *экстенсиональным*, чем и определялся его «параллелизм» теоретико-множественной установке в философии математики. Экстенсиональность была заложена в самом способе развертывания фрегевского исчисления, когда истинностные значения сложных суждений оказывались однозначно определяемыми истинностными значениями составляющих суждений. В конструкции Фреге сохранялись все законы классической логики, в том числе законы противоречия и исключенного третьего; их справедливость в конечном счете покоилась на дихотомии истинностных значений — «истинно», «ложно».

Во фрегевском логическом исчислении с самого начала присутствуют и *синтаксическая*, и *семантическая* стороны; однако, в отличие от современной манеры изложения логических систем, Фреге, вводя ~~те или иные знаки (синтаксис)~~, сразу же задает их значения (содержание, смысл — семантику). Лишь в «Основных законах арифметики» мы находим более или менее четкое различение синтаксического и семантического аспектов логической системы[125]. Поэтому для Фреге не существовало проблемы доказательства непротиворечивости своего исчисления, хотя все его учение объективно ставит вопросы, которые наука XX в. относит к *металогике и метаматематике*. Так, в понятийной записи 1879 г. для пропозициональной логики формулируются аксиомы (точнее, схемы аксиом), выражающие принцип «истина следует из всего что угодно» и ослабленный *modus ponens* (закон самодистрибутивности импликации), ныне используемые при доказательстве (мета)теоремы о дедукции; но теорему эту Фреге не формулирует. Система принципов пропозициональной логики, сформулированная в «Исчислении понятий» 1879 г., — если взглянуть на нее с современных позиций — дедуктивно полна и непротиворечива: разведя фрегевские синтаксис и семантику, мы обнаружим, что все доказуемые в его системе суждения общезначимы с точки зрения его семантики, а все содержательно истинные суждения — законы логики — доказуемы. По сути дела Фреге показал, что его система на уровне пропозиционального исчисления непротиворечива, и привел аргументы в пользу ее полноты. Но развернутое как исчисление предикатов, фрегевское построение — после того как Фреге в труде 1893 г. ввел упомянутые выше «пробеги значений функций», частным случаем которых оказывались *объемы понятий*,— стало антиномичным.

Противник субъективизма, психологизма и эмпиризма, Фреге занял в философии математики позицию так называемого *математического ~~платонизма или реа~~лизма*[126]. Философские убеждения Фреге поэтому резко контрастировали с воззрениями более молодых его современников — представител~~ей так называемой~~ *аналитической философии* (Б. Рассел, Л. Витгенштейн и др.), хотя последние активно использовали логико-семантические идеи Фреге. Что касается фрегевской философско-математической концепции, то ее — вопреки часто повторяемому утвержде-

---

[125] См.: *Thiel C.* Bedeutungsvollständigkeit und verwandte Eigenschaften der logischen Systeme Freges//Frege-Konferenz, 1979, S. 485.

[126] См. об этом подробнее в Послесловии в данной книге.

нию — нельзя квалифицировать как *последовательный логицизм,* то есть взгляд, согласно которому *вся математика сводима к чистой логике*[127]: подобную сводимость Фреге не распространял на геометрию. Подлинным логицистом выступил Б. Рассел, и фундаментальным памятником этой концепции явились знаменитые «Principia mathematica» А. Н. Уайтхеда и Б. Рассела — труд, последний (четвертый, так и не написанный) том которого должен был быть посвящен геометрии. Для Фреге же геометрия не базируется на логике, так как с его точки зрения она имеет свой, независимый от последней познавательный источник: им является специфически геометрическое наглядное представление. Мысль о таком источнике Фреге отстаивал особенно под конец своей жизни, и об этом, в частности, выразительно свидетельствуют посмертно опубликованные его манускрипты.

Свои установки Фреге рассматривал как реализацию *программы Лейбница*, что из-за его геометрических воззрений выглядит не очень последовательно. Не совсем в духе Лейбница смотрел он и на свою понятийную запись, считая ее *вспомогательным* научным средством, производным от естественного языка и содержательного мышления; то же можно сказать и о фрегевском понимании логики как науки о «бытии истины», при котором из сферы логического исключались любые эмоционально-поэтические проявления. Лейбниц же придавал гораздо большее значение задуманным им «универсальной характеристике» и «исчислению умозаключений»; по его замыслу они были призваны охватить все человеческое знание, включая гуманитарные науки. Но антиэмпиризм и логический антипсихологизм Фреге были достаточно «лейбницеанскими», так же как и его убеждение в *объективности общего*, объективности мира *абстрактных объектов*, отличного как от психического мира личности, так и от мира эмпирических реалий. Здесь он предвосхищал соответствующие идеи К. Поппера.

Основоположения логической семантики

Фреге явился по существу главным создателем той ветви современной логики (и теоретической лингвистики), которая называется ныне *логической семантикой*. В самом деле, такие понятия современной логики, как *логическая функция*, как *свойство* и *отношение*, понимаемые соответственно как одноместная и многоместная логическая функция (предикат), значениями которой могут быть только *истинностные значения*; такие воззрения, как функциональная трактовка понятий, объемами которых оказываются классы (множества), истолковываемые в виде «пробегов значений» соответствующих функций; как введение и систематическое употребление *квантора общности*, с помощью которого (и операции отрицания) выражалось *существование*, — все это составляет ныне «общее место» в современных логико-семантических рассмотрениях. К этому следует добавить проведенное Фреге различение отношений *принадлежности* предмета классу (объему понятия) и *включения* класса в класс, а также четкое указание на различие, существующее между единичным объектом и классом, единственным элементом которого является этот последний. Впрочем, все это следует отнести скорее к его *общелогическим* достижениям.

Собственно *логико-семантический* вклад Фреге можно видеть в предпринятом им обобщении понятия (*собственного*) *имени*, означавшем введение того, что ныне из-

---

[127] Р. Карнапу принадлежит следующая четкая характеристика логицизма: 1) все математические понятия определимы с помощью логических посредством явных дефиниций и 2) все математические предложения выводимы путем дедукции из основных предложений логики. См.: *Carnap R.* Die logizistische Grundlegung der Mathematik//Erkenntnis, Bd. 2, 1931, S. 92.

вестно под названием (определенной) *дескрипции*, а также — что особенно важно — в проведении различия между (предметным) *значением* имени и его *смыслом*, понимаемым как «способ задания» именуемого предмета. Опираясь на отношение между обозначающим и обозначаемым, именем и именуемым предметом (в некотором языке) — *отношение именования*, Фреге исследовал понятие *равенства* (*тождества*), связав его с отношением соответствующих выражений по их смыслу и (предметному) значению. Он показал различие между *употреблением* и *упоминанием* языковых выражений, между *прямым* и *косвенным* их употреблением. К нему восходит различение *экстенсиональных* («объемных») и *интенсиональных* («содержательных») контекстов, *метаязыка* и *объектного* языка. Фреге утвердил распространенный в современной логике и логической семантике взгляд на предложения как на имена истинностных значений, задаваемых *мыслью* как смыслом (утверждающего) предложения.

Как мы уже говорили, среди логико-семантических работ Фреге наиболее значима его статья 1892 г. «О смысле и значении». Именно к ней восходит то, что впоследствии получило название «семантического треугольника», который наглядно передает отношение, существующее между знаком, предметом, им обозначаемым (значением знака), и знанием, которое несет в себе данный знак — его смыслом; при этом, как показывает Фреге, знак может иметь смысл, но не иметь значения. Отношение «знак — смысл — значение» Фреге переносит на предложения как частный случай имен, знаков, обозначающего, выделяя особо утвердительно-повествовательные — *утверждающие предложения*, смысл которых есть *мысль*, а предметное значение — одно из двух истинностных значений: «истинно» либо «ложно».

Проведенное в упомянутой статье 1892 г. различение смысла и значения знака конституировало одно из важнейших направлений последующей логической семантики; оно оказало огромное влияние на гносеологию, философию языка, теоретическую лингвистику. От него тянутся нити к ряду современных неклассических логических концепций.

В «Исчислении понятий» 1879 г. различение смысла и предметного значения отсутствует. В этом труде вводится «штрих содержания» '——', помещаемый перед предложением: ——*A*; этот знак выступает в качестве средства выражения такого *содержания A*, о котором мы можем *судить*, истинно оно или ложно, оценивать его с этой точки зрения; если же акт суждения завершается констатацией его истинности, то слева от горизонтали Фреге ставит вертикальную черту, и так возникает хорошо известный в современной логике знак $\vdash$— .

Введение понятия смысла языкового выражения сделало подход Фреге более тонким. В Предисловии к первому тому «Основных законов арифметики» (1893) он следующим образом говорит об этом изменении своих взглядов: «Раньше в том, что по своей внешней форме является утверждающим предложением, я различал две стороны: 1) признание истинности и 2) содержание, которое признается истинным. Содержание я называл оцениваемым содержанием — тем содержанием, о котором выносится суждение. Теперь содержание, о котором судят, распадается для меня на то, что я называю мыслью, и то, что я называю значением истинности. Это есть следствие *различения смысла и значения* знака (курсив мой. — *Б.Б.*). В данном случае смысл предложения есть мысль, а его значение — значение истинности. К этому присоединяется еще акт признания того, что значением истинности [некоторого утверждающего предложения] является истина <...> только так мы можем правильно понять косвенную речь. А именно, мысль, которая обычно есть смысл данного предложения, в косвенной речи становится его значением»[128].

---

[128] Grundgesetze I, S. X.

Признание наконец приходит

Вернемся к канве научной жизни Фреге. Лишь с началом нового столетия его труды начинают находить признание. Этим он обязан прежде всего Бертрану Расселу, долгое время выступавшему главным «транслятором» концепций великого немецкого логика. Ибо фрегевские идеи в их оригинальном изложении трудно доходили до научного мира. Книги и статьи Фреге, опубликованные небольшими тиражами либо рассеянные по журналам, были мало доступны для читателя. «Формульные» тексты Фреге отпугивали необычной символикой, а те работы Фреге, где этой символики было мало либо не было совсем, встречали непонимание: заключенные в них идеи требовали усвоения радикально нового содержания, а к этому математики и философы того времени не были готовы. Философско-логические воззрения Фреге резко контрастировали не только с представлениями, господствовавшими в логике его эпохи (как «формальной», традиционной, так и алгебраически математизированной), но и с распространенными в ту пору философско-математическими установками. То, что Фреге очень рано вступил в острую полемику со многими известными научными авторитетами, прибавляло ему не столько известности, сколько недоброжелательства. К числу немногих исключений — если говорить о немецких ученых — относятся отношения Фреге с Эдмундом Гуссерлем, который уже в своей «Философии арифметики» (1891) признал значимость фрегевских работ. Еще более примечательным была переписка Фреге с Гильбертом, продолжавшаяся (с перерывами) более восьми лет (1895 — 1903) и свидетельствовавшая о признании последним важности фрегевских работ. К примерно тому же времени относится и переписка Фреге с крупными итальянскими математиками — Джузеппе Пеано (с ним он полемизировал в ряде своих работ) и Морицем Пашем.

Но подлинное признание пришло из Англии. Переломным событием здесь явилось знаменитое ныне письмо Бертрана Рассела от 16 июня 1902 г., содержавшее сообщение о противоречии, обнаруженном им в первом томе «Основных законов арифметики»; письмо оканчивалось высокой оценкой вклада Фреге в логику и выражением глубокого к нему уважения. Однако даже до Рассела вся важность фрегевских логических работ дошла лишь со временем. В «Автобиографии» Рассел пишет, что поначалу он не решался подступиться к «Begriffsschrift», хотя и чувствовал — тут как раз то, что ему нужно; но, по его признанию, он по-настоящему не понимал эту книгу — до тех пор, пока самостоятельно не открыл большую часть того, что в ней было[129]. Публикуя в 1903 г. труд «Основания математики»[130], он посвятил фрегевским открытиям специальное приложение. Начавшаяся в 1902 г. переписка Рассела с Фреге длилась целое десятилетие.

Для утверждения имени Фреге в математической логике два события были особенно значимы: оценка его вклада, данная авторами «Principia mathematica» в предисловии к первому тому своего труда, и подробное изложение фрегевской логико-математической концепции, предпринятое Филиппом Жорданом. Уайтхед и Рассел писали, что своими решениями логико-аналитических вопросов они прежде всего обязаны Фреге. «Там, где мы от него отклоняемся, это по большей части происходит от того, что, как показывают противоречия [в системе Фреге], в его допущения вкралась ошибка (которой, впрочем, не избежали все прежние и современные логики); но без обнаружения этого противоречия было бы невозможно открытие

[129] *Russell B.* The Autobiography. The Early Years: 1872 — World War I. N.Y., 1967, p. 83. При дальнейших ссылках: ***Russell* — Autobiography.**

[130] *Russell B.* The Principles of Mathematics, Cambridge, 1903.

этой ошибки»[131]. Что касается Ф. Жордана, то он опубликовал в авторитетном математическом журнале серию статей о новейшем развитии логики и оснований математики и в ней посвятил Фреге отдельную главу[132].

Примечательно, что два выдающихся философа-логика XX в. — Рудольф Карнап и Людвиг Витгенштейн были в каком-то смысле учениками Фреге. Карнап целых три семестра слушал в Иене лекции Фреге («Begriffsschrift I» — в зимнем семестре 1910/11 г., «Begriffsschrift II» — в летнем семестре 1913 г., «Логика в математике» — в летнем семестре 1914 г.) и записывал их[133]. Витгенштейн в период 1911—1913 гг. трижды приезжал к Фреге и состоял с ним в переписке[134]. Логико-философские взгляды обоих мыслителей во многом формировались под влиянием идей Фреге — и в результате отталкивания от них, — о чем свидетельствуют работы этих философских логиков, в частности «Логико-философский трактат» Витгенштейна (1921) и «Значение и необходимость» Карнапа (1947)[135]. В обоих случаях мы находим, что многое в их проблематике — и предлагаемых решениях — восходит к Фреге. Так, вступая в «Трактате» в полемику с Фреге, Витгенштейн вместе с тем говорит, что «великолепные труды» Фреге[136] в значительной мере стимулировали его мысль.

Признание, однако, пришло не просто слишком поздно — Фреге было уже за пятьдесят, — оно было окрашено в трагические тона. Приведем в этой связи следующие слова Лотара Крайзера: «Когда «Begriffsschrift» было трудом, прокладывавшем новые пути, этот труд не был понят; когда же его поняли, новые пути были уже проложены»[137]. Горечь запоздалого признания соединилась для Фреге с обнаружением противоречивости его грандиозной логико-арифметической конструкции. Это была трудность, которую он так и не смог преодолеть. Он все искал и искал решение возникшей проблемы — а математическая логика устремилась уже дальше: авторы PM предлагали теорию типов, Гильберт развернул программу «финитизма», а Брауэр и Герман Вейль пошли путем математического интуиционизма. Фреге же все пытался найти решение, отвечавшее его философским воззрениям...

---

131 *Whitehead A. N., Russell B.* Principia mathematica, vol. I. Cambridge (Engl.), 1910, p. VIII. В дальнейшем при ссылках — **PM**.

132 *Jourdain P.E.B.* The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics//The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, v. 41 (1910), v. 43 (1912), v. 44 (1913); в дальнейшем при ссылках: ***Jourdain***. Глава о Фреге помещена в томе 43; она перепечатана в виде приложения в ***BW***, с. 275—301.

133 Как мы уже отмечали, записи первых двух лекционных курсов ныне опубликованы Готфридом Габриелем, который предпослал им обстоятельную вступительную статью и сопроводил эту публикацию своими комментариями. См. *Carnap* — Mitschrift. Предполагается публикация и записи фрегевского курса «Logik in der Mathematik».

134 Переписка эта относится к 1913—1919 гг. Она не сохранилась, и в Briefwechsel мы находим в лучшем случае краткие сообщения издателей о содержании писем и почтовых открыток, которыми обменивались Фреге и Витгенштейн; эти сообщения опираются в основном на запись, сделанную Г. Шольцем, который в предвоенные годы готовил издание манускриптов и переписки Фреге. О судьбе архива Фреге мы расскажем особо.

135 Эти труды доступны для русского читателя — «Трактат» Витгенштейна был впервые издан в 1958 г. (М.: Изд-во иностр. лит-ры); в новом переводе выпущен в книге: *Витгенштейн Л.* Философские работы. М., 1994. Ч. I; упомянутая нами книга Карнапа увидела свет в 1959 г. (М.: Изд-во иностр. лит-ры).

136 И, добавляет он, работы моего друга г-на Бертрана Рассела. См.: *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. Предисловие//Витгенштейн Л. Философские работы (ч. I). М.: Гнозис, 1994. С. 3 (при последующих ссылках: ***Витгенштейн***).

137 *Kreiser*, 1973. S. VIII.

Эти слова из песни великого русского барда Булата Окуджавы как нельзя лучше характеризуют последние два десятилетия жизни Фреге: перед его умственным взором проходило все, что было сделано им в науке. При этом парадоксальным образом он считал своей заслугой отнюдь не то, что будут связывать с его именем последующие поколения логиков и математиков.

Начало XX в. явилось своего рода рубежом в жизни Фреге: с этих пор мы наблюдаем у него определенный творческий спад. Здесь особенно значим период 1902–1906 гг. В 1902 г. обнаружилась противоречивость фрегевской системы обоснования арифметики. В 1904 г. скончалась его жена, а в следующем году умер Аббе; и с его смертью, как мы знаем, сразу же обнаружилось господствовавшее в Иене негативное отношение к Фреге. В результате он испытал определенный душевный кризис, и здоровье его пошатнулось. Но расскажем все по порядку.

Крушение выстраданного замысла

В 1902 г. завершилось печатание второго тома главного труда Фреге — труда, который означал для его автора: поставленная им задача полностью решена — арифметика (а значит, и базирующийся на ней математический анализ) обоснована средствами чистой логики. И тут выяснилось, что его молодой английский коллега — Бертран Рассел (он был на 20 лет моложе Фреге) обнаружил в его системе антиномию, тем самым поставив под сомнение всю логико-математическую конструкцию иенского мыслителя.

Письмо Рассела, излагающее эту антиномию, — один из важнейших документов в истории науки, и мы позволим себе привести здесь перевод его наиболее важной части:

«Фрайдис-Хилл. Хэслмир

16 июня 1902 года

Глубокоуважаемый господин коллега!

Уже полтора года, как я познакомился с Вашими «Основными законами арифметики», но только теперь мне удалось найти время для того, чтобы осуществить свое намерение и тщательно изучить Ваши работы. Я обнаружил, что полностью согласен с Вами во всех главных вопросах, в частности, в том, что Вы полностью отвергаете в логике любые психологические моменты, а также в Вашей высокой оценке записи в понятиях [einer Begriffsschrift] для оснований математики и формальной логики, которые, впрочем, вряд ли можно разделить. Во многих отдельных вопросах я нахожу у Вас анализ, различения и дефиниции, которые тщетно было бы искать у других логиков. В частности, в том, что касается функции (параграф 9 Вашего «Исчисления понятий»), я самостоятельно пришел к взглядам, совпадающим с Вашими даже в деталях. Только в одном пункте я встретился с трудностью. Вы утверждаете (с. 17), что функция может быть неопределенным элементом (то есть играть роль функциональной переменной. — *Б.Б.*). Я тоже раньше так думал, но сейчас этот взгляд вызывает у меня сомнение из-за следующего противоречия. Пусть *w* есть предикат «быть предикатом, который не приложим к самому себе». Приложим ли предикат *w* к самому себе? Из любого ответа на этот вопрос вытекает его противоположность. Поэтому мы должны заключить, что *w* не есть предикат. Точно так же не существует класса (как целостного образования) тех классов, которые — как целостные образования — не содержат самих себя. Отсюда я заключаю, что при определенных условиях понятию класса не соответствует чего-либо целостного.

Строгое использование логики в фундаментальных вопросах — там, где бессильны формулы, — только начинается; в Ваших работах я нахожу лучшее из того, что мне на сегодня известно, поэтому я позволю себе выразить Вам глубокое уважение <...>.

С поклоном, преисполненный глубочайшего уважения

преданный Вам
Бертран Рассел»[138].

Письмо Рассела произвело на Фреге сильнейшее впечатление. В Послесловии ко второму тому «Основных законов арифметики», спешно написанном в связи с обнаруженным противоречием, Фреге говорит: «Вряд ли есть что-нибудь более нежелательное для автора научного произведения, чем обнаружение по завершении его работы, что одна из основ воздвигнутого им здания оказалась пошатнувшейся. — В такое положение я попал, получив письмо от господина Бертрана Рассела, когда печатание этого тома близилось к концу»[139].

Причину своей неудачи Фреге усматривал в том, что он опирался на предположение, согласно которому у всякого понятия есть объем, который может быть выделен с помощью «принципа абстракции». При этом, как мы знаем, он понимал объем как постоянный, строго фиксированный предмет, не содержащий в себе никакой неопределенности. «Еще и теперь, — говорит Фреге в «Послесловии», — я не вижу, как можно научно обосновать арифметику, трактовать числа как логические предметы и вводить их таким образом в рассмотрение, если невозможно — при определенных условиях хотя бы — переходить от понятия к его объему. Могу ли я всегда говорить об объеме понятия, о классе? А если не могу, то как можно отличить эти исключительные случаи? Можно ли из того, что объем какого-нибудь понятия совпадает с объемом какого-нибудь другого, заключать всегда, что всякий предмет, подпадающий под первое понятие, подпадает и под второе? Эти вопросы возникают у меня в результате сообщения господина Рассела. <...> Здесь речь идет не специально о моем способе обоснования арифметики, но вообще о возможности ее логического обоснования»[140].

В упомянутом «Послесловии» Фреге предложил некий путь преодоления открытой Расселом трудности. Но, как показали последующие исследования, намеченное им решение расселовской антиномии, вошедшей в историю науки под названием *парадокса Рассела*, не проходит[141]. Продолжая годы раздумывать над возникшей проблемой, Фреге так и не нашел выхода из создавшегося положения. Это объяснялось родством его воззрений с «наивной» теоретико-множественной установкой, господствовавшей в конце XIX в., в сочетании с убеждением, «будто логика имеет право притязать на неограниченность области действия своих законов». Такое понимание законов логики должно было влечь, по Фреге, непротиворечивость основанной на них формальной системы арифметики: непротиворечивость

---

[138] Письмо Рассела было написано по-немецки. См. Briefwechsel, S. 211–212. Данная антиномия в то же время была открыта — в рамках теоретико-множественных представлений — Эрнстом Цермело (Гёттинген), но не была опубликована. См., например: *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966. С. 16.

[139] Grundgesetze I, S. 253.

[140] Ibidem.

[141] Это было показано Ст. Лесневским в 1938 г. (его выкладки представлены в кн. *Kutschera*. S. 133–134), опубликованы же они были только в 1949 г.; их обобщил П. Гич (P.T. Geach) в 1956 г. Независимо от этих исследователей то же самое показал В.О. Куайн (*Quine W.V.* On Frege's way out. — Mind n.s., v. 64, 1955, p. 145–159); на русском языке статья Куайна прореферирована автором этих строк в Реферативном журнале «Математика».

была для него естественным следствием содержательной истинности логики; эта истинность, с его точки зрения, определялась содержательной истинностью логических «основных законов» и безупречностью сохраняющих истинность правил вывода, справедливость которых Фреге показывал, используя прием сведения к нелепости.

И вот все это пошатнулось. Под вопросом оказался сам «универсум Фреге», охватывающий *все предметы* (в ~~его понимании~~ — как то, что не есть функция), — предметы любого уровня абстрактности. Последующее развитие логики показало неосуществимость подобного подхода. Но иенский мыслитель продолжал считать незыблемыми императивы абсолютности и всеобщности логических законов; продолжал придерживаться концепции всеохватывающего характера той предметной области, с которой логика будто бы обязана иметь дело. Примечательно, что, как свидетельствует Р. Карнап, слушавший Фреге в 1910–1914 гг., последний в читавшихся им лекциях избегал какой-либо критики своих прежних взглядов, излагая лишь тот логический материал, который был заведомо непротиворечив. «Я не помню, — вспоминал Карнап, — чтобы он [Фреге] когда-либо обсуждал проблему, возникшую в результате этой антиномии [парадокса Рассела], и вопрос о возможности такой модификации своей системы, которая исключала бы ее»[142].

Последние годы

Поддержки деятельности Фреге в Университете Иена со стороны Эрнста Аббе было достаточно, чтобы иенский логик получил назначение на должность ординарного гонорар ~~профессора — должность, финансируемую,~~ однако, не государством, а «Фондом Карла Цейса». Тем не менее оценка значения Фреге для Иены становилась в глазах университетского руководства и некоторых его коллег все менее позитивной. Вспомним: иенский профессор Томэ — не очень последовательно, если учесть его прежние положительные отзывы о Фреге, — в одной официальной бумаге (она относилась к 1906 г.) утверждал, что активность Фреге в последние годы пошла на убыль, и связывал это со склонностью последнего к «гиперкритике»[143]. Резкость оценок, которые давал Фреге взглядам своих оппонентов, вряд ли создавала ~~ему~~ друзей.

Как мы уже говорили, со смертью Аббе в 1905 г. отрицательное отношение к Фреге сразу же проявилось. В 1906 ~~г.~~ ~~универ~~ситет праздновал свое 350-летие, и в докладной записке «его светлости попечителю» (durchlauchtiger Erhalter) Университета Иена, датированном 3 июля названного года, куратор университета — фон Эггелинг (друживший с Аббе и поэтому, как можно полагать, поддерживавший инициативы последнего в отношении Фреге) дал о его деятельности негативное заключение: он писал, что «гонорар-~~профессор~~ надворный советник д-р Фреге никогда (!) не был хорошим педагогом, а домашнее горе и склонность к гиперкритике препятствуют его преподавательской деятельности»[144]. Фон Эггелинг отклонил предложение о чествовании Фреге в связи с его 60-летием, сообщая, что не может представить его «ни к какой награде, так как его преподавательская деятельность имеет второстепенное значение и не приносит университету особой пользы»[145]. Отраженная в этом документе репутация Фреге была настолько стойкой, что даже спустя четыре года после его отставки очередной куратор университета писал о нем в одном официальном

---

[142] *Carnap*—Autobiography, p. 4 f.

[143] *Stelzner*, S. 66.

[144] *Kreiser*, 1883. S. 338; автор этой бумаги имел в виду кончину жены Фреге, что же касается пассажа о фрегевской гиперкритичности, то вызван он был дискуссией между Фреге и Томэ, в которой симпатии университетского большинства были на стороне последнего.

[145] *Stelzner*, S. 66.

документе, направленном в Министерство народного образования Тюрингии: «Как преподаватель (Dozent) Фреге не принимался в расчет. У него всегда было мало слушателей. Лекции его неоднократно срывались, так как на них не записывалось ни одного слушателя»[146].

Сложившийся в Иене взгляд на Фреге закрывал для него возможность назначения на должность ординарного профессора и, значит, получения собственной кафедры. Так, поддерживаемый Аббе и лишь некоторыми своими коллегами, Фреге всю свою творческую жизнь создавал новую логику и преподавал математические дисциплины в Иене, не получая признания со стороны университета и правительства. Ни особых титулов[147], ни орденов или иных знаков отличия, да вдобавок весьма скромное материальное содержание, смягчаемое только субсидиями «Фонда Карла Цейса», — вот что выпало на его долю.

Не будучи ординарным профессором, Фреге, как мы знаем, не мог иметь сотрудников, и у него не было учеников, ~~которые могли бы стать~~ продолжателями его дела. Это обрекало его на научную изоляцию. У него не было даже ассистента, так как согласно университетскому уставу 1907 г. выделение для профессора ставки ассистента зависело от благожелательного запроса университета в правительство, а таковому воспрепятствовал его коллега Томэ.

Фреге не воздали должное в Иене даже тогда, когда его идеи нашли отклик, а затем и признание за рубежом, когда его научными корреспондентами стали Пеано, Гильберт, Рассел, Кутюра, Жордан. Впрочем, признание пришло слишком поздно, а в военные годы оно вообще немного значило.

Тем не менее Фреге продолжал свои исследования. Теперь он обратился к основаниям геометрии и в 1906 г. опубликовал серию статей по ~~этому вопросу~~[148]. ~~Он возобно~~вил (начатую в предшествующие годы) полемику с Томэ, выступая со статьей «Новое доказательство невозможности формальной арифметики по Томэ»[149]. Он продолжал читать лекции по логике и философии математики, и, как мы уже говорили, его слушателем становится Р. Карнап. Несколько раз к нему приезжал Л. Витгенштейн.

В свой основной творческий период, когда Фреге разрабатывал свою систему, он деятельно общался с университетскими коллегами. И все же многие его не понимали. По отзыву Э. Гуссерля[150], Фреге слыл ученым с острым умом, но не столько математиком, сколько философом-чудаком (Sonderling), имеющим, однако, плодотворные идеи. Но среди его коллег ~~были и такие~~, ~~которые~~ ценили строго логичный стиль его лекций и понимали, хотя только отчасти, значение его трудов. Одним из них был философ Рудольф Эйкен (Eucken), труд которого ~~по~~ истории философской терминологии вышел в том же году, что и «Исчисление понятий» Фреге; Эйкен разделял фрегевское отвержение субъективизма и психологизма в науке, Фреге же привлекали у Эйкена его философско-лингвистические взгляды[151]. Другим был младший коллега Фреге — философ П.Ф. Линке, который 48 лет пре-

[146] *Kreiser*, 1883. S. 339.

[147] Полученное им звание надворного советника было связано с занимаемой им должностью и выслугой лет. Для сравнения: профессор К. Снелл имел более высокое звание тайного советника.

[148] Über die Grundlagen der Geometrie//Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. XV, 1906; при дальнейших ссылках: ***Frege* — Geometrie**. Эти статьи Фреге вошли в Kleine Schriften, S. 262—272.

[149] В том же издании, том XV; см. также Kleine Schriften, S. 329—333.

[150] *Veraart A.* Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestandes der nachgelassenen Schriften Freges//Studien zu Frege I. Hrsg. von M. Schirn. Stuttgart — Bad Cannstatt, 1976. S. 164 (в последующем при ссылках: ***Veraart***); этот отзыв содержался в письме Гуссерля Г. Шольцу (1936).

[151] См.: *Dathe U.* Gottlob Frege ~~und~~ Rudolf Eucken — Gesprachspartner in der Herausbildung der modernen Logik//History and Philosophy of Logic, ~~v.~~ 16, 1995, S. 245—255. В 1898 г. Эйкен стал Нобелевским лауреатом по литературе.

подавал в Иене и неустанно пропагандировал его взгляды, в частности в условиях ГДР (умер Линке в 1955 г.)[152].

Со временем, однако, Фреге, видимо, все более замыкался в себе. Таким, во всяком случае, он запомнился Р. Карнапу — студенту Иены и Л. Витгенштейну, посещавшему Фреге перед войной. Карнап, как мы уже говорили, вспоминал, что на лекциях по «Begriffsschrift II» слушатели видели по большей части лишь спину лектора, чертившего на доске свои идеограммы, сопровождая их объяснениями[153]. Карнап пробыл в Иене до лета 1919 г. и все не решался еще раз навестить Фреге: «ведь он был так замкнут», — вспоминал он. Такое же впечатление произвел Фреге и на Витгенштейна — иенский мыслитель не желал ни о чем говорить, кроме логики и математики. Но за внешним обликом замкнутого человека скрывалась бурная натура, находившая выход своим чувствам в полемических научных публикациях и в полной мере раскрывшаяся в страстном «Дневнике» 1925 г., запечатлевшем его морально-политические взгляды.

Как уже говорилось, супруги Фреге не имели детей, и в 1903 г профессор Готтлоб Фреге усыновил только что родившегося сына своей экономки — Альфреда Фреге (настоящая фамилия последнего была Фукс — Fuchs), который, получив высшее образование, стал дипломированным инженером. В 1918 г. Готтлоб Фреге вышел в отставку и вернулся на родную землю — в Мекленбург. Примечательно, что сразу же после ухода его из университета должность гонорар-профессора, финансируемая «Фондом Карла Цейса», была ликвидирована.

В конце жизни Фреге решил изложить те свои логические идеи, которые он считал главными. Так появились фрегевские «Логические исследования», перевод которых помещен в этой книге. Две их части — «Мысль» и «Отрицание» вышли в год его отставки, третья часть, посвященная структуре мысли, была опубликована в 1923 г.; четвертая же часть — «Логическая всеобщность» (она тоже представлена в данной книге) осталась незаконченной и увидела свет лишь в составе его архивного «Наследия»[154].

Хотя Фреге много лет провел в Иене, он никогда не забывал родных мест. Как отмечают его биографы, до последних дней он оставался верен записи, сделанной им в 1869 г. при зачислении в университет: «Родина: Мекленбург». Многие годы в летние каникулы он пешком отправлялся из Иены — «домой», на мекленбургскую землю. Естественно, что после отставки он вернулся туда, где прошли его детство и юность. Он поселился в городке Бад Клайнен (Bad Kleinen), который находился вблизи Висмара — на расстоянии всего нескольких часов пешей прогулки.

В последние годы Фреге болел, о чем свидетельствует, например, его письмо философу Рихарду Хёнигсвальду (Hönigswald), относящееся к маю 1925 г.[155]: Фреге пишет о своем болезненном состоянии и ослаблении памяти, что затрудняет его ответ корреспонденту. И в самом деле, письмо писалось по частям целый месяц.

---

[152] *Dathe U.* Der «Geist» Freges in Jena — Paul Ferdinand Linke. Ein Beitrag zur Jenaer Universitätsgeschichte//*Gabriel, Dathe.* S. 227—244.

[153] *Carnap* — Autobiography, p. 4—6. Согласно документам Иенского университета (Tagebucheintragungen), Карнап слушал лекции Фреге также по курсам «Аналитическая механика I» и «Аналитическая механика II» (1911—1913), но их записи не сохранились. В Иене Карнап защитил диссертацию, которая в 1922 г. вышла в Берлине как дополнительный 56-й том издания «Kant-Studien»; книга Карнапа называлась *Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre* («Пространство. К вопросу об учении о науке»).

[154] О фрегевском «подведении итогов» мы скажем ниже. См. также наше Послесловие в конце этой книги.

[155] Briefwechsel, S. 85—87.

Несмотря на болезнь Фреге решил построить для себя в небольшом поселке вблизи Ростока новый дом. В разгар приготовлений к переезду на новое место он скончался от болезни желудка. Тело его было перевезено в родной Висмар, и он был тихо погребен на городском кладбище[156].

Уединение в Мекленбурге, конечно, не способствовало распространению его идей. Тем не менее нельзя сказать, что научный мир его совсем забыл. Фреге избрали членом Германского философского общества (Die Deutsche Philosophische Gesellschaft)[157], о нем неизменно упоминал Гильберт в своих докладах и статьях на философско-математические темы. И все же кончина Фреге прошла незамеченной для научного мира. Во всяком случае, насколько нам известно, посвященного ему некролога не появилось ни в одном издании.

Подведение итогов

В 1906 г. в отрывочной записи, которую сам Фреге озаглавил «Что я могу считать результатом своей [научной] работы?», он отмечает: «почти все» в этом результате связано с записью в понятиях, с трактовкой понятий и отношений как функций, с введением «штриха суждения», позволяющего отделить от предиката его «утверждающую силу», с развитым им пониманием всеобщности (то есть на современном языке — квантора общности) и, наконец, с различением смысла и значения. Получается, что Фреге не вполне понимал масштаб собственного вклада в науку — того, что созданная им новая математическая логика есть, прежде всего, логика обоснования математики, т.е. то, что впоследствии стали называть *теорией математического доказательства* или *метаматематикой*. Причина этого, как представляется, состояла в том, что перед его научным взором все время стоял парадокс Рассела; в упомянутой краткой записи это получило отражение в словах: «объем понятия, или класс, не является для меня исходным (das Erste)»[158]. Это означало возврат Фреге к определенным основоположениям труда 1879 г.

В послании к Филиппу Жордану, который прислал Фреге на заключение подготовленный им текст главы «Готтлоб Фреге», предназначенный для публикации в составе его обширной работы по новейшему развитию математической логики и оснований математики, — послании, содержавшем соображения иенского логика по поводу отдельных мест текста Жордана, — Фреге писал: «При моем способе [рассмотрения], когда понятия трактуются как функции, обсуждать основные вопросы логики можно, ничего не говоря ~~о классах~~, как я и поступил в моем труде “Исчисление понятий”»[159]. Фреге приходит теперь к убеждению, что трудности, связанные с использованием классов, отпадут, если иметь дело только с предметами, понятиями и отношениями, а это возможно в основополагающей части логики; классы же ~~это нечто производное~~, в то время как понятия — как он их понимал — есть нечто первичное.

Фреге теперь считает, что изложение логики в труде 1879 г. предпочтительнее того, какое им было дано, когда он развертывал логическую систему своих «Основных законов арифметики». Так, в письме Гуго Динглеру от 4 июля 1917 г. он пишет,

---

[156] *Stelzner*, S. 8.

[157] См. данные об адресованных Фреге письмах одного из основателей этого общества — философа Бруно Бауха (Bauch), профессора в Иене с 1911 г.; письма эти относятся к 1918-му и последующим годам. Баух содействовал публикации фрегевских «Логических исследований» (см. Nachgelassene Schriften, S. 8–9).

[158] Nachgelassene Schriften, S. 200.

[159] Briefwechsel, S. 121.

что его понятийная запись «сейчас уже несколько устарела и не вполне соответствует моим [нынешним] взглядам», *поясняя, что использовавшееся им в «Исчислении понятий»* обозначение того, что *y* принадлежит числовой последовательности, начинающейся с *x*, предпочтительнее того способа, который он использовал впоследствии; а в этом «другом способе обозначения», который применялся им в томе I «Основных законов», фигурирует оператор введения объема понятия, то есть класса.

Вообще с Г. Динглером (1881–1954), философом, обладавшим университетской подготовкой по ~~математике и физике, Фреге в 1917~~–1920 гг. вел оживленную переписку. В адресованном Динглеру письме от 17 ноября 1918 г. Фреге высказал заветное: «Я стараюсь собрать урожай всей моей жизни, чтобы он не пропал»[160]. Фреге имел в виду упомянутые выше «Логические исследования». Публикатор сделанных Р. Карнапом записей лекций Фреге по «Begriffsschrift I» и «Begriffsschrift II» — Г. Габриель во введении редактора ставит вопрос, каковы те части формальной логики — фрегевской записи в понятиях, — которые следует отнести к этому «урожаю», и приходит к заключению, что излагаемая Фреге в его «Логических исследованиях», а также в его лекциях того времени «содержательная логика» представляла собой философский анализ основополагающих логических категорий[161].

Сделанный Карнапом конспект лекций Фреге ценен тем, что фиксирует те выводы, которые последний сделал относительно собственно логики после открытия парадокса Рассела. Хотя изложение исчисления понятий в обоих лекционных курсах[162] соответствует структуре системы, представленной в «Основных законах арифметики», оно таково, что в нем тщательно обходится все, что прямо или косвенно влечет противоречие. Следует согласиться с Габриелем, когда он пишет, что представленный в записи Карнапа «текст “Begriffsschrift I”, дополненный определенными частями текста “Begriffsschrift II”, устанавливает тот состав учения, на который Фреге после крушения своей логицистской программы смотрел как на результат своей работы в области формальной логики»[163]. Состав этот соответствует тезису, высказанному Фреге еще в 1906 г. в рукописи, которая касалась статьи А. Шёнфлиса о теоретико-множественных парадоксах[164]: Фреге утверждал, что его логическое исчисление «в главном» (in der Hauptsache) не зависит от потрясений теории множеств[165]. Это полностью соответствовало тому, что он писал в упомянутых выше замечаниях относительно материала Ф. Жордана.

Если в своих лекционных курсах Фреге излагает новую версию своего логического исчисления, как бы возвращаясь к развертыванию логики, представленном в его труде 1879 г., то в публикациях, которые объединены заголовком «Логические исследования», он излагает свою «содержательную логику», то есть логику, в которой «понятийная запись» не используется. Можно лишь догадываться, какой вид приняло бы фрегевское логическое исчисление, если бы он пошел далее и развернул формализованную часть своей «содержательной логики». Как выглядело бы это новое исчисление? Следует согласиться с публикатором карнаповских конспек-

---

[160] Briefwechsel, S. 45.

[161] См. *Carnap* — Mitschrift, S. VI. В дальнейшем при ссылках на Введение Г. Габриеля к этой публикации: ***Gabriel*—Einleitung**.

[162] Кроме опубликованных Г. Габриелем конспектов лекций Фреге по разработанному им логическому исчислению, Карнап записал еще и курс «Логика в математике» (летний семестр 1914 г.). Этот свой курс Фреге успел изложить в виде статьи с тем же названием, и она сохранилась в его архиве; опубликована в составе Nachgelassene Schriften.

[163] *Gabriel* — Einleitung, S. VI.

[164] *Schoenflies A.* Die logischen Paradoxien der Mengenlehre//Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung. Bd. XV, Jahrgang 1906.

[165] Nachgelassene Schriften, S. 191.

тов[166], что в нем были бы устранены все «основные законы» и правила вывода, которые связаны с «пробегами значений». Но, согласно воспоминаниям Карнапа, Фреге в конце курса «Begriffsschrift I» высказал взгляд, что новая логика может послужить «построению всей математики»[167]. Это, по-видимому, не означало возвращения к логицистской программе, тем более что Фреге с самого начала не распространял свой «логицистский» подход на геометрию: просто он был убежден в том, что логика необходима при развертывании любых математических теорий.

Архив Фреге и его судьба. «Наследие» иенского логика — свидетельство его неустанных исканий

После Фреге осталось большое научное наследие в виде статей, которым в свое время было отказано в публикации, неоконченных работ, а также обширной переписке научного характера. Судьба фрегевского архива — мы будем называть главную, научную часть этого архива «Наследием» Фреге — подробно описана в статье «История «Наследия» Фреге и принципы его издания», написанной Г. Гермесом, Ф. Камбартелем и Ф. Каульбахом и помещенной в Nachgelassene Schriften. Разыскания последних лет, однако, во многом по-новому рисуют историю того, что произошло с рукописями великого логика.

Фреге придавал большое значение своим манускриптам. В записке-завещании, адресованном своему приемному сыну, он писал[168]:

«Дорогой Альфред!

Не пренебрегай моими рукописями. Если не все в них золото, то золото там все же есть. Я думаю, придет время, и многое в них будет оценено гораздо выше, чем теперь. Смотри, чтобы ничто из них не потерялось.

Твой любящий отец».

И далее следовала приписка: «В них я оставляю тебе значительную часть самого себя». Фреге словно предчувствовал, что эти манускрипты может постигнуть та же несчастливая судьба, что и их создателя.

Альфреду Фреге удалось сохранить архив отца, во всяком случае его бóльшую часть. В 1935 г. сын Фреге передал его архив (не полностью) известному немецкому логику и историку логики Г. Шольцу, который вместе с сотрудниками начал готовить издание трудов Фреге, включая и материалы из его рукописного наследия, отобрав из них то, что, по его мнению, представляло наибольшую ценность. Вторая мировая война прервала эту работу. Опасаясь утраты рукописей в суровые военные годы, Г. Шольц доверил их хранение библиотеке Мюнстерского университета. Долгие годы считалось, что 25 марта 1945 г., при бомбардировке Мюнстера английской авиацией, они погибли. Эта удручающая картина усугублялась тем, что Альфред Фреге, у которого могли сохраниться некоторые рукописные материалы отца, не переданные в свое время Шольцу, в июне 1944 г. пал в боях под Парижем; в доме же Фреге в конце войны побывали советские солдаты...

Однако предпринятое, начиная с 1996 г., изучение судьбы фрегевского рукописного наследия поставило под сомнение устоявшийся взгляд. Известно, что часть архивных материалов Фреге должна была войти в подготавливавшееся Шольцем

---

[166] *Gabriel* — Einleitung, S. VII.

[167] *Carnap*— Autobiography, S. 5.

[168] *Hermes H., Kambartel F., Kaulbach F.* Geschichte des Frege-Nachasses und Grundsätze für seine Edition//Nachgelassene Schriften. S. XXXIV.

издание «Небольших работ» (Kleine Schriften) иенского логика. Согласно выдвинутой гипотезе[169], именно эта часть могла погибнуть во время войны. Что касается остальной части (а может быть, и всего фрегевского архива), то она могла сохраниться, если была эвакуирована из Мюнстера вместе с прочим рукописным фондом университетской библиотеки. Тогда отыскание полного состава наследия Фреге может оказаться только вопросом времени.

Как бы то ни было, сохранились машинописные копии тех текстов Фреге, которые ранее готовились к печати; кроме того, некоторые материалы имелись в фотокопиях и кое-что из оригиналов было найдено. Имеется и каталог первоначального содержания архива *Veraart*), и список литературы, которую Фреге заказывал в библиотеке Иенского университета (опубликован Л. Крайзером).

Работа по изданию архивного научного наследия Фреге возобновилась после войны и затянулась на годы. В этой работе участвовали Г. Шольц (умер в 1958 г.), английский стажер Мюнстерского университета М. Даммет (впоследствии автор ряда трудов о Фреге), Г. Габриель и др.; им оказывал помощь лейпцигский логик Лотар Крейзер. Проект издания архива Фреге получил поддержку Германского исследовательского общества (Deutsche Forschungsgesellschaft). В 1969 г. в Гамбурге в издательстве Феликса Майнера вышел первый том архивного «Наследия» Фреге; второй том, содержавший переписку иенского логика, увидел свет в 1976 г.; огромный труд по изданию этого двухтомника взяли на себя, помимо Гермеса и Габриеля, Фридрих Камбартель, Фридрих Каульбах, Кристиан Тиль, Альберт Фераарт[170]. На основе первого тома фрегевского наследия в том же издательстве была опубликована книга: Г. Фреге. «Работы по логике и философии языка. Из архивного наследия»[171]. Она представляет собой сборник избранных работ Фреге, который преследовал цель предоставить читателю материал для изучения семантико-логических взглядов иенского мыслителя. В 1973 г. Л. Крайзер на базе этих изданий выпустил книгу: Г. Фреге. «Труды по логике. Из наследия»[172]: в ней текстам Фреге было предпослано обширное Введение, рассказывающее об эволюции взглядов Фреге на логику и основания математики. Наконец, в 1983 г. вышло второе, пересмотренное и дополненное издание тома I «Наследия», в котором были помещены подготовленные Лотаром Крайзером фрегевские материалы, сохранившиеся в архиве Университета Иена. Здесь мы кратко отметим то новое, что вносит в наши представления о Фреге его архив.

В текстах «Наследия» обильно представлена логико-семантическая и философско-математическая тематика. Фреге занимают, в частности, вопросы соотношения языковых форм и логических законов, отношение между его логическим исчислением и

---

[169] *Wehmeier K. F., Schmidt am Busch H.-Chr.* Auf der Suche nach Freges Nachlaß//*Gabriel, Dathe.* S. 267–281.

[170] Приведем теперь полные выходные данные этого издания: *Frege G.* Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel/Herausgegeben von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Bd. I: Nachgelassene Schriften/Unter Mitwirkung von Gottfried Gabriel und Walburga Rödding bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969; Bd. II: Wissenschaftlicher Briefwechsel/Herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1976. Сведения о судьбе архива Фреге содержатся в статье Г. Гермеса, Ф. Камбартеля и Ф. Каульбаха (в ней излагается история и принципы публикации «Наследия» Фреге; она помещена в томе I); см. также: *Veraart.* S. 49–106. Представленный в этой статье взгляд на судьбу архива Фреге, как отмечено выше, поставлен под сомнение расследованием К.Ф. Вемайера и Г.-К. Шмидта-ам-Буша.

[171] *Frege G.* Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß/Herausgegeben von G. Gabriel. Hamburg, 1971.

[172] Aus dem Nachlaß.

разговорным языком. Он продолжает свой анализ смысла и значения языковых выражений; манускрипты Фреге отчетливо документируют, что он всегда предполагает содержательную языковую основу, когда говорит об исчислении понятий и основаниях математики. В материале «[Рассуждения о смысле и значении]»[173] (1892—1895) Фреге добавил к своей теории смысла новый нюанс: различение смысла и значения, которое в прижизненно опубликованных работах проводилось только по отношению к собственным именам (дескрипциям), распространяется им теперь и на «ненасыщенные» (предикативные) выражения, в частности, на выражения понятийные.

В работах, опубликованных посмертно, четче и полнее, нежели в прижизненных публикациях, раскрывается то, как Фреге понимал *логическое*. По-видимому, это явилось следствием того, что он много раз принимался за подготовку учебного руководства по логике и соответствующие тексты сохранились в его архиве. Последнюю по времени попытку он в значительной мере реализовал в виде «Логических исследований», которые читатель может найти в настоящей книге.

Во вступительной статье (Einleitung) к первому тому «Наследия» Фреге, принадлежащей его редакторам Г. Гермесу, Ф. Камбартелю и Ф. Каульбаху, обращается внимание на то, что между фрегевским пониманием логики и основными понятиями его логической системы — такими, как *предмет, понятие, импликация, отрицание, логическая всеобщность*, — которые первоначально приобретаются путем анализа фактического вида предложений обычного языка, обнаруживается известный разрыв. Не ясно, как можно уяснить эти логические элементы, исходя из того, что суждения как носители истины возникают из актов утверждения утвердительно-повествовательных предложений. А отсюда не ясно, как можно обосновать арифметику как продолжение логики, т.е. осуществить кардинальный замысел всего логического творения Фреге. На склоне лет он много размышлял об этом. Вопрос, как могут быть оправданы в качестве «логических» те понятия (и прежде всего важнейшее для всей фрегевской конструкции понятие «объем понятия»), на которых основывается его дефиниция «численности», или кардинального числа, постоянно стоял перед ним. В ходе этих размышлений Фреге неоднократно возвращался к мотиву, который присутствует и в его прижизненных публикациях, — к критике обычного языка, в котором он видел источник заблуждений и «загрязнения» чисто логических понятий. В манускрипте «Познавательные источники математики и математического естествознания» (1924—1925) он приходит к неутешительному выводу: «В своей попытке логического обоснования чисел я сам оказался жертвой подобного заблуждения, когда вознамерился рассматривать числа как множества»[174].

Мы уже говорили о том, какую роковую роль в творческой жизни Фреге сыграл 1902 год. После обнаружения парадокса Рассела он два семестра не читал лекций по математической логике, а потом, возобновив их, объявлял курсы по записи в понятиях и основаниям геометрии, но не по основаниям арифметики. До конца дней пытался он найти способ преодоления трудности в обосновании этого исходного раздела математики, ведущего к математическому анализу. В конце концов все надежды он стал возлагать на геометрию — идя от нее, он теперь пытался обосновать и арифметику, и всю математику.

Таким образом, Фреге решительно порвал со своим прежним «арифметическим логицизмом», принимая как факт, что его усилия по обоснованию арифметики средствами чистой логики окончились неудачей. В рукописи «Новая попытка обоснования арифметики» [1924/25] — *последнем* материале, помещенном в его «Наследии»,— Фреге пишет, что, поскольку ни чувственный, ни логический ис-

---

[173] Квадратные скобки указывают на то, что название этого рукописного текста Фреге было дано его публикаторами.

[174] Nachgelassene Schriften, S. 289.

точник познания в отдельности «не позволяет получить чисел, следует, по-видимому, обратиться к источнику геометрическому»[175]. Исходя из этого он намечает контуры «геометрического обоснования» учения о числе. Здесь ясно видно, что — как и в прежние годы — Фреге остается сторонником актуально-бесконечного, в чем для него реализовалась установка на объективность абстрактных объектов, установка, которую не могли поколебать все его раздумья о связи языка и мышления. Ясно видно также и то, что он по-прежнему идет своей, оригинальной дорогой, отличной от той, которой в 20-е гг. пошла целая плеяда математических логиков и специалистов по основаниям математики.

Морально-политическое завещание консерватора

В письме Гуго Динглеру, помеченном: «Бад Клайнен, 17 ноября 1918 г., Мекленбург», Фреге писал: «В это тяжелое время утешением для меня служит научная работа». «Тяжелое время» было временем революции, завершившейся отречением германского императора Вильгельма II, которое состоялось 9 ноября. Революцию эту Фреге решительно не принял. «Я занимаюсь, — писал он Динглеру,— делами политического и национально-экономического рода, например, я выдвигаю свои предложения относительно избирательного закона <...> Я разослал машинописные тексты [на эту тему] депутатам и другим господам»[176].

Мы знаем теперь, что эта акция Фреге не имела последствий[177]. Но обращенные к Динглеру слова Фреге говорили об одном: внешне замкнутого и немногословного логика обуревали сильнейшие гражданские чувства. Не чуждый политики в зрелые годы, он поддерживал национально-либеральную партию — партию правой ориентации, выступавшей за единую и сильную Германию. В 1905 г. в издании «Кто есть кто?»[178] в рубрике о партийной принадлежности он указал: «нац.-либ.». К концу же жизни — а это были годы войны и послевоенной разрухи — Фреге особенно остро переживал то, что выпало на долю его страны. Составленные им «Предложения по избирательному закону»[179] говорят об этом совершенно ясно. Согласно замыслу Фреге, личность должна была *заслужить* право быть избирателем: требуется безупречное гражданское поведение, выполнение воинского долга, наличие семьи. Проект Фреге, на современный взгляд, недемократичен[180]: женщины к выборам не допускались, не личность, а семья рассматривалась как фактор, конституирующий государство.

Избирательные предложения Фреге были вехой на пути его эволюции от (правого) либерализма к (крайнему) консерватизму. В самом конце жизни он дал последнему выход в дневниковых записях, которые велись им с 10 марта до начала мая 1924 г.

Записи Фреге — под названием «Политический дневник» — были опубликованы шесть лет тому назад[181] Г. Габриелем и В. Кинцлером; первый предпослал публикации обстоятельную вступительную статью, второй в подстрочных примечаниях прокомментировал фрегевский текст, поясняя исторические реалии того времени.

---

[175] Ibidem, S. 299.

[176] Briefwechsel, S. 44–45.

[177] Нам это известно благодаря Предисловию издателей фрегевского проекта избирательного закона (см. ниже).

[178] Wer ist's? Unsere Zeitgenossen. Zeitgenossenlexikon. Zusammengestellt und hrsg. von H. A. L. Degener. Leipzig, 1905 [8. Auflage 1922].

[179] Vorschläge für ein Wahlgesetz von Gottlob Frege/Mit einer Einleitung versehen und hrsg. von Uwe Dathe und Wolfgang Kienzler//*Gabriel, Dathe*. S. 284–313 (Предисловие издателей — с. 285–296).

[180] Впрочем, вспомним: именно веймарская демократия привела к власти в Германии Адольфа Гитлера.

[181] См. примечание 31 на с. 15.

Из «Политического дневника» Фреге лишь три записи (они были сделаны 23–25 марта), в которых говорится о понятии числа, были включены во фрегевское «Наследие»; составители мотивировали свое решение тем, что остальные дневниковые материалы носят политический характер, почему их «нельзя причислить к его [Фреге] научному наследию»[182]. Это решение встретило возражения и даже обвинение в попытке их сокрытия от научной общественности. Подобный упрек в адрес издателей «Наследия» Фреге был брошен Майклом Дамметом в его книге, посвященной философско-лингвистическим взглядам Фреге[183]. Между тем, как можно полагать, подлинные мотивы издателей «Наследия» Фреге были связаны не столько с тем, что фрегевские записи касались политики (в силу чего их будто бы нельзя отнести к *научному* наследию), сколько с тем, *какие* политические взгляды были в них отражены: перед читателем фрегевского дневника вставал образ сторонника крайне консервативных морально-политических воззрений.

Судьба дневниковых записей Фреге такова. Первоначально существовавшие в рукописи, они были перепечатаны на пишущей машине Альфредом Фреге, который озаглавил их — «Дневник. Записи профессора д-ра Готтлоба Фреге, сделанные в период от 10.3 до 9.5.1924 г.». Дело в том, что еще до войны Г. Шольц, собираясь составить жизнеописание Фреге, попросил его сына прислать дневниковые записи своего отца; изготовленная Альфредом Фреге машинопись и была в конце 30-х гг. (в 1937 или 1938 г.) передана основателю архива Фреге (рукописный подлинник не сохранился). После войны публикацию фрегевского дневника предполагалось осуществить в рамках подготавливавшейся Лотаром Крайзером (Лейпциг) биографии иенского логика — в качестве приложения к ней. Но политические события, связанные с объединением двух германских государств, затянули эту работу. Такова история рассматриваемого документа, который ныне издан и подробно прокомментирован во Введении и примечаниях публикаторов.

Во Введении указывается, в частности, что Фреге, умерший в возрасте 76 лет, под конец жизни в политическом спектре веймарской Германии симпатизировал крайне правым течениям[184]. Что касается иенского периода, то Фреге, по его собственному признанию, запечатленному в «Дневнике», причислял себя к либералам; «он ни в коем случае не был для своего времени "реакционером"», считает автор Введения к фрегевскому «Политическому дневнику» Г. Габриель[185]. Всегда настроенный монархически, Фреге страстно ненавидел социал-демократию, считая, что именно ей Германия обязана позором Версальского договора.

Во Введении к «Политическому дневнику» Фреге мы находим взвешенную оценку этого важного документа. Оценки же, подобные той, которую лапидарно дал М. Даммет, — Фреге был противником демократии, либерализма, католицизма, Франции, был антисемитом и предлагал выселить евреев из Германии[186] — представляются только внешне убедительными. В этом отношении показательна статья Экарта Менцлер-Тротта, специально посвященная политическим взглядам Фреге, как они открылись после публикации его «Дневника»[187]. Автор этой *публицистичес-*

---

[182] Nachgelassene Schriften, S. 282.

[183] *Dummett M.* Frege. Philosophy of Language. Harvard University Press. Cambridge, Mass., 1981, p. XII (предисловие автора к первому изданию этой книги, 1973). В дальнейшем при ссылках на эту книгу: ***Dummet***.

[184] *Gabriel*—Tagebuch. Einleitung, S. 1057.

[185] Ibidem.

[186] *Dummett*, p. XII.

[187] *Menzler-Trott E.* Ich wünsche die Wahrheit und nichts als die Wahrheit. Das politische Testament des deutschen Mathematikers und Logikers Gottlob Frege. Eine Lektüre seines Tagebuches vom 10.3 bis 9.5.1924//Forum, Bd. 36, Dezember 1989. S. 68–79.

кой статьи критикует Фреге, как если бы он был нашим современником. Фреге, говорит он, был противником христианско-социальных теологов, марксистов, профсоюзов, парламентаризма, республиканского строя; он ненавидел французов, его антисемитизм сочетался с клеветой (!) на социал-демократов как предателей германской морали и истории, он был преисполнен страха (!) перед равенством людей. Во всем этом усматривается такой букет реакционных взглядов, «который мы не находим ни у кого». Взгляды Фреге, при всей их эволюции, сохраняют будто бы «сентиментальное» (!) отношение к Бисмарку и милитаристам Людендорфу и Гинденбургу. «Его [Фреге] немецкий протестантский национал-конфессионализм, его озлобленная (!) антипатия к республике, его сверхнационализм времен войны — все это завершается призывом к германскому юношеству не принимать поражения 1918 г. и возникшего в результате этого «бесправия» немцев и готовиться к будущей победоносной войне с Францией»[188].

Подобная характеристика взглядов позднего Фреге как вполне одиозных — неисторична. Хотя почти все сказанное выше о Фреге в общем верно, «критик» обошел молчанием те компоненты фрегевских воззрений, которые в свете опыта XX в. выглядят в определенной мере оправданными и даже провидческими.

* * *

«Дневник» Фреге начинается с записи: «Поскольку может случиться, что сил и времени для подробного изложения [моих взглядов] уже не будет, я запишу здесь по крайней мере то, что приходит мне в голову и что, быть может, будет ценно при дальнейшей переработке»[189]. Бад-Клайненский отшельник, по-видимому, придавал большое значение своим морально-политическим мыслям, что явствует из записи, сделанной 10 апреля 1924 г.: «Я чувствую, что призван выдвинуть свои предложения — но не для политики сегодняшнего дня. Мои политические мысли нацелены на будущее»[190].

Какие же идеи отстаивал Фреге? Прежде всего это *патриотизм*, любовь к отечеству; это, записывает он, есть, конечно, любовь к своей стране — но в еще большей мере любовь к живущему в ней народу, это гордость за сильные и благородные стороны этого народа[191]. В этом иенский логик резко размежевывается с марксизмом германской социал-демократии, утверждая, что вожди последней не имеют чувства любви к родине[192]. Следует признать, что в этом вопросе он не ошибался. Современные «критики» Фреге проходят мимо того факта, что германская социал-демократическая партия, созданная в 1869 г., была главным ответвлением Интернационала, основанного Марксом и Энгельсом.

Вспомним: в год рождения Фреге появился на свет пресловутый «Манифест коммунистической партии», в котором говорилось, что пролетарии не имеют отечества, и содержался призыв к мировому революционному перевороту: «Пусть господствующие классы содрогнутся перед Коммунистической Революцией. Пролетариям нечего в ней терять кроме своих цепей. Приобретут же они *весь мир*»[193]. Эта установка сохранилась и в дальнейшем. Так, в 1888 г. Энгельс констатировал, что «Манифест» является «*общей программой*, признан миллионами рабочих от Сибири

---

[188] Ibidem, S. 68–69.
[189] Tagebuch, S. 1067.
[190] Ibidem, S. 1081.
[191] Ibidem, S. 1093–1094.
[192] Ibidem, S. 1069.
[193] *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Т. 4. С. 459 (курсив мой. — *Б.Б.*).

до Калифорнии»[194]. А в следующем году Энгельс руководил «подготовкой международного конгресса социалистов в Париже, на котором был основан 2-й Интернационал, добился *гегемонии марксизма* в этом международном объединении социалистических партий»[195].

Те, кто бросают упрек Фреге в том, что он не различал социал-демократию и марксизм[196], вольно или невольно подставляют на место социал-демократических партий конца XIX — начала XX в. *современную* западную социал-демократию, которая порвала с «чистым» марксизмом. Но для времени Фреге марксизм, социал-демократизм и социализм были неразлучны. В этом контексте понятны фрегевские оценки, подобные следующей: «Империя 1914 г. страдала раком, а именно раком социал-демократии»[197]; «Распространение социал-демократии было социалистической заразой, отравившей значительную часть немецкого народа задолго до войны»[198].

В этом критическом отношении к марксизму и социализму Фреге решительно отличался от таких своих последователей в логике и философии математики, как Б. Рассел, Л. Витгенштейн и Р. Карнап. Последний после Первой мировой войны пришел к социализму[199]; Витгенштейн в 30-е гг. приезжал в столицу «государства рабочих и крестьян» с намерением принять участие в «строительстве социализма»[200]; а о Бертране Расселе, активном участнике инспирированной из Москвы «борьбы за мир», которая служила пропагандистским прикрытием далеко не мирных планов советского руководства, и говорить нечего.

Вполне последовательно Фреге отвергал *классовую борьбу* как средство решения социальных проблем. Так, 12 марта он записал: «Два дьявола принесли нам большой вред, отравив отношения работодателей и наемных рабочих, — дьявол высокомерия у одних, дьявол зависти у других»[201]; и провидчески сформулировал положение, справедливость которого подтвердила история Западной Европы после Второй мировой войны: «Только подняв экономическую жизнь всего народа, можно надежно поднять и экономическое положение более бедных слоев»[202].

Заметим, что писалось это в веймарской Германии с ее экономическим кризисом, выплатой репараций победителям, инфляцией, безработицей, социальными потрясениями; писалось тогда, когда еще были свежи в памяти поддерживаемые Москвой попытки насильственного утверждения в ряде германских земель — Баварии, Бремене, Рурской области (1919–1921) — «советских» режимов. Учитывая все это, нельзя не прийти к выводу, что мысли Фреге относительно экономического подъема Германии как главной задачи действительно были ориентированы на будущее.

Весьма проницательны были и мысли Фреге относительно перспектив социализма (социал-демократизма) марксистского типа. Правда, он ошибался, когда полагал, что такого рода социал-демократия не имеет будущего: последовательно марксистский режим уже утвердился в России. Но конечный его вывод поразите-

---

[194] Там же. Т. 21. С. 366 (курсив мой. — *Б.Б.*).

[195] Философский энциклопедический словарь. М., 1983. С. 799 (курсив мой. — *Б.Б.*).

[196] Ср. примечание 71 на с. 1089 «Дневника» Фреге, которое принадлежит В.Кинцлеру.

[197] Tagebuch, S. 1089; запись от 24.4.1924 г.

[198] Ibidem, S. 1070; запись от 16.3.1924 г.

[199] Ср. принадлежащее Г. Габриелю примечание 36 на с. 1065 публикации «Политического дневника» Фреге.

[200] Об этом в разговорах со своими учениками рассказывала С. А. Яновская, принимавшая Витгенштейна по поручению партийного коммунистического начальства. Софья Александровна мягко посоветовала английскому философу не делать этого, так как «климатические условия» в России для него не благоприятны. Если бы Витгенштейн остался в СССР, то почти наверняка сгинул бы в ГУЛАГе.

[201] Tagebuch, S. 1069.

[202] Ibidem, S. 1077; запись от 2.4.1924 г.

лен: нам «не остается ничего другого, как ждать, пока марксизм не сгинет сам собой»[203]. И он действительно сгинул в Германии, когда объединились два германских государства; сгинул он и в России и странах Восточной Европы; сгинет он и в других государствах, где он пока еще жив.

Из «Дневника» Фреге видно, что его политические взгляды эволюционировали от национал-либеральных к националистическим; в прошлом, считает теперь Фреге, либерализм имел некоторое оправдание. «Я сам причислял себя к либералам», — признается он[204]. Теперь такого оправдания он не усматривает: его идеалом — в германском прошлом — является Бисмарк. В записи от 1 апреля 1924 г. мы читаем: «Сегодня, 109 лет тому назад, германскому народу был ниспослан Бисмарк. Сколь мало он был им оценен! Насколько лучше было бы <...> если бы немцы пожелали у него поучиться»[205]. Но Фреге находит ненужный либерализм и у Бисмарка; он порицает последнего за то, что его не особенно тревожил рост социал-демократии (хотя, как известно, Бисмарк и провел в Рейхстаге «закон против социалистов»).

Естественно, что наряду с политическими Фреге поднимает и моральные вопросы. Он связывает их с проблемами религии и права. Здесь он снова проявляет проницательность, решительно выступая за отделение церкви (имеется в виду — евангелической) от государства. В четырех записях, сделанных 18—22 марта, говорится о необходимости различения религиозного долга и юридического права, сфер религии и государственных дел. Но религия влияет на убеждения законодателя, а они, в свою очередь, — на характер права. Основанием последнего является справедливость, а само право предполагает «объединение разумных существ, некоторое государство»[206]. Вместе с тем для религии «не хорошо, когда государство превращает все религиозные обязанности в государственные, так как тем самым возникает опасность того, что религиозные мотивы поведения постепенно обернутся страхом наказания»[207].

Фреге считает: его страна настоятельно нуждается в религиозном обновлении. «Лютеранская церковь, — пишет он в одной из своих последних записей, — отчасти заскорузла в своей ортодоксии», и он предлагает вернуться к «старой религии Иисуса». Свои записи на религиозные темы Фреге завершает словами: «Я хочу правды и только правды. <...> В жизни Иисуса, как она мне представляется, религия, я полагаю, должна обрести свой творческий источник»[208].

* * *

Теперь о той стороне взглядов Фреге, которые свидетельствуют о выраженном его национализме. Здесь следует назвать реваншизм, антисемитизм, антидемократизм и, наконец, принципиальное допущение территориальной экспансии Германии на Восток. Парламентаризм Фреге квалифицирует как «ввезенный с Запада», считая, что это «не собственно немецкое, на немецкой почве выросшее» явление[209]. Реваншизм же его особенно резок. «Молодые немцы, — призывает Фреге,— не отмечайте никаких праздников. Подождите, пока Германия в результате победы над французами снова приобретет уважение среди народов»[210]. Поэтому он ратует за

---

[203] Ibidem, S. 1969.

[204] Ibidem, S. 1080.

[205] Ibidem, S. 1077.

[206] Ibidem, S. 1072.

[207] Заметим, что в современной Германии религия (протестантская — евангелическая, лютеранская) не совсем отделена от государства: служители культа и посейчас получают государственное содержание за счет налогоплательщиков. Но ни о каком «страхе наказания», конечно, не может быть и речи.

[208] Tagebuch, S. 1096, 1098.

[209] Ibidem, S. 1083.

[210] Ibidem, S. 1085; запись от 16. 4. 1924 г.

создание «сильной империи», связывая это с появлением человека, у которого «имеется план освобождения Германии от французского давления»[211].

Антисемитом Фреге был, по-видимому, всегда, но первоначально его негативное отношение к «~~семитам~~» (~~его~~ собственное выражение) носило скорее бытовой характер; это, надо полагать, связано с тем, что его родной Мекленбург вплоть до 1866 г. находился вне «черты оседлости». Но, как признается он в одной из апрельских записей, антисемитизм он по-настоящему усвоил лишь в последние годы. Автор примечания к этому месту «Дневника» высказывает мысль, что фрегевский антисемитизм был мало похож на расизм, скорее это был «протестантски-консервативный и антилиберальный антисемитизм»[212]. С этим в полной мере вряд ли можно согласиться: противопоставление «арийцев» и «семитов» звучит у Фреге достаточно ясно. Признавая, что бывают «высокоуважаемые евреи», он вместе с тем сожалеет, что в Германии так много евреев и что они политически равноправны с гражданами «арийского происхождения». И далее следуют слова, которые естественны в устах логика, но которые для современного читателя звучат жутковато: «Если бы мы захотели сформулировать параграф [закона], который служил бы устранению этого зла, то мы должны были бы сначала ответить на вопрос— как с полной определенностью отличить еврея от нееврея?»[213] В примечании к этому месту «Дневника» указывается, что законодательное определение еврея было установлено во время национал-социалистической диктатуры: «Еврей — тот, кто происходит ~~не менее~~ чем ~~от трех чистокровных евреев~~ в третьем поколении»[214].

Здесь возникает вопрос об отношении Фреге к нацизму. Мы не можем однозначно ответить на него, даже привлекая исторический контекст. С одной стороны, в воззрениях Фреге много такого, что совпадает с идеологией германского национал-социализма, вплоть до антикапиталистических мотивов типа критики «биржевых спекулянтов» и отвержения института акционерных обществ. С другой стороны, гитлеровская партия была — по названию — *социалистической* и *рабочей*, флаги же ее *красными*. Готов ли был Фреге идти за вождем *такой* партии? В этом можно сомневаться. Впрочем, основатель архива Фреге и первый исследователь его научного наследия — Г. Шольц был, как вскользь замечает Менцлер-Тротт, *Parteigenosse*, т.е. состоял членом НСДАП[215].

Фреге, как мы говорили выше, искал на политической арене Германии человека, который мог бы повести страну по пути «спасения» (Heil) и «избавления» (Erlösung) от нищеты и позора. Несмотря на сходство этой фразеологии с гитлеровской демагогией, он не видел в Гитлере искомого им человека. В примечании 16 к фрегевскому «Политическому дневнику» справедливо отвергается взгляд, высказанный Г. Слугой[216], будто Гитлер был «героем» Фреге. Столь же неосновательно и мнение Менцлер-Тротта, будто запись Фреге от 5 мая, где фигурируют слова «Гитлер по праву пишет»[217], означает «невероятный скандал — воздание хвалы Адольфу

---

[211] Ibidem, S. 1081.

[212] Ibidem, S. 1088.

[213] Ibidem, S. 1092.

[214] Ibidem, S. 1093.

[215] Отечественного читателя это вряд ли может удивить. Ведь *Parteigenosse*, только коммунистическими, были такие наши математические логики, как С. А. Яновская и А. А. Марков, — да и автор этих строк тоже.

[216] *Sluga H.* Heidegger's Crisis. Philosophy and Politics in Nazi Germany. Cambridge. Mass./London, 1993, S. 99.

[217] Полная фраза Фреге такова: «Адольф Гитлер по праву пишет в апрельском номере газеты «Deutschlands Erneuerung», что Германия после ухода Бисмарка больше не имела ясной политической цели». Эти идеологически вполне нейтральные слова вождя НСДАП просто совпадали с воззрениями Фреге, почему он их и привел в своем «Дневнике».

Гитлеру». На деле Фреге *осудил* гитлеровский путч 8–9 ноября 1923 г., сожалея, что генерал Людендорф дал себя в него втянуть[218]. Правда, Фреге одобрял статьи Ф. Вебера и генерала Людендорфа, напечатанные в газете «Обновление Германии» и представлявшие собой изложение главного содержания защитительных речей путчистов на судебном процессе, приведшем к запрещению нацистской партии.

Мы не сможем объективно взглянуть на позицию Фреге, если не учтем реалий веймарской Германии того времени. Дело в том, что это была страна, на которой были сосредоточены главные усилия Коминтерна по разжиганию «мировой революции». Что предполагалось осуществить осенью 1923 г., мы узнаем из слов Б. Бажанова: «В конце сентября состоялось чрезвычайное заседание Политбюро [ЦК ВКП(б)] <...> для того, чтобы фиксировать дату переворота в Германии. Он был назначен на 9 ноября 1923 г.»[219]. Эти слова «перебежчика» Бажанова можно подкрепить высказыванием самого Сталина, сделанном им в речи на пленуме ЦК и ЦКК ВКП(б) 1 августа 1927 г.: «германская комиссия Коминтерна в составе Зиновьева, Бухарина, Сталина, Троцкого, Радека и ряда немецких товарищей имела ряд конкретных решений о прямой помощи германским товарищам в деле захвата власти». Однако несмотря на «помощь германским товарищам» — а выражалась она в поддержке германских коммунистов и деньгами, и оружием, и кадрами (засылались московские агенты — провокаторы и организаторы беспорядков[220]) — переворот не состоялся: «германским товарищам» не хватило сил. Но не забудем совпадения дат: марксистская «революция» должна была произойти одновременно с гитлеровской...

Конечно, Фреге не знал обо всем этом — из его «Дневника» это совершенно ясно. Но политическая интуиция подсказала ему, *где* в это время таилась главная опасность для его страны. Он не ошибался, когда усматривал ее в марксистском социализме. Так можно ли его осуждать за то, что он присоединился к антимарксистским высказываниям авторов статей в газете «Обновление Германии», в частности, к мыслям Ф. Вебера? Ведь последний был вождем Добровольческого корпуса[221], который участвовал в разгроме так называемой Баварской советской республики в Мюнхене и в подавлении коммунистических мятежей в Рурской области в 1920 и 1921 гг., то есть делал то, что не мог не одобрять Фреге.

Еще раз о вкладе Фреге в логику и философию математики. Иенский мыслитель и «аналитическая философия»

Мы видели, сколь многообразен был вклад Фреге в логику, в философско-математические и логико-семантические рассмотрения. Напомним только самое главное. Он разработал формализованный язык — запись в понятиях и ее средствами развил расширенное исчисление предикатов с равенством; четко сформулировал принцип абстракции; показал фундаментальное значение полной математической индукции. Ему принадлежит самая ранняя дедуктивно-аксиоматическая система исчисления высказываний и предикатов (1879), причем при аксиоматике, фактически усвоенной современной классической математической логикой. Его формальная арифметика, в которой было уточнено понятие натурального числа (как частного случая «численности», или, по Кантору, кардинального числа), пред-

---

[218] Tagebuch, S. 1095–1096.

[219] *Бажанов Б.* Воспоминания бывшего секретаря Сталина. Париж. Третья волна, 1980, с. 65.

[220] В их числе был даже заместитель председателя ГПУ Уншлихт и ряд членов ЦК советской компартии (см. *Бажанов Б.* Цит. соч., с. 67).

[221] Корпус Вебера назывался «Oberland» — и таково же было название его статьи в газете «Deutschlands Erneuerung», которую Фреге упоминает в своем «Дневнике».

ставляла собой исторически первую попытку формализации конкретной математической теории. Работы Фреге по основаниям арифметики явились фактически первыми исследованиями в той области, которая ныне называется теорией математического доказательства. Соображения Фреге о природе *знака* и его роли в познании с гносеологической точки зрения имеют непреходящее значение. Он неизменно подчеркивал, что знаки служат только взаимопониманию людей, а также пониманию человеком самого себя — служат (внешней) памятью. К числу заслуг Фреге принадлежит фактически содержащееся в его работе различение формализованного объектного языка и метаязыка, средствами которого осуществляется исследование данного формального языка. Впервые в логике он четко отличил предложения логического исчисления (и в частности, аксиомы и схемы аксиом) от правил этого исчисления, формулируемых на содержательном уровне. Введенное Фреге понятие *смысла* языкового выражения положило начало целому комплексу проблем современной логической *семантики*. Рассматривая логическое исчисление как вспомогательное средство, используемое для определенных научных целей, он исходил из того, что оно не заменяет ни содержательного мышления, ни живого языка человеческого общения.

Фреге был не только логиком и математиком, но и философом. Вопросы бытия и познания он рассматривал через призму «бытия истины». Поэтому он считал, например, что «основательное исследование понятия числа всегда будет иметь нечто философское. Эта задача является общей для математики и философии»[222]. Он не принадлежал к числу тех математиков, которые, выражаясь его словами, «не любят вступать на скользкий путь философии». В «Основаниях арифметики» рассматриваются не только чисто математические, но и философские, теоретико-познавательные теории числа. «Я, — писал Фреге, — питаю надежду, что в случае непредвзятой проверки философы тоже найдут в этом произведении кое-что приемлемое для себя»[223].

Высокая оценка заслуг Фреге не отменяет того, что он был сыном своего времени, хотя и смотрел дальше и видел зорче многих своих коллег — логиков, математиков и философов. Вряд ли можно сомневаться в том, что его убеждение в возможности чисто логического обоснования математического знания было данью времени: как мы уже говорили, подобный взгляд был распространен как среди математиков, так и среди философов. Но Фреге пытался придать ему форму окончательного решения — и ошибся, так как такового, по-видимому, не существует. Из числа современников Фреге периода расцвета его творчества, пожалуй, только братья Герман и Роберт Грассманы шли обратным путем: логике они предпосылали математику как «общее учение о величинах». Но грассмановская рекурсивная арифметика была заведомо неприемлема для Фреге, признававшего только явные определения и поэтому подвергшего (несправедливой!) критике рекурсивное определение операции сложения, данное в «Учебнике арифметики»[224] Г. Грассмана[225].

Узость взглядов Фреге ясно проявилась в его споре с Гильбертом по вопросам обоснования геометрии. Ученые плохо понимали друг друга. Фреге не был согласен с философскими установками формализма-финитизма Гильберта — и для этого был определенный резон; вспомним, ведь и основатель неоинтуиционизма Л. Э. Я. Брауэр их тоже не принял. Вместе с тем Фреге не понял ни сути аксиомати-

[222] Grundlagen, S. V (Предисловие).

[223] Ibidem, S. XI.

[224] *Grassmann H.* Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Teil 1: Arithmetik. Stettin, 1860, und Berlin, 1861.

[225] Grundlagen, S. 8.

ческого метода, ни эпохального для обоснования геометрии значения труда Гильберта.

Тем не менее Фреге занимает выдающееся место в логике и философии математики — место, которое, как мы видели, современниками понято не было. Должны были пройти десятилетия, чтобы начало раскрываться богатство идей, заложенных в его трудах. С развитием математической логики историческое значение вклада Фреге становилось все более очевидным. В 1925 г., выступая с докладом на Математическом съезде, организованном в память Вейерштрасса, Давид Гильберт сказал о Фреге, своем бывшем оппоненте, что последний сделал очень много для обоснования математики. А тремя годами позже, в докладе «Проблемы обоснования математики», предложенном участникам Международного математического конгресса в Болонье, Гильберт назвал Фреге великим классиком и одним из творцов оснований математики, поставив его в один ряд с Кантором и Дедекиндом. В 1931 г. немецкий логик и историк логики Г. Шольц писал, что Фреге неоспоримо был самым великим из логиков XIX в.[226]. В аннотации к сборнику избранных работ Фреге по вопросам логики и философии математики, изданном в 1952 г. в Оксфорде[227], говорится, что никто, начиная с Аристотеля, не сделал для развития формальной логики столько, сколько сделал Фреге.

* * *

«Возрождение» Фреге началось в 50–60-х гг. XX в. К этому времени никогда не прекращавшееся внимание специалистов к *логическим* достижениям Фреге[228], поддерживаемое трудами Рассела, Гильберта, а затем Карнапа, нашло свое высшее выражение в блестящем «Введении» А. Чёрча в его труде 1956 г.[229]. Из немецкоязычной литературы тут надо отметить прежде всего монографию Кристиана Тиля[230]. Последовавшая вскоре публикация архивных материалов Фреге подстегнула интерес ко всему многообразию его научного и философского наследия. В 1979 г., когда исполнилось сто лет со времени публикации «Исчисления понятий», в ГДР (Иена) состоялась конференция, посвященная Фреге, а затем подобные мероприятия стали в Германии проводиться регулярно.

---

[226] *Scholz H.* Geschichte der Logik. Berlin, 1931, S. 57. На с. 4 этой книги Шольц высказывает взгляд, что Больцано и Фреге были величайшими логиками XIX столетия.

[227] Translation from Philosophical Writings of G.Frege. Ed. by P. Geach and M. Black. Oxford (Engl.), 1952.

[228] Из числа немецких ученых, помимо Г. Шольца, здесь следует упомянуть его друга Вильгельма Бритцмайра (W. Britzmayr), создавшего в Мюнхенском университете группу студентов, интересовавшихся наследием Фреге; в их числе был Ганс Слуга, впоследствии известный фрегевед. В СССР С. А. Яновская привлекла к работе над фрегевской тематикой своего аспиранта А. А. Ерофеева, однако в условиях сталинского режима защита подготавливавшейся им диссертации о Фреге оказалась невозможной, и ему пришлось избрать иную тему (между прочим, А. А. Ерофеев явился переводчиком на русский язык *первой* книги по математической логике — труда Д. Гильберта и В. Аккермана «Основы теоретической логики», вышедшей в 1947 г. под редакцией и со вступительной статьей и комментариями Софьи Александровны). Потом, со второй половины 50-х гг., когда началась послесталинская «оттепель», к разработке фрегеведческой тематики Яновская привлекла автора этих строк — я был ее аспирантом по кафедре логики философского факультета МГУ. В этой работе приходилось пользоваться книгами из домашней библиотеки С.А., в том числе экземпляром «Grundgesetze», который ей подарил Л. Витгенштейн.

[229] *Чёрч.* Введение в математическую логику. Т. I. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1960, с. 15–63, 340–384. В дальнейшем при ссылках на эту книгу: ***Чёрч***. Английский оригинал монографии А. Чёрча вышел в 1956 г.

[230] *Thiel Chr.* Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges. Meisenheim an Glan, 1965.

В интерпретации научно-философского наследия иенского логика можно выделить *два* главных направления. Одно из них представляет собой скрупулезный анализ математико-логических и философско-математических результатов Фреге; на этот анализ мы и ориентировались в данном Введении — и еще больше в Приложении, помещенном в этой книге. Другое направление, представленное главным образом в англо-американском фрегеведении, исходит из того, что основным вкладом Фреге в развитие знания являются его работы в области логической семантики и «философии языка», почему его идеи следует трактовать в контексте аналитической (или даже феноменологической) философии[231]. Среди сторонников подобных взглядов выделяются два автора — уже знакомые нам Майкл Даммет и Ганс Слуга, ученик Даммета в Оксфорде и его оппонент.

М. Даммет, фрегеведческие публикации которого начались еще в середине 50-х гг., выпустил два большущих тома, посвященных «интерпретации философии Фреге». Он утверждает: «Независимо от того, можно или нет считать Фреге аналитическим философом, он без сомнения был лингвистическим философом (philosopher of language)»[232]; однако в текстах самих его книг Фреге предстает перед читателем именно как «аналитический философ».

Г.Д. Слуга, первая работа которого о Фреге относится к началу 60-х гг.[233], выпустил в 1980 г. монографию, в которой прямо провозгласил: «Готтлоба Фреге можно рассматривать как первого аналитического философа»[234]. Аргументируется этот взгляд ссылкой на то, что мысли Фреге о языке оказали глубокое влияние на таких различных мыслителей, как Рассел, Витгенштейн и Карнап — представителей разных «аналитических традиций»[235].

Конечно, термин «аналитическая философия» не отличается четкостью. Например, Д. Коппельберг, автор книги «Преодоление аналитической философии», выделяет три возможных его смысла[236], которые он связывает: либо с позицией Даммета и Слуги, считающих Фреге основателем аналитической философии; либо с философией логического анализа Рассела; либо с воззрениями представителей «венского кружка» и — вдобавок — со взглядами таких разных мыслителей, как Людвиг Витгенштейн и Карл Поппер.

В нашей оценке отношения «Фреге — аналитическая философия» мы исходим из следующего понимания этого широкого и разношерстного течения. Аналитическая философия — это совокупность взглядов (подчас очень разных), согласно которым логический анализ языка есть путь к решению философских проблем — эпистемологических и онтологических. Очевидно, что при *таком* истолковании аналитической философии воззрения Фреге были *прямой противоположностью* этого

---

[231] Подобные взгляды имеют хождение и в отечественной литературе. Ряд российских авторов, пишущих о Фреге (и даже переводивших его «неформульные» тексты на русский язык), смотрят на него глазами его англо-американских комментаторов.

[232] *Dummett M.* The Interpretation of Frege's Philosophy. Cambridge, Mass., 1981, p. 55.

[233] *Sluga H. D.* Frege und Typentheorie//Logik und die Logikkalkül. Festschrift für Wilhelm Britzelmayr. Freiburg, München, 1962, S. 195–209. Интересное совпадение: в те же годы автор этих строк опубликовал на ту же тему брошюру, в которой также рассматривалось отношение Фреге к теории типов, только не Рассела, а Шрёдера (*Бирюков Б.В.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике. М., 1963).

[234] *Sluga H. D.* Gottlob Frege. London, 1980, p. 2. Это положение, по-видимому, было сочтено столь важным, что было вынесено на суперобложку книги.

[235] Впрочем, Слуга более осторожен в своих оценках и упрекает Даммета за неисторический подход. Слуга справедливо считает, что Фреге был в первую очередь математиком и лишь во вторую — философом.

[236] *Koppelberg D.* Die Aufhebung der analytischen Philosophie. Quine als Synthese von Carnap und Neurat. Frankfurt am Main, 1987, S. 55 f.

философского направления. Ибо с его точки зрения решение гносеолого-онтологических вопросов *предшествует* логико-лингвистическим рассмотрениям и их определяет; учение Фреге о смысле и значении подчинено его общей «реалистической» (в смысле средневекового реализма) философской концепции. В своих лингво-семантических экскурсах он исходил из задачи — «бороться» с недостатками естественного языка, затрудняющими уяснение логических проблем. То, что его достижения в логике, его семантические идеи и выявленные им тонкости языковой «окраски» мысли во многом послужили целому поколению позитивистски настроенных философов Запада (преимущественно в Англии и США) в качестве исходной операциональной базы в их философских построениях, вовсе не делает Фреге, так сказать, их соратником. И нелишне, пожалуй, повторить, что морально-политические устои воззрений Фреге резко контрастировали с левацкой политической ориентацией «аналитических философов» типа Рассела, Витгенштейна или Карнапа.

Б. В. Бирюков

Часть первая

ЗАПИСЬ В ПОНЯТИЯХ

ИСЧИСЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ, ЯЗЫК ФОРМУЛ ЧИСТОГО МЫШЛЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЙ ПО ОБРАЗЦУ АРИФМЕТИЧЕСКОГО

Предисловие

Постижение научной истины совершается, как правило, в несколько этапов. Общее положение, угаданное сначала на основе, быть может, недостаточного числа частных случаев, постепенно находит подтверждение, оказываясь связанным цепочками умозаключений с другими истинами, будь то выведенные из него следствия, которые подтверждены иным способом, или же, наоборот, будь оно само истолковано как следствие уже установленных положений. Поэтому можно ставить вопрос, с одной стороны, о том пути, двигаясь по которому мы постепенно приходим к данному положению, а с другой стороны, о том способе, который позволяет получить его наиболее прочное обоснование. На первый вопрос различные люди дадут, пожалуй, разные ответы, второй же вопрос носит более определенный характер, и ответ на него связан с глубинной сущностью рассматриваемого положения. Очевидно, самое надежное доказательство — чисто логическое: основанное только на тех законах, на которых покоится все познание, оно ведется в отвлечении от специфических особенностей вещей. Поэтому мы разделяем все истины, нуждающиеся в обосновании, на два вида: те, что доказываются чисто логически, и те, доказательство которых опирается на опытные факты[1] Следует, однако, согласиться с тем, что рассматриваемое положение может принадлежать к первому виду и тем не менее быть совершенно недоступно человеческому уму без помощи органов чувств*. Следовательно, в основе упомянутого разделения лежит не психологическое происхождение, а наиболее совершенный способ доказательства. Задавшись вопросом, к какому из этих двух видов принадлежат арифметические суждения, я вынужден был прежде всего выяснить, как далеко можно продвинуться в арифметике, опираясь лишь на самые общие, отвлеченные от всяких частностей законы мышления. События при этом развивались так. Прежде всего я пытался свести к *логическому* следованию понятие упорядочения в некоторой последовательности, а затем от него перейти к понятию числа. Но для того чтобы в рассуждение не проникло незамеченным ничего из наглядно созерцаемого, я должен был все привести к цепочкам умозаключений, не содержащих пропусков. Стараясь самым строгим образом выполнить это требование, я обнаружил препятствие, которое заключалось в несовершенстве языка: чем сложнее были рассматриваемые отношения, тем меньшей точности, отвечающей моим целям, я мог

---

* Поскольку никакое умственное развитие у известных нам существ невозможно без чувственного восприятия, сказанное здесь верно для всех суждений.

добиться, какие бы громоздкие и запутанные словесные выражения не возникали для их представления. Это и были те причины, которые привели меня к замыслу моего исчисления — записи в понятиях (Begriffsschrift). Таким образом, это исчисление предназначалось прежде всего для того, чтобы самым надежным способом проверять связи в цепочках умозаключений и выявлять каждое предположение, могущее прокрасться незамеченным с тем, чтобы можно было обнаружить его источник. Поэтому пришлось отказаться от выражения всего того, что не имеет значения *для процесса вывода*. То, что для меня особенно важно, я назвал в § 3 *содержанием понятия*. Это разъяснение надо всегда иметь в виду, чтобы правильно понимать сущность моего формульного языка. Отсюда происходит и название — исчисление понятий (Begriffsschrift). Поскольку для начала я ограничился выражением тех отношений, которые не зависят от конкретных свойств вещей, я могу использовать также и выражение «язык формул чистого мышления». Подражание языку формул арифметики, упомянутое в заголовке, касается скорее сути замысла, чем деталей его воплощения. Мне совершенно чуждо стремление добиваться искусственного сходства с языком арифметики за счет истолкования понятия как суммы их признаков. Мой язык формул ближе всего к языку арифметики в способе использования букв.

Отношение моего языка формул — понятийной записи к [повседневному] языку, я думаю, лучше всего можно пояснить, если сравнить его с отношением микроскопа к глазу[2]. Последний благодаря широте своей применимости, благодаря той гибкости, с которой он приспосабливается к самым разным условиям, обладает громадным преимуществом перед микроскопом. Как оптический прибор, он, конечно, обнаруживает много несовершенств, остающихся обычно незамеченными только вследствие тесной его связи с нашей умственной жизнью. Но как только задачи науки предъявляют более высокие требования к остроте различения, обнаруживается, что глаз им не удовлетворяет. Напротив, микроскоп наилучшим образом приспособлен как раз для этих целей, но именно поэтому непригоден для всех остальных.

Аналогично, и мой язык формул (Begriffsschrift) является вспомогательным средством, изобретенным для определенных научных целей, и его не следует осуждать за то, что для других он не пригоден. Если мое исчисление (Begriffsschrift) лишь до некоторой степени соответствует своим целям, то не нужно упускать того, что в нем все-таки имеются новые истины. В утешение мне хотелось бы думать, что совершенствование метода тоже содействует прогрессу науки. Считал же *Бэкон*, что изобретение средства, с помощью которого в науке все может быть легко найдено, предпочтительнее отдельных открытий[3]; да и весь великий научный прогресс Нового времени имел своим истоком улучшение метода.

Лейбниц тоже признавал преимущества удобного способа обозначений; пожалуй, он его даже переоценивал. Его замысел всеобщей характеристики, некоего *calculus philosophicus* или *calculus ratiocinator**, был слишком грандиозен, чтобы его осуществление могло выйти за пределы одних лишь подготовительных работ[5]. Воодушевление, которое охватывало его творца, когда он размышлял о том громадном увеличении мощи человечества, которое принес бы один лишь способ обозначений, точно соответствующий существу дела, приводило его к недооценке тех трудностей, которые стоят на пути подобного предприятия. Если, однако, этой высокой цели не достичь с налета, то не стоит терять надежды и отказываться от постепенного, шаг за шагом приближения к цели. Если задача во всей своей общности кажется неразрешимой, давайте ее поначалу ограничим; может быть, впоследствии, продвигаясь по пути постепенного обобщения, с ней удастся справиться. На знаки в арифметике, геометрии, химии можно смотреть как на осуществле-

* См. об этом: Trendelenburg, Historische Beiträge zur Philosophie. 3. Band[4].

ние лейбницевского замысла в отдельных областях. Предлагаемое здесь исчисление понятий присоединяет к ним новую область, причем лежащую в самом их центре, так что все другие оказываются ее соседями. Значит, отправляясь от нее, можно с большей надеждой на успех трудиться, восполняя пробелы в существующих формульных языках, объединяя в единое пространство их области, до сей поры не связанные друг с другом, и вовлекая в него такие сферы, в которых до сих пор не велась подобная работа.

Я считаю, что применение моего исчисления понятий будет успешным везде, где особая значимость придается убедительности процесса доказательства, как это имеет место при обосновании дифференциального и интегрального исчисления.

Еще более легким представляется мне распространение данного формульного языка на геометрию[6]. Надо только добавить к нему знаки для встречающихся в ней наглядных отношений. На этом пути возможно получить некий вид того, что называется *analysis situs*[7].

Хотелось бы еще присоединить сюда переход к чистой теории движения и, далее, к механике и физике. В последних областях, где наряду с необходимостью мысли действует необходимость природы, скорее всего, вместе с прогрессом познания можно предвидеть дальнейшее развитие способов обозначения. Но именно поэтому не следует медлить, пока не оказалась исключенной сама возможность таких преобразований.

Если задача философии — сломить господство слова над человеческим духом (Geist), раскрывая заблуждения, касающиеся отношений между понятиями, которые часто почти неизбежно возникают из-за употребления языка, освободить мысль от того, что навязано ей лишь свойствами словесного способа выражения, — то мое исчисление понятий, будучи с этой целью далее усовершенствовано, может стать для философов полезным орудием[8]. Впрочем, и мое исчисление воспроизводит мысль не в полной мере, да в случае внешнего для нее способа представления иначе, пожалуй, и быть не может; но, с одной стороны, эти расхождения можно ограничить тем, что неизбежно и безвредно, с другой стороны, уже имеется защита против одностороннего влияния какого-либо из этих средств выражения, которая состоит в том, что они совсем иного рода, чем свойственные языку.

Уже создание этого символического языка (Begriffsschrift), как мне кажется, содействует развитию логики. Я надеюсь, что логики, если их не отпугнет первое впечатление непривычного, не откажут одобрить то новое, к чему меня побуждала внутренняя необходимость самого предмета. Отклонения от принятого находят свое оправдание в том, что логика до сих пор все еще слишком тесно связана с языком и грамматикой. Я полагаю, в частности, что замена понятий *субъект* и *предикат* понятиями *функция* и *аргумент* в конце концов будет признана. Нетрудно понять, каким образом истолкование содержания понятия как функции некоторого аргумента влияет на формирование понятий. Затем, пожалуй, заслуживает внимания указание связи между значениями слов: если, и, не, или, существует, некоторые, все и т.д.

Особо упомяну еще только следующее.

Заявленное в § 6 ограничение одним единственным способом умозаключения оправдано тем, что, устанавливая подобную символическую систему (Begriffsschrift), надо исходить из наиболее простых исходных компонент, чтобы добиться требуемой обозримости и упорядоченности. Это не исключает того, что *позже* переходы от нескольких суждений к новому суждению, возможные при этом единственном способе лишь опосредованно, будут ради краткости превращены в непосредственные. И в самом деле это можно будет сделать при дальнейшем применении моего исчисления]. Тем самым могут возникнуть дальнейшие способы умозаключений.

Позже я заметил[9a], что формулы (31) и (41) можно объединить в одну,

$$\vdash\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!- \; (\!-\!\!\!\smile\!\!\!-\; a \equiv a),$$

вследствие чего становятся возможными еще некоторые упрощения.

Как я упомянул вначале, арифметика явилась исходным пунктом, отправляясь от которого, я пришел к своему исчислению понятий. Поэтому прежде всего к этой науке я и намерен его применить, анализируя ее понятия и стараясь обнаружить глубокие основания ее предложений. В третьем разделе в предварительном порядке я изложил кое-что из сделанного в этом направлении. Продвижение по намеченному пути, освещение понятий числа, величины и т.д. составит предмет дальнейших исследований, с которыми я собираюсь выступить сразу же после этого сочинения.

Иена, 18 декабря 1878 года

I. ОБОЗНАЧЕНИЯ

§ 1. Буквы и другие знаки

Знаки, используемые в общем учении о величинах[9], распадаются на два вида. Первый вид включает буквы, каждая из которых представляет или некоторое число, остающееся неопределенным, или некоторую функцию, также остающуюся неопределенной. Эта неопределенность делает возможным использование букв как способа выражения общезначимости предложений, как, например, таких:

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Другой вид включает такие знаки, как +, –, √, 0, 1, 2, каждый из которых имеет свое собственное значение.

Эту основополагающую идею о различии двух видов знаков[10] — различии, которое в учении о величинах, к сожалению, проводится недостаточно четко*, — я принимаю для того, чтобы сделать его пригодным для более обширной области чистого мышления. Поэтому используемые мною знаки я разделяю *на такие, с помощью которых мы можем представлять то, что различно*, и *такие, которые имеют вполне определенный смысл*. Первые суть *буквы*, и они служат главным образом для выражения *всеобщности*. Надо, однако, придерживаться того, что при всей неопределенности, буква в одних и тех же взаимосвязях *сохраняет* значение, которое ей однажды придали.

СУЖДЕНИЕ

§ 2. Превращаемость содержания в суждение. Штрих содержания, штрих суждения

Пусть суждение всегда выражается с помощью знака $\vdash\!\!-\!\!-$, стоящего слева от знака или конфигурации знаков, указывающих содержание суждения. Если *удалить* небольшую вертикальную черту, стоящую слева от горизонтальной черты, то

---

* Вспомните, например[11], 1, log, sin, lim.

суждение превращается в *простую связь представлений*, о которой пишущий не сообщает, признает он ее истиной или нет.

Пусть, например,

$$\vdash\!\!\!\!\!\!\text{———}\ A^*$$

означает суждение: «разноименные полюсы магнита притягиваются»; тогда

$$\text{———}\ A$$

этого суждения не выражает, а служит только для того, чтобы вызвать у читателя представление о взаимном притяжении разноименных полюсов магнита, с тем, например, чтобы извлечь из этого следствия и на них проверить правильность данной мысли. Этот случай мы передаем словами *«данное обстоятельство таково, что»* или *«данное положение (der Satz) таково, что»*.

Не каждое содержание можно преобразовать в суждение, поставив перед выражающим его знаком символ $\vdash$——; например, нельзя сделать суждением представление «дом». Поэтому мы различаем содержания, о которых можно *судить*, — содержания, *преобразуемые в суждения*, и содержания, *не допускающие такого преобразования* (beurtheibare und unbeurtheilbare** Inhalte)[13].

Горизонтальная черта, входящая в знак $\vdash$——, *связывает знак, который за ней следует, в единое целое, и именно к этому целому относится утверждение, выражаемое вертикальной чертой, помещенной на левом конце горизонтальной черты.* Будем называть горизонтальную черту *штрихом содержания*, а вертикальную черту — *штрихом суждения*. Штрих содержания может служить также для того, чтобы связывать данный знак с тем знаковым целым, которое за ним следует. *То, что следует за штрихом содержания, всегда должно обладать содержанием, которое можно превратить в суждение.*

§ 3. Субъект и предикат. Понятийное содержание

При любом истолковании суждения нет места различению *субъекта* и *предиката*. Чтобы это оправдать, замечу, что содержания двух суждений могут различаться двояким образом; во-первых, тем, что следствия, которые можно извлечь из одного из них, поставив его в связь с определенным другим содержанием, всегда вытекают из второго содержания, поставленного в связь с тем же самым другим содержанием; во-вторых, тем, что это не имеет места. Два предложения: «под Платеями греки победили персов»[14] и «под Платеями персы были побеждены греками» различаются в первом отношении. Хотя между этими предложениями и можно усмотреть небольшое различие в смысле, сходство все же преобладает. Ту часть содержания, которая в этих суждениях является *одной и той же*, я называю *понятийным содержанием* (*begrifflicher Inhalt*)[15]. Поскольку *только оно* имеет значение для моего исчисления, последнее не нуждается в каком-либо различении предложений, которые имеют одно и то же понятийное содержание. Когда говорят: «субъект есть понятие, о котором идет речь в суждении», то это же подходит и для его

---

* Я использую большие греческие буквы как сокращения, которым читатель — если не сделано дополнительных разъяснений — может придавать подходящий смысл.

** Напротив, то обстоятельство, что дома (или отдельный дом) существуют, было бы содержанием, преобразуемым в суждение. А представление «дом» является только частью этого содержания. В предложении «дом Приама[12] был деревянный» вместо «дом» нельзя было бы подставить «то обстоятельство, что имеется дом». Пример содержания иного рода, не допускающего преобразования в суждение, см. при обсуждении формулы (81).

объекта. Поэтому можно сказать лишь: «субъект есть понятие, о котором главным образом идет речь в суждении». Место субъекта в ряду слов имеет для языка значение *выделенного* места, на которое ставят то, на что особенно желают обратить внимание слушателя (см. также § 9). Это может иметь, например, целью указать отношение этого суждения к другим суждениям и тем самым облегчить для слушателя его понимание общей связи речи. Но все явления в языке, которые возникают из взаимодействия говорящего и слушающего, — когда, например, говорящий учитывает ожидания слушающего и старается приспособить к ним свое предложение еще до того, как оно было им высказано, — в моем формульном языке не имеют никаких соответствий, так как в суждении учитывается только то, что может оказать влияние на *возможные следствия*. Все, что необходимо для правильного умозаключения, выражается полностью, а то, что не является необходимым, по большей части не указывается; *догадываться ни о чем не надо*. В этом я полностью следую примеру математического языка формул, в котором субъект и предикат можно различить только насильственным образом. Можно представить себе язык, в котором предложение: «Архимед погиб при завоевании Сиракуз» выражалось бы следующим образом: «насильственная смерть Архимеда при завоевании Сиракуз является фактом». Хотя здесь и можно при желании различить субъект и предикат, однако субъект содержит все содержание этого предложения, цель же предиката состоит лишь в том, чтобы установить это в качестве суждения. *Такой язык имел бы единственный предикат для всех суждений,а именно— «есть некоторый факт»*. Мы видим, что здесь не может быть и речи о субъекте — подлежащем и предикате — сказуемом в обычном смысле. *Запись в понятиях и есть язык, который это учитывает, а знак* $\vdash$ *есть общий предикат для всех суждений*[16].

В первых набросках языка формул меня сбил с толку пример [обычного] языка, и я составил суждения из субъекта и предиката. Но вскоре убедился, что это мешает достижению моих собственных целей и только приводит к бесполезным длиннотам.

§ 4. Общие, особенные; отрицательные; категорические, гипотетические, дизъюнктивные; аподиктические, ассерторические, проблематические суждения

Следующие ниже замечания служат разъяснению того, какое значение для наших целей имеют различения, проводимые в отношении суждений.

Различают *общие* и *особенные* суждения[17]; это, собственно говоря, есть различение не суждений, а содержаний. *Надо было бы говорить*: «*суждение с общим содержанием*», «*суждение с особенным содержанием*». Эти свойства присущи содержанию и в том случае, когда оно устанавливается *не* как суждение, а как предложение (Satz) (см. § 2).

То же самое относится и к отрицанию. В случае косвенного доказательства говорят, например: «предположим, что отрезки AB и CD не равны». Здесь содержание, что отрезки AB и CD не равны, включает отрицание; но это содержание, хотя о нем и можно судить (Beurtheilung fähig), все же выдвигается не как суждение. Стало быть, отрицание прочно связано с содержанием, безразлично, выступает ли оно как суждение или нет. Поэтому я считаю более уместным рассматривать отрицание как признак *содержания, подлежащего суждению*.

Разделение суждений на категорические, гипотетические и дизъюнктивные представляется мне имеющим только грамматическое значение*.

---

* Обоснование этого вытекает из всего данного сочинения.

Аподиктическое суждение отличается от ассерторического тем, что в нем предполагается наличие общего суждения, из которого может быть выведено данное предложение, в то время как в ассерторическом такое предположение отсутствует. Когда я характеризую некоторое предложение как необходимое, то я тем самым намекаю на основания моего суждения. *Поскольку, однако, этим не затрагивается понятийное содержание суждения, форма аподиктического суждения не имеет для нас значения*[18].

Если некоторое суждение выдвигается как возможное, то говорящий либо воздерживается от суждения, давая понять, что ему не известен закон, из которого можно было бы вывести его отрицание, либо он говорит, что отрицание этого предложения во всей его общности — ложно. В последнем случае мы имеем *частно-утвердительное суждение** в соответствии с принятым наименованием. «Возможно, что Земля когда-нибудь столкнется с другим небесным телом» — пример первого случая; а «простуда может привести к смерти» — второго.

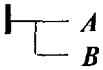
УСЛОВНАЯ СВЯЗЬ

§ 5. Если. Условный штрих

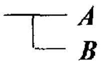
Если ***A*** и ***B*** означают содержания, преобразуемые в суждения**, то имеются следующие четыре возможности:

1) ***A*** утверждается (bejahen), и ***B*** утверждается;
2) ***A*** утверждается, а ***B*** отрицается (verneinen);
3) ***A*** отрицается, а ***B*** утверждается;
4) ***A*** отрицается, и ***B*** отрицается.

Тогда



означает суждение, согласно которому *третья из этих возможностей не имеет места*. Если



отрицается, то это соответственно означает, что имеет место третья возможность, и что, стало быть, ***A*** отрицается, а ***B*** утверждается[19].

О случаях, в которых

утверждается, отметим следующее:

1) Должно утверждаться ***A***. Тогда содержание ***B*** совершенно безразлично. Пусть, например, $\vdash$ ***A*** означает: 3 × 7 = 21, а ***B*** — то обстоятельство, что светит солнце. Здесь возможны только первые два из названных четырех случаев. Не требуется, чтобы была какая-либо причинная связь между обоими содержаниями.

2) ***B*** подлежит отрицанию. Тогда безразлично, какое содержание имеет ***A***. Пусть, например, ***B*** означает то обстоятельство, что perpetuum mobile возможен, а ***A*** — то обстоятельство, что мир бесконечен. Здесь возможны только второй и четвертый

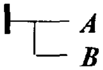
---

* См. § 12.

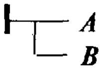
** См. § 2.

из названных четырех случаев. Не требуется, чтобы имелась какая-то причинная связь между обоими содержаниями.

3) Может быть так, что суждение

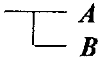


выносится, когда не известно, можно ли утверждать или отрицать ***A*** и ***B***. Пусть, например, ***B*** означает то обстоятельство, что Луна находится в квадратуре [в первой или третьей четверти], а ***A*** — то обстоятельство, что она видима как полукруг. В этом случае



можно передать с помощью союза «если»: «если Луна находится в квадратуре, то она видима как полукруг». Причинная связь, заключающаяся в слове «если», не передается, однако, нашими знаками, хотя суждение этого вида может быть вынесено только на ее основании. Ибо эта связь есть нечто всеобщее, хотя оно не находит еще здесь отображения (см. § 12).

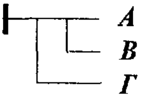
Вертикальную черту, связывающую обе горизонтальные, мы называем штрихом обусловливания — *условным штрихом.* Та часть верхней горизонтальной черты, которая находится слева от условного штриха, — это штрих содержания только что определенного нами значения знаковой конфигурации



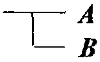
;

этот штрих примыкает к любому знаку, обозначающему все заданное выражение. Часть горизонтальной черты, заключенная между ***A*** и условным штрихом, есть штрих содержания предложения ***A***. Горизонтальная черта слева от ***B*** есть штрих содержания этого предложения.

В соответствии со сказанным, легко понять, что

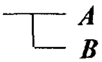


отвергает случай, когда ***A*** отрицается, а ***B*** и ***Г*** утверждаются. Это суждение надо мыслить составленным из

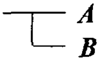


и ***Г***

так же, как



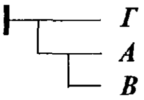
составлено из ***A*** и ***B***. Поэтому сначала мы имеем отрицание случая, когда



отрицается, а ***Г*** утверждается. Но отрицание предложения

означает, что ***А*** отрицается, а ***В*** утверждается. Отсюда мы и получаем указанное выше. Если налицо причинная связь, то можно сказать также: «***А*** есть необходимое следствие предложений ***В*** и ***Г***»; или: «если имеют место обстоятельства ***В*** и ***Г***, то имеет место и ***А***».

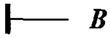
Не менее понятно, что



отвергает случай, когда ***В*** утверждается, но ***А*** и ***Г*** отрицаются. Если между ***А*** и ***В*** предполагается причинная связь, то это можно передать так: «если ***А*** есть необходимое следствие ***В***, то можно заключить, что ***Г*** имеет место»[20].

§ 6. Умозаключение. Аристотелевские виды умозаключений

Из определения (Erklärung), данного в § 5, вытекает, что из двух суждений

и


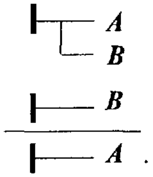
следует новое суждение

Из четырех перечисленных выше случаев третий исключается вследствие

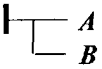
а второй и четвертый вследствие

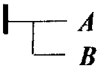
так что остается только первый случай.

Данное умозаключение можно записать, скажем, так[21].



Такая запись становится затруднительной, когда на местах, которые занимают ***А*** и ***В***, находятся сложные выражения, так как каждое из них надо будет записывать дважды. Поэтому я применяю следующее сокращение. Каждое суждение, встречающееся в ходе доказательства, обозначается номером, который помещается слева от этого суждения, когда оно встречается в первый раз. Пусть, например, суждение



— или какое-то суждение, которое содержит  как частный случай, — обозначено с помощью X. Тогда умозаключение я записываю так:

$$\text{(X)}: \quad \frac{\vdash\!\!-\!\!-\, B}{\vdash\!\!-\!\!-\, A}\ .$$

Читателю остается составить из $\vdash\!\!-\!\!-\, B$ и $\vdash\!\!-\!\!-\, A$ суждение

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!-\, B \end{array}$$

и убедиться в том, что оно совпадает с суждением X, приведенным выше.

Если, например, суждение $\vdash\!\!-\!\!-\, B$ обозначено с помощью XX, то это же умозаключение я записываю так:

$$\text{(XX)} :: \quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!-\, B \\ \hline \vdash\!\!-\!\!-\, A \end{array}\ .$$

При этом двоеточие указывает на то, что здесь мы поступаем иным способом, чем это было сделано выше: из двух только что выписанных суждений должно быть образовано суждение $\vdash\!\!-\!\!-\, B$, обозначенное как XX.

Далее, если бы, например, суждение $\vdash\!\!-\!\!-\, Г$ было обозначено посредством XXX, то оба суждения

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\ \quad|\quad\llcorner\!\!-\!\!-\, B \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\, Г \end{array} \\ \text{(XXX)}:: & \overline{\qquad\qquad} \\ & \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!-\, B \end{array} \\ \text{(XX)}:: & \overline{\qquad\qquad} \\ & \vdash\!\!-\!\!-\, A \end{array}$$

я записал бы как

$$\text{(XX, XXX)}:: \quad \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, A \\ \quad|\quad\llcorner\!\!-\!\!-\, B \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\, Г \\ \hline\hline \vdash\!\!-\!\!-\, A \end{array}\ ,$$

что было бы еще короче[22].

В логике после Аристотеля насчитывается целый ряд видов умозаключений; я же пользуюсь только этим одним: ———, по крайней мере во всех случаях, когда из более чем одного суждения выводится новое суждение. А именно, истину, заключенную в некотором другом виде умозаключения, можно выразить в суждении формы: если верно M и если верно N, то верно и Λ; или с помощью знаков:

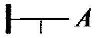
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!-\!\!\!\top\!\!-\!\!-\, \Lambda \\ \quad|\quad\llcorner\!\!-\!\!-\, M \\ \quad\llcorner\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\, N\ . \end{array}$$

Тогда, как показано выше, из этого суждения и суждений $\vdash\!\!-\!\!-\, N$ и $\vdash\!\!-\!\!-\, M$ следует суждение $\vdash\!\!-\!\!-\, \Lambda$. Так любое умозаключение, отвечающее какому-либо способу умозаключения, может быть сведено к нашему случаю. Таким образом, поскольку можно обойтись единственным видом умозаключения, требование обозримости обязывает нас так и поступать[23]. К этому можно добавить, что и в противном случае не было бы оснований оставаться при Аристотелевых способах умозаключения, а пришлось бы присоединять к ним неопределенно много новых умозаключений: из каждого суждения, выраженного формулами § 13—22, можно было бы извлечь особый вид умозаключения. *Это ограничение одним-единственным способом умозаключения, однако, никоим образом не выражает какого-то психологического закона — это просто решение вопроса в духе наибольшей целесообразности.* Некоторые из суждений, которые появляются вместо аристотелевских видов умозаключений, будут приведены в § 20, № 59, 62, 65.

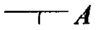
ОТРИЦАНИЕ

§ 7. Штрих отрицания. Или, или—или, и, но, и не, ни—ни

Если с нижней стороны штриха содержания помещается небольшая вертикальная черта, то этим выражается то обстоятельство, *что содержание это не имеет места.* Так, например,



означает: «*A* не имеет места». Я называю эту небольшую вертикальную черту *штрихом отрицания.* Та часть горизонтальной черты штриха содержания, что находится справа от штриха отрицания, есть штрих содержания суждения *A*, а та, что находится слева от него, есть, напротив, штрих содержания отрицания суждения *A*. Если отсутствует штрих суждения, то здесь, как и во всей моей системе записи (Begriffsschrift), суждения не выносятся;



только предлагает составить представление о том, что *A* не имеет места, не выражая при этом, истинно или нет это представление.

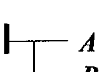
Рассмотрим теперь некоторые случаи, в которых знаки условной связи и отрицания связаны друг с другом[24]. Суждение

значит: «случай, когда ***B*** следует утверждать, а отрицание предложения ***A*** — отрицать, не имеет места»; другими словами: «возможность утверждать оба суждения, *A* и ***B***, отсутствует»; или: «***A*** и ***B*** исключают друг друга». Таким образом, остаются только следующие три случая:

A утверждается, а ***B*** отрицается;
A отрицается, а ***B*** утверждается;
A отрицается, и ***B*** отрицается.

Из сказанного выше легко видеть, какое значение имеет каждая из трех частей горизонтальной черты суждения А.

Суждение



означает: «случая, когда ***А*** отрицается, а отрицание суждения ***В*** утверждается, не существует»; или «***А*** и ***В*** не могут, оба, отрицаться». Остаются только следующие возможности:

А утверждается, и ***В*** утверждается;
А утверждается, а ***В*** отрицается;
А отрицается, а ***В*** утверждается;

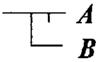
А и ***В*** вместе исчерпывают все возможности. Слова «или» (oder) и «или — или» (entweder — oder) употребляются двояким образом.

Во-первых, «***А*** или ***В***» может означать то же самое, что и

то есть немыслимо ничего, кроме ***А*** и ***В***. Например, если определенная масса газа нагревается, то увеличивается ее объем или в ней возрастает давление. Во-вторых, выражение

«***А*** или ***В***»

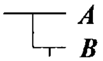
может соединять в себе значения выражений

 и 

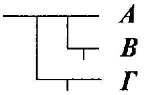
так что, во-первых, кроме ***А*** и ***В***, ничто третье невозможно, и что, во-вторых, ***А*** и ***В*** исключают друг друга. Тогда из четырех возможностей остаются только следующие две:

А утверждается, а ***В*** отрицается;
А отрицается, а ***В*** утверждается.

Из двух способов употребления выражения «***А*** или ***В***» наиболее важным является первое, при котором не исключается совместное существование ***А*** и ***В***, и *мы будем употреблять слово «или» именно в этом значении.* Быть может, между выражениями «или» и «или—или» уместно проводить такое различие: лишь последнее включает дополнительное значение взаимного исключения. Тогда

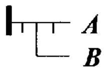


можно переводить как «***А*** или ***В***». Подобным же образом выражение

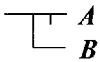


имеет значение «***А*** или ***В*** или ***Г***».

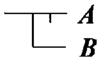
Суждение



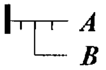
означает:

« 

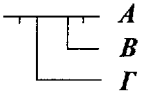
отрицается», или: «случай, когда ***А*** и ***В*** оба утверждаются, происходит». Три возможности, которые остаются для

 ,

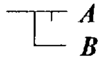
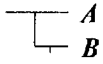
напротив, исключаются. Поэтому суждение



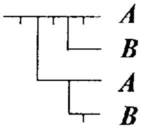
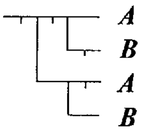
можно перевести как: «оба, ***А*** и ***В***, суть факты». Легко также видеть, что



может быть передано как «***А*** и ***В*** и ***Г***». Если выражение «или ***А***, или ***В***», имеющее дополнительное значение взаимного исключения, мы захотим представить в знаковой форме, то придется выразиться так:

«  и  ».

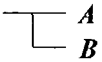
Это дает:

 или также  .

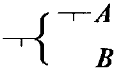
Вместо этого «и» можно выразить с помощью знаков обусловленности и отрицания; можно поступить и наоборот — представить условную связь с помощью знака для «и» и знака отрицания. Можно было бы, например, ввести

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{\Delta} \end{cases}$$

как обозначение для совокупного содержания ***Г*** и ***Δ*** и передать тогда



с помощью

 .

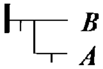
Я избрал другой способ, так как мне кажется, что с его помощью умозаключение выражается более просто. Различие между «и» и «но» («aber») такого рода, что его нельзя выразить в моей символической системе (Begriffsschrift). Говорящий употребляет «но», когда хочет указать, что последующее отлично от того, что поначалу можно было предположить. Суждение

означает: «из четырех возможностей наступает третья, а именно: ***А*** отрицается, а ***В*** утверждается. Поэтому его можно перевести:

«***В*** и (но) не ***А*** имеют место».

Подобным же образом можно было бы дать перевод и знаковой конфигурации

Суждение



означает: «случай, когда ***A*** и ***B*** оба отрицаются, происходит». Поэтому его можно перевести так:

«ни ***A***, ни ***B*** не является фактом».

Слова: «или», «и», «ни — ни» рассматриваются здесь, разумеется, постольку, поскольку они связывают содержания, *допускающие истинностную оценку.*

РАВЕНСТВО СОДЕРЖАНИЙ

§ 8. Необходимость знака для равенства содержаний; введение такого знака

Равенство содержаний отличается от условной связи и отрицания тем, что относится оно не к содержаниям, а к именам. В то время как знаки обычно являются только представителями своих содержаний — так что каждая конфигурация, в которой они встречаются, служит выражением взаимоотношения их содержаний, — они вдруг оборачиваются своей самостоятельной сущностью, когда их связывают посредством знака равенства содержаний; ибо тем самым обозначается то обстоятельство, что два имени имеют одно и то же содержание. Таким образом, введение знака равенства содержаний неизбежно приводит к раздвоению значений всех знаков: значение это относится то к их содержанию, то к ним самим. Это поначалу создает впечатление, что речь здесь идет о чем-то, принадлежащем одним *выражениям*, а *не мышлению*; и что для одного и того же содержания не требуются различные знаки и, стало быть, не нужен и знак для равенства содержаний. Чтобы показать ошибочность подобного взгляда, я приведу следующий пример, относящийся к геометрии[25]. Пусть на окружности фиксирована точка *A*, вокруг которой происходит вращение луча. Когда этот луч совпадет с диаметром, назовем противоположный его конец точкой *B*, соответствующей этому его положению. Будем, далее, называть точку пересечения обоих линий, луча и окружности, точкой *B*, соответствующей каждый раз положению луча, получающемуся по правилу: непрерывному изменению положения луча всегда должно соответствовать непрерывное изменение положения точки *B*. Стало быть, имя *B* до тех пор означает нечто неопределенное, пока не задано соответствующее положение луча. Теперь поставим вопрос: какая точка соответствует положению луча, когда он перпендикулярен этому диаметру? Ответ: точка *A*. Имя *B* в этом случае, следовательно, имеет то же самое содержание, что и имя *A*; и тем не менее вначале нельзя было бы использовать всего одно имя, так как только ответ на вопрос это оправдывает. Одна и та же точка определяется двояким образом:

1) непосредственно — путем наблюдения; и
2) как точка *B*, которая принадлежит лучу, перпендикулярному данному диаметру.

Каждому из этих двух способов определения (Bestimmungsweisen) данной точки соответствует особое имя. Таким образом, необходимость знака для одинаковости содержаний — их равенства[26] основывается на следующем: одно и то же содержание может быть определено совершенно разными способами; но то, что в некотором частном случае *двумя способами задано действительно одно и то же*, — это есть содержание некоторого *суждения*. Пока этого совпадения не произошло, мы должны использовать два разных имени, отвечающих этим двум способам определения. Соответствующее суждение, однако, нуждается для своего выражения в знаке равенства содержаний, связывающем два эти имени. Отсюда вытекает, что различие имен для одного и того же содержания — это не всегда пустая формальность: оно касается самого существа вопроса, коль скоро имена эти связаны с различными способами определения. В этом случае суждение, имеющее предметом одинаковость содержаний, является синтетическим в кантовском смысле. Менее серьезная причина введения знака для равенства содержаний состоит в том, что иногда бывает целесообразно вместо громоздкого выражения ввести сокращение. Тогда надо выразить равенство содержания сокращения и содержания первоначальной формы.

Так, пусть

$$\vdash (A \equiv B)$$

значит: *знак A и знак B имеют одно и то же отвлеченное содержание (begrifflicher Inhalt), так что всюду вместо A можно поместить B и наоборот.*

ФУНКЦИЯ

§ 9. Разъяснение слов «функция» и «аргумент». Функции многих аргументов. Аргументные места. Субъект, объект

Если представить себе, что на нашем языке формул (Formelsprache) выражено то обстоятельство, что водород легче углекислого газа, то на место знака для водорода мы можем поместить знак кислорода или азота. Тем самым меняется смысл: «кислород» или «азот» вступает в отношения, в которых до этого находился «водород». Если некоторое выражение мыслится изменяемым таким образом, то оно распадается на составные части, — на часть, которая неизменна и представляет совокупность отношений, и на знак, который мыслится заменяемым другими знаками и который означает предмет, находящийся в этих отношениях. Первую составную часть я называю функцией, вторую — ее аргументом. Это различие не связано с понятийным содержанием, оно зависит только от точки зрения. При первоначально принятом нами способе рассмотрения, «кислород» был аргументом, «быть легче, чем углекислый газ» — функцией; но то же самое понятийное содержание мы можем выразить и так, что «углекислый газ» станет аргументом, а «быть тяжелее, чем газ кислород», — функцией. Тогда мы должны считать, что «углекислый газ» допускает замену другими представлениями, такими, как «солянокислый газ» или «газообразный аммиак».

«То обстоятельство, что углекислый газ тяжелее водорода»

и

«то обстоятельство, что углекислый газ тяжелее кислорода»,

— это одна и та же функция при различных аргументах, если «водород» и «кислород» рассматриваются как аргументы; напротив, они оказываются разными функциями одного и того же аргумента, если в качестве такового принимается «углекислый газ»[27].

Рассмотрим еще пример: «то обстоятельство, что центр массы Солнечной системы не испытывает ускорения, если в Солнечной системе действуют только внутренние силы». Здесь «Солнечная система» встречается в двух местах. Поэтому мы можем толковать это предложение как функцию аргумента «Солнечная система» различным образом — смотря по тому, мыслим ли мы, что «Солнечная система» заменяема чем-то другим на первом или на втором или на обоих местах — в последнем случае, однако, заменять надо одним и тем же. Все эти функции отличны друг от друга. То же самое видим мы и в случае предложения, что Катон умертвил Катона[28]. Если мы мыслим «Катона» заменяемым на первом месте, то «умертвить Катона» есть функция; если же мы мыслим «Катона» заменяемым на втором месте, то функцией окажется «быть умерщвленным Катоном»; если же, наконец, мы мыслим «Катона» заменяемым на обоих местах, то функцией является «умертвить самого себя».

Выразим теперь суть дела в общем виде:

Если в некотором выражении, о содержании которого незачем выносить суждения, простой или сложный знак встречается на одном или многих местах и мы мыслим его — на всех или на некоторых из этих мест — допускающим замену чем-то другим, причем замену везде, но одним и тем же, то часть выражения, остающуюся при этом неизменной, мы называем функцией, а ту часть, которая может заменяться, — ее аргументом[29].

Поскольку, в соответствии со сказанным, нечто может встречаться как аргумент и вместе с тем быть на таких местах в функции, где его нельзя представить заменяемым, мы отличаем в функции аргументные места от прочих. Здесь следует предостеречь от одного заблуждения, к которому легко приводит использование языка. Если сравнить два предложения:

«число 20 представимо в виде суммы квадратов четырех чисел»

и

«каждое положительное целое число представимо в виде суммы квадратов четырех чисел»,

то кажется, будто выражение «быть представимым в виде суммы квадратов четырех чисел» можно рассматривать как функцию, которая в одном случае имеет аргументом «число 20», а в другом — «каждое положительное целое число». Ошибочность такого взгляда становится понятной, если обратить внимание на то, что «число 20» и «каждое положительное целое число» не являются понятиями одинакового уровня. То, что высказывается о числе 20, нельзя в том же смысле высказать о «каждом положительном целом числе»; но, правда, при известных обстоятельствах это может быть высказано о каждом положительном целом числе. Выражение «каждое положительное целое число» само по себе не доставляет — как в случае «числа 20» — самостоятельного представления (Vorstellung): оно получает смысл лишь благодаря связи слов в предложении.

Пока функция и аргумент полностью определены (bestimmt), для нас не имеют значения те различные способы, какими одно и то же понятийное содержание рассматривается как функция того или иного аргумента. Когда же аргумент оказывается *неопределенным* (unbestimmt), как это имеет место в суждении «ты можешь взять в качестве аргумента выражения ««быть представимым в виде суммы квадратов четырех чисел»» любое положительное целое число: предложение все равно останется верным», различение функции и аргумента приобретает *содержательное* значение. Но может быть и обратное: аргумент определен, а функция не определена. В обоих случаях расчленение целого по его содержанию на *функцию* и *аргумент* происходит благодаря противоположности *определенного* и *неопределенного* или *более* или *менее* определенного, а не только в зависимости от точки зрения.

Если знак, который рассматривался как незаменяемый в некоторых или во всех вхождениях в функцию, считать допускающим замену, то в результате получается функция, имеющая, кроме прежних, еще один аргумент.* Таким образом возникают *функции от двух и более аргументов.* Так, например, «то обстоятельство, что водород легче, чем углекислый газ», можно понимать как функцию двух аргументов — «водород» и «углекислый газ».

Подлежащее — субъект предложения — с точки зрения говорящего обычно является главным аргументом; следующим по важности обычно выступает дополнение. Благодаря возможности выбора между формами языка и словами — такого выбора, как

активный залог — пассивный залог,
тяжелее — легче,
давать — получать,

язык обладает свободой по своему усмотрению выдвигать в качестве главного аргумента ту или иную составную часть предложения, ту или иную его компоненту, — свободой, которая, однако, ограничена недостатком слов.

§ 10. Использование букв как знаков функций. «*A* обладает свойством *Φ*». «*B* находится в отношении *Ψ* к *A*». «*B* есть результат применения процедуры *Ψ* к предмету *A*. Знак функции как аргумент

*Чтобы выразить неопределенную функцию аргумента **A**, будем заключать **A** в скобки, следующие за какой-либо буквой,* например

$$\Phi(A).$$

Подобно этому

$$\Psi(A, B)$$

*означает функцию двух аргументов **A** и **B**, которые детальнее не определены. При этом места **A** и **B** в скобках соответствуют тем местам, которые **A** и **B** занимают в данной функции,* все равно, является ли это место одним или их несколько как для *A*, так и для ***B***. *Поэтому*

$$\Psi(A, B)$$

в общем случае отлично от

$$\Psi(B, A).$$

Соответственно этому выражаются неопределенные функции нескольких аргументов.

Выражение

$$\vdash\!\!-\!\!-\,\Phi(A)$$

можно прочитать как: «*A* имеет свойство *Φ*».

Выражение

$$\vdash\!\!-\!\!-\,\Psi(A, B)$$

может быть переведено как «*B* находится в *Ψ*-отношении к *A*» или «*B* есть результат применения процедуры (Verfahren) *Ψ* к предмету *A*».

---

* Знак, который раньше мыслился заменяемым [на некоторых местах], тогда как на других местах на него смотрели как на постоянный (bleibend), может тоже рассматриваться как заменяемый на этих последних.

6 - 1742

Поскольку в выражении

$$\Phi(A)$$

знак Φ встречается один раз и поскольку можно принять, что допустима замена его другими знаками Ψ, X — благодаря чему были бы выражены другие функции аргумента A, — *$\Phi(A)$ можно рассматривать как некоторую функцию от Φ как ее аргумента*[30]. Тут особенно ясно видно, что понятие функции в анализе, которое я в целом принимаю, намного более ограничено, чем то, которое было развито здесь.

ВСЕОБЩНОСТЬ

§ 11. Готические буквы. Лунки в штрихе содержания. Заменимость готических букв. Область действия готической буквы. Латинские буквы

Рассматривая выражение суждения, мы всегда можем считать конфигурацию знаков, стоящую справа от $\vdash$, функцией одного из встречающихся в нем знаков. *Если на место этого аргумента поместить какую-либо готическую букву и образовать лунку в штрихе содержания, в которой стоит та же буква, как, например, в суждении*

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}),$$

то это будет означать суждение, гласящее, что указанная функция есть факт — некое положение вещей, независимо от того, что бы мы ни приняли в качестве ее аргумента[31]. Поскольку знак функции — функциональный знак, такой, как буква Φ, использовавшаяся в записи $\Phi(A)$, — сам может рассматриваться как аргумент некоторой функции, вместо этой буквы можно подставить — в том смысле, в каком это было установлено выше, — одну из готических букв. Значение готической буквы подчиняется только само собой разумеющимся ограничениям, состоящим в том, что возможность истинностной оценки (§ 2) знаковой конфигурации, идущей за штрихом содержания, должна остаться незатронутой и что если готическая буква выступает в качестве знака функции, это обстоятельство должно приниматься во внимание. *Все остальные условия, которым должно подчиняться то, что можно подставлять на место готической буквы, должны быть включены в соответствующее суждение.* Из подобного суждения можно, поэтому, вывести любое множество суждений менее общего содержания, каждый раз подставляя вместо готической буквы нечто иное, после чего в штрихе содержания исчезает лунка. Горизонтальная черта слева от лунки в суждении

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a})$$

есть штрих содержания, указывающий на то, что $\Phi(\mathfrak{a})$ остается справедливым, что бы ни подставлять на место $\mathfrak{a}$, а черта справа от лунки есть штрих содержания выражения $\Phi(\mathfrak{a})$, причем на место, занимаемое буквой $\mathfrak{a}$, должно подставляться нечто определенное.

Из сказанного выше о значении штриха суждения легко видеть, что означает такое выражение, как

$$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-X(\mathfrak{a})\ .$$

Оно может встречаться как часть некоторого суждения, например:

$$\vdash\!\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-X(\mathfrak{a}), \qquad \begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\ A \\ \quad\llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-X(\mathfrak{a})\ .\end{array}$$

Очевидно, что из этих суждений в отличие от

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{a}),$$

подстановкой чего-то определенного на место $\mathfrak{a}$ не могут быть выведены менее общие суждения. Посредством $\vdash\!\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a})$ мы отрицаем, что $X(\mathfrak{a})$ всегда является фактом, — что бы мы ни поместили на место буквы $\mathfrak{a}$. Этим мы никоим образом не отвергаем того, что букве $\mathfrak{a}$ можно придать значение Δ, так что $X(\Delta)$ становится неким положением вещей. Предложение

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\neg\!\!\top\!\!-\!-\ A \\ \quad\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a}) \end{array}$$

означает, что случай, когда $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-X(\mathfrak{a})$ утверждается, а A отрицается, не наступает. Этим, однако, мы вовсе не отрицаем того, что может наступить случай, когда $X(\Delta)$ утверждается, а A отрицается; ибо, как мы только что видели, $X(\Delta)$ может утверждаться, а $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a})$ отрицаться. Стало быть, и здесь на место буквы $\mathfrak{a}$ нельзя поместить что угодно, не подвергая опасности верность данного суждения. Это объясняет, почему необходима лунка с записанной в ней готической буквой: *она ограничивает область, на которую простирается всеобщность, обозначаемая с помощью этой буквы. Только в пределах этой области готическая буква сохраняет свое значение*; в суждении одна и та же готическая буква может встречаться в различных областях, не распространяя того значения, которое придается суждению в одной области, на остальные. Область действия одной готической буквы может включать в себя область другой, как это показывает пример

$$\begin{array}{l} \vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\!-\ A(\mathfrak{a}) \\ \qquad\ \llcorner\!\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\!-\ B(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) \end{array}\ .$$

В этом случае мы должны выбирать *различные* буквы; нельзя вместо $\mathfrak{e}$ поместить $\mathfrak{a}$. Разрешается, конечно, заменять какую-либо готическую букву, повсюду в ее области, некоторой другой вполне определенной готической буквой, но только при условии, что на местах, где до этого стояли различные буквы, после этой замены тоже будут стоять различные буквы. Это не влияет на содержание соответствующего суждения[32]. *Другие замены разрешены только тогда, когда лунка следует непосредственно за штрихом суждения*, так что содержание всего данного суждения составляет область данной готической буквы. Поскольку в соответствии со сказанным этот случай выделяется особо, я введу для него следующее сокращение. *Любая* (*eine*) *латинская буква всегда имеет своей областью содержание всего суждения* — без обозначения ее с помощью лунки в штрихе его содержания. Если латинская буква встречается в выражении, которому не предшествует штрих суждения, то выражение это не имеет смысла. *Любую латинскую букву всегда можно заменить какой-либо готической буквой, которая еще не встречалась в суждении*, причем сразу после штриха содержания надо поместить лунку. Например,

$$\vdash\!-\!-\ X(a)$$

можно заменить на

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ X(\mathfrak{a})$$

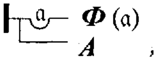
при условии, что a встречается в $X(a)$ только на аргументных местах.

Очевидно также, что из

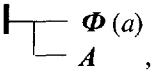
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\ \Phi(a) \\ \quad\llcorner\!-\ A \end{array}$$

6*

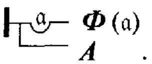
можно вывести



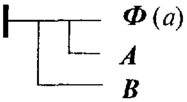
*если **A** есть выражение, в котором не встречается а, и если а в **Φ** (а) стоит только на аргументных местах.* Если $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\boldsymbol{\Phi}(\mathfrak{a})$ отрицается, то надо иметь возможность указать такое значение для *а*, что ***Φ*** (*а*) будет отрицаться. Стало быть, если $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\boldsymbol{\Phi}(\mathfrak{a})$ будет отрицаться, а ***A*** утверждаться, то надо быть в состоянии придать *а* такое значение, чтобы ***A*** утверждалось, а ***Φ*** (*а*) — отрицалось. Но это невозможно в силу того, что



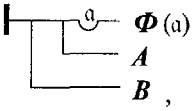
ибо это означает, что, каким бы ни было *а*, случай, когда ***Φ*** (*а*) отрицается, а ***A*** утверждается, исключен. Поэтому нельзя отрицать $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\boldsymbol{\Phi}(\mathfrak{a})$, а ***A*** утверждать, то есть:



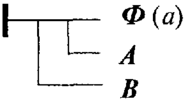
Точно так же из



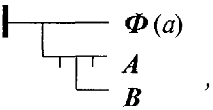
следует



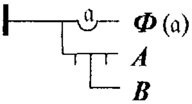
если *а* не встречается в ***A*** и ***B***, а ***Φ*** (*а*) содержит *а* только на аргументных местах. Этот случай может быть сведен к предыдущему, так как вместо



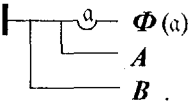
можно положить



а



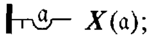
снова преобразовать в



Аналогичное рассуждение справедливо и тогда, когда имеется еще больше условных штрихов.

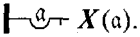
§ 12. Существуют вещи, которые не —. Не существует ни одного —. Существуют некоторые —. Каждый. Все. Причинные зависимости. Ни один. Некоторые не —. Некоторые. Возможно, что —. Таблица логических противоположностей

Рассмотрим теперь некоторые конфигурации знаков, например, предложение



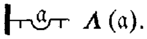
оно означает, что может быть найдено Δ такое, что $X(\Delta)$ должно отрицаться. А потому это можно перевести так: «существуют вещи, которые не имеют свойства X».

От этого отличается смысл суждения



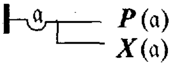
Оно гласит: «каким бы ни было $\mathfrak{a}$, $X(\mathfrak{a})$ всегда надлежит отрицать», или: «не существует ничего, что имело бы свойство X»; или, если назвать с помощью X нечто, что имеет свойство X, *то:* «X не существует».

Выражение —𝔞— $\Lambda(\mathfrak{a})$ отрицается с помощью



Поэтому его можно перевести как «существуют Λ»*.

Предложение



означает: «что бы ни было подставлено на место, занимаемое a, случая, когда $P(\mathfrak{a})$ отрицается, а $X(\mathfrak{a})$ утверждается, не происходит». Таким образом, возможно, что при одних значениях, которые можно придать $\mathfrak{a}$,

$P(\mathfrak{a})$ должно утверждаться и $X(\mathfrak{a})$ должно утверждаться, при других же значениях

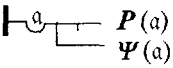
$P(\mathfrak{a})$ должно утверждаться, а $X(\mathfrak{a})$ отрицаться, еще при других

$P(\mathfrak{a})$ должно отрицаться и $X(\mathfrak{a})$ — отрицаться.

Таким образом это предложение можно перевести как: «если нечто имеет свойство X, то оно имеет и свойство P», или «каждое X есть P», или «все X суть P».

Это способ выразить причинные зависимости.

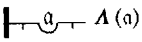
Предложение



означает: «нельзя придать $\mathfrak{a}$ такое значение, что и $P(\mathfrak{a})$, и $\Psi(\mathfrak{a})$ можно было бы утверждать. Значит, это можно перевести так: «то, что имеет свойство Ψ, не имеет свойства P», или «ни одно Ψ не есть P».

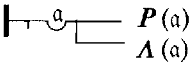
---

* Это выражение надо понимать так, что оно охватывает и случай, когда «существует какое-то одно Λ». Если, например, $\Lambda(x)$ означает, что x есть дом, то

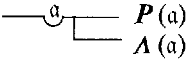


гласит: «существуют дома или по крайней мере один дом». Ср. § 2, примеч. 2.

Предложение



отрицает то, что



и может быть поэтому передано как: «некоторые *Λ* суть не *P*».

Предложение

отвергает, что ни одно *M* не есть *P* и значит поэтому: «некоторые* *M* суть *P*»; или: «возможно, что какое-то *M* есть *P*».

Так получается таблица логических противоположностей[33]:

* Слово «некоторые» (einige) здесь всегда надлежит понимать так, что оно охватывает и случай— «один-единственный». Более пространно то же можно было бы передать как «некоторые или хотя бы один».

II. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ВЫВОД НЕКОТОРЫХ СУЖДЕНИЙ ЧИСТОГО МЫШЛЕНИЯ

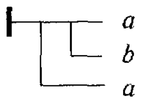
§ 13. В чем польза представления в виде вывода

Некоторые принципы мышления уже привлекались нами в первом разделе с тем, чтобы преобразовать их в правила применения наших знаков. Эти правила и законы, в них отображенные, не могут получить выражения в нашей понятийной записи, так как они лежат в ее основе. Теперь, в этом разделе, некоторые суждения чистого мышления[35] — те, для которых это возможно, — будут представлены с помощью знаков. Напрашивается мысль выводить более сложные суждения такого рода из более простых, но не для того, чтобы в них вникать — что в большинстве случаев было бы бесполезно, — а для того, чтобы выявлять взаимоотношения суждений. Очевидно, не одно и то же, известны ли нам только данные законы или же мы знаем также, что одни из них даны нам потому, что были даны другие. Таким способом мы приходим к небольшому количеству законов, в которых — если учесть и те, которые содержатся в правилах, — заключено содержание их всех, хотя и в нераскрытом виде. Польза от способа подобного выводного представления состоит также в том, что он позволяет уяснить сущность этих законов. Поскольку вследствие необозримости множества законов, которые могут быть выдвинуты, их невозможно перечислить, полнота законов есть не что иное, как достижимость в ходе поиска тех из них, которые благодаря своей *силе* включают в себя их все. Разумеется, надлежит признать, что такое сведéние возможно не только одним этим способом. Поэтому такой способ представления позволяет выяснить не все взаимоотношения законов мышления. Быть может, имеется некий иной ряд суждений, из которых — если присоединить к ним те, которые содержатся в наличных правилах, — тоже можно будет вывести все законы мышления. Тем не менее я считаю, что изложенный здесь способ сведéния позволяет представить такое множество отношений, что тем самым любой иной способ выведения законов мышления очень облегчается.

Число предложений, составляющих ядро последующего представления, равно девяти. Из них три — формулы 1, 2 и 8 — требуют для своего выражения, если не обращать внимания на буквы, только знака обусловленности; три — формулы 28, 31 и 41 — содержат, кроме того, знак отрицания; две — формулы 52 и 54 — знак равенства содержаний, и в одном предложении, в формуле 58, в штрихе содержания используется лунка.

Следующее ниже выведение формул могло бы утомить читателя, если он захотел бы проследить его во всех подробностях; оно приводится только для того, чтобы наготове был ответ на любой вопрос относительно места в последовательности формул, которое занимает какой-либо закон.

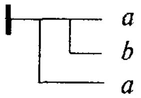
§ 14. Первые два основных закона для условной связи



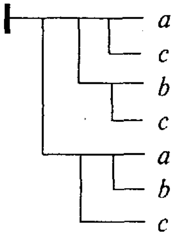
(1.

гласит: «случай, когда *a* отрицается, а *b* утверждается и *a* утверждается, исключен»[36]. Это показывает, что *a* не может вместе отрицаться и утверждаться. Данное суждение можно выразить также словами: «если справедливо предложение *a*, то оно справедливо и в случае, когда справедливо какое угодно предложение *b*». Пусть, например, *a* означает суждение, что сумма углов треугольника *ABC* составляет два прямых угла; *b*— предложение, что угол *ABC* является прямым.

Тогда мы получаем суждение: «если сумма углов треугольника *ABC* составляет два прямых угла, то это справедливо и для случая, когда угол *ABC* является прямым».

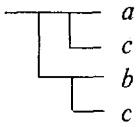
Единица справа от формулы  есть ее номер.

Суждение

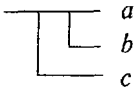


(2.

означает: «случай», когда

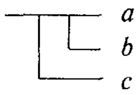


отрицается, а

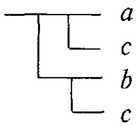


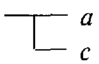
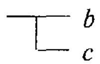
утверждается, не имеет места».

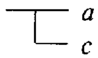
Но

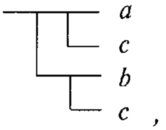


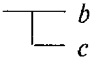
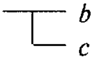
означает, что случай, когда *a* отрицается, а *b* утверждается и *c* утверждается, исключен. Отрицание формулы

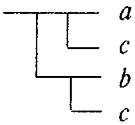


говорит нам, что формула  должна отрицаться, а формула 

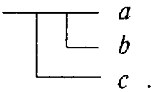
утверждаться. Но отрицание формулы  означает, что *a* должно отрицаться, а *c* — утверждаться. Отрицание формулы



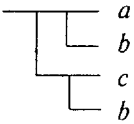
стало быть, значит, что *a* отрицается, *c* — утверждается, и  утверждается. Но утверждение формул  и *c* влечет утверждение *b*. Поэтому отрицание формулы



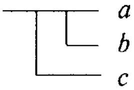
имеет следствием отрицание *a* и утверждение *b* и *c*. Этот случай как раз и исключает утверждение формулы



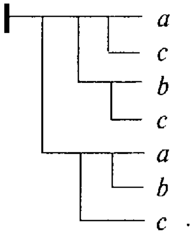
Стало быть, случай, когда



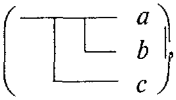
отрицается, а



утверждается, не имеет места, и тем самым подтверждается суждение



Для случая, когда налицо причинные связи, это можно выразить так:

«если некоторое предложение (*a*) есть необходимое следствие двух предложений (b и c) 

, и если одно из них (b) в свою очередь есть

необходимое следствие другого (c), то данное предложение (a) есть необходимое следствие одного этого последнего предложения (c)».

Пусть, например,

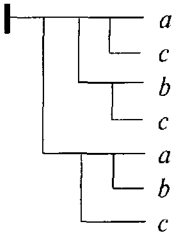
c означает, что в некоторой числовой последовательности Z каждый последующий член больше предшествующего;
b означает, что некоторый член M больше члена L;
a означает, что член N больше L.

Тогда мы получаем следующее суждение:

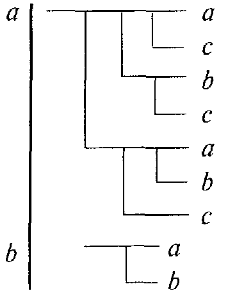
«если из предложений, гласящих, что в числовой последовательности Z, каждый последующий член больше предшествующего и что член M больше члена L, можно заключить, что член N больше члена L, и если из предложения, гласящего, что в числовой последовательности Z каждый последующий член больше предшествующего, следует, что M больше L, то предложение, гласящее, что N больше L, может быть выведено из предложения: каждый последующий член числовой последовательности Z больше предшествующего».

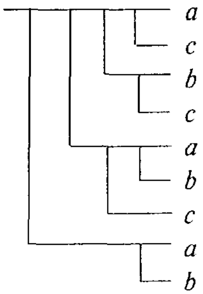
§ 15. Следствия, вытекающие из этих законов

2



(1) :

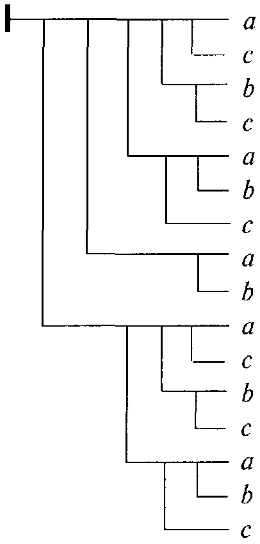




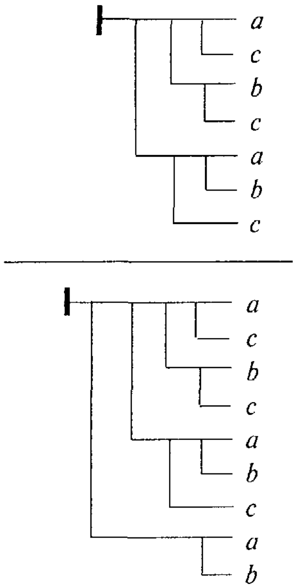
(3.

Помещенная слева двойка означает, что справа от нее стоит формула (2). Умозаключение, определяющее переход от (2) и (1) к (3), выражено в сокращенном виде — в соответствии с § 6. Подробно это можно записать так:

1

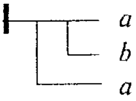


2

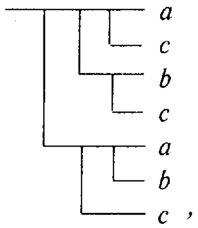


(3.

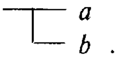
Чтобы предложение (1) — в той громоздкой форме, в которой оно здесь выступает, — сделать более понятным, под единицей помещена небольшая таблица[37]. Она означает, что в суждении



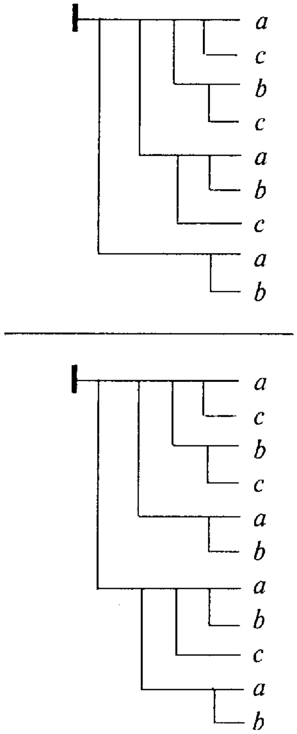
на место *a* можно подставить формулу



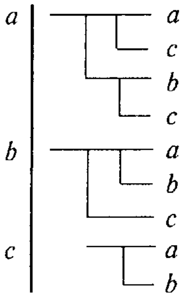
а на место *b*— формулу



3

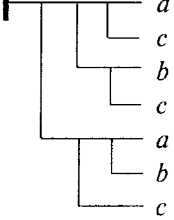


(2) :

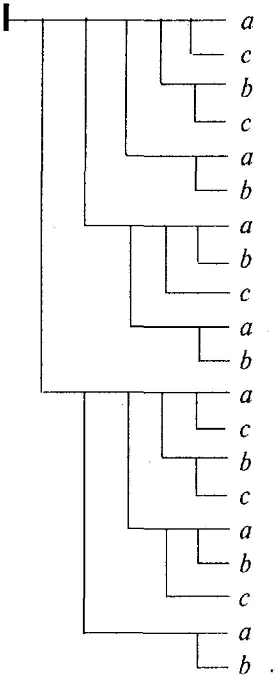


(4.

Таблица, помещенная внизу под (2), означает, что в

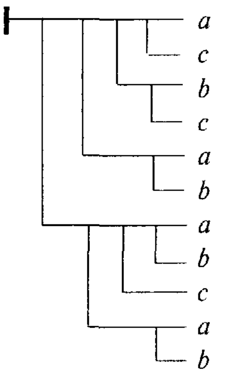


на места предложений *a*, *b*, *c* можно подставить выражения, стоящие справа от нее, и мы получаем

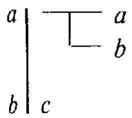


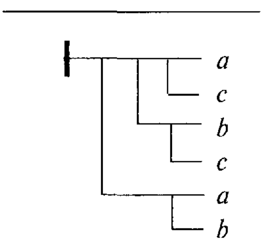
Легко видеть, как из нее и (3) следует (4).

4



(1) ::





(5.

Значение двойного двоеточия объяснено в § 6.
Пример, соответствующий формуле (5). Пусть

a есть то обстоятельство, что брусок железа *E* намагничивается;
b есть то обстоятельство, что по проводнику *D* течет электрический ток;
c есть то обстоятельство, что ключ *T* нажат.

Тогда мы получаем суждение:

«если предложение, что *E* намагничивается, когда по проводнику *D* протекает электрический ток, — верно;
если, далее, верно предложение, что электрический ток протекает по *D*, когда ключ *T* нажат;
то *E* намагничивается, когда ключ *T* нажат».

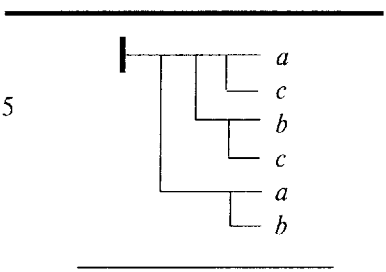
Предполагая причинные связи, (5) можно выразить так:

«если *b* есть достаточное условие для *a*, если *c* есть достаточное условие для *b*, то *c* есть достаточное условие для *a*».

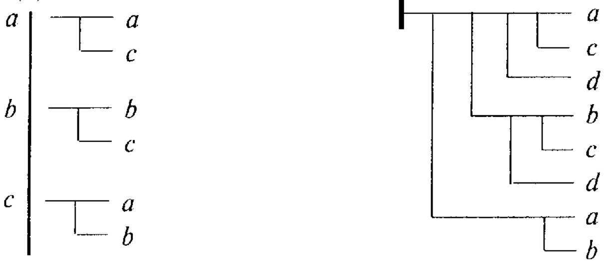
(5) :

(6.

38



(6):



(7.

Это предложение отличается от предложения (5) только тем, что вместо одного условия, *c*, выступают два условия — *c* и *d*.

Пример, соответствующий формуле (7). Пусть

d есть то обстоятельство, что поршень K воздушного насоса перемещается из своего крайнего левого положения в крайнее правое;

c есть то обстоятельство, что кран H, находится в состоянии I ;

b есть то обстоятельство, что давление D воздуха в левой части насоса уменьшилось наполовину;

a есть то обстоятельство, что показания H барометра, связанного с объемом левой части насоса, уменьшились наполовину.

Тогда мы получаем суждение:

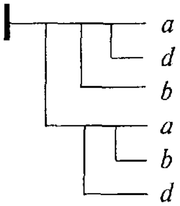
«если верно предложение, что показания H барометра уменьшились наполовину, когда давление D воздуха уменьшилось наполовину;

если, далее, верно предложение, что давление D воздуха уменьшается наполовину, когда поршень K перемещается из крайне левого в крайне правое положение, и если кран H находится в состоянии I:

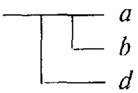
то следует,

что показания H барометра уменьшаются наполовину, если поршень K перемещается из крайне левого в крайне правое положение, в то время как кран H находится в состоянии I».

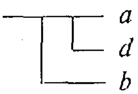
§ 16. Третий основной закон для условной связи и следствия из него



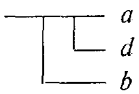
(8.



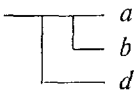
означает, что случай, когда *a* отрицается, а *b* и *d* утверждаются, не имеет места;



означает то же самое, а (8) сообщает, что случай, когда

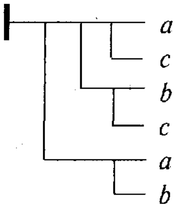


отрицается, а

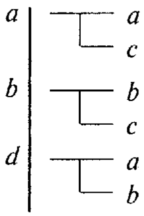


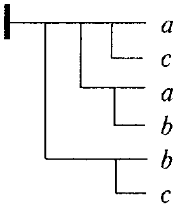
утверждается, исключается. Это можно выразить и так: «если предложение является следствием двух условий, то порядок их безразличен».

5



(8):



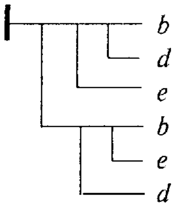


(9.

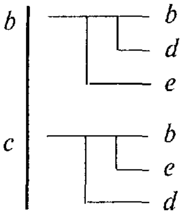
Это предложение только несущественно отличается от (5).

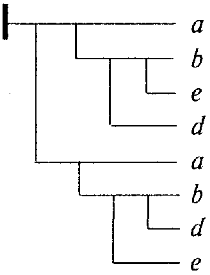
8

a	*b*
b	*e*



(9) :

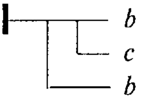




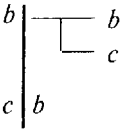
(10.

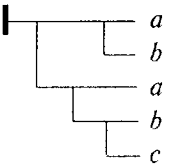
1

a	*b*
b	*c*



(9) :



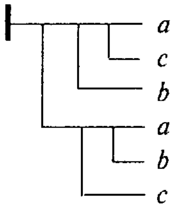


(11.

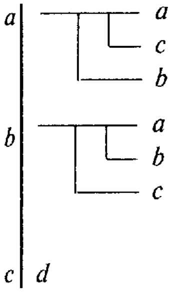
Эту формулу можно перевести так: «если предложение, согласно которому *b* или не *c* имеют места, есть достаточное условие для *a*, то одно *b* есть достаточное условие для *a*».

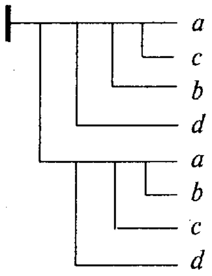
8

d | *c*



(5) :

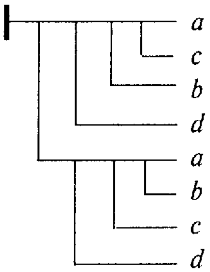




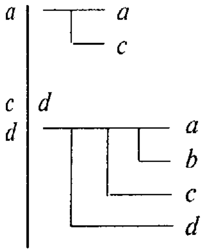
(12.

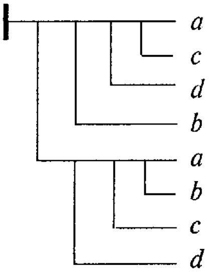
Предложения (12)–(17) и (22) показывают, как в случае многих условий можно изменять их порядок.

12



(12) :

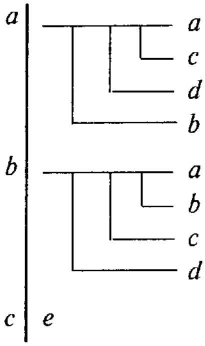


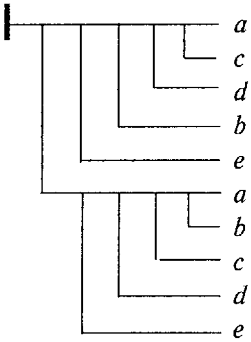


(13.

(5) :

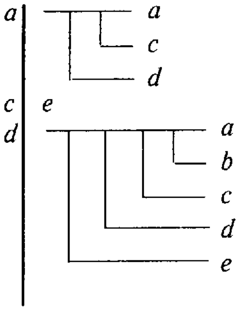
7 – 1742

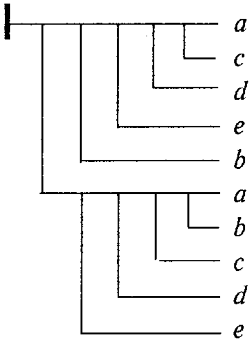




(14.

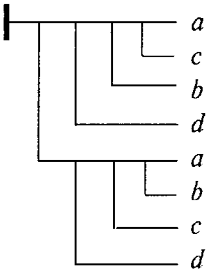
(12) :



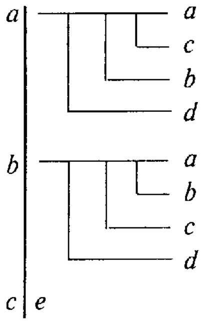


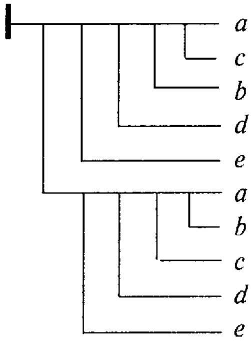
(15.

12



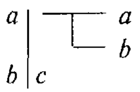
(5) :

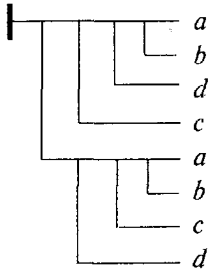




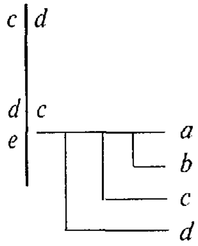
(16.

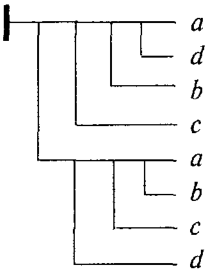
8





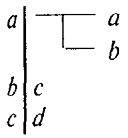
(16) :

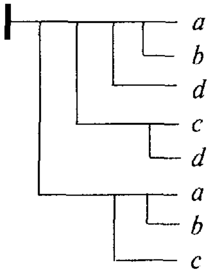




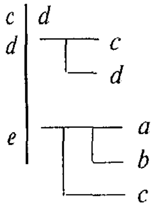
(17.

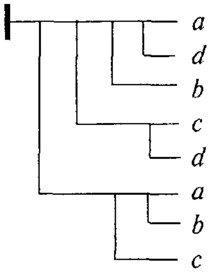
5





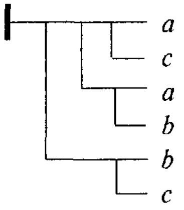
(16) :



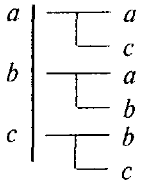


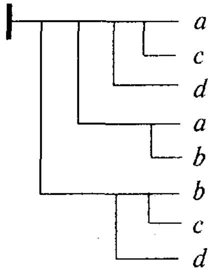
(18.

9



(18) :

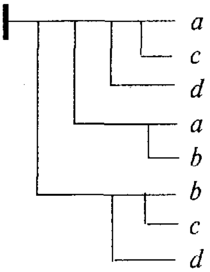




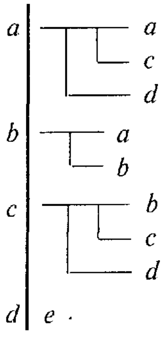
(19.

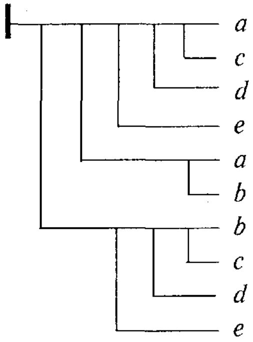
Это предложение только несущественно отличается от (7.).

19



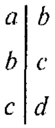
(18) :

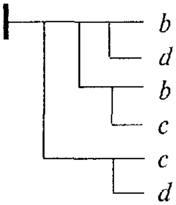




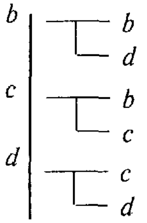
(20.

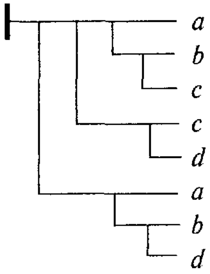
9





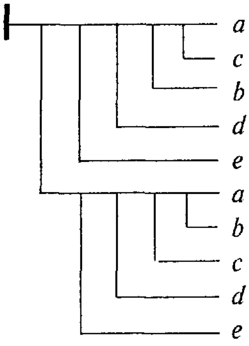
(19) :



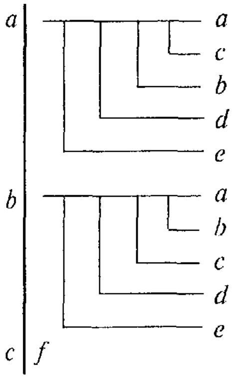


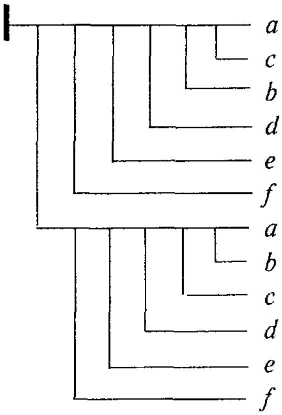
(21.

16



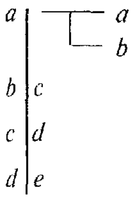
(5) :

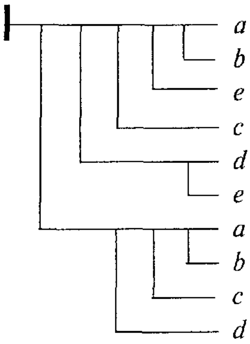




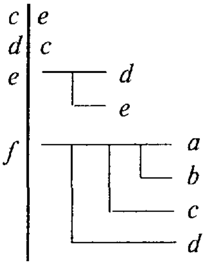
(22.

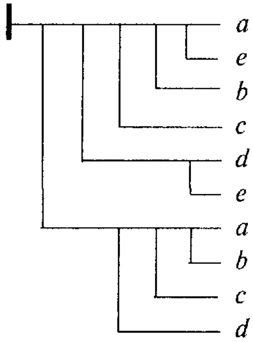
18





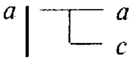
(22) :

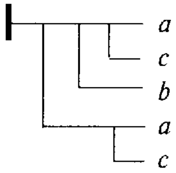




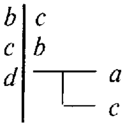
(23.

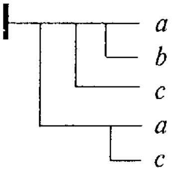
1





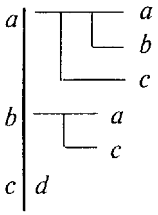
(12) :

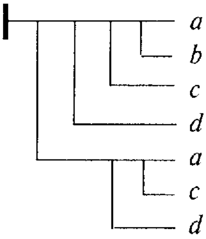




(24.

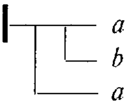
(5) :





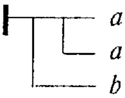
(25.

1



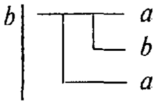
(8) :

$d \mid a$

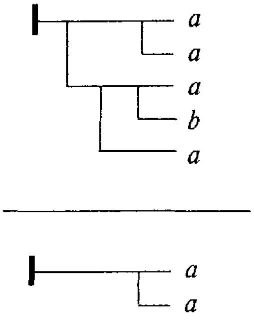


(26.

26



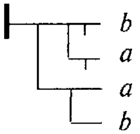
(1) ::



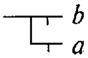
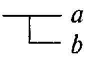
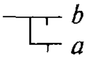
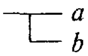
(27.

Нельзя утверждать *a* и (вместе с тем) *a* отрицать.

§ 17. Первый основной закон для отрицания и следствия из этого закона



(28.

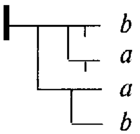
означает: «случай, когда  отрицается, а  утверждается, не имеет места». Отрицание предложения  означает, что  *a* утверждается, а  *b* отрицается; то есть *a* отрицается, а *b* утверждается. Этот случай исключается из-за того, что  . Это суждение обосновывает переход от *modus ponens* к *modus tollens*. Пусть, например,

b есть предложение, что человек М жив;
a есть предложение, что М дышит.

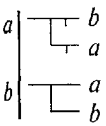
Тогда мы имеем суждение:

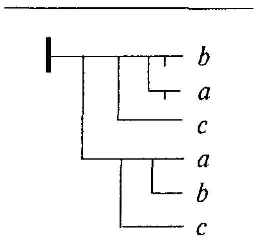
«если из того обстоятельства, что М жив, можно заключить, что он дышит, то из обстоятельства, что он не дышит, можно заключить, что он умер»[39].

28



(5) :

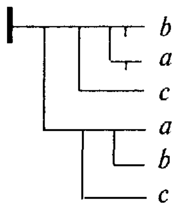




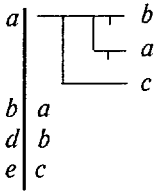
(29.

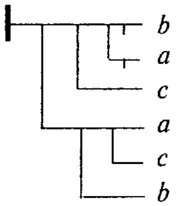
Если *b* и *c* являются достаточными условиями для *a*, то из отрицания предложения *a* и утверждения одного из условий (например, *c*) можно заключить об отрицании другого условия.

29



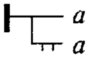
(10) :





(30.

§ 18. Второй основной закон для отрицания и следствия из этого закона

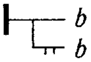


(31.

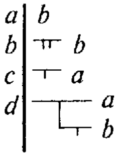
предложение ⊤⊤ *a* означает отрицание отрицания и тем самым — утверждение предложения *a*. Стало быть, нельзя отрицать *a* и (вместе с тем) утверждать ⊤⊤ *a*. *Duplex negatio affirmat.* Отрицание отрицания есть утверждение[40].

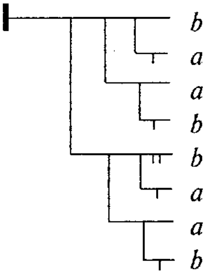
31

a | *b*



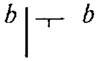
(7) :

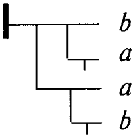




(32.

(28) ::

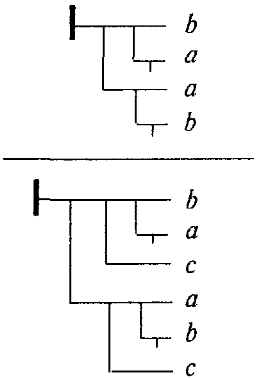




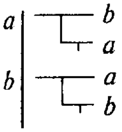
(33.

Если имеет место *a* или *b*, то имеет место *b* или *a*[41].

33



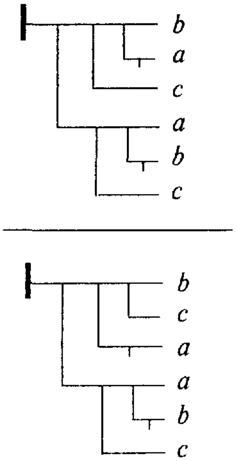
(5):



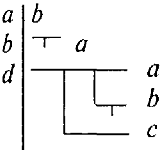
(34.

Если наступление обстоятельства *c* при отсутствии препятствующей причины *b* имеет следствием наступление *a*, то из того, что при ненаступлении *a* имеет место *c*, можно заключить, что имеет место препятствующая причина *b*.

34

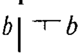


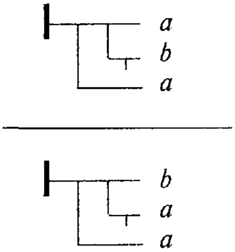
(12) :



(35.

1





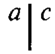
(34):

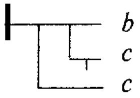
c | *a*

(36.

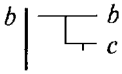
Случай, когда *b* отрицается, ⊤ *a* утверждается и *a* утверждается, не наступает. Это можно выразить так: «если *a* наступает, то имеет место одно из двух: *a* или *b*».

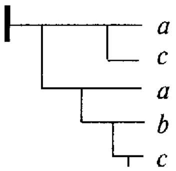
36





(9) :





(37.

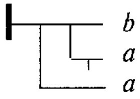
Если *a* есть необходимое следствие наступления *b* или *c*, то *a* есть необходимое следствие одного *c*. Пусть, например,

> *b* есть то обстоятельство, что первый сомножитель произведения *P* равен нулю;
> *c* есть то обстоятельство, что второй сомножитель произведения *P* равен нулю;
> *a* есть то обстоятельство, что произведение *P* равно нулю.

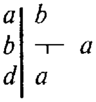
Тогда мы получаем суждение:

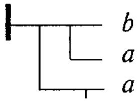
> «если произведение *P* равно нулю при условии, что первый или второй сомножитель будет равен нулю, то из обращения в нуль второго сомножителя можно заключить об обращении в нуль и произведения».

36



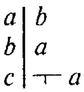
(8) :

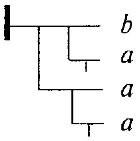




(38.

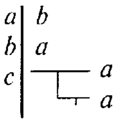
(2):

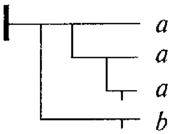




(39.

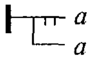
(35) :





(40.

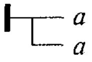
§ 19. Третий основной закон для отрицания и следствия из этого закона



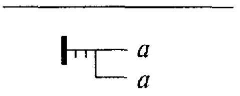
(41.

Утверждение предложения *a* отрицает отрицание предложения *a*[42].

27

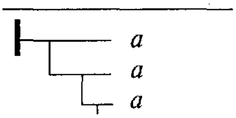


(41) :



(42.

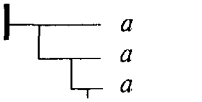
(40) :



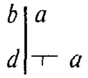
(43.

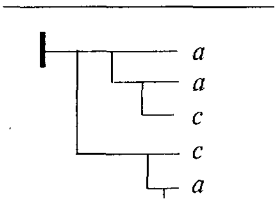
Если производится выбор только между *a* и *a*, то *a* имеет место. Пусть, например, можно различить два случая, которые исчерпывают все возможности. Когда наблюдается первый случай, то получается, что *a* имеет место; то же самое происходит, когда наблюдается второй случай. Тогда предложение *a* верно.

43



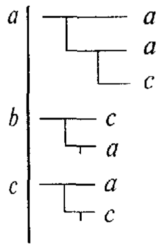
(21) :

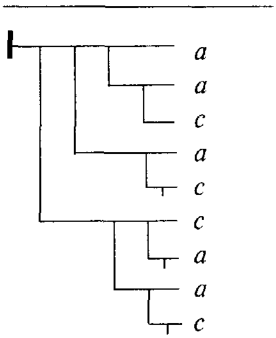




(44.

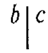
(5) :

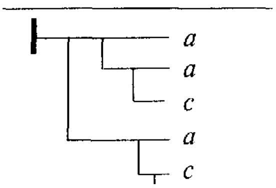




(45.

(33) ::



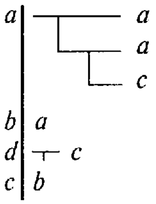


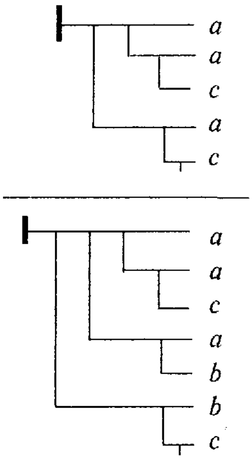
(46.

Если a верно как в случае, когда наступает c, так и в случае, когда c не наступает, то a верно. Другое выражение того же: «если a или c наступают и если наступление c имеет необходимым следствием a, то a имеет место».

46

(21) :



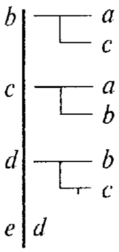


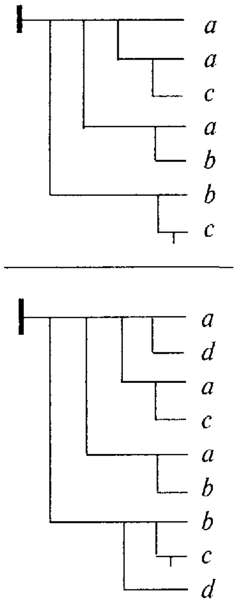
(47.

Это предложение можно выразить так: «если как c, так и b является достаточным условием для a и если b или c имеет место, то предложение a верно». Это суждение применяется, когда при доказательстве можно различить два случая. Если встречается больше случаев, то их всегда можно свести к двум, рассматривая один из них как первый случай, а совокупность всех остальных— как второй случай. Последний опять можно разделить на два случая, и так поступать до тех пор, пока такое разделение возможно.

47

(23):

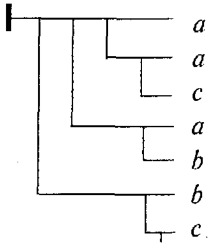




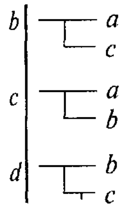
(48.

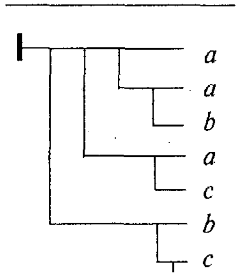
Если d есть достаточное условие для того, чтобы имели место b или c, если как b, так и c — достаточные условия для a, то d есть достаточное условие для a. Пример этого составляет вывод формулы (101).

47



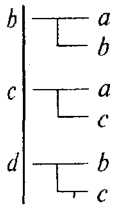
(12) :

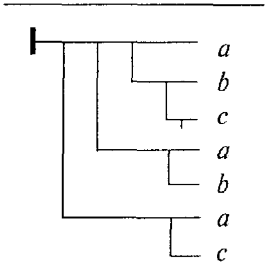




(49.

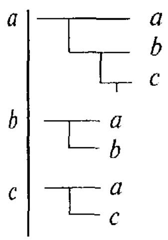
(17):

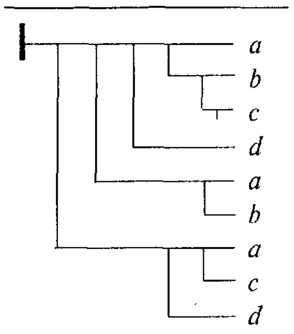




(50.

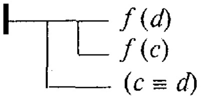
(18):





(51.

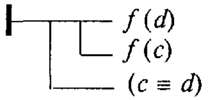
§ 20. Первый основной закон для равенства содержаний и следствие из него



(52.

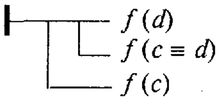
Случай, когда содержание предложения c такое же, что и содержание предложения d, и когда $f(c)$ утверждается, а $f(d)$ отрицается, — не имеет места. Это предложение выражает то, что на место c везде можно поместить d, если $c \equiv d$. В функции $f(c)$ предложение c может входить и в другие места, кроме данного аргументного места. Поэтому c может содержаться и в $f(d)$.

52



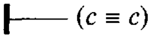
(8) :

a | $f(d)$
b | $f(c)$
d | $(c \equiv d)$



(53.

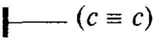
§ 21. Второй основной закон для равенства содержаний и следствия из него



(54.

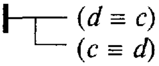
Содержание предложения c такое же, что и содержание предложения c.

54



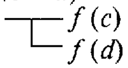
(53) :

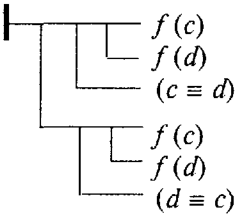
$f(A)$ | $(A \equiv c)$



(55.

(9):

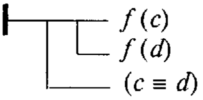
b | $(d \equiv c)$
c | $(c \equiv d)$
a | 



(56.

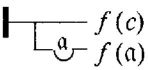
(52) ::

d | c
c | d



(57.

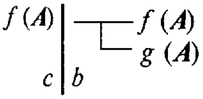
§ 22. Основной закон для всеобщности и следствия из него

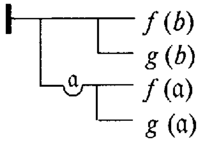


(58.

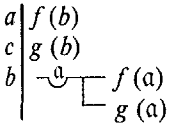
Предложение $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}- f(\mathfrak{a})$ означает, что $f(\mathfrak{a})$ имеет место, что бы ни понимать под $\mathfrak{a}$. Поэтому, если $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}- f(\mathfrak{a})$ утверждается, то $f(c)$ не может отрицаться. Это и выражает наше предложение[43]; $\mathfrak{a}$ здесь может встречаться только на аргументных местах функции f, так как эта функция встречается в данном суждении и вне области буквы $\mathfrak{a}$.

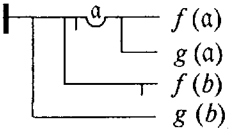
58





(30):





(59.

Пример. Пусть

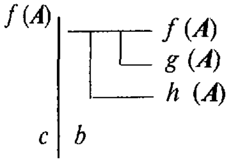
b означает птицу страус, а именно, одну особь животного этого вида;
g (*A*) означает «*A* есть птица»;
f (*A*) — «*A* может летать».

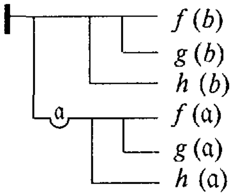
Тогда мы получаем суждение:

«если этот страус есть птица и он не может летать, то отсюда можно заключить, что некоторые птицы* не могут летать».

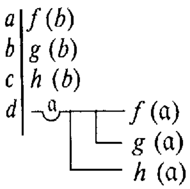
Мы видим, как это суждение заменяет (ersetzt) один из видов умозаключения, а именно, *Felapton* или *Fesapo*, между которыми здесь нельзя провести никакого различия, потому что не выделяется субъект[44].

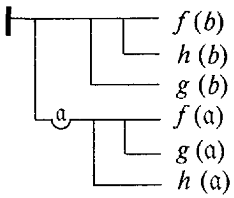
58





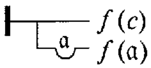
(12):





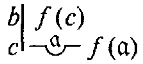
(60.

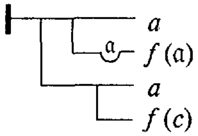
58



(9) :

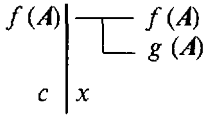
* § 12, примеч. 2.

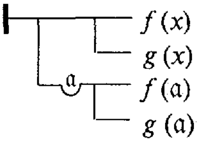




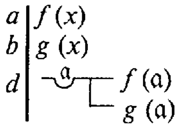
(61.

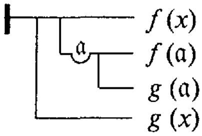
58





(8) :

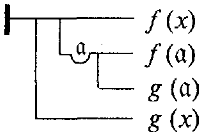




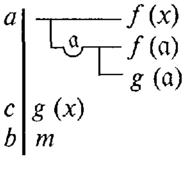
(62.

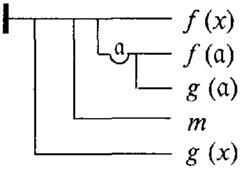
Это суждение заменяет способ умозаключения *Barbara* в случае, когда меньшая посылка ($g(x)$) имеет некоторое частное (besonderer) содержание[45].

62



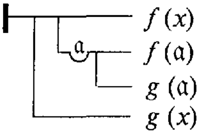
(24) :



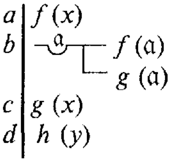


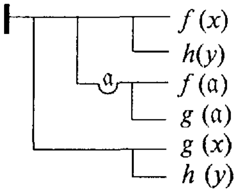
(63.

62



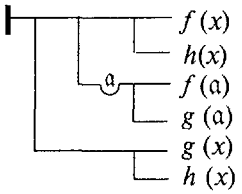
(18) :



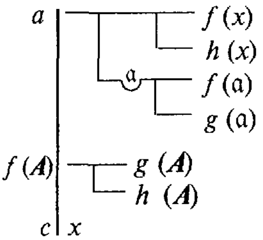


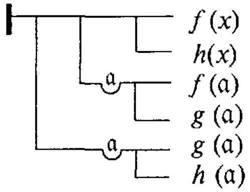
(64.

64
y | x

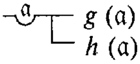


(61):

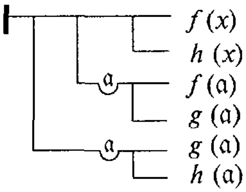




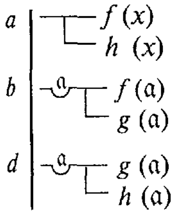
(65.

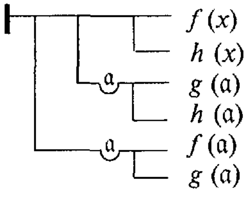
Тут a встречается в двух областях, без какого-либо указания на то, что здесь имеется в виду какое-то особое отношение. В одной области можно было бы вместо a написать, например, e. Это суждение заменяет способ умозаключения *Barbara* для случая, когда меньшая посылка  имеет общее содержание. Читатель, который уже усвоил способ выведения, заключенный в данном исчислении, будет в состоянии привести суждения, соответствующие и другим видам умозаключений. Будем считать, что этих примеров достаточно.

65



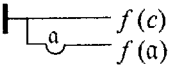
(8) :





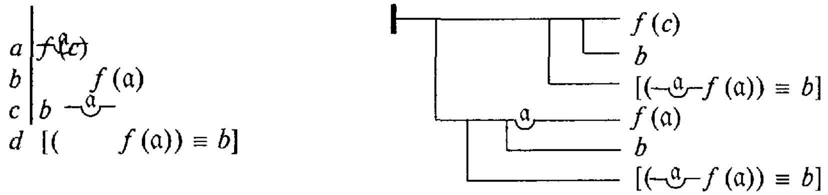
(66.

58



(7) :

8 – 1742



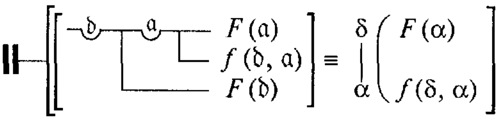
(67.

(68.

III. КОЕ-ЧТО ИЗ ОБЩЕГО УЧЕНИЯ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

§ 23. Предварительные замечания

Следующие ниже выводы служат тому, чтобы дать общее представление о работе с данной понятийной записью, хотя, быть может, их и не достаточно для того, чтобы польза от ее применения стала вполне ясной. Польза эта со всей отчетливостью проявляется только в случае сложных предложений. Кроме того на предлагаемом примере будет видно, как чистое мышление, *a priori* не учитывающее данное содержание, усматриваемое каждым с помощью органов чувств или даже путем наглядного созерцания, — как это мышление, исходя только из того содержания, которое соответствует его собственным особенностям, способно порождать суждения, на первый взгляд представляющиеся возможными только на основе какого-то наглядного представления. Это можно сравнить с конденсацией, с помощью которой воздух, кажущийся детскому сознанию чем-то не существующим, удается превратить в видимую каплеобразную жидкость. Развертывающиеся в дальнейшем предложения о последовательностях далеко превосходят по своей общности все аналогичное, что можно было бы вывести из любого наглядного представления о последовательностях. Если бы, поэтому, мы сочли более уместным положить в основу наглядное представление о последовательностях, то мы обязаны были бы помнить: предложения, которые мы при этом получали бы, — даже если бы они словесно и совпадали с теми предложениями, которые здесь приводятся,— недолго сохранят такую же значимость, что и последние, ибо их справедливость ограничивалась бы только областью созерцания, на которой они как раз и были основаны.



(69.

Это предложение отличается от тех суждений, которые мы до сих рассматривали, тем, что в нем встречаются знаки, которые перед этим не были определены; оно само дает это определение[46]. Оно не означает: «правая часть равенства обладает тем же содержанием, что и левая», а гласит: «она должна иметь то же содержание». Потому это предложение — никакое не суждение и, следовательно, *не является синтетическим суждением*, если воспользоваться кантовским выражением. Я делаю это замечание потому, что Кант считает все суждения математики синтетическими[47]. Если бы суждение (69) было синтетическим, то синтетическими были бы и выводимые из него предложения. Однако можно отказаться от обозначений, которые оно ввело, и поэтому от него самого как их определения: из него не следует ничего, что не могло бы быть выведенным и без него. Подобные определения даются лишь с целью добиться видимого упрощения записи путем введения некоторого сокращения. Кроме того, они служат тому, чтобы из изобилия возможных знаков выделить особую их конфигурацию— с тем, чтобы наглядное представление получило прочную опору. И хотя упомянутое упрощение— из-за малочисленности приводимых суждений— здесь вряд ли заметно, я все же привел эту формулу как пример.

Несмотря на то что формула (69) первоначально не является суждением, она тотчас превращается в таковое; ибо как только значение новых знаков однажды установлено, оно обретает силу, и поэтому формула (69) становится верной как суждение, однако суждение аналитическое, так как то, что было заложено в новые знаки, может быть снова представлено в явном виде; эта двузначность формулы выражается путем удвоения штриха суждения[48]. В последующих выводах, где участвует формула (69), можно, таким образом, обращаться как с обычным суждением.

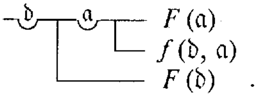
Малые греческие буквы, которые здесь впервые встречаются, не передают никакого самостоятельного содержания, подобно готическим и латинским буквам. В отношении них надлежит обращать внимание только на то, одинаковы ли они или различны, так что на места букв α и δ можно помещать любые другие малые греческие буквы, если только места, которые до этого занимали одинаковые греческие буквы, снова занимают одинаковые буквы, и если различные буквы не замещаются одинаковыми. *Эта одинаковость или различие греческих букв, однако, имеет значение только внутри формул, для которых— как в нашем случае для формулы*

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

— оно было специально введено. Оно используется для того, чтобы из сокращенной формы

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right.$$

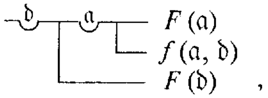
каждый раз однозначно можно было восстановить в полном виде формулу[49]



Например[50],

$$\begin{matrix}\alpha\\ |\\ \delta\end{matrix}\left(\begin{matrix}F(\alpha)\\ \\ f(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$$

означает выражение



тогда как

$$\begin{matrix}\alpha\\ |\\ \delta\end{matrix}\left(\begin{matrix}F(\alpha)\\ \\ f(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$$

не имеет смысла. Как мы видим, соответствующее полное выражение, сколь громоздкими бы ни были функции F и f, всегда с уверенностью можно восстановить, какие бы готические буквы мы ни выбрали. Выражение

$$\vdash f(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta})$$

может быть передано как «Δ есть результат применения процедуры f к Γ» или как «Γ есть объект применения процедуры f, результат которой есть Δ», или как «Δ находится в f-отношении к Γ», или как «Γ находится в обратном f-отношении к Δ», и эти выражения должны считаться равнозначными.

Выражение

$$\begin{matrix}\delta\\ |\\ \alpha\end{matrix}\left(\begin{matrix}F(\alpha)\\ \\ f(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$$

может быть переведено как «то обстоятельство, что свойство F является наследуемым в f-последовательности». Следующий пример, быть может, сделает это выражение более понятным.

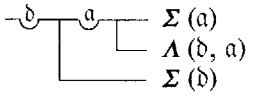
Пусть

$\Lambda(M, N)$ есть то обстоятельство, что N есть ребенок родителя M;

$\Sigma(P)$ есть обстоятельство, что P есть человек. Тогда

$$\begin{matrix}\alpha\\ |\\ \delta\end{matrix}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\Sigma}(\alpha)\\ \\ \Lambda(\delta, \alpha)\end{matrix}\right.$$

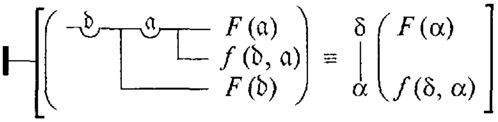
или



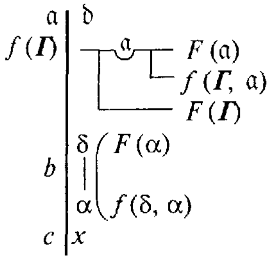
есть то обстоятельство, что каждый ребенок человека есть тоже человек, или что свойство быть человеком наследуемо[51]; впрочем, как можно видеть, передача на словах может оказаться трудным и даже невозможным делом, если на местах F и f выступают громоздкие функции. Сообразно этому предложение (69) словами можно выразить так:

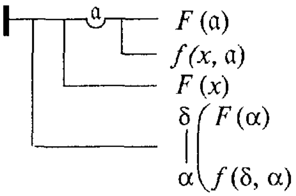
«Если из предложения, что $\mathfrak{d}$ имеет свойство F, в общем случае — каким бы ни было $\mathfrak{d}$ — можно заключить,что каждый результат применения процедуры f к $\mathfrak{d}$ будет обладать свойством F, то я говорю: "свойство F наследуемо в f-последовательности"».

69



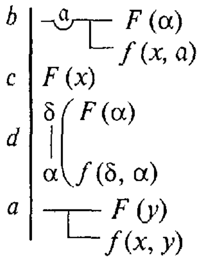
(68): :

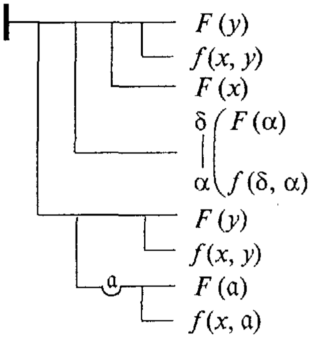




(70.

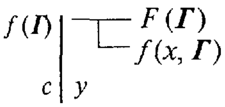
(19) :

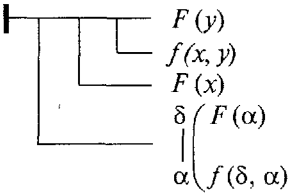




(71.

(58) : :

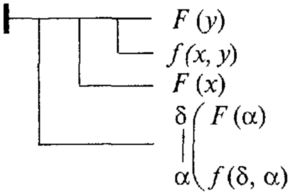




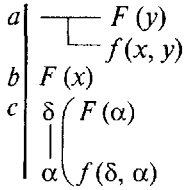
(72.

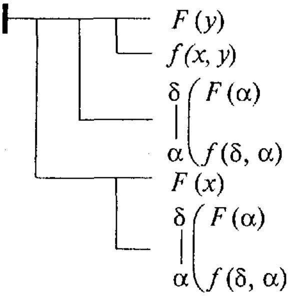
Если свойство F наследуемо в f-последовательности; если x имеет свойство F и y есть результат применения процедуры f к x, то y имеет свойство F.

72



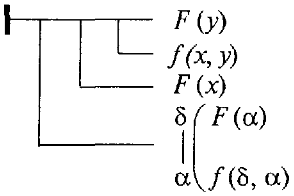
(2) :



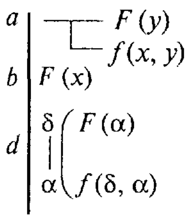


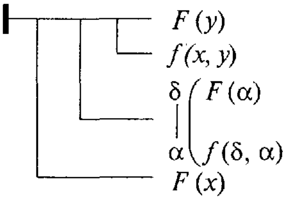
(73.

72



(8) :

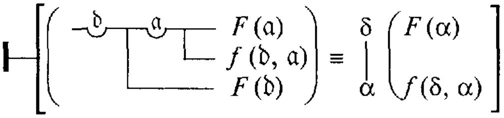




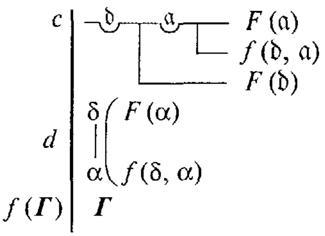
(74.

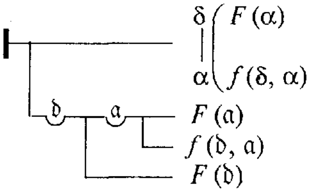
Если x имеет свойство F, наследуемое в f последовательности, то любой результат применения процедуры f к x имеет свойство F.

69



(52) :

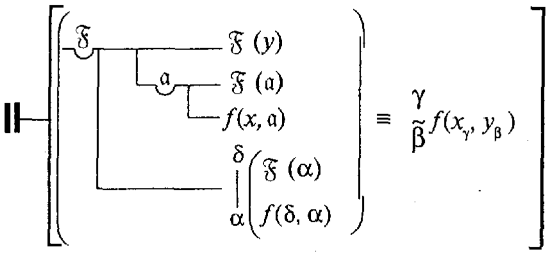




(75.

Если из предложения, что 𝔡 имеет свойство F, каким бы 𝔡 ни было, можно заключить, что каждый результат применения процедуры f к 𝔡 имеет свойство F, то свойство F наследуемо в f-последовательности.

§ 26. Следование одного члена последовательности за другим



(76.

Таково определение конфигурации знаков $\overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta)$, стоящей справа[52]. Что касается удвоения штриха суждения и греческих букв, то я отсылаю читателя к § 24. Вместо приведенного выше выражения недопустимым было бы написать просто

$$\overset{x}{\tilde{y}} f(x, y)\,,$$

так как если функция от x и y выписана подробно, эти буквы могут встретиться еще и вне аргументных мест, и тогда невозможно усмотреть, какие же места надлежит рассматривать в качестве аргументных. Стало быть, последние должны быть обозначены именно как таковые. Здесь это производится с помощью индексов γ и β. Их надо выбирать разными— принимая во внимание тот случай, когда два аргумента могут быть одинаковыми. Мы привлекаем греческие буквы, дабы иметь известный выбор для случая, когда выражение

$$\overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

заключает в себе сходно построенное выражение, и мы должны быть в состоянии выбрать такие обозначения аргументных мест в этом последнем, которые были бы отличны от обозначений этих мест в том выражении, в которое оно входит. *Одинаковость и различие греческих букв имеет здесь значение только в пределах выражения*

$$\overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta)\ ;$$

вне его могут встречаться те же самые буквы, и это не дает никаких указаний на какое-либо их отношение к буквам внутри данного выражения.

Мы переводим

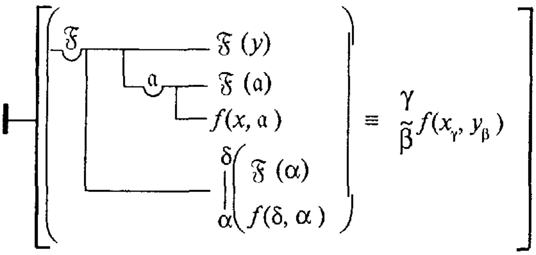
$$\overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta)\ ;$$

так: «в f-последовательности y следует за x», способ выражения, который, конечно, возможен, лишь пока функция f определена. В соответствии с этим определение (76) может быть выражено, например, так:

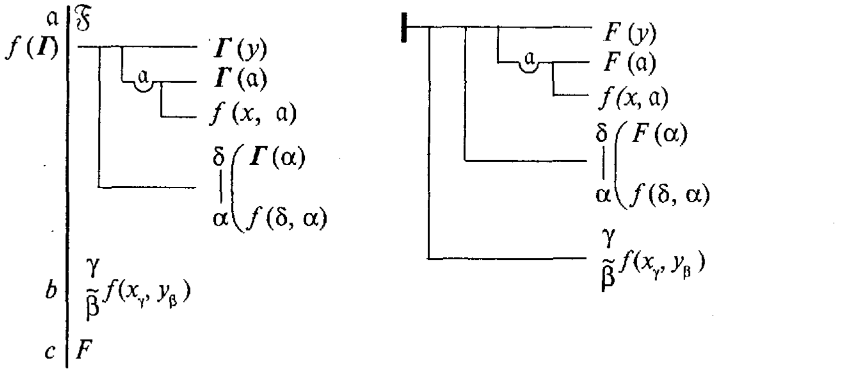
Если из двух предложений, согласно которым каждый результат применения процедуры f к x обладает свойством F, а свойство F является наследуемым в f-последовательности, можно заключить, что y обладает свойством F, каким бы ни было F, то *я говорю: «в f-последовательности y следует за x»; или «в f-последовательности x предшествует y»* *.

§ 27. Следствия

76



(68) :

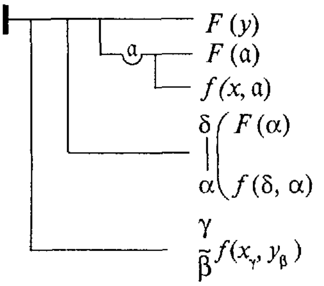


(77.

В соответствии с § 10 $F(y)$, $F(\mathfrak{a})$, $F(\alpha)$ надлежит рассматривать как различные функции аргумента F. Выражение (77) означает:

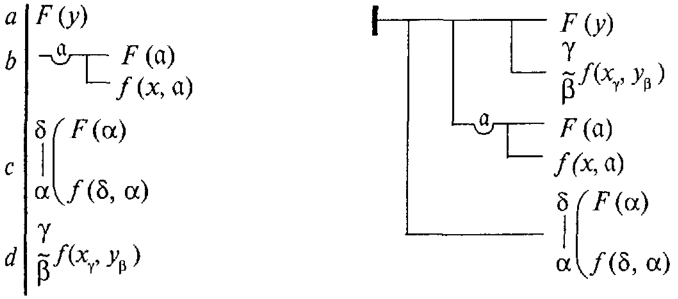
Если в f-последовательности y следует за x; если свойство F в f-последовательности наследуемо; если каждый результат применения процедуры f к x обладает свойством F, то y имеет свойство F.

77



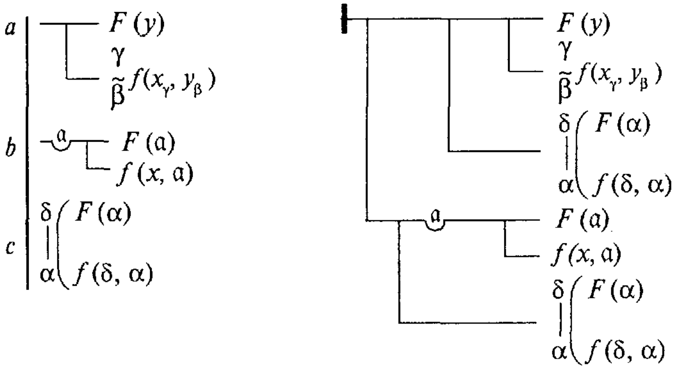
(17):

* Чтобы сделать брлее ясным всеобщность заданного таким образом понятия следования одного члена последовательности за другим, я напомню об одной возможности. Имеется в виду не только упорядочение наподобие нанизанных на нить жемчужин, но и ветвление в родословном древе, когда ветви объединяются в пучки, а также кольцеобразное движение с возвратом к исходному пункту[53].



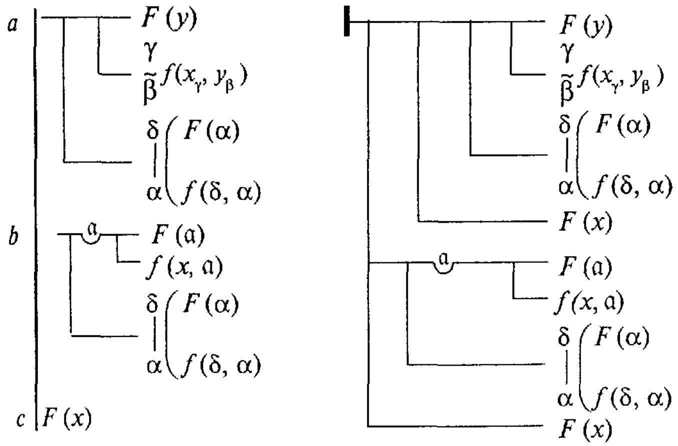
(78.

(2) :



(79.

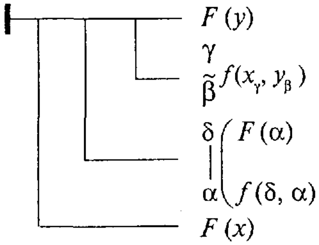
(5) :



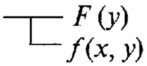
(80.

(74)::

$y \mid \mathfrak{a}$



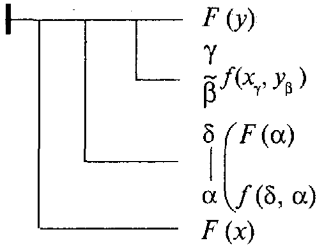
(81.

Поскольку в (74) y встречается только в  , при замещении буквы y готической буквой $\mathfrak{a}$ лунка может — в соответствии с § 11 — непосредственно предшествовать этому выражению. И (81) можно перевести как:

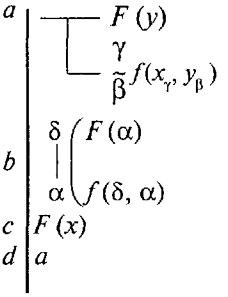
Если x обладает свойством F, наследуемым в f-последовательности, и если y в f-последовательности следует за x, то y обладает свойством F.*

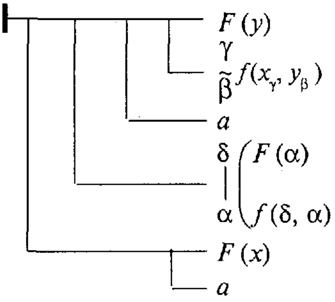
Пусть, например, F есть свойство быть кучей фасоли; пусть процедура f заключается в уменьшении этой кучи на одну фасолину, так что $f(a, b)$ означает то обстоятельство, что b содержит все фасолины этой кучи a, кроме одной, и ничего более. Тогда благодаря нашему предложению мы должны придти к тому результату, что одна единственная фасолина или даже полное их отсутствие является кучей фасоли, если свойство быть кучей наследуемое в f-последовательности. Однако это, вообще говоря, не так, поскольку существует некое z, при котором из-за неопределенности понятия «куча» $F(z)$ не может стать суждением.

81



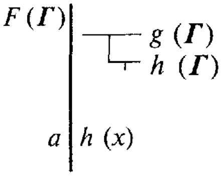
(18) :

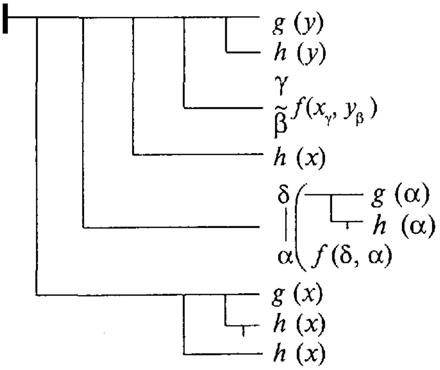




(82.

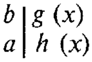
82

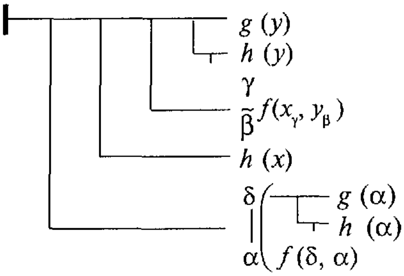




(36) ::

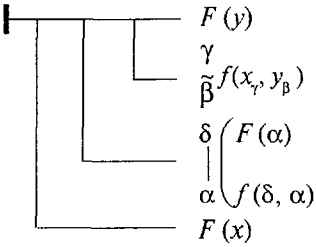
* На этом основывается бернуллиевская индукция[54].



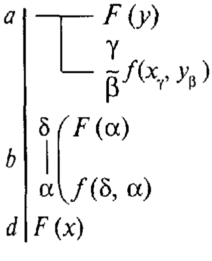


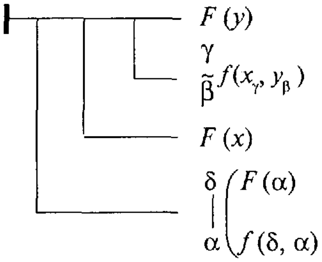
(83.

81



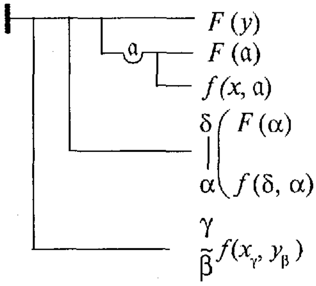
(8) :



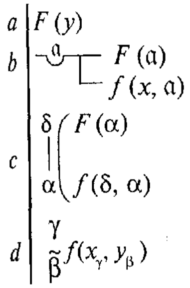


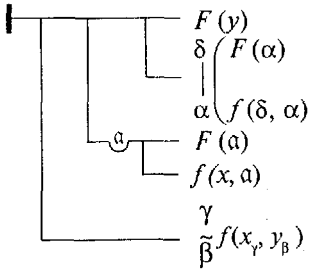
(84.

77



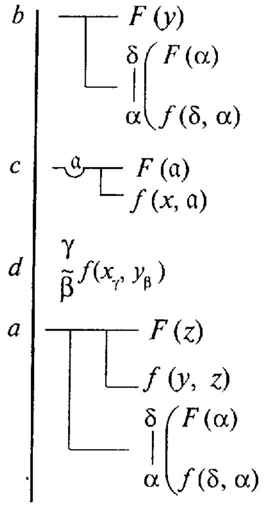
(12) :

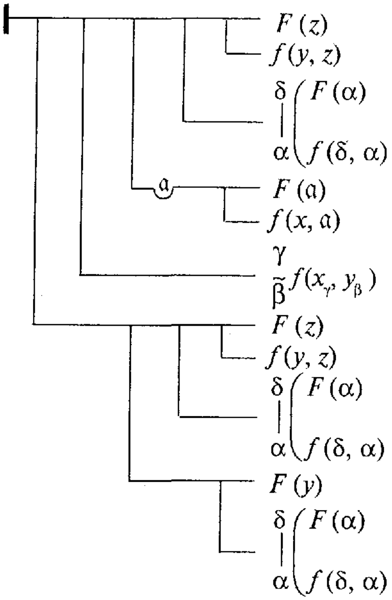




(85.

(19) :

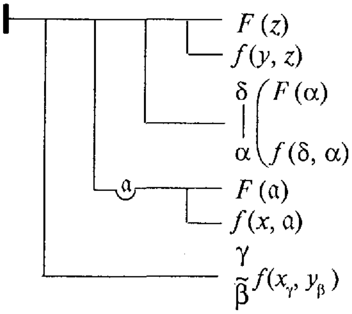




(86.

(73) ::

$\begin{array}{c|c} y & z \\ x & y \end{array}$



(87.

Словесный вывод выглядит, например, следующим образом:

α) пусть в f-последовательности y следует за x;

β) пусть каждый результат применения процедуры f к x обладает свойством F;

γ) пусть свойство F является в f-последовательности наследуемым.

Из этих допущений, согласно (85), следует:

δ) y обладает свойством F.

ε) Пусть z есть результат применения процедуры f к y.

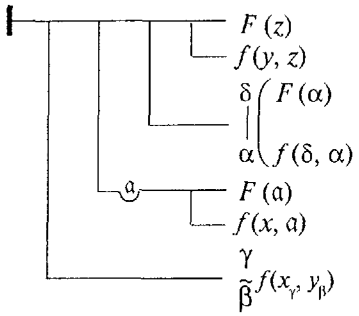
Тогда из (γ), (δ), (ε), согласно (72), следует:

z обладает свойством F.

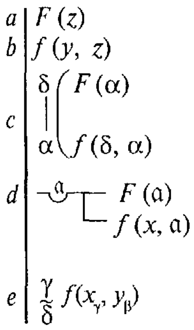
Поэтому:

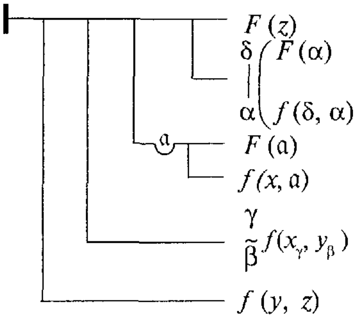
Если z есть результат применения процедуры f к предмету y, который в f-последовательности следует за x, и если каждый результат применения процедуры f к x обладает свойством F, наследуемым в F-последовательности, то z обладает данным свойством F.

87



(15) :

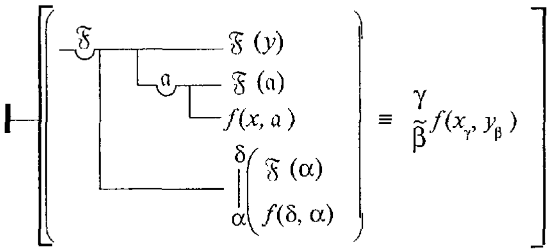




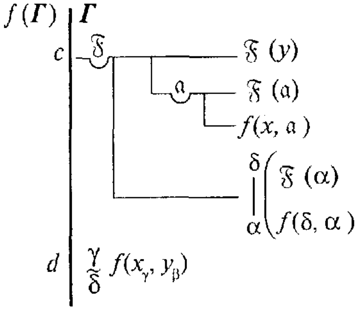
(88.

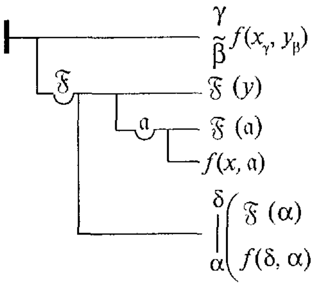
§ 28. Дальнейшие следствия

76



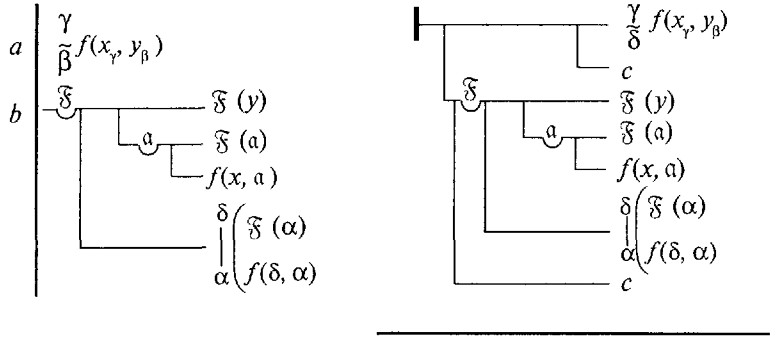
(52) :





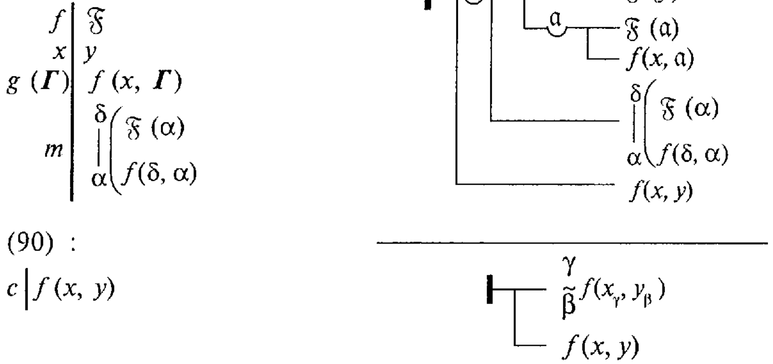
(89.

(5) :



(90.

63



(91.

Передадим словами вывод предложения (91). Из предложения:

α) «каждый результат применения процедуры f к x обладает свойством $\mathfrak{F}$» можно заключить, каким бы ни было $\mathfrak{F}$, что:

каждый результат применения процедуры f к x обладает свойством $\mathfrak{F}$.

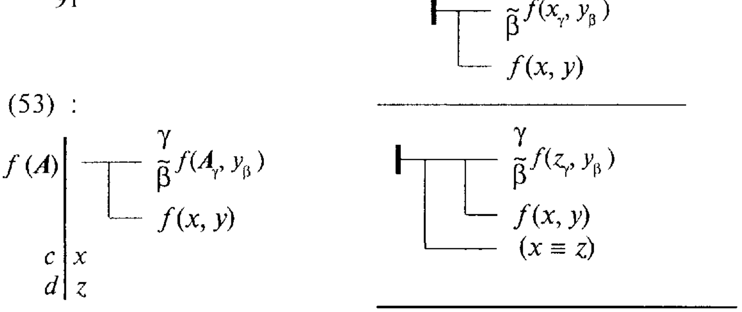
Поэтому и из предложения (α) и того, что свойство $\mathfrak{F}$ наследуемо в f-последовательности, каким бы ни было $\mathfrak{F}$, можно заключить:

каждый результат применения процедуры f к x обладает свойством $\mathfrak{F}$.

Поэтому, согласно (90), справедливо предложение:

Каждый результат применения процедуры f к предмету x в f-последовательности следует за этим x.

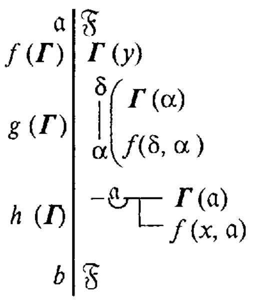
91

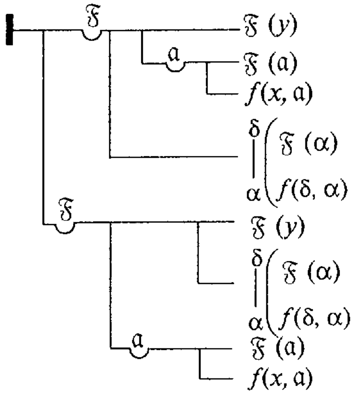


(92.

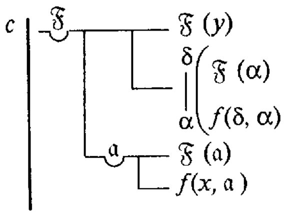
* О лунке, в которую помещена буква $\mathfrak{F}$, см. § 11[55].

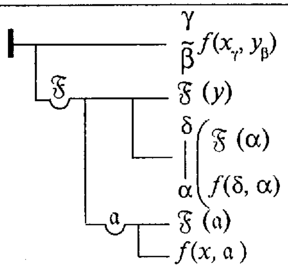
60





(90) :

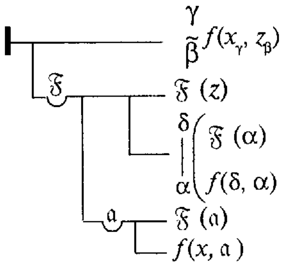




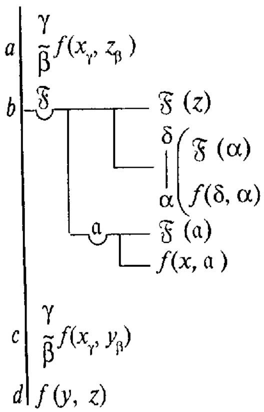
(93.

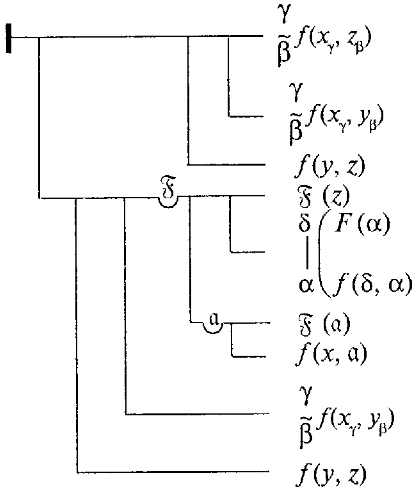
93

$y \mid z$



(7) :

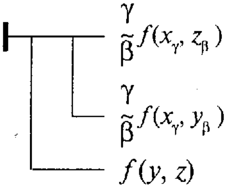




(94.

(88) ::

$F \mid \mathfrak{F}$



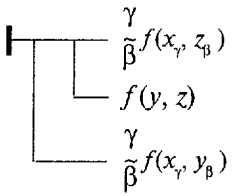
(95.

(8) :

$a \mid \overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, z_\beta)$

$b \mid \overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta)$

$d \mid f(y, z)$



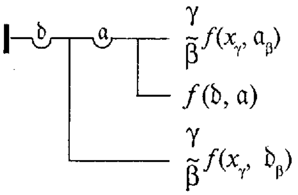
(96.

Каждый результат применения процедуры f к предмету, который в f-последовательности следует за x, следует в f-последовательности за x.

96

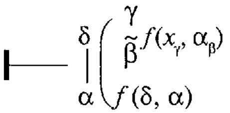
$z \mid \mathfrak{a}$

$y \mid \mathfrak{d}$



(75) :

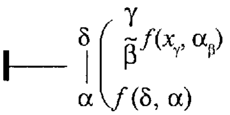
$F(\Gamma) \mid \overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$



(97.

Свойство следовать за x в f-последовательности является наследуемым в f-последовательности.

97

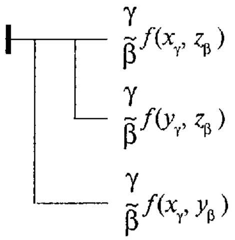


(84) :

$F(\Gamma) \mid \overset{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta)$

$x \mid y$

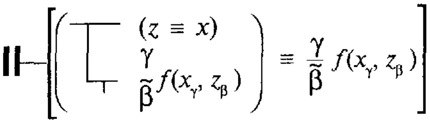
$y \mid z$



(98.

Если в f-последовательности y следует за x и если z в f-последовательности следует за y, то в f-последовательности z следует за x.

§ 29. «z принадлежит последовательности, начинающейся с x». Определение и следствие



(99.

Я отсылаю здесь читателя к тому, что было сказано о новых знаках в связи с формулами (69) и (76). Выражение

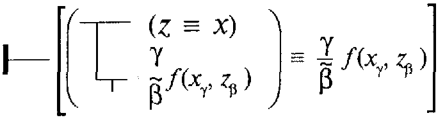
$$\overset{\gamma}{\underset{\tilde{\beta}}{=}} f(x_\gamma, z_\beta)$$

переводится как «z принадлежит f-последовательности, начинающейся с x», или как «x принадлежит f-последовательности, оканчивающейся z». Тогда (99) в словесной форме гласит[56]:

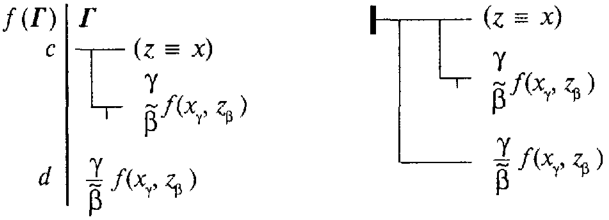
Если z совпадает с x или z следует в f-последовательности за x, то я говорю:

«z принадлежит f-последовательности, начинающейся с x»; или: «x принадлежит f-последовательности, оканчивающейся z».

99

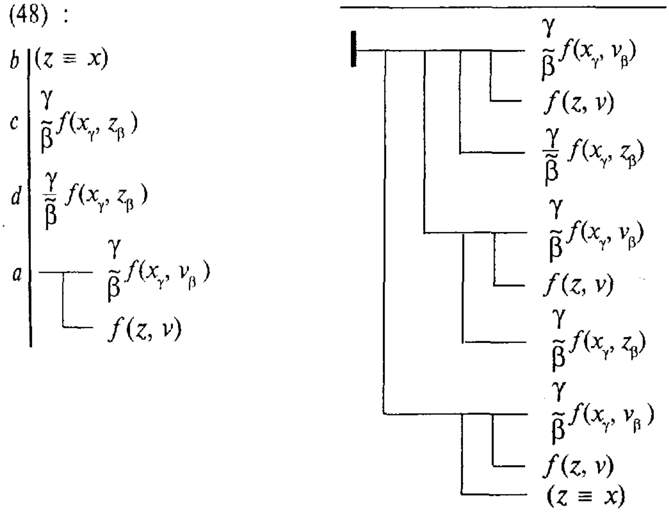


(57) :



(100.

(48) :

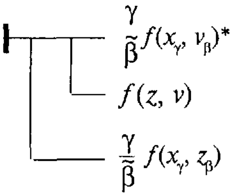


(101.

(96, 92) ::

9 - 1742

$\begin{array}{c|c} y & z \\ z & v \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & z \\ z & x \\ y & v \end{array}$



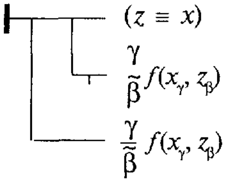
(102.

Вывод предложения (102) в словесной форме[57]: если z совпадает с x, то, согласно (92), каждый результат применения процедуры f к z следует в f-последовательности за x. Если z в f-последовательности следует за x, то, согласно (96), каждый результат применения f к z следует в f-последовательности за x.

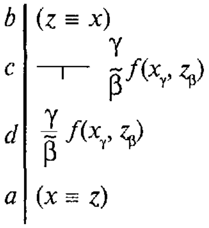
Из этих двух предложений, согласно (100), следует:

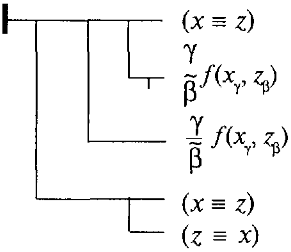
Если z принадлежит f-последовательности, начинающейся с x, то каждый результат применения процедуры f к z следует в f-последовательности за x.

100



(19) :

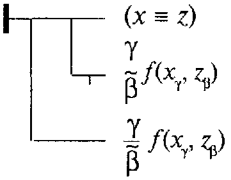




(103.

(55) ::

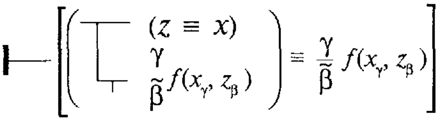
$\begin{array}{c|c} d & x \\ c & z \end{array}$



(104.

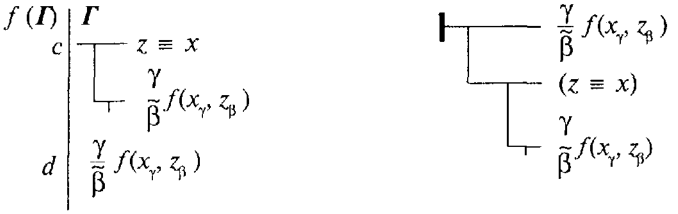
§ 30. Дальнейшие следствия

99



(52) :

* О последнем умозаключении см. § 6.



(105.

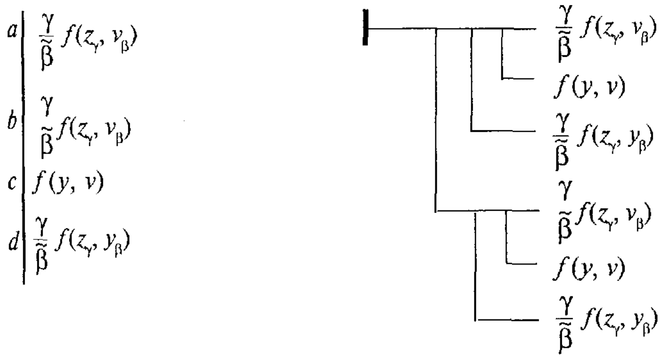
(37) :

(106.

То, что в f-последовательности следует за x, принадлежит последовательности, начинающейся с x.

106

(7) :



(107.

(102) ::

(108.

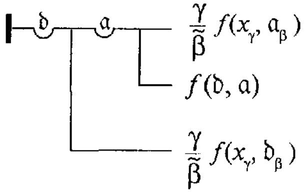
Словесный вывод предложения (108) гласит:

Если y принадлежит f-последовательности, начинающейся с z, то, согласно (102), каждый результат применения процедуры f к y следует в f-последовательности за z. Согласно (106), каждый результат применения процедуры f к y принадлежит к f-последовательности, начинающейся с z. Поэтому,

если y принадлежит f-последовательности, начинающейся с z, то каждый результат применения процедуры f к y принадлежит f-последовательности, начинающейся с z.

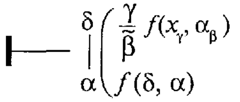
108

$$\begin{array}{c|l} v & \mathfrak{a} \\ z & x \\ y & \mathfrak{d} \end{array}$$



(75) :

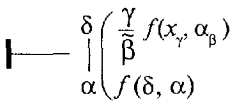
$$\begin{array}{c|l} F(\Gamma) & \frac{\gamma}{\tilde{\tilde{\beta}}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta) \end{array}$$



(109.

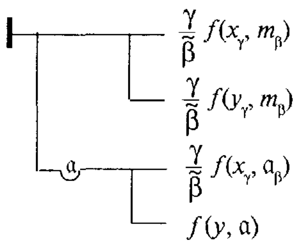
Свойство принадлежать f-последовательности, начинающейся с x, является наследуемым в f- последовательности.

109



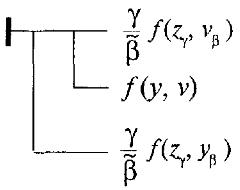
(78) :

$$\begin{array}{c|l} F(\Gamma) & \frac{\gamma}{\tilde{\tilde{\beta}}} f(x_\gamma, \Gamma_\beta) \\ x & y \\ y & m \end{array}$$



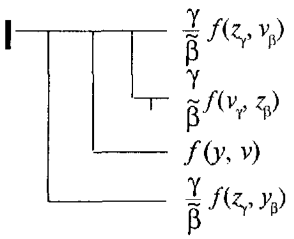
(110.

108



(25) :

$$\begin{array}{c|l} a & \frac{\gamma}{\tilde{\tilde{\beta}}} f(z_\gamma, v_\beta) \\ c & f(y, v) \\ d & \frac{\gamma}{\tilde{\tilde{\beta}}} f(z_\gamma, y_\beta) \\ b & \top\ \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(v_\gamma, z_\beta) \end{array}$$



(111.

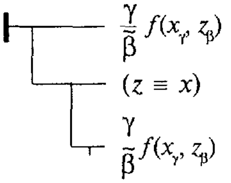
Ниже следует словесный вывод предложения (111).

Если y принадлежит f-последовательности, начинающейся с z, то, согласно (108), каждый результат применения процедуры f к y принадлежит в f-последовательности, начинающейся с z. Поэтому, каждый результат применения процедуры f к y либо принадлежит f-последовательности, начинающейся с z, или же в f-последовательности предшествует z.

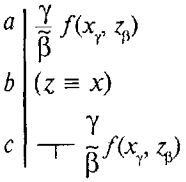
Итак:

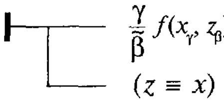
если y принадлежит f-последовательности, начинающейся с z, то каждый результат применения процедуры f к y принадлежит f-последовательности, начинающейся с z, или же в f-последовательности он предшествует z.

105



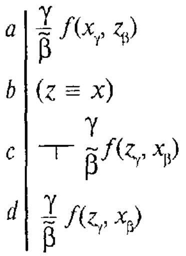
(11) :

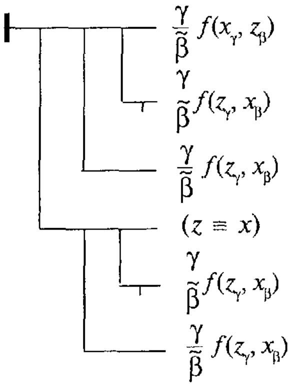




(112.

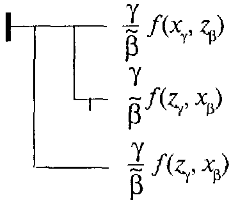
(7) :





(104) ::

x	z
z	x



(114.

Ниже следует словесный вывод этой формулы.

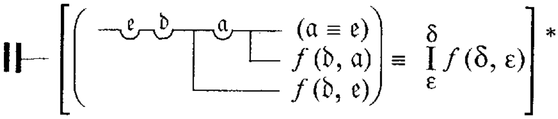
Пусть x принадлежит f-последовательности, начинающейся с z. Тогда, согласно (104), z совпадает с x; или x в f-последовательности следует за z.

Если z совпадает с x, то, согласно (112), z принадлежит f-последовательности, начинающейся с x.

Из двух последних предложений следует: z принадлежит f-последовательности , начинающейся с x; или x в f-последовательности следует за z. Поэтому,

если x принадлежит f-последовательности, начинающейся с z, то z принадлежит f-последовательности, начинающейся с x; или x в f-последовательности следует за z.

§ 31. Однозначность процедуры. Определение и следствия



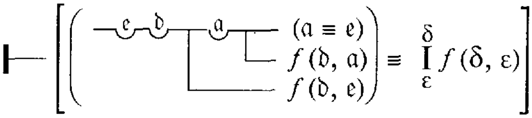
(115.

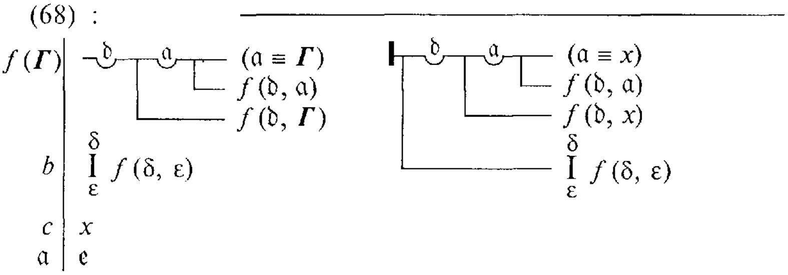
Я перевожу $\overset{\delta}{\underset{\varepsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta, \varepsilon)$

как «то обстоятельство, что процедура f однозначна». Тогда (115) можно передать так:

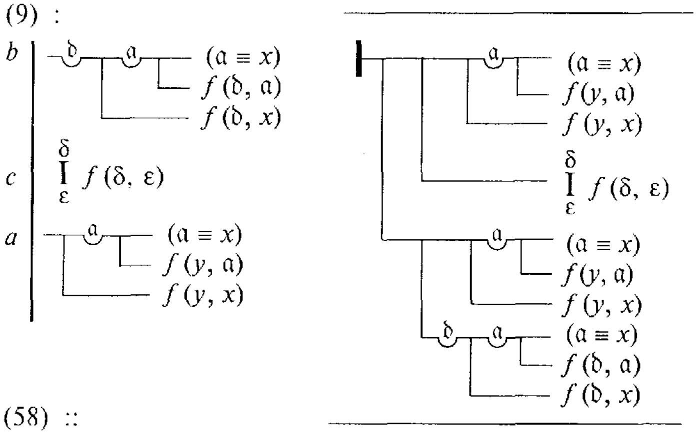
Если из того обстоятельства, что 𝔢 есть результат применения процедуры f к 𝔡, каким бы ни было 𝔡, можно заключить, что каждый результат применения процедуры f к 𝔡 должен совпадать с 𝔢, то я говорю: «процедура f однозначна»[58].

115

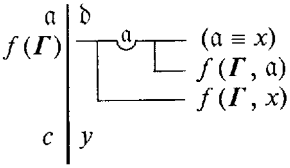


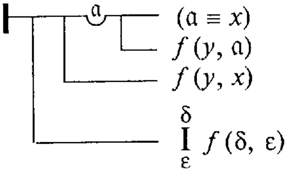


(116.



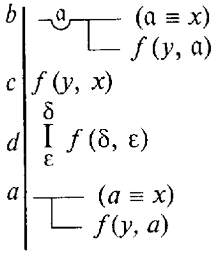
(117.

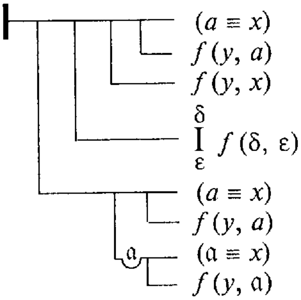




(118.

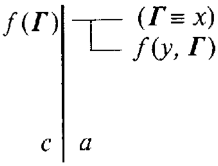
(19) :

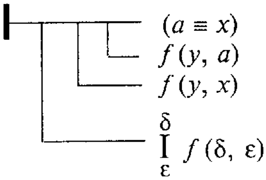




(119.

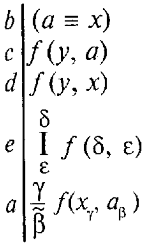
(58) ::

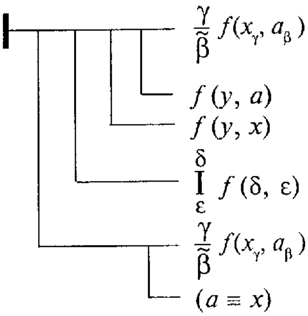




(120.

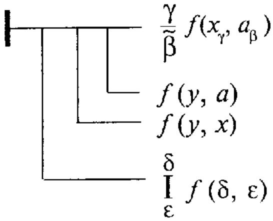
(20) :





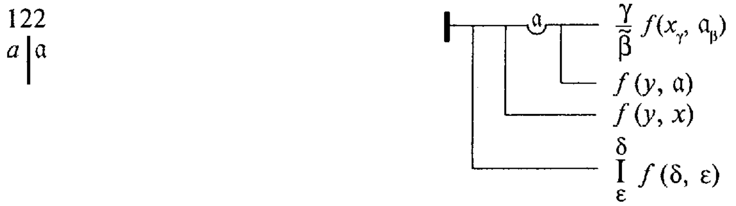
(121.

(112) ::

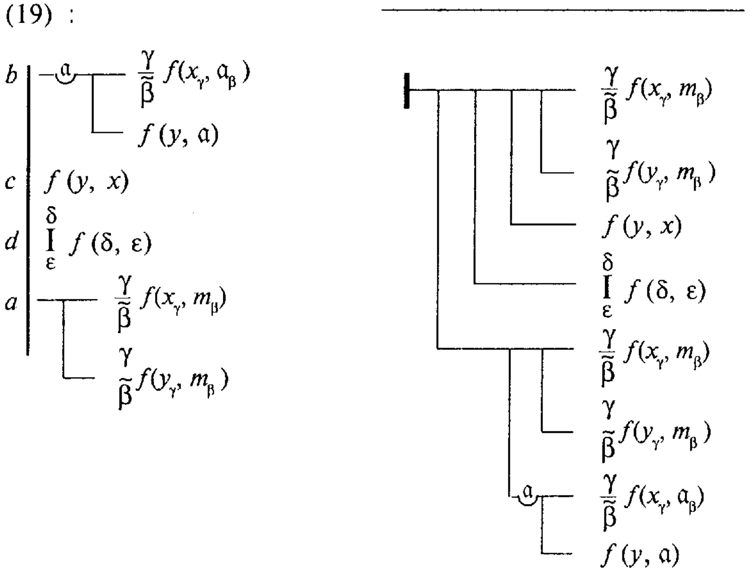


(122.

122

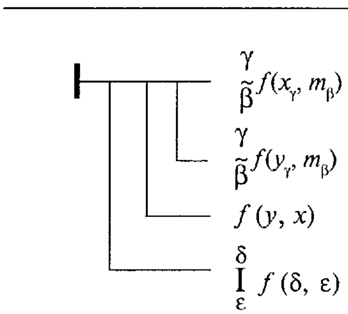


(19) :



(123.

(110) ::



(124.

Словесный вывод формул (122) и (124) таков:

Пусть x есть результат применения однозначной процедуры f к y. Тогда, согласно (120), каждый результат применения процедуры f к y есть то же самое, что и x. Поэтому, согласно (112), каждый результат применения процедуры f к y принадлежит f-последовательности, начинающейся с x.

Итак:

если x есть результат применения однозначной процедуры f к y, то каждый результат применения процедуры f к y принадлежит f-последовательности, начинающейся с x (формула 122).

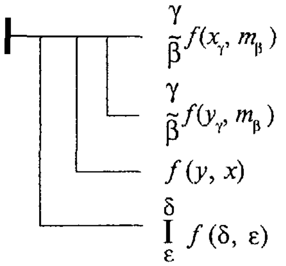
Пусть в f-последовательности m следует за y. Тогда из (110) вытекает: если каждый результат применения процедуры f к y принадлежит f-последовательности, начинающейся с x, то и m принадлежит f-последовательности, начинающейся с x.

Вместе с (122) это свидетельствует, что если x есть результат применения однозначной процедуры f к y, то m принадлежит f-последовательности, начинающейся с x.

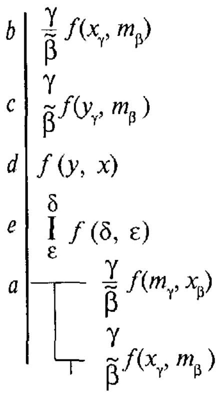
Итак:

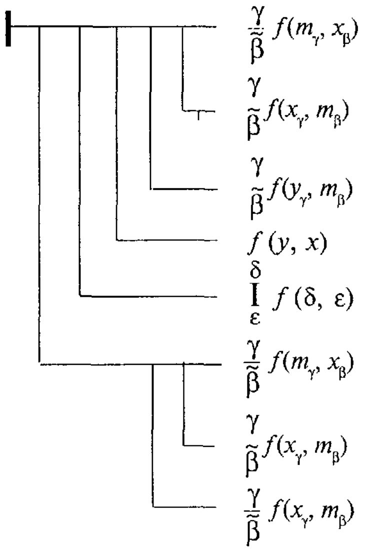
если x есть результат применения однозначной процедуры f к y и если m следует в f-последовательности за y, то m принадлежит f-последовательности, начинающейся с x (формула 124).

124



(20) :

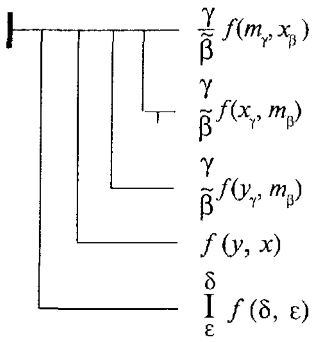




(125.

(114) ::

x	m
z	x



(126.

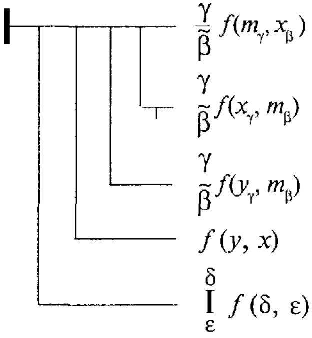
Словесный вывод этой формулы гласит:

Пусть x есть результат применения однозначной процедуры f к y. Пусть m в f-последовательности следует за y. Тогда, согласно (124), m принадлежит f-последовательности, начинающейся с x. Следовательно, согласно (114), x принадлежит f-последовательности, начинающейся с m; или m в f-последовательности следует за x. Это можно выразить и так: x принадлежит f-последовательности, начинающейся с m, или x в f-последовательности предшествует m.

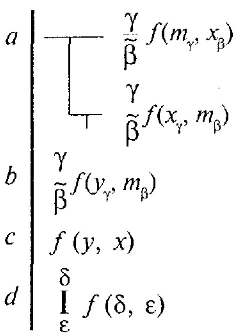
Поэтому:

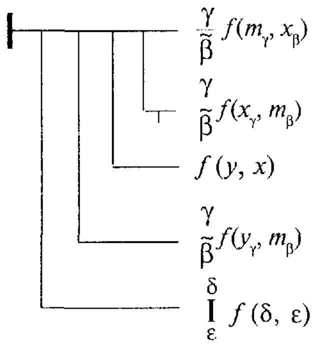
если m в f-последовательности следует за y и если процедура f однозначна, то каждый результат применения процедуры f к y принадлежит f-последовательности, начинающейся с m, или в f-последовательности он предшествует m.

126



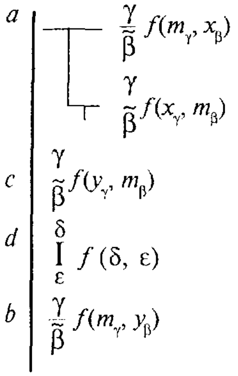
(12) :

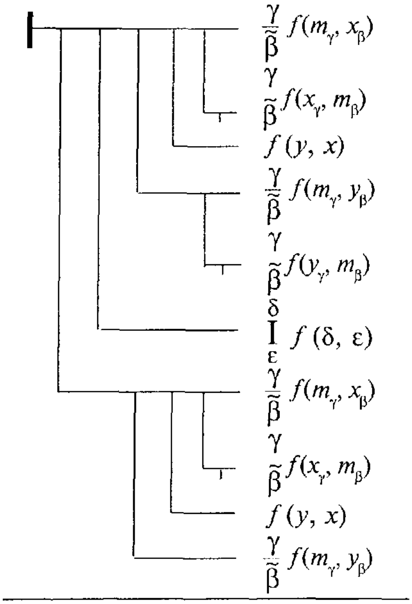




(127.

(51) :

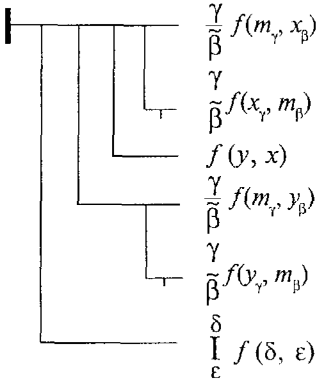




(128.

(111) :

$z \mid m$
$v \mid x$

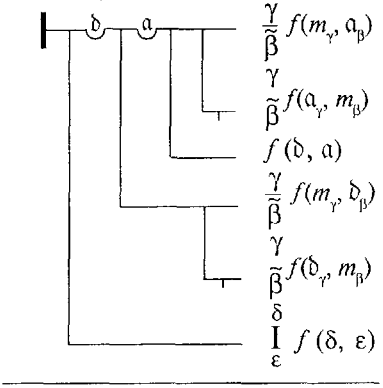


(129.

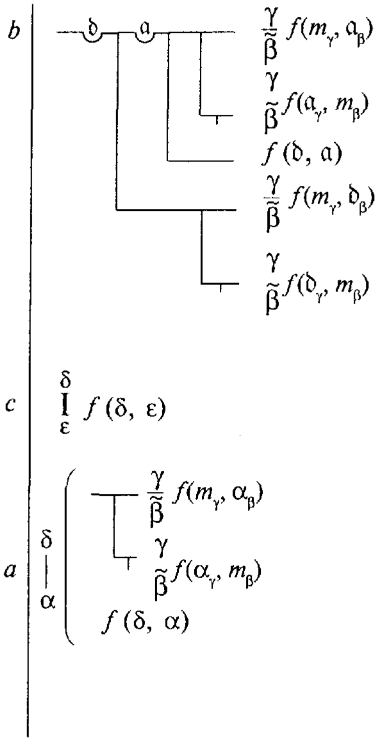
На словах (129) гласит:

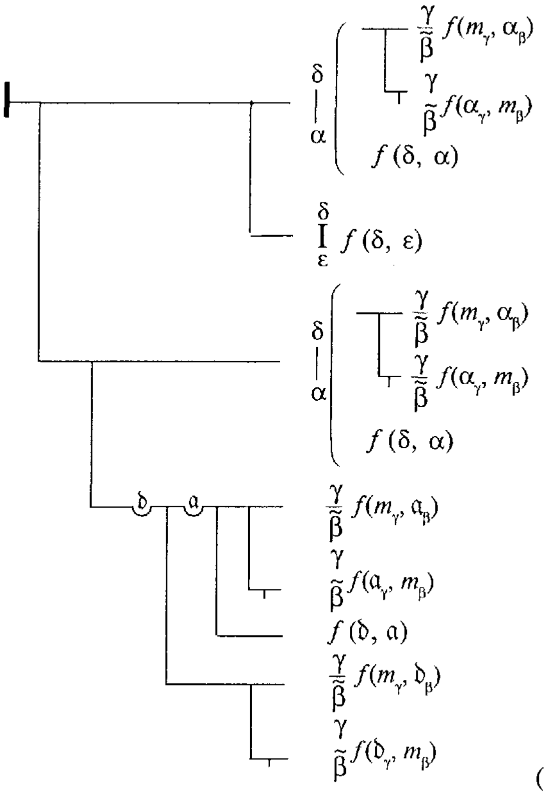
Если процедура f однозначна и если у принадлежит f-последовательности, начинающейся с т, или у в f-последовательности предшествует т, то каждый результат применения процедуры f к у принадлежит f-последовательности, начинающейся с т, или в f-последовательности предшествует т.

129
$x \mid \mathfrak{a}$
$y \mid \mathfrak{d}$



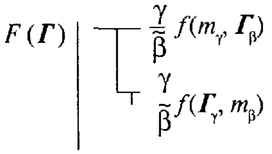
(9) :

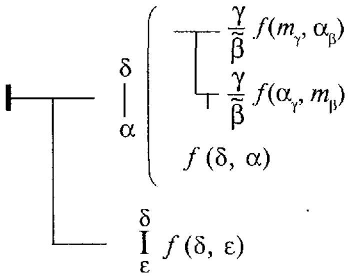




(130.

(75) :



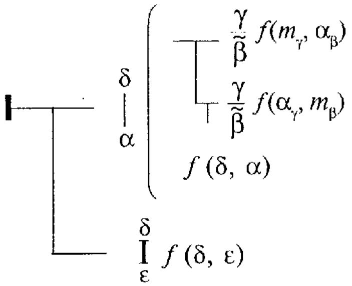


(131.

На словах (131) гласит:

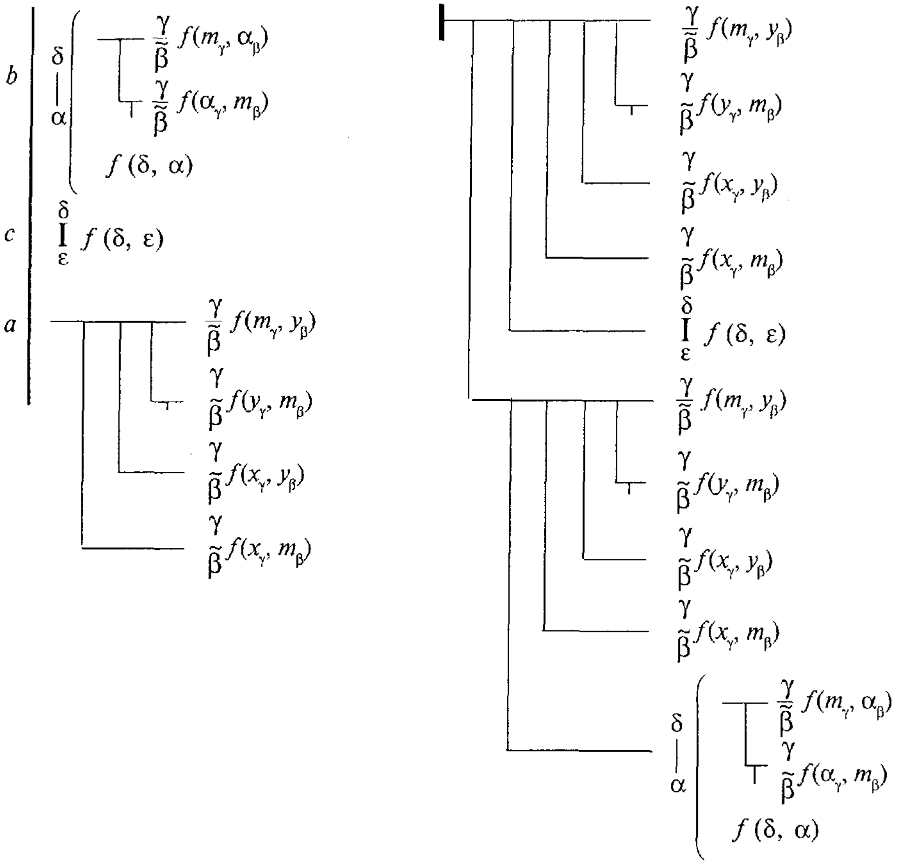
если процедура f однозначна, то в f-последовательности наследуемым является свойство [предмета] принадлежать f-последовательности, начинающейся с m, или предшествовать m в f-последовательности.

131



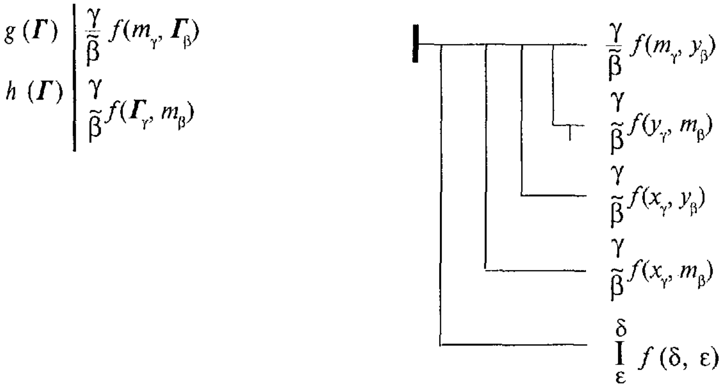
(9) :

140



(132.

(83) ::



(133.

На словах это предложение гласит:

если процедура f однозначна и если m и y следуют в f-последовательности за x, то y либо принадлежит f-последовательности, начинающейся с m, либо же в f-последовательности y предшествует m.

Ниже я помещаю таблицу, из которой видно, на каком месте одну из формул можно использовать для выведения другой. Этой же таблицей можно пользоваться для того, чтобы наглядно убедиться в способах применения какой-либо формулы. Из таблицы можно также узнать, как часто применяется та или иная формула.

Справа от тонкой вертикальной черты помещен номер формулы, при выведении которой использована формула, указанная слева.

1	3	7	94	12	35	23	48	47	49	63	91	84	98	109	110
1	5	7	107	12	49	24	25	48	101	64	65	85	86	110	124
1	11	7	113	12	60	24	63	49	50	65	66	86	87	111	129
1	24	8	9	12	85	25	111	50	51	66	—	87	88	112	113
1	26	8	10	12	127	26	27	51	128	67	68	88	95	112	122
1	27	8	12	13	14	27	42	52	53	68	70	89	90	113	114
1	36	8	17	14	15	28	29	52	57	68	77	90	91	114	126
2	3	8	26	15	88	28	33	52	75	68	116	90	93	115	116
2	4	8	38	16	17	29	30	52	89	69	70	91	92	116	117
2	39	8	53	16	18	30	59	52	105	69	75	92	102	117	118
2	73	8	62	16	22	31	32	53	55	70	71	93	94	118	119
2	79	8	66	17	50	32	33	53	92	71	72	94	95	119	120
3	4	8	74	17	78	33	34	54	55	72	73	95	96	120	121
4	5	8	84	18	19	33	46	55	56	72	74	96	97	121	122
5	6	8	96	18	20	34	35	55	104	73	87	96	102	122	123
5	7	9	10	18	23	34	36	56	57	74	81	97	98	123	124
5	9	9	11	18	51	35	40	57	68	75	97	98	—	124	125
5	12	9	19	18	64	36	37	57	100	75	109	99	100	125	126
5	14	9	21	18	82	36	38	58	59	75	131	99	105	126	127
5	16	9	37	19	20	36	83	58	60	76	77	100	101	127	128
5	18	9	56	19	21	37	106	58	61	76	89	100	103	128	129
5	22	9	61	19	71	38	39	58	62	77	78	101	102	129	130
5	25	9	117	19	86	39	40	58	67	77	85	102	108	130	131
5	29	9	130	19	103	40	43	58	72	78	79	103	104	131	132
5	34	9	132	19	119	41	42	58	118	78	110	104	114	132	133
5	45	10	30	19	123	42	43	58	120	79	80	105	106	133	—
5	80	11	112	20	121	43	44	59	—	80	81	105	112		
5	90	12	13	20	125	44	45	60	93	81	82	106	107		
6	7	12	15	21	44	45	46	61	65	81	84	107	108		
7	32	12	16	21	47	46	47	62	63	82	83	108	109		
7	67	12	24	22	23	47	48	62	64	83	133	108	111		

ПРИМЕНЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Ниже приводится несколько примеров того, как с помощью моей системы знаков (Begriffsschrift) могут быть выражены арифметические и геометрические соотношения.

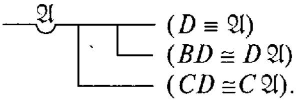
Вместе с тем хотелось бы подчеркнуть, что применяемые здесь знаки не специально изобретены для каждого отдельного случая, а имеют столь общее значение, что позволяют передавать весьма различные отношения.

Пусть

$$AB \cong CD$$

означает конгруэнтность двух пар точек AB и CD.

Тогда то обстоятельство, что точка D лежит на прямой, определяемой точками B и C, можно выразить так:



Утверждение (Bejahung) этой формулы — ее содержания — означало бы: для любого $\mathfrak{A}$ из конгруэнтности пар точек BD и $B\mathfrak{A}$ на основании конгруэнтности пар точек CD и $C\mathfrak{A}$ можно заключить, что $\mathfrak{A}$ есть та же точка, что и D;

или

нельзя найти никакой отличной от D точки, которая с B и C образовывала бы пару точек, конгруэнтных BD и CD.

Этот случай, однако, имеет место тогда, и только тогда, когда D лежит на прямой, определяемой точками B и C[1].

Сходным образом можно выразить то, что некоторая точка лежит на плоскости, определяемой тремя данными точками. Посредством записи

$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta)$$

я обозначаю[2], что y принадлежит f-последовательности, начинающейся с x. Согласно положенному мною в основу более общему понятию функции, равенство

$$u + 1 = v$$

можно трактовать как функцию от u и v и поэтому рассматривать его как частный случай функции $f(u, v)$. Тогда, в соответствии со сказанным,

$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 1 = a_\beta)$$

означает, что a принадлежит последовательности, возникающей путем постоянного увеличения [ее членов] на единицу и начинающейся с нуля:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,$$

то есть является положительным целым числом. Поэтому

$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}}\,(0_\gamma + 1 = a_\beta)$$

есть выражение того, что a есть положительное целое число.

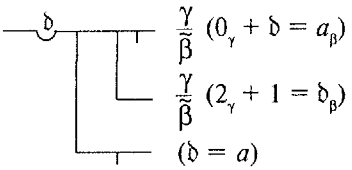
Аналогично:

$$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}}\,(0_\gamma + d = a_\beta)$$

означает, что a принадлежит последовательности

$$0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ldots,$$

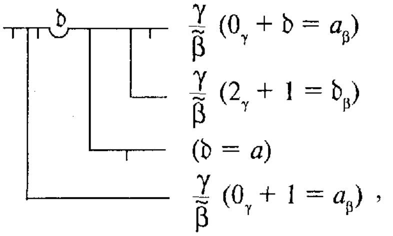
и поэтому является кратным d.



гласит, что a не делится ни на одно из чисел

$$2,\ 3,\ 4,\ldots,$$

кроме самого себя. Если к этому добавить еще, что a является положительным целым числом, то мы получим формулу



обозначающую, что a является простым числом.

Теперь можно показать, как в данной системе знаков передается предложение теории чисел, согласно которому каждое положительное целое число представимо суммой квадратов четырех чисел.

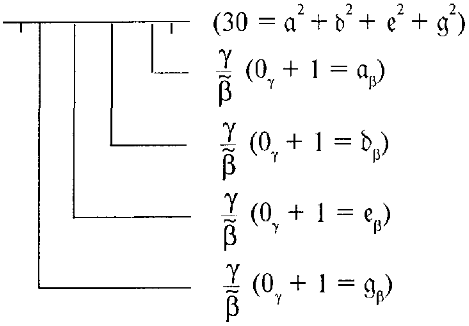
Уравнение:

$$30 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{d}^2 + \mathfrak{e}^2 + \mathfrak{g}^2$$

не выражает:

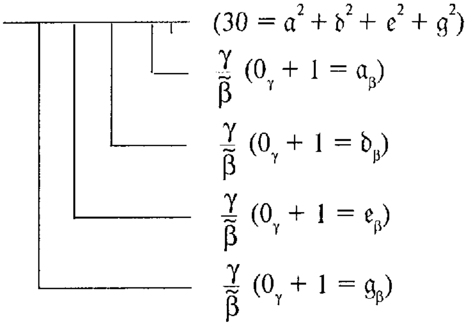
1) что $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ должны быть целыми числами,
2) что такие числа существуют.

Посредством формулы

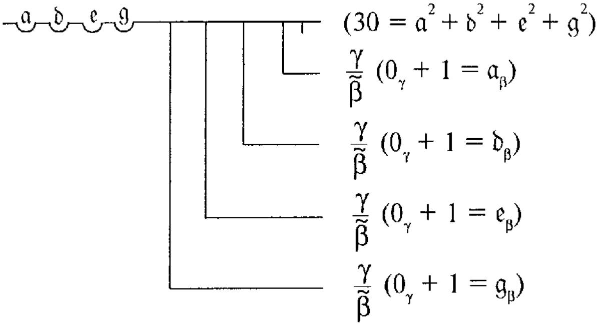


восполняется первый недостаток, ибо она означает, что 30 есть сумма квадратов чисел $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ и что $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ — целые положительные числа.

Теперь надо еще выразить, что такие целые числа имеются. Если мы отбросим штрих отрицания перед всем выражением[3], то в



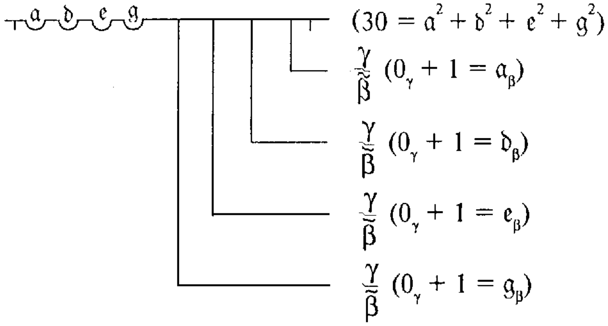
мы получим отрицание того обстоятельства, что $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ являются целыми числами, сумма квадратов которых есть 30; это значит, что по крайней мере одно из чисел $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ не является целым или что сумма их квадратов не есть 30. Если теперь перед всем этим выражением поместить знак всеобщности по $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$:



то смысл его подвергнется обобщению. Теперь это выражение означает: какими бы ни были $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$, если существуют положительные целые числа, то сумма их квадратов не может составлять 30; иными словами: не существует четырех положи-

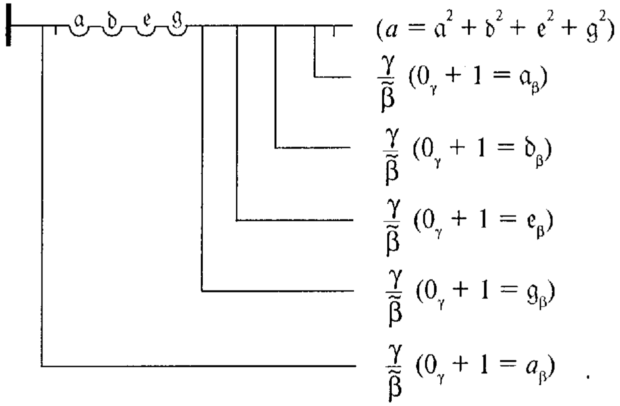
10 – 1742

тельных целых чисел, сумма квадратов которых была бы равна 30. Это полная противоположность тому, что мы хотели выразить. Поэтому, если мы поместим перед всем этим выражением штрих отрицания, мы достигнем нашей цели. В соответствии со сказанным формула



означает, что число 30 представимо в виде суммы квадратов четырех чисел. Возможность, которая заложена в окончании (bar) слова darstellbar (представимо), выражена, таким образом, двумя отрицаниями, которые нельзя просто так отменить, поскольку они не следуют непосредственно одно за другим. Первое отрицание носит общий характер, и благодаря этому мы получаем общность отрицания, т.е. невозможность. Отрицаемая затем невозможность приводит к возможности.

Если теперь нужно выразить предложение, согласно которому каждое положительное целое число представимо в виде суммы квадратов четырех чисел, то 30 надо заменить каким-либо знаком с общим значением, например, знаком *a*, и добавить условие, что *a* должно быть положительным целым числом:



Штрих суждения перед всем выражением превращает его в утверждающее предложение (Behauptung)[4].

БУЛЕВ ЛОГИЧЕСКИЙ ФОРМУЛЬНЫЙ ЯЗЫК И МОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Поскольку этот журнал[1] уже ранее уделял внимание Булевому[2] представлению логических законов посредством уравнений[3], я надеюсь, что сравнение булевского способа обозначений логических отношений с предложенным мною* не явится на его страницах чем-то нежелательным. Однако я прежде всего хотел бы подчеркнуть отличие цели моей понятийной записи от цели, которую преследует логика Буля[3]. Я стремился дополнить язык формул математики знаками логических отношений — *так, чтобы в результате получилась система знаков (Begriffsschrift), которая сделала* бы ненужной вмешательство слов в ход доказательства и благодаря этому соединила бы высочайшую гарантию убедительности с наибольшей краткостью. Чтобы достичь этой цели, введенные мною знаки должны быть способны сливаться в единое целое с обычными математическими знаками. Введенные Булем знаки (отчасти восходящие к Лейбницу) для этого совершенно не пригодны, что, впрочем, и неудивительно, если учесть ту цель, ради которой они были созданы; они должны лишь передавать логическую форму — при полном отвлечении от содержания. Я думаю, что об этом надо сказать в самом начале, дабы предупредить ошибочный взгляд, будто сравнение наших подходов допустимо в любом отношении[4].

Из логики Буля я привлекаю только вторую часть его труда, в которой идет речь о *secondary propositions*, оставляя за собой право продолжить предпринимаемое мною сравнение в другой раз. Под *secondary propositions* Буль понимает гипотетические и дизъюнктивные суждения, вообще такие суждения, которые передают отношения между содержаниями, допускающими истинностную оценку (beurtheilbarer Inhalt) в отличие от *primary propositions*, которые устанавливают отношения понятий друг к другу[5]. Что касается меня, то я провожу различие между суждением и содержанием, допускающим истинностную оценку, сохраняя название «суждение» для случая, когда подобное содержание заявляется в качестве истинного.

Когда речь идет о том, чтобы установить отношение между двумя такими содержаниями, A и B, мы должны иметь в виду следующие случаи:

$$\begin{gathered} A \text{ и } B, \\ A \text{ и не } B, \\ \text{не } A \text{ и } B, \\ \text{не } A \text{ и не } B. \end{gathered}$$

Эти случаи в свою очередь могут утверждаться или отрицаться. У Буля имеются: знак равенства

$$A = B,$$

---

* Исчисление понятий. Галле, 1879.

знак сложения

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B},$$

знак умножения

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B},$$

знак вычитания

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}.$$

Знак логического деления, как менее значимый, мы не будем принимать во внимание.

Знак равенства у Буля утверждает отрицание обеих средних строк, так что остаются возможными случаи «$\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$» и «не $\boldsymbol{A}$ и не $\boldsymbol{B}$». В равенствах

$$\boldsymbol{A} = 1 \text{ и } \boldsymbol{B} = 0$$

утверждающая сила знака равенства выступает четко. Первое равенство заявляет $\boldsymbol{A}$ в качестве истины, второе — представляет $\boldsymbol{B}$ в качестве лжи. Формула

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

означает у Буля отрицание первого и четвертого случаев, так что возможными остаются оба средних. Эту формулу можно перевести как «$\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$», причем «или» следует понимать в исключающем смысле. Лейбниц и некоторые последователи Буля, такие, как Ст. Джевонс[6] и Э. Шрёдер[7], в качестве значения знака + предпочли неисключающее «или». Тогда посредством формулы

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

мы отрицаем только последний, четвертый случай. Формула

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

означает первый случай: «$\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$». Отрицание содержания A, допускающего истинностную оценку, у Буля передается как

$$1 - \boldsymbol{A},$$

у других авторов оно выражается по-иному. К этому добавляется упомянутое выше равенство

$$\boldsymbol{A} = 0,$$

соответствующее случаю, когда в качестве суждения заявляется отрицание. У некоторых других авторов имеется еще знак неравенства, в котором также содержится отрицание. Здесь бросается в глаза избыток знаков. Необходимым следствием этого является в свою очередь избыток исходных правил вычисления. Причина этого наверняка состоит в том, что логике хотят навязать знаки, заимствованные у некоторой другой науки, вместо того, чтобы исходить из самой логики и ее собственных потребностей.

Я выбрал иной путь, придав каждому первоначальному, основному знаку столь простое значение, сколь это было возможно. Если из двух обозначений одно означает все то, что означает и другое, тогда как последнее не содержит в себе всего смысла первого обозначения, то значение второго обозначения я называю более простым, чем первого, потому что оно обладает меньшим содержанием[8]. Если мы применим этот критерий, то увидим, что самое простое отношение двух допускающих суждение содержаний $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ получается путем отрицания одного из четырех случаев:

$$A \text{ и } B,$$
$$A \text{ и не } B,$$
$$\text{не } A \text{ и } B,$$
$$\text{не } A \text{ и не } B,$$

ибо отрицание двух из этих случаев сообщает больше, чем отрицание одного-единственного, а отрицание трех случаев — еще больше; последнее равнозначно утверждению четвертого случая[9]. Ни один из булевских знаков не соответствует требованию наибольшей простоты значения. Ему удовлетворяет лишь знак + в принятом Э. Шрёдером* смысле неисключающего «или». Заключенное в этом преимущество становится тотчас заметным благодаря большей гибкости соответствующих формул по сравнению с булевскими. Я не понимаю, почему В. Шлётель** находит в этом грубую небрежность (Salopperie)[10]. Этот упрек был бы оправдан только в том случае, если бы однажды принятое значение не было выдержано в последующем изложении. А надо ли вводить особый знак для неисключающего «или» — это просто вопрос целесообразности. В исключающем «A или B» заложен двоякий смысл:

1) одно из них имеет место,
2) исключается, что оба они, A и B, имеют место.

Поскольку не всегда эти случаи встречаются вместе, поскольку, напротив, согласно основоположениям теории вероятностей, сочетание двух случаев более редко, чем появление каждого из них в отдельности, целесообразнее располагать особыми знаками для более часто встречающихся — отдельных — случаев, чем для более редкого сочетания двух из них. Но даже тогда, когда A и B находятся в отношении исключающего «или», в конкретных умозаключениях почти всегда во внимание принимается только одно: либо что оба, A и B, не ложны, либо что они не истинны. Буль для более редко встречающегося исключающего «A или B» использует простое обозначение

$$A + B,$$

а для чаще встречающегося неисключающего — сложное выражение

$$A + B\,(1 - A).$$

У Шрёдера дело обстоит наоборот: он передает первое с помощью

$$AB_1 + A_1B,$$

а второе с помощью

$$A + B.$$

Индекс 1 означает здесь отрицание, так что A_1 значит отрицание A.

Булевское

$$A = B$$

содержит в себе три обстоятельства:

1) что A не происходит без B;
2) что B не происходит без A;
3) суждение, что это истинно.

И здесь простого обозначения удостоилось сочетание случаев, тогда как на долю его составных частей выпали сложные обозначения.

---

* Der Operationskreis des Logikkalkuls. Leipzig, 1877.

** Vierteljahrschrift für wissenschaftl[iche] Philos[ophie],1. S. 456.

Булево логическое произведение

$$A \cdot B$$

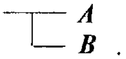
означает — как утверждение первого случая— отрицание трех последних из приведенных выше четырех; оно является, стало быть, содержательно богатым. Тем не менее это обозначение более целесообразно, чем другие, потому что посредством простого отрицания этого произведения мы получаем некоторое простое содержание.

Если мы хотим избежать недостатков, которые были отмечены применительно к булевским знакам, то надо ввести особое обозначение для отрицания одного из четырех перечисленных случаев. Для этой цели достаточно избрать один-единственный случай; ибо с помощью знака отрицания по каждому из четырех случаев можно построить любой другой. Если, например, на место отрицания ***А*** поставить букву ***Г***, то упомянутые четыре случая будут гласить:

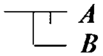
не ***Г*** и ***В***,
не ***Г*** и не ***В***,
Г и ***В***,
Г и не ***В***;

иначе говоря, первый случай принял форму третьего, второй — форму четвертого и, наоборот, третий принял форму первого, четвертый— форму второго. И если теперь можно, пользуясь одним-единственным знаком, подвергнуть отрицанию один из этих четырех случаев, то это и надо сделать; ибо чем меньше введено исходных знаков, тем меньше требуется основных законов, тем легче будет обращение с формулами.

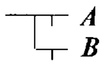
Я выбрал третий случай — «не ***А*** и ***В***», и его отрицание снабдил особым знаком



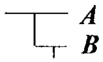
Чтобы получить отрицание остальных случаев, я пользуюсь штрихом отрицания, вертикальной черточкой с нижней стороны горизонтальной черты. Таким образом, формула



означает отрицание того, что «не не ***А*** и ***В***», то есть того, что «***А*** и ***В***»; формула



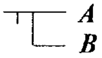
означает отрицание случая «***А*** и не ***В***»; формула



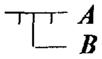
означает отрицание случая «не ***А*** и не ***В***».

Если же надо вместо отрицания рассматриваемых случаев утверждать их, то это производится с помощью штриха отрицания, помещаемого на левой стороне верхней горизонтальной черты.

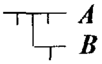
В соответствии с этим символ



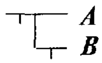
означает «не ***А*** и ***В***», а



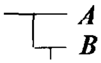
означает «*A* и *B*»,



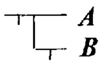
означает «*A* и не *B*», наконец,



означает «не *A* и не *B*». Легко видеть, что



можно перевести как «*A* или *B*» в неисключающем смысле, а



как «ни *A*, ни *B*».

С помощью этих обозначений мы еще ничего не утверждаем, не заявляем никакого суждения: мы лишь из заданных и поставленных на обсуждение содержаний образуем новое содержание. Чтобы теперь заявить, что некое содержание истинно, я пользуюсь короткой вертикальной чертой, — штрихом суждения, как это видно на примере

$$\vdash 3^2 = 9 \;;$$

здесь утверждается верность равенства $3^2 = 9$, тогда как в записи

$$— 3^2 = 9$$

не заявляется никакого суждения. Поэтому, не нарушая истины, можно записать также, что

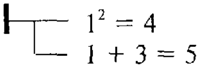
$$— 3^2 = 4 \;,$$

потому что здесь отсутствует штрих суждения. Добавив же штрих отрицания, мы без всякой ошибки можем воспользоваться штрихом суждения. Формула

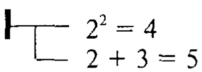
$$\vdash\neg\, 3^2 = 4$$

означает: 3^2 не равно 4.

С помощью



утверждается несуществование случая, когда 1^2 не равно 4, а $1 + 3 = 5$; и это правильно, потому что $1 + 3$ не равно 5. Точно так же в формуле



штрих суждения поставлен правильно, потому что случай, когда 2^2 не равно 4, а $2 + 3 = 5$, не имеет места, ибо $2^2 = 4$. Равным образом, верно, что

$$\vdash\!\!\!-\!\!\begin{array}{|l} (-2)^2 = 4 \\ -2 + 3 = 5 \end{array}$$

причем по двум причинам: потому что $(-2)^2 = 4$ и потому что $-2 + 3$ не равно 5. Какое бы число мы ни подставили в выражение

$$-\!\!\begin{array}{|l} 1^2 = 4 \\ 1 + 3 = 5 \end{array}$$

на место 1, данное содержание остается неизменно верным. Чтобы выразить это общее утверждение, я пользуюсь латинскими буквами:

$$\vdash\!\!\!-\!\!\begin{array}{|l} x^2 = 4 \\ x + 3 = 5 \end{array} \; .$$

Это можно перевести и так: если $x + 3 = 5$, то $x^2 = 4$. Мы получили, таким образом, гипотетическое суждение. Именно величайшая важность этих суждений побудила меня придать знаку

$$-\!\!\begin{array}{|l} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{array}$$

значение отрицания случая «не ***A*** и ***B***». Собственно гипотетическое суждение в результате только этого, правда, еще не возникает, — это происходит только тогда, когда ***A*** и ***B*** получат некую общую им обоим неопределенную компоненту, благодаря которой ситуация приобретет общий характер[11].

Сказанное, я полагаю, достаточно ясно показывает, что различные обязанности, которые Буль взваливает на один и тот же знак, я возлагаю, как и надлежит делать, на несколько знаков, число которых от этого не увеличивается. Знаки, которые я ввел кроме этих, здесь можно не рассматривать, потому что я хочу ограничиться тем, что соответствует Булевым *secondary propositions*. Его знакам сложения, вычитания, умножения и равенства, нулю и единице противостоят:

1) горизонтальный «штрих содержания»,

2) штрих отрицания,

3) вертикальная черта, связывающая два штриха содержания («штрих обусловливания»),

4) вертикальный штрих суждения.

Я не стал здесь рассматривать Булев знак деления и другие его знаки[12], кроме 0 и 1, так как они излишни.

О НАУЧНОЙ ПРАВОМЕРНОСТИ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ

В абстрактных разделах науки постоянно ощущается недостаток средств, позволяющих избегать как недопонимания со стороны других людей, так и ошибок в собственном мышлении. И то, и другое имеет своей причиной несовершенство языка. Ибо, чтобы мыслить, мы используем чувственно воспринимаемые знаки. Наше внимание по своей природе направлено вовне. Наши чувственные впечатления своей живостью столь сильно превосходят образы памяти, что, как и у животных, они прежде всего — и почти исключительно — определяют течение наших представлений. И от этой зависимости мы могли бы избавиться, только если бы внешний мир не был до некоторой степени зависим от нас. Уже большинство животных благодаря своей способности к передвижению имеют некоторое влияние на свои чувственные впечатления: одних они избегают, других ищут. И это не все: они могут также воздействовать на обстоятельства, изменяя их. Человек же этой способностью обладает в гораздо большей степени. Однако без великого изобретения знаков, которые позволяют нам представлять себе то, что отсутствует, что невидимо и даже внечувственно, наша способность влиять на чувственные впечатления не привела бы к тому, что ход наших представлений обрел полную свободу: он был бы ограничен тем, что может создать наша рука, и теми звуками, которые может произвести наш голос.

Я не отрицаю, что и без знаков восприятие какой-либо вещи может быть сосредоточено на определенном круге образов прошлого. Но мы не можем долго им следовать: каждое новое восприятие вытесняет эти образы и вызывает другие. И если с представлением, которое вызывается определенным впечатлением, мы связываем знак, то тем самым создаем новый прочный центр группировки представлений. Из них мы в свою очередь выбираем какое-либо одно представление, чтобы создать для него знак. Так шаг за шагом проникаем мы во внутренний мир наших представлений и движемся в нем по своему усмотрению, используя сами чувственные данные, чтобы освободиться от их власти. Для мышления знаки имеют такое же значение, каким для мореходства стало изобретение того, как можно, используя ветер, плыть против ветра. Поэтому не пренебрегайте знаками! Немало зависит от их целесообразного выбора. Ценность их отнюдь не умаляется тем, что после долгой практики нам уже не нужно фактически производить знаки, что уже не нужно говорить вслух, чтобы думать, ибо, несмотря на все это, мы думаем с помощью слов, а если не слов, то все-таки с помщью знаков — математических и иных.

Без знаков мы вряд ли возвысились бы до мышления в понятиях. Присваивая один и тот же знак разным, но сходным вещам, мы, собственно говоря, обозначаем не отдельную вещь, а то общее, что им присуще, то есть понятие. А обретаем мы его только потому, что его обозначаем: ибо само по себе оно является ненаглядным, и потому, чтобы быть явленным нам, понятие нуждается в некотором наглядном представителе. Так чувственно данное раскрывает нам мир внечувственного.

Достоинства знаков этим не исчерпываются. Достаточно указать на их незаменимость. Ведь язык обнаруживает свои недостатки, как только дело касается того, чтобы оградить мышление от ошибок. Язык не удовлетворяет уже первому требованию, которое в этом отношении к нему должно быть предъявлено, — требованию однозначности. Самыми опасными являются случаи, когда значения какого-либо слова различаются очень слабо, когда колебания значений незначительны, но отнюдь не безразличны. Из числа многих примеров этого упомянем здесь только одно явление, пронизывающее весь язык: одно и то же слово служит для обозначения и данного понятия, и отдельного предмета, подпадающего под это понятие. Вообще различие между понятием и чем-то единичным в языке четко не проводится. «Лошадь» может обозначать и отдельное существо, и определенный вид живых существ, как в предложении: «лошадь есть травоядное животное». Наконец, лошадь может означать понятие, как, например, в предложении «это есть лошадь». Язык не настолько подчиняется логическим законам, чтобы следование грамматике само по себе гарантировало формальную правильность хода мыслей. Формы, в которых выражается логическое следование, столь многообразны, шатки и расплывчаты, что в них легко могут прокрасться незамеченными допущения, которые затем, когда бывает нужно перечислить все условия, необходимые для признания верным заключительного предложения, могут быть пропущены. Это явление получило гораздо более широкое распространение, чем это подобало бы ему по праву. Даже такой добросовестный и строгий автор, как Евклид, не раз молчаливо использует допущения, которые он не приводит ни среди своих принципов, ни среди допущений, относящихся к отдельному предложению. Так, в доказательстве предложения 19 первой книги своих «Начал» (гласящего, что в каждом треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона) он молчаливо использует теоремы:

1. Если отрезок не больше некоторого другого, то он либо равен ему, либо меньше его.
2. Если один угол равен другому углу, то он не больше его.
3. Если один угол меньше другого угла, то он не больше его.

Читатель обнаруживает здесь пропуск этих теорем, только проявив особое внимание, тем более что по своей изначальности эти предложения кажутся столь близкими к самим законам мышления, что их и используют как эти последние[1]. Строго отграниченный круг форм умозаключений как раз и отсутствует в языке, так что по языковой форме непрерывный — без пропусков — ход умозаключений нельзя отличить от содержащих пропуски промежуточных звеньев. Можно даже сказать, что в языке первое почти никогда не встречается, оно идет вразрез с чувством языка, потому что связано с невыносимым многословием. Язык всегда лишь намечает логические соотношения, предоставляя угадывать то, что не нашло в нем непосредственного выражения.

Написанное слово имеет перед словом произнесенным только то преимущество, что оно сохраняется во времени; в этом случае ход мысли, не опасаясь изменений, можно много раз окинуть взором и тем самым более основательно проверить его убедительность. Правила логики при этом применяются внешним образом — как инструкция, так как в самой природе словесного изложения нет достаточной гарантии. Однако и при этом ошибки легко ускользают от глаз того, кто ведет логическую проверку, особенно такие ошибки, которые проистекают из небольших различий в значении какого-нибудь слова. Тем, что вопреки всему, мы сносно ориентируемся в жизни, как и в науке, мы обязаны разнообразным средствам контроля, по большей части имеющимся в нашем распоряжении. Опыт, наглядное пространственное восприятие охраняют нас от многих ошибок. Напротив, логические правила, как показывают примеры из областей, где средства подобной проверки начинают отказывать, — слабая защита. Эти правила не предохранили от заблуждений даже великих философов, так же мало эти правила постоянно удерживали от ошибок высшую математику, поскольку они всегда оставались внешними по отношению к ее содержанию.

Указанные выше недостатки коренятся в определенной мягкости и изменчивости языка, что, с другой стороны, является условием способности его к развитию, его многообразной применимости. В этом отношении язык можно сравнить с рукой, которая для нас недостаточна, несмотря на свою способность приноравливаться к самым разным задачам. Мы создаем искусственные руки — орудия, предназначенные для определенных целей, которые действуют с точностью, недостижимой для руки. А почему возможна такая точность? Именно благодаря жесткости, неизменности частей орудия, отсутствие которых делает руку столь ловкой в работе. Так и словесного языка недостаточно. Мы нуждаемся в совокупности знаков, из которой изгнана всякая многозначность и строгая логическая форма которой не позволяет ускальзывать содержанию.

Возникает вопрос, что предпочтительнее — знаки, которые мы слышим, или знаки, которые мы видим. Первые прежде всего имеют то преимущество, что воспроизводя их, мы более независимы от внешних обстоятельств. Затем можно особо использовать более тесное родство звуков и наших внутренних процессов. В обоих случаях уже сама форма их появления представляет собой временну́ю последовательность; и то, и другое одинаково переходяще. В частности, звуки теснее, чем фигуры и краски, связаны с нашей духовной жизнью; а человеческий голос благодаря своей бесконечной гибкости способен передавать тончайшие оттенки и комбинации наших переживаний. Однако, как бы ни были ценны эти преимущества для других целей, они не имеют значения с точки зрения строгости процесса умозаключения. Тесная связь звуковых знаков с телесными и душевно-психическими условиями деятельности разума является, быть может, как раз тем недостатком, который делает разум более зависимым от знаков.

Совершенно по-другому обстоит дело с тем, что зрительно воспринимаемо; особенно это касается фигур. В общем случае они имеют четкие очертания и ясно различимы. Эта определенность письменных знаков приводит к тому, что обозначаемое ими выделяется более четко. А именно такое воздействие на наши представления желательно с точки зрения строгости процесса умозаключения. Но достичь его можно, если только знак непосредственно обозначает вещь.

Другое преимущество того, что записано, состоит в его более длительной сохранности и неизменности. В этом отношении письмо похоже на понятие, каким оно должно быть; и, конечно, написанное тем более не похоже на непрерывное течение нашего реального мыслительного процесса. Запись дает возможность одновременно учитывать много разных вещей, и если мы в каждый момент обращаем внимание на какую-то малую их часть, то все же сохраняем общее представление об остальном, и последнее, когда требуется, тотчас же оказывается в нашем распоряжении. Взаиморасположение письменных знаков на предназначенной для записи двумерной плоскости можно использовать для выражения мыслимых отношений более разнообразно, чем простое следование и предшествование в однонаправленном времени, и это облегчает отыскание того, на что мы непосредственно хотим обратить внимание. На самом же деле такое простое упорядочение ни в коей мере не соответствует многообразию логических отношений, с помощью которых наши мысли оказываются связанными друг с другом.

Как раз те свойства, благодаря которым письмо далеко отстоит от хода наших представлений, оказались наиболее пригодными для устранения некоторых недостатков наших способностей. Когда дело касается не того, чтобы передать естественное мышление, как оно формируется во взаимодействии со словесным языком, а того, чтобы восполнить односторонности, проистекающие из тесной его связи со слуховым ощущением, записанное должно считаться более предпочтительным, чем сказанное. Чтобы нагляднее использовать своеобразные преимущества знаков, подобная запись должна быть совершенно отлична от всех словесных языков. Вряд ли стоит упоминать, что в словесном письме эти преимущества почти вовсе не проявляются. Расположение слов на листе, где происходит запись, зависит по большей части от длины строк и поэтому не имеет никакого значения. Но уже существуют другие виды письма, в которых лучше используются упомянутые преимущества. Язык формул арифметики — это понятийная запись (Begriffsschrift), потому что она, будучи буззвучной, непосредственно выражает суть дела. Как таковая, она позволяет добиваться краткости, позволяющей размещать содержание простого суждения на одной строке. Подобные содержания — в данном случае уравнения или неравенства — записываются одно под другим, так как одно из них вытекает из другого. Если из двух содержаний следует третье, то последнее отделяется от двух первых горизонтальной чертой, которую можно передать словом «следовательно». При этом способе двумерная протяженность листа с записью служит тому, чтобы придать ей обозримость. Логическое следование здесь весьма единообразно и покоится почти исключительно на том, что одинаковые изменения, производимые с одинаковыми числами, приводят к одинаковым результатам. Конечно, в арифметике это вовсе не единственный способ выведения заключений. Однако, если логический процесс протекает иначе, по большей части приходится выражать его словами. Поэтому в языке формул арифметики для логических связей отсутствуют соответствующие выражения; и поэтому же он не заслуживает названия «запись в понятиях» (Begriffsschrift) в подлинном смысле этого слова. Совершенно иначе обстоит дело в случае того способа обозначения логических отношений, начало которому положил Лейбниц* и который в последнее время был возрожден *Булем*, *Р. Грассманом*, *Ст. Джевонсом*, *Э. Шрёдером* и другими[3]. При этом способе обозначений, однако, логические формы не вполне совершенны: в них отсутствует содержание. Любая попытка подставить в них на места простых букв содержательные выражения, например, аналитические уравнения, показывает — из-за необозримости, громоздкости, даже многозначности возникающих формул — сколь мало этот способ обозначения пригоден для создания настоящего исчисления (Begriffsschrift). От него, по-моему, требуется следующее. Для логических отношений в нем должны быть простые способы выражения, число которых ограничено только самыми необходимыми и которыми можно легко овладеть и уверенно применять. Эти формы должны позволять устанавливать самую тесную связь с данным содержанием. При этом надо стремиться к такой компактной записи, чтобы двумерная поверхность листа могла быть полнее использована в целях наглядности изложения[4]. Знаки по своему содержательному значению менее существенны. Если уж в наличии имеются общие формы, то эти знаки нетрудно создавать по мере надобности. Если же не удается или кажется ненужным расчленить какое-либо понятие на его последние составляющие, то можно довольствоваться знаками вре́менного характера.

Иногда высказывают неоправданные сомнения относительно осуществимости такого проекта. Утверждают, будто с помощью исчисления понятий двигать науку

---

* Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm[ann], S. 94[2].

вперед невозможно, ибо изобретение исчисления предполагает законченность науки. Но ведь такая же мнимая трудность возникает и в случае языка. Он должен создавать возможность для развития разума; однако, как мог человек создать язык, не прибегая к разуму? Для изучения законов природы служат физические приборы; последние же могут создаваться только с помощью развитой техники, которая в свою очередь основывается на знании законов природы. Во всех этих ситуациях круг разрывается одним и тем же способом. Каждый шаг вперед в физике имеет следствием шаг вперед в технике, а последний создает возможность конструирования новых приборов, с помощью которых в свою очередь совершается продвижение в физике. Применимость сказанного к нашему случаю очевидна.

Вот я и попытался* дополнить язык математических формул знаками логических отношений, чтобы — поначалу для математики — получилось исчисление, отвечающее изложенным мною пожеланиям. Этим не исключается применение моих знаков к другим областям. Логические соотношения повторяются всюду, а знаки для конкретных содержаний можно выбирать так, чтобы они вмещались в рамки знаковой системы. Произойдет это или нет, во всяком случае наглядное представление мыслительных форм имеет значение, выходящее за пределы математики. Хотелось бы, чтобы и философы уделили этому вопросу некоторое внимание!

---

* Исчисление понятий, язык формул чистого мышления, построенный по образцу арифметического. Галле, 1879.

БУЛЕВА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЛОГИКА И МОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Вряд ли кто-нибудь может сравниться с *Лейбницем* по обилию новых идей, щедро рассеянных в его сочинениях. Часть его замыслов была разработана еще в его время и при его участии, другая же была забыта и лишь много позже открыта заново и получила дальнейшее развитие. Это позволяет надеяться, что еще многое в его трудах, теперь кажущееся мертвым и погребенным, однажды отпразднует свое возрождение. К таким вопросам я отношу замысел *lingua characterica*[1], который Лейбниц на протяжении всей жизни отстаивал с величайшим упорством и который для него был теснейшим образом связан с идеей некоторого *calculus raciocinator.* Именно в выполнимости вычислений некоего рода видел Лейбниц главное преимущество той формы письменности, в которой не слова строятся из звуков, а понятия — на основе своих составных частей; и из всех упований, которые в связи с этим замыслом он лелеял, — именно это мы с наибольшей уверенностью можем ныне с ним разделить. Из относящихся к этому мест в текстах Лейбница я приведу только следующее:

«Si daretur vel lingua quaedam exacta, vel genus scripturae vere philosophiae, ...omnia quae ex datis ratione assequi, inveniri possent quodam genere calculi, perinde ac resolvuntur problemata arithmetica aut geometrica»*.

Среди многочисленных попыток, предпринимавшихся Лейбницем ради достижения его цели, начала символической логики больше всего приближаются к тому, что, по-видимому, надлежит понимать под словами «calculus ratiocinator». Их можно найти в его статьях:

Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis

и

Addenda ad specimen calculi universalis[3].

Лейбниц стремился максимально приблизить свою логику к обычному языку. Как в языке атрибутивные определения следуют одно за другим, так и Лейбниц, чтобы выразить формирование понятия, располагает буквы, соответствующие его признакам, просто одну за другой. Если, например, *A*— прямоугольный, *B*— равнобедренный, *C*— треугольник, то прямоугольный равнобедренный треугольник Лейбниц представляет как *ABC*. Он использует знак тождества ∞ и знак +, определяя его так:

«$A + B \infty L$ significat A inesse ipsi L»[4].

По-видимому, это соответствует тому значению, которое последующие логики придали этому знаку: $A + B$ представляет класс единичных вещей, которые принад-

---

* De scientia universali seu calculo philosophico[2].

лежат классу *A* или классу *B*, или обоим классам. Переходя к менее важному вопросу, укажу еще, что Лейбниц вводит в свои формулы слова «non» и «ens». В этих своих опытах он несомненно имеет в виду *lingua characterica*, хотя и не устанавливает никакой внешней связи со своим стремлением, направленным на представление содержания.

Данный способ построения некоторой символической логики кажется вполне естественным. Во всяком случае последующие английские и немецкие математики и логики, — по-видимому, независимо от Лейбница — пришли к таким же идеям, правда, насколько мне известно, не стремясь при этом ни к какой универсальной характеристике. Как бы сильно ни отличалась Булева логика* своей систематической разработкой от разрозненных набросков Лейбница, она все же только в одном пункте принципиально превосходит ее, а именно— в том способе, каким Буль сводит гипотетические и дизъюнктивные суждения к категорическим**. Не в ходу и лейбницевское «ens»[5].

В своем небольшом сочинении*** я попытался вернуться к лейбницевским мыслям, относящимся к *lingua characterica*. Я должен был при этом рассматривать частично те же вопросы, что и Буль, хотя и по-иному. Это побудило ряд рецензентов предпринять соответствующие сравнения, из которых самое обстоятельное представил Э. Шрёдер в *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Bd. XXV. Пусть он не сочтет несовместимой с благодарностью, которую я ему выразил в связи с предпринятым им скрупулезным изучением моего сочинения и благожелательной на него рецензией, — то, что ниже я попытаюсь внести дополнения и исправления в это сравнение.

Прежде всего необходимо — дабы не вступать на совершенно ложный путь — постоянно иметь в виду ту цель, которую преследовал Буль в своей символической логике, и ту цель, которой руководствовался я, создавая свое исчисление понятий.

Насколько я понимаю, Буль стремился разработать технику, с помощью которой логические задачи можно было бы решать систематическим способом, сходным с техникой, которая применяется в алгебре при исключении и определении неизвестных. Для этой цели он представляет суждения в форме уравнений, которые строятся из букв и арифметических знаков, таких, как +, 0, 1. В этом случае логические законы принимают форму некоторого алгоритма, который, однако, лишь отчасти совпадает с используемым для тех же целей в арифметике. От содержания при этом полностью отвлекаются. Этот способ в общем-то отвечает своей цели, по крайней мере в отношении того круга задач, которые имеет в виду Буль. Мыслимы, однако, логические задачи, которые находятся вне этого круга. Использование арифметических знаков для логических целей обладает тем преимуществом, что избавляет от необходимости изучать совершенно новый алгоритм. Бóльшая часть тех пре-

---

* Главный труд Буля — это: *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. London, 1854.

** В одном пункте *Буль* совершает даже шаг назад по сравнению с Лейбницем, когда к лейбницевскому значению выражения *A + B* добавляет условие, согласно которому классы *A* и *B* не должны включать ни одной общей вещи. *У. Стенли Джевонс, Э. Шрёдер* и др. с полным основанием не следуют за ним в этом вопросе.

*** *Исчисление понятий, язык формул чистого мышления, построенный по образцу арифметического*. Галле, 1879.

Ниже я приведу краткое определение знаков, которые я там ввел.

В отличие от того, что общепринято, я провел различие между суждением и допускающим истинностную оценку содержанием. Гипотетическое отношение для меня есть отношение не меж-образований, к которым так привык наш глаз, остается в силе*. Правда, более высокие требования, которые Буль, однако, не выдвигает, этому методу не по плечу. Для того, кто требует, чтобы отношения между знаками находились в полной гармонии с отношениями между вещами, заимствование логикой знаков у арифметики всегда будет значить: подлинное положение вещей поставлено с ног на голову; ибо логика, предметом которой является правильное мышление, является основанием арифметики. Для него будет казаться более уместным исходить из

ду суждениями, а между истинностно оцениваемыми содержаниями. Если же я утверждаю наличие такого отношения, я тем самым высказываю суждение.

1. *Штрих содержания* есть горизонталь; он ставится всегда перед выражением любого допускающего истинностную оценку содержания и служит для того, чтобы к нему были отнесены штрих суждения и штрих отрицания, а также чтобы с помощью условного штриха — штриха обусловливания с ним могли быть связаны другие допускающие истинностную оценку содержания (§ 2); например

$$——(2 + 3 = 5).$$

2. *Штрих суждения* помещается вертикально на левом конце штриха содержания; он превращает данное допускающее истинностную оценку содержание в суждение (§ 2); например

$$\vdash\!\!—(2 + 3 = 5).$$

3. *Штрих отрицания* помещается вертикально с нижней стороны штриха содержания, разделяя его на две части. Часть справа от штриха отрицания есть штрих первоначального содержания, а часть штриха содержания слева — штрих отрицания этого содержания (§ 7); например

$$—\!\!\top\!\!—(2 + 3 = 6).$$

4. *Условный штрих* (штрих обусловливания) соединяет два штриха содержания и проводится от нижней стороны верхнего штриха к левому концу нижнего штриха. Подобно штриху отрицания, он разделяет верхний штрих на две части, из которых правая остается штрихом содержания для верхнего содержания, тогда как левый штрих содержания становится штрихом содержания всей получившейся конфигурации, означающей отрицание того случая, при котором верхнее содержание ложно, а нижнее верно (§ 5); например,

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!—\; x = 7 \\ \quad\;\, \llcorner\!—\; x + 3 = 10 \end{array}$$

означает, что случай, при котором $x + 3 = 10$, а x не равно 7, не имеет места. В этом случае можно сказать: если $x + 3 = 10$, то $x = 7$. Латинские буквы — здесь это x — придают общность данному содержанию суждения, когда оно заявляется в качестве верного, — независимо от того, что мы поместили на место латинской буквы (§ 11, S. 21). Если вместо x мы подставим, например, 2, то получим

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!—\; 2 = 7 \\ \quad\;\, \llcorner\!—\; 2 + 3 = 10. \end{array}$$

Это верное суждение, хотя как верхнее, так и нижнее преобразуемое в суждение содержание ложно. В этом случае перевод с помощью «если» расходится с языковой практикой. Но и здесь отрицается случай, при котором $2 + 3 = 10$ было бы верным равенством, а $2 = 7$ — нет.

Если штрих отрицания стоит слева от условного штриха, как в примере:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!—\; 2 = 7 \\ \quad\quad\;\, \llcorner\!—\; 2 + 3 = 5, \end{array}$$

то тем самым отрицание случая, при котором имело бы место то, что $2 + 3 = 5$, а $2 = 7$ — нет, превращается в утверждение, которое можно перевести как: верно, что $2 + 3 = 5$ имеет место, а $2 = 7$ — нет (§ 7, S. 13). В записи

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\!\!\top\!\!—\; 2 = 1 + 1 \\ \quad\quad\;\, \llcorner\!—\; 2 + 3 = 5 \end{array}$$

вместо выражения $2 = 7$, фигурировавшего в предыдущем примере, выступает выражение $—\!\!\top\!\!—\; 2 = 1 + 1$. Здесь при переводе встречаются два отрицания, которые приводят к утверждению: $2 + 3 = 5$ и $2 = 1 + 1$ (§ 7, S. 12).

* Впрочем, отклонения от арифметики все же столь существенны, что решения логических уравнений совсем непохожи на решения уравнений алгебраических.

собственной природы логики и разрабатывать для нее собственные знаки, которые затем можно будет применить в других науках: повсюду, где дело идет о соблюдении строгой последовательности форм умозаключений.

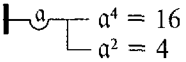
Теперь подходу Буля я противопоставлю цель моей системы (Begriffsschrift). С самого начала я имел в виду *выражение некоторого содержания*. Конечной целью моих устремлений была некая *lingua characterica*, предназначенная прежде всего для математики, а не ограниченное чистой логикой исчисление — *calculus*. Но содержание должно быть передано более точно, чем это возможно на словесном языке. Ибо последний слишком многое оставляет догадке, угадыванию, сколь бы легким оно ни было. Структура слов весьма неполно соответствует строению понятий. Слова «Berggipfel» — вершина горы и «Baumriese» — дерево-великан образованы одинаково, хотя логические отношения между их составными частями различны. Это обстоятельство, однако, никак не выражено, об этом надо догадываться. Язык, используя несущественные признаки или же иносказательные сравнения, часто дает лишь намек на то, что в системе записи в понятиях (Begriffsschrift) получает полное выражение. Эта система отличается, правда, скорее внешним образом, от словесного языка еще и тем, что рассчитана на глаз, а не на ухо. Хотя язык пользуется и словесной записью, последняя просто отображает язык слов и поэтому вряд ли приближает его к понятийной записи как знаковой системе; пожалуй, он даже еще больше отдаляет от нее, потому что состоит из знаков для знаков, а не из знаков для вещей. Некая *lingua characterica*, как говорит Лейбниц, должна *peindre non pas les paroles, mais les pensées*[6]. Намного ближе к данной цели язык математических формул, который отчасти ее и достигает. Но геометрический язык еще совершенно не развит, и даже язык арифметики не достаточен для ее собственной области; ибо как раз в наиболее важных разделах — там, где должны вводиться новые понятия, закладываться новые основания, — он вынужден уступать поле деятельности словесному языку; ибо в языке арифметики числа составляются из чисел, и в нем могут быть выражены только суждения, которые относятся к равенству чисел, возникающих тем или иным образом. Но в арифметике, рассматриваемой в самом широком смысле, происходит также и формирование понятий, причем понятий, обладающих богатством и тонкостью внутреннего строения; все это, в соединении с подобным же логическим совершенством, дает эффект, какого, наверное, не найти ни в какой другой науке. Арифметика в широком смысле выносит и суждения, которые отличны от простых уравнений и неравенств. Причина этой неспособности следовать научному образованию понятий лежит* в отсутствии одной из двух частей, из которых должен состоять любой развитый язык. Дело в том, что надо отличать формальную часть, которая в словесном языке состоит из окончаний, префиксов и суффиксов, а также служебных слов, от части собственно содержательной. Знаки арифметики соответствуют последней. Чего еще в ней нет, так это логического цемента, который крепко связал бы друг с другом эти строительные конструкции. Его до сих пор поставлял словесный язык, и поэтому без него нельзя обойтись не только в тех частях арифметического языка, которые не существенны для строгого процесса умозаключения и служат лишь для облегченного восприятия его общей связи, но даже и в самом доказательстве. Булева символическая логика, напротив, представляет собой только формальную часть языка, да и то не полностью. Язык формул Буля и арифметический язык решают поэтому, каждый, только одну часть задачи, стоящей перед записью в понятиях. Чтобы получить полное решение этой задачи, требуется дополнить математические знаки некоторой формальной частью, потому что нецелесообразным было бы не использовать то, что

* В случае арифметического языка формул.

уже есть в наличии. Но для получения требуемого дополнения булевская логика совершенно не годится — уже потому, что в ней используются знаки +, 0, 1 в смысле, расходящемся с арифметическим. Если в какой-то формуле мы бы стали один и тот же знак применять в разных значениях, это привело бы к большим недоразумениям. Булю этого не следует ставить в вину, потому что подобное использование формул, как это очевидно, совершенно не входило в его намерения. Отсюда возникает задача введения таких знаков для логических отношений, которые могли бы слиться с языком математических формул, благодаря чему возникла бы — по крайней мере для известной области — завершенная, полная знаковая система (Begriffsschrift). Это исходный пункт моего небольшого сочинения.

Итак, при всем различии наших дальнейших целей обнаруживается, что ближайшая задача и для Буля, и для меня одна и та же: с помощью письменных знаков наглядно представить логические отношения. Это открывает возможность сравнения. Мое обращение к данному вопросу не надо понимать так, будто предполагается вынесение решения о том, какой из двух формульных языков предпочтительнее. Такая постановка вопроса должна быть отвергнута путем ссылки на наши конечные цели: моя цель шире, нежели цель Буля. Ведь вполне возможно, что каждый из нас считает свой подход более соответствующим поставленной им задаче. Тем не менее мне кажется, что полезно будет провести подобное сравнение: в результате резче выступят многие особенности моего исчисления понятий.

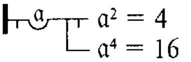
Что касается объемов областей, для которых прежде всего предназначены эти два языка знаков, то можно было бы, как будто, полагать: если из моей понятийной записи удалить все, что лежит за пределами чистой логики, то области должны совпасть. Однако и после этого не все из того, что у меня получает выражение, может быть передано на языке булевских знаков, тогда как обратный перевод возможен. Правда, Э. Шрёдер полагает, будто моя запись в понятиях соответствует только второй части труда Буля. Это мнение нетрудно опровергнуть, указав, что такое суждение, как «каждый корень квадратный из 4 есть корень четвертой степени из 16», легко выражается посредством



,

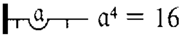
хотя, по Булю, его надо было бы причислить к *primary propositions*. Подобным же образом я представляю все суждения первой части Булева труда, причем понимаю их, конечно, совершенно по-иному. Подлинное различие заключается в том, что я избегаю проводимого Булем разделения логики на две части, из которых первая посвящена отношениям между понятиями (*primary propositions*), а вторая — отношениям между суждениями (*secondary propositions*): все производится из единой заготовки. У Буля обе части идут рядом, так что одна часть выступает зеркальным отражением другой; но именно поэтому между ними отсутствует всякая органическая связь[7].

Вместе с тем у Буля для частных суждений, таких, как «некоторые корни четвертой степени из 16 суть корни квадратные из 4»[8]:



,

имеются лишь выражения, передающие их неполно, а для суждений существования, таких, как «существует по крайней мере один корень четвертой степени из 16»:



,

по-видимому, нет вообще никаких.

Таким образом, обнаруживается, что моя запись в понятиях, даже будучи ограниченной чистой логикой, распространяется на несколько более широкую область, нежели булевский формульный язык. Это происходит потому, что я далеко отошел от аристотелевской логики. Дело в том, что у Аристотеля, как и у Буля, образование понятий путем абстракции есть исходное логическое деяние, а процессы суждения и умозаключения осуществляются путем непосредственного или опосредованного сравнения понятий по их объему*. Различие состоит только в том, что Аристотель на первый план выдвигает случай, когда объем одного понятия полностью включает объем другого, стало быть, случай подчинения понятий, тогда как Буль сводит все случаи к равенству объемов**. Гипотетические и дизъюнктивные суждения при этом поначалу остаются в стороне. Буль рассматривает гипотетическое суждение «если есть B, то есть A» как один из случаев подчинения понятий, когда говорит: «Класс моментов времени, когда имеет место B, включается в класс моментов времени, когда имеет место A».

Сколь мало привлечение представлений о моментах времени отвечает сути дела, наиболее отчетливо проявляется тогда, когда мы раздумываем о вечных, например, математических, истинах. Пытаясь избежать искусственности булевского приема, Шрёдер, как и Хью Маккол, определяют $A = 0$, $A + B = 1$ и подобные им выражения — выражения, смысл которых выявляется сам собой благодаря связи их истолкования Булем с тем, что было установлено им в первой части его труда, — заново, без учета сделанного предшественниками. Но тем самым разрывается последняя слабая связь между обеими частями труда Буля, а знаки 0, 1, + получают, кроме их арифметического и булевского значения, еще и некое третье. А именно, 0 означает по Булю объем понятия, под которое не подпадает ничего единичного, например объем понятия «целое число, квадрат которого есть 2»[9]. Под 1 Буль понимает объем своего *universe of discourse*. Эти значения принимаются одинаково как в первой, так и во второй части его труда. Если разорвать связь между частями этого труда, то 0 во второй части, собственно говоря, теряет всякое самостоятельное значение; в соединении со знаком равенства он означает отрицание, высказанное в качестве суждения, тогда как «=1» обозначает утверждение, которое я выражаю с помощью штриха суждения. Наряду с этим значением знаку равенства — в таких формулах, как $A = B$, — придается затем еще одно самостоятельное значение. Но что сам Буль — в силу своих воззрений — не устанавливает между обеими частями своего труда никакой органической связи, видно из того, что он не использует уравнения, приводимые в первой части, в качестве составных частей уравнений второй части; да если строго придерживаться их значения, поступить иначе и нельзя было. Ибо в первой части $A = B$ есть некоторое суждение, тогда как взятое в качестве составной части уравнения, встречающегося во второй части — примером может служить

$$(A = B)\ C = D,$$

— выражение $A = B$ должно было бы означать класс моментов времени, в которых должно утверждаться содержание суждения «$A = B$». Если же — в стремлении избежать этого — мы откажемся от вспомогательного представления о классе моментов времени, то в одной и той же формуле знаки 0, 1 и т.д. получили бы двоякий смысл, что сделало бы ее, самое меньшее, неясной.

---

* Это не означает, что образование понятий занимает большое место в их изложении. Напротив, их логические учения являются в основном учениями об умозаключениях, образование же понятий предполагается уже совершившимся.

** Отношение равенства более богато содержанием, поэтому оно менее широко и общо, нежели отношение подчинения.

В противоположность Булю, я исхожу из суждений и их содержаний, а не из понятий. Строго определенное гипотетическое отношение допускающих истинностную оценку содержаний[10] для основоположений моей знаковой системы имеет значение, аналогичное совпадению понятий в логике Буля. Для меня образование понятий происходит лишь на основе суждений. А именно, если представить себе, что в допускающем истинностную оценку содержании

$$2^4 = 16$$

число 2 можно заменить на нечто другое, скажем, на (−2) или 3, что можно выразить, подставив x на место 2:

$$x^4 = 16,$$

то превращаемое в суждение содержание распадается на постоянную и переменную части. Первая часть, если рассматривать ее саму по себе, вместе с наличием в ней *пустого места для второй части порождает понятие «корень четвертой степени из 16»**.

Теперь мы можем выразить равенство

$$2^4 = 16$$

предложением «2 есть некоторый корень четвертой степени из 16», или «единичный предмет 2 подпадает под понятие корня четвертой степени из 16», или «принадлежит классу корней четвертой степени из 16». С таким же успехом, однако, можно сказать: «4 есть логарифм числа 16 по основанию 2». Тогда 4 рассматривается как заменимое, и мы получаем понятие «логарифм числа 16 по основанию 2»:

$$2^x = 16.$$

Буква x указывает то место, которое может занять знак данного единичного объекта, подпадающего под данное понятие. Но в

$$x^4 = 16$$

мы можем мыслить заменимым еще и 16, что можно записать, скажем, так:

$$x^4 = y.$$

---

* Может вызвать удивление, что я не выражаю это в форме

$$2 = \sqrt[4]{16}\ .$$

Причина состоит в том, что выражение $\sqrt[4]{16}$, взятое в одной и той же связи, не может означать то один, то другой корень четвертой степени из 16. Иначе можно было бы построить умозаключение

$$\frac{\begin{array}{c}2 = \sqrt[4]{16}\\ -2 = \sqrt[4]{16}\end{array}}{2 = -2}\ .$$

То, что $\sqrt[4]{16}$ помещается с одной стороны знака равенства, означает, что под $\sqrt[4]{16}$ надо понимать некоторый определенный корень четвертой степени из 16, подобно тому, как букве a, где бы она ни встречалась в каком-либо контексте, надо придавать одно и то же значение. Если же установлено, что $\sqrt[4]{16}$ должно означать вещественный положительный корень, то $-2 = \sqrt[4]{16}$ есть ложное равенство, а $2 = \sqrt[4]{16}$ следует читать не

«2 есть некоторый корень четвертой степени из 16»,

а

«2 есть *тот самый* (die) вещественный положительный корень из 16».

Отсюда видно, что знак корня не пригоден для выражения того, что под понятие корня подпадает нечто единичное.

Мы получаем понятие о некотором отношении (Relation), а именно, об отношении (Beziehung) некоторого числа к своей четвертой степени. Стало быть, вместо того, чтобы составлять суждение, присоединяя к некоторой единичной вещи как субъекту* предварительно образованное понятие предиката, мы можем поступить наоборот: расчленить на части содержание, подлежащее обсуждению, и таким образом получить определенное понятие**. Правда, чтобы быть способным к такому расчленению, выражение содержания, допускающего истинностную оценку, само уже должно быть внутренне структурировано. Отсюда следует, что по крайней мере для тех свойств и отношений, которые не подлежат дальнейшему разложению, должны использоваться простые обозначения. Но из этого не вытекает, что представления об этих свойствах и отношениях образуются отдельно от вещей; напротив, представления эти возникают с первым суждением, которое приписывает их вещам. Поэтому обозначения упомянутых свойств и отношений в моем исчислении никогда не встречаются изолированно, по отдельности, а всегда в той взаимосвязи, которую выражает истинностно оцениваемое содержание. Это можно сравнить с поведением атомов, относительно которых считается, что ни один из них не встречается отдельно от других, а всегда лишь в связи с другими атомами; теряя одну связь, атом тотчас же вступает в другую***. Знак свойства никогда не встречается без того, чтобы не было хотя бы намека на вещь, которой присуще данное свойство, а обозначение отношения — без указания тех вещей, которые могут находиться в этом отношении.

Теперь я — в противоположность тому, как поступает Буль, — сведу его *primary propositions* к *secondary propositions*. Подчинение понятия «корень квадратный из 4» понятию «корень четвертой степени из 16» я понимаю так: если нечто есть корень квадратный из 4, то это нечто есть корень четвертой степени из 16:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \top\!\!\!-\; x^4 = 16 \\ \llcorner\!-\; x^2 = 4 \end{array}\;.$$

Полагаю, что так я могу самым простым и отвечающим сути дела образом установить органическую связь между обеими частями труда Буля. Развиваемый мною подход учитывает различие между понятием и единичной сущностью — различие, которое у Буля совершенно смазано. Его буквы, строго говоря, никогда не обозначают единичные вещи, а всегда — объемы понятий. Но между понятием и вещью надо проводить различие даже тогда, когда под данное понятие подпадает одна-единственная вещь. Понятие «планета, орбита которой относительно Солнца расположена между орбитами Венеры и Марса» — это все же нечто другое, нежели единичный объект — Земля, хотя только она и подпадает под данное понятие.

---

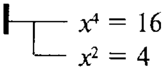
* Случаи, в которых субъект не является единичной вещью, совершенно отличны от рассматриваемого; мы оставляем их в стороне.

** Намеченный здесь взгляд на отношение между суждением и понятием сделает, как я надеюсь, излишними многие бесплодные рассуждения об отрицательных понятиях, таких, как «не-треугольник». Такие понятия не представляют собой чего-то завершенного, а составляют предикат некоего суждения, для которого еще нет субъекта. Трудности возникают потому, что подобный осколок трактуется как нечто целое[11].

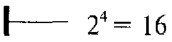
Примечательно в этой связи, что некоторые современные языковеды смотрят на «слова-предложения» (sentenceword) — слова, в которых высказывается целое суждение, — как на исходную форму речи, а корню [слова] как пустой абстракции отказывают в самостоятельном существовании. Об этом я узнал из *Göttigischen gelehrten Anzeigen*, 6. April 1881: *A. H. Sayce*, Introduction to the Science of Language [1880]. Von *A. Fick*[12].

*** Как впоследствии мне стало известно, это сравнение сходным образом использовал в своей «Логике» *Вундт*[13].

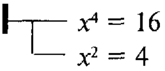
Иначе нельзя было бы образовывать понятия различного содержания, объем которых всегда ограничивался бы отдельной вещью — объектом Земля. Относительно любого понятия всегда возможны вопросы, подпадает ли что-нибудь под это понятие и что именно подпадает, — вопросы, которые не имеют смысла для единичных вещей. Равным образом надо отличать случай подчинения одного понятия другому от случая, когда некий объект подпадает под понятие, хотя в языке то и другое выражается в одинаковой форме. Приведенные выше примеры



и



демонстрируют это различие средствами записи в понятиях. Всеобщность, заключенная в суждении

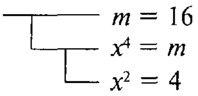


«все корни квадратные из 4 суть корни четвертой степени из 16», выражается с помощью буквы x, когда это суждение заявляется в качестве верного, независимо от того, что понимается под x. Такого рода смысл я раз и навсегда установил для латинских букв в выражениях суждений.

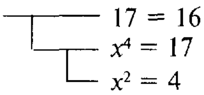
Рассмотрим теперь случай, когда содержание подобного общеутвердительного суждения выступает как часть некоторого сложного суждения, скажем, в качестве условия в гипотетическом суждении; например:

Если каждый корень квадратный из 4 есть корень четвертой степени из m, то m должно быть равно 16.

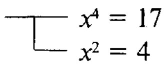
Выражение



не соответствует этому предложению и даже ложно, почему с левого конца самой верхней горизонтальной черты и был удален штрих суждения, ибо вместо m и x мы можем подставить числа, которые сделают данное содержание ложным. А именно, если подставить вместо m число 17, то заключительное предложение[14] $m = 16$ переходит в предложение $17 = 16$, которое ложно. Правда, тем самым все содержание предложения



не становится еще необходимо ложным; ибо если бы ложным стало условие

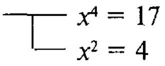


,

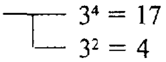
то, несмотря на ложность заключительного предложения, все суждение стало бы верным*.

* Ср. выше. примеч. *** на с. 159—160 и «Исчисление понятий», § 5, где, правда, в последнем абзаце содержится ошибка, на которую в своей рецензии указал Шрёдер; впрочем, эта ошибка никак не влияет на последующее изложение.

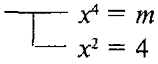
Мы можем, однако, придать букве x такое значение, которое сделает условие



выполненным; ибо



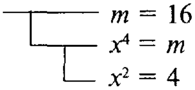
верно, потому что как $3^2 = 4$, так и $3^4 = 17$ — это ложные предложения. Стало быть, если мы выберем для m значение 17, а для x — значение 3, то наше условие



будет выполнено, а предполагаемое следствие

$$m = 16$$

окажется ложным. Поэтому выражение



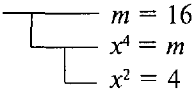
не для всех значений x и m верно, что утверждалось бы, если бы впереди был поставлен штрих суждения. Предложение

«если каждый корень квадратный из 4 есть корень четвертой степени из m, то m должно быть равно 16»

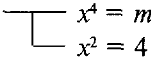
сообщает, однако, нечто другое. Его содержание можно передать так:

«если, что бы ни понимать под x, справедливо предложение, что x^4 должно быть равно m, при условии, что $x^2 = 4$, — то $m = 16$».

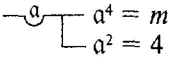
Мы видим: всеобщность, выражаемая с помощью x, не должна относиться ко всему целому



а должна ограничиваться выражением

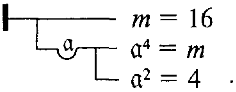
 .

Это я обозначаю, снабжая штрих содержания лункой, в которую помещаю какую-либо готическую букву; эта же буква занимает и место буквы x:

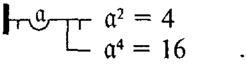
 .

Этим я ограничиваю область всеобщности, обозначенной с помощью готической буквы, тем содержанием, в штрихе которого сделана лунка («Исчисление понятий», § 11)*. Тогда наше суждение выражается следующим образом:

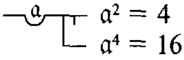
* В своем отзыве на мое сочинение Э. Шрёдер предложил ввести в Булеву логику обозначение всеобщности с помощью готических букв. Этого, однако, не достаточно, потому что область, на которую должно распространяться действие всеобщности, при этом не указывается. С этим же связан и тот недостаток, что в этом случае потребуется второй знак отрицания[15].



С помощью данного способа обозначений теперь удается выразить также частные и экзистенциальные суждения. Предложение «некоторые корни четвертой степени из 16 суть квадратные корни из 4» я передаю так:



А выражение



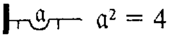
означает следующее преобразуемое в суждение содержание:

«если нечто есть корень четвертой степени из 16, то не существует никакого квадратного корня из 4»,

или

«ни один корень четвертой степени из 16 не является квадратным корнем из 4».

Поместив перед этим содержанием штрих отрицания, мы тем самым обозначаем, что содержание это в его всеобщности ложно, и это заявляется в виде утверждения с помощью штриха суждения. Аналогично



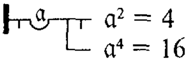
означает:

«существует по крайней мере один квадратный корень из 4».

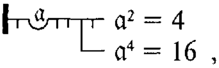
Это — отрицание всеобщности отрицания равенства

$$\mathfrak{a}^2 = 4.$$

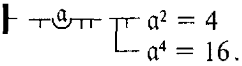
Теперь нетрудно показать, какая связь существует между частными и экзистенциальными суждениями. А именно, в суждение



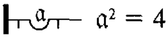
мы можем ввести два отрицания, непосредственно следующие одно за другим и поэтому отменяющие сами себя:



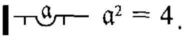
и рассматривать это суждение составленным так, как показано ниже:



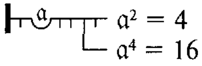
Равным образом выражение

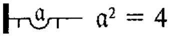


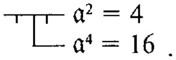
можно разложить[16] на:



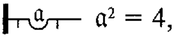
Итак,



отличается от  только тем, что на месте $a^2 = 4$ стоит



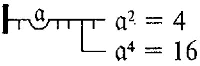
Но это, согласно § 7 «Исчисления понятий», означает, что a есть корень квадратный из 4 и корень четвертой степени из 16. В соответствии с этим, подобно тому как



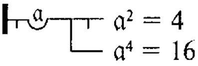
можно перевести

«существует по крайней мере один квадратный корень из 4»,

выражение



или



можно выразить предложением:

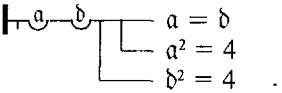
«существует по крайней мере одно число, которое является и корнем квадратным из 4 и корнем четвертой степени из 16».

Но это равнозначно выражению:

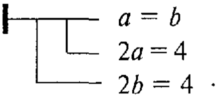
«по крайней мере один корень четвертой степени из 16 есть корень квадратный из 4».

Итак, я показал, что различие в широте между логикой Буля и моей понятийной записью, каким бы внешним оно не казалось сначала, все-таки самым тесным образом связано с исходными положениями обоих. Теперь на ряде примеров будет пояснено, как благодаря своим приложениям мое исчисление, соединенное со знаками арифметики, оказывается пригодным для достижения дальнейших целей.

1. Существует по крайней мере два разных корня квадратных из 4. Отрицается всеобщность предложения: из того, что $a^2 = 4$ и $b^2 = 4$, следует, что $a = b$.



2. Существует не более одного числа, которое, будучи удвоено, равно 4:



3. Число 4 есть положительное целое число (включая 0); то есть 4 принадлежит последовательности, начинающейся с 0 и такой, что любой ее член, будучи сложенным с 1, всегда дает непосредственно последующий член*:

* Ср. «Исчисление понятий», § 29, где в словесном разъяснении формулы (99) вместо $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{}} f(x_\gamma, z_\beta)$ следует читать $\dfrac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, z_\beta)$ [17].

$$\vdash \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 1 = 4_\beta) \;.$$

4. Число 12 кратно четырем, то есть 12 следует за нулем в арифметической прогрессии с разностью, равной четырем*. Числа с противоположными знаками здесь исключаются, 0 считается кратным самому себе:

$$\vdash \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 4 = 12_\beta) \;.$$

5. Число 12 есть общее кратное чисел 4 и 6; это значит, что 12 есть кратное числа 4 и** 12 есть кратное числа 6:

$$\begin{array}{l} \vdash \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 4 = 12_\beta) \\ \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 6 = 12_\beta) \;. \end{array}$$

6. Число 4 есть общий (аликвотный) делитель чисел 12 и 20:

$$\begin{array}{l} \vdash \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 4 = 12_\beta) \\ \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 4 = 20_\beta) \;. \end{array}$$

7. Кратное кратного любого числа есть кратное этого числа:

$$\begin{array}{l} \vdash \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + a = c_\beta) \\ \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + a = b_\beta) \\ \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + b = c_\beta) \;. \end{array}$$

8. Числа ***A*** и ***B*** сравнимы по модулю ***M***. При этом не требуется, чтобы ***A***, ***B***, ***M*** были целыми числами; не предполагается ничего, кроме возможности их сложения. Это выражение может оказаться неудобным при обычном употреблении, но оно получает применение там, где требуется обращение к самому данному понятию:

$$\begin{array}{l} \vdash \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (\boldsymbol{A}_\gamma + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}_\beta) \\ \quad \frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (\boldsymbol{B}_\gamma + \boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}_\beta) \;. \end{array}$$

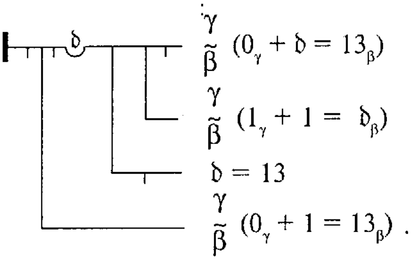
* «Исчисление понятий», § 26.

** См. выше, примеч. *** на с. 159–160.

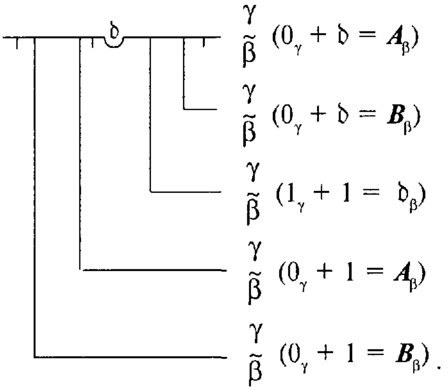
9. Число 13 есть простое число. При этом 1 считается простым числом, а 0 не считается. Более подробно: 13 есть положительное целое число, отличное от нуля, т.е.

$$\overset{\gamma}{\tilde{\beta}}\,(0_\gamma + 1 = 13_\beta)\ ,$$

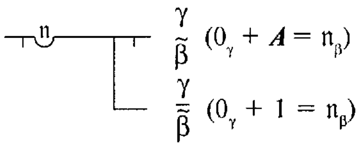
и* каким бы ни было положительное число $\mathfrak{d}$, оно больше единицы $\left(\overset{\gamma}{\tilde{\beta}}\,(1_\gamma + 1 = \mathfrak{d}_\beta)\right)$ и отлично от 13 ($\neg\,\mathfrak{d} = 13$). Число 13 не может быть кратным никакого числа $\mathfrak{d}$ $\left(\neg\ \overset{\gamma}{\tilde{\beta}}\,(0_\gamma + \mathfrak{d} = 13_\beta)\right)$:



10. Числа ***A*** и ***B*** — положительные целые, отличные от нуля и не имеющие общих делителей. При этом считается, что 1 не имеет общих делителей ни с каким числом:



11. Число ***A*** есть положительное рациональное число, включая нуль; это значит, что *существует*** по крайней мере одно положительное целое число (включая нуль), являющееся кратным числа ***A***:



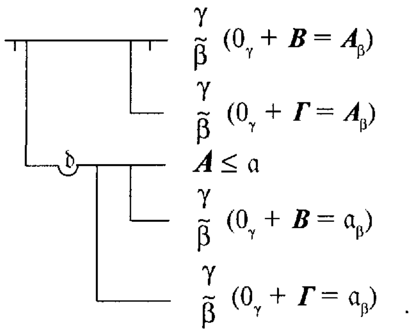
12. Число ***A*** есть наименьшее общее кратное чисел ***B*** и ***Г***. Подробнее: каждое общее кратное чисел ***B*** и ***Г*** больше или равно числу ***A***, и*** ***A*** есть общее кратное чисел ***B*** и ***Г*** :

---

* См. выше, примеч. *** на с. 159—160.

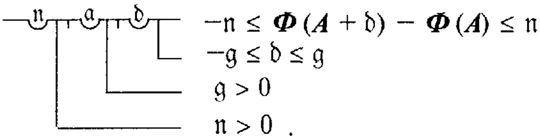
** См. выше, с. 162 и «Исчисление понятий», § 12.

*** См. выше, примеч. *** на с. 159—160.



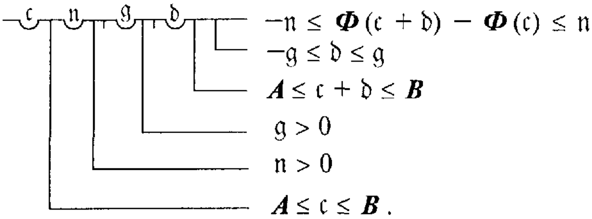
Ни в данном, ни в предшествующих примерах понятие произведения не предполагалось.

13. Вещественная функция $\boldsymbol{\Phi}(x)$ непрерывна при $x = \boldsymbol{A}$; это значит: каким бы ни было отличное от 0 положительное число $\mathfrak{n}$, всегда *существует** отличное от нуля число $\mathfrak{g}$ такое, что любое число $\mathfrak{d}$, заключенное между $-\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}$, удовлетворяет неравенству $-\mathfrak{n} \leq \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{A} + \mathfrak{d}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{A}) \leq \mathfrak{n}$:



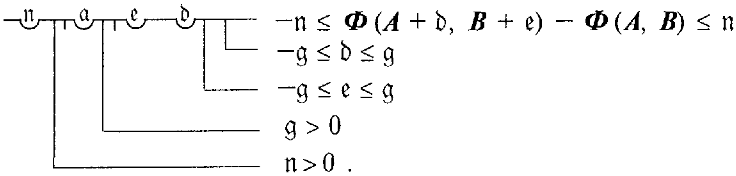
При этом я предполагаю, что выражения, стоящие слева и справа от знаков <, >, ≤, являются вещественными величинами[18].

14. Вещественная функция от вещественного x непрерывна на интервале ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$):



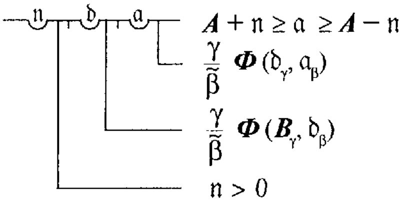
Если здесь формула по сравнению со словесным выражением выглядит более громоздкой, то следует помнить, что она содержит дефиницию понятия, словесное же его выражение только называет формулу. И несмотря на это, подсчеты отдельных знаков, которые требуются в тех или иных случаях, говорят скорее в пользу формул.

15. $\boldsymbol{\Phi}(x, y)$ есть вещественная непрерывная при $x = \boldsymbol{A}$, $y = \boldsymbol{B}$ функция от x и y:

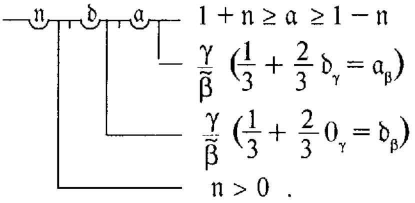


* См. выше, с. 168 и «Исчисление понятий», § 12.

16. Число A есть предел Φ последовательности, начинающейся с B (ср. «Исчисление понятий», § 9, 10, 26, 29):



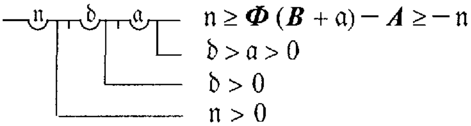
Например, 1 есть предел, к которому стремятся члены последовательности, которая начинается нулем и в которой по произвольному члену (x) получается непосредственно следующий (y) с помощью процедуры $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x = y$.



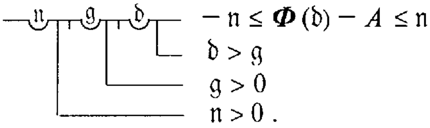
Это последовательность:

$$0;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3} + \frac{2}{9};\ \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27};\ \ldots$$

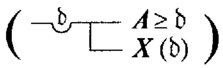
17. Число A есть предел вещественной функции $\Phi(x)$ при стремлении ее аргумента справа к значению B:



18. Число A есть предел, к которому стремится вещественная функция $\Phi(x)$ от вещественного положительного x, когда x стремится к бесконечности:



19. Число A есть верхняя граница чисел, подпадающих под понятие X; то есть каждое число, обладающее свойством X, меньше или равно числу A

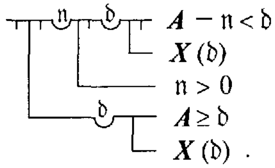


и* для каждого положительного числа $\mathfrak{n}$, отличного от 0, *существует*** число, которое обладает свойством X и является бóльшим, чем $A - \mathfrak{n}$:

---

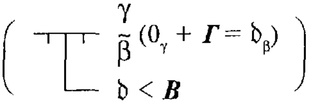
* См. выше, примеч. *** на с. 159–160.

** См. выше, с. 162.

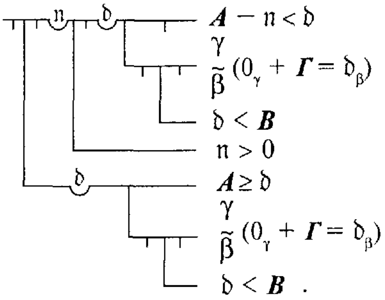


Здесь $\mathfrak{d}$ в $\left(\begin{array}{l} A - \mathfrak{n} < \mathfrak{d} \\ X(\mathfrak{d}) \end{array}\right)$ не имеет ничего общего с $\mathfrak{d}$ в $\left(\begin{array}{l} A \geq \mathfrak{d} \\ X(\mathfrak{d}) \end{array}\right)$, так что вместо последней буквы $\mathfrak{d}$ можно взять любую другую готическую букву. Здесь использовано общее понятие функции, введенное в § 9 и 10 «Исчисления понятий». В соответствии с ним $X(\Delta)$ можно перевести: Δ обладает свойством X, или Δ подпадает под понятие X.

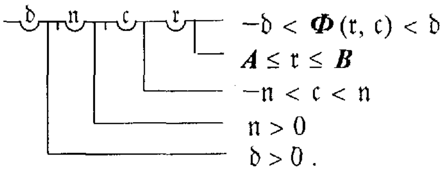
Пусть, например, X есть свойство быть кратным числа Γ и быть меньше, чем B. Тогда



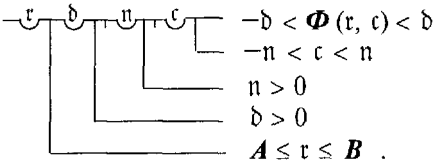
занимает место $X(\mathfrak{d})$, и мы имеем: A есть верхний предел кратных числа Γ, которые меньше, чем B:



20. Можно указать отличное от 0 положительное число ($\mathfrak{n}$), такое, что если абсолютное значение вещественного $\mathfrak{c}$ меньше его и если $\mathfrak{r}$ лежит в интервале от A до B, то абсолютное значение вещественной функции $\Phi(\mathfrak{r}, \mathfrak{c})$ меньше, чем любое наперед заданное положительное и отличное от 0 число ($\mathfrak{d}$):



21. Для любого значения $\mathfrak{r}$, лежащего в интервале от A до B, можно указать отличное от 0 положительное число, такое, что если $\mathfrak{c}$ по абсолютной величине меньше его, то абсолютное значение вещественной функции $\Phi(\mathfrak{r}, \mathfrak{c})$ меньше, чем любое наперед заданное положительное число, отличное от 0:



Подчеркивая, что булевский язык формул здесь не справляется с делом, я поступаю так только для того, чтобы обратить внимание на дальнейшие цели моего исчисления. Как мало значили бы только что приведенные мною формулы, если бы для каждой из них надо было изобретать свой особый знак! Но это далеко от действительной ситуации, напротив, при составлении наших знаков ни одна из этих формул не имелась в виду. Несколько новых знаков оказалось достаточно, чтобы представить большое многообразие математических отношений, для выражения которых до этого требовался словесный язык. Введение формул оправдано уже тем, что они гораздо короче и обозримее, чем равноценные им словесные определения понятий. Преувеличенная боязнь новых знаков — боязнь, которая приводит к тому, что старые знаки перегружаются значениями, — гораздо вреднее, чем чрезмерная тяга к их изобретению, так как возникающий избыток знаков сам собой быстро исчезает, а то, что было ценным, остается. Однако польза такого рода формул в полной мере обнаруживается лишь тогда, когда они входят в умозаключения и вычисления, все преимущества этих формул можно оценить лишь в процессе их применения. Собственно говоря, был бы нужен более обширный и связный раздел, чтобы дать хотя бы приблизительное представление обо всем этом. Надеюсь все-таки, что приводимый ниже пример — один из многих возможных — вызовет у читателя стремление освоиться с моей знаковой системой. Не столь важно, какой предмет избрать, ибо процесс умозаключения по своему характеру всегда один и тот же и совершается по одним и тем же немногим законам, независимо от того, где мы действуем, — в начальных или высших разделах науки. Но в последнем случае, вероятно, потребовалось бы больше подготовки.

Если при этом приходится не раз ссылаться на запись в понятиях, то я все же стараюсь добиваться понимания вопроса по возможности независимо от нее.

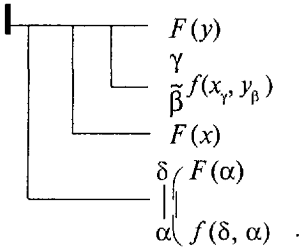
Я докажу предложение, согласно которому сумма двух чисел, кратных некоторому числу, в свою очередь кратна этому числу. Как и раньше, я отношу к кратным числам и единицу, но не 0 и все что лежит на числовой оси слева от него. Числа, кратные которым рассматриваются, ничем не ограничиваются, кроме двух приводимых ниже теорем о сложении:

$$(1)\ \vdash (n+b)+a=n+(b+a) \qquad (1$$

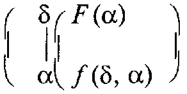
и

$$(2)\ \vdash n=n+0. \qquad (2$$

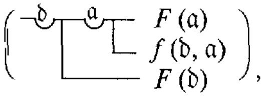
Не предполагается не только никакой теоремы умножения, но и понятия об умножении вообще. Из чисто логических предложений мы вначале нуждаемся в предложении, приведенном под номером (84) на с. 123 «Исчисления понятий»: мы начнем с того, что приведем его без изменений. Словами его можно выразить так: если свойство F наследуемо в f-последовательности; если x обладает свойством F, а в f-последовательности число x предшествует числу y, то y обладает свойством F:



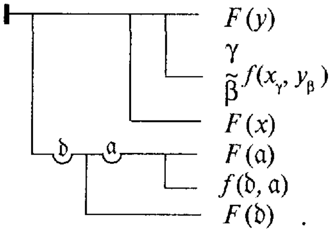
Что должны означать «f-последовательность» и «наследование», станет ясным при их применении*. Теперь я пришел к заключению, что введение знаковой конфигурации



излишне, и вместо нее я возвращаюсь к первоначальному выражению

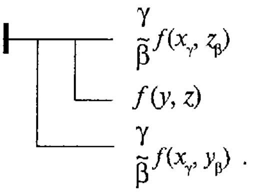


с помощью которого в § 24 «Исчисления понятий» определялась упомянутая конфигурация. Тогда наша формула принимает вид (3):



(3

Далее нам нужна формула (4), приведенная в «Исчислении понятий» на с. 128 под номером (96). Она означает: если в f-последовательности y следует за x, то каждый результат применения операции f к y следует в f-последовательности за x:

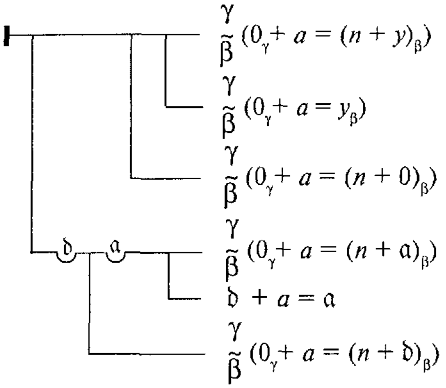


(4

Еще в предисловии к моему «Исчислению понятий» я говорил, что принятое мною ограничение одним-единственным способом умозаключения отпадет в ходе

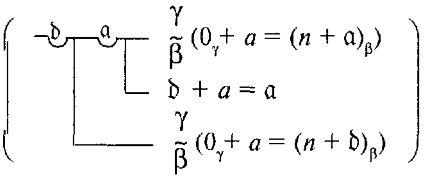
* См. также § 24 и 26 «Исчисления понятий».

последующих применений моего исчисления. Это происходит так: то, что было первоначально выражено формулой как суждение, превращается в правило вычисления. Это я проделываю с формулами (52) и (53) «Исчисления понятий», содержание которых я охватываю правилом: в произвольном суждении любой символ можно заменить другим символом, если в качестве условия добавить равенство символов друг другу[19]. Воспользуемся теперь формулой (3), приняв в качестве функции $F(x)$ формулу $\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(0_\gamma + a = (n+x)_\beta)$, а в качестве $f(x,y)$— формулу $x+a=y$. То, что мы выше называли «свойством F», есть теперь следующее свойство числа: если его прибавить к n, то получится кратное числа a; под f-последовательностью надлежит понимать некоторую арифметическую прогрессию с разностью a. Подставим 0 на место x. Тогда (3) переходит в (5):



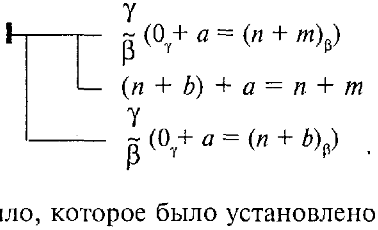
(5

Первое, что теперь надо сделать, это освободиться от самого нижнего условия



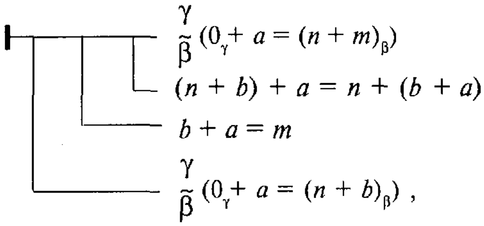
;

это условие выражает тот факт, что свойство: будучи сложенным с n давать кратное числа a, в нашей арифметической прогрессии является наследуемым; это значит, что если некий член этой последовательности обладает данным свойством, то и член, непосредственно следующий за ним, им тоже обладает. Поступая так же, как мы это сделали выше, заменим $f(x,y)$ в формуле (4) на $x+a=y$, x — на нуль, y — на $(n+b)$, а z — на $(n+m)$, и получим (6):



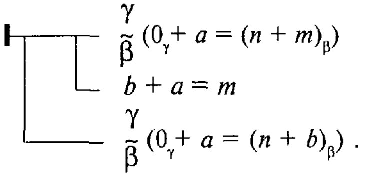
(6

Затем мы применим правило, которое было установлено выше, заменяя во второй строке m на $(b+a)$ и вместе с тем присоединяя условие $b+a=m$. Это дает (7):



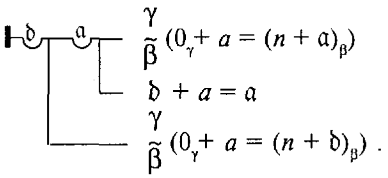
(7

из чего вместе с (1) следует (8):



(8

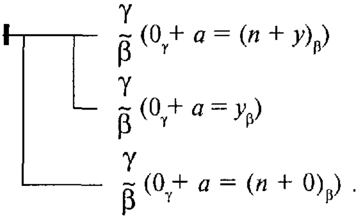
Здесь мы можем вместо латинских букв b и m ввести готические* $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}$ и получить (9):



(9

При этом область, на которую распространяется всеобщность, обозначенная с помощью b (соответственно $\mathfrak{b}$), оставляет без изменения содержание суждения в целом, тогда как из области всеобщности, выраженной посредством m (соответственно $\mathfrak{a}$), исключается условие $\overset{\gamma}{\tilde{\beta}}(0_\gamma + a = (n + b)_\beta)$, что возможно, потому что оно совсем не содержит m. Формула (9) утверждает упомянутую ранее наследуемость.

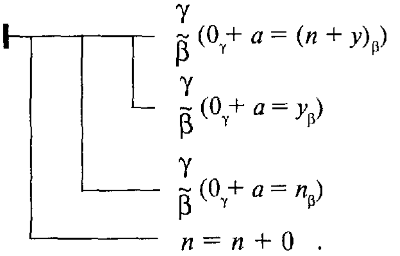
Поэтому мы можем, исходя из (5) и (9), получить в качестве заключения (10).



(10

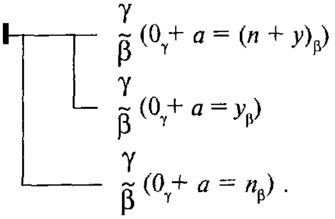
Затем мы еще раз применяем наше правило, заменяя $n + 0$ на n и добавляя условие $n = n + 0$:

* «Исчисление понятий», § 11, с. 82 и след.



(11

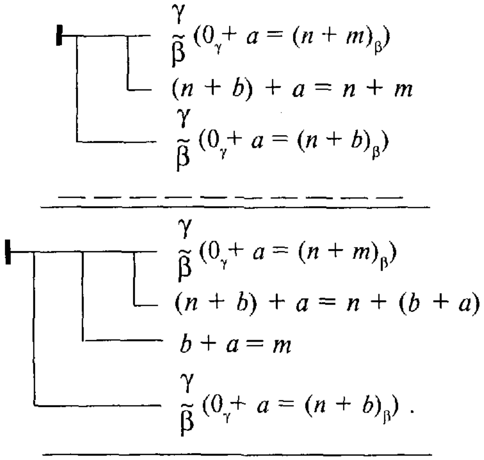
Но это условие, в силу (2), можно сразу отбросить. Так мы получаем (12) — предложение, которое требовалось доказать:



(12

Продолжая действовать подобным образом, мы получаем и предложение, согласно которому кратное кратного некоторого числа в свою очередь является кратным этого числа. Для этого требуется только теорема сложения $n + 0 = n$ и формула (78) из «Исчисления понятий». Поскольку здесь не может встретиться ничего принципиально нового, я не стану этим заниматься, а лучше повторю прежние вычисления — как они предстают без использования слов и в предположении полного знакомства читателя с записью в понятиях. Справа стоят номера формул; слева — ссылки на ранее введенные формулы. Линии разного рода, разделяющие отдельные суждения, служат для указания вида соответствующего перехода[20]. Что касается формул (5) и (11), то их построение предоставляется читателю — сделать это нетрудно. Используемая здесь формула (3) представляет собой вид бернуллиевой индукции[21]. Из § 24 и 26 моего «Исчисления понятий» вытекает, что этот способ умозаключения не является, как можно было бы думать, специфически математическим, а основывается на общих логических законах.

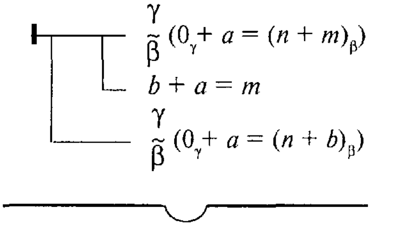
4



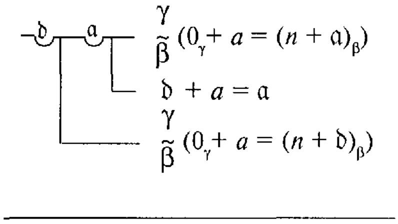
(6

(7

(1)[: :]

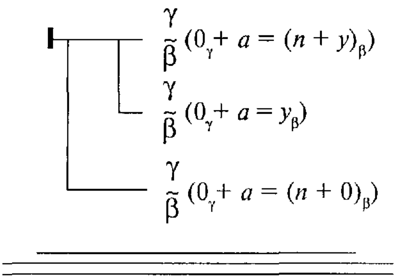


(8



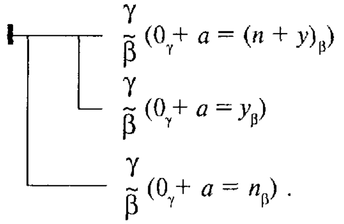
(9

(5) :



(10

(2) : :



[(12]

Подобные выводы — по сравнению с иными формами доказательств —можно было бы счесть чересчур пространными, если бы не то обстоятельство, что они должны отвечать иным требованиям, — и они им отвечают. Иначе исчезла бы всякая возможность сравнения. Требования же, о которых идет речь, таковы:

1) Не следует опираться на предложения, которые менее просты, чем использованные выше. Если, например, мы захотим применить предложения, определяющие умножение, то это можно сделать только после того, как они будут доказаны на основе двух наших теорем, относящихся к сложению.

2) Наглядность нельзя использовать как основание доказательства*, ибо в науке принцип экономии — это заповедь, запрещающая использовать больше вспомогательных средств, чем это на самом деле нужно[22].

---

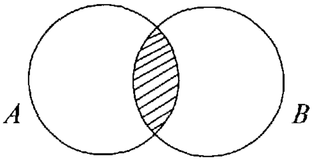
* Напротив, как вспомогательное средство, облегчающее удержание представлений, использовать наглядные образы разрешается.

Но чтобы быть уверенным: ничто, проистекающее из наглядности, не прокралось незамеченным, надо

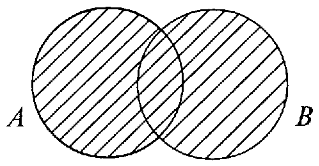
3) внимательно следить за тем, чтобы в цепочке умозаключений не было никаких пробелов. Это требование, в частности, нарушается тогда, когда доказывается фактически только пример данного предложения, а соответствующее обобщение предоставляется читателю.

Моя знаковая система имеет главной целью достижение точности и убедительности; краткость достигается лишь в той мере, в какой она не вредит выполнению указанных требований.

Теперь я еще раз обращаюсь к рассмотренным выше примерам с тем, чтобы обратить внимание на тот способ образования понятий, который можно из них извлечь. Четвертый пример дает в наше распоряжение: понятие числа, кратного числу 4, если мы представим себе, что в $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} (0_\gamma + 4 = 12_\beta)$ число 12 заменимо чем-то другим; или, если мы представляем себе заменимым еще и число 4, то получаем понятие отношения числа к своему кратному; или, если мы мыслим заменимым только 4, — но не 12, это дает понятие аликвотного делителя[23] числа 12. Восьмой пример предоставляет нам понятие сравнения чисел по модулю, тринадцатый— понятие непрерывности функции в точке, и т.д. Все эти понятия получили развитие в науке и доказали свою плодотворность. То, что мы приобретаем благодаря ним, претендует на бóльшую значимость, нежели то, что может дать, например, повседневный мыслительный процесс. Плодотворность результатов — пробный камень понятий, а сфера научной деятельности — собственное поле наблюдений логики. Примечательно при этом, что почти ни один из рассмотренных примеров не начинается с указания вида или класса, которому принадлежат предметы, подпадающие под данное понятие, и соответствующего выделяющего признака, наподобие определения «homo» как «animal rationale». Еще Лейбниц заметил, что можно поступить наоборот: рассматривать «rationale» как заданный класс, а «animal» как признак. Действительно, тогда получается, что быть «homo» значит быть и «animal», и «rationale»*. Если круг A представляет объем понятия «animal», круг B — объем понятия «rationale», то общая часть обоих кругов соответствует объему понятия «homo», и совершенно все равно, как мы представляем себе возникновение этого понятия: так, что от круга A с помощью круга B отделяется некая его часть, или наоборот, от B с помощью круга A производится аналогичное отделение. Такого рода образование понятий соответствует логическому умножению. Буль выразил бы это, например, в виде $C = AB$, где C означает объем понятия «homo». Понятия можно образовывать также путем логического сложения. Примером может служить понятие «преступление, которое должно караться смертью», если мы определяем его как убийство или покушение на убийство либо кайзера, либо его владетельного вассала (Landesherr), либо германского князя (Fürst) в пределах его земли. Пусть круг A означает объем понятия «убийство», круг B — объем понятия «покушение на убийство кайзера либо его владетельного вассала, либо германского князя в пределах его земли». Тогда оба круга вместе, независимо от того, имеют



* Вундт в своей «Логике»[24], том I, с. 224, не соглашается с этим; но его собственная геометрическая схема на с. 252 опровергает его. Надо всегда придерживаться того, что любое различение лишь тогда имеет логическую ценность, когда оно связано с возможными умозаключениями.



или нет они общую часть, представляют объем понятия «преступление, которое должно караться смертью». Рассматривая вопрос с геометрической точки зрения, мы замечаем, что в обоих случаях — независимо от того, образовано ли данное понятие путем логического умножения или логического сложения— соответствующая понятию отграниченная область состоит из частей кругов, отвечающих заданным понятиям. Это верно относительно всех способов построения понятий, которые можно представить с помощью булевских знаков. Подобный способ образования понятий, использующий геометрические схемы, конечно, выражает нечто, заложенное в существе дела; однако без этих схем его, пожалуй, выразить нельзя. Таким образом, этот способ должен предполагать данную систему понятий или, если говорить о геометрических схемах, некую сеть линий. Но тогда в ней новые понятия, собственно, уже содержатся: надо просто использовать имеющиеся линии, чтобы по-новому отграничить и замкнуть части плоскости. Тому обстоятельству, что главное внимание уделяется образованию новых понятий на основе старых, а иные плодотворные подходы к данному вопросу остаются в небрежении, надо, по-видимому, приписать то, что логика часто оставляет такое впечатление, будто, как ни крути, а она, собственно говоря, топчется на месте. Очевидно, возможное множество новых понятий будет тем больше, чем плотнее будет плетение первоначальной сети линий. Правда, можно представить себе, что получить все понятия, какие только могут быть, возможно, приняв в качестве системы заданных понятий — систему единичных объектов (или, точнее, систему понятий, каждое из которых охватывает один-единственный объект). Действительно, Р. Грассман вступил на этот путь. Посредством логического сложения он образует классы или понятия. Например, по Р. Грассману, для понятия «часть света» дефиницией может служить «Европа или Азия [или Африка] или Америка или Австралия». Однако образование понятий путем простого коллекционирования отдельных вещей — это все же чрезвычайно произвольная процедура, не имеющая значения для реального мышления, если только соответствующие объекты не объединены общими признаками. Но как раз такое объединение и составляет сущность понятия. Ведь мы можем образовывать понятия, под которые не подпадает ни одна единичная вещь, и осознание этого достигается, по-видимому, лишь в результате длительного исследования. Понятие может также охватывать бесконечно много отдельных объектов, как это имеет место в случае понятия числа. Прибегая к логическому сложению, мы подобное понятие никогда не получим завершенным. Наконец, отдельные вещи потому нельзя предполагать заданными все вместе, что некоторые из них, например числа*, порождаются мышлением.

Если теперь сравнить со всем этим те определения непрерывности функции и предела, которые содержались в наших примерах, сравнить, далее, ту дефиницию следования членов в последовательности, которая была дана в § 26 моего «Исчисления понятий», то станет понятно, что там и речи нет о том, чтобы использовать разграничительные линии, соответствующие наличным понятиям, для отграничения новых понятий. Напротив, путем предлагаемых мною определений понятий проводятся совершенно новые разграничительные линии, и это плодотворно с научной точки зрения. Здесь тоже старые понятия применяются для построения но-

* Число 3 нельзя рассматривать как понятие именно потому, что вопрос о том, что могло бы под него подпадать, не имеет смысла. В отличие от этого троичность, т.е. свойство состоять из трех отдельных единичностей, есть понятие.

вых, но при этом с помощью знаков всеобщности, отрицания и обусловленности они разными способами связываются друг с другом.

Я полагаю, что почти все ошибки, совершающиеся в процессе умозаключения, коренятся в несовершенстве понятий. Буль предполагает логически совершенные понятия готовыми, имеющимися в нашем распоряжении; но тем самым наиболее трудная часть всей работы представляется уже выполненной; тогда он и может путем чисто механической вычислительной процедуры извлекать из заданных предпосылок свои следствия. Стенли Джевонс для этой цели даже изобрел машину. Но если имеются совершенные понятия, в содержание которых нет нужды вдаваться, то уберечься от ошибок нетрудно и без всяких вычислений. В этом состоит причина того, почему Булева логика не оправдала тех надежд, которые на нее возлагались, — надежд, которые можно было бы лелеять, например, перед лицом великого успеха языка математических знаков, причем не потому, что этот успех связан с понятиями, относящимися к величине, взгляд, который, по-видимому, возник в результате опрометчивого обобщения имеющегося опыта. Булевский язык формул представляет только часть нашего мышления; в целом оно никогда не может быть выполнено машиной или заменено чисто механической деятельностью. Пожалуй, и силлогизму можно придать форму некоторого вычисления, которое, впрочем, не может совершаться без участия мышления; но все же благодаря использованию немногих жестких и наглядных форм, в которых протекает вычисление, оно обеспечивает бóльшую надежность. Настоящую пользу, однако, из этого можно извлечь лишь тогда, когда данное содержание не только намечено, но и — с помощью тех же логических знаков, которые используются при вычислении, — построено, исходя из его составных частей. Тогда вычисление должно быстро обнаружить любую ошибку в образовании понятий. Но все это не входило в первоначальный план Буля, да и его формульный язык нельзя к этому приспособить. Ибо даже если бы этот язык и был более пригоден для передачи содержания, нежели его нынешняя форма, то все же недостаточность средств представления всеобщности по сравнению с тем, что есть у меня, — сделало бы невозможным подлинное образование понятий, не использующее уже имеющихся разграничительных линий. Этот же недостаток, по-видимому, помешал и Лейбницу в дальнейшем его продвижении вперед.

После того как я изложил те аспекты моей системы, в которых она превосходит булевскую логику, и показал, какие следствия с этим связаны, я продолжу сравнение, находясь уже в пределах области, являющейся общей для обоих формульных языков. При этом я могу оставить без внимания первую часть труда Буля.

Я соединяю преобразуемые в суждения содержания ***A*** и ***B*** с помощью условного штриха — штриха обусловливания, например $\begin{array}{l}\top\!\!-\boldsymbol{A}\\ \llcorner\!-\boldsymbol{B}\end{array}$; Буль использует для этого приравнивание[25], сложение и умножение. Из четырех возможностей

I. ***A*** и ***B***
II. ***A*** и не ***B***
III. не ***A*** и ***B***
IV. не ***A*** и не ***B***

моя формула $\begin{array}{l}\top\!\!-\boldsymbol{A}\\ \llcorner\!-\boldsymbol{B}\end{array}$ отрицает третью, а Булев знак равенства обе средние: знак сложения по Булю отрицает первую и последнюю, а по Лейбницу и Стенли Джевонсу — только последнюю возможность; наконец, знак умножения утверждает первую возможность и, стало быть, отрицает все остальные. Прежде всего обращает на себя внимание, что знаков у Буля больше, чем у меня. Хотя и у меня есть знак равенства, я помещаю его между допускающими суждение содержаниями и применяю почти исключительно для установления смысла новых обозначений; теперь я смотрю на него не как на исходный знак, а как на знак, который можно определить с помощью других знаков[26]. Тогда одному моему знаку будет противостоять три Булевых. Мой принцип: вводить как можно меньше знаков в качестве исходных, первоначальных, и это не из страха перед самими новыми знаками — тогда я, как и Буль, обходился бы старыми знаками, придавая им новые значения, — а потому, что от этого страдала бы обозримость накопленного наукой, ибо одно и то же выступало бы в разных обличиях; данное соображение кажется мне единственным оправданием того, почему надо противиться новым обозначениям. Это не мешает тому, чтобы для часто встречающихся, очень сложных знаковых конфигураций впоследствии вводились более простые обозначения. Но предложения, которые их определяют, не следует устанавливать в качестве первоначальных, — они должны быть выводимы из своих значений. Чем больше знаков вводится в качестве исходных, тем больше требуется и основных, первоначальных предложений. Однако требование уменьшения их числа — насколько это возможно — составляет один из общих принципов науки. Ведь сущность научного объяснения состоит именно в том, чтобы оно охватывало большое, возможно необозримо большое многообразие фактов с помощью одного или немногих предложений. Ценность этих предложений непосредственно измеряется этой их компактностью и способностью упрощать обозначаемое; ценность эта равна нулю, если число принимаемых допущений столь же велико, как и число подлежащих объяснению фактов. И чтобы получить по возможности небольшое число исходных знаков, я должен был придавать им наиболее простые значения, наподобие того, как в химии лишь на пути дальнейшего разложения можно надеяться уменьшить число химических элементов[27]. Но чем проще некоторое содержание, тем меньше оно сообщает. Например, мой штрих обусловливания — условный штрих, который отрицает только третий из четырех случаев, сообщает меньше, чем булевский знак равенства, который отрицает еще и второй случай. Конфигурация, выражающая умножение, сообщает еще больше, так как она отвергает и четвертую возможность, не оставляя вообще никакого выбора. Только знак сложения, подобно моему условному штриху, исключает только один случай, если принять то улучшение, которое предложил Стенли Джевонс*; улучшение же это состоит только в том, что оно уменьшает содержание соответствующего знака. Правда, в отдельных случаях запись из-за этого становится пространнее. Исключающее «a или b», которое Буль выражает простой формулой $a+b$, Шрёдер должен передавать в виде ab_1+a_1b. Но это касается только отдельных случаев. Вообще же всегда именно *тот* знак, который допускает самые многообразные применения и приводит к самым обозримым выражениям, обладает наипростейшим содержанием. Содержание, входящее в некоторое другое содержание, — наподобие того, как содержание моего условного штриха входит в содержание Булева знака равенства (если мы в данном случае отвлечемся от класса моментов времени) или содержание неисключающего «или» входит в содержание исключающего, — такое содержание будет, вероятно, встречаться, помимо данной конфигурации, и во многих других, причем в других чаще, чем в этой одной. Даже когда два допускающих истинностную оценку содержания действительно находятся между собой в отношении исключающего «или», во многих выводах учитывается, что должно иметь место только одно из этих содержаний; для других же выводов существенно лишь то, что они оба сразу не могут иметь места; наконец, в некоторых умозаключениях — вероятно, встречающихся реже всего — будут использоваться обе ситуации. Здесь еще вовсе не принято во внимание, что большинство допускающих суждение

* См. примеч. ** на с. 159.

содержаний вообще находятся только в одном из двух отношений. Булев знак равенства выполняет обязанности двух моих штрихов обусловливания: $\begin{array}{l}\top\!\!-\boldsymbol{A}\\ \llcorner\!-\boldsymbol{B}\end{array}$ и $\begin{array}{l}\top\!\!-\boldsymbol{B}\\ \llcorner\!-\boldsymbol{A}\end{array}$.

Тут тоже справедливо сказанное выше: во многих случаях используется только $\begin{array}{l}\top\!\!-\boldsymbol{A}\\ \llcorner\!-\boldsymbol{B}\end{array}$ или только $\begin{array}{l}\top\!\!-\boldsymbol{B}\\ \llcorner\!-\boldsymbol{A}\end{array}$, в редких случаях оба, а соединение именно этих двух предположений, по-видимому, не встречается сколько-нибудь чаще, чем каждое из них. Можно полагать, что выбор исходных знаков, обладающих простым содержанием, целесообразен уже потому, что с помощью знаков, более богатых содержанием, нельзя выражать более простое содержание. На деле это, однако, не является невозможным; только тогда чаще встречающееся из-за получившейся переусложненной формулы предстает как нечто редкостное. Буль со своей стороны, например, пользуется пространным выражением для передачи шрёдеровского $a+b$ — неисключающего «a или b». Но исключающее «или» встречается, наверное, один раз на десяток применений неисключающего «или». Да и в химии[27] каждый сочтет более уместным представлять элементы водород и кислород соответственно буквами H и O, и из них образовывать OH, нежели обозначать гидроксильную группу OH с помощью одной буквы, а водород — посредством знаковой конфигурации, соответствующей восстановленному гидроксилу.

Чтобы получить по возможности самое простое значение некоторого знака, который должен связывать два допускающих суждение содержания, я мог выбирать любую из четырех равноправных возможностей: можно было принять в качестве этого значения каждое отрицание одного из четырех приведенных выше случаев. Но достаточно одного, потому что посредством отрицания содержаний $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ каждый из этих четырех случаев можно преобразовать в любой другой. Это можно сравнить с тем, что в химии известно как аллотропное состояние одного и того же химического элемента. Я выбрал отрицание третьего случая, потому что это позволяет легко перейти к процессу умозаключения и потому что данное содержание находится в близком родстве с важным отношением причины и следствия.

Принципу, согласно которому число первоначальных законов должно быть по возможности ограничено, нельзя полностью удовлетворить, не доказав достаточности этих немногих законов. Эти соображения определили характер второго и третьего разделов моего сочинения. И в этом случае предполагать их непосредственную сравнимость с трудом Буля было бы неверно. У него не заметно стремления обойтись по возможности меньшим числом первоначальных законов. Для Буля все дело заключалось в том, чтобы кратко и целенаправленно решать интересовавшие его задачи. Я же стремился к тому, чтобы по возможности все выразимое словами в виде правил вычислений представить в формулах— с тем, чтобы одно и то же не применять в двоякой форме. Поскольку способы умозаключения приходится объяснять на словах, я использовал лишь один-единственный и представил в виде формулы то, что и при ином подходе можно было ввести как способ умозаключения. Это привело, правда, к многословию, которое может показаться педантичным. Мне было бы нетрудно представить логические переходы короче, что я и сделал в приведенных здесь примерах и на возможность чего я указал уже в предисловии к моему сочинению. Однако намерение, которым я руководствовался, заключалось не в том, чтобы явить образец того, как кратко и целенаправленно выполнять подобные выводы, а в том, чтобы показать, что я везде могу обойтись моими основными законами. Конечно, этим достигается только некая вероятность того, что во многих случаях я могу ими обойтись. Однако вовсе не все равно, на каких примерах я это показываю. Чтобы не пропустить как раз те преобразования, которые ценны для научной практики, я выбрал сложный взаимосвязанный вывод одного предложения, которое в арифметике мне кажется незаменимым, хотя на него мало обращают внимания из-за его очевидности. Это предложение таково:

Если мы образуем последовательность, применяя некоторое однозначное действие — не обязательно арифметическое — сначала к одному предмету, потом к полученному результату — и повторяем это снова и снова, и если в этой последовательности два предмета следуют за одним и тем же третьим, то первый предмет в последовательности предшествует второму, или следует за вторым, или совпадает с ним.

Я доказал это предложение на основе определений понятий следования в последовательности и однозначности, используя свои исходные законы. Попутно я вывел предложение, согласно которому в последовательности некоторый ее член следует за вторым, если он следует за третьим, который сам в свою очередь следует за вторым. Кроме немногих формул, приведенных для представления аристотелевских способов умозаключения, я принял только такие, которые, как мне кажется, необходимы для только что названных доказательств.

Таковы те принципы, которыми я руководствовался, устанавливая исходные предложения и выбирая и выводя другие предложения. Мне было совершенно безразлично, какой окажется формула — интересной или ничего не говорящей. Что мои предложения обладают достаточным содержанием — в той мере, в какой о чисто логических предложениях можно говорить о содержании, — следует из того, что их достаточно. Предложения, которые совершенно необходимы в цепочке умозаключений, надо принять, даже если они содержат лишние условия. В булевских вычислениях тоже имеет место нечто подобное. Если там перемножить равенство и букву, то в равенство проникнет нечто, что для его существования излишне, и это уменьшает содержание — подобно тому, как это происходит с любым суждением, когда к нему добавляют лишнее условие. Подобная утрата содержания, однако, происходит лишь иногда — и это далеко не потеря, наоборот, это необходимый промежуточный пункт всего развития.

Согласно моим основополагающим принципам, я обязан был принять и такие формулы, которые выражают всего-навсего разрешение изменять порядок в последовательности нескольких условий. Вместо общего правила, согласно которому условия можно упорядочивать любым образом, я ввел в качестве первоначального закона гораздо менее обязывающую перестановочность двух условий, и затем из этого вывел допустимость других перестановок. Сходную ситуацию мы имеем в Булевых вычислениях, где можно менять последовательность сомножителей и слагаемых. Шрёдер вводит в своей работе «Сфера операций логического исчисления» законы коммутативности и ассоциативности умножения и сложения; получая из этого заключение об упорядочении и группировке для не более чем трех сомножителей и слагаемых, он заключает вообще о произвольности подобной группировки и упорядочения. Подобные доказательства потребовались бы, однако, если бы мы захотели доказать выведенные мною предложения — в той мере, в какой это возможно,— на Булевом формульном языке с помощью цепочки умозаключений, не имеющей никаких пропусков. Путем «ментального перемножения» сделать этого нельзя. Для этого требуются также предложения, согласно которым две части любого уравнения перестановочны, а равное везде заменимо равным. Шрёдер не приводит эти предложения среди своих тринадцати аксиом, хотя нет никаких оснований их пропускать, когда перечисляются даже очевидные логические предложения. Таким образом, он применяет, собственно говоря, пятнадцать аксиом. В своем «Исчислении понятий» я привожу девять принципов; к ним добавляются словесно сформулированные правила, существенно определяемые избранным мною способом обозначения; они таковы:

1. То, что следует за штрихом содержания, должно быть неким содержанием, допускающим истинностную оценку (с. 68–69).

2. Правило вывода.

3. Если область одной готической буквы включает область другой буквы, то надо избирать разные буквы* (с. 83–84).

4. Правило введения готических букв вместо латинских (с. 83–84).

5. Правило выделения условия из области некоторой готической буквы (с. 83–84).

Сказанного мною об использовании малых греческих букв здесь можно не принимать в расчет, потому что это находится вне той области, в пределах которой имеет место сравнимость моей системы с языком формул Буля. Таким образом, с помощью четырнадцати первоначальных предложений я охватываю более широкую область, чем Шрёдер пятнадцатью. Теперь, однако, я установил, что два принципа равенства содержаний совершенно излишни и что три принципа отрицания можно свести к двум[28]. После такого упрощения я нуждаюсь только в одиннадцати исходных предложениях. В этом я вижу успех в моем стремлении к простоте исходных компонентов понятийной записи и к доказательствам, не содержащим никаких пробелов. Таким образом, вместо логических форм, которые разрастаются до полной неопределенности, я устанавливаю лишь небольшое их число. Ибо только конечное и определенное доступно нашему непосредственному восприятию; и чем меньше число исходных предложений, тем полнее можем мы их освоить.

Поскольку, в соответствии со сказанным, булевские вычисления и логические выводы не сравнимы с тем, что я предложил в моем «Исчислении понятий», будет нелишне показать на примере, как обстоит дело с упомянутой сравнимостью. Было бы неудивительно — и это я признал бы без всякого сожаления, — что булевская логика более, чем мое исчисление понятий, оказалась бы пригодной для решения таких задач, для которых она специально и была создана или которые были специально для нее придуманы. По-видимому, однако, это совсем не так. Поскольку этот вопрос не имеет для меня большого значения, я ограничусь тем, что решу с помощью своей записи в понятиях одну задачу, которой занимался Буль**, а потом Шрёдер*** и Вундт**** и совсем кратко укажу на отличие моего способа ее решения от метода Буля[29].

Шрёдер формулирует эту задачу следующим образом: предположим, что наблюдение некоторого класса явлений (естественных или искусственных, например химических веществ) привело к таким результатам.

α) В тех изделиях, в которых одновременно отсутствуют признаки или свойства A и C, обнаруживается признак E вместе с одним из признаков B и D, но не с обоими вместе.

β) Где бы ни встречались признаки A и D при одновременном отсутствии признака E, признаки B и C или встречаются оба или оба отсутствуют.

γ) Всюду, где имеется признак A вместе с признаками B или E, [или] обоими вместе, — также встречается либо признак C, либо D, но не оба вместе. И наоборот, всюду, где наблюдается один из признаков C и D в отсутствие другого, там должен одновременно наблюдаться и признак A вместе с признаком B или с признаком E или же с обоими вместе.

---

* Третье правило, собственно, уже содержится в первом.

** См. указ. соч.

*** Der Operationskreis des Logikkalkuls. S. 25f.

**** Logik, I. S. 356.

Требуется установить:

1) чтó в каждом из этих случаев можно заключить из наличия признака A относительно признаков B, C и D;

2) существуют ли какие-либо отношения между признаками B, C, D, не зависящие от наличия или отсутствия прочих признаков, и если да, то каковы они;

3) что следует из наличия признака B относительно признаков A, C, D, и

4) что следует относительно признаков A, C, D самих по себе.

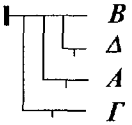
При решении этой задачи я пользуюсь соответствующими большими греческими буквами, так что, например, ***Α*** означает, что у рассматриваемого предмета имеется признак A[30].

Я начну с перевода отдельных данных[31].

α) Отрицание ***Α*** и отрицание ***Γ*** влечет утверждение ***Ε*** (1):

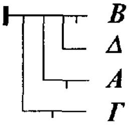
. (1

Отрицание ***Α*** и отрицание ***Γ*** должно иметь ***Β*** следствием одно из двух: или ***Β*** или ***Δ*** (2):



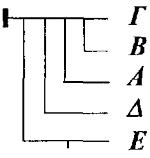
, (2

но ***Β*** и ***Δ*** не должны одновременно иметь места в случае отрицания ***Α*** и отрицания ***Γ*** (3):



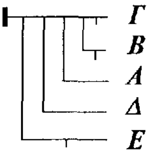
. (3

β) При утверждении ***Α*** и ***Δ*** и отрицании ***Ε***, ***Β*** и ***Γ*** должны либо оба утверждаться, либо оба отрицаться; то есть если ***Β*** утверждается, должно утверждаться и ***Γ*** (4):



, (4

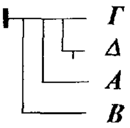
но если ***Β*** отрицается, должно отрицаться и ***Γ*** (5):



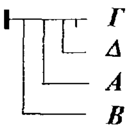
. (5

γ) Это условие я сначала разделю на части.

γ_1) Если ***Α*** и ***Β*** утверждаются, то или ***Γ*** или ***Δ*** тоже должно утверждаться (6), но не оба вместе (7):

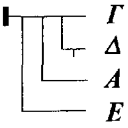


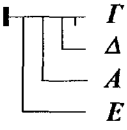
(6,



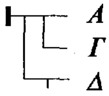
(7.

γ_2) Те же следствия должны иметь место, когда *А* и *Е* утверждаются (8) и (9) :

 (8

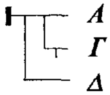
 (9 .

γ_3) Если *Г* утверждается, а *Δ* отрицается, то *А* должно утверждаться (10): поскольку *Г* уже является условием, само собой разумеется, что утверждается одно из двух, ибо *Г* присутствует в любом случае.



(10.

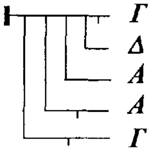
γ_4) Если *Г* отрицается, а *Δ* утверждается, то *А* должно утверждаться (11); и одно из двух, *В* или *Е*, должно тоже утверждаться. Здесь может быть только *В* (12).



(11.

(12.

Это данные. Ответ на первый вопрос отчасти дают (6) и (7). Прочие данные не позволяют ответить на этот вопрос, так как они, как в случаях (2) и (3), вместо утверждения *А* содержат его отрицание, или, как в случаях (10), (11) и (12), в них вообще нет *А* как условия, или же потому, что они — это имеет место в случаях (4), (5), (8), (9) — помимо *А*, *В*, *Г*, *Δ* , включают еще и *Е*. Спрашивается, можно ли, например, удалить *Е* из некоторых последних условий. Это можно сделать, если *Е* в одном суждении, таком как (1), выступает следствием, а в другом, таком как (9), — условием. Тогда мы выпишем (9), включая условие *Е* в неизменном виде и *Е* заменим его двумя условиями, от которых *Е* зависит в (1). Получим (13). Это суждение выполняется независимо от значений *А*, *Г* и *Δ*, причем по двум причинам: во-первых, потому, что условием для *Г* выступает само *Г*, а во-вторых, потому, что среди условий встречаются два противоречащих друг другу: *А* и $-\!\!\top\!\!-A$. В качестве следствия двух противоречащих условий можно, не опасаясь ошибки, взять любое, совершенно произвольное допускающее истинностную оценку содержание*. Поэтому в формуле (13) нет никаких сведений о содержании *А*, *Г* и *Δ*. С формулами (1) и (8) можно поступить так же, как и с формулами (1) и (9). Да и один взгляд на эти формулы убеждает в том, что из них нельзя извлечь никакого содержательного заключения, так как среди условий вывода опять-таки встретились бы противоречащие друг другу *А* и $-\!\!\top\!\!-A$. Из двух суждений, таких как (8) и (9), где *Е* оба раза встречается в утвердительном виде, *Е* удалить нельзя, — это можно сделать, если данное условие в одном из двух суждений утверждается, а в другом отрицается, как это имеет место в (8) и (4). А именно, суждение, где имеется отрицаемое условие, можно преобразовать, сделав отрицаемое условие утверждаемым следствием, а то, что было следствием, сделать отрицаемым условием**. Так, формулы (4) и (5) переходят в формулы (14)

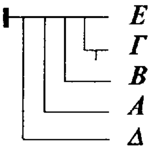


(13

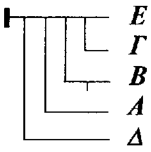
* «Исчисление понятий», формула (36), с. 105.

** «Исчисление понятий», формулы (33) и (34), с. 104–105.

и (15).

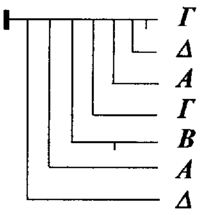


(14

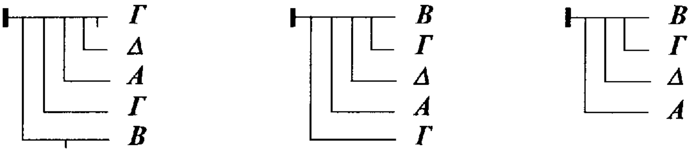


(15.

Каждое из этих двух суждений можно теперь связать с каждым из суждений (8) и (9) чтобы удалить ***Е***. Одного взгляда на эти формулы достаточно, чтобы убедиться в том, что результаты, извлекаемые из формул (8) и (14), (8) и (15), (9) и (14), — подобно тому, как это было выше, — поскольку эти формулы выполняют условия независимо от своих содержаний, не позволяют сделать никаких заключений о последних. В отличие от этого, из (9) и (15) мы получаем рядом стоящую формулу:

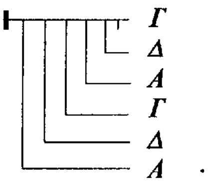


Здесь мы можем склеить каждое из условий ***А*** и ***Δ***, которые встречаются по два раза. Обе буквы ***Г*** мы тоже можем склеить в одну, поступив так, как и раньше: сначала сделать ***В*** следствием, а ***Г*** — условием, а потом отбросить ***Г*** (16):



(16.

Это третий ответ на первый вопрос, и в суждениях (6), (7) и (16) содержится все, что в отношении первого вопроса можно извлечь из наших данных. Возможно по крайней мере еще одно изменение формы, когда отбрасывается еще одна буква, например ***В***. Формулы (6) и (16) не дают нужного результата. Из (7) и (16) мы получаем то, что помещено ниже:



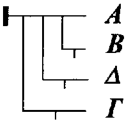
Отсюда, упрощая формулу так, как мы это делали раньше, получаем (17):

(17.

Это показывает, что в присутствии признака A признаки C и D исключают друг друга. Формула (6) указывает на то, что один из двух признаков C и D присутствует, когда, кроме признака A, появляется также и признак B.

Перехожу ко второму вопросу. Чтобы решить, зависят или нет отношения между ***В***, ***Г***, ***Δ*** от ***А*** и ***Е***, надо последние удалить из исходных данных и посмотреть, содержат ли полученные результаты что-то большее, чем логическая очевидность.

Вместо данных, содержащих *Е*, мы можем сейчас использовать уже установленную формулу (16). Благодаря этому мы можем исключить *А* из (2), (3), (6), (7), (10), (11), (16). Прежде всего мы преобразуем (2) и (3) в формулы (18) и (19): После этого можно связать


(18


(19.

(6) с (10) или (7) с (10)
или (16) с (10) или
(6) с (11) или (7) с (11) или (16) с (11) или
(6) с (17) или (7) с (17) или (16) с (17) или
(6) с (18) или (7) с (18) или (16) с (18),

и эти пары, как показывает сам вид соответствующих формул, выполнимы независимо от содержания. Ответ на второй вопрос поэтому отрицателен.

Ответ на третий вопрос содержится в формулах (6), (7) и (19). Из (7) и (19) можно извлечь, что если, кроме В, присутствует еще и признак D, то один из признаков А и С должен быть в наличии, но не оба. Формула (6) показывает, что при отсутствии D либо нет и А, либо А и С одновременно присутствуют.

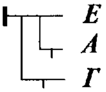
Ответ на четвертый вопрос требует удаления ***В*** из (2), (3), (6), (7) и (16). Вместо (3) мы возьмем (19). Из всех возможных комбинаций

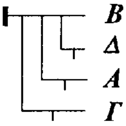
(2) с (6),	(13) с (6),
(2) с (7),	(13) с (7),
(2) с (19),	(13) с (19)

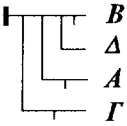
можно использовать только предпоследнюю, которая уже применялась для получения формулы (17). В соответствии с этим ответ на четвертый вопрос таков: признаки А, С и D не могут встречаться вместе, и, как показывает (10) и (11), наличие одного из признаков С и D в отсутствие другого влечет наличие признака А.

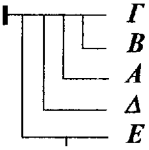
Это решение почти совсем не требует теоретической подготовки. Все нужные алгоритмы я излагал попутно, отчего, возможно, возникло впечатление, что все получается очень длинно. Поэтому я еще раз — кратко и обозримо — представляю исходные данные и ход вычисления.

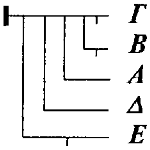
Данные

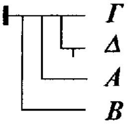

(1

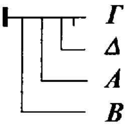

(2

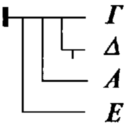

(3

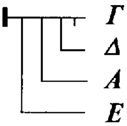

(4

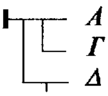

(5


(6

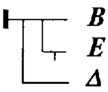

(7

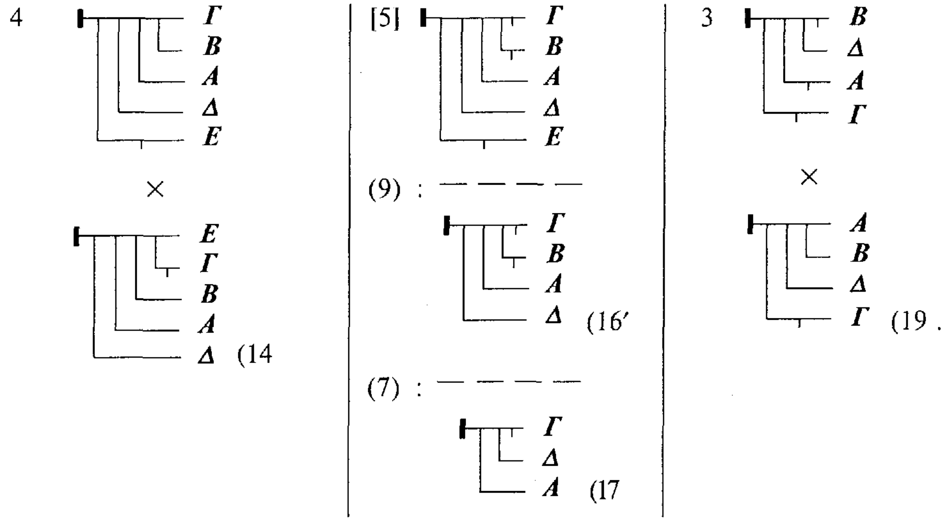

(8


(9


(10


(11


(12 .



Здесь знак ×, стоящий между двумя формулами[32], означает переход, который ранее подробно рассматривался. Знак — — —, стоящий между (5) и (16′), а также между (16′) и (17), указывает на правило, которое сокращает ход дальнейшего решения. Правило гласит:

Если следствия двух суждений (например, (5) и (9)) совпадают (—⊤— *Г*) и суждения эти содержат в качестве условий противоречащие друг другу содержания (*E* и —⊤— *E*), то можно образовать новое суждение (16′), придав их общему заключению (—⊤— *Г*) условия обоих первых суждений ((5) и (9)), за исключением обоих противоречащих друг другу условий (*E* и —⊤— *E*); но при этом условия, общие обоим суждениям (*A* и *Δ*), выписывая только один раз[33].

Суждение (16′) существенно не отличается от (16).

Ответ на первый вопрос содержится в (16) и (17);

на третий вопрос содержится в (6), (7) & (19);

на четвертый вопрос содержится в (10), (11) & (17);

второй вопрос получает отрицательный ответ.

Если Буль предпочитает объединять различные суждения в единое выражение, то я расчленяю исходные данные на простые суждения, которые после этого частично уже дают ответ на поставленные вопросы. После этого из простых суждений я выбираю такие, которые пригодны для требуемого исключения признаков, и получаю таким образом дальнейшие ответы, которые после этого содержат только то, о чем шла речь в вопросах.

Я полагаю, что в настоящем изложении показал, что когда в науке действительно требуется решение подобных задач, запись в понятиях легко с ними справляется. Но видно и то, что подлинная ее сила, покоящаяся на обозначении всеобщности, понятии функции и возможности подставлять сложные выражения на те места, где в рассматриваемой задаче стоят просто буквы, — сила эта не находит здесь своего проявления.

Добавлю еще одно замечание, касающееся внешнего вида моей понятийной записи.

Шрёдер упрекает меня в том, что в отличие от привычной манеры, когда запись ведется слева направо, я предпочитаю запись сверху вниз. На деле же моя позиция находится в полном соответствии с тем, что общепринято; ибо в арифметических выводах отдельные уравнения тоже ведь размещают так, что они следуют сверху вниз. Но каждое уравнение есть некое инстинностно оцениваемое содержание или суждение, так же как каждое неравенство, каждая конгруэнтность и т.д. А то, что я помещаю одно под другим, — так это и есть истинностно оцениваемые содержания или суждения. Впечатление необычности возникает тогда, когда простые инстинностно оцениваемые содержания указываются лишь отдельными буквами. Как только содержания подробно расписаны — а это в приложениях почти всегда имеет место, — каждое из них вытягивается в строку слева направо, и они следуют одно за другим сверху вниз. Благодаря этому обыгрывается преимущество языка формул, которое он приобретает, когда для письма используется двумерная поверхность, перед словами обычного языка, следующими в одномерном времени. Буль не нуждается в том, чтобы отводить строку для каждого простого истинностно оцениваемого содержания, так как он не собирается представлять его пространным выражением — используется одна-единственная буква. В результате, если бы мы пожелали вместо этих букв ввести целые формулы, то получилось бы нечто совершенно необозримое.

Полагаю, что в данной статье мне удалось показать следующее:

1. Моя понятийная запись предполагает более широкий замысел, нежели Булева логика, так как, будучи соединенной со знаками арифметики и геометрии, она претендует на представление соответствующего содержания.

2. В области чисто логического, отвлеченного от какого-либо содержания, она тоже — благодаря знаку всеобщности — распространяется на некоторую более широкую область, нежели охватываемая формульным языком Буля.

3. Моя система записи позволяет избежать распадения булевской логики на две части (primary и secondary propositions), потому что суждения рассматриваются в ней предшествующими образованию понятий.

4. Она в состоянии представлять процессы образования понятий так, как они используются в науке, — в противоположность сравнительно малоплодотворным Булевым умножению и сложению.

5. Для передачи логических отношений ей требуется меньше исходных знаков и поэтому меньше основных законов.

6. С ее помощью можно решать и задачи того рода, какие решал Буль, причем с меньшей алгоритмической подготовкой. Этот пункт я считаю наименее важным, потому что подобные задачи редко встречаются в науке или даже не встречаются вообще.

О ЦЕЛИ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Однажды я уже имел честь выступать здесь с докладом о моем исчислении понятий. Что меня побуждает еще раз вернуться к этому вопросу, так это впечатление, что цель моего сочинения не раз истолковывалась превратно. Меня убеждают в этом многочисленные отзывы, появившиеся по выходе его в свет. Они могут привести к неверным суждениям. В числе прочего меня упрекают в том, будто я прошел мимо достижений Буля. Этот упрек высказывает и Э. Шрёдер в своей рецензии, опубликованной в томе XXV «Германского журнала по математике и физике»[1]. Сравнивая мою знаковую систему с Булевым языком формул, Шрёдер приходит к выводу, что последний во всех отношениях предпочтительнее. Хотя я не склонен соглашаться с этим его суждением, я все же благодарен ему за подробное рассмотрение моего сочинения и деловое обоснование его возражений, так как они дают мне повод, опровергая их, прояснить суть дела.

Относительно упомянутого выше упрека я хотел бы прежде всего заметить, что булевский язык формул в течение более чем 20 лет, истекших с момента его изобретения, так и не добился решающего успеха — такого, что пренебрежение заложенными в нем принципами с самого начала должно было бы казаться каким-то безрассудством и что в расчет можно было бы принимать только дальнейшее развитие. Однако задачи, которые рассматривает Буль, кажутся по большей части придуманными лишь с той целью, чтобы их можно было решать с помощью его формул.

Когда бросают упреки, о которых говорилось выше, обычно проходят мимо того, что моя цель была отличной от цели Буля. Я хотел бы не абстрактную логику представить в виде формул, а выразить некое содержание посредством письменных знаков точным и обозримым способом, подобно тому как это делается с помощью слов. По сути дела я стремился создать не просто какое-то исчисление — «*calculus ratiocinator*», а некоторый язык — «*lingua characterica*» в лейбницевском смысле, признавая при этом, что необходимой составной частью подобной знаковой системы тем не менее должно быть это самое исчисление умозаключений. Если этого не понимают, то, наверное, потому, что я в своем изложении абстрактно-логическое слишком выдвинул на первый план.

Теперь, чтобы показать в деталях различие между булевским языком формул и моим собственным, я сначала коротко представлю первый из них. Нет нужды вдаваться во все отклонения от учения Буля, которые можно найти у его предшественников и последователей, так как по сравнению с глубоким различием его учения и моей понятийной записи эти вариации можно не принимать в расчет.

Буль различает *primary propositions* и *secondary propositions*. В первых понятия сравниваются по объему, вторые выражают отношения между содержаниями, допускающими истинностную оценку. Это разделение неудовлетворительно, так как в нем не находят места суждения существования. Рассмотрим сначала *primary propositions*. Буквы обозначают здесь объемы понятий. Отдельные вещи как таковые не обозначаются, и это составляет существенный недостаток булевского языка формул; ибо даже тогда, когда какое-либо понятие охватывает одну-единственную вещь, все равно сохраняется большая разница между понятием и этой вещью. Далее, буквы соединяются друг с другом посредством логических умножения и сложения. Если A обозначает объем понятия «треугольник», B — объем понятия «правильный», то логическое произведение

$$A \cdot B$$

обозначает объем понятия «правильный треугольник». Под логической суммой

$$A + B$$

следует понимать объем понятия «треугольник или правильный»*. Выражения «произведение» и «сумма» оправдываются наличием следующих равенств:

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A\,(B + C) = AB + AC.$$

Эти соотношения сильно отличаются от алгебраических умножения и сложения. Логически:

$$A = A \cdot A = A \cdot A \cdot A,$$
$$A = A + A = A + A + A,$$

что в алгебре, вообще говоря, неверно[2]. Различия логических и математических вычислений столь значительны по своим последствиям, что решение логических уравнений, которым главным образом занимается Буль, едва ли имеет что-либо общее с решением алгебраических. Подчинение одного понятия другому может быть тогда выражено так:

$$A = A \cdot B.$$

Если A, например, означает объем понятия «млекопитающее», а B — объем понятия «дышащее воздухом», то это равенство гласит: объемы понятий «млекопитающее» и «дышащее воздухом млекопитающее» совпадают; это значит, что все млекопитающие суть дышащие воздухом. Подпадение единичного объекта под какое-либо понятие — что полностью отлично от подчинения одного понятия другому — не получает у Буля никакого особого, а строго говоря, вообще никакого, выражения. Раньше, чем у Буля, мы обнаруживаем «Все» (Alles) — лишь с незначительным отклонением — только у Лейбница, о работах которого, относящихся к этому вопросу, Буль, пожалуй, не знал. У Буля 0 обозначает объем понятия, под которое ничего не подпадает, его 1 означает объем понятия, под которое подпадает Все, о чем непосредственно идет речь (*universe of discourse*). Мы видим, что значение этих знаков, особенно знака 1, тоже отклоняется от арифметического. Лейбниц имеет для этого слова «*non ens*» и «*ens*».

Запись

$$A \cdot B = 0$$

гласит, что два понятия исключают друг друга, как, например, «квадратный корень из 2» и «целое число». Уравнение может существовать без того, чтобы было

$$A = 0 \text{ или } B = 0.$$

Кроме нуля нужен еще знак отрицания, чтобы, например, понятие «человек» можно было превратить в понятие «нечеловек». Разные авторы здесь отклоняются друг

---

* Буль предполагает, что понятия A и B исключают друг друга, чего, как и другие логики, Шрёдер не делает.

от друга. Шрёдер для этой цели снабжает буквы индексом 1. Другие имеют еще знак для отрицания тождества. Это многообразие знаков отрицания я не считаю каким-то преимуществом булевской логики.

Secondary propositions — например, гипотетические и дизъюнктивные суждения — Буль сводит к *primary propositions* чрезвычайно искусственным способом. Суждение «если $x = 2$, то $x^2 = 4$» он трактует так: класс моментов времени, в которых $x = 2$, подчинен классу тех моментов времени, в которых $x^2 = 4$. И тут вопрос сводится к сравнению объемов понятий; только здесь эти понятия более определенны — это классы моментов времени, в которых истинно некоторое предложение. Этот взгляд имеет тот недостаток, что сюда примешано время, которое здесь совершенно неуместно. Маккол определяет выражения, относящиеся к *secondary propositions*, независимо от тех, которые относятся к *primary*. Благодаря этому, конечно, устраняется вмешательство времени, но зато разрывается всякая связь между двумя частями, на которые распадается логика по Булю. Развитие происходит либо с помощью *primary propositions*, и тогда формулы используются в смысле, установленном Булем; или же все развертывается с помощью *secondary propositions*, и применяются определения Маккола. Разрывается всякий переход от одного вида суждений к другому, который часто происходит в реальном мышлении, ибо в одном и том же деле одни и те же знаки нельзя употреблять в двояком смысле.

Если мы окинем взглядом язык формул Буля в целом, мы увидим, что в нем абстрактная логика одета в костюм алгебраических знаков; этот язык непригоден для передачи содержания, да это и не является его целью. Но именно в этом и состоит мой замысел. Немногие вводимые мною знаки я хочу слить воедино с уже имеющимися знаками математики в некий единственный в своем роде язык формул. При этом имеющиеся знаки соответствуют примерно корням слов обычного языка, тогда как добавляемые мною знаки можно сравнить с окончаниями и служебными словами, ставящими содержание, заключенное в корнях, в логические взаимоотношения.

Для этого я не мог использовать булевский способ обозначения; ибо нельзя, чтобы в одной и той же формуле знак +, например, встречался то в логическом, то в арифметическом смысле. Аналогия между логическими и арифметическими способами вычислений, которая столь ценна для Буля, может только сбивать с толку, если эти два способа соединяются вместе. Булев знаковый язык допусти́м, если только он полностью отделен от арифметики.

Я должен был поэтому для логических отношений придумать другие знаки. Шрёдер утверждает, будто моя знаковая система почти ничего общего не имеет с булевскими вычислениями понятий, а возможно, и с булевскими вычислениями суждений тоже. Действительно, в этом состоит одно из самых значительных отличий моего подхода от булевского, и я, пожалуй, могу добавить — и от аристотелевского тоже, потому что я исхожу не из понятий, а из суждений. Но это вовсе не значит, что я не умею выражать отношение подчинения понятий.

Перед выражением истинностно оцениваемого содержания, такого как $2 + 3 = 5$, я помещаю горизонтальную черту — штрих содержания, отличающуюся от знака минус большей длиной:

$$\text{——}\ 2 + 3 = 5.$$

Эта черта мысленно объединяет следующее за ней содержание с тем, чтобы к нему могли присоединяться другие знаки. В записи

$$\text{——}\ 2 + 3 = 5$$

еще не выносится никакого суждения; поэтому мы не погрешим против истины, если напишем и так:

$$\text{——}\; 4 + 2 = 7.$$

Если же я хочу сказать, что некоторое содержание верно, то на левом конце штриха содержания я помещаю штрих суждения:

$$\vdash\!\text{——}\; 2 + 3 = 5.$$

Сколь же сильным может иногда быть непонимание! Я полагал, что путем этих обозначений совершенно отчетливо разграничил акт суждения и образование истинностно оцениваемого содержания, Рабус* же обвиняет меня в том, что я их смешиваю!

Чтобы выразить отрицание содержания, я присоединяю к штриху содержания штрих отрицания, например:

$$\text{—}\!\top\!\text{—}\; 4 + 2 = 7.$$

Этим еще не утверждается ложность этого равенства; образовано только новое подлежащее обсуждению содержание, которое лишь благодаря штриху суждения в выражении

$$\vdash\!\top\!\text{—}\; 4 + 2 = 7$$

становится суждением «4+2 не равно 7».

Если мы хотим соотнести друг с другом два подлежащих истинностной оценке содержания A и B, то надо принять во внимание следующие случаи:

1) A и B,
2) A и не B,
3) не A и B,
4) не A и не B.

Под записью

$$\begin{array}{l} \text{——}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\quad\text{┬—}\; A \\ \quad\ \text{└—}\; B \end{array}$$

я понимаю отрицание третьего случая. Такое решение может сначала показаться чрезвычайно искусственным. Почему я выделил именно третий случай и именно его отрицание выразил особым знаком,— это поначалу не очень понятно. Однако пример тотчас же проясняет причину такого решения:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \text{┬—}\; x^2 = 4 \\ \text{└—}\; x + 2 = 4 \end{array}$$

отрицает случай, когда x^2 не равен 4, тогда как $x + 2 = 4$. Это можно перевести так: если $x + 2 = 4$, то $x^2 = 4$. Такой перевод позволяет понять важность отношения, которое заключено в нашем знаке. Ибо гипотетическое суждение является формой выражения всех законов природы, всех вообще причинных зависимостей. Правда, не для всех случаев словоупотребления передача этого суждения с помощью «если» уместна — это бывает только тогда, когда неопределенная его компонента, как x в нашем случае, придает общность данному целому. Если бы мы заменили x на 2:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} \text{┬—}\; 2^2 = 4 \\ \text{└—}\; 2 + 2 = 4, \end{array}$$

то перевод

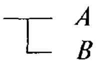
«если $2 + 2 = 4$, то $2^2 = 4$»

не отвечал бы сути дела.

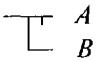
---

* *Rabus.* Die neuesten Bestrebungen auf dem Gebiete der Logik bei den Deutschen und die logische Frage. Erlangen, 1880[3].

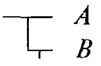
Рассмотрим теперь связи, имеющиеся между условным штрихом — штрихом обусловливания — и штрихом отрицания, произведя следующее сопоставление:

1) 

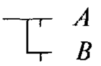
Случай «не A и B» отрицается.

2) 

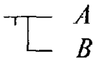
Случай «A и B» отрицается: A и B исключают друг друга.

3) 

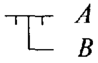
Случай «не A и не B» отрицается: A или B.

4) 

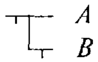
Случай «A и не B» отрицается.

5) 

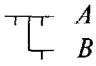
Случай «не A и B» утверждается: B и не A.

6) 

Случай «A и B» утверждается: A и B

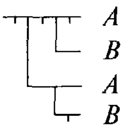
7) 

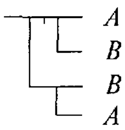
Случай «не A и не B» утверждается: ни A , ни B.

8) 

Случай «A и не B» утверждается: A и не B.

Если мы к штриху содержания стоящих слева выражений присоединим штрих отрицания, то получим выражения, стоящие справа. Случай, отрицаемый слева, справа будет каждый раз утверждаться. Второе выражение возникает из первого, когда место A занимает его отрицание. В словесной форме в этом случае два отрицания отменяют друг друга. Третье выражение получается из первого, а четвертое из второго, когда B заменяется его отрицанием. Союз «или» в третьем случае — не исключающий. Исключающее «или» может быть выражено так:



или иначе


.

Я прерываю здесь свое изложение, чтобы ответить на отдельные замечания Шрёдера. Он сравнивает мое представление исключающего «A или B» со своим способом записи

$$ab_1 + a_1b = 1$$

и находит здесь, так же как и вообще в моем исчислении, чудовищное пространственное расточительство. И в самом деле, нельзя отрицать, что мое выражение занимает больше места, чем шрёдеровское, которое в свою очередь опять же пространнее, чем первоначальное Булево

$$a + b = 1.$$

Однако в основе этого упрека лежит мнение, будто моя понятийная запись является представлением абстрактной логики. Но ведь формулы — только пустые схемы. При их применении вместо A и B мыслятся целые формулы, быть может длинные уравнения, конгруэнции, проективные отображения. Тогда дело выглядит совершенно по-другому. Недостаток, связанный с расточительством пространства в моей системе, превращается в преимущество обозримости, тогда как преимущество сжатости у Буля — в изъян, плохую обозримость. Моя система использует двумерную протяженность площади; допускающие истинностную оценку содержания следуют одно за другим сверху вниз, тогда как каждое из них простирается слева направо. Тем самым отдельные содержания отчетливо разделимы, а их логические отношения становятся легко обозримыми. У Буля может возникнуть одна-единственная, часто очень длинная, строка. Однако было бы неверно возлагать на Буля вину за возникающий из-за этого очевидный недостаток, так как он никогда не думал о подобном применении своих формул. Но также неверным было бы относить расточительство площади — в случае, когда дело ограничивается лишь намеком на содержание сочинения, — к недостаткам моей системы.

С только что сказанным связано другое замечание Шрёдера, — что мой язык формул будто бы является подражанием японскому обычаю вертикального письма. Мой формульный язык и в самом деле выглядит так, пока с его помощью передаются лишь абстрактные логические формы. Но когда отдельные буквы мыслятся замененными целыми формулами, например арифметическими равенствами, то становится понятным, что ничего необычного здесь нет; ибо в каждом арифметическом выводе имеют обыкновение записывать отдельные уравнения не рядом друг с другом — для большей обозримости их располагают сверху вниз, одно под другим.

В своих оценках Шрёдер постоянно исходит из непосредственной сравнимости моей знаковой системы с лейбнице-булевским языком формул — сравнимости, которой нет. Он полагает, что правильной постановке вопроса содействует точка зрения, согласно которой два способа обозначения должны различаться несущественно, коль скоро от одного из них можно перейти к другому. Но это ничего не доказывает. Если одна и та же область вещей представлена с помощью двух систем знаков, то само собой следует, что возможна перезапись или переход от одной системы к другой. Однако из данной возможности не следует ничего, кроме наличия общей области вещей; системы знаков при этом могут быть в корне различными.

Возникает вопрос, является ли подобный переход всегда выполнимым, или, возможно, мой язык формул распространяется на меньшую область. Шрёдер говорит, что булевское исчисление понятий не имеет ничего общего с моей системой. Поэтому может возникнуть впечатление, будто она не в состоянии представлять подчинение понятий. Один пример убеждает в противном. Суждение:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} x^4 = 81 \\ x^2 = 9 \end{array}$$

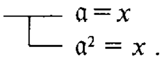
на словах гласит: если $x^2 = 9$, то $x^4 = 81$. Но число, квадрат которого есть 9, можно назвать квадратным корнем из 9, а число, четвертая степень которого есть 81, — корнем четвертой степени из 81, и в соответствии с этим перевести: все квадратные корни из 9 суть корни четвертой степени из 81. Здесь понятие «квадратный корень из 9» подчинено понятию «корень четвертой степени из 81». Назначение латинской буквы x в том, чтобы все суждение сделать общим — в том смысле, что его содержание должно быть справедливым, что бы мы ни подставили вместо x. Так, если мы, например, на место x поместим единицу, то возникает верное суждение:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} 1^4 = 81 \\ 1^2 = 9 \end{array},$$

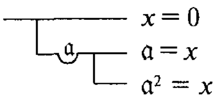
ибо случай, когда $1^2 = 9$ и 1^4 не равно 81, следует отрицать, так как 1^2 не равна 9. Иногда надо ограничить общность какой-то частью данного суждения. Тогда я вместо латинских букв пользуюсь готическими, как это имеет место в случае формулы

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} x = 0 \\ \smile^{\mathfrak{a}}\!\!\begin{array}{l} \mathfrak{a} = x \\ \mathfrak{a}^2 = x \end{array} \end{array},$$

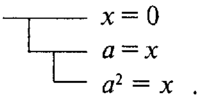
что словами передается так: если каждый квадратный корень из x равен самому x, то $x = 0$. Здесь лунка, в которой помещена буква $\mathfrak{a}$, указывает на то, что общность, выражаемая с помощью буквы $\mathfrak{a}$, должна быть ограничена содержанием выражения



Я усматриваю в этом способе обозначения одну из важнейших составных частей моей понятийной записи; благодаря ему она и в простом представлении логических форм значительно превосходит способ Буля. Таким образом вместо булевского мудрствования возникает органическая связь между *primary* и *secondary propositons*. Шрёдер признает заключающееся в этом преимущество, когда предпринимает попытку ввести эту связь в Булев язык формул. При этом, однако, обнаруживается, что сути дела — а именно, ограничения области, на которую должна распространяться всеобщность, — он не постиг. Шрёдеровское предложение не позволяет проводить четкое различие между выражениями



и



А между тем оно столь велико, что последнее неверно, а первое верно. Изъян предложения Шрёдера состоит, далее, в том, что оно делает необходимым еще один знак отрицания.

Мы зашли бы слишком далеко, если бы я стал отвечать на каждое замечание Шрёдера в отдельности. Для начала достаточно исправить его ошибочный взгляд на назначение данного исчисления понятий и тем самым показать, что по крайней мере одна часть его критических замечаний бьет мимо цели. Если бы он попытался передать с помощью, как он говорит, более удобного способа записи некоторые формулы из третьего раздела моего сочинения, а также те формулы, которые я некоторое время назад имел честь ему представить, то, столкнувшись с трудностями, он понял бы всю ошибочность своего взгляда.

Тем не менее я благодарен ему за рецензию на мое сочинение.

ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ПОНЯТИЙ ГОСПОДИНА ПЕАНО И О МОЕМ СОБСТВЕННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

На заседании секции Общеста естествоиспытателй в Любеке я выступил с докладом об исчислении (Begriffsschrift) господина Пеано[1] и о моем собственном исчислении. Но краткость времени, которым я располагал, помешала мне в достаточной мере рассмотреть этот вопрос, так что я отказался от публикации доклада в том виде, в каком он был сделан. Я оставил, однако, за собой право осветить данный предмет более детально, и ниже я постараюсь это сделать. Из-за обилия возникающих при этом вопросов я, конечно, и здесь не ставлю задачу исчерпать предмет.

Мне как заинтересованной стороне трудно с полной беспристрастностью отнестись к исчислению господина Пеано, поэтому может создаться впечатление, что я сужу о ней предвзято. И если я действительно впадаю в эту ошибку, то пусть оправданием мне послужит само положение вещей, делающее ее трудно преодолимой. Вполне естественно, что свое собственное исчисление я понимаю лучше, чем кто-либо другой, и что для меня более ясны его преимущества, нежели недостатки. В подобном же положении находился и господин Пеано, когда он писал о моих «Основных законах арифметики»*. И в самом деле: у меня создалось впечатление, что он не вполне оценил мое исчисление понятий (Begriffsschrift); при этом возникли явные недоразумения. Однако это не мешает мне с благодарностью воспринять эту критику в качестве исходного пункта для дальнейших обсуждений, благодаря чему могут быть устранены недоразумения и приближено решение спорных вопросов. Однако то, что я здесь пишу, не следует рассматривать как ответ на упомянутую критику. Ответ я думую дать на страницах «Rivista di Matematica»[2].

Если в дальнейшем покажется, что мои критические оценки слишком перевешивают положительные, то надлежит принять во внимание различие целей, которые мы преследуем. Ибо один и тот же способ обозначения или одно и то же определение может казаться целесообразным или нецелесообразным, смотря по тому, какие намерения при этом предполагаются. Поэтому начать придется с рассмотрения намерений и мотивов.

Потребность в некотором исчислении понятий я стал чувствовать, когда поставил вопрос о недоказуемых принципах или аксиомах, на которых покоится вся математика. Лишь ответив на этот вопрос, можно было рассчитывать на успех в выявлении тех источников познания, из которых черпает силы эта наука. Если этот последний вопрос ныне относится больше к философии, его все же следует признать вопросом математическим. Вопрос этот, конечно, старый: ибо, по-видимому, его ставил уже Евклид. Если на него все еще нет удовлетворительного ответа,

---

* Rivista di Matematica, Volume V [1895], S. 122 ff.

то причина заключается в логическом несовершенстве наших языков. Если мы хотим проверить, является ли полным некоторый список аксиом, то надо попытаться вывести из них все доказательства той ветви науки, о которой идет речь. И при этом надо особенно следить за тем, чтобы выведение заключений производилось только по чисто логическим законам; ибо иначе может незаметно вмешаться нечто, что необходимо должно быть выдвинуто в качестве аксиомы. Причина, почему словесные языки мало пригодны для этой цели, заключается не только во встречающейся в них многозначности выражений, но прежде всего в недостатке жестких форм процесса умозаключения. Такие слова, как 'итак', 'следовательно', 'так как', указывают на умозаключение, но ничего не говорят о законе, по которому оно происходит; и без всяких лингвистических ошибок они могут использоваться там, где вообще нет никакого логически оправданного умозаключения. Задача исследования, которое я имею в виду, состоит не только в том, чтобы убедиться в истинности заключительного предложения — этим в математике по большей части и довольствуются, — но и в том, чтобы понять, чем оправдано это убеждение, на каких исходных законах оно покоится. Колея, по которой должно идти умозаключение, должна быть крепкой, а в естественных языках таковой нет. Если мы попытаемся перечислить законы, которым подчиняется процесс получения заключений в доказательствах, проводимых обычным способом, то обнаружим разнообразие, которое почти необозримо и, по-видимому, не имеет определенных границ. Причина этого, очевидно, лежит в том, что эти умозаключения составлены из более простых. При этом в них может легко проникнуть нечто, не имеющее логического характера, и что, следовательно, должно было быть выдвинуто как аксиома. Здесь заключена трудность — как выделить аксиомы в чистом виде. Для этого умозаключения следует разложить на простые составляющие их части. Так будут найдены способы умозаключения — их немного, и надо стараться обойтись ими во всех случаях. Если где-либо это не удается сделать, то надо поставить вопрос, не столкнулись ли мы здесь с истиной, вытекающей из некоторого внелогического познавательного источника; или — не следует ли признать некоторый новый способ умозаключения; или, быть может, шаг, который мы собираемся сделать, вообще недопустим. Но подобный анализ сложных способов умозаключения имеет в качестве необходимого следствия удлинение доказательств, при этом длинноты словесного языка вместе с его логическим несовершенством составляют почти непреодолимые препятствия, пока мы не примем решение применить совершенно новое вспомогательное средство выражения мысли, соединяющее в себе логическую полноту с наибольшей краткостью. При этом количество способов умозаключения будет по-возможности ограниченным, и они будут выдвинуты в качестве правил этого нового языка. В этом состоит главный замысел моего исчисления (Begriffsschrift). Как указывает само название, его исходными составными частями являются не звуки или слоги, а письменные знаки; они составляют, если воспользоваться выражением Лейбница, некоторую *lingua characterica*. Это отличие моего исчисления от словесных языков немаловажно. Оно выступает главным образом в двух своих проявлениях: письменные знаки сохраняются, звуки прекращаются; и письменные знаки размещаются на двумерном листе, звуки же существуют в одномерном времени. Благодаря продолжительности существования письменные знаки более похожи на понятия и более пригодны для употребления в логических целях, нежели звуки. Они также более определенны и тем самым вынуждают мышление к большей определенности. Группу письменных знаков можно неоднократно и по-разному воспринимать с помощью зрения; благодаря этому ее смысл — со всеми заключенными в ней соотношениями частей — может быть неоднократно явлен нашему уму, и это облегчает постижение целого, сохранение его в памяти. Двумерная протяженность листа бумаги, используемого для письма, делает возможным разнообразные взаиморасположения письменных знаков, и это можно использовать в целях выражения мыслей. В случае обычных рукописных или типографских текстов расположение знаков — одних под другими, конечно, совершенно случайно; напротив, при табличном их размещении двумерность протяжения используется в целях большей обозримости. Сходным образом я пытаюсь поступать и в моей знаковой системе. Когда я выписываю отдельные части предложения, — например, следствие и посылки — одни под другими, а слева от них с помощью комбинации линейных отрезков обозначаю логические отношения, соединяющие их в единое целое, я достигаю того, что структура данного предложения становится прозрачной. Я говорю об этом, потому что ныне наблюдается стремление каждую формулу втискивать в строку. В Пеановой системе, как мне кажется, принципиально проводится размещение формул в одну строку, что мне представляется добровольным отказом от главного преимущества письма по сравнению с речью. Ведь облегчение типографского набора все же не самое главное. По психологическим причинам длинную строку хуже воспринимать, а ее строение труднее понимать, чем стоящие одна под другой более короткие строки, возникающие после разрыва длинной строки, если этот разрыв соответствует смысловой структуре целого. Мне кажется, что однострочный характер Пеановой системы имеет результатом и еще более тяжелые последствия. Однако об этом — позже! Процесс умозаключения в моей знаковой системе происходит как своего рода вычисление. Я имею в виду вычисление не в узком смысле, как если бы оно подчинялось некоторому алгоритму наподобие сложения и умножения, а в том смысле, что вообще имеется какой-то алгоритм, то есть совокупность правил, которым подчиняется переход от одного или двух предложений к новому предложению, так что ничего не может происходить иначе, как по этим правилам.

Мой замысел, стало быть, направлен на то, чтобы достичь строгости процесса доказательства, не содержащего никаких пробелов, и наивысшей логической точности — вместе с обозримостью и краткостью.

Какие цели преследовал господин Пеано в своей понятийной записи или математической логике — об этом я могу сказать менее определенно; здесь я могу положиться больше на предположения. Он написал одно небольшое сочинение: Notations de logique mathématique. Introduction on formulaire de mathématique publié par la «Rivista di Matematica»[3], в котором описывает свой способ обозначения и из которого я главным образом и извлек свои сведения. Я буду в дальнейшем ссылаться на это сочинение как на «Introduction». Насколько я могу понять из этого сочинения, толчком для него не было исследование оснований математики; не определяло оно и способ его осуществления. Ибо уже в § 2 своего «Introduction» Пеано вводит краткие обозначения для классов целых *вещественных* чисел, рациональных чисел, простых чисел и т.д., причем все эти понятия предполагаются известными. То же самое касается и значений знаков вычислительных операций '+', '–', '×', '√' и т.д., из чего можно заключить, что анализа этих логических образований вплоть до выявления простых их составляющих не предполагалось. А поскольку без такого анализа исследование, подобное тому, какое я наметил, невозможно, то таковое и не входило в намерения господина Пеано. Как гласит приведенное выше название, это сочинение должно служить введением в более обширную работу — «Formulaire de mathematiques»*, для осуществления которой объединилось много ученых и которая должна охватить всю совокупность математического знания, представленного с помощью Пеановой понятийной записи. Отсюда получается, что этот замысел больше направлен на накопление знания, чем на его доказывание, на достижение

* Turin, 1895, Bocca fréres; Ch. Clausen[4].

краткости и вненациональности, чем на логическую полноту. Правда, в Предисловии к «Formulaire», с. VI, господин Пеано говорит:

«20. Après avoir écrit une formule en symboles, il convient d'appliquer à la formule quelques transformations de logique. On verra ainsi, s'il est possible de la reduire à une forme plus simple; et l'on reconnaît facilement si la formule n'est pas bien écrite.

21. Car les notations de logique ne sont pas seulement une tachigraphie, pour représenter sous une forme abrégée les propositions de mathématiques; elles sont un instrument puissant pour analyser les propositions et les théories"[5].

В соответствии с этим автор, очевидно, имеет в виду и логическую проработку; однако, судя по словам «analyser les propositiones et les theories», по-видимому, имеется в виду только такая работа, которую надо сделать, чтобы любое предложение можно было как можно проще записать с помощью символов. Для этого, правда, часто требуются или желательны более точная формулировка и расчленение предложения на более простые составные части; но такое расчленение может не доходить до его простейших частей. Во всяком случае упора на строгость процесса доказательства и логическую полноту здесь меньше, чем в моей знаковой системе. В Предисловии к «Formulaire», с. VII, говорится:

"25. On pent aussi publier les démonstrations des propositions, ou au moins les liens qui subsistent entre les propositions d'une suite. Mais la transformation en symboles d'une démonstration est en général plus difficile que l'enonciation d'un théorème"[6].

Что процесс доказательства тут, пожалуй, отступает на второй план, это вытекает из отсутствия правил для умозаключения; ибо формулы в части 1 «Fomulaire» не могут служить их заменой. Дело здесь идет лишь о том, как из одной или двух из этих формул построить новую формулу.

Отсутствие логической полноты для меня особенно заметно в том способе определения, которым пользуется Пеано. Как правило, многократно определяются одни и те же исходные знаки. Очень часты и условные дефиниции. В отличие от этого я требую, чтобы каждый знак определялся только один раз и полностью, а не многократно и по частям, чтобы определяемое выражение непременно совпадало по значению с определяющим, чтобы правомерность определения не зависела от какого-либо предложения, требующего доказательств. Но именно это происходит, когда один и тот же знак определяется многократно; ибо в этом случае требуется доказательство того, что эти определения совместимы. Однако у господина Пеано я не нашел ничего подобного.

Хотя стремление к логической точности здесь и выступает менее отчетливо, чем в моей системе, оно все же присутствует и не раз приводит автора к подтверждению моих установок, что для меня особенно ценно в тех случаях, где почти все логики, кажется, придерживаются иного мнения. Один из таких случаев — частные утвердительные предложения. Здесь обозначение Пеано базируется на том же взгляде, который лежит в основе и моего обозначения, а именно, на взгляде, что здесь налицо отрицание всеобщности некоторого отрицания («Intro[duction]», § 9, в конце)[7], тогда как большинство логиков, которых сбивает с толку язык, рассматривая предложение «некоторые числа суть простые числа», объединяют в единое целое слова «некоторые числа» и истолковывают их значение как логический субъект, о котором свойство быть простым числом высказывается точно так же, как, например, о числе 2 в предложении «два есть простое число». А если спросить, какое значение имеет словообразование «некоторые числа», то мы услышим нечто вроде того, что это «какая-то часть совокупности всех чисел» или «какая-то часть всех чисел», после чего с полным правом можно задать вопрос: какая же часть? А на это невозможно дать ответ, который согласовался бы со всеми предложениями, в которых эти слова встречаются как грамматический субъект. Ибо они были бы бесконечно многозначными и, стало быть, логически совершенно неприемлемыми. На самом деле их ни в коем случае нельзя объединять, и о значении этого объединения ни в коем случае нельзя задавать вопрос. Мы имеем здесь грамматический псевдосубъект, наподобие, скажем, слов «все люди», «ни один человек», «ничто», — обороты, которые, кажется, служат языку именно для того, чтобы вводить в заблуждение логиков. Господин Э. Шрёдер в своей «Алгебре логики» попался в эту ловушку, и даже сам господин Пеано не совсем ее избежал, когда в § 33 своего «Introduction» ввел обозначения, построенные целиком по образцу словесных выражений и поэтому логически ошибочных. К счастью, однако, он ими, по-видимому, не пользуется. Частные предложения — это предложения экзистенциальные, очень близкие обороту «существует». Сравните предложения «существуют числа, которые являются простыми числами» и «некоторые числа суть простые числа». Это существование вдобавок часто смешано с реальностью и объективностью. И тут обозначение господина Пеано указывает правильный путь. Сравните «Introduction», с. 13, внизу*.

Что касается выдвинутого мною положения, что задание числа содержит некое высказывание о понятии, то в Пеановом способе записи

'num u'

где 'u' должно указывать на некоторый класс («Introduction, § 19), я могу видеть его подтверждение. Конечно, все зависит от того, как понимается слово «класс». Если вместе с господином Э. Шрёдером рассматривать класс как совокупность предметов, то отношение класса к одному из принадлежащих ему предметов оказывается отношением целого и одной из его частей: тогда упомянутое обозначение, конечно, не согласуется с моим учением. Ну а какого взгляда придерживается господин Пеано, в этом ясности нет. Класс появляется у него сначала как у Буля — как нечто первоначальное, не подлежащее сведению к чему-либо иному. Но в § 17 «Introduction» я нахожу обозначение '$\overline{x\varepsilon}p_x$' класса предметов, которые удовлетворяют известным условиям, имеют известные свойства. Класс выступает здесь, следовательно, производным по отношению к понятию, выступает как объем понятия, и я могу заявить, что с этим совершенно согласен, хотя мне не очень нравится способ записи '$\overline{x\varepsilon}p_x$'.

В другом случае мое согласие с господином Пеано менее явно, поскольку чтобы его отчетливо представить, требуется предварительное исследование. Это связано с моим учением об истинности и ложности, согласно которому все истинные предложения означают одно и то же, а именно, истинность, а все ложные предложения тоже означают одно и то же: ложность. Поскольку это учение на первый взгляд кажется странным и возникает опасность, что его, не долго думая, отвергнут, не производя более тщательной проверки, подтверждение этой точки зрения со стороны господина Пеано для меня особенно ценно, хотя у него, пожалуй, можно обнаружить лишь предпосылки такового. А именно, он вводит («Introduction», § 9) знак «Λ», говоря: «Λ *représente l'absurde*»[8]. Вместо этого я говорю: «ложность». Предложение, гласящее, что 2 не больше, чем 3, будет, таким образом, записано так:

$$` (2 > 3) = \Lambda '.$$

Отсюда видно, что все ложные предложения, согласно господину Пеано, должны означать одно и то же, хотя бы потому, что знак равенства здесь должен обозначать полное совпадение, тождество. И действительно, в § 40 «Introduction» сказано:

«L'égalité $a = b$ a toujours la même signification: a et b sont identiques, ou a et b sont deux noms donnés à la même chose»[9].

---

* Вопросы существования играют в математике определенную роль. Поэтому не безразлично, как их понимать.

Сообразно с этим '(2 > 3)', '$7^2 = 0$', ' Λ ' — это знаки для одного и того же, то есть их значения совпадают. Поскольку же господин Пеано и между каждыми двумя истинными предложениями допускает введение знака равенства, он тем самым, как мне кажется, полностью присоединяется к указанному выше моему учению. И если, тем не менее, он, насколько я могу судить, нигде не выражает этого явно, то его, вероятно, удерживает непривычность этого моего положения. И я совсем не уверен в том, что Пеано одобрит вывод, следующий из его же собственных предпосылок. Совпадение подхода Пеано с моим учением от этого не становится менее значимым, так как сохраняет свою силу, несмотря на это внутреннее сопротивление. Наше расхождение, похоже, связано с тем, что истинные предложения могут выражать самые разные мысли. Предложения '2·2 = 4' и '3 > 2' можно, согласно господину Пеано, связать знаком равенства: «(2·2 = 4) = (3 > 2)», и все же каждый согласится с тем, что в них говорится отнюдь не об одном и том же. Эту трудность нельзя преодолеть, не обращаясь к моему различению смысла и значения. Поэтому данное различение косвенно подкрепляется тем, на что опирается мое учение об истинности и ложности. Нижеследующее может прояснить вопрос. Иногда мы обозначаем различными именами один и тот же предмет, не зная этого. Мы говорим, например, о комете астронома X и о комете астронома Y, и лишь впоследствии приходим к заключению, что этими двумя названиями мы обозначали одно и то же небесное тело. В подобном случае я говорю: хотя оба названия имеют одно и то же значение, они обладают различным смыслом, поскольку, чтобы убедиться в этом совпадении, требуется особый познавательный акт. Так, об обозначениях

'3 + 1', '1 + 3', '2 + 2', '2·2'

я говорю, что они *означают* одно и то же, но имеют разный *смысл*, или *выражают* нечто различное. Если теперь в некоторой знаковой конфигурации '$\Phi(A)$', имеющей какое-то значение, заменить знак 'A' другим знаком 'Δ' с тем же значением, то новая знаковая конфигурация '$\Phi(\Delta)$' будет, очевидно, означать то же самое, что и первоначальная, то есть '$\Phi(A)$'. Но если смысл знака 'Δ' расходится со смыслом знака 'A', то в общем случае смысл знаковой конфигурации '$\Phi(\Delta)$' расходится со смыслом знаковой конфигурации '$\Phi(A)$'. Применим это к предложению '3 + 1 = 2 · 2', последовательно заменяя в нем '3 + 1' равнозначными знаками '1 + 3', '2 + 2', '2 · 2'.

Мы получим предложения

'1 + 3 = 2 · 2'
'2 + 2 = 2 ·2'
'2 · 2 = 2 · 2',

которые все должны иметь одно и то же *значение*, называемое мною *истинностью*, в то время как все они *выражают* нечто различное. Смысл предложения я называю мыслью. Эти предложения, стало быть, выражают разные мысли. Если предложение вообще имеет значение, то последнее есть или истинность, или ложность. Но в поэтических произведениях и мифологических творениях встречаются и такие предложения, которые не имеют значения, но, пожалуй, обладают смыслом, например, «Сцилла была о шести головах». Это предложение не истинно и не ложно, поскольку как в одном, так и в другом случае потребовалось бы, чтобы оно имело какое-либо значение, но такового нет в наличии, потому что собственное имя 'Сцилла' ничего не обозначает. В художественном творчестве довольствуются именно смыслом, тогда как наука ставит вопрос и относительно значения*.

---

* Ср. в этой связи мою статью о смысле и значении в томе 100 издания «Zeitschrift f[ür] Philos[ophie] u[nd] phil[osophische Kritik»[10].

Теперь я перехожу к несколько более подробному рассмотрению сущности понятийной записи Пеано. Она есть потомок вычислительной логики Буля, но — если можно так выразиться — потомок вырожденный. Я не подразумеваю под этим ничего плохого; наоборот, я считаю, что отклонения Пеано от Буля в целом улучшают положение. Но основной замысел совершенно изменился. Булева логика — это логика и ничего более. В ней идет речь о логической форме, а совсем не о том, чтобы влить в эту форму некое содержание; но именно в этом заключается замысел господина Пеано. В этом отношении его работа к моему исчислению ближе, чем к логике Буля. В другом отношении, однако, можно заметить близкое родство между логикой Буля и моей записью в понятиях, так как и там, и тут главное ударение падает на процесс умозаключения, что в вычислительной логике Пеано менее подчеркнуто. Используя выражения Лейбница, можно сказать: логика Буля есть некое *calculus ratiocinator*, но не *lingua characterica*, Пеанова же математическая логика есть в основном некоторая *lingua characterica*, но наряду с этим также и *calculus ratiocinator*, тогда как в моей понятийной записи акцент равно падает и на то, и на другое. Оставить без всяких изменений Булев способ обозначения господин Пеано не мог, ибо этот способ мало пригоден для выражения содержания, осбенно содержания математического. Это, мне кажется, в немалой степени вызвано разделением оперирования с классами и оперирования с суждениями*, как имеют обыкновение выражаться. А это разграничение у господина Пеано уже менее резко. Например, знак 'ε', который в записи 'A ε B' относит предмет A к классу B и который я считаю существенным обогащением обозначений Буля, не разделяет того своеобразия других исходных знаков, что он употребляется двояким способом — можно даже сказать в двояком значении, — смотря по тому, где он встречается: в вычислениях, касающихся классов или относящихся к суждениям. Сравните в связи с этим «Introduction», § 9: «On adopte entre propositions les signes déjà expliqués entre classes avec la signification suivante»[11]. Эта двойственность мне, конечно, не очень нравится. Против нее говорит то же соображение, которое удержало господина Пеано от того, чтобы использовать знак плюс не только как знак арифметики, но и, подобно Булю, как логический знак**. Если это, быть может, и не приводит к ошибкам, оно все же отражается на понятности формул, поскольку всегда надо сначала сообразить, как надо понимать данный знак. Особенно это мешает тогда, когда тот же знак в тех же самых формулах много раз употребляется по-разному.

Такое же двойственное употребление имеет и знак '$\supset$', который в случае оперирования с суждениями может быть назван знаком дедукции. Именно в этом смысле, хотел бы рассмотреть его здесь несколько подробнее. Итак, что означает знаковая конфигурация '$a \supset b$', если a и b представляют предложения? Отвечая на этот вопрос, господин Пеано дает три различных определения***. Эта тройственность кажется мне чрезмерной, а чрезмерность — недостатком. Ибо сразу возникают вопросы об отношениях между этими определениями (Erklärungen): совместимы ли они друг с другом? Является ли одно из них следствием другого? Давайте рассмотрим эти определения по порядку! В «Introduction», в § 9, сказано: «$a \supset b$ signifie 'de la a on déduit la b' ou 'la b est conséquence de la a'»[12]. Это определение не очень

* Господин Пеано говорит «proposition», я сказал бы «истинностное значение», так как слово «предложение» я употребляю в смысле знаковой конфигурации, смысл которой есть мысль, а значение — истинность или ложность: истинностное значение.

** Ср. «Introduction», с. 28 вверху.

*** Если мы добавим определение, служащее применению этого знака в исчислении классов, то мы получим четыре определения.

удовлетворительно, потому что сразу же находятся примеры, которые ставят нас в тупик. Рассмотрим, скажем, выражение

$$`(2^2 = 4) \supset (3 + 7 = 10)'.$$

Можно ли сказать, что предложение '$3 + 7 = 10$' выводится из предложения '$2^2 = 4$'? Вряд ли! Является ли предложение '$3 + 7 = 10$' следствием предложения '$2^2 = 4$'? Кажется, нет. И все же, как мы увидим, по мнению господина Пеано, здесь знак дедукции поставлен правильно. Рассмотрим, далее, пример

$$`(2 > 3) \supset (7^2 = 0)'.$$

Мы не решимся сказать, что предложение '$7^2 = 0$' выводится из '$2 > 3$', ибо оно из него вовсе не следует, так как оно ложно. Не назовем мы '$7^2 = 0$' и следствием того, что '$2 > 3$'.Согласно нашему определению, надо, стало быть, считать, что знак дедукции здесь поставить нельзя; но надоумить нас может третье определение.

Но вернемся сначала ко второму определению! В «Introduction», в § 14 сказано:

«Si *a* et *b* sont des propositions contenant des lettres indéterminées *x*, *y*, ... c'est-à-dire, sont des conditions entre ces lettres, la déduction $a \supset b$ signifie: 'quelles que soient les valeurs de *x*, *y*, ... pourvu qu'elles satisfassent à la condition *a*, elles satisferont aussi a la condition *b*'»[13].

Это определение относится только к тому случаю, когда встречаются так называемые неопределенные буквы. Противоположный случай господин Пеано пытается — в § 15— свести к данному, напоминая о том, что в анализе в качестве функции от *x* рассматриваются и такие выражения, которые не содержат *x* или из которых *x* можно устранить. В соответствии с этим он говорит:

«Si *a* et *b* sont des propositions qui ne contiennent pas de lettres indéterminées, la déduction $a \supset b$ signifie toujours 'si *a* est vraie, *b* est aussi vraie'»[14].

Сообразно этому '$(2 > 3) \supset (7^2 = 0)$' надлежит передавать так: «если истинно, что 2 больше, чем 3, то истинно и то, что квадрат числа 7 есть 0», с чем, однако, вряд ли связан какой-либо смысл. Поэтому-то господину Пеано и нужно продолжение:

«c'est-à-dire, ou *a* est vraie et *b* est vraie, ou *a* est fausse et *b* est vraie ou *a* est fausse et *b* est fausse, et l'on exclut le seul cas '*a* est vraie et *b* est fausse'»[15].

Это — третье определение. Оно совпадает с тем, которое я для соответствующего знака дал в 1879 г. в моем «Исчисления понятий». Из всего этого видно, что на самом деле в наших примерах '$(2^2 = 4) \supset (3 + 7 = 10)$' и '$(2 > 3) \supset (7^2 = 0)$' знак дедукции поставлен правильно.

Но как относиться к случаю, когда встречаются неопределенные буквы, как выражается Пеано, или неопределенно указывающие буквы, как я предпочел бы сказать? Возьмем в качестве примера предложение

$$«(x > 2) \supset (x^2 > 2)»,$$

которое мы можем перевести как «если нечто является большим, чем 2, то его квадрат тоже больше, чем 2». На языке логиков это гипотетическое суждение; и здесь надо различать две вещи: значение знака '$\supset$' и всеобщность, которая обозначена с помощью неопределенно указывающей буквы 'x'. В только что приведенном втором определении Пеано то и другое смешано, и это методическая ошибка. Правильным было бы, во-первых, установить значение знака дедукции и, во-вторых, совершенно независимо от этого определить, как с помощью неопределенно указывающих букв обозначается всеобщность. Из этих определений, взятых вместе, должно само собой получаться, что означает дедукция, когда слева и справа от ее знака встречаются неопределенно указывающие буквы. Попробуем сделать это следующим образом! Пусть '$\Phi(x)$' представляет какое- то предложение, в котором встречается 'x'. Установим далее, что наличие 'x должно свидетельствовать, что это предложение истинно, какое бы значение мы ни придали букве 'x'. В нашем случае предложению '$\Phi(x)$' соответствует формула

$$`(x > 2) \supset (x^2 > 2)'.$$

В самом деле, придавая букве 'x' одно за другим значения 1, 2, 3, мы получаем сначала:

$$`(1 > 2) \supset (1^2 > 2)',$$

что истинно, так как обе части этой дедукции ложны. Затем мы получаем

$$`(2 > 2) \supset (2^2 > 2)',$$

что истинно, так как левая часть ложна, а правая истинна. На третьем шаге мы получаем

$$`(3 > 2) \supset (3^2 > 2)',$$

что истинно, так как обе части истинны. Что бы мы ни подставили на место 'x', никогда не наступит случай, когда левая часть дедукции истинна, а правая ложна; и это именно то, что мы хотим сказать этим предложением. Можно еще поставить вопрос: что получится, если подставить не знак числа, а, например, знак Солнца ⊙? Несомненно, и этот случай надо учитывать. Предложение '⊙ > 2' ложно, так как Солнце не есть число, а только числа могут быть большими, чем 2. Поэтому предложение

$$`(\odot > 2) \supset (\odot^2 > 2)'$$

истинно, независимо от того, какой — истинной или ложной — является правая часть; однако какой-то из этих двух случаев обязательно должен иметь место. Однако, согласно общепринятым определениям знаковой конфигурации 'x^2', |выражение| '($\odot^2 > 2$)' не имеет значения. Тут надо, поэтому, допустить наличие такого определения для 'x^2', при котором всегда получается некое значение, какой бы знак ни был подставлен вместо 'x', если только этот знак сам имел какое-то значение, то есть обозначал некий предмет. Отсюда ясна необходимость моего требования, чтобы функция была определена так, чтобы она получала значение при всяком аргументе. В нашем случае можно было бы, например, положить, что значение знаковой конфигурации 'x^2' должно совпадать со значением 'x', если 'x' означает предмет, который не является числом. Что мы установим относительно 'x'. безразлично, но важно, чтобы для каждого его значения было обеспечено какое-то значение для 'x^2'. Как мне кажется, господин Пеано не признает этого требования.

И еще на одном соображении надо остановиться несколько подробнее. Мы понимаем дедукцию

$$`(x > 2) \supset (x^2 > 2)',$$

взятую в целом, в соответствии с нашей трактовкой знаковой конфигурации '$\Phi(x)$', но ведь уже левая ее часть сама по себе есть предложение, содержащее 'x', как и правая. Если теперь мы применим к '$x > 2$' определение, которое мы дали обозначению всеобщности, то это будет означать: 'каждый предмет больше, чем 2', что очевидно ложно. Подобное же имеет место для правой части. Хотя в результате этого вся дедукция опять-таки будет истинной, она, однако, получает совершенно другой смысл: если каждый предмет больше, чем 2, то большим чем 2 должен быть и квадрат каждого предмета*. Отсюда видно, что надо еще определить, как произ-

* И здесь снова надо ввести допущение, что слова «x в квадрате» или знаковая конфигурация «x^2» имеет какое-то значение, какой бы предмет мы ни понимали под «x».

вести ограничение области всеобщности. Это заметил и господин Пеано. Я попытаюсь показать на примере, как, по его мнению, выполняется это требование. Пусть в выражении

$$‘(\Phi(x) \supset \Psi(x, y)) \supset X(y)’$$

‘$\Phi(x)$’, ‘$\Psi(x, y)$’, ‘$X(y)$’ представляют предложения, в которых встречаются буквы ‘x’ и ‘y’, заключенные в скобки. Мы получаем дедукцию, левая часть которой в свою очередь содержит знак дедукции. Если господин Пеано хочет ограничить всеобщность, обозначенную с помощью ‘x’, той частью, которая стоит слева от главного знака дедукции, то он помещает ‘x’ в качестве индекса при неглавном знаке дедукции следующим образом:

$$‘(\Phi(x) \supset_x \Psi(x, y)) \supset X(y)’.$$

Чтобы показать, что всеобщность по ‘y’ должна распространяться на содержание всей формулы, он помещает ‘y’ в качестве индекса при главном знаке дедукции[16]:

$$‘(\Phi(x) \supset_x \Psi(x, y)) \supset_y X(y)’.$$

Однако когда это отдельно стоящая формула, а не часть какой-то другой формулы, то индекс ‘y’ он отбрасывает. Помимо знаков дедукции, эта индексация распространяется и на знаки других отношений; например на знак равенства. Я нахожу этот способ не особенно удачным, потому что в этом случае обозначение всеобщности сливается с отношением, которое не имеет никакой связи со всеобщностью. Отсюда тот недостаток, что мы бываем вынуждены вводить в формулу знак отношения специально для того, чтобы воспользоваться индексами. Далее таким путем получаются новые знаки, причем, кроме простых знаков для отношений, — знаки с одним или многими индексами, а их надо особо определять. В § 18 своего «Introduction» господин Пеано говорит:

«Les indices au signe $\supset$ satisfont à des lois qu'on n'a pas encore suffisamment étudiées. Cette théorie déjà abstruse par elle-même, le devient encore plus si l'on n'accompagne pas ces régles par des exemples. Le mieux à faire, c'est d'examiner le rôle de ces signes et leur transformation dans les formules et les démonstrations de Mathématique»[17].

На деле приводятся только примеры. При этом мы видим, что индексы переносятся с одного знака отношения на другой знак отношения без всякого указания законов, по которым это происходит. В этом отношении моя понятийная запись 1879 г. превосходит пеановскую. Я уже тогда привел все необходимые законы, относящиеся к обозначению всеобщности, так что ничего принципиально важного для исследования здесь не осталось. Этих законов немного, и я не знаю, почему их стали считать непонятными. И если в понятийной записи Пеано дело обстоит иначе, то проистекает это из нецелесообразного обозначения, а главная причина этого заключается, вероятно, в упомянутой выше записи в одну строку. Благодаря ней становится труднее распространять действие какого-либо знака на все предложение. При этом может происходить нагромождение скобок. И эта трудность, как мне кажется, не очень преодолевается путем остроумного метода расстановки точек, которые господин Пеано применяет вместо скобок для выражения структуры предложения. Наверное, по этой же причине знак отрицания часто сливается со знаком отношения, что тоже приводит к увеличению необходимых основоположений. Все же, если сравнивать с Булем, большим прогрессом следует считать то, что здесь вообще имеется обозначение для всеобщности и что оно делает возможным ограничение действия всеобщности определенной частью целого.

В дополнение несколько замечаний о моем способе обозначения всеобщности. Рассмотренная выше формула

$$‘(2 > 3) \supset (7^2 = 0)’$$

может поначалу вызывать чувство отторжения из-за непривычного употребления знаков ‘=’ и ‘>’. Ибо знак ‘ $\supset$ ’ служит обычно двум разным целям: во-первых, он обозначает некоторое отношение, а во-вторых, указывает на то, что между определенными предметами это отношение имеет место. Поэтому кажется, будто в приведенной выше формуле мы указываем на нечто ложное ($2 > 3$, $7^2 = 0$) как на имеющее место, чего на самом деле нет. Поэтому мы должны лишить знак отношения той утверждающей силы, которая непроизвольно в него вкладывается. И это относится как к моей понятийной записи, так и к пеановской. Однако же мы иногда хотим нечто утверждать, и поэтому я ввел единственный знак, обладающий утверждающей силой: штрих суждения. Это — подтверждение моего стремления отобразить в обозначении каждое важное различие. С помощью штриха суждения я замыкаю предложение, и это значит, что каждое условие, необходимое для того, чтобы предложение имело силу, действительно в нем встречается; а содержание предложения, замкнутого таким образом, я с помощью того же знака утверждаю в его истинности. Господин Пеано не имеет такого знака, а употребляет свой знак отношения то с утверждающей силой, то без нее, хотя его знак главного отношения постоянно имеет утверждающую силу. Отсюда следует, что господин Пеано не может записать предложение, не составляющее часть некоторого другого предложения, не признав его истинным. Его предложения тем самым лишаются завершенности, и нередко условия верности главной формулы оказываются разорванными. Взглянув на предложение Пеано, мы подчас не можем решить, полно оно или нет.

Если же область всеобщности должна простираться на все предложение, замкнутое с помощью штриха суждения, то я, как правило, пользуюсь латинскими буквами — в сущности так же, как это делает господин Пеано там, где он не ставит никаких индексов; только я отделяю функциональные буквы от предметных букв и пользуюсь первыми только для указания функций, а вторыми только для указания предметов — в соответствии с проводимым мною резким различением функций и предметов, различением, которое господину Пеано не ведомо. Но если всеобщность должна простираться только на часть предложения, я избираю готические буквы; этим я одновременно устанавливаю границы области этой всеобщности — способом, который я изложил в конце § 8 моих «Основных законов арифметики». Это соответствует Пеановому способу обозначения с индексом при знаке отношения. Я мог бы тут — так же как господин Пеано — вместо готических букв выбрать латинские. Однако для процесса умозаключения всеобщность, распространяющаяся на содержание всего предложения, имеет существенно большую значимость, чем та, область которой составляет только часть предложения. Обозримости же очень способствует то, что глаз по разной форме латинских и готических букв сразу улавливает эту различную их роль. Сходное различие существует и в способе употребления букв ‘a’ и ‘x’ в формуле

$$‘\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha}\, d\alpha’,$$

где α по сути дела служит знаком вычисления. Господин Пеано тоже признает это различие, не учитывая, однако, его посредством выбора разнородных букв. Сравните в этой связи § 13 «Introduction» и «Formulaire, préface», с. V, номер 16, и с. VI, номер 17, где идет речь о *lettres apparentes* и *variables apparentes*[18].

Оставляя за собой право когда-нибудь впоследствии сравнить наши понятийные записи по другим пунктам, я только замечу еще, что способ обозначений Пеано без сомнения более удобен для набора, а во многих случаях он к тому же требует меньше места, чем мой собственный, но эти преимущества, как мне кажется, куплены за счет меньшей обозримости и логических погрешностей, а это — слишком дорогая цена, по крайней мере с точки зрения тех целей, которые я преследую.

Часть вторая

ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА

ФУНКЦИЯ И ПОНЯТИЕ

*Доклад, прочитанный 9 января 1891 г.
на заседании Иенского Медицинского
и естественнонаучного общества*

Предисловие. Я выпускаю этот доклад в надежде на то, что в виде отдельного издания он найдет таких читателей, для которых он остался бы неизвестным, будучи опубликован в Трудах Иенского Медицинского и естественнонаучного общества. В ближайшее время я собираюсь — как об этом я уже ранее говорил — изложить, каким образом в моей знаковой системе (Begriffsschrift) я выражаю основополагающие для арифметики дефиниции и как вывожу из них доказательства, прибегая только к одним своим знакам. В этих целях для меня существенна возможность ссылаться при этом на данный доклад: это освобождает от необходимости входить в обсуждение таких вопросов, которые, возможно, для многих показались бы не относящимися непосредственно к существу дела; для других же их отсутствие могло бы выглядеть как упущение. Мой доклад обращен, как это диктуется самим местом, не к одним только математикам; в той мере, в какой допускают имеющиеся в моем распоряжении время и обсуждаемый предмет, я стремился использовать общепонятные выражения. Надеюсь, что такой подход пробудит интерес к делу со стороны более широкого круга ученых, особенно логиков.

Прошло уже много лет с тех пор, как я имел честь докладывать на заседаниях этого Общества* о той системе знаков, которую я назвал записью в понятиях — Begriffsschrift. Я хотел бы осветить этот вопрос с иной стороны и сообщить о некоторых дополнениях и новых положениях, к необходимости которых я с тех пор пришел. При этом я не стану сколько-нибудь подробно излагать эту систему — задача состоит только в том, чтобы осветить некоторые мои основополагающие идеи.

Я исхожу из того, что в математике называется функцией. Это слово вначале не имело того широкого значения, которое оно получило позже. Лучше всего начать наши рассмотрения с первоначального способа его употребления, и лишь после этого обратиться к его позднейшим обобщениям. Я начну с функции одного-единственного аргумента. Выражение, относящееся к науке, в своем четко определенном значении выступает впервые тогда, когда оно требуется для формулировки какой-либо закономерности. Для функции это произошло с открытием высших разделов анализа. В них прежде всего речь шла об установлении законов, справедливых для функций как таковых. Поэтому, если мы хотим выяснить, что первоначально в математике понималось под словом «функция’, мы должны обратиться ко времени

---

* Заседания, состоявшиеся 10 января 1879 и 27 января 1882 г.

открытия высших разделов анализа. На вопрос, что такое функция, обычно отвечают: «под функцией от x понимается аналитическое выражение, которое содержит x, — формула, включающая букву x». Тогда, например, выражение

$$2 \cdot x^3 + x$$

оказывается функцией от x, а

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

— функцией от 2. Подобный ответ не может нас удовлетворить, так как он не позволяет различить форму и содержание, знак и обозначаемое; это ошибка, которая, правда, очень часто встречается и теперь в работах по математике, даже принадлежащих известным авторам. Я раньше уже указывал* на недостатки распространенных формальных теорий арифметики. В них говорится о знаках, не имеющих никакого содержания, — но долженствующих его иметь, — и им приписываются свойства, которые, по здравому разумению, могут быть присущи только содержанию знака. Так и тут: выражение само по себе, как форма для некоторого содержания, не отвечает существу дела, — таковым может быть только само содержание. Что же представляет собой содержание, значение выражения «$2 \cdot 2^3 = 2$»? Оно — такое же, как и у выражений «18» или «$3 \cdot 6$». В равенстве $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ выражено то, что значение правой части этого знакового образования — то же, что и у левой части. Тут я должен выступить против взгляда, будто, например, $2 + 5$ и $3 + 4$ хотя и равны, но не одинаковы. В основе этого взгляда опять-таки лежит смешение формы и содержания, знака и обозначаемого. Это то же самое, как если бы мы вздумали счесть благоухающую фиалку отличной от *Viola odorata* на том основании, что эти названия звучат по-разному. Одного различия в обозначениях не достаточно для того, чтобы обосновать различие того, что обозначается. Здесь вопрос не столь прозрачен потому только, что значение знака числа 7 чувственно не воспринимаемо. Широко распространенная теперь тенденция не считать предметом ничего, что нельзя воспринять с помощью органов чувств, склоняет к ошибочному взгляду принимать за числа сами знаки чисел, видеть в них подлинные предметы нашего рассмотрения**; тогда, конечно, 7 и $2 + 5$ будут различны. Но такой взгляд несостоятелен, так как ни о каких арифметических свойствах чисел нельзя говорить, не обращаясь к значению числовых знаков. Тогда ведь, например, то свойство числа 1, что умножение его на себя дает снова это же число, стало бы чистой выдумкой; никакие микроскопические или химические исследования, какими бы глубокими они ни были, никогда не позволят открыть это свойство у того безобидного образования, которое мы называем знаком числа один. Иногда тут говорят о некоей дефиниции; но никакая дефиниция не может быть в такой мере созидательной, чтобы она могла придать вещи свойства, которых она вовсе не имеет, — кроме одного: выражать и обозначать то, для чего дефиниция ввела ее в качестве знака***. Напротив, фигуры, которые мы называем числовыми знаками, имеют физические и химические свойства, зависящие от средств, которыми их изображают. Можно себе представить, что когда-нибудь будут введены совершенно новые числовые знаки, подобно тому, например, как арабские цифры вытеснили римские. Всерьез

---

* Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, § 92 u. ff. и Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, Jahrg. 1885, Sitzung vom 17. Juli[1].

** Ср.статьи: *H.v. Helmholtz*, «Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet» и *Leopold Kronecker*, «Über den Zahlbegriff» (Philosophische Aufsätze. *Eduard Zeller* zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet. Leipzig 1887).

*** Дело всегда идет о том, чтобы связать со знаком его смысл или значение. Где смысл и значение совершенно отсутствуют, не может быть, собственно говоря, и речи ни о каком знаке и ни о какой дефиниции.

никто не предполагает, что тем самым мы получим совершенно новые числа, совершенно новые объекты арифметики с до сих пор неизученными свойствами. Стало быть, если мы обязаны отличать значения числовых знаков от них самих, мы обязаны признать одно и то же значение за выражениями «2», «1+1», «3−1», «6 : 3»; ибо невозможно усмотреть, в чем же может заключаться различие между ними. Иногда говорят: 1+1 есть сумма, а 6 : 3 есть частное. Но что такое 6 : 3? — Число, которое после умножения на 3 дает 6. «*Данное* (die) число» — это не значит «некое (eine) число»; определенный артикль указывает на то, что существует только одно-единственное число. Тогда

$$(1+1) + (1+1) + (1+1) = 6,$$

и, значит, (1+1) есть именно то число, которое было обозначено как (6 : 3). Эти различные выражения соответствуют различному пониманию и разным взглядам на одну и ту же вещь. В противном случае уравнение $x^2 = 4$ имело бы не только два корня: 2 и −2, но и (1+1) и бесчисленное множество других корней, отличных друг от друга, хотя они в каком-то отношении были бы сходны. Признавая только два вещественных корня, мы отказываемся от взгляда, будто знак равенства означает не полное совпадение, а лишь частичное соответствие. Признав это, мы увидим, что выражения

$$«2 \cdot 1^3 + 1»,$$
$$«2 \cdot 2^3 + 2»,$$
$$«2 \cdot 4^3 + 4»$$

означают числа, а именно, 3, 18, 132. Если бы функция действительно была только значением аналитического выражения, она была бы числом; и ничего нового благодаря этому мы бы не приобрели. Теперь, правда, под словом «функция» обычно понимают выражение, в котором буква x указывает на число, причем только неопределенно, как, например, в выражении:

$$«2 \cdot x^3 + x»;$$

но это ничего не меняет; ибо это выражение тоже указывает на некоторое число лишь неопределенно; и напишу ли я это число или только «x» — не будет существенной разницы.

Тем не менее именно написанное с неопределенным указателем «x» наводит на верное понимание вопроса. Мы называем x аргументом функции и узнаём в выражениях

$$«2 \cdot 1^3 + 1»,$$
$$«2 \cdot 4^3 + 4»,$$
$$«2 \cdot 5^3 + 5»$$

одну и ту же функцию, только с различными аргументами, а именно, 1, 4 и 5. Отсюда видно: то общее, что имеется в этих выражениях, и составляет подлинную сущность функции; таким образом, в выражении

$$«2 \cdot x^3 + x»$$

сущность эта заключена в том, что́ в нем имеется помимо «x»; и это можно записать, скажем, так

$$«2 \cdot (\quad)^3 + (\quad)».$$

Мне важно показать, что аргумент не принадлежит функции, однако вместе с функцией образует некое завершенное целое; ибо одну лишь функцию, функцию саму по себе можно назвать незавершенной, нуждающейся в восполнении или ненасыщенной. Этим функции коренным образом отличаются от чисел. И этой же сущностью функций объясняется то, что мы, с одной стороны, в выражениях «$2 \cdot 1^3 + 1$» и «$2 \cdot 2^3 + 2$» узнаём одну и ту же функцию, хотя они означают различные числа, тогда как, с другой стороны, в выражениях «$2 \cdot 1^3 + 1$» и «$4 - 1$» мы не обнаруживаем одной и той же функции, несмотря на то, что они имеют одинаковое числовое значение. Здесь мы видим также, как легко обмануться, если усматривать сущность функции в форме выражения. В данном выражении мы потому узнаём функцию, что мыслим ее разложенной на части, расчлененной; на возможность такого расчленения наталкивает нас то, как функция образуется[2].

Две части, на которые таким способом разлагается функциональное выражение (Rechnungsansdruck), — знак аргумента и выражение функции — неоднородны, поскольку аргумент есть какое-то число, завершенное в себе целое, каким функция не является. Это можно сравнить с тем, как точка, лежащая на отрезке, делит его на две части. Мы склонны считать эту точку принадлежащей обеим частям отрезка. Но если мы захотим провести деление аккуратно, так, чтобы ничто не участвовало в нем дважды и ничего не было упущено, мы должны отнести точку деления только к одной из частей отрезка. Последняя благодаря этому станет полностью замкнутой в себе, и ее можно сравнить с аргументом, тогда как у другой части отрезка чего-то не хватает. Дело в том, что точка деления, которую можно было бы назвать концевой точкой этой части отрезка, ей не принадлежит. Лишь благодаря восполнению с помощью этой концевой точки или с помощью отрезка с двумя концевыми точками получаем мы нечто завершенное. Если, например, я теперь скажу — «функция $2 \cdot x^3 + x$», то x не надо рассматривать как нечто, принадлежащее данной функции; эта буква служит только для указания характера потребности в восполнении, отмечая те места, где должен быть помещен знак аргумента.

Назовем теперь то, чем становится функция, восполненная своим аргументом, значением функции для этого аргумента. Так, например, 3 есть значение функции $2 \cdot x^2 + x$ для аргумента 1, так как мы имеем: $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.

Имеются функции — такие, например, как $2 + x - x$ или $2 + 0 \cdot x$, — значение которых всегда одно и то же, каким бы ни был их аргумент; мы получим: $2 = 2 + x - x$ и $2 = 2 + 0 \cdot x$. Если бы мы теперь причислили аргумент к функции, то число 2 пришлось бы считать этой функцией. Однако это неправильно. Хотя значение функции тут всегда есть 2, все же саму функцию следует отличать от числа 2; ибо выражение для функции обязательно должно содержать указание на одно или несколько мест, предназначенных для восполнения с помощью знака аргумента.

Метод аналитической геометрии дает в наше распоряжение средство, позволяющее наглядно воспринимать значения функций для различных аргументов. А именно, рассматривая аргумент как числовое значение абсциссы, а относящееся к нему значение функции как числовое значение ординаты некоторой точки, мы получаем совокупность точек, в обычных случаях наглядно представимую в виде кривой. Каждая точка кривой соответствует некоторому аргументу с относящимся к нему значением функции.

Так, например,

$$y = x^2 - 4x$$

дает параболу, причем «y' указывает значение функции и числовое значение ординаты, так как «x' — аргумент и числовое значение абсциссы. Если мы сравним с этим функцию

$$x(x - 4),$$

то обнаружим, что она всегда для того же аргумента принимает то же значение, что и первая. Вообще, мы имеем

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

какое бы число мы ни взяли в качестве x. Поэтому кривая, которую мы получаем из уравнения

$$y = x^2 - 4x,$$

совпадает с кривой, которую дает уравнение

$$y = x(x - 4).$$

Я выражаю это так: функция $x(x - 4)$ обладает тем же пробегом значений[3], что и функция $x^2 - 4x$.

Когда мы пишем

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

мы приравниваем не одну функцию другой, а лишь отождествляем значения этих функций. И если это уравнение мы понимаем так, что оно остается справедливым, что бы мы ни взяли в качестве аргумента x, то тем самым мы выражаем всеобщность уравнения. Вместо этих слов мы можем также сказать: «пробег значений функции $x(x - 4)$ равен пробегу значений функции $x^2 - 4x$', и тем самым получить приравнивание двух пробегов значений. То, что теперь всеобщность равенства значений двух функций можно рассматривать как некоторое равенство, а именно, как равенство двух пробегов значений[4] — это, как мне кажется, не требует доказательства: на это надо смотреть как на логический закон*.

Теперь и для пробега значений функции можно ввести краткое обозначение. С этой целью я заменяю знак аргумента в выражении функции — функциональном выражении гласной греческой буквой, заключаю все выражение в скобки и предпосылаю ему эту же греческую букву, снабженную знаком легкого придыхания. Тогда, например,

$$\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$$

есть пробег значений функции $x^2 - 4x$, а

$$\dot{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])$$

есть пробег значений функции $x(x - 4)$, так что, написав

$$«\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \dot{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])»,$$

мы получаем выражение того, что первый пробег значений — тот же самый, что и второй. Греческие буквы выбраны разными намеренно — чтобы показать, что ничто не заставляет нас избрать одну и ту же букву. Равенство

$$«x^2 - 4x = x(x - 4)»$$

хотя и выражает тот же самый смысл — при условии, что смысл мы понимаем так, как было сказано выше, — но иным способом. Здесь смысл выступает как всеобщность некоторого равенства, тогда как вновь введенное выражение просто есть равенство, правая и левая части которого имеют, каждая, замкнутое, завершенное значение. В записи

$$«x^2 - 4x = x(x - 4)»$$

левая часть, рассматриваемая отдельно, указывает на некоторое число лишь неопределенным образом, и то же относится к правой части. Если бы мы имели просто

* Во многих словесных оборотах, привычных для математики, слово «функция» соответствует, пожалуй, тому, что я здесь назвал пробегом значений функции. Однако функция — в том смысле, в котором здесь употребляется это слово, — логически первична.

«$x^2 - 4x$», то мы могли бы, не изменяя смысла, вместо этого выражения написать «$y^2 - 4y$»; ибо «y», как и «x», указывает на некоторое число только неопределенным образом. Когда же мы соединяем обе части в одном равенстве, мы должны для обеих частей избрать одну и ту же букву, выражая этим то, что не содержит ни левая часть сама по себе, ни правая часть, ни знак равенства, а именно — всеобщность, правда, всеобщность некоторого уравнения, но все же и прежде всего — всеобщность.

Подобно тому, как буква указывает некое число неопределенным образом и этим выражается всеобщность, требуется и функцию неопределенным образом указывать с помощью букв. Для этого по большей части используются буквы f и F — таким способом, что в выражениях «$f(x)$» и «$F(x)$» буква x представляет аргумент. То, что функция нуждается в восполнении, находит в этом случае свое выражение в том, что буквы f или F предполагают стоящие за ними скобки, предназначенные для того, чтобы в них был помещен знак аргумента. В соответствии с этим

$$«\dot{\varepsilon}f(\varepsilon)»$$

означает пробег значений функции, остающейся неопределенной.

Как же расширялось значение слова «функция» по мере развития науки? Здесь можно выделить два направления.

Первое, конечно, состоит в расширении круга способов вычислений, что содействовало построению функций. К сложению, умножению, возведению в степень и действиям, им обратным, присоединились различные виды предельного перехода, правда, еще без ясного осознания того нового, что они несли с собой. Шли дальше, и часто были вынуждены искать прибежища в обычном словесном языке, потому что язык знаков анализа запрещал, например, говорить о функции, имеющей для рационального аргумента значение единица, а для иррационального — значение нуль[5].

Второе направление заключалось в расширении круга того, что может выступать в качестве аргумента и значения функции; оно было вызвано введением комплексных чисел. Вместе с ними сразу же надо было вводить соответствующие определения смысла выражений «сумма», «произведение» и т.д.

В обоих направлениях я теперь иду дальше. Прежде всего к знакам +, — и т.д., служащим для образования выражений для функций, я присоединяю такие знаки, как =, >, <, так что, например, я могу говорить о функции $x^2 = 1$, где x, как и раньше, представляет аргумент. Первый вопрос, который здесь возникает, — это вопрос о значениях такого рода функции при различных аргументах. Если мы подставим на место x одно за другим числа: -1, 0, 1, 2, то получим:

$$\begin{aligned}(-1)^2 &= 1,\\ 0^2 &= 1,\\ 1^2 &= 1,\\ 2^2 &= 1.\end{aligned}$$

Из этих равенств первое и третье истинны, а остальные ложны. Тут я говорю: «значение нашей функции есть некоторое значение истинности» и отличаю истинность как истинностное значение от истинностного значения ложности. Одно из них я кратко называю — истина, истинность, а другое — ложь, ложность. В соответствии с этим, например, «$2^2 = 4$» означает истину — подобно тому, как, скажем, «2^2» означает 4. А «$2^2 = 1$» означает ложь. Тем самым

$$«2^2 = 4», «2 > 1», «2^4 = 4^2»$$

означает одно и то же, а именно — истинность, так что, записав

$$(2^2 = 4) = (2 > 1),$$

мы получаем верное равенство[6].

Напрашивается возражение, что «$2^2 = 4$» и «$2 > 1$» означают совершенно разное, выражают совершенно разные мысли; однако же «$2^4 = 4^2$» и «$4 \cdot 4 = 4^2$» тоже выражают различные мысли; и тем не менее «2^4» можно заменить на «$4 \cdot 4$», так как оба знака имеют одно и то же значение. Следовательно, «$2^4 = 4^2$» и «$4 \cdot 4 = 4^2$» тоже имеют одно и то же значение. Отсюда видно, что равенство — одинаковость — значений не влечет равенства, одинаковости мыслей. Когда мы говорим «Вечерняя звезда есть планета, период обращения которой меньше периода обращения Земли», мы выражаем мысль, отличную от мысли, выражаемой в предложении «Утренняя звезда есть планета, период обращения которой меньше периода обращения Земли»; ибо тот, кто не знает, что Утренняя звезда есть Вечерняя звезда, может счесть одно предложение истинным, а другое — ложным; но, несмотря на это, значение обоих предложений должно быть одним и тем же, так как слова «Вечерняя звезда» и «Утренняя звезда» взаимозаменимы как обладающие одним и тем же значением, то есть являющиеся собственными именами одного и того же небесного тела. Надо различать смысл и значение. Хотя «2^4» и «$4 \cdot 4$» имеют одинаковое значение, то есть являются собственными именами одного и того же числа, они имеют неодинаковый смысл; поэтому же, хотя «$2^4 = 4^2$' и «$4 \cdot 4 = 4^2$' имеют одинаковое значение, смысл их не одинаков; в данном случае это означает: они содержат неодинаковые мысли*.

Стало быть, с тем же правом, по которому мы пишем

$$«2^4 = 4 \cdot 4»,$$

мы можем написать и

$$«(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)»,$$

и

$$«(2^2 = 4) = (2 > 1)».$$

Далее, могут задать вопрос, ради какой же цели в сферу того, что позволяет образовывать выражения для функций, были включены знаки =, >, <. Кажется, взгляд, что арифметика есть далеко продвинувшаяся логика, что строгое обоснование законов арифметики сводится к законам чисто логическим и только к ним, завоевывает все больше сторонников. Я тоже придерживаюсь данного мнения и, основываясь на нем, выдвигаю требование расширения языка арифметических знаков до некоторого логического языка. Как это происходит в нашем случае, я теперь и покажу[8].

Мы видели, что значение нашей функции $x^2 = 1$ неизменно является одним из двух значений истинности. Если теперь для определенного аргумента, например -1, значением этой функции является истина, то это мы можем выразить, сказав: «число -1 имеет то свойство, что его квадрат есть 1', или короче: «-1 есть некоторый корень квадратный из 1», или «-1 подпадает под понятие корня квадратного из 1». Если значение функции $x^2 = 1$ для какого-либо аргумента, например 2, есть ложь, то это мы можем выразить, сказав: «2 не есть корень квадратный из 1» или «2 не подпадает под понятие корня квадратного из 1». Отсюда видно, сколь тесно связано то, что в логике называется понятием, с тем, что мы называем функцией.

---

* Я не обманываюсь насчет того, что эти словесные обороты не покажутся поначалу произвольными и искусственными и что не потребуется их более подробное обоснование. Ср. мою статью о смысле и значении в Zeitschrift für Philosophie und phil[osophische] Kritik, которая вскоре выйдет из печати[7].

Да, мы можем прямо сказать: понятие есть функция, значение которой есть всегда какое-то истинностное значение. Значением функции

$$(x+1)^2 = 2\ (x+1)$$

тоже всегда является некоторое истинностное значение. Мы получаем истину, например, для аргумента -1, и это мы можем выразить еще и так: -1 есть число, которое на 1 меньше, чем число, квадрат которого равен результату его умножения на два. Этим выражено подпадение числа -1 под некоторое понятие. Теперь две функции

$$x^2 = 1 \quad \text{и} \quad (x+1)^2 = 2\ (x+1)$$

имеют для одного и того же аргумента всегда одно и то же значение, а именно, для аргументов -1 и $+1$ это истина, а для всех остальных аргументов — ложь. Согласно установленному ранее, мы будем говорить, что эти функции имеют одинаковый пробег значений, и с помощью знаков выразим это так:

$$\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \dot{\alpha}([\alpha+1]^2 = 2\ [\alpha+1]).$$

В логике это называют равенством объемов понятий. Поэтому мы можем охарактеризовать объем понятия как пробег значений функции, значение которой для любого аргумента есть истинностное значение.

Мы не станем задерживаться на равенствах и неравенствах. Языковая форма равенств — это утвердительно-повествовательное предложение (Behauptungssatz). Оно содержит мысль в качестве смысла — или же, по меньшей мере, претендует на это; и эта мысль вообще истинна либо ложна; это значит, что она обладает значением истинности, которое надлежит рассматривать в качестве значения предложения — подобно тому, как, например, число 4 есть значение выражения «2+2» или как Лондон есть значение выражения «столица Англии».

Утвердительно-повествовательные предложения, подобно уравнениям или аналитическим выражениям, обычно можно мыслить разложенными на две части, из которых одна замкнута в себе, а другая нуждается в восполнении, является ненасыщенной. Так, например, предложение

«Цезарь завоевал Галлию»

можно разложить на «Цезарь» и «завоевал Галлию». Вторая часть ненасыщенна, заключает в себе пустое место, и лишь заполнение его каким-либо собственным именем или же выражением, представляющим какое-либо собственное имя, являет нам завершенный смысл. В этом случае значение такого рода ненасыщенной части я тоже называю функцией. В нашем случае аргументом является Цезарь[9].

Мы видим, что здесь одновременно предпринято расширение понятия функции и в другом направлении; а именно, оно касается того, что может быть ее аргументами. В качестве таковых допускаются не одни только числа, а вообще предметы, причем к предметам я должен, конечно, причислить и человеческие личности. Возможными значениями функций оказываются также введенные ранее истинностные значения. Но мы должны идти дальше и без всяких ограничений допустить предметы в качестве функциональных значений. Чтобы все это пояснить на примере, будем отталкиваться, скажем, от выражения

«столица Германской империи».

Оно, очевидно, представляет собой собственное имя и означает некий предмет. Разложим его на части

«столица чего-то»

и «Германская империя», причем форму родительного падежа — генетива я отношу к первой части, так как она не насыщена, тогда как другая часть является замкнутой в себе. В согласии со сказанным ранее я называю выражение

«столица какого-то *x*»

выражением некоторой функции — функциональным выражением. Взяв в качестве аргумента Германскую империю, мы в качестве значения функции получаем Берлин.

Когда мы подобным образом без каких-либо ограничений допускаем предметы в качестве аргументов и значений функций, сразу возникает вопрос, что же мы называем предметом. Дефиницию школьного образца я считаю здесь невозможной, так как тут мы имеем дело с тем, что в силу своей простоты не допускает логического анализа. Возможно лишь указать, что имеется в виду. А здесь можно только кратко сказать: предметом является все то, что не есть функция[10] и, стало быть, выражение, которое его означает, не предполагает никаких пустых мест.

Утвердительно-повествовательное предложение не содержит пустых мест, и потому на его значение надлежит смотреть как на предмет. Но это значение есть истинностное значение. Стало быть, оба истинностных значения суть предметы.

Ранее мы установили, что равенство бывает между пробегами значений, например:

$$«\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \dot{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])».$$

Мы можем это равенство разложить на части: «$\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$» и «$(\quad) = \dot{\alpha}(\alpha \cdot [\alpha - 4])$».

Последняя часть нуждается в восполнении, так как она предполагает, что слева от знака равенства имеется пустое место. Первая часть — «$\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$» полностью замкнута в себе и, стало быть, означает какой-то предмет. Пробеги значений суть предметы, тогда как сами функции таковыми не являются; $\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1)$ мы тоже назвали пробегом значений, но мы могли охарактеризовать его и как объем понятия корень квадратный из 1. Стало быть, объемы понятий суть предметы, хотя сами понятия таковыми не являются.

После того как мы описанным образом расширили сферу того, что может выступать в качестве аргумента, мы должны более точно установить значения привычных знаков. Пока под предметами понимались только целые числа, изучаемые в арифметике, под буквами *a* и *b* в формуле «$a + b$» подразумевались только целые числа и знак плюс нуждался в определении только как знак, стоящий между целыми числами. Любое расширение сферы того, что подразумевается под «*a*» и «*b*», принуждает к некоторому новому определению знака плюс. Заповедью научной строгости является: принимать меры к тому, чтобы никогда ни одно выражение не оставалось без значения, чтобы никогда нельзя было, не замечая этого, оперировать с пустыми знаками, полагая, что мы имеем дело с предметами. В прошлом расходящиеся бесконечные ряды доставили нам горький опыт. Поэтому нужно установить положения, из которых вытекало бы, к примеру, чтó означает

$$«\odot + 1»,$$

когда «$\odot$» означает Солнце. Как устанавливать эти положения, в общем, безразлично; важно лишь, чтобы они были установлены, чтобы «$a + b$» всегда получало какое-нибудь значение — какие бы знаки, обозначающие вполне определенные предметы, ни подставлялись вместо «*a*» и «*b*». Для понятий это приводит к требованию, чтобы для каждого аргумента они имели в качестве значения некоторое значение истинности, чтобы для каждого предмета было определено, подпадает ли он под данное понятие или нет; другими словами: для понятий выдвигается требование их четкой отграниченности, без выполнения которого невозможно установление относящихся к ним логических законов. Для любого аргумента x, для которого выражение «$x + 1$» не имело бы значения, не имела бы значения и функция $x + 1 = 10$, поэтому не имела бы она и истинностного значения, так что понятие

то, что, будучи увеличенным на 1, дает 10

оказалось бы не имеющим четких границ. Итак, требование четкой отграниченности понятий влечет за собой для функций как таковых требование: они должны для каждого аргумента иметь какое-либо значение.

До сих пор истинностные значения рассматривались нами только как значения функций, а не как аргументы. Но согласно сказанному выше, любая функция должна иметь некоторое значение, когда в качестве ее аргумента берется какое-либо значение истинности; однако решение, которое ведет к этой цели, уже в случае обычных знаков по большей части предполагает: лишь бы было определение (Festsetzung), и если оно есть, не очень обращают внимание на то, чтó же определяется. Теперь можно рассмотреть некоторые функции, которые для нас важны именно тогда, когда их аргументом является истинностное значение.

Итак, в качестве такой функции я ввожу

$$—\, x,$$

устанавливая, что значением этой функции должна быть истина, когда в качестве аргумента берется истина, во всех же остальных случаях ее значение есть ложь — стало быть и тогда, когда аргумент есть ложь, и тогда, когда он вообще не является значением истинности. В соответствии с этим, например,

$$—\, 1 + 3 = 4$$

есть истина, тогда как

$$—\, 1 + 3 = 5$$

есть ложь, так же как

$$—\, 4.$$

Значение этой функции, стало быть, совпадает с ее аргументом, когда последний есть истинностное значение. Горизонтальную черту в данном функциональном выражении я раньше[11] называл штрихом содержания — название, которое теперь я не считаю подходящим. Я буду теперь называть ее просто горизонталью.

Когда выписывают уравнение или неравенство, например $5 > 4$, то тем самым обычно заодно стремятся выразить некое суждение; в нашем случае это означает утверждение того, что 5 больше, чем 4. Согласно изложенным мною взглядам, в записях «$5 > 4$» или «$1 + 3 = 5$» мы имеем дело только с выражениями, обозначающими истинностные значения, и эти выражения не предполагают, будто нечто утверждается. Это отделение акта суждения от того, о чем выносят суждение, кажется неизбежным, потому что в противном случае нельзя выразить одно лишь допущение, одно лишь полагание подпадения под понятие, не высказывая тут же суждения о его осуществлении. Поэтому, чтобы что-то утверждать, мы нуждаемся в особом знаке. Я использую для этого вертикальную черту, помещаемую на левом конце горизонтали, так что когда мы пишем, например,

$$«\vdash 2 + 3 = 5»,$$

мы утверждаем, что $2 + 3$ равно 5. Здесь, таким образом, выписано не просто некое значение истинности, как это имеет место в случае

$$«2 + 3 = 5»,$$

но в то же время говорится и о том, что это — истина*.

Следующей простой функцией можно считать функцию, значение которой как раз для тех аргументов есть ложь, для которых $-\!\!-\,x$ есть истина, и которая, наоборот, принимает значение истина для тех аргументов, для которых значение функции $-\!\!-\,x$ есть ложь. Я обозначаю ее так:

$$-\!\!\top\!\!-\,x,$$

где вертикальную черточку я называю штрихом отрицания. Я понимаю эту функцию как функцию, аргументом которой является $-\!\!-\,x$:

$$(-\!\!\top\!\!-\,x) = (-\!\!\top\!\!-\,[-\!\!-\,x]),$$

мысля при этом оба горизонтальных штриха слившимися. Имеет силу также равенство:

$$(-\!\!-\,[-\!\!\top\!\!-\,x]) = (-\!\!\top\!\!-\,x),$$

так как значение функции $-\!\!\top\!\!-\,x$ всегда есть некое истинностное значение. Стало быть, в записи «$-\!\!\top\!\!-\,x$» я рассматриваю обе части горизонтального штриха, расположенные справа и слева от штриха отрицания, как горизонталь в ранее поясненном специальном смысле этого слова. В соответствии с этим, например,

$$«-\!\!\top\!\!-\,2^2 = 5»$$

означает истину, и мы можем присоединить к нему штрих суждения:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\,2^2 = 5;$$

этим мы утверждаем, что $2^2 = 5$ не есть истина, или что 2^2 не есть 5. Но

$$-\!\!\top\!\!-\,2$$

и есть истина, так как $-\!\!-\,2$ есть ложь:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\,2;$$

это значит, что 2 не есть истина.

То, как я передаю всеобщность, лучше всего показать на примере. Пусть надо выразить, что каждый предмет равен самому себе. Рассмотрим функцию

$$x = x,$$

в которой x указывает на ее аргумент. Теперь нам надо сказать, что значение этой функции всегда есть истина, как бы мы ни выбирали ее аргумент. Я буду понимать под выражением

$$«-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,f(\mathfrak{a})»$$

истину, если функция $f(x)$ всегда, каким бы ни был ее аргумент, принимает значение истина; во всех других случаях

$$«-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,f(\mathfrak{a})»$$

означает ложь. Для нашей функции $x = x$ как раз имеет место первый случай. Стало быть,

$$-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

есть истина; и это мы записываем так:

---

* Штрих суждения нельзя использовать для образования функционального выражения, так как он, будучи соединен с другими знаками, не служит для обозначения какого-либо предмета. Запись «$\vdash 2 + 3 = 5$» не обозначает чего-либо, она утверждает нечто.

15 - 1742

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Горизонтальный штрих справа и слева от лунки рассматривается как горизонталь в нашем смысле. Вместо «$\mathfrak{a}$» можно было бы выбрать любую другую готическую букву, исключая те из них, которые — подобно f и $\mathfrak{F}$ — должны служить функциональными буквами.

Данный способ обозначения предоставляет возможность отрицания всеобщности, как, например,

$$-\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1.$$

Это значит, что $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ есть ложь, поскольку значение функции $x^2 = 1$ не для любого аргумента есть истина. Так, например, для аргумента 2 мы получаем $2^2 = 1$; это ложь. А если $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ есть ложь, то $-\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$ есть истина — в соответствии с тем, что выше было установлено относительно штриха отрицания. Итак, мы имеем

$$\vdash\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1;$$

это значит: «не всякий предмет есть корень квадратный из 1», или «существуют предметы, не являющиеся квадратными корнями из 1».

А можно ли выразить также то, что существуют квадратные корни из 1? Конечно! Для этого надо всего-навсего вместо функции $x^2 = 1$ взять функцию

$$-\!\neg\!-\ x^2 = 1.$$

Из «$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ -\!\neg\!-\mathfrak{a}^2 = 1$» в результате склеивания горизонталей возникает

$$«-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1».$$

Это означает ложь, так как не для всякого аргумента значение функции

$$-\!\!-\ x^2 = 1$$

есть истина. Например,

$$-\!\neg\!-\ 1^2 = 1$$

есть ложь, так как $1^2 = 1$ есть истина. Поскольку же

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

есть ложь,

$$-\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1$$

есть истина:

$$\vdash\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\!-\ \mathfrak{a}^2 = 1;$$

это значит: «не для всякого аргумента значение функции

$$-\!\neg\!-\ x^2 = 1$$

есть истина», или «не для всякого аргумента значение функции $x^2 = 1$ есть ложь», или «существует по крайней мере один корень квадратный из 1».

Приведем еще несколько примеров, применяя наши обозначения и словесные формулировки:

$$\vdash\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\!-\ \mathfrak{a} \geq 0$$

— существует по крайней мере одно положительное число;

$$\vdash\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\!-\ \mathfrak{a} < 0$$

— существует по крайней мере одно отрицательное число;

$$\vdash\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\!-\ \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0$$

— существует по крайней мере один корень уравнения

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Отсюда видно, как можно выражать важные предложения существования. Имея в виду, что функциональная буква f указывает понятие неопределенным образом, мы получаем форму

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; f(\mathfrak{a}),$$

которая — если отвлечься от штриха суждения — охватывает последние примеры. Выражения

$$«\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a}^2 = 1», \quad «\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a} \geq 0», \quad «\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a} < 0»,$$
$$«\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0»$$

аналогичным образом получаются из этой формы — подобно тому, как, например, из x^2 получаются «1^2», «2^2», «3^2». И, аналогично тому, как x^2 понимается как функция, аргумент которой указан с помощью «x», так и

$$«\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\; f(\mathfrak{a})»$$

я понимаю как выражение функции, аргумент которой указан посредством «f». Такого рода функция, как очевидно, коренным образом отличается от тех, которые мы рассматривали до сих пор; ибо ее аргументом может выступать только функция. Так же как функции коренным образом отличаются от предметов, так и функции, аргументами которых являются — и должны быть — функции, коренным образом отличаются от функций, аргументами которых являются предметы и только предметы. Последние я называю функциями первой ступени, а первые — функциями второй ступени. Таким же образом я различаю понятия первой и второй ступеней*. С функциями второй ступени в анализе, собственно говоря, мы давно уже имеем дело; таковы, например, определенные интегралы, поскольку в них подинтегральная функция выступает в качестве аргумента.

Надо еще сказать несколько слов о функциях с двумя аргументами. Мы получали выражение функции, разлагая сложный знак предмета на насыщенную и на ненасыщенную части. Мы разлагали, например, знак

$$«3 > 2»$$

— этот знак истинности — на «3» и «$x > 2$». Ненасыщенную часть «$x > 2$» таким же образом мы можем разложить на «2» и

$$«x > y»,$$

где теперь «y» помечает пустое место, которое до этого было восполнено посредством «2»; $x > y$ есть функция с двумя аргументами, один из которых указан посредством «x», а другой — посредством «y», и $3 > 2$ оказывается значением этой функции для аргументов 3 и 2. Здесь мы имеем дело с функцией, значение которой неизменно является истинностным значением. Такого рода функции с одним аргументом мы назвали понятиями; а такие же функции с двумя аргументами мы будем называть отношениями. Отношением является, например, и

$$x^2 + y^2 = 9,$$

и

$$x^2 + y^2 > 9,$$

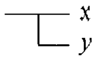
* Ср. мои «Основания арифметики» (Бреславль, 1884), конец § 53, где я вместо «второй ступени» говорил — «второго порядка». Онтологическое доказательство бытия Бога подвержено той ошибке, что существование трактуется в нем как понятие первой ступени[12].

тогда как функция

$$x^2 + y^2$$

имеет своими значениями числа, значит, ее мы не будем называть отношением.

Приведем теперь функцию, непривычную для арифметики. Пусть значение функции



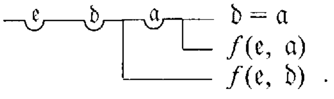
будет ложью, когда в качестве y-аргумента избирается истина, а в качестве x-аргумента берется предмет, отличный от истины; во всех прочих случаях пусть значение этой функции будет истина. На нижний горизонтальный штрих и на обе части верхнего штриха, разделяемые вертикальным штрихом, следует смотреть как на горизонтали. В соответствии с этим аргументами нашей функции следует считать всегда —— x и —— y, то есть истинностные значения.

Среди функций с одним аргументом мы различали функции первой и второй ступеней. Здесь возможно бóльшее разнообразие. Функция с двумя аргументами может быть равноступенчатой или неравноступенчатой в зависимости оттого, одной и той же ступени ее аргументы или нет. Функции, которые мы до сих пор рассматривали, были одноступенчатыми. Неравноступенчатой функцией является, например, частная производная, когда в качестве аргументов берутся подлежащая дифференцированию функция и ее аргумент, по которому происходит дифференцирование, или определенный интеграл, если в качестве аргументов берутся интегрируемая функция и верхний предел интегрирования. Равноступенчатые функции в свою очередь можно подразделить на такие же функции первой и второй ступеней. Подобной функцией второй ступени является, например,

$$F(f[1]),$$

где «F» и «f» указывают на ее аргументы.

Среди функций второй ступени с одним аргументом, надо различать функции, аргумент которых оказывается функцией с одним аргументом, и функции, аргумент которых оказывается функцией с двумя аргументами; ибо функции с одним аргументом так сильно отличаются от функций с двумя аргументами, что там, где одна из них не может выступать в качестве аргумента, другая как раз может. Некоторые функции второй ступени с одним аргументом требуют, как таковые, функцию с одним аргументом, другие же — функцию с двумя аргументами, и два эти класса следует четко отличать друг от друга. Примером функции второй ступени с одним аргументом, которая, как таковая, требует функции с двумя аргументами, служит функция



Буква f при этом указывает на аргумент, а запятая, разделяющая два места в скобках, которые следуют за «f», показывает, что f представляет функцию с двумя аргументами[13].

В случае функций с двумя аргументами многообразие случаев еще больше.

Если мы с позиций достигнутого обернемся назад и окинем взглядом развитие арифметики, то мы увидим картину восхождения со ступени на ступень. Сначала вычисления относились к отдельным числам: 1, 3 и т.д.; теоремы такого рода это

$$2 + 3 = 5, \quad 2 \cdot 3 = 6.$$

Затем перешли к более общим законам, справедливым для всех чисел. Этому соответствует переход к буквенным обозначениям и буквенному исчислению. Примером такого рода теоремы служит

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Тем самым пришли к рассмотрению отдельных функций, еще не употребляя этого слова в математическом смысле и не осознавая его значения. Следующей, более высокой ступенью явилось познание общих законов, касающихся функций, и вместе с этим чеканная формулировка словесного новообразования «функция». В обозначениях этому соответствует введение таких букв, как f, F, служащих для функций неопределенными указателями. Примером теоремы этого рода служит

$$\frac{df(x)\cdot F(x)}{dx} = F(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{dF(x)}{dx}.$$

Наряду с этим появляются и отдельные функции второй ступени, однако без осознания особенностей того, почему мы дали им такое название. Этот наш шаг означает дальнейшее продвижение вперед. Можно было бы думать, что так можно идти и дальше. Вероятно, однако, что уже этот последний шаг не столь богат следствиями, как предыдущие, поскольку, как будет показано в другой нашей работе[14], дальнейшее изучение функций приводит к выводу, что вместо функций второй ступени можно рассматривать функции первой ступени. Но это не устраняет различия между функциями первой и второй ступеней, так как оно — не результат нашего произвола, а глубоко заложено в природе вещей.

Вместо функций с двумя аргументами можно рассматривать и функции одного-единственного, но сложного аргумента; при этом, однако, различие между функциями с одним аргументом и функциями с двумя аргументами остается в полной силе.

О СМЫСЛЕ И ЗНАЧЕНИИ

Равенство* требует глубокого размышления над вопросами, которые с ним связаны и на которые не так легко найти ответ[1]. Является ли оно отношением? Отношением между предметами, или между именами, или же знаками предметов? Последнее я принял в моей знаковой системе (Begriffsschrift). Основания, говорящие, кажется, в пользу такого решения вопроса, сводятся к следующему: $a = a$ и $a = b$ являются, очевидно, предложениями, имеющими различную познавательную ценность: $a = a$ имеет силу *a priori* и называется, по Канту, аналитическим, тогда как предложения формы $a = b$ часто содержат очень ценное расширение нашего знания и *a priori* не всегда могут быть обоснованы. Открытие того, что каждое утро восходит то же самое, а не новое Солнце, было, пожалуй, самым значительным в астрономии. Еще и сейчас установление того, что вновь открытый астероид или комета совпадает с тем, что было известно ранее, не всегда является чем-то само собою разумеющимся. Но если бы мы захотели видеть в равенстве отношение между тем, что означают имена «a» и «b», мы оказались бы не в состоянии провести различие между $a = b$ и $a = a$ в случае, когда $a = b$ истинно. Этим было бы выражено отношение некоторой вещи к себе самой, причем такое отношение, в котором каждая вещь находится к себе, и в котором ни одна вещь не находится к другой вещи. То, что выражают, когда говорят $a = b$, состоит, кажется, в том, что знаки или имена «a» и «b» означают то же самое, и поэтому речь как будто идет именно об этих знаках; как будто бы утверждается отношение между ними. Однако это отношение существует между именами или знаками лишь постольку, поскольку они нечто называют или обозначают. Оно опосредовано связью каждого из двух знаков с одним и тем же обозначаемым. Но она произвольна. Никому нельзя запретить принять любой предмет или производящий что-либо процесс в качестве знака чего угодно. Но тогда предложение $a = b$ стало бы касаться не самого существа дела, а только нашего способа обозначения; мы не выразили бы этим равенством никакого подлинного знания. Однако во многих случаях мы именно к знанию и стремимся. Если знак «a» отличен от знака «b» только как предмет (в данном случае — по своей форме), но не как знак — это значит: не в силу того способа, каким он обозначает нечто, — то познавательная ценность $a = a$ оказалась бы по существу равной познавательной ценности $a = b$, в случае если $a = b$ истинно. Различие может иметь место лишь тогда, когда различие знаков соответствует различию в том, каким способом задано обозначаемое. Пусть a, b, c — прямые, соединяющие вершины некоторого треугольника с серединами противолежащих сторон. Точка пересечения a и b совпадает тогда с точкой пересечения b и c. Мы имеем, следовательно, различные обозначения для одной и той же точки, и эти имена («точка пересечения a и b»,

---

* Я употребляю это слово в смысле тождества и понимаю «$a = b$» в смысле «a есть то же самое, что и b» или «a и b совпадают».

«точка пересечения b и c») указывают вместе с тем на способ, каким даны нам эти точки; поэтому в данном предложении содержится подлинное знание.

Напрашивается мысль связать с каждым знаком (именем, словесным оборотом, письменным знаком), помимо обозначаемого — его мы будем называть значением знака, — также и то, что я назвал бы смыслом знака и в чем выражается конкретный способ задания обозначаемого. Согласно такому пониманию в нашем примере окажется, что, хотя значение выражений «точка пересечения a и b» и «точка пересечения b и c» одно и то же, смысл их различен. Равным образом, выражения «Вечерняя звезда» и «Утренняя звезда» имеют одно и то же значение, но отнюдь не одинаковый смысл.

Из сказанного ясно, что под «знаком»и «именем» я понимаю любое обозначение, представляющее собою собственное имя, чьим значением, стало быть, является определенный предмет (в самом широком смысле этого слова), но не понятие и не отношение, на которых я подробнее остановлюсь в другой статье[2]. Обозначение единичного предмета может также состоять из нескольких слов или других знаков. Пусть каждое такое обозначение для краткости носит название собственного имени.

Смысл собственного имени понимает каждый, достаточно знающий язык или совокупность обозначений, к которой принадлежит имя*; тем самым, однако, значение, если оно имеется, освещено все же только с одной стороны. Всестороннее познание данного значения состояло бы в том, что мы могли бы для каждого заданного смысла указать, относится ли он к этому значению. Этого мы никогда не достигаем.

Связь, существующая, как правило, между знаком, его смыслом и его значением, такова, что знаку соответствует определенный смысл, а этому последнему — определенное значение, тогда как одному значению (одному предмету) соответствует не единственный знак. Один и тот же смысл имеет в различных языках — и даже в одном и том же языке — различные выражения. Хотя это отношение и является правилом, встречаются, конечно, и исключения. Разумеется, если совокупность знаков носит совершенный характер, то каждому знаку должен соответствовать вполне определенный смысл; однако в национальных языках это требование очень часто нарушается, и надо быть довольным уже тогда, когда одно и то же слово, употребляемое в одном и том же контексте, всегда имеет один и тот же смысл. Быть может, следует признать, что всякое грамматически правильно построенное выражение, выполняющее роль собственного имени, всегда имеет смысл. Однако это не значит, что смыслу всегда соответствует некоторое значение. Слова «самое удаленное от Земли небесное тело» имеют некий смысл; однако весьма сомнительно, чтобы они имели значение. Выражение «самый медленно сходящийся ряд» имеет определенный смысл; однако доказано, что оно не имеет значения, так как для всякого сходящегося ряда можно найти другой ряд, который медленнее, но все-таки сходится. Отсюда следует, что если мы понимаем смысл, это еще не значит, что мы с уверенностью располагаем и некоторым значением[4].

Когда употребляют слова обычным образом, тогда то, о чем хотят сказать с помощью этих слов, составляет их значение. Однако бывает и так, что приходится

---

* В случае подлинно собственных имен, таких, как «Аристотель», мнения о смысле могут, конечно, разойтись. Например, можно было бы в качестве такового принять: 'ученик Платона и учитель Александра'. Кто поступит так, тот свяжет с предложением «Аристотель был родом из Стагиры» иной смысл, чем тот, кто в качестве смысла этого имени принял бы: 'происходящий из Стагиры учитель Александра Великого'. Пока значение остается одним и тем же, эти колебания в смысле допустимы, хотя они и должны быть устранены при построении доказывающей науки и не должны встречаться в совершенном языке[3].

говорить нечто о самих словах или их смысле. Это происходит, например, тогда, когда приводят слова другого человека в прямой речи. Произносимые нами слова означают тогда прежде всего слова другого лица, и лишь последние имеют обычное значение. Тогда мы имеем знаки для знаков. В таком случае в письменной речи словесные образования заключают в кавычки. Поэтому словесное образование, стоящее в кавычках, нельзя рассматривать в обычном значении.

Если мы желаем сказать нечто о смысле некоторого выражения '*A*', то мы можем сделать это просто с помощью оборота «смысл выражения '*A*'». В случае, например, косвенной речи говорят о смысле речи другого человека. Отсюда ясно, что и при этом способе речи слова не имеют обычного значения, а значат то, что обычно является их смыслом. Можно сказать короче: слова в косвенной речи употребляются *косвенно*, или имеют *косвенное* значение. Соответственно этому мы отличаем *обычное* значение слова от *косвенного* и его *обычный* смысл от его *косвенного* смысла. Итак, косвенное значение слова — это его обычный смысл. Такие исключения надо постоянно иметь в виду, если мы хотим правильно понять тот способ, каким связаны знак, смысл и значение в каждом отдельном случае[5].

От значения и смысла знака следует отличать связанное с ним представление. Если значение знака есть чувственно воспринимаемый предмет, то мое представление о нем есть внутренний образ, возникший из воспоминаний о чувственных впечатлениях, которые я имел, и о действиях, как внутренних, так и внешних, которые я совершал*. Он часто проникнут чувствами; ясность отдельных его частей различна и постоянно меняется. Одно и то же представление, даже у одного и того же человека, не всегда связано с одним и тем же смыслом. Представление субъективно: представление одного человека не есть представление другого. Отсюда само собой получается, что представления, связанные с одним и тем же смыслом, имеют многообразные отличия друг от друга. Художник, кавалерист, зоолог, вероятно, свяжут с именем «Буцефал»[6] очень разные представления. Представление существенно отличается от смысла знака тем, что смысл знака может быть общим достоянием многих людей и, стало быть, не есть часть или модус отдельной души; ибо трудно, пожалуй, усомниться в том, что человечество имеет драгоценный фонд мыслей, который оно передает от одного поколения к другому**.

Соответственно этому если никому не придет в голову сомневаться в том, что можно говорить просто о данном смысле, то в случае представления надо добавить в целях уточнения, кому оно принадлежит и к какому времени относится. Можно даже сказать: подобно тому, как с одним и тем же словом один человек связывает одно, а другой — другое представление, точно так же один человек может соединять с ним один, а другой человек — другой смысл. Но существует и различие, касающееся, однако, только способа этого соединения. Это не мешает тому, что оба могут иметь в виду один и тот же смысл; но одного и того же представления у них быть не может. *Si duo idem faciunt, non est idem.* Когда два человека представляют одно и то же, у каждого из них будет все же свое собственное представление. Хотя

---

* Мы можем рассматривать восприятия подобно представлениям, считая, что восприятия — это те же представления, с той лишь разницей, что вместо следов, оставленных в уме чувственными впечатлениями и действиями, выступают сами эти впечатления и действия. Это различие несущественно для наших целей, тем более что почти всегда образ, возникающий в восприятии, получает свою законченность благодаря присоединению к ощущениям и действиям также и воспоминаний об ощущениях и действиях. Однако в случае восприятия можно иметь в виду некоторый предмет, поскольку он является чувственно воспринимаемым и пространственно протяженным.

** Поэтому нецелесообразно обозначать смысл словом «представление», ибо он принципиально отличается от представления.

иногда и удается уловить различие между представлениями, даже ощущениями отдельных людей, более точное их сравнение, однако, оказывается невозможным, так как представления эти нельзя соединить в одном сознании.

Значение собственного имени — это сам предмет, обозначенный этим именем; представление, которое при этом у нас возникает, вполне субъективно; между значением и представлением можно поместить смысл, который, в отличие от представления, хотя и не является субъективным, все же не есть сам предмет. Быть может, следующее сравнение поможет сделать более ясными эти отношения. Предположим, некто смотрит на Луну в телескоп. Саму Луну можно сравнить со значением; она является предметом наблюдения, которое опосредовано реальным образом, возникающим внутри телескопа благодаря преломлению лучей в объективе, а также образом, возникающим на сетчатке глаз наблюдателя. Первый я сравниваю со смыслом, второй с представлением или восприятием. Хотя образ в телескопе носит только односторонний характер — зависит от места наблюдения, все же он объективен, поскольку может служить многим наблюдателям. Во всяком случае можно устроить так, что им смогут воспользоваться одновременно многие. Что же касается образа на сетчатке, то каждый имел бы свой собственный образ. В силу различий в устройстве глаз отдельных людей даже геометрическая конгруэнтность этих образов вряд ли достижима, а подлинное совпадение — исключено. Продолжая это сравнение, можно допустить, что образ на сетчатке глаз наблюдателя *А* может быть сделан видимым для наблюдателя *В* или сам *А* может видеть в зеркале образ на сетчатке своего глаза. Отсюда получается как будто, что хотя представление и может быть отнесено к предметам, однако в качестве такового оно является для наблюдателя совсем не тем, чем оно является непосредственно для представляющего. Однако мы не будем продолжать далее это рассуждение, ибо оно увело бы нас в сторону[7].

Мы можем выделить теперь три ступени различия между словами, выражениями и целыми предложениями. Или различие касается самое большее представлений, или оно касается смысла, но не значения, или, наконец, также и значения. В отношении первой ступени надлежит заметить, что — в силу неустойчивого характера связи представлений со словами — для одного человека может существовать различие там, где другой его не находит. Собственно говоря, отличие перевода от оригинала не должно выходить за пределы первой ступени. К числу различий, которые здесь еще возможны, относятся нюансы в окраске и оттенках, которые стараются придать смыслу поэзия [и] красноречие. Все эти нюансы в окраске и оттенки в освещении не объективны — каждый из слушателей и читателей должен по намекам поэта или оратора воссоздавать их для себя. Если бы процесс представления не носил родственного характера у всех людей, то искусство, разумеется, было бы невозможно; но никогда нельзя точно установить, в какой мере представления, вызываемые в людях поэзией, отвечают замыслам поэта.

В дальнейшем мы не будем больше говорить о представлениях и восприятиях; о них мы упомянули здесь только для того, чтобы предупредить смешение представления, вызываемого словом у слушателя, со смыслом слова или его значением.

В целях краткости и точности выражения установим следующие обороты речи.

Собственное имя (слово, знак, конфигурация знаков, выражение) выражает свой смысл, означает или обозначает свое значение. Со знаком связан выражаемый им смысл и обозначаемое им значение.

Со стороны идеалистов или скептиков наши рассуждения, вероятно, уже давно встретили такого рода возражение: «Ты говоришь здесь без дальнейших околичностей о Луне как некотором предмете; но откуда ты знаешь, что имя 'Луна' вообще имеет значение, откуда ты знаешь, что вообще что-либо имеет значение?» На это я отвечаю:

наша задача состоит не в том, чтобы сказать нечто о нашем представлении о Луне; и мы не довольствуемся смыслом, когда говорим 'Луна', — мы предполагаем значение. Допускать, что в предложении «Луна меньше Земли' речь идет о чьем-либо представлении о Луне — значит совершенно искажать смысл. Если бы говорящий хотел это выразить, то он применил бы оборот «мое представление о Луне». Мы, конечно, можем заблуждаться в нашем предположении, и такие ошибки встречаются. Но вопрос о том, не ошибаемся ли мы всегда в этом предположении, может быть оставлен здесь без ответа; достаточно указать на намерение, которое руководило нами во время речи или мышления, чтобы иметь право говорить о значении знака, хотя и с оговоркой: если таковое имеется.

До сих пор мы рассматривали смысл и значение только таких выражений, слов, знаков, которые нами были названы *собственными именами*. Поставим теперь вопрос о смысле и значении целого утвердительно-повествовательного предложения (Behauptungssatz). Такое предложение содержит некоторую мысль*. Как следует рассматривать эту мысль — как смысл предложения или как его значение? Предположим, предложение имеет значение. Если мы заменим в нем какое-либо слово другим словом, имеющим то же значение, но другой смысл, то это не должно иметь никакого влияния на значение предложения. Однако мы видим, что мысль в этом случае меняется; так, например, мысль, содержащаяся в предложении «Утренняя звезда есть тело, освещаемое Солнцем», отлична от мысли, имеющейся в предложении «Вечерняя звезда есть тело, освещаемое Солнцем». Тот, кто не знает, что Вечерняя звезда есть Утренняя звезда, мог бы считать одну мысль истинной, а другую ложной. Стало быть, мысль не может быть значением предложения, напротив, мы должны считать ее смыслом предложения. Но как же обстоит дело со значением? Имеем ли мы право вообще ставить о нем вопрос? Быть может, предложение, взятое как целое, имеет только смысл, но не имеет значения? Во всяком случае можно было бы ожидать, что такие предложения встречаются, так же как существуют такие части предложения, которые имеют, пожалуй, смысл, но не имеют значения. И предложения, содержащие собственные имена, не имеющие значения, будут именно такого рода. Предложение «Одиссей был высажен на берег Итаки крепко спящим», очевидно, имеет смысл. Но так как весьма сомнительно, чтобы встречающееся в нем имя «Одиссей» имело значение, сомнительно также, чтобы и все предложение имело какое-то значение. Но одно несомненно: тот, кто всерьез считает это предложение истинным или ложным, будет также признавать за именем «Одиссей» некоторое значение, а не только один смысл; ибо предикат приписывается значению имени или отвергается относительно него. Тот, кто не признает значения, тот не может ни приписывать ему предиката, ни отвергать последний. В этом случае восходить к значению имени было бы излишне; можно довольствоваться смыслом, если не стремиться пойти дальше мысли. Если бы все дело состояло только в смысле предложения, в мысли, то незачем было бы беспокоиться о значении частей предложения; говоря о смысле предложения, можно ведь принимать во внимание только смысл его частей, а не их значения. Мысль остается той же, независимо от того, имеет ли имя «Одиссей» значение или нет. То, что мы стремимся выяснить значение части предложения, есть признак того, что мы вообще признаем и требуем значения также и для самого предложения. Мысль теряет для нас ценность, как только мы узнаём, что у какой-либо из ее частей отсутствует значение. Таким образом мы имеем, пожалуй, полное право не удовлетворяться смыслом предложения, но ставить также вопрос о его значении.

---

* Я понимаю под мыслью не субъективную деятельность мышления, но его объективное содержание, которое может быть общим достоянием многих.

Но почему же мы хотим, чтобы каждое собственное имя имело не только смысл, но и значение? Почему мысль не удовлетворяет нас? Потому и постольку, почему и поскольку для нас важно истинностное значение мысли. Так бывает не всегда. Например, когда мы воспринимаем эпическое произведение, нас очаровывает, кроме благозвучия языка, только смысл предложений и вызываемые ими представления и чувства. Если бы мы поставили вопрос об истине, мы потеряли бы эстетическое наслаждение и перешли к научному исследованию. Поэтому-то для нас совершенно безразлично, имеет ли значение, например, имя «Одиссей», пока мы воспринимаем поэму как произведение искусства*. Итак, стремление к истине — вот что всегда побуждает нас к переходу от смысла к значению.

Мы видели, что для предложения надо всегда доискиваться значения тогда, когда речь идет о значении составных частей; а это имеет место тогда, и только тогда, когда мы ставим вопрос о его истинностном значении.

Таким образом мы принуждены признать в качестве значения предложения его *истинностное значение*. Под истинностным значением — значением истинности предложения я понимаю то, что оно либо истинно, либо ложно. Других значений истинности не бывает. Для краткости я называю одно из этих значений — истиной, истинностью, а другое — ложью, ложностью. На каждое утвердительно-повествовательное предложение, относительно которого ставится вопрос о значении его слов, надо, таким образом, смотреть как на собственное имя, причем на такое, значение которого, если таковое существует, есть либо истина, либо ложь. Эти два предмета признаются — может быть только молчаливо — всяким, кто выносит суждение, кто считает хотя бы что-нибудь истинным; значит, они признаются даже скептиком. Считать значения истинности предметами — пока это может еще показаться произвольной выдумкой и даже пустой игрой в слова, из которой нельзя извлечь никаких глубоких следствий. Что я называю предметом — это более точно может быть рассмотрено только в связи с понятием и отношением. Это я сделаю в другой статье[8]. Но одно я хотел бы уже здесь подчеркнуть достаточно ясно: что в каждом суждении** — пусть это и кажется чем-то само собою разумеющимся — совершается переход от ступени мысли к ступени значения (ступени объективного)[9].

Можно попытаться рассматривать отношение мысли к истинности не как отношение смысла к значению, а как отношение субъекта к предикату. Можно же сказать: «Мысль, что 5 есть простое число, истинна»[10]. Однако если посмотреть повнимательнее, мы заметим, что этим сказано совершенно то же, что и просто в предложении «5 есть простое число»[11]. Утверждение истины заключено в обоих случаях в форме утвердительно-повествовательного предложения, и там, где последнее не имеет своей обычной силы, например, в устах актера на сцене, предложение «мысль, что 5 есть простое число, истинна» содержит только одну мысль, причем ту же самую мысль, что и сказанное прямо — «5 есть простое число». Отсюда можно заключить, что отношение мысли к истине все же не может быть сравниваемо с отношением субъекта к предикату. Ведь субъект и предикат (понимаемые в логическом смысле) являются частями мысли; в процессе познания они находятся на одной ступени. Посредством соединения субъекта и предиката всегда получают одну только мысль, и никогда не имеют перехода от смысла к его значению, от мысли к ее истинностному значению. Движение совершается на одной и той же ступени; перехода от одной ступени к следующей здесь нет. Значение истинности столь же мало может

*Было бы желательно иметь для знаков, которые имеют только смысл, особое выражение. Назовем их, например, образами; в этом случае слова актера на сцене были бы образами, да и актер сам был бы образом.

** Суждение является для меня не пустой оболочкой мысли, но признанием ее истинности.

быть частью мысли, как, например, Солнце, так как оно является не смыслом, но предметом.

Если наше предположение, что значение предложения есть его истинностное значение, верно, то последнее должно остаться без изменения, если заменить часть предложения выражением, имеющим то же значение, но другой смысл. Но так дело и обстоит. *Лейбниц* прямо говорит: «Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate»[12]. Что же еще, кроме значения истинности, можно найти такого, что, будучи присуще самым общим образом каждому предложению, относительно которого ставится вопрос о значении его составных частей, оставалось бы без изменения при замене указанного рода?

Далее. Если значение истинности предложения есть его значение, то, с одной стороны, все истинные предложения имеют одно и то же значение, а с другой стороны, одно и то же значение имеют и все ложные предложения. Отсюда видно, что в значении предложения всё единичное оказывается стертым. Стало быть, мы никогда не можем довольствоваться одним только значением предложения; однако и мысль сама по себе не составляет познания; таковым является мысль вместе со своим значением, то есть со своим истинностным значением. На процесс суждения можно смотреть как на переход от мысли к значению ее истинности. Это, разумеется, не дефиниция. Ведь процесс суждения является чем-то в высшей степени своеобразным и ни с чем не сравнимым. Можно даже сказать, что процесс суждения состоит в различении частей внутри значения истинности. Это различение совершается посредством возврата к мысли. Каждый смысл, относящийся к данному значению истинности, соответствует особому способу подобного разложения. Слово «часть» я употребил здесь, впрочем, необычным образом. Именно, я перенес отношение целого и части в предложении на его значение, назвав значение слов частью значения предложения, когда само слово является частью этого предложения, — оборот речи, являющийся, конечно, спорным, потому что применительно к значению целое и некоторая его часть не определяют остальной части и потому, что в отношении физических тел слово «часть» уже употребляется в другом смысле. Для нашей цели следовало бы найти особое выражение.

Продолжим проверку нашего предположения, согласно которому значение истинности предложения и есть его значение. Мы нашли, что истинностное значение предложения остается не затронутым, если мы заменим в нем некоторое выражение другим выражением с тем же значением; но мы не рассмотрели при этом тот случай, когда выражение, подлежащее замене, само является предложением. Если наш взгляд верен, то значение истинности предложения, содержащего другое предложение в качестве своей части, должно остаться без изменения, если мы заменим предложение, составляющее часть другого предложения, предложением с тем же истинностным значением. Исключения в этом случае можно ожидать тогда, когда все предложение в целом или предложение, являющееся его частью, представляет собою прямую или косвенную речь; это и понятно, ибо, как мы видели, значение слов в этом случае не является обычным. Предложение в прямой речи означает опять-таки некоторое предложение, а в косвенной речи — некую мысль.

Мы пришли, таким образом, к необходимости рассмотреть придаточные предложения[13]. Ведь они выступают как части сложноподчиненного предложения, которое с логической точки зрения тоже является предложением, а именно, независимым, главным предложением. Но тут перед нами возникает вопрос, справедливо ли относительно придаточных предложений то, что их значением тоже является значение истинности. Относительно косвенной речи мы ведь уже знаем, что дело там обстоит как раз наоборот. Специалисты по грамматике считают, что придаточные предложения заменяют члены [главного] предложения и в соответствии с этим делят их на называющие придаточные предложения — предложения-существительные (Nennsätze), определительные придаточные предложения, или придаточные-прилагательные (Beisätze), и обстоятельственные придаточные предложения, или предложения-наречия (Adverbsätze). На этом основании можно было бы предположить, что значением придаточного предложения является не значение истинности, но, соответственно, значение существительного (Nennwort), прилагательного (Beiwort) или наречия (Adverb), словом, какого-то члена предложения, имеющего в качестве смысла не мысль в целом, а лишь некоторую ее часть. Только более обстоятельное исследование может внести ясность в этот вопрос. При этом мы не будем строго следовать указаниям грамматики, а будем объединять то, что является логически однородным. Поищем прежде всего такие случаи, в которых смысл придаточного предложения, как мы только что предположили, не является самостоятельной мыслью.

К абстрактным называющим придаточным предложениям, вводимым с помощью слова «что», принадлежит и косвенная речь, относительно которой мы видели, что в ней слова имеют косвенное значение, которое совпадает с тем, что обычно является их смыслом. В этом случае, стало быть, придаточное предложение имеет значением мысль, а не значение истинности, смыслом же его является не мысль, а смысл слов «мысль, что...», — смысл, который есть только часть мысли всего сложноподчиненного предложения. Это бывает после «сказать», «слушать», «полагать», «быть убежденным», «заключать» и других подобных слов*. Иначе— причем довольно запутанно — обстоит дело со словами «узнавать», «знать», «воображать», что должно быть рассмотрено нами позже[14].

Что в рассматриваемых случаях значением придаточного предложения действительно является мысль, видно и из того, что для истинности целого безразлично, является ли эта мысль истинной или ложной. Сравните, например, два предложения: «Коперник думал, что орбиты планет являются кругами» и «Коперник думал, что видимое движение Солнца возникает в результате действительного движения Земли». Здесь можно заменить одно придаточное предложение другим без ущерба для истинности. Главное предложение вместе с придаточным имеет своим смыслом одну-единственную мысль, и истинность целого предложения не зависит от того, истинно или нет придаточное предложение. В таких случаях в придаточном предложении нельзя заменять некоторое выражение другим, имеющим то же обычное значение, а можно заменять только таким, которое имеет то же косвенное значение, то есть тот же обычный смысл. Если кто-либо заключил отсюда, что значением предложения не может быть его истинностное значение, «ибо тогда его можно было бы всюду заменять другим выражением с тем же значением истинности», то он доказал бы слишком много; с таким же успехом можно было бы утверждать, что значение слова «Утренняя звезда» — это не Венера, ибо не везде вместо «Утренняя звезда» можно сказать — «Венера». Действительный вывод, который следует из приведенных соображений, состоит в том, что значение истинности предложения *не всегда* является его значением, и что «Утренняя звезда» не всегда означает планету Венеру, именно, не означает Венеру тогда, когда слова «Утренняя звезда» имеют косвенное значение.

Когда говорят «кажется, что...», то имеют в виду: «мне кажется, что...» или «я полагаю, что...». Мы имеем, стало быть, тот же случай. Аналогично обстоит дело с такими выражениями, как «радоваться», «сожалеть», «одобрять», «порицать»,

---

* В предложении «А солгал, что он видел В» придаточное предложение означает мысль, о которой говорится, во-первых, что А утверждает ее истинность и, во-вторых, что А убежден в ее ложности.

«надеяться», «бояться». Когда Веллингтон в конце битвы под Белль-Альянском[15] обрадовался тому, что подошли пруссаки, то основанием его радости была определенная уверенность в этом. Если бы он обманулся в этой уверенности, то все же радость его — пока продолжалась эта его иллюзия — не стала бы от этого меньше; а пока у него не было уверенности в том, что подошли пруссаки, он не мог бы радоваться этому, даже если бы в действительности они были уже близко.

Так же как убеждение, уверенность или вера являются причиной некоего чувства, они могут быть также причиной той убежденности, какая имеет место в процессе умозаключения. В предложении «Из того, что Земля шарообразна, Колумб заключил, что, отправившись на запад, он сможет достичь Индии» в качестве значений частей этого предложения мы имеем две мысли: что Земля шарообразна и что Колумб, отплыв на запад, сможет достичь Индии. Здесь опять-таки важно только то, что Колумб был уверен как в одной, так и в другой мысли и что одно убеждение было причиной другого. Действительно ли Земля шарообразна и действительно ли Колумб, отправившись на запад, мог, как он думал, достичь Индии, — это для истинности нашего предложения безразлично; но для нее будет совсем не безразлично, если мы вместо «Земля» подставим «планета, спутник которой обладает диаметром большим, чем одна четвертая часть ее собственного диаметра»[16]. Здесь мы также имеем косвенное значение слов.

Сюда же относятся придаточные-наречия цели, вводимые словами «для того, чтобы», ибо очевидно, что цель есть мысль; отсюда — косвенное значение слов, конъюнктив.

Придаточные предложения с союзом «чтобы» после слов «приказывать», «просить», «запрещать», будучи выраженными в прямой речи, стояли бы в повелительном наклонении. Такое предложение не имеет значения, а имеет лишь смысл. Хотя приказание и вопрос и не являются мыслями, они все же стоят с мыслями на одной ступени. Поэтому в придаточных предложениях, зависящих от «приказывать», «просить», слова имеют косвенное значение. Поэтому значение такого предложения — это не значение истинности, а приказ, просьба и т.п.

Подобным же образом обстоит дело с зависимым вопросом в таких оборотах, как «сомневаться в том, что», «не знать, что». Нетрудно заметить, что и здесь соответствующие слова следует брать в их косвенном значении. Зависимые вопросительные предложения, вводимые словами «кто», «что», «где», «когда'», «как», «по какой причине» и т.д., иногда очень похожи на обстоятельственные придаточные предложения — придаточные-наречия, в которых слова имеют обычное значение. В языке эти случаи различаются посредством наклонения глагола. В случае сослагательного наклонения мы имеем зависимый вопрос и косвенное значение слов, так что собственное имя не всегда может быть заменено другим, отнесенным к тому же предмету.

В рассмотренных до сих пор случаях слова в придаточном предложении имели косвенное значение, поэтому само значение придаточного предложения было косвенным, то есть им было не значение истинности, а мысль, приказ, просьба, вопрос. На такое придаточное предложение можно смотреть как на имя, существительное (Nennwort), можно даже сказать как на собственное имя упомянутой мысли, приказа и т.д., собственное имя, являющееся частью сложноподчиненного предложения.

Мы переходим теперь к другим придаточным предложениям — таким, в которых слова хотя и имеют обычное значение, но тем не менее в качестве смысла в них не выступает мысль, а в качестве значения — значение истинности. Возможность этого лучше всего пояснить на примерах.

«Тот, кто открыл эллиптическую форму планетных орбит, умер в нищете».

Если бы придаточное предложение имело здесь своим смыслом мысль, то ее можно было бы выразить и в одном независимом предложении. Но этого сделать нельзя, так как грамматический субъект «тот, кто' («der') не имеет самостоятельного смысла, а просто делает возможным связь с предложением, следующим далее: «умер в нищете'. Поэтому смысл данного придаточного предложения не является завершенной мыслью, а его значением является не значение истинности, а Кеплер. Могут возразить, что смысл целого тем не менее включает в себя в качестве части некоторую мысль, именно, что существовал некто, впервые открывший, что орбиты планет имеют форму эллипса; ибо тот, кто считает целое истинным, не может подвергнуть отрицанию эту часть. Последнее несомненно, но это объясняется тем, что иначе придаточное предложение «тот, кто открыл эллиптическую форму планетных орбит' не имело бы никакого значения. Когда мы нечто утверждаем, то, разумеется, всегда предполагаем, что употребляемые нами простые или сложные собственные имена имеют значение. Так, когда говорят: «Кеплер умер в нищете», предполагают, что имя «Кеплер» нечто обозначает; отсюда, однако, никак не следует, что смысл предложения «Кеплер умер в нищете» содержит мысль, будто имя «Кеплер» обозначает нечто. Если бы дело обстояло так, то отрицание этого предложения должно было бы гласить не:

«Кеплер не умер в нищете»,

но:

«Кеплер не умер в нищете, или имя 'Кеплер' не имеет значения»[17].

На деле же то, что имя «Кеплер» обозначает нечто, — это есть предпосылка как для утверждения

«Кеплер умер в нищете»,

так и для противоположного утверждения. Дело в том, что языки имеют тот недостаток, что в них возможны выражения, которые по своей грамматической форме определенны настолько, чтобы обозначить некоторый предмет, но эта их определенность не достижима в отдельных случаях, так как она зависит от истинности некоторого предложения. Так, от истинности предложения

«существует тот, кто открыл эллиптическую форму планетных орбит»

зависит, обозначает ли придаточное предложение

«тот, кто открыл эллиптическую форму планетных орбит»

на самом деле некоторый предмет или оно только порождает в нас иллюзию на этот счет, а в действительности значения не имеет. Так возникает взгляд, будто наше придаточное предложение содержит в качестве части своего смысла мысль о том, что существует некто, кто открыл, что орбиты планет имеют форму эллипса. Если бы это было верно, то отрицание должно было бы гласить:

«тот, кто первый открыл эллиптическую форму планетных орбит, не умер в нищете, или не существовало того, кто открыл эллиптическую форму планетных орбит».

Итак, дело коренится в несовершенстве языка, отчего, впрочем, не совсем свободен и язык знаков математического анализа; там тоже могут встречаться знаковые конфигурации, вызывающие иллюзию, будто они что-то обозначают, но которые — по крайней мере до сих пор — все еще не имеют значения, например, расходящиеся бесконечные ряды. Этого можно избежать, установив, например, особо, что расходящиеся бесконечные ряды должны означать число 0. От логически совершенного языка (записи в понятиях) надлежит требовать, чтобы каждое выражение, образованное из ранее введенных знаков в грамматически правильной форме в качестве собственного имени, действительно обозначало какой-то предмет и чтобы ни один знак не вводился вновь в качестве собственного имени, если для него не обеспечено значение. В учебниках логики предостерегают от многозначности выражений как от источника логических ошибок. Ничуть не менее уместным я считаю предостережение относительно мнимых собственных имен, которые не имеют никакого значения. История математики может достаточно рассказать о заблуждениях, которые получались из этого. В этой же связи — быть может, даже с большим основанием, чем о многозначности слов, — стоит вспомнить об ухищрениях демагогов. Примером в этом отношении может служить «воля народа»; ибо легко установить, что выражение это не имеет никакого значения, по крайней мере общепринятого. Значит, отнюдь не маловажно раз навсегда искоренить — по крайней мере в науке — источник такого рода ошибок. Тогда станут невозможными возражения, подобные тем, которые мы только что разбирали, ибо то, что собственное имя имеет значение, — это уже никогда не сможет оказаться в зависимости от истинности некоторой мысли.

К этим называющим придаточным предложениям мы можем присоединить рассмотрение одного рода придаточных-прилагательных и придаточных-наречий, который логически очень близок к ним.

Придаточные-прилагательные тоже служат образовыванию сложных собственных имен, хотя эти предложения, в отличие от называющих, одни для этого не достаточны. К придаточным-прилагательным следует подходить так же, как мы подходим к прилагательным. Вместо слов «корень квадратный из 4, который меньше нуля' можно также сказать: «отрицательный квадратный корень из 4'. Мы имеем здесь случай, когда сложное собственное имя образовано из выражения для понятия — понятийного выражения с помощью определенного артикля в единственном числе, что всегда разрешается сделать, когда под понятие подпадает один, и только один предмет*. Выражения для понятий могут быть образованы также посредством указания признаков с помощью придаточных-прилагательных, как это имело место в нашем примере, где это было сделано с помощью предложения «который меньше нуля'. Очевидно, что такое придаточное-прилагательное так же не может иметь своим смыслом мысль, а своим значением — истинностное значение, как и рассмотренное выше называющее придаточное предложение, но что его смыслом является только часть мысли, которая во многих случаях может быть выражена с помощью единственного слова — с помощью прилагательного. Здесь, так же как в случае указанных называющих придаточных предложений, отсутствует самостоятельный субъект, а тем самым и возможность передать смысл придаточного предложения в одном самостоятельном главном предложении.

Местоположения в пространстве, моменты времени, временные интервалы являются *с логической точки зрения предметами*; значит, *на языковое обозначение* определенного места, определенного момента или интервала времени следует смотреть как на собственное имя. Придаточные-наречия места и времени также могут служить для образования таких собственных имен, причем способом, сходным с тем, который мы только что видели, рассматривая называющие придаточные

---

* В соответствии со сказанным выше для каждого такого выражения надо было бы, собственно говоря, всегда посредством особого определения обеспечивать некоторое значение, например, установив, что если под понятие не подпадает ни один предмет или подпадает более одного предмета, то его значением является число 0.

предложения и предложения придаточные-прилагательные. Точно так же могут быть образованы выражения для понятий, относящихся к местам в пространстве и т.д. Следует заметить, что и тут смысл этих придаточных предложений не может быть передан в одном независимом — главном — предложении, ибо в них отсутствует одна существенная составная часть, а именно, нет указания на место или время: имеется лишь намек на них, выраженный относительным местоимением или союзом*.

Равным образом в условных придаточных предложениях в большинстве случаев, так же как это мы только что видели относительно называющих придаточных предложений, а также придаточных-прилагательных и придаточных-наречий, следует признать наличие такого неопределенно указывающего компонента, которому в предложении, следующем за условием, соответствует аналогичный компонент. Предполагая друг друга, компоненты эти связывают оба предложения в единое целое, которое, как правило, выражает только одну мысль. В предложении

«если число меньше единицы и больше нуля, то его квадрат также меньше единицы и больше нуля»

таким компонентом — в условном придаточном предложении — является «число», а в следующем за ним предложении — «его». Именно в силу этой неопределенности смысл получает ту всеобщность, которую следует требовать от закона. Но тем же обстоятельством вызывается и то, что само по себе условное придаточное предложение не содержит никакой завершенной мысли и только вместе с последующим предложением выражает некоторую мысль, причем только одну-единственную мысль, части которой не являются больше мыслями[18]. Вообще неверно, что в гипотетическом суждении два суждения ставятся во взаимную связь друг с другом. Когда это — или что-либо подобное — утверждают, то слово «суждение» употребляют с тем же смыслом, какой я связал со словом «мысль», так что я должен был бы вместо сказанного выше выразиться: «в гипотетической мысли две мысли ставятся во взаимную связь друг с другом». Это может быть истинным только тогда, когда отсутствует неопределенно указывающий компонент**; но тогда оказывается утраченной и всеобщность.

Если момент времени в условном придаточном предложении и в предложении, которое за ним следует, должен быть указан неопределенно, это нередко

---

* Впрочем, в отношении этих предложений легко могут быть выдвинуты различные точки зрения. Смысл предложения «после того, как Шлезвиг-Гольштейн был отторгнут от Дании, Пруссия и Австрия поссорились между собою»[19] может быть передан также и в форме «после отторжения Шлезвиг-Гольштейна от Дании Пруссия и Австрия поссорились между собою». В случае последней формулировки, пожалуй, достаточно ясно, что на мысль о том, что Шлезвиг-Гольштейн был когда-то отторгнут от Дании, следует смотреть не как на часть ее смысла, а считать, что это обстоятельство является необходимой предпосылкой того, чтобы выражение «после отторжения Шлезвиг-Гольштейна от Дании» вообще имело какое-нибудь значение. Правда, на наше предложение можно смотреть и так, что в нем говорится — Шлезвиг-Гольштейн когда-то был отторгнут от Дании. Мы получаем тогда случай, который будет рассмотрен позже. Чтобы сделать более ясным различие, о котором идет речь, перенесемся на мгновение в ум китайца, который в силу недостаточного знания европейской истории считает ложным, что Шлезвиг-Гольштейн когда-либо был отторгнут от Дании. Тогда наше предложение в первой редакции он не будет считать ни истинным, ни ложным, а просто будет отрицать за ним всякое значение, поскольку таковое отсутствовало бы у придаточного предложения. Последнее только по видимости содержит указание на определенное время. Напротив, если он станет рассматривать наше предложение во второй редакции, он найдет, что наряду с частью, которую он считает не имеющей значения, в нем выражена мысль, которую он считает ложной.

** Относящееся к этому ясное языковое указание иногда отсутствует, и тогда следует исходить из всего контекста.

16 - 1742

осуществляется с помощью настоящего времени — *Tempus praesens* глагола, форма которого в этом случае настоящего времени не обозначает. Тогда эта грамматическая форма и является в главном и придаточном предложениях тем компонентом, который содержит неопределенное указание. «Когда Солнце находится над Тропиком Рака, в северном полушарии самый долгий день» — пример этого. Здесь тоже нельзя передать смысл придаточного предложения в одном независимом предложении, так как этот смысл не есть завершенная мысль; ибо если бы мы сказали: «Солнце находится над Тропиком Рака», то мы отнесли бы это к настоящему времени и тем самым изменили бы смысл. Равным образом и главное предложение не имеет мысль своим смыслом; таковую содержит только целое, состоящее из главного и придаточного предложений. Впрочем, в условном придаточном предложении и в предложении, которое за ним следует, может быть несколько общих неопределенно указывающих компонент.

Очевидно, что на называющие придаточные предложения со словами «кто» «что» и придаточные-наречия со словами «где», «когда», «где бы ни», «когда бы ни» часто можно смотреть, в зависимости от смысла, как на условные придаточные предложения, например: «Кто с грязью играет, тот лишь руки марает».

Придаточные-прилагательные тоже могут представлять условные придаточные предложения. Так, мы можем выразить смысл предложения, приводившегося нами ранее, и в такой форме: «квадрат числа, которое меньше единицы и больше нуля, — меньше единицы и больше нуля».

Совершенно иначе обстоит дело, когда общая составная часть главного и придаточного предложений обозначена собственным именем. В предложении

«Наполеон, который понял опасность, угрожавшую его правому флангу, сам повел свою гвардию в наступление на позиции неприятеля»

выражены две мысли:

1. Наполеон понял опасность, угрожавшую его правому флангу.
2. Наполеон сам повел свою гвардию в наступление на позиции неприятеля.

Хотя где и когда это произошло, можно установить только из контекста, все же, коль скоро это сделано, место и время являются определенными. И если мы выразим все наше предложение в одном утверждении, то мы будем утверждать тем самым оба входящие в него предложения. Если одно из двух составляющих предложений ложно, то наше предложение в целом тоже ложно. Это случай, когда смыслом придаточного предложения, взятого само по себе, является завершенная мысль (если мы ее дополним указанием места и времени). В соответствии с этим значением придаточного предложения здесь является истинностное значение. Мы можем поэтому ожидать, что это придаточное предложение без ущерба для истинности предложения в целом может быть заменено предложением, имеющим то же значение истинности. Так в действительности дело и обстоит; надо только следить за тем, чтобы — из чисто грамматических соображений — подлежащим в замещающем предложении был «Наполеон», так как только при этом условии оно может быть облечено в форму придаточного-прилагательного, относящегося к «Наполеону». Но если не обращать внимания на требование, чтобы замещающее предложение было взято в этой форме, и если допустить его присоединение с помощью союза «и», то это ограничение отпадает.

В придаточных предложениях, вводимых союзом «хотя», тоже выражаются завершенные мысли. Этот союз, собственно говоря, никакого смысла не имеет; он тоже не изменяет смысла предложения, а только дает ему своеобразное освещение*. Хотя мы и можем без ущерба для истинности целого заменить уступительное придаточное другим предложением, имеющим то же значение истинности, окраска всего предложения после этого легко может оказаться совершенно неподходящей, как если бы траурную песнь стали исполнять с веселым задором.

В случаях последнего рода истинность предложения в целом включала в себя истинность предложений, из которых оно состоит. Иное дело, когда условное придаточное предложение выражает завершенную мысль, что бывает тогда, когда такого рода предложение вместо неопределенно указывающей компоненты содержит собственное имя или то, что может рассматриваться как собственное имя. Предложение

«если Солнце сейчас уже взошло, то небо покрыто тучами»

дано в настоящем времени; время здесь, стало быть, определено. Место также можно мыслить определенным. Можно сказать, что здесь устанавливается отношение между истинностными значениями предложения, содержащего условие, и предложения, содержащего следствие, причем отношение, при котором не может быть случая, когда предложение, содержащее условие, означает истину, а последующее предложение означает ложь. В соответствии с этим наше предложение истинно как в том случае, когда Солнце в данный момент еще не взошло — независимо от того, покрыто небо тучами или нет, — так и в том случае, когда Солнце уже взошло и небо покрыто тучами. Так как при этом для нас важны только значения истинности, каждое из предложений, составляющих целое, можно заменить другим, имеющим то же значение истинности, и при этом значение истинности всего предложения не изменится. Правда, и здесь общая окраска предложения в большинстве случаев становится неуместной; мысль очень легко может оказаться нелепой; но это не имеет отношения к значению истинности нашего предложения. При этом надо всегда следить за тем, чтобы сопутствующие, побочные мысли гармонировали с главной; однако побочные мысли, собственно говоря, не выражаются, и поэтому их нельзя включать в смысл предложения, для значения истинности которого, таким образом, это не играет никакой роли**.

На этом можно закончить разбор простых случаев. Окинем же взором то, к чему мы пришли.

В большинстве случаев придаточное предложение в качестве своего смысла имеет не мысль, а только ее часть и, следовательно, значение истинности не является его значением. Это объясняется или тем, что слова в придаточном предложении имеют косвенное значение, так что мысль является не его смыслом, а его значением, или тем, что придаточное предложение, ввиду наличия в нем неопределенно указывающей компоненты, является незавершенным, так что только вместе с главным предложением оно выражает некоторую мысль. Но встречаются и такие случаи, когда смысл придаточного предложения является завершенной мыслью, и тогда оно может быть без ущерба для истинности всего предложения заменено другим, имеющим такое же истинностное значение, коль скоро для такой замены нет препятствий грамматического характера.

Если мы станем рассматривать все встречающиеся в языке придаточные предложения, мы скоро натолкнемся на такие, которые не так-то легко разложить

* Подобным же образом обстоит дело с «но» («aber») и «все же» («doch»).

** Мысль, содержащуюся в нашем предложении, можно было бы выразить и так: «или солнце сейчас еще не взошло, или небо покрыто тучами», из чего видно, как следует смотреть на этот способ соединения предложений[20].

по этим полочкам. Причина этого, как мне кажется, состоит в том, что эти придаточные предложения имеют отнюдь не такой простой смысл. Кажется, почти всегда мы соединяем с главной мыслью, которую мы выражаем, сопутствующие, побочные мысли, которые, хотя они и не выражаются в языке, по законам психологии слушатель связывает с нашими словами. Поскольку они сами по себе часто оказываются связанными с нашими словами почти так же тесно, как и сама главная мысль, возникает желание считать их также содержащимися в предложении. Тем самым смысл предложения становится богаче, и, пожалуй, может статься, что мы будем иметь больше простых мыслей, чем простых предложений. В одних случаях данное предложение надо понимать так, как мы описали выше, а в других случаях может возникнуть сомнение, относится ли побочная мысль к смыслу предложения или только сопутствует ему*. Так, можно было бы счесть, что в предложении:

«Наполеон, который понял опасность, угрожавшую его правому флангу, сам повел свою гвардию в наступление на позиции неприятеля»

выражены не только две вышеприведенные мысли, но и мысль о том, что сознание опасности было причиной того, почему он сам повел свою гвардию в наступление на неприятельские позиции. В сущности отнюдь не ясно, содержится ли эта мысль только в виде намека, или она выражена на самом деле. Возникает вопрос, стало ли бы наше предложение ложным, если бы оказалось, что Наполеон принял решение, о котором идет речь, еще до того, как узнал о грозящей опасности. Если несмотря на это наше предложение продолжает быть истинным, то на нашу побочную мысль нельзя смотреть как на часть смысла нашего предложения. Последнее решение заслуживает, вероятно, предпочтения. В противном случае дело оказалось бы очень запутанным: мы имели бы больше простых мыслей, чем простых предложений. При таком подходе если предложение

«Наполеон понял опасность, угрожавшую его правому флангу»

мы заменим другим предложением с тем же значением истинности, например,

«Наполеону было уже больше 45 лет»,

то изменится не только наша первая, но и наша третья мысль, причем может стать иным и ее значение истинности — а именно, в том случае, если его возраст не был основанием для решения повести гвардию в наступление на врага. Из этого видно, почему не всегда в таких случаях предложения, имеющие одинаковое истинностное значение, могут заменять друг друга. Здесь предложение именно благодаря своей связи с другим предложением выражает больше, чем взятое само по себе[21].

Рассмотрим теперь случаи, в которых это происходит систематически. В предложении

«Бебель воображает, будто посредством возврата Эльзас-Лотарингии можно ослабить реваншистские устремления Франции»[22]

выражены две мысли, про которые неверно было бы сказать, что одна из них принадлежит главному, а другая — придаточному предложению; эти две мысли таковы:

1) Бебель думает, что посредством возврата Эльзас-Лотарингии можно ослабить

* Это может иметь важное значение для решения вопроса, представляет ли собою данное утверждение — ложь, а некая клятва — клятвопреступление.

реваншистские устремления Франции;

2) посредством возврата Эльзас-Лотарингии реваншистские устремления Франции не могут быть ослаблены.

Выражая первую мысль, слова в придаточном предложении имеют косвенное значение, тогда как те же слова, выражая вторую мысль, имеют прямое значение. Отсюда мы видим, что придаточное предложение, входящее в наше первоначальное сложноподчиненное предложение, следует, собственно говоря, брать дважды с различными значениями, из которых одно есть мысль, а другое — истинностное значение. Поскольку значение истинности не исчерпывает здесь всего значения придаточного предложения, мы не можем его просто заменить другим предложением с тем же значением истинности. Аналогично обстоит дело в случае таких выражений, как «знать», «узнавать», «известно».

С помощью одного придаточного предложения причины и относящегося к нему главного предложения мы выражаем несколько мыслей, однако, взятые порознь, эти мысли не соответствуют данным предложениям. В предложении

«так как удельный вес льда меньше удельного веса воды, лед плавает в воде»

мы имеем:

1) удельный весь льда меньше удельного веса воды;
2) если нечто имеет удельный вес, меньший чем у воды, то оно плавает в воде;
3) лед плавает в воде.

Что касается третьей мысли, то ее, пожалуй, не обязательно рассматривать как содержащуюся в первых двух. Вместе с тем ни первая и третья мысли, ни вторая и третья, взятые вместе, не составляют смысла нашего предложения. Ведь очевидно, что в нашем придаточном предложении

«так как удельный вес льда меньше удельного веса воды»

выражена как наша первая мысль, так и часть нашей второй мысли. Отсюда и получается, что наше придаточное предложение нельзя просто заменить другим предложением, имеющим то же значение истинности; ибо, поступив так, мы изменили бы и нашу вторую мысль, а это свободно могло бы затронуть также и ее истинностное значение[23].

Подобным же образом обстоит дело и с предложением

«если бы железо имело удельный вес, меньший удельного веса воды,
то оно плавало бы в воде»[24].

Мы имеем здесь две мысли: что удельный вес железа не меньше удельного веса воды и что нечто плавает в воде, если его удельный вес меньше, чем удельный вес воды. Данное придаточное предложение опять-таки выражает одну мысль целиком и кроме того часть другой мысли.

Если теперь мы истолкуем предложение, которое было приведено ранее:

«после того, как Шлезвиг-Гольштейн был отторгнут от Дании,
Пруссия и Австрия поссорились между собою»,

так, что в нем выражена мысль: когда-то Шлезвиг-Гольштейн был отторгнут от Дании, — то мы получим, во-первых, эту мысль, во-вторых, мысль, что в момент времени, точнее определенный в придаточном предложении, Пруссия и Австрия поссорились между собою. Тут тоже придаточное предложение выражает не только одну мысль, но и часть другой мысли. Поэтому его не везде можно заменять другим предложением, имеющим то же значение истинности.

Трудно исчерпать все возможности, имеющиеся в языке; все же я надеюсь, что в основном нашел причины, в силу которых не всегда можно без ущерба для истинности сложноподчиненного предложения, рассматриваемого в целом, заменять в нем придаточное предложение другим предложением с тем же самым истинностным значением. Причины эти таковы:

1) придаточное предложение не обладает никаким истинностным значением, выражая только часть мысли;

2) придаточное предложение, обладающее значением истинности, может не ограничиваться этим, что бывает тогда, когда его смысл включает в себя, кроме некоторой цельной мысли, еще часть какой-то другой мысли.

Первый случай имеет место:

а) в случае косвенного значения слов;

б) когда какая-то часть предложения, вместо того чтобы быть собственным именем, содержит в себе только неопределенно указывающую компоненту.

Во втором случае придаточное предложение следует брать дважды, именно — один раз в обычном значении, а другой — в косвенном значении; может также случиться, что смысл некоторой части придаточного предложения вместе с тем является составной частью другой мысли, которая вместе с мыслью, непосредственно выраженной в придаточном предложении, составляет совокупный смысл главного и придаточного предложений.

Из всего этого, пожалуй, с достаточной вероятностью вытекает, что случаи, когда придаточное предложение не может заменяться другим предложением, имеющим одинаковое с ним значение истинности, нисколько не доказывают ошибочности нашего взгляда, по которому значением предложения, смысл которого есть мысль, является истинностное значение.

Вернемся теперь к нашему исходному пункту!

Если мы вообще находим различие в познавательной ценности предложений «$a = a$» и «$a = b$», то объясняется это тем, что с точки зрения познавательной ценности предложения его смысл — а именно, выраженная в нем мысль — играет роль отнюдь не меньшую, чем его значение, каковым является его истинностное значение. Возьмем теперь $a = b$. Значение, которое имеет «b», совпадает со значением, которое имеет «a», и, стало быть, значение истинности предложения «$a = b$» совпадает со значением истинности предложения «$a = a$». Несмотря на это смысл «b» может быть отличен от смысла «a», а отсюда получается, что мысль, выраженная в «$a = b$», тоже может быть отличной от мысли, выраженной в «$a = a$»; поэтому-то эти предложения и имеют разную познавательную ценность. Если под «суждением», как мы выше условились, понимать движение от мысли к ее истинностному значению, то можно сказать иначе: эти суждения различны.

РАЗМЫШЛЕНИЯ О СМЫСЛЕ И ЗНАЧЕНИИ

В одной своей статье («О смысле и значении») я провел различие между смыслом и значением применительно к собственным (или, если угодно, единичным) именам. Но такое же различие можно провести и в отношении слов, обозначающих понятия, — понятийных слов. При этом легко может возникнуть неясность, проистекающая из того, что одно деление: понятия — предметы, может смешиваться с другим: смысл — значение. Каждому понятийному слову или собственному имени соответствует — согласно принятому мною словоупотреблению — некий смысл и некое значение. В произведениях художественной литературы слова, разумеется, обладают только смыслом, но в науке и всюду, где выдвигается вопрос об истине, мы не довольствуемся смыслом, а стремимся к тому, чтобы связать с данным собственным именем, данным понятийным словом некоторое значение; и если мы этого — скажем, по недосмотру — не делаем, то возникает ошибка, которая легко может испортить наши рассуждения. Значение собственного имени есть предмет, обозначаемый или называемый этим именем. Понятийное слово означает понятие — при условии, что слово это употребляется так, как требует логика. Чтобы пояснить сказанное, я напомню об обстоятельстве, которое, по-видимому, говорит в пользу точки зрения, которой придерживаются представители логики объема в отличие от тех, кто стоит на позиции логики содержания: дело в том, что в любом предложении понятийные слова, которым соответствует один и тот же объем понятия, могут заменять друг друга, не нарушая истинности предложения; и, стало быть, по отношению к процессу умозаключения и логическим законам понятия ведут себя по-разному лишь постольку, поскольку различны их объемы[1]. Главное логическое отношение есть отношение подпадания предмета под понятие — к этому отношению можно свести все отношения между понятиями. Предмет, подпадающий под данное понятие, подпадает под все понятия, обладающие тем же объемом, откуда и следует сказанное выше. Поэтому, если относительно тех имен собственных, которые обозначают один и тот же предмет, верно, что они могут замещать друг друга, не нарушая истинности, это же верно и в применении к словам, обозначающим понятия, при условии, что объемы понятий одинаковы. Конечно, мысль при подобных заменах становится другой, но это относится к смыслу предложения, а не к его значению*. Последнее же, а именно, истинностное значение, остается без изменений. Поэтому можно легко прийти к тому, чтобы принять объем понятия за значение понятийного слова; однако при этом мы можем упустить из виду, что объемы понятий — это предметы, а не понятия (ср. мой доклад «Функция и понятие»[3]). Тем не менее тут содержится зерно истины. Чтобы выявить его в чистом виде, я должен вернуться к тому, что говорил в моей книжке «Функция и понятие». Согласно сказанному там, понятие есть функция одного аргумента, значением (Wert) которой

---

* Ср. мою статью о смысле и значении[2].

всегда является истинностное значение. Слово «функция» заимствовано мною из анализа; сохраняя главное в том, как оно используется в анализе, я употребляю его в несколько расширенном значении, направление же этого расширения указывает сам анализ. В имени функции — в функциональном имени всегда имеется пустое место (по крайней мере одно), предназначенное для аргумента, — место, которое в анализе по большей части указывается с помощью буквы «x», восполняющей упомянутые пустые места. Но аргумент нельзя причислять к функции, а значит, и букву «x» нельзя относить к имени функции; поэтому и можно говорить о пустых местах в функциональном имени — ведь то, что восполняет, не принадлежит, собственно, к этому имени. В соответствии с этим саму функцию я назвал ненасыщенной или нуждающейся в восполнении: ее имя должно быть обязательно восполнено знаком аргумента, чтобы получить завершенное, законченное значение. Последнее я называю предметом, а в данном случае — значением функции для аргумента, производящего ее восполнение или насыщение. В первых же напрашивающихся случаях аргумент сам есть предмет, и этими-то случаями мы здесь прежде всего и ограничимся. В случае понятий мы имеем дело с особой ситуацией, когда значением функции неизменно является значение истинности. Дело в том, что, когда имя функции восполняется собственным именем, мы получаем предложение, смыслом которого является некая мысль; а значением здесь оказывается истинностное значение. Признавая, что истинностное значение предложения есть истина (принимая его как истину), мы выносим суждение, согласно которому предмет, взятый нами в качестве аргумента, подпадает под данное понятие. То, что в случае функций мы называем ненасыщенностью, в случае понятий мы можем назвать их предикативной природой*. Это проявляется даже тогда, когда говорят о понятии субъекта («Все равносторонние треугольники имеют равные углы», иначе говоря: «Если нечто есть равносторонний треугольник, то это равноугольный треугольник»[5]).

Такова сущность понятия, и она составляет великое препятствие для получения подходящего для него выражения и для объяснения того, чту такое понятие. Когда я завожу разговор о каком-то понятии, язык почти с непреодолимой силой навязывает выражение, которое затемняет мысль — делает ее, можно сказать, почти ложной. Когда я произношу «понятие *равносторонний треугольник*», то, следуя языковой аналогии, мы должны, как будто, допустить, что я тем самым обозначаю некоторое понятие — так же, как, говоря «планета Нептун», я, без сомнения, называю некую планету. Но это не так: тут отсутствует предикативность. Поэтому значением выражения «понятие *равносторонний треугольник*» (если таковой имеется) является некий предмет. Мы не можем избежать таких слов, как «данное понятие», но при этом всегда должны помнить об их несоответствии существу дела**. Из сказанного вытекает, что предметы и понятия различаются коренным образом, и первые не могут служить заменой вторых. То же самое справедливо и относительно соответствующих слов или знаков. Собственные имена нельзя употреблять как настоящие предикаты. Там, где кажется, что это происходит, более внимательное рассмотрение показывает: такое имя по своему смыслу составляет лишь часть предиката; понятия не могут находиться в тех отношениях, в которых могут находиться предметы. Думать так — значит не просто ошибаться: это значит мыслить невозможное. Поэтому слова «отношение субъекта к предикату» означают два

---

* Слова «ненасыщена» и «предикативно», кажется, больше подходят для смысла, чем для значения; но смыслу в значении все-таки что-то соответствует, а более подходящих слов я не знаю. Ср. «Логику» Вундта[4].

** Я еще буду рассматривать эту трудность.

совершенно разных отношения — смотря по тому, чем является субъект — предметом или же понятием. Поэтому лучше всего было бы совсем изгнать из логики слова «субъект» и «предика», так как они постоянно сбивают с толку и приводят к смешению двух в корне различных отношений: отношения подпадения предмета под понятие и отношение подчинения между понятиями[6]. Слова «все» и «некоторые», стоящие при грамматическом субъекте, по своему смыслу принадлежат грамматическому предикату, и это обнаруживается, когда мы переходим к отрицанию (не все, nonnulli)[7]. Уже из этого одного следует, что грамматический предикат в этих случаях отличается от того, что мы высказываем о некотором предмете. То же самое верно и для отношения равенства, под которым я понимаю полное совпадение, тождество, — оно мыслимо только относительно предметов, но не понятий. Когда мы говорим: «Значение понятийного слова 'коническое сечение' таково же, что и значение понятийного слова 'кривая второго порядка'» или «Понятие *коническое сечение* совпадает с понятием *«кривая второго порядка»*, слова́ «значение понятийного слова 'коническое сечение'» — это имя некоторого предмета, но не имя понятия; ибо тут отсутствует предикативность, предикативная природа, ненасыщенность, возможность употребить неопределенный артикль. То же самое справедливо и относительно выражения «понятие *коническое сечение*». Но хотя отношение равенства мыслимо только в случае предметов, для понятий все-таки имеется сходное отношение — отношение между понятиями, называемое мною отношением второй ступени, тогда как отношение равенства между предметами я называю отношением первой ступени. Мы говорим: предмет a равен предмету b (в смысле полного совпадения), если a подпадает под каждое понятие, под которое подпадает b, и наоборот[8]. Произведя взаимообмен ролей понятия и предмета, мы получим нечто подобное и для понятий. Тогда мы можем сказать: подразумеваемое выше отношение имеет место между понятиями Φ и X, если каждый предмет, подпадающий под Φ, подпадает и под X, и наоборот. При этом, правда, мы снова не можем обойтись без выражений «понятие Φ», «понятие X», что опять-таки затемняет смысл. Поэтому для читателей, которых не отпугивает моя знаковая система, я хочу добавить следующее. Ненасыщенность понятия (первой ступени) в понятийной записи представлена наличием в его обозначении по крайней мере одного пустого места, предназначенного для имени предмета, о подпадании которого под данное понятие идет речь. Это место или эти места должны всегда быть как-то заполнены. Помимо восполнения с помощью какого-либо собственного имени, это может происходить с помощью некоторого знака, который только неопределенно указывает на предмет. Отсюда видно, что с одной стороны знака равенства или некоторого сходного [знака] никогда не может находиться только обозначение понятия, — помимо понятия всегда должен быть обозначен или неопределенно указан некий предмет. Даже тогда, когда мы только неопределенно указываем понятия, схематически представляя их с помощью функциональных букв, это может происходить лишь при условии, что их ненасыщенность наглядно явлена нашему взору в форме помещаемых за ними пустых мест — в виде, например, $\Phi(\quad)$ и $X(\quad)$. Иными словами, буквы (Φ, X), которые должны указывать на понятия или обозначать их, мы обязаны использовать всегда только как функциональные буквы, то есть так, чтобы при них предусматривалось место для аргумента (внутреннее пространство в следующих за ними скобках). Поэтому нельзя писать $\Phi = X$, так как в этом случае буквы Φ и X не выступают в качестве функциональных букв. Нельзя записать $\Phi(\quad) = X(\quad)$, потому что места аргументов должны быть заполнены. Но если они заполнены, то тем самым друг другу приравниваются не только функции (понятия), — с каждой стороны знака равенства тогда находится, помимо функциональной буквы, еще нечто такое, что не принадлежит функции.

Функциональные буквы нельзя заменить такими буквами, которые не используются как знаки функций: всегда должно быть некое аргументное место, готовое принять «*a*». Может возникнуть мысль, будто допустимо писать просто $\Phi = X$. Так может показаться, лишь пока понятия указываются схематически-неопределенно; способ обозначения, отвечающий подлинному существу дела, должен быть применим во всех случаях. Рассмотрим пример, который я уже использовал в моей работе о функции и понятии[9].

Функция $x^2=1$ для любого аргумента имеет то же (истинностное) значение, что и функция $(x + 1)^2 = 2(x+1)$; это значит, что под понятие *корень квадратный из* 1 подпадает каждый предмет, который подпадает под понятие *то, что на* 1 *меньше, чем число, квадрат которого равен результату его умножения на два*, и наоборот. Применяя приведенный выше способ обозначения[10], мы можем выразить эту мысль так:

$$(\alpha^2 = 1) \overset{\alpha}{\underset{\frown}{\smile}} ((\alpha + 1)2 = (\alpha + 1)).$$

Здесь перед нами на самом деле уже упоминавшееся отношение второй ступени, которое соответствует равенству (полному совпадению) для предметов, но не должно с этим равенством смешиваться. Если мы запишем это так:

$$\overset{\alpha}{-\!\smile\!-}\, (\alpha^2 = 1) = ((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)),$$

то в сущности выразим ту же мысль, трактуемую как всеобщность некоторого равенства значений функций. Здесь — тоже отношение второй ступени; тоже знак равенства; но одного его недостаточно, чтобы получить обозначение для этого отношения, — нужно еще, чтобы оно было соединено с обозначением всеобщности: на первый план выходит всеобщность, а не равенство. А в записи $\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \dot{\alpha}((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$ перед нами хотя и равенство, но равенство не между понятиями (оно невозможно), а между предметами, а именно, объемами понятий.

Мы установили, что отношение равенства между предметами не может пониматься как отношение между понятиями, но соответствующее отношение имеется. Таким образом, слово «то же самое» использующееся для обозначения первого отношения, не может, собственно говоря, служить для обозначения второго отношения. Для этой цели не остается ничего другого, как сказать: «понятие Φ — то же самое, что и понятие X», причем мы, конечно, именуем тут некое отношение между предметами*, подразумевая отношение между понятиями. Тот же случай имеется и тогда, когда мы говорим: «данное (die) значение понятийного слова *A* — то же, что и данное значение понятийного слова *B*». Собственно говоря, выражение «данное значение понятийного слова *A*» следует вообще отбросить, потому что определенный артикль перед словом «значение» указывает на предмет и отвергает предикативность понятия. Было бы лучше просто говорить: «то, что означает понятийное слово *A*»; ибо это во всяком случае допускает предикативное употребление: «Иисус есть то, что означает понятийное слово ‘человек’» — в смысле: «Иисус есть человек».

Если теперь все это принять во внимание, то мы, пожалуй, сможем утверждать: «То, что означают два понятийных слова, тогда, и только тогда, есть одно и то же, когда объемы соответствующих понятий совпадают», — и при этом избежать заблуждения, к которому побуждает неподходящее употребление слов «одно и то же». Тем самым, я полагаю, взгляды сторонников объемной точки зрения в логике получают серьезную поддержку. Они правы, когда, оказывая предпочтение объему понятия по сравнению с его содержанием, считают, что для логики важен не смысл,

---

* Эти предметы имеют имена «понятие Φ» и «понятие X».

а значение слов. Сторонники логики содержания охотно останавливаются на смысле; ибо то, что они называют содержанием, есть если не представление, то все-таки — смысл. Они не понимают, что логике нет дела до того, как одни мысли вытекают из других, если не учитываются истинностные значения; что необходимы переходы от мысли к ее истинностному значению, вообще переходы от смысла к значению; что логические законы — это прежде всего законы в области значений, которые лишь опосредованно относятся к смыслу. Если дело идет об истине — а логика нацелена на нее, — то надо задаваться вопросом о значениях, надо отбрасывать собственные имена, которые ничего не обозначают, не называют никакого предмета, хотя они и могут иметь некий смысл; надо отбрасывать понятийные слова, если они не обладают значением. Это не столько, скажем, такие имена, которые несут в себе противоречие — ибо понятие очень даже может быть пустым, — сколько такие, границы которых расплывчаты. Относительно каждого предмета должно быть определено, подпадает ли он под данное понятие или нет; каждое понятие, которое не удовлетворяет этому требованию, значения лишено. Примером может служить слово «μῶλυ» (Гомер, Одиссея, X, 305)[11], хотя относительно него и указаны некоторые признаки. Поэтому подобные места не становятся лишенными смысла, так же как и другие, где встречается имя «Навсикая», которое, вероятно, ничего не обозначает или не именует[12]. Но ведет оно себя так, будто оно называет некую девушку, и этим обеспечивается его смысл. Для поэзии достаточно смысла, мысли без значения, без значения истинности, — для науки этого не достаточно.

В своем труде «Основания [арифметики]» и докладе «О формальных теориях арифметики»[13] я показал, что для некоторых доказательств совсем не безразлично, имеет значение* или нет некоторая знаковая конфигурация, например $\sqrt{-1}$, что, напротив, на этом держится либо рушится вся сила доказательства. Так оказывается, что значение для науки повсюду является самым главным. Поэтому, если представители логики содержания и считают, что понятие как таковое первично по отношению к своему объему, они тем не менее рассматривают его не как смысл понятийного слова, а как значение; сторонники же объемного подхода в логике потому ближе к истине, что выдвигают в качестве самого важного в объеме — его значение, которое, хотя и не является само по себе понятием, все же очень тесно с ним связано.

Господин Гуссерль порицает Шрёдера[14] за неясность, когда последний обсуждает слова «бессмысленный», «односмысленный» и «многосмысленный», «незначащий», «однозначный», «многозначный» (с. 48 и далее, с. 69)[15], и неясность здесь действительно налицо; но и уточнений самого Гуссерля не достаточно. Как и следовало ожидать, господин Шрёдер употребляет словесные окончания «смысленный» и «значный» иначе, чем я, в чем его не стоит упрекать, поскольку до выхода его труда мною об этом еще ничего не было опубликовано. Для него это различение связано с различием общих и собственных имен, и неясность проистекает из непонимания различия между понятием и предметом. Общие имена могут быть, согласно его взгляду, многозначными, и в этом нет никакой ошибки; они таковы, когда под соответствующие понятия подпадает много предметов**. Но тогда, не

---

* Правда, я тогда еще не установил принятое мною теперь употребление слов «смысл» и «значение», так что иногда я говорил «смысл» там, где теперь сказал бы «значение».

** Если, как говорит Гуссерль в примечании к с. 252, разделительное (distributiver) имя — это такое имя, значение которого состоит в том, чтобы указывать некоторый предмет соответствующей совокупности, то понятийное слово (общее имя), вообще говоря, не является дистрибутивным именем[16].

совершая ошибки, можно было бы считать, что общее имя может не иметь значения — быть незначащим, каковым является «круглый квадрат». Но Шрёдер называет такое имя бессмысленным и тем самым отклоняется от принятого им способа выражения; ибо согласно ему «круглый квадрат» надо было называть односмысленным, и Гуссерль прав, когда называет его унивокальным общим именем; ибо «унивокальный» и «эквивокальный» соответствуют шрёдеровским словам «односмысленный» и «многосмысленный». Гуссерль говорит (с. 250): «Очевидно, что он смешивает здесь два очень разные вопросы, а именно: 1) присуще ли некоторое значение (некоторый «смысл») некоему имени; и 2) существует ли предмет, соответствующий некоторому имени». Этого различения недостаточно. Слова «общее имя» побуждают предположить, что общее имя, в сущности, так же относится к предметам, как и имя собственное, только последнее называет один-единственный предмет, тогда как первое, вообще говоря, применимо ко многим предметам. Но это неверно; и поэтому вместо выражения «общее имя» я предпочитаю говорить — «понятийное слово». Собственное имя (так, как я его употребляю) должно иметь хотя бы смысл; в противном случае оно будет пустой последовательностью звуков, и мы лишаемся права называть его именем. Но использование имени в науке требует, чтобы оно имело значение, чтобы оно обозначало или именовало какой-то предмет. Собственное имя так и относится к предмету, и это отношение опосредовано смыслом и только им.

Понятийное слово тоже должно обладать смыслом, а для использования в науке — и значением; однако последнее не есть предмет и не состоит из нескольких предметов, — это понятие. Относительно понятий, конечно, в свою очередь возникает вопрос, подпадает ли под него один предмет, много предметов или ни один предмет. Но непосредственно речь идет только о понятии. Таким образом, понятийное слово может быть логически совершенно неуязвимым — невзирая на то, существует ли предмет, к которому оно благодаря своему смыслу и своему значению (самому понятию) прямо относится. Это отношение к предмету, как мы видим, очень опосредованное и несущественное, так что кажется совсем ненужным делить понятийные слова с точки зрения того, подпадает ли под соответствующее понятие один предмет, много предметов или же ни одного предмета. Как от собственных имен, так и от понятийных слов логика должна требовать, чтобы переход от слов к смыслам и от смыслов к значениям был определен (bestimmt) с полной несомненностью. В противном случае мы вообще не имеем права говорить о каком-то значении. Сказанное справедливо, естественно, относительно всех знаков и знаковых конфигураций, назначение которых совпадает с назначением собственных имен и понятийных слов.

О ПОНЯТИИ И ПРЕДМЕТЕ

В ряде статей, опубликованных в настоящем периодическом издании и посвященных наглядным образам и их психической переработке, *Бенно Керри*[1] неоднократно касался моих «Оснований арифметики», частью соглашаясь, а частью споря со мной. Это только радует меня, и я думаю, что лучше всего выражу свою признательность, если отвечу г. *Керри* по тем пунктам, которые вызывают его возражения. Это кажется мне тем более необходимым, что его критика, во всяком случае отчасти, основана на неверном понимании того, что было сказано мною о понятии, — ошибка, разделять которую могут и другие, — тем более что вопрос этот важен и достаточно труден и поэтому стоит — даже не имея того повода, который есть у меня, — осветить его более подробно, чем мне это казалось нужным в моих «Основаниях [арифметики]».

Слово «понятие» употребляется по-разному: отчасти в психологическом, отчасти в логическом смысле, отчасти, быть может, в смысле, представляющем собою неясное смешение первых двух. Эта фактически существующая свобода находит свое естественное ограничение в требовании, чтобы однажды принятый способ употребления слова сохранялся и в дальнейшем. И я принял решение строго придерживаться чисто логического употребления. Вопрос о том, какой из способов употребления этого слова более целесообразен — психологический или логический, я оставляю в стороне как менее важный. Люди легко договариваются о способе выражения, если они признают, что нечто является тем, что заслуживает особого названия.

Мне кажется: то, что *Керри* неправильно понял мои слова, было вызвано тем, что он непроизвольно смешал с моим свой собственный способ употребления слова «понятие». Отсюда с легкостью и возникают те противоречия, в которых вовсе не повинен мой способ употребления этого слова.

Керри оспаривает то, что он называет моей дефиницией понятия. Поэтому прежде всего я хотел бы заметить, что мое определение не следует понимать как дефиницию в собственном смысле этого слова. Ведь нельзя же требовать, чтобы все поддавалось дефиниции, как нельзя требовать от химика, чтобы он подверг все вещества химическому разложению. То, что является простым, не может быть разложено, и то, что является логически простым, не может быть определено, — для него нельзя дать дефиницию в собственном смысле. Логически простое — как и большинство химических элементов — не дано ведь изначально, но получено лишь в результате научных исследований. И если мы теперь найдем нечто, что является простым или по крайней мере пока должно быть принято как таковое, то ему должно быть дано четкое название, так как язык первоначально не имеет выражения, точно соответствующего этому нечто. Дефиниция, имеющая целью ввести название для того, что логически просто, невозможна. Поэтому не остается ничего другого, как с помощью намеков дать знать читателю или слушателю, как следует понимать то, что имеется в виду под данным словом.

Керри не склонен признавать абсолютным различие между понятием и предметом. Он говорит: «Ранее мы сами высказали взгляд, что связь между содержанием понятия и предметом понятия в известном отношении является своеобразной и несводимой к чему-то иному; с этим, однако, вовсе не связан взгляд, будто свойства: быть понятием и быть предметом — исключают друг друга; последний взгляд так же мало следует из первого, как и то, что никто не может быть одновременно отцом и сыном, не следует из того, что отношение между отцом и сыном не может быть сведено к чему-то другому (здесь, конечно, не имеется в виду то, что, например, отец не может быть отцом того, чьим сыном он является)'.

Воспользуемся этим сравнением! Если бы в прошлом или настоящем были существа, которые, являясь отцами, не были бы детьми, то такие существа были бы, очевидно, совершенно иного рода, чем все люди, имеющие родителей. Подобное этому здесь как раз и имеет место. Понятие — как я понимаю это слово — предикативно*. Напротив, имя предмета, собственное имя, никак не может быть употреблено как грамматический предикат[2]. Правда, это надо пояснить, иначе наше утверждение будет казаться неверным. В самом деле, разве нельзя так же естественно говорить о чем-то, что это есть Александр Великий, или число четыре, или планета Венера, как естественно о чем-то сказать, что оно есть зеленое (является зеленым) или что оно есть млекопитающие? Когда думают так, то не различают способы употребления слова «есть». В последних двух примерах оно служит связкой, словом, указывающим просто на форму высказывания. Как таковое, оно может быть иногда представлено личным окончанием. Сравните, например: «этот лист — зеленый» и «этот лист зеленеет»: «dieses Blatt ist grün» — «dieses Blatt grünt». В этом случае мы говорим, что нечто подпадает под некоторое понятие и что при этом грамматический предикат обозначает это понятие. Напротив, в первых трех примерах «есть» употреблено так, как в арифметике употребляют знак равенства, чтобы выразить уравнение**. В предложении «Утренняя звезда есть Венера» мы имеем два собственных имени — «Утренняя звезда» и «Венера» — для одного и того же предмета. В предложении «Утренняя звезда есть планета» мы имеем одно собственное имя: «Утренняя звезда» и одно слово, обозначающее понятие, — понятийное слово: «планета». С точки зрения языка ничего не меняется от того, что «Венера» заменяется словом «планета»; но по существу отношение становится совершенно иным. Равенство обратимо; подпадение предмета под понятие является необратимым отношением. «Есть» в предложении «Утренняя звезда есть Венера» — как это очевидно — не просто связка: по содержанию оно является существенной частью предиката, так что в слове «Венера» содержится не весь предикат***. Вместо этого можно было бы сказать: «Утренняя звезда есть не что иное как Венера», и вот то, что ранее было заключено в простом «есть», мы выразили здесь в пяти словах, и теперь в словах «есть не что иное как» слово «есть» действительно только связка. То, что здесь высказывается, — это не *Венера*, а *не что иное, как Венера*. Эти слова обозначают понятие, под которое, разумеется, подпадает только один-единственный предмет. Но даже такое понятие мы все-таки должны отличить от

---

* Это значит — оно есть значение грамматического предиката.

** Я употребляю слово «равно» и знак «=» в смысле «такой же, что и», «не что иное, как», «тождественен с». Ср. E. Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (Leipzig, 1890), 1-й том, § 1, где, однако, вызывает возражение то, что не различаются два принципиально различных отношения: подпадение предмета под некоторое понятие и подчинение понятия понятию[3]. Повод для размышлений дают и замечания о полном корне (Vollwurzel)[4]. Знак = у Шрёдера не обозначает просто связку.

*** Ср. мои «Основании [арифметики]», § 66, примечание.

самого данного предмета*. Для него мы имеем здесь одно слово: «Венера», которое по сути никогда не может быть предикатом, хотя оно может составлять часть предиката. Значение** этого слова, стало быть, никогда не может выступать в качестве понятия, оно может быть только предметом. Что нечто в этом роде действительно имеет место, этого, пожалуй, и *Керри* не стал бы оспаривать. Но отсюда возникает различие, признание которого очень важно, — различие между тем, что может выступать только как предмет, и всем остальным. И это различие не стерлось бы и в том случае, если бы было верно, что, как полагает *Керри*, существуют понятия, которые могут быть также и предметами. Действительно, имеются случаи, которые как будто обосновывают такой взгляд. Я сам указал (Основания [арифметики], § 53, в конце) на то, что некоторое понятие может подпадать под более высокое понятие, но это не следует смешивать с подчинением одного понятия другому. *Керри* ссылается не на это — он приводит следующий пример: «понятие ‘лошадь’ есть понятие, которое легко усвоить», и полагает, будто понятие «лошадь» является предметом, именно — одним из предметов, которые подпадают под понятие «легко усваиваемое понятие». Совершенно верно! Два слова — «понятие ‘лошадь’» обозначают некий предмет, но именно потому они не обозначают никакого понятия — в том смысле, в каком я употребляю это слово. Это полностью соответствует тому отличительному признаку***, который я указал и который состоит в следующем: в единственном числе определенный артикль всегда указывает на предмет, тогда как неопределенный артикль сопровождает слово, обозначающее понятие, — понятийное слово. Правда, *Керри* полагает, что на языковых различиях нельзя основывать никаких логических положений; однако ни один человек, выдвигающий такие положения, вообще не может избежать того способа, которым я пользуюсь, так как нельзя понимать друг друга, не пользуясь языком, почему мы в конце концов и вынуждены считать, что другой человек воспринимает слова, речевые формы и структуру предложений в сущности так же, как и мы. Как уже говорилось, я хотел, не прибегая к дефинициям, ограничиться только общими указаниями, ссылаясь при этом на общенемецкое чувство языка. И можно быть только довольным тем, что языковое различие так хорошо согласуется с различием, относящимся к существу дела[6]. В случае неопределенного артикля нельзя, пожалуй, подметить никаких исключений из нашего правила, разве что можно вспомнить стародавнюю формулу вроде «Один благородный советник»[7]. Но в случае определенного артикля дело обстоит не так просто, особенно во множественном числе, однако к этому случаю не относится предложенный мною признак различения. В случае единственного числа, как мне кажется, вопрос может вызывать сомнение только тогда, когда единственное число употребляется вместо множественного, как, например, в предложениях: «турок осадил Вену», «лошадь есть четвероногое животное». Общий характер этих случаев без труда можно опознать, так что их наличие нисколько не умаляет значимости нашего правила. Ясно, что в первом предложении «турок» есть собственное имя народа. Что касается второго предложения, то, пожалуй, самым правильным будет считать его выражением общего суждения, такого, как: «все лошади суть четвероногие животные» или: «все нормально-организованные лошади суть четвероногие

* Ср. мои «Основания [арифметики]», § 51.

** Ср. мою статью о смысле и значении, которая скоро будет опубликована в журнале Zeitschr[ift] f[ür] Phil[osophie] u[nd] phil[osophische] Kritik[5].

*** Основания [арифметики], § 51, § 66 (примечание), § 68 (примечание), S. 80.

животные», о чем позже у нас еще пойдет речь*. И если *Керри* считает не относящимся к делу мой признак различения, утверждая, что в предложении «понятие, о котором я сейчас говорю, есть индивидуальное понятие» имя, состоящее из первых шести слов, наверняка означает некоторое понятие, то он понимает слово «понятие» не в моем смысле и противоречие заключается совсем не в том, о чем я говорил. Но никто не может требовать, чтобы мой способ выражения совпадал со способом, выбранным *Керри*.

Разумеется, нельзя не признать, что когда мы утверждаем: понятие *лошадь* не есть понятие** (тогда как, например, город Берлин есть город, а вулкан Везувий есть вулкан), — налицо такая косность языка, преодолеть которую невозможно. Язык здесь находится в затруднительном положении, которое и оправдывает уклонение от обычного способа речи. То, что наш случай — особого рода, на это указывает сам *Керри*, заключая слово «лошадь» в кавычки; я для этой цели употребляю курсив. Нет никакой причины подобным же образом выделять слова «Берлин» и «Везувий». В логическом исследовании нередко возникает потребность сказать что-либо о некотором понятии и облечь это высказывание в обычную для таких высказываний форму, так что именно высказывание становится содержанием грамматического предиката. В соответствии с этим можно было бы ожидать, что значением грамматического субъекта окажется понятие; но этого так просто не может произойти в силу его предикативной природы; сначала надо, чтобы оно было превращено в предмет, или, говоря точнее, данное понятие должно быть замещено некоторым предметом***, обозначаемым словом «понятие», которое ставится впереди, например:

«понятие *человек* не пусто».

На первые два слова здесь следует смотреть как на собственное имя****, которое — точно так же, как, например, «Берлин» или «Везувий», — не может иметь предикативного употребления. Когда мы говорим: «Иисус есть подпадающий под понятие *человек*», то предикатом является (отвлекаясь от связки)

«подпадающий под понятие *человек*»,

а это значит то же самое, что и

---

* Сейчас, как мне кажется, имеется тенденция преувеличивать значение того положения, что разные языковые выражения никогда не являются совершенно равнозначными и что данное слово никогда не может быть точно передано на другом языке. По-видимому, можно было бы пойти еще дальше и сказать, что даже люди, говорящие на одном и том же языке, одно и то же слово не понимают совершенно одинаково. Вопрос, в какой мере верны подобные положения, я не буду рассматривать, а лишь подчеркну, что несмотря на это различные выражения нередко имеют нечто общее, — его я называю смыслом, а в частном случае предложений — мыслью; иными словами: нельзя не признать, что один и тот же смысл, одну и ту же мысль можно выразить по-разному, причем различие заключено не в смысле, а в истолковании, освещении, окраске смысла и в логике учитываться не должно[8]. Возможно, что некоторое предложение сообщает не меньше и не больше сведений, чем другое; добавлю еще, что несмотря на все многоообразие языков человечество имеет общее достояние в виде некоторой совокупности мыслей. Если запретить всякое преобразование формы выражения под предлогом, что мы тем самым изменяем содержание, то логика окажется просто парализованной; ибо стоящая перед ней задача будет, конечно, совершенно неразрешимой, если не стараться разглядеть одну и ту же мысль в ее разнообразных одеяниях. А дефиниции в этом случае должны были бы быть отброшены как несостоятельные.

** Аналогичное изменение происходит, когда относительно предложения «эта роза алая» мы говорим: грамматический предикат «алая»» относится к субъекту «эта роза». Здесь слова «грамматический предикат ‘алая’» являются не грамматическим предикатом, а субъектом. Именно потому, что мы прямо произносим предикат, мы лишаем его свойства быть предикатом.

*** Ср. мои «Основания [арифметики]», с. X.

**** Собственным именем я называю всякий знак, указывающий на предмет.

«человек».

В этом предикате словесное образование

«понятие *человек*»

есть только часть.

Против предикативной природы понятия можно было бы выдвинуть то возражение, что обычно ведь говорят о понятии субъекта. Однако и в таких случаях, как, например, в предложении:

«все млекопитающие имеют красную кровь»,

понятие проявляет свою предикативную природу*, ибо вместо этого предложения можно сказать:

«то, что есть млекопитающее, имеет красную кровь»

или

«если нечто есть млекопитающее, то оно имеет красную кровь».

Когда я писал свои «Основания арифметики», я не провел еще различия между смыслом и значением** и поэтому охватывал выражением «содержание, о котором судят», «содержание, допускающее истинностную оценку» то, что я теперь по отдельности обозначаю словами «мысль» и «значение истинности». Поэтому я больше не могу быть полностью доволен текстом того определения (Erklärung), которое дано там на с. 77, хотя в сущности я сохраняю прежнее мнение. Мы можем кратко сказать, понимая «предикат» и «субъект» в лингвистическом смысле: понятие есть значение предиката, предмет есть то, что никогда не может составлять все значение предиката, но может быть значением субъекта. При этом следует заметить, что слова «все», «каждый», «ни один», «некоторые» стоят перед словами, обозначающими понятия, — понятийными словами. В общих и частных утвердительных и отрицательных предложениях мы выражаем отношения между понятиями и указываем на особый род данного отношения с помощью этих слов, в силу чего логически они связаны с понятием, перед которым они стоят, не теснее, чем с другими понятиями; их следует соотносить с предложением в целом. Это легко усмотреть из отрицания. Если бы в предложении:

«все млекопитающие суть сухопутные [животные]»

слова «все млекопитающие» выражали логический субъект, к которому относится предикат *суть сухопутные* [*животные*], то для того, чтобы подвергнуть отрицанию целое предложение, надо было бы отрицать предикат: «суть не сухопутные [животные]». Но вместо этого надо «не» поместить перед «все», откуда вытекает, что «все» логически относится к предикату. Напротив, отрицая предложение «понятие *млекопитающее* является подчиненным понятию *сухопутное* [*животное*]», мы отрицаем предикат: «не является подчиненным понятию *сухопутное* [*животное*]».

Установив, что при моем способе выражения такие обороты, как «понятие *F*», обозначают не понятия, а предметы, мы приходим к тому, что отпадает большая часть возражений *Керри*. Если он думает (с. 281)[9], что я отождествляю понятие и объем понятия, то он ошибается. Я только высказал свое мнение, что в выражении «то количество (Anzahl), которое присуще понятию *F*, есть объем понятия

---

* То, что я здесь называю предикативной природой понятия — есть только особый случай потребности в восполнении или ненасыщенности, относительно которой в моей работе *Функция и понятие* (Иена, 1891) я указал, что она характерна для *функции*. Выражения «функция $f(x)$» там нельзя было, пожалуй, избежать, хотя и в этом случае возникает трудность, вызванная тем, что значение этих слов не есть функция.

** Ср. мою статью «О смысле и значении» [в наст. кн. с.230—246].

равночисленно понятию F», слова «объем понятия» можно было бы заменить словом «понятие». При этом надо внимательно следить за тем, чтобы это слово было в этом случае взято с определенным артиклем. Впрочем, это было только попутным замечанием, и в дальнейшем на нем я ничего не основывал.

Если, в соответствии со сказанным, *Керри* не удается устранить разрыв между понятием и предметом, то, может быть, стоило бы использовать относящиеся к этому мои высказывания. Я говорил*, что задание числа содержит высказывание о некотором понятии[10]; я имею в виду те свойства, которые высказываются о некотором понятии, и допускаю подпадение понятия под более высокое понятие**. Я назвал существование свойством понятия. Что я под этим имею в виду, лучше всего пояснить на примере. В предложении «существует по крайней мере один корень квадратный из 4» высказывается что-либо не об определенном числе 2 и не о числе — 2, а о некотором понятии, именно, о понятии *корень квадратный из* 4, про который говорится, что оно не пусто. Но когда я ту же самую мысль выражу так: «понятие *корень квадратный из* 4 непусто (ist erfüllt)», первые пять слов образуют собственное имя некоторого предмета, и об этом предмете нечто высказывается. Однако надо обратить внимание на то, что это высказывание не совпадает с тем, которое было сделано о понятии. Это может удивить только того, кто не признает, что мысль может быть проанализирована — разложена — по-разному и что благодаря этому то одно, то другое выступает в качестве субъекта и предиката. В самой мысли еще не дано, какую ее часть надлежит рассматривать как субъект. Говоря: «субъект этого суждения», лишь в том случае обозначают нечто определенное, когда вместе с тем указывают на определенный род расчленения, анализа этого суждения. В большинстве случаев это связано с определенным словесным текстом. Однако никогда не надо забывать, что различные предложения могут выражать одну и ту же мысль. Так, в нашей мысли можно обнаружить еще и такое высказывание о числе 4:

«число 4 обладает тем свойством, что существует нечто,
квадратом чего оно является».

Язык имеет средства выразить, когда та или иная часть мысли выступает в качестве субъекта. Одним из самых распространенных способов является различение форм действительного и страдательного залогов. Поэтому вполне может случиться, что одна и та же мысль, проанализированная *одним* способом, приобретает единичный характер, проанализированная по-другому — носит частный (partikulär) характер, а при третьем способе анализа получает характер всеобщности. Поэтому не надо удивляться тому, что на одно и то же предложение можно смотреть и как на высказывание о некотором понятии, и как на высказывание о некотором предмете, при условии, что эти высказывания различны. В предложении «существует по крайней мере один корень квадратный из 4» слова «корень квадратный из 4» нельзя заменить на «понятие *корень квадратный из* 4»; иными словами, высказывание, которое подходит для данного понятия, не подходит для данного предмета. Хотя в нашем предложении понятие и не является субъектом, предложение все же нечто говорит о нем. Можно считать, что здесь выражено подпадение одного понятия под более высокое понятие***. Но это никак не устраняет различия между предметом и понятием. Заметим, во-первых, что в предложении «существует по крайней мере один корень квадратный из 4» понятие не изменяет своей предикативной природе.

* Основания [арифметики], § 46.
** Основания [арифметики], § 53.
*** В моих «Основаниях [арифметики]» я такие понятия называл понятиями второго порядка, а в моей статье «Функция и понятие» — понятиями второй ступени, и здесь я их буду так и называть.

Можно сказать: «существует нечто, обладающее тем свойством, что, будучи умножено на себя, дает 4». Следовательно, то, что здесь высказывается о понятии, никак не может быть высказано о предмете; ибо собственное имя никогда не может быть выражением, обозначающим предикат, хотя оно может быть его частью. Я не хочу этим сказать: если высказанное о некотором понятии будет отнесено к какому-либо предмету, получится ложь; а хочу сказать, что это невозможно, что это не имеет смысла. Предложение «существует Юлий Цезарь» не истинно и не ложно, оно не имеет смысла, хотя предложение «существует некий человек по имени Юлий Цезарь» имеет смысл; но в последнем случае мы опять-таки имеем дело с понятием, о чем свидетельствует неопределенный артикль. То же самое относится и к предложению «существует только одна Вена». Нас не должно вводить в заблуждение то, что язык употребляет одно и то же слово иногда как собственное имя, иногда как обозначение понятия. Имя числительное указывает здесь на то, что имеет место последний случай. Значит, «Вена» выступает здесь как обозначение понятия в той же мере, что и «имперский город» (Kaiserstadt)[11]. В этом смысле можно сказать: «Триест не Вена». Напротив, если в предложении «понятие *корень квадратный из* 4 не пусто» мы заменим собственное имя, образованное первыми пятью словами, на «Юлий Цезарь», то мы получим предложение, которое имеет некий смысл, однако является ложным; это объясняется тем, что непустота — в том смысле, в каком мы понимаем это слово, — в действительности может быть высказана только о предметах совершенно особого рода, именно о таких, которые могут быть обозначены собственными именами, имеющими форму «понятие *F*». Слова «понятие *корень квадратный из четырех*» ведут себя с точки зрения их заменимости существенно иначе, чем слова «некоторый корень квадратный из четырех» в первоначальном нашем предложении; это значит, что значения этих словообразований существенно различны.

То, что было показано здесь на одном примере, носит общий характер: понятие ведет себя существенно предикативно даже тогда, когда о нем нечто высказывается; следовательно, оно в этом случае может быть заменено опять-таки понятием, но ни в коем случае не предметом. Поэтому высказывание, которое относится к понятию, совершенно не подходит для предмета. Понятия второй ступени, под которые подпадают понятия, существенно отличны от понятий первой ступени, под которые подпадают предметы. Отношение предмета к понятию первой ступени, под которое он подпадает, отлично от отношения — правда, сходного с ним — понятия первой ступени к понятию второй ступени. Чтобы учесть не только различие, но и сходство между ними, быть может, имеет смысл говорить, что предмет *подпадает под* понятие первой ступени, а понятие *впадает* в понятие второй ступени. Стало быть, различие между понятием и предметом остается во всей своей полноте.

С этим связано то, что я говорил в § 53 моих «Оснований [арифметики]» относительно моего употребления слов «свойство» и «признак». Высказывания *Керри* побуждают меня еще раз вернуться к данному вопросу. Указанные слова служат для обозначения отношений в таких предложениях как «Φ есть свойство, присущее Γ» и «Φ есть признак, присущий Ω». Согласно тому способу выражения, который я принял, нечто может быть вместе свойством и признаком, но только не одного и того же. Я называю понятия, под которые подпадает некоторый предмет, его свойствами, так что

«быть Φ есть свойство, присущее Γ»

есть только другой оборот для

«Γ подпадает под понятие Φ».

Если предмет Γ обладает свойствами Φ, X и Ψ, то я могу объединить их в Ω, и окажется: сказать, что Γ имеет свойство Ω, — это значит сказать то же самое, что и: Γ обладает свойствами Φ, X и Ψ. Тогда я называю Φ, X и Ψ признаками понятия Ω и вместе с тем свойствами, присущими Г. Ясно, что отношение Φ к Γ совершенно отлично от отношения Φ к Ω, и что поэтому нужны разные названия. Γ подпадает под понятие Φ; что же касается Ω, то оно само является понятием и поэтому не может подпадать под понятие первой ступени Φ, а может находиться в сходном отношении только к понятию второй ступени. Напротив, Ω подчинено Φ.

В этой связи рассмотрим следующий пример. Вместо того чтобы сказать:

«2 есть положительное число», и
«2 есть целое число», и
«2 меньше, чем 10»,

мы можем сказать:

«2 есть положительное целое число, которое меньше, чем 10».

Здесь в качестве свойств предмета 2 выступают:

быть положительным числом,
быть целым числом,
быть меньше, чем 10 ;

вместе с тем они являются признаками понятия

положительное целое число, которое меньше, чем 10.

Последнее не есть ни положительное число, ни целое число, ни меньше, чем 10. Хотя оно и подчинено понятию *целое число*, оно не подпадает под него.

Сравним теперь это с тем, что *Керри* говорит в своей второй статье[12] на с. 224: «Под числом 4 понимают результат сложения 3 и 1. Предмет понятия, заданного таким способом, есть индивидуальное число 4, совершенно определенное число в натуральном ряду чисел. Этот предмет несет в себе, очевидно, в точности те признаки, которые названы в его понятии — при том, как будто необходимом, условии, что мы отказываемся приписывать ему в качестве *propria* — собственных признаков — бесконечное множество отношений, в которых он стоит ко всем прочим индивидуальным числам, — и никакие другие: ‘то самое’ (‘die’) 4 тоже есть результат сложения 3 и 1».

Нетрудно заметить, что различие, которое я провел между свойством и признаком, тут полностью исчезло. *Керри* различает здесь число 4 от ‘того самого’, ‘данного’(‘die’) числа 4. Должен признаться, что для меня это различие непонятно. Число 4 должно быть понятием; ‘данное’, ’то самое’ (‘die’) число 4, должно быть предметом этого понятия и ничем иным, как индивидуальным числом 4. Не стоит и доказывать, что здесь ничего не остается от проводимого мною различения понятия и предмета. Похоже на то, что *Керри* здесь улавливает, хотя и очень смутно, то различие, которое я провожу между смыслом и значением слов «число 4»*. Однако только о значении можно сказать, что оно является результатом сложения 3 и 1.

Как же следует понимать «есть» в предложениях «число 4 есть определенный (das) результат сложения 3 и 1» и «‘то самое’ (‘die’) число 4 есть результат операции сложения 3 и 1»? Является ли «есть» простой связкой или же служит для выражения логического равенства? В первом случае перед словом «результат» должен был бы отсутствовать определенный артикль «das»; и эти предложения должны были бы гласить примерно следующее:

«число 4 есть результат (ist Resultat) сложения 3 и 1»

и

«‘то самое’ (‘die’) число 4 есть результат (ist Resultat) сложения 3 и 1».

---

* Ср. упоминавшуюся выше статью о смысле и значении.

Но тогда получилось бы, что предметы, которые *Керри* обозначает с помощью выражений

«число 4» и «‘то самое’ число 4»,

подпали бы под понятие

результат операции сложения 3 *и* 1.

Остается только спросить, чем же отличаются друг от друга эти предметы. Слова «предмет» и «понятие» я употребляю здесь привычным для меня образом. То, что, как кажется, хотел сказать *Керри*, я выразил бы так:

«число 4 (die Zahl 4) имеет в качестве свойства то, и только то, что понятие

результат операции сложения 3 *и* 1

имеет в качестве признака». Смысл первого из двух наших предложений я выразил бы так:

> «быть числом 4 (eine Zahl 4 zu sein) — это то же, что быть результатом операции сложения 3 и 1»;

и тогда то, что, как я полагаю, соответствует мнению *Керри*, может быть выражено также и так:

> «число 4 (die Zahl 4) имеет в качестве свойства то, и только то, что понятие
>
> *число* 4

имеет в качестве признака».

Истинно ли это — этот вопрос можно здесь не решать. Теперь в словах «‘die’ Zahl 4» определенный артикль можно не ставить в одиночных кавычках.

Однако в этих попытках объяснить дело мы предполагаем, что определенный артикль перед «Resultat» и «Zahl 4» по крайней мере в одном из двух предложений был поставлен по ошибке. Если же взять слова как они есть, то на их смысл можно смотреть только как на логическое уравнение:

> «число 4 (die Zahl 4) есть не что иное, как результат (das Resultat) операции сложения 3 и 1».

Определенный артикль перед «Resultat» с логической точки зрения оправдан только в том случае, если 1) таковой результат существует, 2) он единственен. Тогда это словообразование обозначает предмет, и на него следует смотреть как на собственное имя. Если оба наши предложения понимать как логические уравнения, то из них будет следовать — поскольку правые части этих равенств совпадают, — что число 4 и есть ‘данное’, ‘то самое’ число 4 (die Zahl 4 sei ‘die’ Zahl 4) , или, если угодно, число 4 (die Zahl 4) есть не что иное, как ‘данное’, ‘то самое’ число 4 (‘die’ Zahl 4), и таким образом различие, проводимое *Керри*, полностью рушится. Однако в мою задачу не входит показывать противоречивость его рассуждений. Меня здесь, собственно говоря, совершенно не касается, что́ понимает он под словами «предмет» и «понятие»; я только хочу внести ясность в свой собственный способ употребления этих слов, а также показать, что он во всяком случае отличается от способа употребления этих слов, принятого *Керри*, независимо от того, противоречит он себе или нет.

Я отнюдь не оспариваю права *Керри* употреблять по-своему слова «предмет» и «понятие», пусть только и за мной признают такое же право, а также право утверждать, что я с помощью своего обозначения выявил различие величайшей важности. Конечно, пониманию читателей будет препятствовать то своеобразное положение, которое возникает в силу известных особенностей языка и которое состоит в том, что мои выражения, если брать их текстуально, могут вызвать ошибочную мысль, будто называние относится к предмету, тогда как в виду имеется понятие. Я вполне сознаю, что в таких случаях полностью завишу от благосклонности отношения читателя, который не поскупится и на щепотку соли — проявят великодушие.

Иногда думают, что эта трудность выдумана искусственно, что вовсе не надо вводить в рассмотрение такое неподходящее нечто, которое я называю понятием, и что на подпадение предмета под понятие можно вместе с *Керри* смотреть как на отношение, в котором то, что *один раз* выступает как предмет, другой раз может оказаться понятием. Слова «предмет» и «понятие» в этом случае служат только для того, чтобы указать на различное положение членов отношения. Можно поступить и так; однако если кто-либо думает, что на этом пути можно избежать данной трудности, он ошибается. Трудность только отодвигается в тень; ибо нельзя, чтобы все части мысли были завершены, но надо, чтобы по крайней мере одна из них была как-то ненасыщена или, иначе говоря, предикативна, так как в противном случае они не будут связаны друг с другом. Так, смысл словообразования «число 2» не получает связи со смыслом выражения «понятие *простое число*», если мы не прибегнем для этого к связующему средству. Это средство связи употребляется нами в предложении «число 2 подпадает под понятие *простое число*». Оно содержится в словах «подпадает под», которые в двух отношениях нуждаются в восполнении — в восполнении подлежащим, субъектом и в постановке следующих за ними слов в винительном падеже; только благодаря ненасыщенности своего смысла эти слова оказываются в состоянии служить связующим средством. И только когда они восполнены указанным выше образом, мы имеем завершенный, законченный смысл, мы имеем мысль. Вот о таких словах и словообразованиях я и говорю, что они обозначают некоторое отношение. И оказывается, что в случае отношения мы имеем ту же трудность, которую мы, как нам казалось, преодолели в отношении понятий; ибо словами «отношение подпадения предмета под понятие» мы обозначаем не отношение, а предмет, и три собственных имени «число 2», «понятие *простое число*», «отношение подпадения предмета под понятие» ведут себя в отношении друг друга так же «непримиримо», как только два первых; как бы мы их ни группировали, мы не получим предложения. Становится ясно, что данная трудность, лежащая в ненасыщенности какой-либо части мысли, хотя и была отодвинута в тень, но отнюдь не преодолена. Правда, «завершенными» и «ненасыщенными» могут быть только образные выражения, но я не хочу — да в рамках этой статьи и не могу — идти дальше этого намека.

Читатель лучше поймет мои слова, если он привлечет мою работу «*Функция и понятие*». Что касается того, что в анализе называют функцией, то вопрос об этом наталкивается на аналогичное препятствие; после тщательного исследования можно прийти к выводу, что оно коренится в существе дела и имеет основание в природе нашего языка, в силу чего известные затруднения, связанные с языковыми выражениями, не могут быть преодолены, и поэтому ничего другого не остается, как, поняв их, в дальнейшем всегда это учитывать.

КРИТИЧЕСКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПУНКТОВ В «ЛЕКЦИЯХ ПО АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ» Э. ШРЁДЕРА*

Господин Шрёдер отвергает булевский *universe of discourse* на основании своеобразного рассуждения, которое я хотел бы подвергнуть здесь более точной проверке, так как при этом выясняется необходимость различения, по-видимому, неизвестного многим логикам.

Чтобы сделать понятным дальнейшее, необходимо вначале в основных чертах описать шрёдеровское исчисление областей. Это исчисление в изложении автора всегда сплетено с собственно логикой, что затрудняет понимание сути дела. Поэтому поначалу я оставляю логику совершенно в стороне с тем, чтобы лучше показать своеобразие этого исчисления.

Следуя господину Шрёдеру, представим себе, что нам дано некоторое многообразие элементов[2]. Вопрос о природе этого многообразия нас не интересует, и, таким образом, каждое многообразие может быть заменено любым другим. Для наглядности лучше всего ввести в рассмотрение многообразие точек на плоской поверхности или многообразие полей на плоскости, которые получаются, если на ней провести две системы параллельных прямых, так что никакие два поля не будут иметь ни одной общей точки. «Любую совокупность элементов многообразия мы называем *областью* последнего» (с. 157). В качестве важнейшего отношения, которое может существовать между областями, выдвигается включение, под которым понимается, что одна область содержится в другой, включая и тот случай, когда обе области совпадают. Это отношение включения подчиняется, далее, двум принципам:

1) каждая область включена сама в себя;

2) если одна область включена в другую, а эта последняя — в третью, то и первая включена в третью.

Здесь мы могли бы везде вместо ‘областей’ говорить также ‘классы’, понимая под классом коллективное целое, например лес, не связывая его с понятием, к чему нас, конечно, постоянно побуждает язык, который настоятельно предлагает нам такие выражения, как ‘класс людей, деревьев’ и т.п., — выражения, в которых всегда называется какое-либо понятие[3]. То, что господин Шрёдер именует здесь ‘включением’ или ‘субсумцией’, — это, собственно говоря, не что иное, как отношение части к целому, с добавлением, что каждое целое должно рассматриваться как часть самого себя. С той точки зрения, которой мы придерживаемся, нет нужды в словах ‘индивид’ и ‘отдельная вещь’. Делимость можно мыслить продолжающейся

* Лейпциг, Тейбнер. В дальнейшем страницы указываются по тому 1 этого издания[1].

до бесконечности. Собственно говоря, выражение 'элементы' здесь тоже не имеет важного значения; ибо совершенно все равно, будем ли мы в приведенном выше примере считать плоскость состоящей из квадратных полей, как из элементов, или в качестве таковых станем рассматривать треугольники, которые получаются, если в каждом таком поле провести диагональ. Если мы возьмем в качестве многообразия германское войско, а в качестве области в нем — пехотный полк, то все равно, станем ли мы рассматривать в качестве элементов батальоны, роты или отдельных воинов. Итак, поскольку все равно, какие части целого назвать элементами, лишь бы каждая из рассматриваемых областей была из них составлена, и поскольку совершенно не требуется предполагать части, которые дальше нельзя делить, то может быть лучше совсем не говорить об элементах. Как слово 'многообразие', так и слово 'класс', может привести к неясности, ибо оно часто употребляется в связи с понятийным словом, например, когда мы говорим 'многообразие точек', 'многообразие деревьев' и т.д., благодаря чему к рассуждению примешивается нечто логическое, что пока должно оставаться в стороне. Чтобы иметь дело с совершенно чистым исчислением областей, лучше избегать слов 'многообразие', 'класс', 'элемент' 'субсумция' и вместо 'многообразия' говорить, скажем, 'главная область'.

Я приведу несколько мест из книги Шрёдера, которые подтверждают этот взгляд на исчисление областей. «*Один* индивид мы тоже можем назвать классом, именно — классом, содержащим только сам этот индивид... Но тот класс, который охватывает множество индивидов, сам может опять-таки быть представлен как некоторая мыслимая вещь и в соответствии с этим как 'индивид' (в широком смысле, например, 'относительно' — в отношении к более высоким классам)» (с. 148). Речь здесь идет об индивидах; кроме того, обращает на себя внимание то, что о различии между индивидом и классом говорится вскользь. Что класс должен пониматься как совокупность предметов, как собрание их в одно целое — это следует из многих мест. Так, на с. 67 сказано, что индивидуальные вещи составляют класс. Класс называется совокупностью (Gesamtheit) (с. 83). « Любые объекты мышления мы в состоянии объединить ('соединить' — 'zusammenfassen') в качестве 'индивидов' в класс» (с. 148). Мы видели выше, что класс может совпадать с одним-единственным индивидом, именно с тем, из которого он состоит. Так, на с. 150 мы читаем: «Когда мы говорим: 'Некоторые люди — умные', то субъектом является класс, состоящий из неопределенного количества, из 'некоторых' людей». Заметим: из сказанного получается, что класс состоит из предметов. Правда, здесь уже примешивается логическое. На с. 161 говорится: «Исходя из α), мы приходим теперь к полю приложения β), руководствуясь следующим соображением[4]: 'элементы' нашего многообразия могут быть и так называемыми '*индивидами*', поэтому 'области' этого многообразия могут быть охарактеризованы как системы и, если угодно, как '*классы*' таких индивидов'. Здесь следует заметить, что у Шрёдера 'система' означает собрание в одно целое (с. 71 и 72).

Пока еще одно гармонирует с другим; и дефиницию «тождественной суммы» (с. 196) также можно еще допустить, несмотря на ее формальную уязвимость, если учесть интерпретацию (с. 217), согласно которой тождественное сложение сводится к объединению, агрегированию, когда индивиды обоих классов соединяются, 'собираются' (zusammenlesen) в один единственный класс. Здесь тоже можно предполагать, что так называемые индивиды в свою очередь как угодно делимы, и это не приведет к трудностям. Это тождественное сложение, как и все предыдущие, можно прекрасно представить диаграммами Эйлера[5].

Однако теперь мы подошли к пункту, где чистого исчисления областей более не достаточно и где пояснение с помощью Эйлеровых диаграмм оказывается неподходящим[6]. Фактически чистое исчисление областей мало плодотворно, а его мнимая плодотворность в рассматриваемой книге, пожалуй, как раз и основана на том, чтó не является чистым: в него везде проникает нечто логическое, которое почти незаметно появляется уже со словами 'многообразие', 'индивид', 'класс', 'субсумция'.

Перейдем к тождественному умножению, которое, согласно интерпретации, данной на с. 217, сводится к выделению, отбору, когда из одного класса 'выбираются' индивиды другого класса. Даже тут можно еще в основном оставаться в рамках прежнего способа рассмотрения и применять диаграммы Эйлера — при условии, что части плоскости, соответствующие обоим классам, имеют общую часть; последняя тогда как раз и представляет тождественное умножение[7]. Но как быть, когда для двух частей плоскости нет общей части? Ведь и для классов имеет место случай, когда два из них не имеют никакой общей части. Если, в соответствии с принятым нами словоупотреблением, класс состоит из предметов, то есть является их собранием, их соединением в одно целое, то он должен исчезнуть, когда исчезают эти предметы. Если мы сожжем все деревья в лесу, мы тем самым сожжем лес. Пустой класс, стало быть, не может существовать. Если бы теперь сказали: 'тождественное произведение существует не всегда' и для того, чтобы применить его каждый раз проводили бы исследование с целью узнать, существует ли оно, то все было бы в порядке; правда, исчисление было бы совершенно парализовано. Поскольку господин Шрёдер не идет на это, говорит о пустом классе (с. 147) и без дальнейших околичностей пользуется в исчислении тождественным умножением, он тем самым покидает почву чистого исчисления областей. При этом он опирается на *тождественный* нуль, о котором он говорит (с. 197), что его предназначение, заслуга его введения — в том, что мы получаем право всегда говорить о тождественном умножении. Возникает вопрос: 'а чья же заслуга, что можно говорить о тождественном нуле?' Однако отложим его пока в сторону!

Мы должны сначала ввести в рассмотрение логические моменты, которые до сих пор мы держали вне поля зрения. Согласно автору, переход происходит примерно так. Тождественное исчисление — первоначальное чистое исчисление областей — допускает разнообразные приложения (с. 160). Истолковывая теперь как классы, как понятия, рассматриваемые по объему, те буквы, которые до сих пор понимались как области, мы приходим к логике. Если бы мы остались при прежнем употреблении слова 'класс', мы, конечно, не получили бы ничего нового. Классы в этом смысле нельзя отличить от областей. Но если под классами мы станем понимать объемы понятий, а отношение включения — отношение, которое было названо также субсумцией и было не чем иным, как отношением части к целому, — заменим теперь отношением, имеющим место между объемами понятий, когда одно понятие подчинено другому, то тем самым мы вступаем на совершенно новый путь. Правда, господин Шрёдер, по-видимому, это не очень замечает. Он помещает этот способ приложения своего исчисления под рубрикой β) (с. 160) и тем самым отделяет его от помеченного рубрикой α) применения исчисления к областям, как нечто от него совершенно отличное; но когда он на с. 161 говорит, что элементы нашего многообразия могут быть вместе с тем '*индивидами*', а это означает, что 'области' этого многообразия можно обозначить как системы и, если угодно, как '*классы*' таких индивидов, то все-таки кажется, что это только особый случай. Тогда получается, что классы являются в то же время и областями, и не нужно никакого обоснования того, что законы исчисления областей и здесь сохраняют свою силу. Однако благодаря той связи с понятиями, в которую ставятся классы, когда они должны выступать как объемы понятий, дело получает иной оборот; прежде всего это выражается внешне, благодаря тому, что формулы получают новый перевод[8]. То, что раньше, в соответствии с существом дела, могло быть передано словами: '*A* есть часть *B*', теперь должно переводиться: 'Все *A* суть *B*'. Я нахожу здесь прежде всего небольшую шероховатость. Если под *A* и *B* понимать классы или объемы понятий, то нельзя сказать: 'Все *A* суть *B*', потому что здесь *A* и В имеют другой смысл[9]. Например, если *A* есть объем понятия *квадрат*, а *B* — объем понятия *прямоугольник*, то нельзя сказать: 'Каждый объем понятия *квадрат* есть объем понятия *прямоугольник*' или 'Все объемы понятия *квадрат* суть объемы понятия *прямоугольник*' или 'Объем понятия *квадрат* есть объем понятия *прямоугольник*'. Господин Шрёдер, который обычно очень следит за точностью выражения, что можно только приветствовать, к сожалению, в данном случае изменил своей привычке и тем самым затемнил дело. Далее, *A* и *B* получают также названия субъекта и предиката (с. 132 и 133) или понятия субъекта и понятия предиката. Это тоже неточно, если не употреблять выражения 'понятие' и 'объем понятия' как равнозначащие. Равным образом, знаку включения, которым выражалось, что *A* есть часть *B*, теперь должна соответствовать связка '*есть*' или '*суть*' (с. 132 и 133), хотя когда мы вместо 'Все млекопитающие суть позвоночные' говорим 'Класс млекопитающих является включенным в класс позвоночных', предикатом является не *класс позвоночных*, а *включенный в класс позвоночных*, а слова *является включенным* представляют собой не просто связку — это связка вместе с частью предиката.

Переходя к рассмотрению того, по каким соображениям Шрёдер отвергает булевский *universe of discourse*, отметим: автор здесь постоянно меняет точки зрения, чтó, как скоро будет видно, приводит к пагубным последствиям. Автор постоянно говорит о некотором многообразии, содержащем области, классы, в пределах которого в каждом данном случае развивается мышление. Это многообразие получает название 1, и господин Шрёдер обещает показать, что оно не может быть всеохватывающим, каковым является булевский *universe of discourse*. На с. 245 говорится:

«Именно, как установлено, 0 должен содержаться в *любом классе*, который может быть выбран из многообразия 1; ... 0 должен быть субъектом *для каждого* предиката».

«Если теперь в качестве класса *a* мы возьмем *класс тех классов многообразия*, которые равны 1 (а поступить так мы, конечно, имели бы право, если бы все мыслимое было можно заключить в многообразие 1), то оказалось бы, что этот класс охватывает в сущности только *один* объект, а именно, сам символ 1, или же все многообразие в целом, составляющее его значение, — *но кроме того* '*ничего*', то есть 0. Тогда получается, что, поскольку 1 и 0 составляют класс тех объектов, которые должны считаться равными 1, мы должны были бы признать: не только 1=1, но *также* 0 = 1. Ибо, согласно принципу II[10], любой предикат, который присущ какому-либо классу (здесь предикат: быть тождественно-равным 1), должен быть присущим и каждому индивиду этого класса».

На с. 246 автор показывает, что в этом рассуждении вместо 1 можно взять любой класс *b* рассматриваемого многообразия, и тогда мы придем к следствию 0 = *b*. Как гром среди ясного неба появляется противоречие![11] Как могло случиться, что в логике, построенной как точная наука, мы смогли придти к подобным вещам? Кто может поручиться, что в дальнейшем мы вдруг снова не окажемся перед противоречием? Возможность таких вещей указывает на ошибку, допущенную в самом начале. Господин Шрёдер делает из этого вывод, что многообразие, с которого мы начинаем, должно отличаться тем, что среди его элементов, являющихся индивидами, не должно быть классов, в свою очередь имеющих своими элементами такие индивиды, которые являются элементами того же многообразия. Предлагаемый выход из положения напоминает снятие судна с мели, посадки на которою можно было избежать при правильном его вождении. Теперь становится ясно, почему с самого начала введено указанное многообразие в качестве арены, на которой развертываются рассматриваемые события; оно объясняется предвидением грозящей опасности; в чистом исчислении областей для этого нет никакой причины. Это дополнительное ограничение поля нашей логической деятельности ни в коем случае нельзя назвать изящным. В то время как обычно считается, что логика имеет право притязать на неограниченность области действия своих законов, здесь от нас требуют, чтобы мы предварительно ограничивали и тщательно проверяли многообразие и говорят, что лишь после этого мы получаем право действовать в его пределах. Отсюда следует, что тождественный нуль тоже зависит от ограничения многообразия. Так, может случиться: то, что в одном многообразии есть нечто (etwas), в другом оказывается нулем или ничем (nichts). А так как отрицание определяется с помощью 0 и 1 (с. 302), то и оно оказывается зависимым от выбора многообразия, и может случиться так, что некоторый класс *a* является в одном многообразии отрицанием класса *b*, а в другом нет[12]. Итак, в соответствии с этим, когда мы формулируем строгое научное утверждение, всегда надо точно задавать многообразие, в рамках которого непосредственно ведется исследование. Все это, естественно, выдвигает перед нами вопрос, нельзя ли избежать этого неудобства и что вообще мы выигрываем, когда ограничиваем сферу нашего действия.

Когда господин Шрёдер (с. 248) требует от исходного многообразия, чтобы среди его элементов, являющихся 'индивидами', не было классов, охватывающих в свою очередь элементы того же многообразия в качестве своих индивидов, он, очевидно, отличает случай, когда нечто дано в качестве индивида некоторого многообразия или класса, когда это нечто как индивид входит в класс, — от того случая, когда нечто как класс содержится в некотором многообразии или классе. Подобно этому, господин Гуссерль в своей рецензии на шрёдеровский труд* различает выражения 'Класс содержит нечто в качестве элемента' и 'Класс содержит нечто как подчиняющий класс' и с помощью этого пытается устранить трудность. Здесь следует подчеркнуть, что мы натолкнулись на существенное различие двух отношений, которые автор обозначает одним и тем же знаком (знаком возможного подчинения или включения). Отсюда мы снова видим, что больше не находимся на почве исчисления областей, ибо там мы имели только отношение части к целому, и не было никакого основания для различения случаев, когда класс содержит нечто как индивид и когда он содержит нечто как класс. Для логических отношений диаграммы Эйлера являются неудачной иллюстрацией, ибо они не могут передать этого важного различения**.

Чтобы внести ясность в вопрос, необходимо исправить ошибку Шрёдера и дать

---

* Götting[ische] gel[ehrte] Anz[eigen], 1891. S. 272[13].

** Это, конечно, не значит, что все те, кто порицают диаграммы Эйлера, тем самым уже показывают, что они лучше понимают положение дела. Когда в суждении 'Некоторые числа простые' они рассматривают 'некоторые числа' как субъект или выдают 'все тела' или понятие *тело*, взятое во всем объеме, за субъект суждения 'Все тела суть тяжелые', то в основе этого лежит тот же внешний, можно сказать, механический или количественный взгляд на понятие, из которого вышли и диаграммы Эйлера. Если такие предложения подвергнуть отрицанию, то его следует помещать перед 'некоторые' или 'все', из чего ясно, что эти слова по смыслу следует отнести к предикативной части предложения. Слово 'некоторые' указывает на отношение, в котором в нашем примере стоят друг к другу понятия 'число' и 'простое число'. Подобно этому во втором примере 'все' указывает на отношение между понятиями *тело* и *тяжелое*. Логическую суть дела лучше выявляет выражение 'Тела суть все тяжелые'. На с. 180 господин Шрёдер приводит пример *quaternio terminorum*[14], основанного на том, что выражение 'некоторые господа' не всегда обозначает одну и ту же часть класса господ. Поэтому такое выражение следовало бы отбросить как многозначное, а таковым оно действительно является, если смотреть на него как на обозначение класса, состоящего из 'некоторых господ', что и делает автор на с. 150. Это означает, разумеется, не отказ от частного суждения, а отказ от ложного взгляда на него.

разные обозначения тому, что различно[15]. Так, установим, что

'*A sub B*'

должно значить: *A* есть класс, подчиненный классу *B*. В отличие от этого

'*A subter B*'

выражает то, что *A* как индивид входит в класс *B*. Этим мы, конечно, признаем только то, что различие имеется, но мы еще не знаем точно, в чем же оно состоит. Тем не менее мы можем теперь следующим образом выразить шрёдеровское требование: многообразие *M* должно быть таково, чтобы предложения

B subter M
A subter B
A subter M

ни для какого *A* и ни для какого *B* вместе не были истинными. Как же с помощью этого избежать той нелепости, будто можно доказать, что $0 = b$? Это заключение было возможно только благодаря тому переводу, который дает господин Шрёдер своим формулам, связывая классы с понятиями; в чистом исчислении областей нет никакого повода для появления этой нелепости. Необходимость и возможность различения *Sub-* и *Subter*-отношений появляется впервые, когда мы покидаем чистое исчисление областей, как только — вместе с тем переводом, который указан выше, — в рассмотрение вводятся понятия и тем самым происходит переход в логическую сферу. Стало быть, если мы хотим внести ясность в различие двух отношений, мы должны смотреть на классы как на объемы понятий и на этом основывать наш перевод.

В соответствии со сказанным мы предлагаем следующее.

Если *v* есть отдельная вещь, а *A* — класс предметов, которые *суть A*, то

'*v subter A*'

мы переводим '*v* есть *a*'; и если *B* есть класс предметов, которые *суть b*, то

'*B sub A*'

мы переводим 'все *b* суть *a*'*.

Надо еще сказать, что на напечатанное курсивом *есть*, так же как и на *суть*, следует смотреть только как на связки, не вкладывая в них никакого особого содержания, почему они и не выражают никакого тождества.

Теперь рассмотрим более точно, как мог стать возможным наш софизм! Для этого требуется решить, как следует понимать отношение включения, имеющееся в шрёдеровском определении тождественного нуля — как *sub*- или как *subter*-отношение. Шрёдер говорит следующее: «Область, которая находится в отношении включения к любой области, мы называем 0» (с. 188). Итак, спрашивается, подчиняется ли нуль, понимаемый как класс, любому классу многообразия, или же нуль, понимаемый как индивид, входит в любой класс многообразия. Давайте проверим сначала второе предположение. Итак, по этому предположению должно быть

$$0 \textit{ subter } a,$$

если справедливо, что

$$a \textit{ sub } M,$$

при этом *M* — наше многообразие. Пусть теперь *Q* есть класс, состоящий из предме-

---

* Господин Д. Пеано употребляет вместо «sub» и «subter» знаки «$\supset$» и «ε». См. Notations de logique mathématique par G. Peano (Turin, 1894), § 6[16].

тов, которые совпадают с P. Значит, тогда, Q в качестве индивида содержит только P, и мы имеем

$$P \textit{ subter } Q.$$

Если теперь Q *sub* M, то в соответствии с нашим предположением о нуле, справедливо также

$$0 \textit{ subter } Q,$$

то есть 0 совпадает с P. Правда, эта возможность исключается благодаря приведенному выше требованию автора. В самом деле, из

$$P \textit{ subter } Q$$

и

$$Q \textit{ sub } M$$

следует, что

$$P \textit{ subter } M.$$

Но у нас ведь P — это то же самое, что и Q; то есть класс Q сжался до P. Итак, поскольку справедливо также Q *subter* M, мы имеем

$$Q \textit{ subter } M,$$
$$P \textit{ subter } Q,$$
$$P \textit{ subter } M,$$

что противоречит требованию господина Шрёдера. В связи с этим рассуждением может возникнуть сомнение в том, что Q совпадает с P. Но это, во всяком случае, полностью соответствует тому пониманию класса, согласно которому он состоит из отдельных вещей. В соответствии с этим мы читаем на странице 247: «И, в частности, его (многообразия) индивиды сами принадлежат к классам, именно, классам, сжавшимся до *одного* только индивида, — классам, которым мы поэтому можем дать название 'монадических', или '*сингулярных*' классов». А на с. 148 говорится: «Один индивид мы тоже можем назвать классом, именно классом, содержащим только один этот индивид». Поэтому, пожалуй, можно не сомневаться в том, что согласно шрёдеровским принципам в нашем случае Q и P совпадают.

Однако здесь мы наталкиваемся на своеобразное препятствие. Именно, если класс, состоящий только из одного предмета, совпадает с самим этим предметом, то шрёдеровское требование не может быть выполнено ни для одного многообразия, которое вообще содержит индивиды. Пусть a есть такой индивид, так что мы имеем

$$a \textit{ subter } M;$$

но тогда само a принадлежит к классам, именно, оно является сингулярным классом, так что имеет место

$$a \textit{ subter } a.$$

А это значит, что не выполняется требование, согласно которому ни для какого A и ни для какого B не должно вместе иметь место, что:

$$B \textit{ subter } M,$$
$$A \textit{ subter } B,$$
$$A \textit{ subter } M;$$

ибо, если мы в качестве A и B возьмем a, мы получим наш случай. В этой связи господин Шрёдер пишет: «Стоит только в нем (многообразии) образовать хотя бы один сингулярный 'класс' и допустить его в качестве нового индивида многообразия, к нему в один момент снова присоединится тождественный нуль, так сказать проскользнет в него через дверь Дефиниции 2 ×» (с. 248). Сказанное здесь не согласуется с теми основными положениями, которые выдвигает автор в других местах. Ибо, согласно этим положениям, нет совершенно никакой нужды образовывать сингулярный класс. Если *a* есть индивид многообразия, то тем самым *a* уже есть класс, и нет необходимости допускать этот класс *a* еще в качестве нового индивида данного многообразия, так как *a* уже является таким индивидом. Впрочем, для того, чтобы в класс проскользнул тождественный нуль, вовсе не требуется, чтобы класс был дан в качестве индивида многообразия, а нужно только, чтобы класс содержался в многообразии в качестве класса. Здесь имеет значение не *subter*-, а *sub*-отношение.

Сомнение, имеем ли мы право рассматривать каждый индивид как класс, состоящий только из одного предмета[17], подкрепляется следующим соображением. В нашем предшествующем рассуждении мы можем в качестве P взять также и такой класс, который сам охватывает множество индивидов; ибо, как говорит автор на с. 148, такой класс можно представить себе как мыслимую вещь, и в соответствии с этим как индивид. Если теперь Q есть, как и раньше, класс предметов, совпадающих с P, то Q есть некоторый сингулярный класс, содержащий в качестве индивида только P. Если бы теперь оказалось верным, что сингулярный класс совпадает с индивидом, из которого — единственного — он состоит, то Q совпадает с P. Теперь, если мы предположим, что a и b являются различными предметами, входящими в качестве индивидов в P, то они окажутся также и в Q; а это будет означать, что как a, так и b совпадают с P. Следовательно, a и b тоже совпадают, а это противоречит нашему предположению, что они различны. Может быть, автор возразил бы нам, указав, что a и b вообще приняты во внимание лишь потому, что в соответствии с его требованием их нельзя отнести к индивидам многообразия. Но, как мы видели выше, при нашем предположении, это требование вообще нельзя выполнить; его, таким образом, надо отбросить.

Далее. Наше предположение, что сингулярные классы совпадают с индивидами, является необходимым следствием той точки зрения, что классы состоят из индивидов, точки зрения, которая вполне уместна в исчислении областей и имеет последнее своим источником. Как мы видим теперь, этот взгляд не годится для логического применения, а исчисление областей, которое далеко от того, чтобы быть полезным для логики, и здесь тоже только вводит в заблуждение. Следует подчеркнуть, что это последнее рассуждение совершенно не нуждается в привлечении тождественного нуля и поэтому сила соответствующего доказательства совершенно не зависит от того, может ли быть сохранена дефиниция этого нуля.

Мы видели, что взгляд, согласно которому класс состоит из индивидов, и что, стало быть, отдельная вещь совпадает с соответствующим сингулярным классом, ни в коем случае не может быть сохранен, независимо от того, желаем ли мы остаться при шрёдеровском требовании или отбрасываем его. В последнем случае этот взгляд ведет к противоречиям, в первом же случае мы обязаны его отбросить, чтобы сделать указанное требование вообще выполнимым. Поэтому данное требование также не устраняет наш софизм.

Возьмем в качестве примера многообразие целых чисел! Класс чисел, совпадающих с 3, содержит в качестве единственного индивида само число 3. Предположим сначала, что число 3 является сингулярным классом; тогда этот класс задан в качестве индивида многообразия и включает в качестве индивида число 3, которое само является элементом нашего многообразия, что противоречит требованию господина Шрёдера. Теперь предположим, что вышеупомянутый сингулярный класс не совпадает с числом 3 или еще каким-либо целым числом; тогда этот класс не дан в качестве индивида нашего многообразия; в этом случае шрёдеровское требование оказывается выполненным, зато становится возможным софизм; ибо в этом сингулярном классе находится в качестве индивида 3, а кроме того, и тождественный нуль; это означает, что тождественный нуль совпадает с числом 3, так же как с каждым целым числом; стало быть, все целые числа совпадают друг с другом.

Здесь появляется сомнение, могут ли, согласно воззрениям автора, вообще существовать сингулярные классы, имеющие, кроме 0, еще один отличный от него индивид. Ибо если некоторый класс сжимается до индивида *a*, мы имеем:

a subter a,

а также 0 *subter a*.

Стало быть, если *a* отлично от 0, то в классе *a* находятся индивиды *a* и 0, и класс *a* оказывается вовсе не сингулярным классом. Тождественный нуль всегда проскальзывает вместе с *a*. Однако с этим надо сравнить следующее место (с. 241): «Мы видели: 0 означает 'ничто', 'ничего'; знак *subter** соответствует связке и в словесном языке должен передаваться словом 'есть'; наконец, пусть *a* будет любым произвольным** предикатом — для примера, скажем, '*черный*'. Субсумция 0 *subter a* несомненно верна, так как класс всех вещей, которые мы можем назвать *черными*, кроме них не содержит ничего, поэтому я имею право сказать, что он содержит к тому же еще и 'ничего'».

Если теперь мы предположим, что класс *a* состоит из Луны и тождественного нуля, то 0 *subter a*, по господину Шрёдеру, мы должны понять так: класс *a* не содержит ничего, кроме Луны; или: класс *a* содержит Луну, а вдобавок еще 'ничего'. Первое выражение позволяет думать, что этот класс — сингулярный и содержит только Луну; второе выражение внушает мысль, что он содержит, кроме Луны, еще и тождественный нуль и, стало быть, не является сингулярным классом. Сравните с этим то, что говорит автор на с. 197: «Существует по крайней мере *одна* область *c*, удовлетворяющая допущениям Деф. (3)[19], поскольку согласно Деф. (2×) ... во всяком случае 0 является этим *c*». Поле нашего сознания в этом случае смахивает на ту картину, которая представляется глазам, когда один из них смотрит через голубое, а другой через желтое стекло; мы то не видим ничего, то видим что-то. Не дурачит ли нас язык, склеивая отрицание, относящееся, собственно говоря, к предикату, с другой составной частью предложения в составе мнимого собственного имени? Когда мы говорим, что класс *a* не содержит ничего, кроме Луны, то мы отрицаем предложение, что этот класс содержит еще нечто, кроме Луны; но этим мы не утверждаем, что данный класс содержит, кроме Луны, некий предмет по имени 'ничего'. Так язык морочит нас, подсовывая предмет там, где его нет, и то же самое, кажется, делает господин Шрёдер, когда говорит о тождественном нуле. Тем не менее он сам отлично понимает, что имя должно быть именем чего-нибудь. Так, назвав (с. 50) многосмысленным имя, в отношении которого не выполнено требование однозначности, он продолжает так: «Именно, поскольку оно ... вообще имеет (некоторый) смысл, действительно является именем *чего-либо*, иными словами, при условии, что мы устраним не имеющие смысла или '*бессмысленные*' имена, такие как 'круглый квадрат'». Но разве 'тождественный нуль' не является таким не имеющим смысла, бессмысленным именем? Это подтверждается тем, что имя 'Ничего' ('Nichts'), которое, как мы видели, является, по автору, переводом для тождественного нуля (с. 189), — он называет бессмысленным и не имеющим значения (с. 69).

Здесь уместно более подробно рассмотреть дефиницию тождественного нуля. На с. 188 он гласит:

«В алгебру логики теперь должны быть введены еще две специальные области, в качестве имен для которых предлагаются числовые знаки 0 и 1. Мы определим их

---

* Я заменяю тут шрёдеровский знак знаком *subter* в соответствии с принятым здесь смыслом дефиниции тождественного нуля.

** Автор указывает здесь на требования, которые он предъявляет к многообразию[18].

также с помощью знака отношения включения; а именно, пусть Дефиниция (2×) '*тождественного нуля*' устанавливает, что субсумция

$$0 \textit{ subter } a^*$$

является *общезначимой*, то есть такой, что ее следует считать справедливой для *каждой* области *a* нашего многообразия. Этим мы хотим сказать: *нулем мы называем область*, которая находится в отношении включения к каждой области *a*, *которая содержится в каждой области многообразия*».

Эта дефиниция — по своему словесному тексту — полностью принадлежит исчислению областей, но она не совместима с ним по своему смыслу. Мы до сих пор оставляли в стороне одно соображение — теперь оно должно быть рассмотрено более подробно. Приведя дефиниции своего 0 и своей 1, господин Шрёдер продолжает так:

«Символы 0 и 1, которым мы приписываем эти свойства, мы, во всяком случае с этого момента, причисляем к 'областям' нашего многообразия. Может случиться, что это будут 'несобственные' области, то есть что они останутся пустыми именами, если вместе с рассматривавшимися до сих пор настоящими или собственными областями они окажутся многообразиями, данными нам в возможности, факультативно, и их существование нельзя доказать».

Прежде всего здесь бросается в глаза смешение знака и обозначаемого. В самой дефиниции автор говорит: «0 называем мы область...», откуда ясно следует, что знак нуля должен быть именем для чего-то, являющегося областью. В только что приведенном разъяснении символы неожиданно сами выступают как области. Это смешение настолько дорого автору, что он не расстается с ним несмотря на все мои увещевания**.

Нуль и представляет собою в действительности тот случай, который предусмотрен в разъяснении. На самом деле не существует, например, области, которая содержалась бы в каждой области государств, входящих в Германскую империю. Но господина Шрёдера это не смущает. Для него дефиниция является гарантией существования определяемого[20], поскольку она сама некоторым образом его создает и творчески вводит (с. 212); конечно, очень даже 'некоторым образом'! Своей дефиницией он приписал символу 0 свойство содержаться в каждой области многообразия и, таким образом, благодаря этой творческой дефиниции мы получили область, содержащуюся в каждой области нашего многообразия. Конечно, это только пустой знак, но так как он имеет требуемое свойство, мы имеем все, что нам нужно. По крайней мере так полагает господин Шрёдер и тем самым совершает весьма распространенную среди математиков ошибку, на которую я неоднократно и совершенно безуспешно указывал; из этого, пожалуй, можно заключить, что математики за давностью этого приема приобрели на него некоторое право. С логиками дело обстоит иначе. Во всяком случае следует пожелать, чтобы у них не возникло подобных претензий; надо надеяться, что следующее ниже разъяснение, имеющее целью воспрепятствовать этому, не окажется запоздалым. Если знак нуля есть пустой знак, то он не обозначает ничего, и его цель, как знака, по крайней мере для науки, не достигается; да и в художественно-поэтической сфере он вряд ли сможет найти применение. Разве не говорит сам автор (с.128), что когда мы устанавливаем равенство или высказываемся о тождестве, утверждение о тождестве касается не звука имен, не вида соответствующих выражений, а целиком и полно-

---

* Вместо шрёдеровского знака включения я пишу здесь '*subter*'.

** Ср. мои «Основания арифметики», Бреславль, Кёбер, 1884, с. 54 и с. 95. На с. 200 автор употребляет оборот 'некоторое *a*, которое означает нуль'; означает ли *a* знак нуля или его несуществующее значение?

стью относится к их *значению**. Но как же быть, когда никакого значения нет? Знак нуля — это овальная фигура, нанесенная, скажем, на бумагу с помощью типографской краски. Что же здесь может сделать определение? Может ли оно придать этой фигуре какое-либо свойство? Пожалуй, единственное свойство, которое оно может ей придать, — это свойство служить знаком того, что установлено в качестве ее значения. Разве от того только, что я скажу: эта фигура является областью, содержащейся в каждой области какого-то многообразия, — она станет таковой? Будь это так, нетрудно было бы и бриллианты изготовлять. Ведь даже господин Шрёдер не говорит в самой дефиниции, будто данная фигура является такого рода областью — он говорит только, что она должна быть знаком, именем для такой области. Он, стало быть, предпринимает попытку дать название, неудача которой заранее предрешена; ибо для того, чтобы наименовать, надо из числа вещей иметь нечто, что именуется, а такового здесь как раз и нет. Как же может такой порочный прием вызвать вообще какую-либо перемену в том, что задумано как имя или знак? Итак, в исчислении областей это определение должно быть отброшено. Совершенно так же обстоит дело и с логическим исчислением; ибо нечто, принадлежащее в качестве индивида каждому классу многообразия, не существует, во всяком случае тогда, когда в многообразии содержится более чем один класс, а это имеет место всегда, когда мы допускаем пустые классы, а само многообразие не пусто. Если же оно пусто, то вообще не существует ничего, что принадлежало бы классам многообразия.

Стоит ли удивляться, что из такой ошибочной дефиниции получаются противоречия! К этому, пожалуй, можно добавить и то, что автор говорит на с.238: «*'Ничто' есть даже субъект для каждого предиката*: ничто является черным и вместе с тем ничто не является черным». Но утверждения формы '*a* есть *b*' и '*a* не есть *b*' образуют, конечно, противоречие. Господин Шрёдер, быть может, добавил бы: если они не пусты по содержанию; но тогда они, собственно говоря, являются совсем не утверждениями, а бессмыслицей, использовать которую логика права не имеет, и должна ограничиваться самое большее констатацией наличия таковой.

Теперь рассмотрим другое возможное толкование нашей дефиниции! Шрёдеровский знак включения мы можем перевести с помощью '*sub*'. Тогда, стало быть,

$$0 \; sub \; a$$

должно быть справедливо для каждого класса** *a* рассматриваемого многообразия. Для того чтобы '0 *sub a*' получило смысл, мы должны и здесь рассматривать 0 и *a* как объемы понятий. В соответствии с этим, стало быть, на 0 следует смотреть как на класс предметов, имеющих известное свойство. Пусть, коротко говоря, 0 есть класс предметов, которые суть *b****, причем мы оставляем за собою право указать, чтó надлежит понимать под '*b*'. Пусть, далее, *a* есть класс предметов, которые суть *c*. Тогда

$$0 \; sub \; a$$

надо перевести, как 'все *b* суть *c*', и это должно быть справедливо для любого, произвольного класса *a*, если только он содержится в нашем многообразии. Если бы теперь оказалось, что существует отдельная вещь *v*, которая есть *b*:

$$v \; subter \; b,$$

то было бы также

$$v \; subter \; a;$$

---

* Правда, на с.199 он требует, чтобы принцип I (принцип тождества) был признан и для имен, причем вне зависимости от того, имеют ли они какой-либо смысл или нет.

** Я пишу здесь 'класс' вместо 'область', так как в исчислении областей не встречается ни *sub*- ни *subster*-отношения, а встречается отношение части к целому.

*** На это 'суть' следует смотреть, как на простую связку. Ср. выше с .268 [настоящей книги].

18 – 1742

и это должно было бы быть справедливым для любого класса *a* в нашем многообразии, что, как отмечено выше, невозможно. Значит, остается только тот случай, когда не существует никакой отдельной вещи, которая есть *b*, или, коротко говоря, когда не существует никакого *b*. Тогда 0 есть пустой класс. Однако пустой класс существовать не может, если под 'классом' понимать собрание или совокупность индивидов — считать, что класс состоит из индивидов или индивиды составляют класс, как говорит автор (с. 67)*. Ход настоящего рассуждения еще раз принуждает нас признать, что этот способ выражения в логике применять не следует, что объем понятия имеет свое основание не в индивидах, а в самом понятии, то есть в том, что высказывается о предмете, когда он подводится под понятие. Тогда отпадают сомнения в том, что можно говорить о классе предметов, которые суть *b*, и тогда, когда не существует никакого *b*. В этом случае все пустые понятия имеют один и тот же объем**. Мы можем в качестве *b* взять, например, *предмет, не равный самому себе*. Если теперь назвать нулем объем этого понятия, то, спрашивается, как мы должны в этом случае смотреть на предложения '0 *sub a*' или 'все *b* суть *c*'. Господин Шрёдер в этом случае читает (с. 239): 'Все *b*, поскольку таковые существуют, суть *c*' или: 'либо: не существует никакого *a*, либо, если таковые существуют, то все они суть *c*'. Я могу присоединиться к этому взгляду, так как он соответствует сути дела и один только может иметь логическое применение, хотя он и означает некоторое насилие над языком. В соответствии с этим

$$0 \; sub \; a$$

следует переводить: либо не существует предметов, которые не равны самим себе, либо, если таковые существуют, то все они суть *c*. Против этого нечего возразить, и мы получаем, поэтому, такой класс, который *sub a*, каким бы ни был класс *a*. Теперь знак нуля действительно имеет значение, обладающее тем свойством, которого требует наша дефиниция.

Поставим теперь вопрос, возможен ли тот софизм, появление которого дало толчок всему этому исследованию! Пусть опять *Q* есть класс предметов, которые совпадают с *P*. Тогда мы имеем

$$0 \; sub \; Q;$$

это значит: 'либо не существует предметов, не равных самим себе, либо, если таковые существуют, они все совпадают с *P*'. Против этого предложения не приходится возражать, и ни о каком софизме не может быть и речи. Стало быть, в этом случае нам совсем не надо ограничивать наше мышление некоторым многообразием, которое удовлетворяет известным требованиям; благодаря преодолению ошибки в дефиниции все приходит в полный порядок.

Для многих из тех утверждений, которые я здесь выдвинул, можно привести согласующиеся с ними цитаты из Шрёдера, но равным образом можно процитировать и противоречащие им места. Откуда происходит эта двойственность? Господин Шрёдер, как он пишет во Введении, встретился с большими трудностями в теории образования понятия и при объяснении его сущности. Он видел, что по этим вопросам идет беспорядочный и бесконечный спор, не приводящий ни к какому решению. Он решил избежать этой неопределенности, положив в основание логики не содержание, а объем понятия, причем он надеялся, что можно оставить в стороне вопрос о том, как происходит выделение классов. Это привело его к исчислению

---

* Однако встречаются и противоположные выражения. На с.147 понятие класса трактуется, как будто, не слишком узко — так, что оно допускает и пустые классы. Правда, остается не ясным, как это согласуется с другими его высказываниями.

** Ср. в этой связи мои «Основные законы арифметики», Иена, Издательство Германа Поле, 1893, § 3 и § 10.

областей, к тому взгляду, что классы состоят из отдельных вещей, что они представляют собою собрания индивидов; и в самом деле, если не принять во внимание понятие, не учитывать общие свойства, — в чем другом тогда можно усмотреть основание существования класса? Тогда ведь и отдельная вещь тоже есть класс. Основным отношением естественно оказывается отношение части к целому. Все это очень наглядно и не вызывает сомнений; жаль лишь одного: это не плодотворно, и это не логика. Только благодаря тому, что классы определяются свойствами, которыми должны обладать их индивиды, только благодаря применению таких оборотов, как: 'класс предметов, которые суть *b*', вообще оказывается возможным, указывая отношения между классами, выражать мысли; только благодаря этому мы приходим к некоторой логике. Правда, поначалу остается скрытым, что такое понимание класса совершенно отлично от упомянутого выше и не совместимо с ним. Так более грубое понимание классов и объемов понятий продолжает сохраняться наряду с более тонким, которое одно только и пригодно для целей логики, а иногда, когда появляются противоречия, их несовместимость дает о себе знать. Понятно, что наиболее четко это обнаруживается тогда, когда отсутствует класс в смысле исчисления областей: в случае пустых понятий. Может придти в голову отвергнуть таковые как недопустимые; но тем самым из логики будут исключены большие и особенно плодотворные ее области; господин Шрёдер совершенно правильно поступает, когда не хочет вступать на этот путь и когда подчеркивает большую важность введения тождественного нуля (с.189), хотя признание значения пустых понятий надо было бы сделать совсем не в такой форме. Если допустить предложение, содержащее 'существует какой-то', 'существует один' ('es giebt ein'), то нельзя исключить предложение 'не существует ни одного'. Ибо если отрицание некоторого предложения не имеет смысла, его не имеет и само это предложение.

Здесь надо четко различать два совершенно различных случая, которые легко смешать, так как в обоих говорится о *существовании*. В одном из них дело идет о том, обозначает ли что-либо собственное имя, является ли оно именем чего-либо, в другом — о том, охватывает понятие какие-то предметы или нет. Когда мы употребляем слово 'существует', мы как раз имеем второй из этих случаев. А собственное имя, которое ничего не обозначает, не имеет логического оправдания, так как в логике дело идет об истине в самом строгом смысле слова, тогда как в художественном творчестве его все же можно применять*. Совершенно иначе обстоит дело с понятиями, которые не охватывают ни одного предмета: они вполне оправданы. Автор смешивает оба эти случая, когда лишенными смысла, бессмысленными или не имеющими значения именами он называет как 'ничто', так и 'круглый квадрат' (с. 50 и 69). Его 'ничто' во многих случаях, как, например, в предложениях 'ничто есть черное' и 'ничто не есть черное' (с. 238), является собственным именем, не имеющим значения, и поэтому логически не оправдано. Напротив, 'круглый квадрат' не есть пустое имя, а есть имя некоторого пустого понятия; оно, поэтому, есть имя, имеющее значение, например, в предложениях 'не существует круглого квадрата' или 'Луна не есть круглый квадрат'. Здесь сбивает с толку выражение 'общее имя', так как оно дает повод думать, что отношение общего имени к предметам, которые под него подпадают, таково же или сходно с отношением собственного имени к отдельному предмету. Нет ничего ошибочнее этого! Отсюда, конечно, должно проистекать мнение, будто общее имя, относящееся к пустому понятию, так же не оправдано, как и собственное имя, которое ничего не обозначает. Слово 'планета' непосредственно вовсе не относится к Земле, а относится к некоторому понятию, под которое в числе прочих подпадает и Земля. Таким образом, отноше-

* Ср. мою статью о смысле и значении в томе 100 журнала «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik» [наст. книга, с. 230–246].

ние к Земле является всего лишь некоторым отношением, опосредствованным этим понятием, и требуется распознать это отношение как вынесение суждения; это суждение отнюдь не дано еще вместе со значением слова ‘планета’. Когда я произношу предложение, имеющее грамматический субъект ‘все люди’, я совершенно ничего не высказываю в нем о каком-то мне совершенно неизвестном вожде в глубине Африки. Поэтому совершенно неверно, что словом ‘человек’ я как-то обозначаю этого вождя, что этот вождь каким-либо образом связан со значением слова ‘человек’. Неверно также, что в случае таких предложений в каждом из них с помощью общего имени объединяются вместе много суждений, как полагает господин Шрёдер. Для того чтобы такое слово, как ‘человек’ или ‘планета’, получило логическое оправдание, необходимо, чтобы налицо было соответствующее точно отграниченное понятие; при этом совершенно безразлично, охватывается что-то этим понятием или нет.

Легко видеть, как употребление слова ‘общее имя’ связано с пониманием класса или объема понятия как состоящего или составленного из отдельных вещей. В обоих случаях акцент переносится на эти вещи, а о понятии забывают. Правда, в труде господина Шрёдера встречаются и такие места, как, например, следующее: «Тем самым мы заявляем, что характерным для понятия с нашей точки зрения является ... то и только то, что с помощью его имени... *определенная, от всех других отличная группа признаков...* объединяется... и устойчиво соотносится с этим именем» (с. 89 и 90); однако это снова свидетельство той всепроникающей двойственности, которая не осознается автором и поэтому не может быть устранена*.

Из этих высказываний у читателя может возникнуть впечатление, будто в споре между представителями логики объема и сторонниками логики содержания я стою на стороне последних. Действительно, я считаю, что понятие с логической точки зрения предшествует своему объему, и отвергаю попытку видеть в объеме понятия класс, имеющий свое основание не в понятии, а в отдельных вещах. Конечно, на этом пути можно придти к некоему исчислению областей, но логики так не получить. Тем не менее во многих отношениях я может быть стою ближе к автору, чем к тем, которых, в противоположность ему, можно было бы назвать логиками содержания.

В заключение сведу воедино результаты проведенных здесь рассмотрений.

1. Исчисление областей, в котором основным отношением является отношение части к целому, должно быть совершенно отделено от логики. Диаграммы Эйлера являются для логики лишь средством сравнения, которое к тому же весьма неудачно.

2. Объем понятия не состоит из предметов, подпадающих под понятие, подобно тому, как, скажем, лес состоит из деревьев, — он имеет своим источником само понятие и только понятие. Понятие, поэтому, логически первенствует над своим объемом.

3. Надлежит различать:

a) отношение, в котором предмет (индивид) находится к объему того понятия, под которое он подпадает (*subter*-отношение);

b) отношение, в котором объем некоторого понятия находится к объему другого понятия, когда первое понятие подчинено второму (sub-отношение).

4. С помощью дефиниции нельзя ни создать предмет с любыми свойствами, ни приворожить любые свойства пустому имени или символу.

5. Надо различать два вопроса: означает ли что-нибудь собственное имя и подпадает ли что-нибудь под понятие. Собственные имена, не имеющие значения, не имеют оправдания в науке; пустые же понятия не могут быть исключены.

---

* Более подробное рассмотрение сущности понятия завело бы нас слишком далеко; поэтому я отсылаю читателя к моему докладу «Функция и понятие», Иена, Поле, 1891, к моей статье «О понятии и предмете» в «Vierteljahrschrift f[ür] wissenschafte[liche] Philosophie», Bd. XVI. № 2 [наст. книги, с. 215–229, 253–262] и к тому, что сказано во Введении и § 3 моих «Основных законов арифметики», Иена,Поле,1893.

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ?

До сих пор нет ясности в том, что же в анализе значит слово «функция», хотя оно давно стало общеупотребительным. В определениях (Erklärungen) постоянно повторяются два выражения, которые выступают то в связи друг с другом, то порознь, а именно, аналитическое выражение и переменная. Мы замечаем также, что употребление этого слова подвержено колебаниям, причем функцией называют иногда то, что определяет род зависимости или, может быть, род самой зависимости, а иногда зависимую переменную[1].

В последнее время в дефинициях преобладает слово «*переменная*». Но последнее само *нуждается в объяснении*. Всякое изменение совершается во времени. Поэтому когда мы в анализе рассматриваем переменную, мы как будто должны иметь дело с событием, совершающимся во времени. Но ведь анализ никакого отношения ко времени не имеет; ибо то, что его можно применять к процессам, происходящим во времени, — это совершенно не относится к делу. Равным образом, анализ применяется к геометрии, в которой время остается совершенно вне рассмотрения. Такова основная трудность, с которой мы постоянно сталкиваемся, когда, отправляясь от примеров, пытаемся добраться до сути дела. Ибо как только мы делаем попытку указать на что-то как на переменную, мы наталкиваемся на то, что изменяется во времени и, стало быть, не относится к чистому анализу. В все же должна быть возможность указать такую переменную, которая не привносит в арифметику ничего чуждого ей, если вообще переменные являются предметом анализа.

Если, таким образом, уже в самом изменении заключена трудность, то с новой трудностью мы сталкиваемся, когда ставим вопрос о том, что́ изменяется. Первым напрашивается ответ — величина. Поищем пример. Мы можем назвать величиной стержень, поскольку он имеет удлиненную форму. Всякое изменение длины стержня, могущее, например, произойти в результате нагревания, совершается во времени; но ни стержни, ни длины не суть предметы чистого анализа. Попытка найти в анализе меняющуюся, переменную величину, оканчивается неудачей; совершенно так же должны окончиться неудачей и другие попытки; ибо ни величины длин, ни величины площадей, ни величины углов, ни величины масс не являются предметами арифметики. Из всех величин к ней относятся только числа. И как раз благодаря тому, что эта наука совершенно оставляет в стороне то, посредством измерения каких величин в каждом отдельном случае получаются числа, она пригодна к разнообразным приложениям. Итак, мы спрашиваем: являются ли переменные, о которых идет речь в анализе, переменными числами? И чем иным они могут быть вообще, если они должны относиться к анализу? Почему почти никогда не говорят «переменное число», но, напротив, часто говорят «переменная величина»? Это

---

* Мы ограничиваемся рассмотрением функций с одним-единственным аргументом.

выражение звучит более приемлемо, чем «переменное число», ибо тут возникает сомнение: существуют ли переменные числа? Разве каждое число не сохраняет неизменными свои свойства? Правда, могут, пожалуй, сказать, что хотя 3 и π, само собою разумеется, являются неизменяемыми числами, константами, существуют и переменные числа. Например, когда я говорю «число, указывающее в миллиметрах длину этого стержня», я называю некоторое число, и это число переменное, так как стержень не всегда сохраняет одну и ту же длину; стало быть, я обозначил указанным выражением некоторое переменное число. Сравним этот пример со следующим! Когда я говорю: «король этого государства», этим я обозначаю некоторого человека. Десять лет назад королем этого государства был старец, а теперь королем этого государства является юноша. Итак, указанным выражением я обозначил человека, который был старцем, а теперь юноша. Здесь должна быть ошибка. Выражение «король этого государства» без указания времени вообще не обозначает никакого человека; но как только добавляется ссылка на время, оно может без всякой двусмысленности обозначать некоторого человека; но тогда указание времени оказывается необходимой составной частью соответствующего выражения, и мы получим другое выражение, если изменим ссылку на время. Итак, в обоих наших предложениях (Sätze) мы имеем совершенно разные субъекты высказывания. Равным образом, выражение «то число, которое указывает длину этого стержня в миллиметрах» без указания времени вовсе не является обозначением числа. Если мы присоединим к нему ссылку на время, то тем самым мы обозначим число, например 1000; последнее же не переменно, а неизменно. Если мы укажем другое время, мы получим другое выражение, которое теперь может обозначать и другое число, например 1001. Когда мы говорим: «Полчаса тому назад число, указывающее в миллиметрах длину этого стержня, было кубом некоторого числа; теперь число, указывающее в миллиметрах длину этого стержня, не есть куб числа», то мы имеем совсем не один и тот же субъект высказывания. 1000 не пополнело, превратившись, скажем, в 1001, но было заменено последним. Или, например, число 1000 — это то же, что и число 1001, только имеющее другой внешний вид? Когда нечто изменяется, мы имеем последовательно различные свойства, состояния одного и того же предмета. Если бы это был не один и тот же предмет, то мы вовсе не имели бы никакого субъекта, к которому мы могли бы относить изменение. Стержень удлиняется в результате нагревания. Все время, пока это происходит, он остается одним и тем же. Если бы вместо этого мы изъяли данный стержень и заменили другим, имеющим бóльшую длину, то мы не могли бы сказать, что он удлинился. Человек постарел; но если бы мы несмотря на это не могли признать в нем того же самого человека, у нас не было бы ничего, с чем мы могли бы связать старение. Применим это к числу! Что остается тем же самым, когда число изменяется? Ничего! Следовательно, число совсем не изменяется; ибо у нас нет ничего, с чем бы мы могли связать изменение. Куб числа никогда не станет простым числом, а иррациональное число — рациональным.

Итак, не существует никаких переменных, изменяющихся чисел, и это подтверждается тем, что у нас нет собственных имен для переменных чисел. Наша попытка обозначить некоторое переменное число с помощью выражения «число, указывающее в миллиметрах длину этого стержня» не удалась. Но разве с помощью «*x*», «*y*», «*z*» мы не обозначаем переменные числа? Такой оборот речи, конечно, употребляют; однако эти буквы — не собственные имена переменных чисел, как «2» и «3», которые являются собственными именами постоянных, константных чисел; ибо чем различаются числа 2 и 3, это можно указать; а чем отличаются друг от друга переменные, будто бы обозначенные посредством «*x*» и «*y*», этого сказать нельзя. Мы не в состоянии указать, какие свойства имеет x и какие, от них отличные, свойства имеет y. Если мы и связываем что-либо с этими буквами, то с каждой из них — одно и то же расплывчатое представление. Когда же кажется, что появляется различие, дело идет о применениях; но о последних мы здесь не говорим. Так как мы не в состоянии постичь каждую отдельную переменную в ее особенности, мы не можем дать переменным собственных имен.

Некоторые из приведенных трудностей попытался преодолеть г-н *Е. Чубер**. Чтобы отделаться от времени, он объявляет переменную неопределенным числом. Но разве неопределенные числа существуют? Разве числа делятся на определенные и неопределенные? Разве существуют неопределенные люди? Разве не должен быть определенным каждый предмет? Но не является ли n неопределенным числом? Числа n я вообще не знаю; «n» не есть собственное имя какого-либо числа, определенного или неопределенного. Тем не менее иногда говорят «число n». Как это возможно? Это выражение надо рассматривать в контексте. Обратимся к примеру. «Если число n четное, то $\cos n\pi = 1$». Здесь смысл имеет только все в целом, а предложение, выражающее условие, и предложение, выражающее следствие, взятые сами по себе, смысла не имеют. На вопрос, является ли число n четным, вообще нельзя ответить, так же как нельзя ответить на вопрос, справедливо ли то, что $\cos n\pi = 1$. Чтобы ответ был возможен, «n» должно было бы быть собственным именем некоторого числа, а последнее необходимо должно быть определенным. Букву «n» пишут для того, чтобы достичь всеобщности. При этом предполагается, что если заменить ее собственным именем любого числа, то как предложение, выражающее условие, так и предложение, выражающее следствие, обретут смысл.

Конечно, здесь можно говорить о неопределенности; однако «неопределенное» здесь является не прилагательным к слову «число», а наречием «неопределенно», скажем, к слову «указывать». Нельзя сказать, что «n» обозначает неопределенное число, но, пожалуй, можно сказать, что оно указывает числа неопределенно. И это имеет место везде, где в арифметике употребляются буквы, кроме немногих случаев (π, e, i), когда они выступают в качестве собственных имен; но тогда они обозначают определенные, неизменные числа. Итак, не существует никаких неопределенных чисел, и эта попытка г-на *Чубера* терпит неудачу.

Во-вторых, Чубер пытается исправить то положение, что никак нельзя выявить отличие одной переменной от другой. Он называет совокупность значений, которые может принимать какая-либо переменная (eine Variable), областью этой переменной и говорит: «Считается, что переменная x определена, если относительно каждого действительного числа, которое указывают, можно установить, принадлежит оно к области этой переменной или нет». Считается, что переменная определена; но определена ли она на самом деле? Раз не существует никаких неопределенных чисел, то нельзя определить и какое-либо неопределенное число. Дело представляется так, что будто бы область характеризует данную переменную. Тогда мы должны были бы иметь для одной и той же области одну и ту же переменную. Следовательно, если областью x является область положительных чисел, то в уравнении «$y = x^2$» y оказывается той же самой переменной, что и x.

Эту попытку следует признать неудавшейся, тем более, что выражение «переменная принимает значение» совершенно не ясно. Говорят, что переменная есть неопределенное число. Но как же может неопределенное число принимать в качестве своего значения некоторое число? Ибо значение, очевидно, есть число. Например, разве неопределенный человек обретает значение определенного?

* Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению². Лейпциг, Тойбнер, 1. § 2.

Впрочем, пожалуй, говорят, что предмет приобретает некое свойство; но здесь число должно выполнять обе роли; в качестве предмета оно называется переменной (Variable) или изменяющейся (veränderliche) величиной, в качестве свойства оно называется значением. Слову «число» потому предпочитают слово «величина», что надо ввести в заблуждение самих себя и затушевать тот факт, что переменная величина и значение, которое она будто бы принимает, — это по существу одно и то же, что здесь мы вовсе не имеем дело со случаем, когда предмет последовательно приобретает различные свойства, что, стало быть, об изменении не может быть и речи.

В отношении переменных (Veränderliche) с нашей точки зрения получается следующее. Хотя и можно признать переменные величины, но они не относятся к чистому анализу. Не существует переменных чисел. Поэтому слово «переменная» в чистом анализе не имеет оправдания.

Как же теперь мы осуществляем переход от переменной к функции? Пожалуй, это происходит в сущности всегда одним и тем же образом, и поэтому мы следуем изложению господина *Чубера*; он пишет в § 3:

«Если каждому значению вещественной переменной x, принадлежащему к ее области, отнесено определенное число y, то вообще говоря y тоже определена как переменная и называется ***функцией вещественной переменной*** x. Это обстоятельство выражают уравнением вида $y = f(x)$».

Прежде всего тут бросается в глаза, что y называется определенным числом, тогда как в качестве переменной y должно было быть неопределенным числом; y не является ни определенным, ни неопределенным числом, но знак «y» ошибочно придан многим числам, и после этого все же говорится так, как будто оно только одно. Яснее и проще дело представить так. Каждому числу из x-области отнесено некоторое число. Совокупность этих чисел я называю y-областью. Правда, хотя тут имеется y-область, у нас нет y, о котором мы могли бы сказать, что он является функцией вещественной переменной x.

Теперь для вопроса о сущности функции разграничение областей становится, как будто, несущественным. Почему мы не можем с самого начала принять в качестве области совокупность вещественных чисел или совокупность комплексных чисел включая вещественные? Суть дела лежит, конечно, в чем-то совершенно ином, именно, она скрыта в словах «отнесено», «поставлено в соответствие». Спрашивается, на основании чего я заключаю, что числу 5 поставлено в соответствие число 4? Вопрос не может быть решен, если его как-то не дополнить. Тем не менее согласно определению, данному *Чубером*, дело выглядит так, будто для каждых двух чисел без дальнейших околичностей можно определить, отнесено ли первое к второму или нет. К счастью *Чубер* добавляет: «В отношении *закона* отнесения, указание на который в самом общем виде осуществляется с помощью ***характеристики*** f, вышеуказанная дефиниция не говорит ничего; он может быть установлен самыми различными способами».

Итак, отнесение совершается по некоторому закону, причем мыслимы различные такие законы. Тогда выражение «y есть функция от x» не имеет смысла, если его не дополнить ссылкой на закон, согласно которому происходит данное отнесение. В этом состоит ошибка в дефиниции. Не заключена ли суть дела, собственно говоря, в законе, раз отсутствие его разрушает определение? Тут мы замечаем, что переменность, изменчивость, совершенно испарилась, и вместо этого выдвинулась всеобщность, ибо на нее указывает слово «закон».

Различие в законах отнесения связано с различием в функциях, а последнее не может более рассматриваться как количественное. Если мы вспомним алгебраические функции, логарифмические функции, эллиптические функции, мы тотчас же убедимся, что дело здесь идет о качественном различии — еще одно основание для того, чтобы не объявлять функции переменными. Если бы они были переменными, то эллиптические функции были бы эллиптическими переменными.

В общем случае мы выражаем такой закон отнесения с помощью равенства, левая часть которого состоит из буквы «y», тогда как правая часть представляет собою аналитическое выражение, состоящее из знаков чисел, знаков операций и буквы «x», как, например,

$$«y = x^2 + 3x».$$

Функцию определяли как подобное аналитическое выражение. В самое последнее время стали находить, что это понятие слишком узко. Между тем, такого затруднительного положения прекрасно можно было бы избежать, введя в символический язык арифметики новые знаки. Более серьезным является другое возражение, а именно, что аналитическое выражение, как группа знаков, вовсе не относится к арифметике. Формальную теорию, выдающую знаки за предметы этой науки, я, пожалуй, могу считать полностью опровергнутой в результате моей критики, содержащейся во втором томе «Основных законов арифметики»[3]. Не всегда четко различали знак и то, что знак обозначает, так что под аналитическим выражением (*expressio analytica*) отчасти понимали также и его значение. Далее, что обозначает «$x^2 + 3x$»? Собственно говоря, совершенно ничего, так как буква «x» не обозначает чисел, а только намеком указывает на них. Если мы заменим «x» на знак числа, мы получим выражение, обозначающее некоторое число, стало быть, ничего нового. Как и сама буква «x», выражение «$x^2 + 3x$» содержит только указание-намек. Это служит выражению всеобщности, как, например, в предложениях

$$«x^2 + 3x = x \cdot (x + 3)»,$$

$$«\text{если } x > 0, \text{ то } x^2 + 3x > 0».$$

Но все-таки где же пребывает функция? Ни само аналитическое выражение, ни его значение, по-видимому, не могут быть приняты в качестве функции. И однако же мы, пожалуй, не очень далеко находимся от верного ответа. Каждое из выражений «sin 0», «sin 1», «sin 2» означает конкретное число; но мы имеем общую составную часть «sin», которую мы считаем обозначающей подлинную суть функции синус. Этот «sin», конечно, соответствует букве «f», о которой г-н *Чубер* говорит, что она в форме намека указывает на закон; именно, переход от «f» к «*sin*» похож на переход от «a» к «2», который представляет собой переход от знака, указывающего намеком, к знаку, который обозначает. В соответствии с этим [знак] «*sin*» должен был бы означать закон. Но конечно, это не совсем верно. Закон выражен скорее в уравнении «$y = \sin x$», где знак «sin» является только частью, правда, частью, характеризующей особенность закона. Не имеем ли мы здесь то, что ищем — функцию? Поэтому, и «f» будет, строго говоря, указывать на некоторую функцию. И тут мы подходим к тому, чем отличаются функции от чисел. Именно, «sin» нуждается в восполнении знаком числа, причем этот последний не принадлежит к обозначению функции. Таково общее правило: знак функции не насыщен, нуждается в восполнении с помощью знака числа, — знака, который мы затем называем знаком аргумента. То же самое мы видим и в случае знака корня, и знака логарифма. Знак функции не может, в отличие от знака числа, один встречаться на одной стороне уравнения — для этого он должен быть восполнен знаком, который или обозначает число или неопределенно на него указывает. Что же значит такая конфигурация, состоящая из знака функции и знака числа, например «sin 1», «$\sqrt{1}$», «$l1$»[4]? Каждый раз некоторое число. Так мы получаем знак числа, составленный из двух неоднородных частей, причем ненасыщенная часть дополняется другой частью.

Потребность в восполнении можно сделать видимой, применив пустые скобки, например «sin ( )» или «$(\ )^2 + 3 \cdot (\ )$». Это, собственно говоря, является самым подходящим для нашей цели и наиболее пригодным для предупреждения путаницы, возникающей потому, что на знак аргумента начинают смотреть как на часть функционального знака, — и все же это обозначение, пожалуй, не встретит одобрения*. Но для этой цели также можно употребить и букву. Если мы выберем в качестве таковой «ξ», то «sin ξ» и «$\xi^2 + 3\cdot\xi$» будут знаками функций. Однако надо иметь в виду, что «ξ» имеет здесь только задачу отметить места, на которые можно помещать восполняющий знак. Будет хорошо, если эта буква не станет применяться ни для какой другой цели, например, не станет употребляться вместо «*x*» — буквы которая в наших примерах служит для выражения всеобщности.

Недостатком обычного обозначения частной производной является то, что при этом буква «*x*» служит как для того, чтобы отмечать аргументные места, так и для выражения всеобщности, как, например, в уравнении

$$«\ \frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx} = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\ ».$$

Это вызывает одно затруднение. Согласно общим принципам употребления букв в арифметике, если мы заменяем «*x*» на знак числа, мы должны всегда получать частный случай. Однако выражение

$$«\ \frac{d\cos\frac{2}{2}}{d2}\ »$$

непонятно, так как по нему нельзя установить функцию. Мы не знаем, является ли ею

$$\cos\frac{(\ )}{2} \quad \text{или} \quad \cos\frac{2}{(\ )} \quad \text{или} \quad \cos\frac{(\ )}{(\ )}\,.$$

Тем самым мы принуждены прибегнуть к более громоздкой форме записи

$$«\ \left(\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}\right)_{x=2}\ ».$$

Но еще большим недостатком является, пожалуй, то, что этим затрудняется проникновение в сущность функции.

Естественно, что своеобразию знака функции, названного нами ненасыщенностью, соответствует нечто в самих функциях. Их мы тоже можем назвать ненасыщенными и этим охарактеризовать их коренное отличие от чисел. Это, конечно, не дефиниция; однако она здесь и невозможна**. Я вынужден ограничиться образным выражением, чтобы пояснить, что́ я имею в виду, и рассчитывать на благосклонное понимание читателя.

Если функция с помощью некоторого числа восполняется до некоторого числа, то мы называем последнее значением функции для первого числа как ее аргумента. Уравнение «$y = f(x)$» привыкли читать: «*y* есть функция от *x*». В этом заключена двойная ошибка: во-первых, знак равенства переводится с помощью связки; во-

* Впрочем, оно задумано только для случая, являющегося исключением, когда мы хотим обозначить функцию, взятую совершенно обособленно. В «sin 2» уже один «sin» обозначает функцию.

** Дефиницией, которую дает *Г. Ганкель*[5] в своих «Исследованиях о бесконечно часто колеблющихся и разрывных функциях» (Университетская программа, Тюбинген, 1870), § 1, пользоваться нельзя, так как она содержит порочный круг: в ней встречается выражение «$f(x)$», объяснение которого предполагает определяемое.

вторых, смешивают функцию с ее значением для некоторого аргумента. Из этой ошибки и возникло мнение, будто функция — это якобы число, хотя и переменное или неопределенное. Мы видели, напротив, что такого числа вообще не существует, и что функции в корне отличны от чисел.

В языке математики стремление к краткости привело ко многим неточным выражениям, а они оказали обратное воздействие, затуманив мысли и открыв дорогу ошибочным дефинициям. Математика, собственно говоря, должна быть образцом логической ясности. В действительности, может быть, нет науки, в которой можно было бы найти больше неверных выражений и вследствие этого неверных мыслей, чем в математике. Логическую правильность никогда нельзя приносить в жертву краткости выражения. Поэтому очень важно создать математический язык, соединяющий самую строгую точность с наивозможной краткостью. Для этого, пожалуй, наиболее пригодна некоторая запись в понятиях (Begriffsschrift), система правил, действуя по которым с написанными или напечатанными знаками можно было бы, не прибегая к звуку голоса, непосредственно выражать мысли.

(Поступила 28 сентября 1893 г.)

Часть третья

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

ЛОГИКА

Цель, к которой устремлена наука, это *истина*[1]. Когда наш ум приходит к *признанию* чего-либо *истинным*, мы *судим*, выносим свое суждение, а когда это суждение высказываем, мы утверждаем его.

То, что истинно, — истинно независимо от нашего признания. Мы можем ошибаться. Основания, из которых мы исходим в нашем процессе суждения, могут оправдывать признание данной истины; но основания эти могут также служить для нас лишь побудительным мотивом для вынесения суждения или так или иначе определять его, не предполагая никакого подтверждения. Хотя каждое из наших суждений причинно обусловлено, тем не менее не все из соответствующих причин являются подтверждающими основаниями. Эмпирическое направление в философии, не учитывающее в должной мере этого различия, приходит — исходя из эмпирического характера побудительных мотивов нашего мышления, — к тому, что все наше знание надо считать эмпирическим. Причины, которые лишь побуждают к процессу суждения, действуют по психологическим законам; они могут приводить к заблуждению с таким же успехом, что и к истине; они вообще не имеют никакой внутренней связи с истиной; по отношению к противоположности истинного и ложного они ведут себя одинаково. Логика исключает их из своей области. Сельский житель, чьи радости и печали тесно связаны с погодой, ищет возможность предопределения будущего. Что же удивительного в том, что он пытается установить связь между фазами Луны и изменениями погоды, задаваясь вопросом, можно ли ожидать перемены погоды с наступлением полнолуния. И если ему кажется, что это ожидание находит подтверждение, — а это очень даже возможно, потому что погода меняется не вдруг и потому что вообще трудно сказать, изменилась ли она, — то он начинает верить в связь между погодой и Луной, и эта вера все более укрепляется, так как все благоприятные случаи, подтверждающие эту веру, производят бóльшее впечатление и крепче запоминаются, чем неблагоприятные, не подтверждающие ее; и тогда он приходит к убеждению, что связь эта известна ему из опыта. Его опыт — такого же рода, что и опыт, как его понимают представители упомянутого эмпирического направления в философии. Это похоже на обычное суеверие. Его психологические причины по большей части можно установить. Очевидно, что рассказ о том, как же произошло, что люди приняли нечто в качестве истины, не есть доказательство, да и в науке история открытия какого-либо математического или естественно-научного закона не может заменить подтверждающего его обоснования. Последнее всегда внеисторично; это значит: оно не зависит от того, ктó впервые предложил данное обоснование, чтó послужило толчком, приведшим к успешному ходу мыслей, когда и где это случилось и т.п.

Основания, оправдывающие признание некоторой истины, часто заключены в других, уже признанных истинах. Но вообще-то когда мы познаем истины, то способ их оправдания отнюдь не единственен. Необходимо составить суждения, оправдание которых покоится на чем-то ином, — если они вообще нуждаются в оправдании.

В этом-то и состоит задача теории познания. Логика имеет дело только с такими основаниями процесса суждения, которые являются истинами. Процесс суждения, в котором другие истины осознаны как основания, его подтверждающие, удостоверяющие, называется *процессом умозаключения.* Существуют законы, относящиеся к этому роду подтверждения, и установление законов правильного умозаключения есть цель логики.

Предметы, рассматриваемые логикой, носят, таким образом, внечувственный характер — с этой точки зрения они похожи на предметы, изучаемые психологией, и противостоят предметам, которые исследует естествознание. Внутренние побуждения, представления и т.д. тоже не осязаемы и не воспринимаемы зрением. Тем не менее между этими двумя науками пролегает резкая граница, и она обозначается словом «истинно» («истина»). Психология имеет дело с истиной — точно так же, как и любая другая наука, — поскольку ее цель состоит в овладении истинами; однако, в отличие от физики, для которой свойства «тяжелый», «теплый» и т.д. являются предметами ее рассмотрения, психология не считает свойство «истинно» предметом, подлежащим ее изучению. Этим занимается логика. Пожалуй, мы не ошибемся, если скажем, что логические законы — это не что иное, как раскрытие содержания слова «истинно». Тот, кто не постиг значения этого слова во всем его своеобразии, тот не может понять и задачу, стоящую перед логикой.

Для психологии безразлично, могут или нет называться истинными продукты душевно-психических процессов, которыми она занимается. То, что истинно,— истинно независимо от того, что кто-то признает это истинным. То, что истинно, не есть, стало быть, продукт наших душевно-психических процессов или активности нашего внутреннего мира; ибо продукт внутренней активности одного человека не есть продукт внутренней активности другого, сколь бы сходными они ни были — так же как чувство голода, испытываемое одним человеком, не есть чувство голода, испытываемое другим, как глаз одного человека не есть глаз другого — несмотря на все их сходство. Мы не воспринимаем непосредственно процессы, происходящие в душе другого человека,— для нас доступны только воздействия, которые они производят в физическом мире. Даже об этом сходстве, строго говоря, мы можем судить только поверхностно, потому что переживаемые разными людьми состояния их внутреннего мира невозможно соединить в *одном* сознании и благодаря этому их сравнить. Если содержание предложения $2 + 3 = 5$ точно и в самом строгом смысле одинаково для всех людей, которые признают его истинным, то это означает: содержание это не есть некий продукт душевно-психической деятельности одного человека и некий продукт душевно-психической деятельности другого человека, — оно понято одним человеком и признано им истинным и, точно так же, — познано и признано другим человеком. И если понимание не может происходить, не смешиваясь с субъективным, мы все равно не станем распространять это «истинно» на субъективную примесь.

Логика имеет близкое родство с этикой. Для последней свойство «добрый, благой» имеет значение, сходное со значением свойства «истинности» для первой. Хотя все наши действия и стремления причинно обусловлены и могут быть объяснены психологически, все же не все они заслуживают названия добрых, благих. Здесь тоже можно говорить об оправдании, и здесь оно тоже не содержится ни в простом описании соответствующего процесса, ни в доказательстве того, что все это могло произойти только так, а не иначе. Хотя и говорят: все понять — значит все простить, но: прощать можно только то, что не считается благим, хорошим.

Подобные несостоятельные воззрения легко подталкивают нас к ошибочному пониманию исследования законов мышления как задачи логики, причем под выражением «законы мышления» разумеется нечто соответствующее законам природы, стало быть, законам, по которым совершается реальное, действительное мышление и с помощью которых отдельный мыслительный процесс, совершающийся у определенного человека, можно было бы объяснить так же, как, например, движение данной планеты объясняется законом всемирного тяготения. Законы реального процесса умозаключения — не обязательно законы правильного способа умозаключения; ибо иначе были бы невозможны ошибочные умозаключения.

В наше время, когда в науке победно шествует учение о развитии, а исторический взгляд на все вещи грозит перешагнуть за присущие ему границы, надо — перед лицом странных и неприятных вопросов— быть готовыми к спокойному на них ответу. Если человек, как и все живые существа, развивается и будет развиваться далее, то, спрашивается, всегда ли в прошлом действовали законы его мышления и будут ли они впредь действовать всегда? Будет ли умозаключение, которое сегодня верно, верным еще через тысячелетия; и было ли оно верным тысячелетия тому назад? Очевидно, здесь происходит смешение закона реального мышления и закона правильного способа умозаключения. Рассмотрим суть дела детальнее. Закон — в том смысле, какой мы имеем в виду, когда ведем речь о законах природы, психологических, математических или логических законах, — строго говоря, вообще не может изменяться. Ибо закон такого рода, будучи полностью выраженным, должен содержать все свои условия и поэтому действовать независимо от местоположения и момента времени. Например, закон всемирного тяготения претендует на неограниченное действие в пространстве и времени. Если, скажем, окажется, что он не действует вблизи Сириуса, то надо предположить, что он выражен еще неполно, так как упущено условие, которое здесь выполняется, а вблизи Сириуса — нет. Подлинное условие всегда содержит нечто неопределенное, и в зависимости от того, как — так или иначе — это нечто определяется, оно становится истинным или ложным предложением. Точно так же: если через какое-то время окажется, что закон всемирного тяготения больше не действует, то это явится признаком того, что надо было добавить еще одно условие — условие, которое раньше выполнялось, а позже выполняться перестало. Так же обстоит дело с мнимым изменением законов мышления; оно может быть лишь кажущимся, быть признаком неполноты нашего знания этих законов. Если же под законами мышления мы станем понимать логические законы, то с легкостью обнаружится нелепость, например, условия, относящегося к содержанию фосфора в нашем мозгу или еще к чему-то, что у человека изменчиво. Тогда легко могло бы случиться так, что у одних людей подобные изменения уже произошли, а у других нет, и в результате из неких истин у одних людей получается одно, а у иных— другое. Это совершенно несовместимо с сущностью логического закона, потому что ссылка на познающее лицо противоречит смыслу слова «истинный».

Напротив, если под законами мышления понимать психологические законы, то нельзя заранее исключить возможность того, что в них содержится нечто, меняющееся вместе с изменением времени и пространства, и что в соответствии с этим современное мышление протекает иначе, чем 3000 лет тому назад.

Как и во всякой науке, в логике тоже есть свои искусственные выражения, слова, которые частично используются и в ненаучном языке, но не совсем в том же смысле. Устанавливая значение слов научного языка, следуют не языковой практике или этимологии, а стремятся к тому, чтобы сделать данное слово как можно более пригодным для выражения закона. Чем более совокупность искусственных выражений подходит для этого, тем компактнее и точнее может она передавать закономерности данной области.

Из задачи логики можно вывести: чтобы установить законы правильных способов умозаключения, надлежит отвергнуть все, что не является необходимым.

В частности, в логике надо отбросить все различения, которые делаются только из психологических соображений и которые безразличны для процесса умозаключения. Так, в чистой механике вещества не различаются по их химическим свойствам, а говорится только о «массе» и о физических телах, чтобы вместо, например, единого закона всемирного тяготения не нужно было устанавливать особый закон для каждого химического вещества. Значит, проводить различие надо только тогда, когда это служит соответствующей цели. Так называемое углубленное психологическое рассмотрение— это не что иное, как психологическая фальсификация логики. В естественном мышлении психологическое и логическое тесно переплетены. Задача логики как раз и состоит в том, чтобы выделить логическое в чистом виде. При этом речь идет не о полном изгнании психологического из реального мышления, что было бы невозможно, а только о том, чтобы отдавать себе отчет о том, чтó логически оправдано. Требуемое отделение логического от психологического состоит, таким образом, только в осознанном различении. Поэтому совсем нелишне быть начеку и избегать смешения точек зрения и смещения постановок вопроса— опасности, которую усиливает то, что мы привыкли мыслить на каком-либо языке, а грамматика, значение которой для языка подобно значению логики для мышления, смешивает психологическое и логическое. Если бы было иначе, то все языки должны были бы иметь одну и ту же грамматику. Но можно ли на разных языках выражать одни и те же мысли? Без сомнения, коль скоро речь идет о логической сути дела— логическом ядре; ибо иначе была бы невозможна общность умственной жизни человечества. Но когда к этому привлекается психологическое обрамление, тогда точный перевод становится невозможным; сомнительно, чтобы это обрамление было в точности одинаковым у любых двух людей. Отсюда вытекает ценность изучения иностранных языков для логического образования, ибо, когда осознаны различия в языковых одеяниях данной мысли, в уме человека высвобождается то ядро, с которым лингвистическое облачение так нераздельно срослось в каждом отдельном языке. Таким образом, разнообразие языков уменьшает трудность постижения логического; однако преодолеть эту трудность таким способом полностью еще нельзя, и наши логические учения продолжают все еще тащить из грамматик— по крайней мере из грамматик близких нам языков— то, что является для них общим, но не становится из-за этого собственно логическим. Поэтому-то так полезно ознакомление со способами выражения совершенно иного рода, например, с языком алгебраических формул*.

Но и тогда, когда мы выделили из языковой формы, или лингвистического оборота, или речевой связи то, что является чисто логическим, наша задача еще не решена до конца. Полученное нами логическое оказывается, в общем случае, сложным образованием; мы должны разложить его на части, потому что здесь, как и везде, полное понимание достигается только тогда, когда мы доходим до самого простого. С этой точки зрения логике тоже присуща масса недостатков, связанных с языком и грамматикой. Логические законы сами являются истинами, и здесь снова возникает вопрос об оправдании соответствующего суждения. Если оправдание не основывается на истинах, то логике не нужно ни о чем заботиться. Если же, напротив, некий логический закон с помощью умозаключений сводим к другим законам, то очевидной задачей логики становится выполнение этого сведения; ибо лишь таким способом можно получить обзор всего состава логических законов, не производя много раз одних и тех же вычислений.

---

* Здесь можно также упомянуть мою знаковую систему (Begriffsschrift). Я был бы не в состоянии изложить свое логическое учение, если бы перед этим не было разработано мое исчисление понятий.

Итак, кратко подводя итог, можно сказать: задача логика состоит в постоянной борьбе с психологическим обрамлением мысли и отчасти с языком и грамматикой, поскольку они не выражают логическое в чистом виде. Логик не обязан отвечать на вопрос: каким образом у человека обычно протекает мышление; каков его *естественный* ход в душевно-психическом мире человека? То, что для одного человека является естественным, очень легко может оказаться неестественным для другого. Об этом свидетельствует хотя бы большое разнообразие грамматик. Логик меньше всего страшится упрека в том, что его установки не выглядят естественными, что реальное мышление происходит по-другому. Если необремененному познаниями уму сообщать начальные сведения по математике в возможно более строгой логической форме, то такой ум, как правило, сочтет все это очень неестественным — и произойдет это как раз из-за этой самой логической строгости. В результате ученого либо совсем не понимают, либо понимают недостаточно. Поэтому для начала надо несколько поступиться строгостью, стараясь лишь постепенно пробуждать в ней потребность. В истории математики мы также обнаруживаем, что наивысшая строгость — это всегда последнее требование. Если бы мы стали обращать внимание на связанные со всем этим возражения, то подверглись бы опасности быть вовлеченными в бесконечные споры о том, что является естественным,— в споры по вопросам, которые в сфере логики совершенно неразрешимы и поэтому вовсе не относятся к ней, окончательный же ответ на которые, быть может, вообще невозможен или возможен только на пути наблюдений за первобытными народами или на основе данных языкознания.

Содержание, допускающее истинностную оценку[2]

Когда наш разум признает нечто истинным, мы судим, выносим суждение. Таким является, например, содержание равенства $2 + 3 = 5$. Оно, как мы видели, — не результат некоторого умственного процесса или продукт духовной деятельности человека, а есть нечто объективное, что означает: для любого разумного существа, для любого, кто в состоянии его постичь, оно в точности одно и то же, подобно, скажем, Солнцу, которое есть нечто объективное. Но разве для одних людей Солнце не есть, например, доброе или злое божество, для других— сияющий диск на небе, восходящий на востоке и заходящий на западе, для иных же, наконец, громадное шарообразное тело, раскаленное добела и окруженное оболочкой из раскаленных газов? — Нет. Оно *кажется* одному тем, а другому— этим.

Прежде чем судить о чем-то, мы часто задаем вопрос. Математик высказывает— для себя— некое предложение еще до того, как сможет его доказать. Физик выдвигает гипотезу о некоем законе, с тем чтобы проверить ее на опыте. Мы постигаем содержание данной истины еще до признания ее истинности, однако постигаем не одну ее, но и то, что ей противоположно; ибо, ставя вопрос, мы колеблемся между этими противоположностями. Хотя с помощью языка* обычно выражается только одна сторона, другая все-таки сама собой всегда присутствует; ибо смысл вопроса остается тем же самым, когда мы добавляем: «или нет?», и именно благодаря этому становится возможной экономность языка. То же, о чем таким образом ставится вопрос, мы будем называть содержанием, допускающим истинностную оценку. Следовательно, такое содержание является содержанием всякой истины, а также ее противоположности — лжи. Это противоположение или противоречие понимается так, что один его член мы отвергаем как очевидную ложь, если другой член признаем истинным, и наоборот. Отвержение одного равносильно признанию другого[3].

---

* Конечно, речь идет о предложениях-вопросах (Satzfrage), а не о предложениях, содержащих вопросительные слова (Wortfrage).

КРАТКИЙ ОБЗОР МОИХ ЛОГИЧЕСКИХ КОНЦЕПЦИЙ

Мысль

Когда я в дальнейшем употребляю слово «предложение», я имею в виду не предложения, выражающие пожелания, не повелительные и вопросительные предложения, но предложения, содержащие высказывания,— повествовательные предложения (Aussagesätze). Предложение чувственно воспринимаемо, но служит оно для сообщения некоего содержания, которое не воспринимаемо с помощью органов чувств. Об этом содержании мы судим, когда признаем его истинным или отвергаем как ложное. Высказывая какое-либо предложение, с сообщением о его содержании мы по большей части соединяем и утверждение об его истинности. Однако слушатель не обязан ни соглашаться с этим содержанием, ни отвергать его: он может воздержаться от суждения. Тогда на содержание суждения можно смотреть так, как его воспринимает слушатель.

Два предложения ***A*** и ***B*** могут находиться в таком взаимоотношении, что каждый человек, который признает истинным содержание предложения ***A***, должен сразу признать истинным и содержание предложения ***B***, и наоборот: всякий, кто признает содержание предложения ***B***, должен непременно признать и содержание предложения ***A*** (*эквиполлентность*); при этом предполагается, что восприятие содержаний предложений ***A*** и ***B*** не составляет труда. Эти предложения не обязательно равноценны со всех точек зрения; одному из них, например, может быть присуще то, что мы называем поэтическим настроением, у другого же ничего подобного нет. Поэтическое настроение принадлежит содержанию предложения, а не тому, чтó мы признаем истиной или отвергаем как ложь. Я полагаю, что в содержании каждого из двух эквиполлентных предложений ***A*** и ***B*** нет ничего, что сразу же и определенно должен был бы признать каждый, кто правильно его понял. В таком случае поэтическое настроение или нечто еще, отличное от содержания предложения ***B***, что мы можем найти в содержании предложения ***A***, не принадлежит тому, чтó мы признаем истинным; ибо если бы было так, то признание содержания предложения ***B*** не для всякого человека влекло бы в качестве непосредственного следствия признание содержания ***A***, ибо то, что делает их разными, согласно предположению, вовсе не содержится в ***B*** и не каждым может быть признано истинным без всяких оговорок.

Таким образом, в содержании предложения следует выделять такую часть, которая только и может признаваться истинной или отвергаться как ложная. Эту часть я называю мыслью, выражаемой данным предложением. Она одна и та же в эквиполлентных предложениях приведенного выше вида. Логика имеет дело только с этой частью содержания. Все прочее, что еще входит в содержание предложения, я называю окраской мысли.

Мысль не есть предмет психологии, она не состоит из представлений в психологическом смысле. Мысль о теореме Пифагора одна и та же для всех людей, она объективно и одинаковым образом противостоит всем, тогда как каждый человек имеет свои собственные представления, ощущения, переживания, и принадлежат они только ему.

В поэтических сказаниях и литературных произведениях встречаются мысли, которые не истинны и не ложны. С ними в логике не имеют дела. В логике действует принцип: каждая мысль либо истинна, либо ложна, *tertium non datur*[1].

Отделение от предиката утверждающей силы

Мы можем постичь мысль, не признавая ее истинной. Мышление есть постижение мыслей. После того как мы постигли мысль, мы можем признать ее истинной и выразить внешне это признание— утверждать ее. Но иногда требуется выразить мысль, не утверждая ее истинности. В моей знаковой системе есть особый знак для утверждающей силы: штрих суждения. В известных мне языках подобный знак отсутствует, и утверждающая сила прочно связана с индикативом— изъявительным наклонением главного, независимого предложения. В поэтической сфере, правда, используются независимые предложения и без утверждающей силы; но логика с поэтической сферой дела не имеет. Кроме этого, кажется, только в придаточных предложениях можно выразить мысль, не утверждая ее. Не надо поддаваться соблазну и под влиянием этой особенности языка смешивать постижение мысли и процесс суждения.

Отрицание

Отрицание и утверждающую силу также надо различать. Каждой мысли противостоит ей противоположная, так что отвержение одной совпадает с признанием другой. Процесс суждения— это выбор между противоположными мыслями. Признание одной и отвержение другой— это единое действие. Поэтому для отвержения мысли не нужен особый знак— достаточно знака для отрицания, не обладающего утверждающей силой.

Гипотетическая связь предложений

Когда говорят, что гипотетическое суждение устанавливает взаимосвязь двух суждений, слово «суждение» употребляется так, что в нем не содержится признания истинности— в соответствии с тем, как я употребляю слово «мысль». Ибо даже тогда, когда все сложноподчиненное предложение высказывается с утверждающей силой, этим все равно не утверждается истинность ни условия, ни следствия. Процесс суждения простирается на мысль, выраженную во всем сложноподчиненном предложении. Однако более тщательное рассмотрение показывает, что во многих случаях ни предложение, содержащее условие, ни предложение, содержащее следствие, не выражает никакой мысли. В сложноподчиненном предложении

«Если a больше, чем 2, то a^2 больше, чем 2»

буква «*a*» не обозначает никакого предмета— в отличие от знака числа 2, который это делает; она только неопределенно указывает на предмет. Таким образом, как предложение-условие, так и предложение-следствие содержат некую неопределенность, в результате чего ни одна из этих двух частей предложения не выражает мысли. Но несмотря на это, сложноподчиненное предложение в целом выражает некоторую мысль, так как буква «*a*» придает всеобщность содержанию целого. Стоит обратить внимание на то, что неопределенность, о которой мы говорим, часто почти не выражается или даже совсем не находит выражения. Несмотря на это она присутствует всегда, когда мы выражаем общий закон. То, что имеет грамматическую форму предложения, но не выражает никакой мысли из-за содержащейся в нем неопределенности,— это я называю несобственным, ненастоящим предложением. Напротив, собственно предложение выражает какую-либо мысль. Когда мы имеем дело с общим законом, возникает искушение говорить об одних случаях — когда соответствующее условие истинно, и о других случаях — когда оно ложно. Этот способ выражения надо отвергнуть. Только мысль может быть истинной, только мысль либо истинна, либо ложна,— причем не так, чтобы в некоторых случаях она была истинной, а в других ложной. Где бы мы ни столкнулись со случаями последнего рода, оказывается, что мы имеем дело с несобственно предложениями. Дело обстоит так: из несобственно предложения можно получить подлинное предложение, устранив соответствующую неопределенность. Так, из несобственного предложения «$a>2$» мы получаем подлинное предложение «$1>2$»— совершенно так же, как из подлинного предложения «$2>2$» получается предложение «$3>2$». Одни из предложений, получаемых таким способом, выражают истинные, а другие ложные мысли. Но это говорится в предварительном порядке. Позже мы рассмотрим всеобщность подробнее. Здесь мы предположим пока, что предложение-условие и предложение-следствие являются подлинными предложениями — собственно предложениями. Примером нам послужит сложноподчиненное предложение

$$\text{«Если } \frac{17^2 \cdot 19}{2^{11}} \text{ больше, чем 2, то } \left(\frac{17^2 \cdot 19}{2^{11}}\right)^2 \text{ больше, чем 2».}$$

Что сказано этим? Каждая из двух частей

$$\text{«}\frac{17^2 \cdot 19}{2^{11}} \text{ больше, чем 2» и «}\left(\frac{17^2 \cdot 19}{2^{11}}\right)^2 \text{ больше, чем 2»}$$

выражает некую мысль, которая либо истинна, либо ложна. Если первую мысль назвать ***A***, а вторую мысль ***B***, то возможными окажутся четыре случая:

A истинно, и ***B*** истинно,
A истинно, а ***B*** ложно,
A ложно, а ***B*** истинно,
A ложно, и ***B*** ложно.

Очевидно, что только второй случай несовместим со справедливостью предложения

$$\text{«Если } \frac{17^2 \cdot 19}{2^{11}} \text{ больше, чем 2, то } \left(\frac{17^2 \cdot 19}{2^{11}}\right)^2 \text{ больше, чем 2».}$$

Поэтому наше предложение означает, что этот второй случай не имеет места; а какой из остальных трех случаев имеет место— на этот вопрос оно ответа не дает. Вот в чем, следовательно, состоит сущность гипотетической связи предложений. С полным правом мы можем сказать:

«Если 3 больше, чем 2, то 3^2 больше, чем 2» и
«Если 2 больше, чем 2, то 2^2 больше, чем 2» и
«Если 1 больше, чем 2, то 1^2 больше, чем 2».

Если эти предложения звучат странно, едва ли не как слова в устах сумасшедшего, то это потому, что в каждом из этих случаев сразу видно, какой из них имеет место, чего нет в нашем первом примере. Но это совершенно несущественное различие.

Я буду называть рассмотренную выше связь мыслей ***A*** и ***B*** гипотетической их связью, причем первую мысль — условием, а вторую мысль — следствием.

Если целое состоит из двух предложений, связанных с помощью слова «и», причем каждое из них выражает некую мысль, то на смысл целого надо смотреть как на мысль; ибо этот смысл либо истинен, либо ложен; а именно, он истинен, если каждая из двух составляющих мыслей ***Γ*** и ***Δ*** истинна, и ложен в любом другом случае, то есть, когда по крайней мере одна из двух составляющих мыслей ложна. Я буду тогда называть мысль, заключенную в данном целом, объединением (Verein) мыслей ***Γ*** и ***Δ***. Как и для всякой мысли, для объединения ***Γ*** и ***Δ*** имеется противоположная мысль.

Тогда гипотетическая связь ***A*** и ***B*** есть противоположность (das Entgegengesetzte) объединения мысли ***A*** с противоположностью мысли ***B***. Но и обратно: объединение ***Γ*** и ***Δ*** есть противоположность гипотетической связи мысли ***Γ*** и мысли, противоположной мысли ***Δ***. Итак, используя отрицание, можно гипотетическую связь мыслей свести к объединению мыслей, а объединение мыслей свести к гипотетической связи мыслей[2]. И то, и другое с логической точки зрения одинаково первично. Но поскольку гипотетическая связь мыслей точнее отражает процесс умозаключения, вероятно, предпочтительнее именно ее рассматривать в качестве первоначальной связи и сводить к ней объединение мыслей.

Всеобщность

Ранее мы отметили, что в гипотетической связи предложений нередко ни предложение-условие, ни предложение-следствие не выражают никакой мысли и что причина этого состоит в некоторой неопределенности, не лишающей, однако, смысла все сложное предложение. В примере

«Если a больше, чем 2, то a^2 больше, чем 2»

эта неопределенность воплощается в букве «a», которая придает всеобщность мысли, заключенной во всем этом сложноподчиненном предложении. Это— самый распространенный способ использования букв в арифметике, хотя и не единственный. Естественно, что и в словесном языке имеются средства достижения той же цели (например, «*tot— quot*» в латинском языке[3]); но они менее совершенны. Иногда компонента предложения, соответствующая нашей букве «a», в словесном языке вообще отсутствует. Здесь можно принять способ употребления букв в арифметике. Всеобщность не ограничивается случаем гипотетического сложноподчиненного предложения. Вспомним «$a = a$». Чтобы сделать более явной заключенную здесь общность, достаточно добавить: «для любого a».

Заменяя в предложении

«Если a больше, чем 2, то a^2 больше, чем 2»

неопределенно указывающую букву «a» последовательно определенными числовыми знаками «1», «2», «3», мы получаем предложения:

«Если 1 больше, чем 2, то 1^2 больше, чем 2»,
«Если 2 больше, чем 2, то 2^2 больше, чем 2»,
«Если 3 больше, чем 2, то 3^2 больше, чем 2».

Выраженные в них мысли суть особенные, частные случаи мысли общего характера. Равным образом, мысли, заключенные в предложениях «1=1», «2=2»— особенные, частные случаи общей мысли, выраженной в предложении «$a=a$».

Здесь перед нами впервые возникает задача разложения предложения на части, из которых ни одна сама по себе не является предложением. А именно, в общем предложении имеется одна часть, отвечающая одинаковым, конгруэнтным частям соответствующих особенных предложений, и еще одна часть— в нашем случае это буква «a»,— которой в наших конкретных (besondere) предложениях соответствуют неконгруэнтные части— числовые знаки «1», «2», «3». Эти части предложений неоднородны. Та из них, которая у общего предложения совпадает с соответствующими частями конкретных предложений, указывает пробелы, то есть те места, где находится другая часть предложения, например знак числа «1». Если мы заполним эти пробелы с помощью буквы «ξ», то для наших случаев получим

«Если ξ больше, чем 2, то ξ^2, больше, чем 2»,
«$\xi = \xi$».

Конкретные предложения получаются из них путем восполнения пробелов, скажем, с помощью числовых знаков «1», «2» или «3». Последние не указывают пробелы— они восполняют их в названных выше компонентах, и так возникает некое предложение. Если назвать ту часть предложения, которая указывает пробелы, ненасыщенной[4], а другую часть — замкнутой, то мы можем представить себе возникновение предложения как результат насыщения ненасыщенной компоненты компонентой замкнутой. *Замкнутую часть предложения я называю собственным именем, а ненасыщенную— именем понятия.* Ненасыщенной части предложения соответствует ненасыщенная часть мысли, а замкнутой части предложения— такая же часть мысли, и тут также можно говорить о насыщении ненасыщенной части мысли ее замкнутой частью. Такого рода сложную мысль в обычной, традиционной логике, по-видимому, называют *единичным* суждением. Однако надо иметь в виду, что одна и та же мысль часто может быть разложена, проанализирована различными способами, и в соответствии с этим она может выступать как составленная из своих частей тоже по-разному. Слово «единичное» подходит не для всех мыслей — оно уместно только при некотором особом способе их разделения. Каждая из частей

«1 больше, чем 2» и «1^2 больше, чем 2»

тоже выступает составленной из собственного имени «1» и одной ненасыщенной части. Это же справедливо и относительно соответствующих мыслей.

ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ

Отделение от предиката утверждающей силы[1]

Мысль можно выразить, не утверждая ее. В языках, однако, отсутствует слово или знак, единственной задачей которого было бы утверждение мысли. В существующих логических учениях предицирование, как кажется, воедино слито с процессом суждения. Поэтому бывает не очень понятно, чтó логики называют суждением, — мысль, не требующую суждения об ее истинности, либо мысль *вместе* с такого рода суждением. Сам используемый при этом словесный оборот как будто заставляет считать: *вместе* с суждением; однако словоупотребление часто таково, что не предполагает, будто заявляется подлинное суждение, будто совершается собственно познание истины. *Я употребляю слово «мысль» приблизительно так, как логик использует слово «суждение».* Мышление есть постижение мыслей. После того как некая мысль постигнута, ее можно признать истинной (*судить* о ней), а это признание — выразить в акте утверждения (*утверждать* ее). От *отрицаний* тоже отделима соответствующая утверждающая сила. Каждой мысли противостоит противоположная мысль, так что отвержение одной мысли всегда совпадает с признанием другой. Можно сказать, что процесс суждения есть выбор между двумя противоположностями. Отвержение одной мысли и признание другой мысли есть *единое* действие. Для отвержения, таким образом, не нужно особого наименования, никакого особого знака. Мы можем говорить об отрицании еще до того, как были выделены компоненты мысли. Спор о том, к чему относится отрицание — к мысли в целом или к предикативной ее части, так же бесплоден, как и вопрос о том, как рассматривать пальто, надетое на человека: как то, что было надето поверх уже имевшейся одежды, или же как неотъемлемую часть всего одеяния. Когда пальто надето, оно само собой становится частью одежды человека. Предикативную составную часть, предикативный компонент мысли можно, образно говоря, трактовать как одеяние той части мысли, которая является субъектом[2]. Дополнительное одеяние само собой соединяется с уже имеющимся.

Гипотетическая связь предложений[3]

Когда говорят, что в гипотетическом суждении устанавливается взаимоотношение двух суждений, употребление слова «суждение» не предполагает признания истинности. Ибо если даже все сложноподчиненное предложение высказывается с утверждающей силой, то этим не утверждается ни истинность мысли, содержащейся в условии предложения, ни истинность мысли, содержащейся в его следствии. Напротив, признание истинности простирается на мысль, выражаемую всем сложноподчиненным предложением. А в результате внимательной проверки во многих случаях обнаруживается, что предложение, выражающее условие, само по себе не выражает никакой мысли, и то же самое относится к предложению, выражающему следствие (это несобственные — ненастоящие предложения). В таких случаях по большей части налицо отношение подчинения понятий. Здесь обычно смешивают две разные ситуации, о которых я, наверное, должен был бы написать раньше: отношение, которое я обозначаю посредством условного штриха, и всеобщность. Первое примерно соответствует тому, что логики выражают, говоря «отношение между суждениями». Именно, данный знак отношения (*условный штрих*) связывает друг с другом два предложения, причем два собственно предложения, так что каждое из них выражает какую-либо мысль.

Оставив в стороне поэтические сказания и творения художественной литературы и приняв во внимание только такие случаи, в которых речь идет об истине в научном смысле, мы можем сказать, что *каждая мысль либо истинна, либо ложна, tertium non datur*. Бессмысленно говорить о ситуациях, в которых некая мысль истинна, и о других ситуациях, в которых та же мысль ложна. Одна и та же мысль не может быть то истинной, то ложной,— в случаях, когда выражаются подобным образом, всегда оказывается, что речь идет о разных мыслях, которые считаются одинаковыми потому, что их словесный текст совпадает; но текст этот тогда не есть собственно предложение. Знак и то, что он выражает, не всегда различают достаточно четко.

Если имеются две мысли, то возможны только четыре случая:

1) первая мысль истинна, и такова же вторая;
2) первая мысль истинна, а вторая ложна;
3) первая мысль ложна, а вторая истинна;
4) обе мысли ложны.

Если *третий* из этих случаев *не* имеет места, налицо отношение, которое я обозначил с помощью *условного штриха*— штриха обусловливания. Предложение, которое выражает первую мысль, есть следствие; а предложение, которое выражает вторую мысль, есть условие. Прошло уже почти 28 лет с тех пор, как я предложил это определение (Erklärung)[4]. Тогда я полагал, что достаточно только упомянуть об этом и другие сразу же поймут, о чем идет речь, и пойдут дальше. Но прошло больше четверти века, а подавляющее большинство математиков и поныне не понимают, о чем идет речь, то же самое относится и к логикам. Какой пассаж! Это поведение ученых напоминает мне барана, уставившегося на новые ворота: он выпучил глаза, он ревет, пытается протиснуться сбоку; пройти же прямо в ворота — это кажется ему опасным. Я охотно верю, что поначалу мой подход кажется странным; но если бы был иной, его бы давно открыли. Спрашивается, однако: разве можно доверять первому беглому впечатлению? Разве не было времени поразмыслить над этим вопросом? Наверное, нет, так как в противном случае были бы сделаны разумные выводы! Вероятно, проглядели внутреннюю связь между мыслями; не могли взять в толк, что относительно мысли во внимание принимать надо не содержание самой мысли, а лишь то, какой — истинной или ложной — она является. Это связано с тем, что́ мною было осознано как *смысл и значение*. Теперь, после этого, если кто-нибудь все-таки попытается предложить некое определение, в котором сама мысль будет играть бо́льшую роль, то, вероятно, выяснится, либо что нечто еще, по сути дела совершенно излишнее, отнесено к мысли — то, что не приносит никакой пользы и только запутывает вопрос[5]; либо что соответствующие предложения (предложение, содержащее условие, и предложение, содержащее следствие) являются не собственно предложениями: ни одно из них не выражает никакой мысли, так что на самом деле отсутствуют мысли, которые, как хотелось бы, находились в каком-то взаимоотношении, но были, скажем, только понятиями и отношениями. А является ли отношение, обозначаемое мною с помощью условного штриха, таким, какое только и может иметь место между мыслями? Строго говоря, нет! Тут можно сказать только, что *знак этого отношения* (а именно, условный штрих) *связывает друг с другом предложения.* В дальнейшем это определение будет еще дополнено указанием на то, что *имена предметов тоже* можно связывать условным штрихом. И это еще далеко не все. Только более тщательное рассмотрение всеобщности должно сделать все это более понятным.

Всеобщность

Именно здесь нам потребуется *анализ мысли— расчленение, разложение ее на компоненты,* из которых ни одна не является мыслью. Самый простой случай— это расчленение мысли на две части, на две компоненты. Эти части неоднородны: одна из них не насыщена, а другая насыщена (замкнута). Рассмотрению при этом подлежат такие мысли, которые в обычной, традиционной логике носят название *единичных* суждений. В единичном суждении нечто высказывается об одном предмете. Предложение, выражающее такого рода мысль, состоит из *собственного имени*— и оно соответствует замкнутой, завершенной части данной мысли— и *предикативной* части, соответствующей *ненасыщенному* мыслительному компоненту. Впрочем, единичность мысли, собственно, не есть нечто данное само по себе,— она связана с используемым способом возможного разложения, анализа мысли. Может случиться, что та же самая мысль при каком-нибудь ином способе анализа окажется мыслью частной (Христос привлек некоторых людей на сторону своего учения[6]). Собственные имена обозначают предметы, а в случае предметов речь идет о единичных мыслях. Однако нельзя сказать, что предмет есть часть мысли — наподобие того, как собственное имя есть часть соответствующего предложения. Гора Монблан с ее снежным и ледяным покровом не есть часть мысли о том, что высота Монблана более 4000 м; можно только сказать, что этому предмету — при определенном, еще подлежащем уточнению способе рассмотрения— соответствует одна часть данной мысли (смысл и значение). В результате расчленения, анализа единичной мысли получаются компоненты замкнутого и компоненты ненасыщенного рода, которые не встречаются, конечно, по отдельности; однако составляющая часть мысли, ее компонента одного рода, будучи соединенной с составляющей частью, или компонентой, другого рода, образует мысль. Если оставить неизменной ненасыщенную часть, но изменять замкнутую компоненту, то можно ожидать, что мысли, получающиеся в результате этого, будут то истинными, то ложными. Может случиться также, что все они будут истинными. Пусть, например, ненасыщенная компонента выражается словами: «быть равным самому себе». Тогда это окажется некоей специфической особенностью данной ненасыщенной части. Таким образом, мы получаем новую мысль (всё равно самому себе), которая — по сравнению с единичными мыслями (два равно самому себе, Луна равна самой себе) — носит общий характер. Слово «всё», которое здесь стоит на месте собственного имени («Луна»), не является собственным именем, не обозначает никакого предмета, а служит для того, чтобы придать содержанию данного предложения всеобщность. В логике слишком часто дает себя знать сильное влияние языка, и моя знаковая система (Begriffsschrift) служит как раз тому, чтобы содействовать освобождению логики от языковых форм. Вместо слов «Луна равна самой себе» можно, не меняя мысли, сказать «Луна равна Луне». Отсюда видно: неважно, на одном или на многих местах встречается в предложении данное собственное имя. Однако с лингвистической точки зрения невозможно сделать так, чтобы при переходе к всеобщности слово «всё» тоже встречалось на двух местах. Предложение «всё равно всему» не обладает желаемым смыслом. Можно, следуя математической практике, употребить букву и, например, сказать «*a* равно *a*». Буква «*a*» тогда окажется на месте (или на местах) некоторого собственного имени, не будучи, однако, сама собственным именем, не обладая значением; она будет служить только для того, чтобы придать содержанию предложения всеобщий характер. И такого рода использование букв с логической точки зрения — благодаря простоте и соответствию существу дела — следует предпочесть тем средствам, которыми для той же цели располагает язык.

Если целое состоит из двух предложений, связанных с помощью слова «и», и каждое из них выражает мысль, то смысл целого надо рассматривать как единую мысль, потому что смыслом его окажется либо истина, либо ложь; а именно, это будет истина, если каждая из двух составляющих мыслей истинна, а ложь в любом другом случае, то есть когда хотя бы одна из составляющих мыслей ложна. Если эту, содержащуюся в данном целом, мысль назвать кондуктом двух составляющих мыслей[7], то кондукту отвечает противоположная ему мысль,— ведь всякой мысли соответствует ей противоположная. После этого ясно, чтó такое противоположность кондукту, состоящему из противоположности первой мысли и из второй мысли. Это то, что я выражаю с помощью условного штриха. Предложение, выражающее первую мысль, есть предложение-следствие, а предложение, выражающее вторую мысль, — предложение-условие. А все предложение, которое выражает противоположность кондукту, состоящему из противоположности первой мысли и из второй мысли, мы можем назвать гипотетическим предложением, в котором предложение-следствие есть выражение первой мысли, а предложение-условие есть выражение второй мысли. Мысль, заключенную в гипотетическом предложении[8], мы будем называть гипотетической мыслью, в которой следствие есть первая, а условие— вторая мысль. Если теперь окажется, что в предложении-следствии и предложении-условии встречается одно и то же собственное имя, то данную гипотетическую мысль мы можем рассматривать как мысль единичную, предполагая ее членение на замкнутую компоненту, которая соответствует собственному имени, и остальную— ненасыщенную часть. Если оставить неизменной ненасыщенную часть, а замкнутую изменять, то может статься, что мы будем постоянно получать истинную мысль — какую бы замкнутую компоненту мы ни избрали. При этом, как и во всем данном рассмотрении, предполагается, что мы находимся не в сфере поэтических сказаний и художественных текстов, а в области истины (в научном смысле), так что каждое собственное имя действительно отвечает своему назначению— обозначает некоторый предмет, и поэтому не пусто. Замкнутые компоненты мысли, о которых здесь идет речь, хотя сами и не являются предметами, обозначенными собственными именами, все-таки с ними взаимосвязаны; и если мы не хотим, чтобы все оказалось в области поэзии, то важно, чтобы такого рода предметы существовали. В противном случае нельзя говорить об истинности данной мысли. Итак, предположим, что в некотором случае из некоей гипотетической мысли, мысли, которая вместе с тем может рассматриваться как единичная мысль, где ненасыщенная часть остается постоянной, мы, как говорилось выше, всегда получаем какую-то истинную мысль, какую бы замкнутую компоненту мы ни использовали для насыщения. Это приводит к мысли всеобщего характера, а единичная гипотетическая мысль, из которой мы исходили, оказывается особым, частным случаем последней. Пример:

Первая мысль: 3 в квадрате больше, чем 2.
Вторая мысль: 3 больше, чем 2.
Противоположность первой мысли: 3 в квадрате не больше, чем 2.
Кондукт, состоящий из противоположности первой мысли и из второй мысли: 3 в квадрате не больше, чем 2, и 3 больше, чем 2.

Противоположность кондукту, состоящему из противоположности первой мысли и из второй мысли: ложно, что 3 в квадрате не больше, чем 2, и вместе с тем 3 больше, чем 2. Это — гипотетическая мысль, в которой следствием является первая мысль, а условием — вторая. Ее словесное выражение «Если 3 больше, чем 2, то 3 в квадрате больше, чем 2» может, по-видимому, вызвать недоумение; еще большим, наверное, оно будет в случае выражения, получающегося после замены «3» на «2»: «Если 2 больше, чем 2, то 2 в квадрате больше, чем 2». Но ведь ложно же, что истинной является мысль, будто 2 в квадрате не больше, чем 2, и вместе с тем 2 больше, чем 2. Вообще, если вместо 3 взять какое угодно число, то всегда будет получаться некая истинная мысль. Как, однако, быть, когда выбирается предмет, не являющийся числом? Всякое число, получающееся из выражения «*a* больше, чем 2» в результате замены «*a*» собственным именем какого-нибудь предмета, выражает некую мысль, и эта мысль всегда ложна, когда данный предмет не есть число. Иначе обстоит дело в случае первого предложения, потому что выражение, получающееся из выражения «*a* в квадрате» в результате замены «*a*» собственным именем предмета, согласно обычному словоупотреблению, только тогда обозначает некий предмет, когда этот, заменяющий «*a*», предмет есть число. Здесь повинна неполнота обычного определения «квадрата». Этот недостаток, однако, можно устранить, установив, что под квадратом предмета, отличного от числа, должен пониматься сам этот предмет, но что «квадрат числа» следует понимать в арифметическом смысле. Тогда из схемы «*a* в квадрате больше, чем 2» постоянно получается предложение, выражающее ложную мысль, если на место «*a*» подставлять собственные имена предметов, не являющихся числами[9]. После того, как это установлено, вернемся к нашему примеру гипотетического предложения и вместо знака числа «3» будем подставлять собственные имена каких угодно предметов; каждый раз мы будем получать предложение, выражающее истинную мысль. Итак, мысль общего характера, к которой мы таким образом приходим, является истинной. Мы можем выразить ее так: «Если нечто больше, чем 2, то его квадрат больше, чем 2», или лучше: «Если *a* больше, чем 2, то *a* в квадрате больше, чем 2». Здесь оборот, в котором используется слово «если», кажется с лингвистической точки зрения наиболее уместным. Но тут уже нет двух связанных друг с другом мыслей. Если мы заменим букву «*a*» собственным именем предмета, то получим предложение, мысль которого выступает как особый, частный случай мысли общего характера, а в одном таком особом, частном случае мы получаем две мысли — одну, представленную в следствии, а другую — в условии, и эти мысли наличествуют наряду с мыслью всего предложения. Мы можем воспринимать их по отдельности. Но предложение, выражающее мысль общего характера, мы подобным же образом не можем расчленить на компоненты, не лишив последние смысла. Ибо буква «*a*» должна придавать всеобщность содержанию целого, а не его частям. Компонента «*a* больше, чем 2» не выражает уже никакой мысли— ни истинной, ни ложной, потому что буква «*a*» не есть ни собственное имя, долженствующее обозначить какой-либо предмет, ни средство, служащее тому, чтобы придать всеобщность содержанию этой части мысли; она, эта буква, вообще не предназначена для того, чтобы придать этой части какой-то смысл. То же самое справедливо и в отношении другой части — «*a* в квадрате больше, чем 2». Буква «*a*», имеющаяся в одной части, предполагает наличие «*a*» в другой части, и именно поэтому части эти не могут быть разъединены; ибо в этом случае как раз и будет совершенно утрачен тот смысл, который «*a*» придает целому, а тем самым лишится своего назначения и буква «*a*». В латинском языке сложноподчиненное предложение, составные части которого вводимы словами «*quot*» и «*tot*», нельзя разложить на эти части, не лишив смысла каждую из них[10]. *Несобственным — ненастоящим, неподлинным— предложением* я называю выражение, которое, обладая грамматической формой предложения, тем не менее не выражает никакой мысли; однако оно может быть частью сложноподчиненного предложения, которое выражает какую-либо мысль и поэтому может быть обозначено как собственно предложение. Вследствие этого в предложении общего характера уже нельзя по-прежнему различать условие и следствие; ибо предложение, содержащее условие, и предложение, содержащее следствие, теперь становятся несобственными предложениями и не выражают больше никаких мыслей. Здесь, скорее, выражается то, что в одних случаях условие может выполняться, а в других нет. Тем самым нам дают понять: то, что называется условием, не есть мысль; ибо мысль — мы, как всегда, не берем в расчет поэтические сказания и творения художественной словесности — всегда только либо истинна, либо ложна. Чтобы одна и та же мысль была то истинной, то ложной — такого произойти не может. То, что могло бы в этом случае быть, так это — несобственно предложение, из которого, однако, можно получать собственно предложения, выражающие как истинные, так и ложные мысли; но тогда-то уж эти мысли оказываются разными. Буквы, такие, как «*a*» в нашем примере, служат для того, чтобы придать общность содержанию предложения, и это назначение существенно отличает их от собственных имен. Я говорю: собственное имя обозначает (или означает) какой-либо предмет; буква «*a*», неявно указывая на предмет, не обладает значением, она ничего не обозначает, ничего не значит. Такие слова, как «нечто» («etwas») и «это» («es»), в обычном языке[11] часто заменяют такого рода буквы; иногда кажется, что данная буква вообще ничего не должна представлять или замещать. Как и в других случаях, язык тут несовершенен. Для уяснения сущности логического применение букв более плодотворно, чем использование языка. Посмотрим теперь на несобственные компоненты нашего предложения общего характера! Каждая из них содержит одну букву. Если мы заменим ее собственным именем какого-нибудь предмета, то получим собственно предложение, которое состоит из этого собственного имени и всего остального. Это остальное соответствует ненасыщенной части данной мысли, являясь также и частью данного несобственного — ненастоящего — предложения. Таким образом, каждое из данных несобственных составляющих предложений содержит, кроме буквы, такую компоненту, которая соответствует ненасыщенной части некоей мысли. Эти ненасыщенные части, ненасыщенные компоненты мысли теперь оказываются и частями нашей мысли всеобщего характера; эти части, однако, нуждаются в скрепляющем их средстве, — так же как и две замкнутые компоненты мысли без такого средства нельзя прочно соединить друг с другом. Если мы выразим мысль общего характера, приведенную в нашем примере, так: «Если *a* больше, чем 2, то *a* есть то, квадрат чего больше, чем 2», то слова «есть то, квадрат чего больше, чем 2» («ist etwas, dessen Quadrat grösser als 2 ist») и «больше, чем 2» («ist grösser als 2») будут соответствовать двум ненасыщенным компонентам мысли, о которых только что шла речь. Но слово «есть» здесь неизменно берется без утверждающей силы. Скрепляющему средству соответствуют слова: «если» и «то» (so), буква «*a*» и порядок слов, при котором «ist» один раз стоит в конце, а другой раз непосредственно после слова «то» (so).

Мы знаем, однако, что на самом деле этот особый род связи достигается путем отрицания, образования некоторого кондукта, еще одного отрицания и обобщения (*sit venia verbo*[12]).

Смысл и значение

Собственные имена должны обозначать предметы, и мы называем предмет, обозначаемый собственным именем, значением последнего. С другой стороны, собственное имя есть составная часть предложения, которое выражает некую мысль.

В чем же значимость предмета для мысли? То, что предмет не является частью мысли, в этом мы убедились, когда рассматривали предложение «высота Монблана более 4000 м». Но если так, то нужен ли вообще предмет, чтобы предложение выражало какую-то мысль? Могут сказать, пожалуй, что, поскольку Одиссей не является исторической личностью, здесь налицо противоречивое выражение и имя «Одиссей» ничего не обозначает, не обладает значением. Заняв такую позицию, мы все же не станем отказывать во всяком мыслительном содержании всем предложениям «Одиссеи», в которых встречается имя Одиссей. Подумав, мы придем к заключению, что в «Одиссее» имя «Одиссей», в противоположность развивавшемуся нами взгляду, все-таки обозначает некоего человека. Но станут ли предложения, содержащие имя «Одиссей», после этого выражать иные мысли? Я полагаю, что нет. Мысли останутся теми же самыми; только они переместятся из поэтической области в область истины. Поэтому кажется, что предмет, обозначаемый каким-либо собственным именем, совершенно несуществен для содержания мысли, выражаемой тем предложением, которое это имя содержит. Для содержания мысли! В остальном, конечно, нам отнюдь не все равно, где мы находимся — в поэтической области или в области истины. Однако что же мы можем извлечь из того, что с собственным именем должно быть связано еще нечто, отличное от обозначаемого предмета и существенное для мысли, выражаемой предложением, в которое входит данное собственное имя? Я называю это нечто — смыслом собственного имени. Подобно тому как собственное имя есть часть предложения, смысл есть часть мысли.

К той же цели ведут и другие пути. Один и тот же предмет обозначается различными собственными именами; однако имена эти не во всех случаях взаимозаменимы. Это можно объяснить только тем, что собственные имена, обладающие одинаковым значением, могут иметь различный смысл. Мысль, выражаемая предложением «Монблан имеет высоту, превышающую 4000 м», отлична от мысли, которую выражает предложение «Высочайшая гора Европы имеет высоту, превышающую 4000 м», хотя собственное имя «Монблан» обозначает ту же гору, что и выражение «высочайшая гора Европы», которое, в соответствии с использованным здесь речевым оборотом, есть тоже собственное имя. Два предложения: «Вечерняя звезда— это то же, что и Вечерняя звезда» и «Вечерняя звезда — это то же, что и Утренняя звезда» различаются только одним собственным именем, обладающим одинаковым значением. Тем не менее выражают они разные мысли. Стало быть, смысл собственного имени «Вечерняя звезда» должен быть отличен от смысла собственного имени «Утренняя звезда». Таким образом, получается: с собственным именем связано нечто, что не совпадает с его значением, что может быть разным у разных имен, обладающих одинаковым значением, и что существенно для содержания мысли, выражаемой тем предложением, которое содержит данное собственное имя. Настоящее предложение, в котором встречается некоторое собственное имя, выражает единичную мысль, и в ней мы различаем замкнутую, завершенную компоненту и компоненту ненасыщенную. Первая соответствует собственному имени, но она есть не его значение, а его смысл. Ненасыщенную компоненту мысли мы тоже рассматриваем как некий смысл, а именно, смысл остальной части предложения— той, где нет данного собственного имени. В русле развиваемых здесь положений на саму мысль надо смотреть как на смысл, а именно, смысл предложения. И подобно тому, как мысль есть смысл предложения в его целом, компонента, часть мысли есть смысл части предложения. Так мысль оказывается однородной со смыслом собственного имени, но совершенно отличной от его значения.

Тут возникает вопрос, соответствует ли ненасыщенной части мысли[13],— части, на которую следует смотреть как на смысл соответствующей части предложения,— нечто, могущее рассматриваться как значение этой части. Хотя сам по себе вопрос о том, обладает ли значением собственное имя, и безразличен для содержания мысли, он в прочих отношениях обладает величайшей важностью, по крайней мере пока мы придерживаемся рамок науки. Все зависит от той области, в которой мы находимся— в области художественного творчества или в области истины. Но все же невероятно, чтобы собственное имя могло столь различно вести себя по отношению к прочим частям единичного предложения, чтобы только для него было важно наличие значения. Более того, мы должны предположить, что, когда мысль в целом пребывает в области истины, тогда и остальной части предложения, имеющей в качестве смысла ненасыщенную компоненту мысли, в сфере значения должно что-то соответствовать. К этому можно добавить, что и в этой части предложения могут встречаться собственные имена, значение которых важно. Когда в одном предложении встречается много имен, относящаяся к нему мысль может быть по-разному разложена на замкнутую и ненасыщенную части. Смысл каждого такого собственного имени может быть противопоставлен— в качестве замкнутой, завершенной компоненты— остальной части мысли как ненасыщенной. Язык ведь тоже одну и ту же мысль может выражать по-разному, выдвигая то одно, то другое собственное имя в качестве грамматического субъекта. Могут, правда, сказать, что эти различные способы выражения не равноценны. Это верно. Однако надо иметь в виду, что язык не только выражает мысль, но и придает ей особое освещение, особую окраску. И эта окраска, это освещение могут быть самыми разными, хотя мысль остается одной и той же. Немыслимо, чтобы это касалось только значения, опосредованного данным собственным именем, и не относилось к связанным с ним прочим частям предложения. Если мы скажем «Юпитер больше, чем Марс»— о чем мы в этом случае говорим? О самих небесных телах, о значениях собственных имен «Юпитер» и «Марс». Мы говорим, что они находятся в определенном отношении друг к другу, выражая это словами «больше, чем». Данное отношение имеет место между значениями соответствующих собственных имен и, стало быть, само принадлежит сфере значений. Соответственно, и часть предложения «больше, чем Марс» мы должны признать наполненной не [только] смыслом, но и значением. Если мы разложим какое-либо предложение на собственное имя и остальную его часть, то эта последняя имеет в качестве своего смысла некоторую ненасыщенную часть мысли. Но значение ее мы называем понятием. Тем самым мы, правда, совершаем ошибку, которую нам навязывает язык. А именно, вводя слово «понятие», мы делаем возможным предложения, имеющие форму «*A* есть некоторое понятие», где *A* есть собственное имя. Этим мы накладываем клеймо предмета на то, что как раз должно противостоять предмету как нечто совершенно с ним разнородное. Определенный артикль, которым начинаются слова «Данное (die) значение остальной части предложения», собственно, по той же причине неуместен. Однако язык принуждает нас к такого рода неточности, и нам не остается ничего другого, как всегда это помнить и не впадать в ошибку, смазывая резкую грань, разделяющую предмет и понятие. Образно говоря, понятие мы тоже можем назвать ненасыщенным или же сказать, что оно обладает предикативным характером.

Мы рассмотрели случай, когда сложноподчиненное предложение состояло из одного несобственного предложения-следствия и одного несобственного предложения-условия, причем эти несобственные предложения содержали какую-нибудь букву (например, «*a*»). Остальное в каждом из этих несобственно предложений соответствует некоторой ненасыщенной части мысли, и теперь мы можем сказать, что подобная компонента мысли есть смысл соответствующей части предложения, которую мы назвали остальным. Такая часть предложения теперь имеет также и значение, и его мы назвали понятием. Таким образом, мы получаем одно понятие, которое, как значение, присуще остальному в несобственно предложении-условии, и одно понятие, которое как значение присуще остальному в несобственно предложении-следствии. Эти понятия в таком случае поставлены в особую связь (мы можем также сказать — в «отношение»), и ее мы называем подчинением; а именно, мы говорим, что понятие несобственно предложения-условия подчинено понятию несобственно предложения-следствия. Если мы единичное предложение рассматриваем состоящим из некоторого собственного имени и всего прочего, что есть в предложении, то собственному имени в качестве значения соответствует предмет, а прочему— некое понятие; и предмет и понятие оказываются здесь в особой связи или отношении, которое мы называем субсумцией. Предмет подводится под понятие. Ясно, что субсумция совершенно отлична от подчинения.

Мы видели, что компоненты предложения имеют значения; а имеет ли значение предложение в целом? От каждого собственного имени, встречающегося в предложении, мы требуем, чтобы оно имело значение, — при условии, что речь идет об истине и мы находимся в рамках науки. В противном случае, как мы знаем, для смысла предложения, для соответствующей мысли безразлично, обладают ли значениями части данного предложения или не обладают. Следовательно, с предложением должно быть связано еще нечто, отличное от мысли, для которого существенно, имеют или нет значения компоненты предложения, и это что-то можно назвать значением предложения. Но единственное, для чего это существенно, есть то, что я называю истинностным значением, а именно, тó, какой — истинной или ложной — является данная мысль. От поэтических сказаний и творений художественной литературы не требуется, чтобы они имели значения истинности. Предложение, которое содержит собственное имя, не обладающее значением, не истинно и не ложно; мысль, которую оно каким-то образом выражает, принадлежит поэтической сфере. В этом случае предложение не имеет значения. Имеется два значения истинности: истина и ложь. Если какое-либо предложение вообще имеет значение, то последнее есть либо истина, либо ложь. Если предложение можно разложить на части, каждая из которых обладает значением, то и все предложение обладает значением. Истину и ложь надо считать предметами, потому что как само предложение, так и его смысл — выраженная в нем мысль — обладает свойством замкнутости, завершенности, но отнюдь не свойством ненасыщенности. Если бы я вместо предметов — истина, истинность и ложь, ложность, открыл бы два химических элемента, это произвело бы, наверное, гораздо большее впечатление на ученый мир. Когда мы произносим: «данная мысль истинна», кажется, что мы приписываем данной мысли свойство быть истиной. Тогда перед нами оказывается ситуация субсумции. Мысль как предмет как будто подводится под понятие истинного. Однако язык вводит нас здесь в заблуждение. Тут нет отношения предмета к его свойству, а есть отношение смысла знака к его значению. Ведь предложение «Истинно, что 2 есть простое число», по сути дела, означает не больше, чем предложение «2 есть простое число». Суждение, высказанное в первом случае, заключается не в слове «истинно», а в той утверждающей силе, которую мы вкладываем в слово «есть». С таким же успехом мы можем применить это рассуждение и ко второму предложению, а актер на сцене, например, может высказать без утверждающей силы равно как первое, так и второе предложение*.

Собственно предложение есть собственное имя[15], а его значением, коль скоро имя им вообще обладает, является истинностное значение: истина или ложь. Мно-

---

* Замечание об использовании букв в арифметике (12.VIII.06). Используя буквы в арифметике, по большей части не отдают себе ясного отчета относительно способа, назначения и правомерности их употребления. Принятое в алгебре обозначение неизвестной (ради большей понятности позволим себе применить это выражение, хотя против него и могут быть выдвинуты возражения) обычно не так сильно отличается от принятого в арифметике, как это, быть может, кажется. В общем и целом и в арифметике буквы должны придавать содержанию всеобщ-

гие предложения мы можем разложить — каждое— на замкнутую, завершенную компоненту, которая есть собственное имя, и компоненту ненасыщенную, означающую некое понятие. Мы можем также разложить каждое из многих собственных имен, значение которых отлично от истинностного значения, на некую замкнутую часть, которая в свою очередь есть собственное имя, и на некую ненасыщенную часть. Если последняя должна обладать значением, то ее надо насытить каким-либо собственным именем, обладающим значением, которое в свою очередь приводит к собственному имени, обладающему значением. Когда это происходит, мы называем значение такой ненасыщенной части— функцией. При этом, однако, надо сделать оговорку, касающуюся той неточности, к которой нас принуждает язык, — оговорку, похожую на ту, которая ранее была сделана, когда вводилось слово «понятие». Ненасыщенная часть предложения, значение которой мы назвали понятием, должна обладать свойством: будучи насыщена любым собственным именем, обладающим значением, она порождает подлинное предложение; это значит, что данное собственное имя порождает одно из значений истинности. В этом состоит требование четкой отграниченности понятия. Каждый предмет должен либо подпадать, либо не подпадать под заданное понятие, *tertium non datur*. Отсюда и следует установленное ранее сходное требование, касающееся функции. Пусть, например, мы исходим из предложения «3−2 >0». Разложим его на собственное имя «3−2» и остальную часть: « >0». Можно сказать, что эта ненасыщенная часть означает положительное число. Это понятие должно быть четко отграничено — иметь резкие границы. Каждый предмет должен либо подпадать, либо не подпадать под это понятие. Разложим далее собственное имя «3−2»: на собственное имя «2» и ненасыщенную часть «3— ». Тогда первоначальное предложение «3−2 > 0» мы сможем разложить и на такие части: собственное имя «2» и ненасыщенную часть «3−> 0». Значение последней есть понятие о том, что, будучи вычтенном из 3, дает положительный остаток. Понятие тоже должно быть четко отграниченным. Если бы существовало такое обладающее значением собственное имя α, которое, насытив ненасыщенную часть «3− », не порождало бы собственное имя, обладающее значением, то и ненасыщенная часть «3 − > 0», будучи насыщенной с помощью α, не порождала бы собственно предложения; иначе говоря, нельзя было бы сказать, подпадает или нет предмет, обозначенный с помощью *a*, под данное понятие, являющееся значением выражения «3 − > 0». Отсюда видно, что обычные определения арифметических знаков недостаточны[17].

ность. Но содержанию — чего? По большей части это не отдельное, независимое предложение или предложение сложноподчиненное в грамматическом смысле, а некоторая группа внешне независимых, главных предложений, когда не всегда легко понять, где проходят границы между ними. Логика, собственно говоря, должна требовать, чтобы эти внешне самостоятельные предложения были объединены и составили бы одно сложноподчиненное предложение; но если это требование выполнить, то получится по большей части нечто чудовищное. В моей знаковой системе (Begriffsschrift) штрих суждения, помимо того что он выражает утверждающую силу, обладает еще возможностью с помощью латинских букв указывать область всеобщности. Однако, для того чтобы быть в состоянии ограничивать всеобщность некоторой меньшей областью, я использую готические буквы, и они с помощью лунки производят требуемое ограничение[14]. В арифметике буквы иногда тоже применяются способом, примерно соответствующим тому, как это с помощью готических букв делается в моей понятийной записи. Но я не нашел никаких указаний на то, что этот способ использования букв осознан как некоторый особый случай. Большинство математиков, если бы они прочитали только что сказанное, не поняли бы, на что я намекаю. Мы очень зависим от внешних вспомогательных средств, используемых мышлением, и, наверное, только после замены повседневного языка более точным вспомогательным средством — по крайней мере предназначенным для известной области — определенные различения смогут стать заметными. Однако ученые до сих пор по большей части сторонятся этого вспомогательного средства и им не овладевают.

ЛОГИКА

Введение

Предикат истинно, *мысль; следствия для разработки логики*

Когда мы вступаем в пределы какой-либо науки, возникает потребность предварительно получить хотя бы некоторое представление о ее сущности. Мы хотим видеть цель, к которой стремимся, конечный пункт, указывающий направление, по которому мы будем продвигаться вперед. В логике термин «истина» играет роль, подобную той, какую в этике играет термин «благо», а в эстетике — «прекрасное». Хотя все науки имеют своею целью истину, логика занимается предикатом «истинный» совершенно особым образом, похожим на то, как физика работает с предикатами «тяжелый» и «теплый» или как химия — с предикатами «кислый» и «щелочной», при том, однако, различии, что эти науки, помимо названных, рассматривают еще множество иных свойств, и ни одно из них не может с такой полнотой охарактеризовать их сущность, с какой в логике это делается с помощью слов «истинный», «истина»[1].

Подобно этике, логику можно назвать нормативной наукой. Как я должен мыслить, чтобы достичь своей цели — истины? Мы ожидаем ответа на этот вопрос от логики; но мы не требуем от нее, чтобы она занималась особенностями каждой научной области и ее объектов; в задачу логики мы вкладываем только — указать самое общее, что имеет силу для всех областей мышления. Мы обязаны мыслить правила нашего мышления и [правила] признания истинности определяемыми законами бытия истины. Последние — законы влекут первые — правила. Стало быть, мы можем сказать: логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины. Быть может сочтут, что при этом невозможно представить себе что-то определенное. Причину этого можно отнести за счет неуклюжести автора и беспомощности языка. Но ведь речь здесь идет только о том, чтобы в самых общих чертах наметить цель. То, чего недостает, должно быть дополнено в ходе последующего изложения.

Было бы напрасно пытаться с помощью дефиниции сделать более отчетливым, чтó надлежит понимать под «истинным»[2]. Если бы мы пожелали сказать: «некое представление истинно, когда оно согласуется с действительностью», то этим мы не получили бы ничего, поскольку, чтобы применить сказанное, надо было бы в каждом данном случае решать, совпадает ли с действительностью данное представление; иными словами, надо было бы определять: истинно ли то, что данное представление отвечает действительности. Стало быть, определяемое само уже должно предполагаться данным. То же самое имеет силу относительно каждого определения формы: «*A* истинно, когда оно имеет такие-то и такие-то свойства или находится в таком-то и таком-то отношении к тому-то и тому-то»[3]. Истина, очевидно, есть нечто столь первоначальное и простое, что сведéние ее к более простому невозможно. Поэтому мы вынуждены уяснять своеобразие нашего предиката путем сравнения его с другими предикатами[4]. От всех прочих предикатов он прежде всего отличается тем, что когда нечто высказывается, то вместе с этим нечто высказывается и этот предикат.

Когда я утверждаю, что сумма чисел 2 и 3 есть 5, я утверждаю: истинно, что 2 и 3 есть 5. И подобным же образом, когда я утверждаю, что мое представление о Кёльнском соборе согласуется с действительностью, я утверждаю, что оно истинно. Стало быть, форма утвердительно-повествовательного предложения, собственно говоря, есть то, с помощью чего мы высказываем истину, а для этого мы не нуждаемся в слове «истинно». Значит, мы можем сказать: даже там, где мы используем выражение: «истинно, что...», форма утвердительно-повествовательного предложения есть, собственно, самое важное.

Теперь поставим вопрос: где же применим предикат «истинно»? Задача в том, чтобы отграничить область, вне пределов которой о его применении вообще не может быть и речи. Вся область физических тел в любом случае должна быть исключена. Пожалуй, только относительно произведений искусства может возникнуть сомнение. Однако, когда говорят об их истинности, слово это употребляют все-таки в значении, отличном от того, которое здесь имеется в виду. Во всяком случае вещь будут называть истинной только как произведение искусства. Если ее породили силы слепой природы, наш предикат тут не подходит. По тем же основаниям мы исключаем из рассмотрения такие ситуации, когда истинными называют чувства или ощущения, например при критике художественных произведений.

По большей части наш предикат прилагают, вероятно, к предложениям; однако мы должны исключить предложения, выражающие пожелания, вопросительные предложения, предложения, выражающие приглашение или призывы, и повелительные предложения; рассмотрению подлежат только предложения утвердительно-повествовательные — такие предложения, в которых мы сообщаем о фактах, устанавливаем математические законы или законы природы.

Далее, ясно: то, чему мы, собственно говоря, приписываем истину,— это не последовательность звуков, которой является предложение, а его смысл; ибо, с одной стороны, истинность сохраняется, если мы правильно переводим предложение на другой язык, а, с другой стороны, такая ситуация, когда одна и та же последовательность звуков в одном языке обладает истинным, а в другом языке— ложным смыслом, хотя бы мыслима.

Под словом «предложение» мы понимаем здесь главное предложение и зависящие от него придаточные предложения.

В случаях, которые только и рассматриваются в логике, смысл утвердительно-повествовательного предложения либо истинен, либо ложен, и тогда мы называем этот смысл подлинной (собственно) мыслью. Имеется, однако, еще третий случай, который мы должны здесь хотя бы упомянуть.

Предложение «У Сциллы шесть голов»[5] не истинно; но не истинно и предложение «У Сциллы не шесть голов»; ибо для этого было бы нужно, чтобы имя «Сцилла» что-то обозначало. Возможно, полагают, что имя «Сцилла» все же что-то означает, именно, некое представление. Первый вопрос, который здесь возникает: а чье же это представление? Часто говорят, будто одно и то же представление присуще многим людям; но это неверно, если слово «представление» употреблять в психологическом смысле: каждый обладает своим собственным представлением. Но представление не имеет голов; поэтому их нельзя отсечь. Стало быть, «Сцилла» не обозначает никакого представления. Имена, которые не служат той цели, для которой предназначено собственное имя, то есть ничего не именуют, мы будем называть кажущимися, мнимыми собственными именами. Хотя рассказ о Телле— это сага[6], а не описание исторического события, имя же «Телль» — мнимое имя, мы все же не можем отказать ему в смысле; однако смысл предложения «Телль сбил одним выстрелом яблоко с головы своего сына» столь же не истинно, что и предложение «Телль не сбил одним выстрелом яблоко с головы своего сына». Но я не говорю и того, что соответствующий смысл ложен, а отношу его к сфере поэзии. Это объясняет смысл, вкладываемый мною в слово «ложно», для которого настоящая дефиниция так же невозможна, как и для слова «истинно».

Если бы верен был теоретико-познавательный идеализм, то все науки принадлежали бы к литературно-художественной сфере, относились бы к поэтическим творениям. Хотя и можно попытаться перетолковать все предложения так, что они станут предложениями о представлениях, это совершенно изменило бы их смысл, и мы получили бы совершенно другую науку, причем эта новая наука стала бы ветвью психологии.

Вместо «поэтических творений» можно говорить о «мнимых мыслях». Значит, если истина не составляет смысла некоторого утвердительно-повествовательного предложения, то этот смысл либо ложен, либо принадлежит художественной сфере, и эта последняя ситуация имеет место всегда, когда в предложении встречается мнимое собственное имя*. Поэтическое искусство, так же как, например, и живопись, ориентировано на кажимость. Утверждения здесь нельзя принимать всерьез: это только мнимые, кажущиеся утверждения. Соответствующие мысли тоже нельзя принимать всерьез — в отличие от науки: это только кажущиеся, мнимые мысли. Если рассматривать драму «Дон Карлос» Шиллера как факт подлинной истории, то она в своей большей части стала бы ложной. Но творение поэтического искусства никак нельзя в этом отношении принимать всерьез; это только игра, только спектакль. И имена собственные здесь — мнимые собственные имена, хотя они и совпадают с именами исторических личностей; их здесь нельзя принимать всерьез. Сходное положение имеет место и в случае исторической живописи. Как произведение искусства историческое полотно вовсе не претендует на то, чтобы перед нашими глазами предстали подлинные события. Картина, которая с фотографической точностью воспроизводила бы важный момент истории, не была бы произведением искусства в высоком смысле слова — скорее ее можно было бы сравнить с анатомическим изображением в каком-нибудь научном труде.

Логику не интересуют мнимые мысли, подобно тому как физик, исследующий грозовые явления, не обращает внимания на грозу на театральной сцене. Когда в дальнейшем речь пойдет о мыслях, то под ними будут пониматься собственно мысли, которые являются либо истинными, либо ложными.

Я называю мыслью смысл утвердительно-повествовательного предложения. Мыслями являются, например, законы природы, математические законы, исторические факты; все они находят свое выражение в утвердительно-повествовательных предложениях. Теперь я могу сказать точнее: предикат «истинно» применим к мыслям.

Нередко говорят об истинных представлениях. Под представлением понимается некий образ фантазии, который — в отличие от наглядных восприятий, состоящих из ощущений, испытываемых в данный момент, — складывается из пробудившихся следов прошлых ощущений либо действий. Каждое представление, как и любой другой образ, сам по себе не истинен, — он является таковым лишь по отношению к тому, чему он должен соответствовать. Когда говорят, что некая картина должна изображать Кёльнский собор, можно поставить вопрос: ну, хорошо, а выполнено ли это намерение; без учета намерения нечто отобразить не может быть и речи об истине, о правде данной картины. Из этого можно сделать вывод, что предикат *истинности* приписывается, собственно, не самому представлению, а мысли о том,

---

* Исключения из этого правила бывают тогда, когда мнимое собственное имя встречается в косвенной речи, составляющей какую-то часть всего предложения[7].

что оно, это представление, отображает некоторый известный предмет. А эта мысль не есть представление и не составлена каким-то образом из представлений. Мысли коренным образом отличаются от представлений (в психологическом смысле). Представление о красной розе — это нечто другое, нежели мысль о том, что эта роза — красная. Как бы ни соединяли одни представления с другими, как бы ни сливали их друг с другом, — в результате все равно получится представление и никогда — нечто такое, что может быть истинным. Это различие проявляется и в характере сообщений. Подлинным средством выражения мыслей является предложение. Но оно мало пригодно для передачи представлений. Я обращаюсь к представлению, когда замечаю, сколь несовершенным является любое описание по сравнению с наглядным изображением. Несколько лучше обстоит дело в случае слуховых представлений; здесь может помочь ономатопея — звукоподражание; однако именно оно не имеет ничего общего с выражением мысли, и эта звуковая живопись легко утрачивается при переводе на другой язык, тогда как данная мысль должна при этом все-таки сохраняться, — при условии, что о переводе речи вообще можно говорить. С другой стороны, изображения и музыкальные произведения без слов — мало пригодны для выражения мыслей. Хотя при восприятии подобных произведений искусства в голову могут приходить те или иные мысли, тут отсутствует какая-либо необходимая связь, и неудивительно, что в таких случаях другой человек думает совсем об ином.

Чтобы[8] яснее представить все своеобразие нашего предиката *истинный*, сравним его с предикатом *прекрасный*. Первое, что мы замечаем, это то, что прекрасное имеет градации, а истина — нет. Мы можем найти прекрасными два предмета, но счесть, что один из них более прекрасен, чем другой. Напротив, когда две мысли истинны, одна из них не истиннее другой. Далее обнаруживается то существенное различие, что истина не зависит от нашего признания ее истиной, а прекрасное лишь для того прекрасно, кто воспринимает его таковым. Что для одного прекрасно, не обязательно прекрасно для другого. О вкусах не спорят. Относительно истины возможно заблуждение — в случае прекрасного нет. Нечто является для меня прекрасным именно потому, что я считаю его прекрасным. Но от того, что я считаю что-то истинным, оно таковым не становится; и если нечто само по себе не истинно, оно не истинно и для меня. Нет ничего, что было бы прекрасным само по себе — оно таково только для воспринимающего существа, и в случае суждений о прекрасном это существо должно всегда присутствовать в мысли. Однако выносим же мы такие суждения, которые, как кажется, претендуют на объективность. В основе этого лежит всегда — сознаем мы это или нет — предположение о человеческой норме, и каждый непроизвольно считает себя столь близко стоящим к нормальному человеку, что убежден: он может говорить от его имени. Тогда предложение «Эта роза прекрасна» должно означать: эта роза прекрасна для нормального человека. Но что такое — быть нормальным? Это целиком зависит от той среды, которая принимается во внимание. Если в какой-то далекой горной долине почти все люди имеют зоб, то это будет считаться нормальным, и те, кто лишен этого украшения, станут считаться безобразными. Как можно заставить негра в Центральной Африке отказаться от взгляда, что узкие носы европейцев некрасивы, а широкие негритянские носы, наоборот, красивы? И не является ли негр — как негр столь же нормальным, что и белый — как белый? А ребенок — разве он не так же нормален, как и взрослый? Суждения о прекрасном находятся под большим влиянием представлений, всплывающих в памяти по ассоциации, а эти представления зависят от того, что́ человек ранее воспринимал. Но у разных людей это всегда различно. Даже если бы удалось дать дефиницию нормального человека и тем самым объективно определить прекрасное, это все равно произошло бы на базе субъективно прекрасного. Последнее тем самым ни в коей мере не было бы устранено, а только признано в качестве чего-то первичного. Если бы мы захотели заменить человека в норме человеком идеальным, мы не смогли бы изменить ситуацию. Без ощущений и представлений не может существовать субъективно прекрасное и, значит, и объективно прекрасное. Таким образом, многое, по-видимому, говорит в пользу того, что подлинное произведение искусства есть комплекс представлений внутри нас и что вещь внешнего мира — живописное полотно, скульптурный памятник — это только средство вызвать в нас переживание этого подлинного произведения искусства. В соответствии с этим каждый, кто испытывает эстетическое наслаждение, обладает своим собственным произведением искусства, так что не существует никакого противоречия между различными суждениями о прекрасном: *de gustibus non disputandum*![9]

Если бы кто-нибудь взялся отрицать, что истина независима от нашего признания ее таковой, то он — именно благодаря этому своему утверждению — вступил бы в противоречие с тем, что он сам же и утверждал, наподобие критянина, сказавшего, что все критяне лгут[10].

Если бы нечто было истинным лишь для того, кто считает это нечто истинным[11], то не существовало бы никакого противоречия между мнениями различных людей. Всякий человек, разделяющий подобный взгляд, лишился бы, таким образом, всякого права не соглашаться с противоположным взглядом, он должен был бы чтить принцип: *non disputandum est*; он не мог бы ничего утверждать в обычном смысле, и если бы он по форме стал бы высказываться в подобном роде, то это звучало бы как некое междометие; иначе говоря, выражение его душевно-психического состояния или процесса не могло бы находиться в противоречии с подобным состоянием или процессом, переживаемым другим человеком. И такое же значение имело бы и его утверждение, что нечто только благодаря нашему признанию этого утверждения и для нас тоже было бы истиной. Если бы этот взгляд был истинным, то рухнула бы претензия на то, что и для других людей их собственное мнение обладает бóльшим правом на признание, чем противоположное. Взгляд, выдвигающий такого рода претензию, был бы неправомерен; но это значит, что каждое мнение в обычном смысле слова оказалось бы неправомерным, неоправданным, стало быть, мы могли бы оспорить его; не существовало бы науки, не было бы заблуждений, никакого способа исправления ошибок, не существовало бы, собственно говоря, ничего истинного в обычном смысле слова. Со всем этим так тесно связана подчеркиваемая здесь независимость истины от нашего ее признания, что ее нельзя отделить от этой независимости. Если кто-нибудь стал бы серьезно и честно защищать оспариваемый здесь взгляд, то не оставалось бы ничего другого, как предположить, что он связывает со словом «истина» какой-то иной смысл.

Сделаем еще один шаг. Мысли, например законы природы, не только не нуждаются в нашем признании, чтобы быть истинными, — не требуется даже, чтобы мы о них думали. Закон природы не выдуман, а открыт нами. Подобно пустынному острову в Северном Ледовитом океане, существовавшему задолго до того, как его увидел человек, законы природы, так же как и законы математики, действуют искони, а отнюдь не с момента их открытия. Отсюда следует не только то, что мысли, если они истинны, — истинны независимо от нашего признания их таковыми, но и то, что они вообще независимы от нашего мышления. Мысль принадлежит тому, кто мыслит, не так, как представление— тому, кто его представляет: всем, кто понимает мысль, она противостоит одинаковым образом и как одинаковая мысль. [В противном случае] два человека не могли бы связывать одну и ту же мысль с одним и тем же предложением — каждый имел бы свою собственную мысль; и если, например, один человек выдвинул бы в качестве истины, что $2 \cdot 2 = 4$, тогда как другой отрицал бы это, то тут не было бы противоречия, так как то, что утверждал один из них, было бы совсем не тем же самым, что отвергал другой. Противоречие между двумя утверждениями, высказанными разными людьми, было бы вообще невозможно; ибо противоречие налицо только тогда, когда в точности об одной и той же мысли утверждается как истина, так и ложь. Пустым делом стал бы спор об истине, потому что не было бы общего поля, где сталкивались бы противоположные мнения; каждая мысль была бы замкнута в своем внутреннем мире, и противоречие между мыслями разных людей было бы похоже на борьбу между нами и обитателями Марса. Нельзя было бы говорить, что один человек может сообщить другому свою мысль и что после этого во внутреннем мире последнего развернулась борьба. Мысль нельзя было бы сообщить другому человеку, она не могла бы перейти из внутреннего мира одного во внутренний мир другого; мысль, возникшая в уме второго в результате подобного сообщения, была бы отлична от мысли первого; и малейшее изменение могло бы превратить истину в ложь. Если бы мы стали рассматривать мысли как нечто психологическое, как комплекс представлений, не становясь, однако, полностью на субъективную точку зрения, то утверждение, что 2+3 = 5, мы должны были бы истолковывать примерно так: «Замечено, что у многих людей появляется комплекс представлений, который связан с предложением '2+3 = 5'. Этого рода комплекс мы называем смыслом предложения '2+3 = 5'. Насколько мы можем судить по имевшимся до сих пор наблюдениям, этот комплекс представлений всегда истинен, так что мы — в предварительном порядке — можем сказать: «Согласно имеющимся на сегодня наблюдениям смысл предложения '2+3 = 5' есть истина». Но это истолкование, очевидно, совершенно несостоятельно. Оно не сдвигает нас с места, потому что смысл предложения «Замечено, что у многих людей имеет место комплекс представлений, и т.д.» оказывается тоже комплексом представлений, и все надо начинать сначала. Суп, который по вкусу одному, другой, возможно, найдет ужасным. Каждый судит, собственно говоря, о своих вкусовых ощущениях, а они отличаются от ощущений другого. И так же обстояло бы дело с мыслью, если бы она относилась к соответствующему предложению наподобие отношения вкусовых ощущений к вызывающим их химическим раздражителям.

Если бы мысль была чем-то интимно-внутренним, душевно-психическим, каким является представление, то ее истинность могла бы заключаться только в ее отношении к чему-то, что не было бы [для человека] интимно-внутренним, душевно-психическим. Поэтому, если бы мы захотели узнать, является ли некоторая мысль истинной, мы должны были бы поставить вопрос, имеет ли место это отношение, стало быть, истинна ли мысль, что данное отношение имеется. И таким образом мы оказались бы в положении человека, находящегося в беличьем колесе. Он делает шаг вперед и вверх, но ступенька, на которую он становится, опускается, и он возвращается в прежнее положение.

Мысль есть нечто внеличностное. Когда мы видим написанное на стене предложение «2+3=5», мы тем самым понимаем выраженную в нем мысль полностью, и для этого понимания совершенно не нужно знать, кто его написал.

Может показаться, что нашему учению о том, что мысль не зависит от того, кто мыслит, противоречит такое предложение, как «Я зябну», так как для одного человека оно может быть истинным, а для другого ложным, так что само по себе оно не есть истина. Этот взгляд основан на том, что в устах одного человека данное предложение выражает иную мысль, чем в устах другого. Одни слова здесь не выражают всего смысла, и надо учитывать, кто их произносит. Таким образом, произнесенное слово во многих случаях требует того, чтобы его дополняли жестами, выражением лица, учитывали окружающие обстоятельства. Слово «я» в предложениях, произносимых разными людьми, как раз и обозначает разных людей. Мысль, что он зябнет, не обязательно должна быть высказана тем, кому холодно. Она может исходить от другого человека, который называет мерзнущего человека по имени.

Таким образом, мысль может быть облечена в предложение, которое больше соответствует его независимости от того, кто мыслит. И благодаря этой возможности такое предложение отличается от душевно-психических состояний, выражаемых междометиями. Слова типа «здесь», «теперь» получают свой полный смысл только благодаря обстоятельствам, в которых ими пользуются[12]. Когда говорят «идет дождь», это надо дополнить — когда и где. Такое предложение, будучи написанным, часто не имеет никакого законченного смысла, потому что отсутствуют указания о том, кто, где и когда его высказал. Для смысла предложения, содержащего субъективно-вкусовое суждение, такое, как «эта роза прекрасна», существенно, кто произносит предложение, хотя в нем и не встречается слово «я». Стало быть, все эти кажущиеся исключения объясняются тем, что одно и то же предложение не всегда выражает одну и ту же мысль, потому что слова, чтобы выражать законченный смысл, нуждаются в дополнительных разъяснениях, а последние различны и зависят от обстоятельств.

Если представления (в психологическом смысле слова) не имеют четких границ, расплывчаты и изменчивы, как Протей, то мысли пребывают в постоянстве. По своей сущности они носят вневременной и внепространственный характер. Относительно мысли, что $3 + 4 = 7$, как и относительно законов природы, это вряд ли требует обоснования. Если бы, например, выяснилось, что закон всемирного тяготения с известного момента больше не верен, то мы заключили бы, что он вообще неверен, и стали бы стараться открыть какой-то другой закон, отличающийся от него тем, что в одно время он выполняется, а в другое — нет. То же самое и с пространством: если бы обнаружилось, что вблизи Сириуса не действует закон всемирного тяготения, то мы попытались бы отыскать другой закон — такой, чтобы он выполнялся в нашей Солнечной системе, вблизи Сириуса же нет. Если в качестве примера, как будто свидетельствующего против вневременного характера мыслей, приведут предложение «Население Германской империи составляет 52 000 000 человек», то я на это отвечу: это предложение вовсе не является полным выражением мысли, потому что отсутствует указание времени. Если присоединить подобное указание, например назвать: 1 января 1897 года в полдень по среднеевропейскому времени, то данная мысль станет либо истинной, причем истинной навсегда — или, лучше сказать, вне времени,— либо ложной, причем ложной абсолютно. Сказанное справедливо о каждом отдельном историческом факте: если он истинен, то истинен независимо от времени, когда было высказано соответствующее суждение. Несостоятельно и возражение, будто предложение с течением времени может получить другой смысл; ибо то, что при этом меняется, относится все-таки не к мысли, а к языку. На другом языке этого сдвига смысла может и не происходить. Говорят, правда, об изменчивости мыслей людей. Однако не бывает, чтобы сами мысли были то истинными, то ложными, — просто их считают то истинными, то ложными.

Если мне, скажем, возразят, что со словом «мысль» я связываю непривычный смысл, что под этим словом обычно понимают некий акт мысли, который, как очевидно, является внутренним душевно-психическим действием, — как ответить на это? Ну, прежде всего важно, что я последователен в своем словоупотреблении; вопрос о том, совпадает ли оно с общепринятым, менее важен. Может случиться, что под словом «мысль» понимается некий мыслительный акт, но, как бы то ни было, происходит это не всегда*, причем сам этот акт не может быть истинным.

---

* Господин Дедекинд употребляет это слово так же, как и я, в теореме (Satz) 66 своего сочинения «Что такое числа и чем они должны быть?»[13] Дело в том, что он стремится доказать, что совокупность всех вещей, которые могут быть предметом его мышления, бесконечна. Пусть s есть такой предмет;

Как и в прочих науках, в логике тоже разрешается создавать искусственные выражения, не заботясь о том, всегда ли в повседневном языке соответствующие слова употребляются таким же образом. При установлении значений главное вовсе не в том, чтобы точно следовать сложившемуся словоупотреблению или этимологии слова, а в том, чтобы сделать данное слово, насколько это возможно, пригодным для выражения данного закона. Но чем более подходящей для этой цели является совокупность искусственных выражений, тем короче и точнее она способна передавать соответствующие закономерности.

Теперь мы имеем право не рассматривать мышление как процесс порождения мыслей. Мысль не является мыслительным актом: она относится к мышлению наподобие прыжка к процессу прыгания. И такого рода взгляд согласуется со многими речевыми оборотами. Разве не говорят, что мысль постигнута там-то и тем-то, что кому-то снова пришла в голову данная мысль? Если бы мысль возникала лишь благодаря мышлению или существовала благодаря ему, то одна и та же мысль могла бы возникать, пропадать и снова возникать, что абсурдно. Подобно тому как я не создаю дерева, когда я на него смотрю, не произвожу карандаш, когда беру его в руки, — я не порождаю и мыслей, когда мыслю. И еще меньше можно сказать, что ее выделяет мозг — наподобие того, как печень выделяет желчь[15].

Образные сравнения, лежащие в основе таких языковых выражений, как: постигать мысль, подхватывать, ухватывать, усматривать ее, хвататься за нее, capere, percipere, comprehendere, intelligere[16] — в основном верно передают ситуацию. Что постигнуто, схвачено, то имеется в наличии, и им надо только овладеть. Точно так

тогда господин Д[едекинд] называет с помощью $\varphi(s)$ мысль, что s может быть предметом его мышления. А мысль $\varphi(s)$ может теперь сама быть предметом его мышления. В соответствии с этим $\varphi(\varphi(x))$ есть та мысль, что мысль, что s может быть предметом его мышления, может быть предметом его мышления. Из этого видно, что́ должно обозначать «$\varphi(\varphi(\varphi(s)))$», «$\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(s))))$» и т.д. Для этого доказательства существенно, что предложение «s может быть предметом мышления господина Дедекинда» всегда выражает некоторую мысль, как только «s» такого рода предмет. Если теперь, как пытается доказать господин Д[едекинд], таких предметов s бесконечно много, то должно существовать бесконечно много и таких мыслей $\varphi(s)$. Далее, господин Д[едекинд], наверное, не идет так далеко, чтобы допустить, что он может иметь бесконечно много мыслей. Он также не станет предполагать, что и другой человек может обладать бесконечно многими мыслями, которые могут быть предметами его мышления; ибо тем самым он допустил бы то, что подлежит доказательству. Если же нельзя мыслить бесконечно много мыслей, то среди этих бесконечно многих мыслей $\varphi(s)$ существует бесконечно много таких, которые не мыслятся, так что мыслимость не существенна для мыслей. А это — как раз то, что я утверждаю. Если бы существовали только мыслимые мысли, то знак «$\varphi(s)$» не всегда имел бы значение; а чтобы обеспечить для него это, недостаточно того, что «s» обозначает нечто, могущее быть предметом мышления господина Д[едекинда],— для существования этого нечто нужно, чтобы оно также и мыслилось. Если этого нет, то знак «$\varphi(s)$» для соответствующего s не обладает значением. Предметом мышления господина Д[едекинда] может стать Солнце ($\odot$); стало быть, два первых члена и, быть может, еще несколько следующих в последовательности «$\odot$», «$\varphi(\odot)$», «$\varphi(\varphi(\odot))$»... имеют значение; однако, двигаясь по этой последовательности, мы в конце концов обязательно дойдем до члена, который лишен значения, потому что мысль, которую он должен обозначать, не мыслится и поэтому не имеется в наличии; выражение «$\varphi(s)$» тогда было бы похоже на степенной ряд, который сходится не для каждого значения своего аргумента. Расхождение ряда соответствует отсутствию значения у знака «$\varphi(s)$». Допустим, что некоторый степенной ряд сходится между 0 и 4, а расходится для аргументных значений, которые больше, чем 4; допустим, далее, что данный ряд принимает для аргумента 1 значение 2, для аргумента 2— значение 5; тогда соответствующая последовательность чисел 1, 2, 5 обрывается, а не уходит в бесконечность. Равным образом не уходит в бесконечность и последовательность $\odot$, $\varphi(\odot)$, $\varphi(\varphi(\odot))$,...,— при условии, что существуют только мыслимые мысли. Значит, убедительность доказательства господина Д[едекинда] основывается на предположении, что мысли существуют независимо от нашего мышления. Как мы видим, совершенно естественно, само собой возникает принятое мною употребление слова «мысль»[14].

же, когда мы вглядываемся во что-то или выбираем что-то из общей массы, это что-то уже налицо и вовсе не возникает в результате нашей деятельности. Конечно, всякое сравнение в чем-то хромает. Мы склонны смотреть на то, что не зависит от нашей душевно-психической жизни, как на нечто пространственное, вещественное, и приведенные выше слова фактически позволяют рассматривать и мысли также. Однако в этом еще нельзя усмотреть основания соответствующего сравнения. Не обязательно должно быть пространственным, вещественным, фактическим то, что объективно, что не зависит от нашей духовной жизни. Если мы не учтем этого обстоятельства, мы легко можем впасть в некий род мифологии. Когда говорят: «Законы гравитации, инерции, параллелограмма сил вызывают движение Земли», может создаться впечатление, будто эти законы природы, так сказать, берут Землю в руки и заставляют совершать обязательные перемещения. Подобное применение слов «вызывать», «воздействовать» способно ввести в заблуждение. Вместо этого лучше сказать, что Солнце и планеты воздействуют друг на друга согласно закону всемирного тяготения.

Таким образом, если сходство между физическими телами и мыслями заключается в их независимости от моего внутреннего мира, то из этого тем не менее нельзя делать вывод, будто мысли — наподобие, например, физических тел — совершают движения, издают запахи или вызывают вкусовые ощущения; благодаря абсурдности такого вывода отпадает, например, распространенное возражение против нашего учения. Хотя закон природы существует совершенно независимо от того, думаем мы о нем или нет, он не посылает ни световых, ни звуковых волн, которые могли бы вызвать раздражение зрительных или слуховых нервов. Однако разве я не вижу, что вот этот цветок имеет пять лепестков? Так мóжно сказать, но слово «видеть» тогда употребляется не в смысле простого зрительного восприятия, — подразумевается, что с ним связано мышление и суждение. Ньютон открыл закон всемирного тяготения вовсе не потому, что обладал более совершенными чувственными восприятиями.

Если же мы пожелаем говорить о действенности (Wirklichkeit) мыслей, то это будет возможно только в том смысле, что знание, например, некоторого закона природы, которым кто-то обладает, приводит последнего к определенным решениям, которые в свою очередь имеют следствием движение физических масс. При этом знание какого-либо закона следует воспринимать с точки зрения его воздействия на познающего человека, что, по-видимому, возможно, подобно тому как зрительное восприятие цветка можно рассматривать как опосредованное воздействие его на зрителя.

Человек может не обращать внимания на мысли, а может ими овладевать. Последнее можно считать воздействием человека на них, а это как будто говорит против их вневременного характера. Однако это не вызывает существенных изменений в мыслях — подобно Луне, спокойно светящей, невзирая на то, наблюдают ее или нет. В соответствии со сказанным если, по-видимому, можно говорить о воздействии мыслей на людей, то о воздействии людей на мысли говорить вряд ли приходится. В пользу изменяемости мыслей можно, казалось бы, привести довод, что они не всегда одинаково ясны. Однако то, что называют ясностью мыслей, есть, собственно, полнота их усвоения, их понимания в нашем смысле слова, но никак не свойство самих мыслей.

Было бы неверно полагать, что независимы от нашей душевно-психической жизни только истинные мысли и что, в отличие от последних, ложные мысли, как и представления, принадлежат нашему внутреннему миру. Однако почти все, что нами было сказано о предикате *истинно*, справедливо и для предиката *ложно*[17]. В собственном смысле он применим только к мыслям. Когда высказывание по своей форме является высказыванием о предложениях или представлениях, по сути оно все же относится к мыслям. То, что ложно, ложно само по себе и независимо от нашего мнения об этом. Спор о ложности есть вместе с тем всегда спор об истинности. То, о ложности чего идет спор, не принадлежит, стало быть, душевно-психическому миру отдельного человека.

Отделение мыслей от их облачения

В утвердительно-повествовательном предложении обычно присутствуют две стороны — выражаемая мысль и утверждение ее истинности, которые теснейшим образом взаимосвязаны. Поэтому случается, что эти стороны подчас различаются недостаточно четко. Однако мысль можно выразить, и не выдвигая ее в качестве истинной[18]. Исследователь, делающий научное открытие, по большей части сначала улавливает только мысль и после этого ставит вопрос, следует ли признать ее истинной; и лишь тогда, когда изучение подтвердит данную гипотезу, он отваживается на то, чтобы выдвинуть ее в качестве истинной. В вопросе «сжимаем ли газ кислород?» и в предложении «кислород сжимаем» выражена одна и та же мысль, в первом случае связанная с некоторым запросом, а во втором — с некоторым утверждением.

Когда мы внутренне — в нашем уме — признаем некоторую мысль истинной, мы судим о ней, если мы оповещаем о такого рода признании, то мы утверждаем.

Мы можем мыслить, не вынося суждения.

Мы видели, что одной лишь последовательности звуков предложения часто недостаточно, чтобы полностью выразить мысль. Когда надо постичь сущность данной мысли совершенно строго, мы должны учитывать нередкий противоположный случай, когда предложение несет в себе больше, нежели только выражение некоторой мысли и утверждение ее истинности. Во многих случаях оно должно, наряду с этим, воздействовать на представления и чувства слушателя, и это проявляется тем сильнее, чем ближе язык к художественно-поэтической сфере. Правда, мы подчеркивали, что язык мало пригоден для того, чтобы строго по желанию вызывать у слушателя те или иные представления. Кто решится сказать, что словесное описание изображения Аполлона вызывает в уме человека в точности то же самое, что у него без всяких усилий возникло бы, когда он воспринял бы само произведение искусства. Но говорят же о поэте, что он в своих стихах рисует картины. И в самом деле, нельзя отрицать, что звучащее слово действует на представления — уже тем, что оно само как совокупность слуховых ощущений проникает в сознание. Одна лишь последовательность звуков, звучание голоса, интонация и ритм речи воспринимаются как приятные или неприятные. С этими звуковыми ощущениями связаны сходные с ними слуховые представления, которые в свою очередь пробуждают другие представления. Это — область ономатопеи, звукоподражания. Сравните в этой связи строку из Гомера («Одиссея», IX, 71): τριχϑά τε κάὶ τετραχϑὰ διέσχιδεν ἵς 'ανεμοιο[19].

Все это еще совершенно независимо от назначения слов выражать мысли. Звуки действуют тут только как чувственные раздражители. Но благодаря тому, что последовательность их должна иметь некий смысл, они еще и иным способом влияют на представления. У того, кто слышит слово «лошадь» и понимает его, тотчас же, наверное, возникает образ некоей лошади. Но этот образ не надо смешивать со смыслом слова «лошадь»; ибо в слове этом нет и намека на масть лошади, на ее состояние покоя либо движения, на ракурс, в каком она видится, и пр. Если бы разные люди могли бы, скажем, немедленно проецировать на экран те представления, которые всплывают у них при слове «лошадь», то мы увидели бы очень различные изображения. Но и один и тот же человек не всегда свяжет со словом «лошадь» одно и то же представление. Во многом это зависит от ситуации. Сравните, например, предложения «Как смело он скачет на горячем коне» и «Я только что видел, как на мокрый асфальт упала лошадь».

Таким образом, нельзя сказать, что со словами «лошадь», «конь» всегда связано одно и то же представление. Подобные слова благодаря своему смыслу побуждают, правда, к возникновению некоторого представления; однако только этого далеко не достаточно, чтобы полностью определить это представление. Вообще, когда люди говорят и слушают, надо предполагать совпадение представлений только в самых общих чертах. Разные художники, независимо друг от друга иллюстрирующие одно и то же поэтическое произведение, значительно отклоняются друг от друга в изображении одинакового сюжета. Поэт, собственно, не живописует, не изображает, а лишь побуждает к живописному изображению, дает некие указания, некие намеки, оставляя остальное на долю слушателя. И, учитывая эти намеки, поэт весьма ценит то, что в его распоряжении имеются различные слова, могущие заменять друг друга, не меняя мысли, но по-разному действующие на представления и переживания слушателя. Представьте, например, слова «ходить», «шагать», «бродить». В повседневной разговорной речи эти средства используются для тех же целей. Если мы сравним предложения: «Эта собака выла целую ночь» и «Эта дворняжка выла целую ночь», то найдем, что мысль здесь одна и та же. Из первого предложения мы узнаём не больше и не меньше, чем из второго. Но если слово «собака» не вызывает ни приятных, ни неприятных чувств, то слово «дворняжка» гораздо ближе к ощущению неудовольствия, намекая на то, что собаку эту надо представлять себе как какое-то облезлое и жалкое существо. Если потом и выяснится, что это представление совершенно неверно, то все-таки нельзя сказать, что из-за этого второе предложение ложно. Тот, кто его высказывает, выражает тем самым, конечно, чувство определенного пренебрежения; однако оно не принадлежит к выражаемой мысли. Отличие второго предложения от первого имеет значение некоего междометия. Можно было бы подумать, что из второго предложения мы все же узнаём больше, чем из первого, а именно, что говорящий весьма низкого мнения об этой собаке. В этом случае в слове «дворняжка» содержится целая мысль. Проверку этого можно произвести следующим образом.

Предположим случай, когда первое предложение верно и кто-то высказывает второе предложение, не испытывая на самом деле никакого чувства пренебрежения, которое кажется заключенным в слове «дворняжка». Если бы это имело место, то второе предложение содержало бы две мысли и одна из них была бы ложной; тем самым оно высказывало бы в целом нечто ложное, тогда как первое предложение было бы верным. С этим, пожалуй, нельзя согласиться; напротив, употребление слова «дворняжка» не препятствует тому, чтобы и второе предложение считать истинным. Дело в том, что надо различать мысли, которые получили выражение, и мысли, принять которые в качестве истинных других людей побуждают, не выражая эти мысли. Когда командир с целью обмануть неприятеля и продемонстрировать свою слабость приказывает по-разному одеть личный состав, он же все-таки не лжет; ибо он вообще не выражает свою мысль, хотя его действия имеют целью вызвать определенные мысли. Такого рода действия могут встречаться и тогда, когда говорят, придавая голосу особое звучание или выбирая особые слова. Когда кто-то печальным голосом передает истинное сообщение о смерти, не испытывая при этом никакой печали, выражаемая им мысль тем не менее истинна, даже если печальный голос служит тому, чтобы ввести в заблуждение. Эту тональность голоса можно заменить такими словами, как «ах», «как жаль», не меняя чего-либо в мысли. Иначе обстоит дело, естественно, тогда, когда люди заранее договорились об определенных действиях, чтобы передавать сообщения. В случае языка подобные договоренности заменяют общепринятые обычаи. Правда, из-за изменчивости языка могут возникать сомнительные положения. Благодаря постоянному следованию обычаю в ситуациях подобного рода нечто в конце концов может стать средством выражения мыслей, хотя изначально этой цели оно не служило. Мысль, на которую некоторое выражение ранее лишь косвенно намекало, позднее может прямо утверждаться этим выражением. А в переходный период тут возможны различные точки зрения. Однако эти языковые изменения ни в коей мере не отменяют данное различие, заключенное в существе дела. Для нас здесь важно только то, что не всякому различию в языке соответствует различие в мыслях и что у нас есть средство решать, что относится к мыслям, а что нет, хотя его применение в силу естественной природы языка подчас и может быть трудным.

Сюда же относится и различие между активными и пассивными способами выражения. Предложения «M передал N документ A», «Документ A был M передан N», «N получил от M документ A» выражают в точности одну и ту же мысль; ни одно из этих предложений не сообщает ни больше, ни меньше, чем другое. Поэтому-то невозможно, чтобы одно из них было верным, а другое ложным. Чтó при этом оказывается истинным, а что ложным, полностью совпадают. Тем не менее нельзя сказать, что совсем все равно, какие из этих предложений мы употребляем. Стилистические или эстетические мотивы для предпочтения тех или иных из них играют решающую роль. Если кто-нибудь задает вопрос: «Почему был арестован A?», то ответ «Им был убит B» неестественен, потому что внимание в этом случае совершает ненужный скачок от A к B. Логике нет дела до того, на что направлено внимание, на чтó падает ударение, хотя с других точек зрения это может быть очень важно.

При переводе с одного языка на другой мы иногда принуждены переворачивать грамматическую конструкцию с ног на голову. Несмотря на это, мысль может и должна остаться той же самой, если перевод претендует на верность. Намеками же, стимулирующими процесс представления, и настроениями подчас приходится жертвовать.

В двух предложениях «Фридрих Великий одержал победу под Росбахом»[20] и «То, что Фридрих Великий победил под Росбахом, это истина» содержится одна и та же мысль, выраженная в различной языковой форме, о чем выше уже шла речь. Утверждая мысль, содержащуюся в первом предложении, мы тем же актом утверждаем мысль, содержащуюся и во втором предложении, и наоборот. Это не два разных акта суждения — это один акт.

(Отсюда видно, что для логики грамматические категории субъекта и предиката не имеют значения.)

Различение того, чтó в предложении принадлежит выражаемой в нем мысли, и того, чтó только липнет к ней, для логики имеет величайшее значение. Чистота того, что подлежит изучению, важна не только для химика: как может он быть уверенным в том, что использование разных методов привело его к одинаковым результатам, если обнаруживающееся различие может объясняться загрязнением используемых материалов? Первые и важнейшие открытия в науке чаще всего, пожалуй, — это акты узнавания, опознования. Каким бы сaмо собой разумеющимся ни казалось нам, что Солнце, которое зашло вчера и которое взошло сегодня, это одно и то же светило, сколь незначительным ни представлялось нам это открытие, — именно оно, наверное, было важнейшим и, быть может, подлинно основополагающим для астрономии. Важным было и осознание того, что Вечерняя звезда — это то же, что и Утренняя звезда, что три раза по пять — это то же, что и пять раз по три. Столь же важно не считать разным то, что является одинаковым, равно как замечать различия там, где они не бросаются в глаза. Было бы полным абсурдом полагать, будто можно пренебрегать весьма тонкими различениями. Подчеркивать же различия там, где их не надо принимать во внимание, значит наносить только вред. Так, в общей механике остерегаются рассуждать о химических свойствах веществ и, скажем, для каждого химического элемента особо формулировать закон тяготения. Напротив, во внимание принимаются только те различия, которые существенны для тех закономерностей, которые непосредственно изучают. Больше всего надо избегать соблазна усматривать различия там, где их нет, вызываемого недостаточной чистотой данных.

В логике следует отбрасывать все различения, которые делаются с психологических позиций. А то, что обычно называют психологическим углублением логики, — это не что иное, как психологическая фальсификация.

Человеческое мышление изначально смешано с процессами представления и чувствования. Задача логики состоит в том, чтобы выделить логическое в его чистом виде, не предполагая при этом, что мы должны мыслить, не обращаясь к представлениям, — это, по-видимому, вообще невозможно, — а считать, что логическое требуется сознательно отделять от того, что зависит от представлений и эмоциональных переживаний. Трудность заключается в том, что мыслим мы всегда на каком-то языке и грамматика, имеющая для языка значение, похожее на то, которое логика имеет для процесса умозаключения, смешивает психологическое с логическим. В противном случае все языки должны были бы иметь одну и ту же грамматику. Правда, одинаковые мысли можно выражать на разных языках; но психологическая добавка, психологическое облачение мысли при этом может меняться. Отсюда понятна ценность изучения иностранных языков для логического образования. Раскрывая различия в психологическом облачении мысли, мы научаемся отчетливее отделять его от той сердцевины, с которой в том или ином языке это облачение срослось. Таким образом, разнообразие языков облегчает понимание логического. Однако этим еще не устраняются все трудности, и наши книги по логике продолжают тащить в нее многое из того, что, собственно, логике не принадлежит, например «субъект» и «предикат». Поэтому так полезно знакомство с совершенно иными средствами выражения мыслей, например, с языком арифметических формул или моей записью в понятиях (Begriffsschrift).

Первой и самой важной задачей всегда является рассмотрение объектов исследования во всей их чистоте. Только благодаря этому мы оказываемся в состоянии совершать акты распознавания, которые и в логике, вероятно, доставляют основополагающие открытия. Поэтому не будем забывать, что два разных предложения могут выражать одинаковую мысль, что в содержании предложения для нас важно только то, что может быть истинным или ложным.

Если бы пассивная форма содержала в себе чуть-чуть больше мысли, чем активная, то нельзя было бы исключить ситуацию, когда это чуть-чуть было бы ложным, тогда как мысль в своей активной форме была бы истинной, и нельзя было бы без всяких оговорок перейти от активной формы к пассивной. Точно так же если бы в активной форме мысль имела чуть-чуть больше того, что содержится в пассивной, то без соответствующей проверки нельзя было бы перейти от пассивной формы к активной. Если оба эти перехода всегда возможны без нарушения истинности, это подтверждает: то, что в этих формах было истинным, а именно — мысль, сменой форм не затрагивается. Это предостерегает нас от того, чтобы придавать языковой стороне дела такой вес, какой ей придают большинство логиков, когда они, например, предполагают, будто всякая мысль — или суждение, как обычно говорят, — имеет один субъект и один предикат, так что самой мыслью определено, что является ее субъектом, а что — предикатом, наподобие того, как данное предложение недвусмысленно указывает на свой грамматический субъект и свой грамматический предикат. Это без всякой нужды приводит к трудностям, а бесплодная борьба с ними лишь усиливает впечатление, будто логика является совершенно излишней наукой.

В нашем изложении мы будем полностью обходиться без выражений «субъект» и «предикат», столь излюбленных логиками, тем более что выражения эти не только затрудняют процессы распознавания, но и затушевывают уже имеющиеся различения. Вместо того чтобы слепо следовать грамматике, логик должен видеть свою задачу в том, чтобы освободиться от оков языка. Ибо с той же определенностью, с какой мы обязаны признать — лишь язык, по крайней мере в своих высоких формах, делает возможным мысль, мы должны остерегаться и того, чтобы не попасть от него в зависимость; ибо очень много ошибок в мышлении коренятся в логическом несовершенстве языка. Если бы мы и в самом деле стали усматривать задачу логики в том, чтобы описывать мышление как оно происходит в человеческом уме, то языку, естественно, надо было бы отвести очень важную роль. Но тогда логика — которая, собственно говоря, стала бы только ветвью психологии — оказалась бы похожей на воображаемую астрономию как психолого-физикалистскую теорию зрения, разрабатываемую с помощью телескопа. Подлинные объекты логики остались бы в этом случае вне поля зрения — подобно проблемам астрономии в нашем примере. В основе психологической разработки логики лежит заблуждение, будто мысль (суждение, как принято говорить) есть нечто психологическое, так же как и представление. Это с необходимостью приводит к теоретико-познавательному идеализму; ибо тогда такие компоненты мысли, как субъект и предикат, должны, как и сама мысль, относиться к психологии. Но поскольку каждый познавательный процесс совершается с помощью суждений, рушится любой мост, ведущий к объективному. И все усилия достичь объективности оказываются похожими на попытку вытащить себя из болота, ухватившись за собственные волосы. Самое большее, что можно сделать, так это попытаться объяснить, как возникает видимость объективности, как мы приходим к допущению чего-то, не принадлежащего нашему уму, — допущению, которое, однако, этим объяснением не оправдывается. В физиологической психологии[21] это впадение в идеализм особенно бросается в глаза, потому что оно находится в чрезвычайно резком противоречии с принимаемым ею реалистическим исходным пунктом. Начинают с нервных волокон, нервных узлов, предполагают возбуждение и его передачу — и на этом пути пытаются приблизиться к пониманию процесса представления, невольно считая, что процессы, протекающие в нервных узлах и нервных волокнах, более понятны, чем процесс представления. Как и подобает всякой доблестной науке, безоглядно принимают объективность и реальность нервных узлов и нервных волокон. Так можно поступать, если ограничиваться процессом представления. Но на этом не останавливаются: переходят к процессу мышления и суждения, и тогда первоначальный реализм вдруг оборачивается крайним идеализмом, подрывая этим тот сук, на котором держится сама эта теория. И тогда все сводится к представлениям, а все прежние объяснения становятся иллюзорными. Анатомия и физиология оказываются в мире художественного вымысла. Рассыпается весь анатомо-физиологический фундамент, построенный из нервных волокон, нервных узлов, раздражений, возбуждений и их распространения. А что же остается? Представления о нервных волокнах, представления о нервных узлах, представления о раздражениях и т.д. А что должно быть прежде всего объяснено? Представление! Можно ли вообще сказать обо всех этих объяснениях, будто они справедливы или должны быть истинными? Стоя у реки, мы нередко замечаем водоворот. Разве не абсурдно приписывать ему, что он верен, или истинен, или же ложен? И если атомы или молекулы моего мозга беспорядочно танцуют в тысячу раз веселее, чем мошки прекрасным летним вечером, — разве не столь же нелепо будет утверждать, что пляска эта является верной или должна быть истинной? В конце концов, разве изменилось бы что-нибудь, если бы все эти объяснения оказались просто клубком представлений? Химерические образы, чередой идущие в голове тифозного больного наподобие подвижных изображений,— что, они истинны? Они столь же истинны, сколько и ложны,— это просто процессы, подобные водовороту в реке. И если говорить об их праве на что-либо, то таковым может быть только право протекать так, как они протекают. Один химерический образ так же мало опровергает другой такой же, как один водоворот на реке— другой водоворот.

Когда зрительное представление розы ассоциируется с представлением тонкого аромата, затем со слуховыми представлениями, связанными со словами «роза» и «источает аромат», а далее еще и с представлением моторики произнесения этих слов и когда ассоциаций накапливается все больше и больше — и в результате возникает высокохудожественный комплекс представлений, то: чему это помогает? Действительно ли мы верим в то, что это есть некая мысль?— Не больше, чем в то, что еще более высокохудожественный и сложный автомат есть живое существо. Два безжизненных объекта, соединенные вместе, в свою очередь дают безжизненный объект. Соединение представления с представлением порождает снова представление, и сколь бы искусными и многообразными ни были ассоциации, они в этом ничего не могут изменить. И даже тогда, когда все пронизано переживаниями и настроениями, — это все равно не помогает. Закон всемирного тяготения нельзя получить на этом пути; ибо он совершенно не зависит от всего того, что происходит в моем мозгу, от всех изменений и превращений моих представлений. Однако постижение этого закона— это же душевно-психический процесс! Да! Но процесс этот происходит на самой границе душевно-психического, и поэтому его нельзя до конца понять, если подходить с чисто психологической точки зрения, так как то, что в нем существенно-важно, уже не является в подлинном смысле душевно-психическим, — это мысль; и этот процесс, быть может, является самым таинственным из всех[22]. Но именно потому, что он имеет душевно-психический характер, в логике нам до него нет никакого дела. Для нас достаточно того, что мы можем постигать мысли и познавать их истинность; как сие происходит — это особый вопрос*. И для химика ведь достаточно того, что он может видеть, обонять и пробовать на вкус; в его задачу не входит исследовать, как это происходит. Для успеха его научных изысканий отнюдь не безразлично, чтобы вопросы, которые можно рассматривать независимо от других, не смешивались с последними и этим не вносили бы ненужную путаницу. Ибо это легко может привести к искаженному взгляду на суть дела. Поэтому мы не будем интересоваться тем, как фактически происходит наше мышление, как достигается убеждение в чем-то; для нас важен не процесс признания чего-то истинным, а законы бытия истины. Последние можно истолковать как предписания, которым должен подчиняться процесс суждения, который не отклоняется от истины. Значит, если мы назовем их законами мышления или, лучше, законами суждения, то надо помнить, что речь в этом случае идет о таких законах, которые— подобно нравственным законам или законам государства — предписывают, как следует поступать, а не о таких законах, которые, подобно законам природы, определяют, как реально должны протекать соответствующие процессы. Реальное мышление не всегда согласуется с логическими законами — так же как реальное поведение с законами морали. Поэтому было бы гораздо лучше вообще не употреблять в логике слова «закон мышления», поскольку они сбивают с толку и побуждают рассматривать логические законы наподобие законов природы. Такого рода законы мы должны предоставить психологии. Законы геометрии или физики мы могли бы с таким же успехом, как и логические законы,

---

* Этот вопрос во всей его сложности, пожалуй, вряд ли еще осознан. Большинство, по-видимому, довольствуется тем, что с черного хода протаскивают его в сферу представлений, так что даже не знаешь, как он, собственно, туда попал.

21 - 1742

рассматривать как законы мышления или законы суждения; а именно, смотреть на них как на предписания, которыми должен руководствоваться процесс суждения в некоторой другой области, если он должен пребывать в согласии с истиной. Стало быть, так же как геометрия или физика, логика — неподходящее место для психологических исследований. Объяснение процесса развития мышления и суждения есть, конечно, некоторая возможная задача — но она не логическая.

Логик не может задавать вопроса, каков естественный ход процесса мышления в человеческом уме. То, что для одного является естественным, легко может оказаться неестественным для другого. На это обстоятельство указывает уже многообразие грамматик. Логик меньше всего опасается упрека в том, что его установки не отвечают естественному мышлению. Если человеку, должным образом не подготовленному, начать преподавать основы математики со всей возможной логической строгостью, то он найдет это, как правило, чрезвычайно неестественным именно из-за этой строгости. Проницательный учитель во многом отступает от требований строгости и лишь постепенно старается пробудить потребность в ней. В истории математики мы тоже находим, что наивысшая строгость — это всегда последнее и, стало быть, наиболее удаленное от естественности. Стремление к отображению естественного процесса мышления поэтому прямо уводит в сторону от логики. Если бы логик стал принимать во внимание замечания о неестественности своего подхода, он подвергся бы опасности быть втянутым в бесконечные дискуссии о том, что является естественным, в спорные вопросы, которые вообще не решаются в области логики и поэтому к ней не относятся. Здесь, скорее, надо было бы привлечь наблюдения, относящиеся к первобытным народам.

Но больше всего надо предостеречь от взгляда, будто задачей логики является изучение фактического процесса мышления и суждения с точки зрения того, насколько он согласуется с законами бытия истины. В этом случае мы всегда имели бы перед глазами что-то одно, пропуская другое, а потом в свою очередь обращали бы внимание на это последнее, пропуская первое, и благодаря этому преследуемая нами цель легко ускользала бы из поля нашего зрения. Это привело бы к неясным постановкам вопроса и тем самым сделало бы почти невозможным требуемый результат.

То, что обычно называют законами мышления, а именно, законы, по которым совершается процесс суждения, по крайней мере нормальным образом, могут быть только законами признания истинности, а не законами бытия истины. Кто считает нечто истинным — а ведь психологические логики считают таковыми по крайней мере свои собственные установки, — тот тем самым признает нечто, что есть истина. Но тогда весьма вероятно, что он сошлется также и на законы бытия истины, а если так, то в его акте признания истинности они должны будут служить для него нормой. В Приложении № 26, год 1897, «Всеобщей газеты» (Die allgemeine Zeitung) Т. Ахелис в статье «Народоведение и философия» пишет следующее: «Теперь мы, пожалуй, ясно понимаем, что общезначимые нормы мышления и поведения не могут быть односторонне приобретены путем простой [абстракции,— требуется эмпирически-критическое определение объективных основных законов нашей психофизической организации, постоянно действующих в великом сознании народов»][23].

Не очень ясно, о чем здесь идет речь: о законах, по которым высказываются суждения, или о законах, по которым надлежит производить суждение. Как кажется, о том и о другом вместе. А именно, законы, по которым производятся суждения, устанавливаются в качестве нормы, в соответствии с которой надо высказывать суждения. Но для чего это нужно? Ведь процесс суждения осуществляется по этим законам вполне сам по себе. Нет! Все же не вполне; хотя и нормальным образом, но не всегда! Стало быть, это законы, которые имеют исключения; но исключения сами должны в свою очередь подчиняться каким-то законам. Значит, первые из выдвинутых законов не полны. Так что же дает право выделить одну часть всех законов и установить ее в качестве нормы? Это то же самое, как если бы мы захотели выдвинуть законы движения планет, установленные Кеплером, в качестве нормы, но тут, к сожалению, выяснилось, что планеты в своей греховности не совсем точно ими руководствуются, а мешают друг другу как озорные школьники. Тогда это надо было бы подвергнуть самому строгому порицанию.

При таком взгляде надо остерегаться отклонений от проторенного пути, по которому идет масса. Людям, отмеченным величием духа, не доверяют; ибо если бы они были нормальны, они были бы вполне заурядны.

При психологическом взгляде на логику исчезает разница между основаниями, которые оправдывают некоторое убеждение, и причинами, которые на самом деле их вызывают. Никакое подлинное оправдание данного убеждения тогда становится невозможным; его место занимает повествование о том, как оно было приобретено, из чего явствует, что все имеет свои психологические причины. Это справедливо как для научного познания, так и для суеверия.

Если смотреть на логические законы как на психологические, то естественно возникает вопрос, могут ли они быть изменяющимися,— наподобие языка, который может меняться с течением времени. И эта возможность, собственно, неизбежна, если принудительность логических законов выводится способом, сходным с тем, каким выводится обязательность грамматических правил: логические законы лишь потому являются нормами, что отклонения от них редки; и процесс суждения согласно нашим логическим законам в той же мере нормален, что и действительный его ход. Но тогда: как когда-то для наших предков нынешний правильный ход мышления, возможно, не был нормальным, так, наверное, в прошлые времена в мышлении нормальным считалось многое, что теперь таковым не является; и в будущем нечто, ныне не являющееся нормальным, может стать таковым. Подобно чувству языка, которое шатко в отношении некоторых грамматических правил, пока язык не застыл совершенно в своем развитии, — так и логические законы тоже должны были бы в любой переходный период находиться в сходном состоянии. Можно, например, быть разного мнения по вопросу: верно ли суждение, что каждый предмет равен самому себе? В этом случае мы, собственно, теряем право говорить о логических законах — мы можем говорить только о логических правилах, указывающих, что в некоторое известное время надо считать нормальным. Такого рода правило нельзя было бы выразить в такой форме, как «Каждый предмет равен самому себе», потому что здесь ничего не говорится о роде тех существ, для которых верно это суждение, а надо было бы сказать примерно так: «Для всех людей — за исключением, быть может, некоторых примитивных народов, относительно которых данный вопрос еще не изучен, — в настоящее время считается нормой полагать, что каждый предмет равен самому себе». Но если есть законы, пусть даже и психологические, то они должны, как мы видели, всегда — или, лучше сказать, вне зависимости от времени — быть истинными, если они вообще истинны. Поэтому, если мы замечаем, что какой-то закон, начиная с определенного времени, больше не действует, то мы должны сказать, что он вообще ложен. Но можно было бы пытаться установить и некое дополнительное условие. Если предположить, что процесс человеческого суждения некоторое время происходил в соответствии с законом, согласно которому каждый предмет равен самому себе, а позже это прекратилось, то причиной тому могло быть изменившееся содержание фосфора в коре полушарий головного мозга, и тогда мы должны были бы выразиться примерно так: «Когда у человека содержание фосфора в коре полушарий головного мозга ни в какой его части не превышает 4%, то суждения человека всегда согласуются с тем, что каждый предмет равен самому себе».

Психологические законы, которые таким способом учитывают химический состав или анатомические особенности мозга, по крайней мере мыслимы. Напротив, для логических законов это было бы абсурдом; ибо тут речь идет не о том, что тот или иной человек считает истинным, а о том, что́ истинно. Считает ли отдельный человек мысль, что 2·2 = 4, истинна или же ложна, — это может зависеть от химического состава его мозга, но то, что эта мысль истинна, от него не зависит. Истинно ли то, что Юлий Цезарь был убит Брутом,— это не может находиться в зависимости от свойств мозга профессора Моммзена[24].

Иногда ставят вопрос, могут ли логические законы меняться со временем. Законы бытия истины, как и все мысли, если они вообще истинны, истинны всегда. Они также не могут содержать никаких условий, которые в одно время выполняются, а в другое — нет, потому что они относятся к бытию истинности мыслей, и если мысли истинны, то они истинны безотносительно ко времени. Таким образом, если из истинности определенных мыслей в какое-то время следует истинность некоей мысли, то она должна следовать из них всегда.

Подведем краткий итог тому, что мы выяснили относительно (подлинных) мыслей.

Мысли не принадлежат отдельному уму, как это имеет место в случае представлений (мысли не субъективны), — они независимы от мышления, они одинаковым образом (объективно) противостоят каждому человеку; они не создаются в процессе мышления, а постигаются последним. В этом они сходны с физическими телами. От последних они отличаются тем, что носят внепространственный и по существу вневременной характер; можно было бы сказать, что они [не]реальны — хотя бы потому, что не испытывают никаких воздействий, изменяющих их собственную сущность. Внепространственность делает их похожими на представления.

[Вне]психическая природа мыслей приводит к тому, что любая психологическая разработка логики приносит вред. Более того, эта наука имеет своей задачей очистить логическое от всего ему чуждого, а значит, и от психологического, и освободить мышление от оков языка, вскрывая его логические несовершенства. В логике речь идет о законах бытия истины, а не о законах признания чего-то истинным; не о том, как у человека протекает мышление, а о том, что́ надо делать, чтобы не упустить истины.

Отрицание

Подлинная мысль истинна или ложна. Когда мы судим о ней, то познаем ее как истину и отвергаем как ложь. Последнее высказывание, однако, может привести к ошибочному заключению, будто отвергнутую мысль как совершенно бесполезную надо как можно скорее предать забвению. Наоборот, установление того, что некая мысль ложна, может быть столь же ценно, что и установление истинности какой-либо мысли. Собственно говоря, никакого различия между этими случаями не существует. Считая некоторую мысль ложной, я признаю некоторую [другую] мысль истинной, и тогда об этой последней мы говорим, что она противоположна первой мысли. На немецком <русском> языке мы, как правило, объявляем некую мысль ложной, вводя в предикат слово «nicht» — «не», «ни». Утверждение при этом принимает обычно форму изъявительного наклонения — индикатива и не обязательно связано со словом «не». Производя утверждение, мы можем сохранить отрицание. Мы можем произнести «Мысль, что Петр не приехал в Рим» с таким же успехом, что и «Мысль, что Петр приехал в Рим». Таким образом, мы видим, что процессы утверждения и суждения не различаются, когда я утверждаю, что Петр не приехал в Рим, и когда я утверждаю, что Петр приехал в Рим; но только мысли эти противоположны. Таким образом, для всякой мысли существует ей противоположная. Здесь налицо обратимое отношение: если первая мысль противоположна второй, то и вторая противоположна первой. Объявляя ложной мысль, что Петр не приехал в Рим, мы утверждаем, что Петр приехал в Рим. Мы можем добиться объявления ложности с помощью введения второго «не»: «Петр [не] не прибыл в Рим» или «Что Петр не приехал в Рим, это не истинно». Таким образом получается, что двойное отрицание отменяет само себя. Противоположное противоположному возвращает к первоначальному.

Когда речь идет об истинности некоторой мысли, мы колеблемся между двумя противоположными мыслями, и с помощью одного и того же акта мы одну из них распознаем как истинную, а другую как ложную. Сходные отношения имеются и вне логики; таковы, например, отношения между прекрасным и отвратительным, добром и злом, приятным и неприятным, положительным и отрицательным в математике и физике. Однако наш случай отличается от приведенных выше в двояком плане. Во-первых, потому, что здесь нет ничего, что, подобно нулю или ненаэлектризованному состоянию, составляло бы нейтральную середину. Правда, можно сказать, что нуль противоположен самому себе, имея в виду положительные и отрицательные числа; однако мысли, которая была бы противоположной самой себе, не существует. Это справедливо даже для поэтических произведений. Во-вторых, здесь нет двух таких классов, когда для мысли, принадлежащей одному классу, в другом классе имелась бы противоположная ей мысль, как это имеет место в случае положительных и отрицательных чисел. Во всяком случае я не нашел признака, который можно было бы применить для подобного подразделения классов; ибо употребление слов «нет», «не» — «nicht» в языковых выражениях это все-таки весьма внешний, и к тому же шаткий, признак. Для отрицания мы имеем и другие знаки, такие, как «kein» — «никакой» и во многих случаях приставку «un» — «не», например в слове «неудовлетворительно». Если бы мы, рассмотрев предложения «Эта работа плохая», «Эта работа удовлетворительная», «Эта работа не плохая», «Эта работа неудовлетворительная», захотели отнести мысли, содержащиеся в первых двух предложениях, к одному классу, а остальные две — к другому, это выглядело бы неестественным, учитывая, что «неудовлетворительная» и «плохая» очень близки по смыслу, и что отнюдь не исключено, что в каком-нибудь другом языке слово «неудовлетворительная» передается таким словом, в котором, как и в слове «плохая», нет отрицания. Надо также принять во внимание, в каком отношении первые две мысли могут считаться ближе друг к другу, чем первая и четвертая мысли. К этому надо добавить, что отрицание может относиться не только к предикату главного, независимого предложения, но и быть расположенным в других его местах и что такого рода отрицание не так просто устранить, примером чего может служить предложение «Не все работы являются неудовлетворительными», которое нельзя заменить предложением «Все работы являются удовлетворительными», или же предложение «Кто не прилежен, тот не получает вознаграждения», вместо которого нельзя сказать «Кто прилежен, тот получает вознаграждение». Сравните это с такими предложениями: «Кто получает вознаграждение, тот прилежен», «Кто не прилежен, тот уходит с пустыми руками», «Кто ленив, тот не получает вознаграждения», «2^4 неотличимо от 4^2» и «2^4 равно 4^2», — и мы увидим, что мы зашли в непроходимый лабиринт. И не стоит трудиться искать выход — ответ на вопрос потребует слишком больших усилий. Мне, во всяком случае, не известен логический закон, в котором во внимание принималось бы деление мыслей на класс утвердительных и класс отрицательных. Мы поэтому оставим в покое данный вопрос — скажем, до тех пор, пока перед нами не возникнет необходимость такого деления. Но тут, как естественно предположить, должен появиться какой-то пригодный для этого признак.

Приставка «un» — «не», впрочем, не всегда означает отрицание. «Некрасивый» по своему смыслу вряд ли отличается от слова «уродливый»; здесь налицо противоположность красивому, но не противоположность его отрицанию. Поэтому-то и предложения «Этот дом некрасивый» и «Этот дом красивый» имеют разный смысл.

МЫСЛЬ. ЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Подобно слову «прекрасный» в эстетике и слову «добрый» в этике, слова́ «истинный» и т.д. определяют направление развития логики. Хотя все науки имеют своей целью истину, логика занимается ею совершенно особым образом. Ее отношение к истине таково же, как, скажем, отношение физики к тяготению или теплоте. Открывать истины — это задача всех наук; подход же логики состоит в том, чтобы познавать законы бытия истинного, бытия истины. Слово «закон» употребляется в двояком смысле. Когда мы говорим о моральных законах и законах государства, мы подразумеваем предписания, которым надлежит следовать и с которыми происходящее не всегда согласуется. Законы природы— это то общее в ее процессах и явлениях, что всегда им присуще. Я говорю о законах бытия истины скорее в этом смысле. Разумеется, речь здесь идет не о преходящем (Geschehen), а о бытии. Законы бытия истины влекут предписания, относящиеся к признанию чего-то истинным, относящиеся к мышлению, суждению, процессу умозаключения. Примерно так, пожалуй, и говорят о законах мышления. Однако здесь нам грозит опасность: мы можем смешать разные вещи. Иногда слова «закон мышления» понимают наподобие «закона природы» и имеют при этом в виду общее в мышлении как душевно-психическом явлении. Закон мышления в этом смысле становится законом психологии. А тогда можно прийти к мнению, что в логике дело идет о мышлении как о процессе, происходящем в душе, и о психологических законах, по которым он совершается. Но это означало бы непонимание задач логики; ибо истина тут не занимала бы подобающего ей места. Заблуждение, суеверие тоже имеют свои причины, — как и подлинное расширение знания. И признание истинности того, что ложно, и признание истинности того, что истинно, — оба эти процесса подчиняются психологическим законам. Выведение из них умственного, душевно-психического процесса, приводящего к признанию чего-то истинным, и объяснение этого процесса на их основе никогда не может заменить доказательства того, к чему относится данное заключение об истинности. Могут ли в этом душевно-психическом процессе участвовать и логические законы? Я не стану этого оспаривать; однако, когда возникает вопрос об истине, довольствоваться возможностью нельзя. Не исключено, что в этом процессе присутствовало и нечто внелогическое, отклоняя его от истины. Мы можем решить этот вопрос лишь после того, как раскроем законы бытия истины; когда речь идет о том, чтобы решить, оправдано ли то заключение об истинности, к которому этот процесс привел, мы, вероятно, сможем обойтись без выведения и объяснения этого на основе душевно-психического процесса. Чтобы исключить всякое недоразумение и не допустить стирания границы между психологией и логикой, я подчеркну, что задача логики состоит в том, чтобы находить законы бытия истины, бытия истинности, а не законы, определяющие наше заключение об истинности, не законы процесса мышления. В законах бытия истины раскрывается значение слова «истинно».

Сначала, однако, я попытаюсь в самых общих чертах обрисовать, что же в данном контексте будет называться истинным. Прежде всего следует отвести все способы употребления данного слова, лежащие от этого в стороне. Здесь оно не должно употребляться ни в смысле «подлинный», ни в смысле «правдивый», и не так, как оно встречается при обсуждении вопросов искусства, когда, например, речь идет об истине, о правде, когда правда, истина выставляется как цель искусства, когда говорят об истине, о правдивости какого-либо произведения искусства или о подлинности чувства. Слово «истинно» предпосылают какому-либо другому слову для того, чтобы сообщить, что это последнее нужно понимать в его собственном, неискаженном смысле. И с этим способом употребления нам не по пути, мы имеем в виду ту истину, познание которой выдвигается в качестве цели науки.

В языке слово «истинный» выступает в качестве имени прилагательного. Тут возникает желание очертить более узкую область, в которой высказывается истина, — где она вообще может приниматься в расчет. Мы находим, что истина высказывается о картинах, представлениях, предложениях и мыслях. Бросается в глаза, что тут вместе с вещами, которые не могут восприниматься с помощью органов чувств, встречаются вещи, которые можно видеть и слышать. Это указывает на смещение смысла. Действительно! Разве живописное полотно как просто видимая и осязаемая вещь на самом деле истинна? А камень, а лист дерева — не истинны? Очевидно, что живописную картину не называли бы истинной, если бы при этом не имели что-то в виду. Картина должна что-то изображать. И представление само по себе не назовешь истинным — это можно сделать, только предполагая, что оно должно чему-то соответствовать. Поэтому можно предположить, что истина состоит в соответствии картины тому, что в ней изображается. Соответствие есть отношение. Этому, однако, противоречит способ употребления слова «истинный», которое не является относительным словом, не содержит указания на что-либо иное, с чем нечто должно находиться в соответствии. Если я не знаю, что картина должна изображать Кёльнский собор, то я не знаю, с чем я должен ее сравнивать, чтобы решить, содержит ли она истину. Но и соответствие двух вещей может быть совершенно полным только тогда, когда вещи эти совпадают, а, значит, не являются различными вещами. Подлинность банкноты можно проверить, пытаясь стереоскопически совместить ее с настоящей купюрой. Однако смехотворной была бы попытка стереоскопически совместить кусок золота с ассигнацией в двадцать марок. Совместить представление с вещью было бы возможно, только если бы вещь была представлением. А если одно представление полностью соответствует другому представлению, они совпадают. Но как раз этого и не желают, когда определяют истину как соответствие представления чему-то действительному. Тут как раз важно, что действительность отлична от представления. Но тогда нет никакого полного соответствия, никакой полной истины. Тогда вообще ничто не было бы истинным; ибо что истинно наполовину, то не истинно. Истина не терпит «больше» или «меньше». Или все же терпит? Нельзя ли принять: истина существует, когда имеется соответствие в некотором отношении. Но в каком? И что мы должны были бы делать, чтобы решить, что нечто истинно? Мы должны были бы исследовать, что это нечто истинно потому, что оно — представление и нечто реальное — соответствуют друг другу с принятой точки зрения. Но тем самым перед нами снова возникает вопрос того же рода, и игра начинается сызнова. Так проваливается попытка определить истину как некое соответствие. Таким же образом, однако, проваливается и всякая иная попытка дать дефиницию истины. Ибо в дефиниции должны быть приведены известные признаки. А при ее применении к некоторому частному случаю речь всегда идет о том, верно ли, что эти признаки тут налицо. Получается, что мы движемся по замкнутому кругу. Судя по всему этому, вероятно, что содержание слова «истинный» в высшей мере своеобразно и не поддается дефиниции[1].

Если о какой-либо картине говорят, что это истина, что это правда, то, собственно, говорят не о каком-то свойстве, которое присуще этой картине в полном отрыве от других вещей, а всегда имеют в виду совершенно иную ситуацию и хотят сказать, что данная картина как-то соответствует этой ситуации. «Мое представление соответствует Кёльнскому собору» — это некое предложение, и речь идет об истинности этого предложения. Таким образом, то, что произвольно и незаконно называют истиной живописных полотен и представлений, сводится к истинности предложений. А что называют предложением? Последовательность звуков — однако только тогда, когда она имеет смысл, что не означает, будто каждая осмысленная последовательность звуков есть предложение. И если мы называем какое-то предложение истинным, мы подразумеваем, собственно говоря, его смысл. Сообразно с этим смысл предложения оказывается тем, относительно чего бытие истины вообще можно принимать во внимание. Является ли теперь смысл предложения представлением? Бытие истины не заключается непременно в соответствии этого смысла чему-то другому, так как иначе вопрос о бытии истины повторялся бы до бесконечности.

Не предполагая дать тем самым дефиницию, я называю мыслью то, по отношению к чему вообще может возникать вопрос об истине. Я, таким образом, причисляю к мыслям как то, что ложно, так и то, что истинно*. Поэтому я могу сказать: мысль есть смысл предложения — не утверждая этим, что смысл каждого предложения есть какая-то мысль. Мысль, сама по себе внечувственная, одевается в чувственные одеяния предложений и благодаря этому становится для нас более понятной.

Мысль есть нечто внечувственное, и все чувственно воспринимаемые вещи подлежат исключению из той области, в которой вообще может стоять вопрос об истине. Истина не есть какое-то свойство, которому соответствует некий особый вид чувственных впечатлений. Этим она резко отличается от свойств, которые мы именуем словами «красный», «горький», «благоухающий сиренью». Однако разве мы не видим, что Солнце взошло? И не усматриваем вместе с тем, что это — истинно? Что Солнце взошло, это не есть предмет, который испускает лучи, попадающие в мой глаз; это и не видимая вещь, какой является само Солнце. То, что Солнце взошло, — это признается истинным на основании чувственных впечатлений. Однако бытие истины не есть чувственно воспринимаемое свойство. Существование магнетизма мы тоже познаем на основе чувственных впечатлений, получаемых от какой-либо вещи, хотя этому свойству столь же мало, как и истине, отвечает некоторый особый вид чувственных впечатлений. В данном отношении эти свойства совпадают. Но, для того чтобы убедиться, что тело — магнит, нужны чувственные впечатления. Однако если я признаю истинным, что в данный момент я не чувствую никакого запаха, то сделаю я это совсем не на основании чувственных впечатлений.

Все же можно полагать, что нельзя опознать ни одного свойства вещи, не признав вместе с тем истинным то, что вещь эта обладает данным свойством. Таким образом, с каждым свойством вещи связано некое свойство мысли, а именно, свойство быть истиной. Примечательно также, что предложение «Я вдыхаю аромат фиалки» имеет, по-видимому, то же содержание, что и предложение «Истинно, что я вдыхаю аромат фиалки». Таким образом, к мысли ничего не добавляется, когда я приписываю ей свойство быть истинной. И все же! Небольшой это успех, когда после долгих колебаний и кропотливых изысканий исследователь в конце концов может сказать: «верно то, что я и предполагал». Кажется, что значение слова «истинный» — совер-

---

* Сходным образом говорят, например: «Суждение есть то, что либо истинно, либо ложно». В самом деле, слово «мысль» я употребляю приблизительно в смысле «суждения» в сочинениях логиков. Почему я предпочитаю слово «мысль», станет, надеюсь, ясным из последующего изложения. Подобное определение порицается, так как в нем предлагается деление суждений на истинные и ложные, которое из всех возможных делений суждений, быть может, наименее значимо. То, что одновременно с определением (Erklärung) дается и некоторое деление, этого я не могу признать логическим недостатком. Что касается значимости данного деления, то его все же не надо недооценивать, так как слово «истинно», как я уже говорил, определяет направление развития логики.

шенно особого рода. Не имеем ли мы здесь дело с тем, что никак нельзя назвать свойством в обычном смысле? Несмотря на это сомнение, я поначалу, пока не найдено решение, более отвечающее делу, и следуя принятому словоупотреблению, буду говорить об истине так, словно она является некоторым свойством.

Чтобы более четко выявить то, что я буду называть мыслью, я проведу различие между разными видами предложений*. Повелительным предложениям не откажешь в смысле, однако смысл этот не таков, чтобы можно было ставить вопрос об истине. Поэтому смысл повелительного предложения я не буду называть мыслью. Предложения, содержащие пожелания и просьбы, тоже надо исключить. Рассмотрению подлежат предложения, в которых мы что-то сообщаем или утверждаем. Но восклицания, в которых находят выход определенные переживания, стоны, вздохи, смех, — все это я к ним не отношу, пусть даже они в силу известных соглашений предназначены для того, чтобы сообщать нечто. Как, однако, обстоит дело с вопросительными предложениями? В выражении, содержащем вопросительное слово, мы высказываем неполное предложение, которое должно получить подлинный смысл только после необходимого восполнения. Поэтому выражения, содержащие вопросительные слова, мы оставляем здесь вне рассмотрения. Иначе обстоит дело с предложениями-вопросами. В ответ мы ждем «да» или «нет». Ответ «да» означает то же, что и утвердительно-повествовательное — утверждающее — предложение; ибо с его помощью мысль, которая уже полностью содержалась в вопросительном предложении, признается истинной. Получается, что по каждому утвердительно-повествовательному предложению можно образовать некоторое предложение-вопрос. На восклицание же потому нельзя смотреть как на сообщение, что по нему нельзя образовать соответствующего предложения-вопроса. Вопросительное и утвердительно-повествовательное, вопрошающее и утверждающее предложения содержат одинаковые мысли; однако утверждающее предложение содержит и нечто большее, а именно, утверждение (Behauptung). Вопросительное предложение тоже содержит нечто большее, а именно, требование его восполнения. Стало быть, в утвердительно-повествовательном, утверждающем предложении следует различать две стороны: содержание, которое общо с соответственным предложением-вопросом, и утверждение. Первое есть мысль или по крайней мере содержит мысль. Таким образом, можно выразить мысль без того, чтобы признать ее истинной. В утвердительно-повествовательном — утверждающем — предложении то и другое связано так, что легко не заметить их разделимости. Поэтому мы различаем:

1) постижение мысли — мышление,
2) признание истинности некоторой мысли — процесс суждения**,
3) изречение этого суждения — процесс утверждения.

Когда мы образуем предложение-вопрос, мы выполняем первое из этих трех действий. Прогресс в науке обычно происходит так, что некоторая мысль постигается так, как она приблизительно может быть выражена в предложении-вопросе;

---

* Я применяю здесь слово «предложение» не вполне в смысле грамматики, которая знает и придаточные предложения. Отдельное придаточное предложение не всегда имеет смысл, в связи с которым может возникнуть вопрос об истине, тогда как сложноподчиненное предложение, в которое оно входит, такой смысл имеет[2].

** Мне кажется, что до сих пор мысль и суждение не очень различали. Может быть, в этом повинен язык. Ведь в утвердительно-повествовательном — утверждающем — предложении нет особой части, которая соответствовала бы утверждению; что нечто утверждается — это заложено в самой форме утверждающего предложения. Немецкий язык здесь имеет то преимущество, что главное и придаточное предложения имеют различный порядок слов. Правда, при этом надо учитывать, что придаточное предложение тоже может содержать утверждение и что часто ни главное, ни придаточное предложение само по себе не выражает полной, законченной мысли,— она содержится лишь во всем сложноподчиненном предложении.

затем, после надлежащих исследований, эта мысль признается, наконец, истинной. В форме утверждающего предложения мы выражаем признание истины. Для этого нам не нужны слова «истинный», «истина». Даже тогда, когда мы их используем, собственно утверждающая сила заложена не в них, а в самой форме утверждающего предложения, и где она теряет эту свою утверждающую силу, там нельзя поставить и слова «истинно», «истина». Последнее происходит тогда, когда мы говорим в шутку. Подобно тому как гром в театре есть гром только кажущийся, сражение на театральной сцене есть сражение только кажущееся, — утверждение, звучащее со сцены театра, есть только мнимое утверждение. Это только игра, только поэзия. Актер на сцене не утверждает, но он и не лжет, даже когда говорит то, в ложности чего он убежден. В сфере искусства мы сталкиваемся со случаями, когда высказываются мысли, которые, несмотря на форму утвердительно-повествовательного предложения, в которую они облечены, на самом деле не выступают как истинные, хотя слушатель и может склоняться к тому, чтобы согласиться с ними. Поэтому относительно того, что по форме представляет собой утверждающее предложение, всегда надо еще задаваться вопросом, содержит ли оно на самом деле утверждение. И на этот вопрос надо отвечать отрицательно, если в предложении отсутствует необходимая для этого серьезность и положительность. Применяются ли при этом слова «истинный», «истина», это неважно. Так объясняется то, почему, как кажется, приписываемое мысли свойство быть истиной ничего к ней не прибавляет.

Утвердительно-повествовательное предложение, кроме мысли и утверждения, часто содержит и еще нечто третье, на что не распространяется утверждение. Предложение нередко должно действовать на эмоции, настроение слушателя или возбуждать силу его воображения. Сюда относятся слова «к сожалению», «слава Богу». Подобные составные части предложения сильнее проявляют себя в поэзии, однако не редки они и в прозе. В математических, физических, химических текстах они встречаются реже, чем в исторических. То, что называют наукой о духе, ближе к поэзии, а поэтому в ней меньше научного, нежели в точных областях знания, которые тем суше, чем они строже; ибо строгая наука устремлена к истине, и только к истине. Стало быть, все составные части предложения, на которые не простирается его утверждающая сила, не относятся к научному изложению; однако иногда их не в состоянии избежать даже тот, кто понимает связанную с ними опасность. Там, где дело идет о том, чтобы приблизиться к мысленно неуловимому, используя догадки и предчувствия, эти составные части вполне оправданы. Чем строже текст с научной точки зрения, тем менее заметен в нем дух того народа, к которому принадлежит его создатель, тем легче этот текст поддается переводу. Напротив, те составные части выражений, на которые я здесь хотел бы обратить внимание, очень мешают переводу художественных произведений, да, пожалуй, почти всегда делают невозможным совершенный перевод; ибо как раз из-за того, в чем по большей части заключены поэтические достоинства,— языки различаются сильнее всего.

Каким словом — «лошадь», «конь», «лошаденка» или «кляча» я пользуюсь, это не меняет мысль. Утверждающая сила не распространяется на то, чем различаются эти слова. То, что в художественном произведении можно назвать настроением, атмосферой, оттенком, что передается с помощью интонации и ритма, — к мысли не принадлежит.

В языке многое служит тому, чтобы облегчить восприятие слушателя, например, выделение какого-либо члена предложения с помощью ударения или порядка слов. Представьте и такие слова, как «еще» (noch) и «уже» (schon). В предложении «Альфред[3] еще не пришел» мы, собственно говоря, сообщаем: «Альфред не пришел» и даем понять: мы ожидаем его прихода; однако это только подразумевается. Нельзя сказать, что смысл предложения становится ложным от того, что мы не ожидаем прихода Альфреда. Слово «но» (aber) отличается от слова «и» тем, что в нем подразумевается: следующее за «но» противоположно тому, что ему предшествует. Подобные намеки в речи ничего не изменяют в мысли. Можно изменить форму предложения, переводя глагол из активного в пассивный залог и сделав подлежащим прямое дополнение. Можно также вместо дательного падежа употребить именительный, одновременно заменив глагол «давать» глаголом «получать». Разумеется, подобные трансформации не во всем равнозначны; но они не затрагивают мысли, не затрагивают того, что истинно или ложно. Вообще, если бы мы объявили недопустимыми такого рода изменения формы, мы затруднили бы всякое глубокое логическое исследование. Одинаково важно не проводить различий, которые не затрагивают сути дела, и различать то, что существенно. Но что считать существенным — это зависит от цели, которую мы преследуем. Для того, кто чувствует красоту языка, может быть важным как раз то, что для логика совершенно безразлично.

Таким образом, содержание предложения нередко превосходит содержание той мысли, которая в нем выражена. Но может быть и наоборот, когда один лишь текст, дословно зафиксированный путем письма или с помощью фонографа, недостаточен для выражения мысли. Грамматическое настоящее время — *Tempus Praesens* употребляется в двух случаях: во-первых, чтобы указать время действия и, во-вторых, чтобы снять любые временны́е ограничения, когда в мысль входит, как часть, указание на вневременной или вечный ее характер. Вспомним, например, законы математики. Какой из этих двух случаев имеет место, это не высказывается, это надо угадать. Если грамматическое настоящее служит для сообщения времени действия, то, чтобы правильно понять мысль, нужно знать, когда было высказано данное предложение. Значит, тогда время произнесения предложения составляет часть выражения мысли. Если кто-то захочет сказать о том, чтó он вчера выразил в словах, употребив слово «сегодня», то он заменит его словом «вчера». Хотя мысль остается той же самой, словесное ее выражение должно быть изменено — этим устраняется различие в смысле, которое может быть вызвано разницей во времени произнесения предложений. Сходным образом обстоит дело со словами «здесь», «там». Во всех такого рода случаях один лишь словесный текст, как его можно письменно зафиксировать, не есть полное выражение мысли, — для правильного ее понимания нужно еще знать некоторые обстоятельства произнесения текста, служащие дополнительным средством выражения мысли. К ним также могут принадлежать знаки пальцами, движения рукой, кивки головой, взгляды. Один и тот же словесный текст, содержащий слово «я», в устах разных людей выражает различные мысли, и одни из них могут быть истинными, а другие ложными.

Наличие в предложении слова «я» вызывает еще ряд вопросов.

Представим себе следующий случай. Д-р Густав Лаубен говорит: «Я был ранен». Лео Петер слышит это и через несколько дней рассказывает: «Доктор Густав Лаубен был ранен». Выражает ли это суждение ту же самую мысль, что и высказанная самим доктором Лаубеном? Допустим, что Рудольф Лингенс был рядом, когда д-р Лаубен произнес свое предложение, а теперь слышит то, что рассказывает Лео Петер. Если д-р Лаубен и Лео Петер высказали одну и ту же мысль, то Рудольф Лингенс, вполне владеющий немецким языком и запомнивший, что в его присутствии сказал д-р Лаубен, должен теперь, слыша рассказ Лео Петера, сразу признать, что речь идет об одном и том же событии. Однако когда речь идет о собственных именах, апеллировать к знанию немецкого языка довольно странно. Очень может быть, что лишь немногие свяжут с предложением «Доктор Лаубен был ранен» определенную мысль. Для полного понимания в этом случае требуется знание вокабулы «д-р Густав Лаубен». Если в данных обстоятельствах оба, и Лео Петер, и Рудольф Лингенс, понимают под «доктором Густавом Лаубеном» того единственного врача, который проживает в известной обоим квартире, то оба они понимают предложение «Доктор Лаубен был ранен» в одном и том же смысле, связывают с ним одну и ту же мысль. При этом возможно, что Рудольф Лингенс не знает в лицо д-ра Лаубена и не подозревает, что человек, сказавший на днях «Я был ранен», был именно д-ром Лаубеном. В этом случае Рудольф Лингенс может не знать, что речь идет об одном том же событии. Поэтому-то в данном случае я и говорю: мысль, которую оглашает Лео Петер, отлична от мысли, которую высказал д-р Лаубен.

Допустим, далее, что Герберт Гарнер знает, что д-р Густав Лаубен родился 13 сентября 1875 года в N.N. и что это относится только к нему; напротив, он не знает, где сейчас живет д-р Лаубен и ничего другого о нем. С другой стороны, Лео Петер не знает, что д-р Густав Лаубен родился в N.N. 13 сентября 1875 года. В таком случае Герберт Гарнер и Лео Петер, поскольку это касается собственного имени «д-р Густав Лаубен», говорят на разных языках, хотя, по сути дела, они обозначают этим именем одного и того же человека. Получается, что Герберт Гарнер связывает с предложением «Доктор Густав Лаубен был ранен» не ту же мысль, которую с помощью этого предложения хотел высказать Лео Петер. Чтобы избежать этой странной ситуации, когда получается, что Герберт Гарнер и Лео Петер говорят на разных языках, я буду считать, что Лео Петер пользуется собственным именем «д-р Лаубен», а Герберт Гарнер — собственным именем «Густав Лаубен». Тогда становится возможным, что Герберт Гарнер будет считать смысл предложения «Доктор Лаубен был ранен» истинным, тогда как, введенный в заблуждение ложным сообщением, смысл предложения «Густав Лаубен был ранен» он сочтет ложным. Согласно нашим допущениям, следовательно, эти мысли различны.

В соответствии со сказанным в случае собственного имени дело идет о том, как некто — он, она или оно — задан с помощью обозначающего выражения. Осуществить это можно различными способами, и каждому такого рода способу отвечает особый смысл того предложения, которое содержит данное собственное имя. Различные мысли, которые таким путем получаются из одного и того же предложения, совпадают, конечно, по своему истинностному значению, то есть когда одна из них истинна, то истинны и все они, а когда одна из них ложна, то все они ложны. Тем не менее надо учитывать, что они различны. Поэтому нужно, собственно говоря, требовать, чтобы с каждым собственным именем был связан единственный способ, каким некто — он, она или оно — задается с помощью обозначающего выражения. Выполняется ли данное требование, это часто, однако, не всегда не существенно.

Далее, каждый человек дан самому себе некоторым особым и изначальным способом, каким он не дан никому другому. Если при теперешних обстоятельствах д-р Лаубен думает, что он ранен, то он кладет в основу этой мысли, вероятно, тот особый способ, каким он дан самому себе. И определяемые этим мысли в состоянии постичь только сам д-р Лаубен. Но вот он хочет передать другим некое сообщение. Мысль, которую может понять только он один, передать невозможно. И поэтому, если при теперешних обстоятельствах он говорит «Я был ранен», то он принужден употребить слово «я» в таком смысле, который будет понятен другим, — скажем, в смысле «тот, кто в данный момент говорит с вами», используя при выражении своей мысли внешние обстоятельства своей речи*.

---

* Мое положение не столь благоприятно, как у минералога, демонстрирующего своим слушателям кусок горной породы. Я не могу вложить в руки моих читателей какую-либо мысль и попросить их внимательно и со всех сторон ее рассмотреть. Я принужден довольствоваться предъявлением читателю в чувственных формах языка самих по себе внечувственных мыслей. При этом трудности доставляет образность языка. Проникновение чувственного начала делает выражение наглядно-образным и тем самым иносказательным. Так возникает борьба с языком, чем я принужден заниматься, хотя это, конечно, не является моей прямой задачей. Надеюсь, мне удалось ясно довести до моих читателей, чтó я буду называть мыслью.

Но тут приходит сомнение. Поставим вопрос: остается ли вообще той же самой мысль, когда ее сначала высказывает один, а потом другой человек?

Тому, кто еще не соприкоснулся с философией, изначально знакомы вещи, которые он может видеть, осязать, короче, воспринимать с помощью органов чувств, — деревья, камни, дома. Такой человек убежден, что другой точно так же может видеть и осязать то же дерево, тот же камень, какой он сам видел и осязал. Мысль, как это очевидно, к такого рода вещам не принадлежит. Так может ли она, несмотря на это, подобно дереву, выступать для человека как та же самая мысль?

Даже нефилософствующий человек очень скоро оказывается перед необходимостью признать внутренний мир, отличный от мира внешнего, мир чувственных впечатлений, творений своего воображения, ощущений, переживаний и настроений, мир склонностей, желаний и решений. Для краткости я обозначу все это — за исключением решений — одним словом: «представление».

Итак, принадлежат ли мысли к этому внутреннему миру? Являются ли они представлениями? Решения, как это очевидно, мыслями не являются.

Чем отличаются представления от вещей внешнего мира?

Первое. Представления нельзя ни воспринимать зрительно, ни осязать, их нельзя ни слышать, ни обонять, ни ощущать на вкус.

Я совершаю прогулку вместе со спутником. Я вижу зеленый луг; при этом я приобретаю зрительное ощущение зеленого. Я получаю это ощущение, но я его не вижу.

Второе. Представлениями обладают. Обладают ощущениями, переживаниями, настроениями, склонностями, желаниями. Представление, которое некто имеет, принадлежит содержанию его сознания.

Луг и лягушки на нем, Солнце, которое освещает все вокруг, — все это существует независимо от того, смотрю ли я на все это или нет; но чувственное впечатление зеленого, которое я имею, существует только благодаря мне, я его носитель. Нам кажется нелепым, что страдание, настроение, желание могут блуждать в мире самостоятельно сами по себе, вне всякого носителя. Восприятие невозможно без того, кто воспринимает. Внутренний мир имеет в качестве своей предпосылки того, чьим внутренним миром он является.

Третье. Представления нуждаются в носителе. Вещи внешнего мира независимы по отношению к нему.

Мой спутник и я убеждены, что оба мы видим один и тот же луг; однако каждый из нас имеет свое особое чувственное впечатление зеленого. Я замечаю ягоду земляники, спрятавшуюся меж ее зеленых листочков. Мой спутник ее не находит; он не различает цветá. Ощущение цвета ягоды не отличается для него заметным образом от ощущения цвета листочка земляники. Каким видит зеленый лист мой спутник — красным? Или для него красные ягоды — зеленые? Или и то, и другое он видит в цвете, который мне совсем не знаком. Это вопросы, на которые нельзя дать ответ; да собственно, это бессмысленные вопросы. Ибо слово «красный», когда оно служит не для передачи некоего свойства вещей, а для характеристики принадлежащих моему сознанию чувственных впечатлений, применимо только к области моего сознания; ибо мое чувственное впечатление невозможно сравнивать с впечатлением кого-то другого. Для этого потребовалось бы соединить в одном сознании чувственное впечатление, принадлежащее одному сознанию, и чувственное впечатление, принадлежащее другому сознанию. И если бы даже оказалось возможным сделать так, чтобы в одном сознании некое представление исчезло и тут же всплыло в другом сознании, то все же без ответа остался бы вопрос: было ли это второе представление тем же, что и первое? Быть содержанием моего сознания — это настолько входит в сущность каждого моего представления, что любое представление, которое имеет кто-то другой, именно как таковое, отлично от моего представления. Не может ли быть, однако, так, что мое представление, все содержание моего сознания оказывается содержанием некоторого более широкого, например, божественного сознания? Пожалуй, может быть, но только я сам тогда был бы частью божественного существа. Но были бы тогда у меня, собственно говоря, мои представления? И был бы я их носителем? Однако это уже настолько выходит за границы человеческого познания, что позволительно не рассматривать эту возможность. Во всяком случае для нас, людей, невозможно сравнивать представления других с собственными представлениями. Я срываю земляничную ягоду; я держу ее в руке. Теперь и мой спутник видит эту ягоду; но каждый из нас имеет о ней свое собственное представление. Никто, кроме меня, не может иметь мои представления; однако многие могут видеть одну и ту же вещь. Никто, кроме меня, не может испытывать мое чувство боли. Каждый может мне сострадать; при этом, однако, моя боль всегда будет моей болью, а сострадание— переживанием того, кто сострадает. Он не испытывает моей боли, я не переживаю его сострадания.

Четвертое. У каждого представления есть только один носитель; никакие два человека не могут обладать одним и тем же представлением.

В противном случае представлению было бы присуще существование, не зависящее ни от того, ни от другого человека. Является ли вот та липа моим представлением? Когда, поставив этот вопрос, я включил в него выражение «вот та липа», я, собственно, предвосхитил ответ; ибо это выражение служит мне для обозначения чего-то мною видимого и такого, на что могут смотреть и что могут осязать и другие люди. Здесь имеются две возможности. Если мое намерение выполнено, если и для меня выражение «вот та липа» что-то обозначает, то мысль, выраженную в предложении «вот та липа есть мое представление», следует, очевидно, отрицать. Если же я ошибся, если я липы не вижу, а мне это только кажется, если из-за этого обозначение «вот та липа» пусто, то я, не подозревая этого и сам того не желая, очутился в воображаемом мире. Тогда не истинно ни содержание предложения «вот та липа есть мое представление», ни содержание предложения «вот та липа не есть мое представление»; ибо в обоих случаях я имею дело с выражением, не имеющим предмета. Ответ на упомянутый вопрос в этом случае можно только отвергнуть на том основании, что содержание предложения «вот та липа есть мое представление» — это вымысел, фантазия. Конечно, и в этом случае у меня есть некоторое представление, но я не подразумеваю его, когда произношу слова «вот та липа». А кто-нибудь и в самом деле может пожелать назвать словами «вот та липа» одно из своих представлений; тогда он станет носителем того, что он обозначил этими словами; но тогда он не видел бы эту липу — и ни один другой человек не видел бы ее и не был бы носителем представления о ней.

Теперь я вернусь к вопросу: является ли мысль представлением? Если мысль, которую я выражаю в теореме Пифагора, признается истинной как мною, так и другими людьми, то она не принадлежит к содержанию моего сознания; тогда я не являюсь ее носителем — и несмотря на это могу признать ее истинной. Но если содержание теоремы Пифагора я и другой человек сочли бы совершенно разными мыслями, то, собственно говоря, нельзя было бы говорить «теорема Пифагора» — надлежало бы говорить «моя теорема Пифагора», «его теорема Пифагора», и это были бы различные предложения; ибо смысл с необходимостью принадлежит именно предложению. Тогда моя мысль может быть содержанием моего сознания, а мысль другого человека — содержанием его сознания. Может ли в этом случае смысл моей теоремы Пифагора быть истинным, а его — ложным? Ранее я говорил, что слово «красный» применимо только в сфере моего сознания — при условии, что оно не указывает на некоторое свойство вещей, а служит для того, чтобы характеризовать какие-то из моих чувственных впечатлений. Так и слова «истинный» и «ложный», как я их понимаю, оказались бы применимыми только в сфере моего сознания — если они не касались бы чего-то такого, носителем чего я не являюсь, а предназначены были только для того, чтобы каким-то образом характеризовать содержание моего сознания. Тогда истина была бы ограничена содержанием моего сознания, и можно было бы сомневаться в том, что в сознании другого человека вообще происходит что-либо похожее.

Если каждая мысль нуждается в носителе, к содержанию сознания которого она принадлежит, то это — мысль лишь данного носителя, и тогда не существует науки, которая была бы общей для многих людей и в которой могли бы работать многие; и возможно, что я имею свою науку, то есть совокупность мыслей, носителем которых я являюсь, другой человек имеет свою науку. Каждый из нас занимается содержанием своего сознания. Противоречия между двумя науками тогда невозможны; пустым занятием был бы спор об истине — он был бы бесцелен да и смешон, подобно спору двух людей о том, настоящей ли является купюра в сто марок, когда каждый из них имеет в виду банкноту в своем кармане, а слово «настоящая» понимает в своем собственном смысле. Когда кто-либо считает мысли представлениями, тогда то, что он признаёт истинным, составляет, по его мнению, содержание его сознания и не имеет, собственно говоря, никакого касательства к другим людям. И услышав от меня, что мысли не являются представлениями, он не мог бы этого оспаривать; ибо это опять-таки его никак не касалось бы.

Результат всего это кажется мне таким: мысли — это не вещи внешнего мира, не представления.

Надо признать третий мир (Reich)[4]. То, что к нему принадлежит, совпадает с представлениями в том, что оно не может восприниматься с помощью органов чувств, а с вещами — в том, что оно не нуждается ни в каком носителе, сознанию которого оно принадлежало бы. Так, например, мысль, которую мы высказываем в теореме Пифагора, истинна вне всякого времени и не зависит от того, считает ли кто-нибудь ее истинной. Она не требует носителя. Она не стала истинной только после того, как была открыта — подобно планете, находившейся во взаимодействии с другими планетами еще до того, как кто-либо ее увидел*.

Но тут мне слышится странное возражение. Я не раз говорил о допущении, что одна и та же вещь — вещь, которую я вижу, — может восприниматься и другим человеком. Но как это может быть, если все — только плод воображения, иллюзия? Если моя прогулка в сопровождении другого человека иллюзорна, если мой спутник только в моем воображении, как и я, видит зеленый луг, если все только спектакль в моем сознании — если все это так, то возникает вопрос, а существуют ли вообще вещи внешнего мира. Быть может, мир вещей пуст, и я не вижу никаких вещей, да и никаких людей,— быть может, есть только представления, носителем которых я являюсь. То, что так же мало может существовать независимо от меня, как и испытываемое мною чувство усталости, — некое представление — не может быть человеком, не может вместе со мной рассматривать луг, не может видеть землянику, которую я держу в руке. Что вместо окружающего мира, в котором, по моему мнению, я перемещаюсь и действую, у меня есть, собственно, только мой внутренний мир, — это все-таки совершенно невероятно. И все же это есть неизбежное следствие того положения, что может существовать только предмет моего рассмотрения, являющийся моим представлением.

---

* Мы видим некую вещь, мы имеем какое-то представление, мы формулируем определенную мысль или обдумываем ее. Формулируя или обдумывая мысль, мы ее не создаем, а вступаем с ней, существовавшей уже до этого, в некое отношение, которое отлично от отношения зрительного восприятия вещи и от отношения обладания представлением.

Что вытекает из этого положения, если бы оно было истинным? Существуют ли в этом случае другие люди? Это возможно; однако я о них ничего не знаю; ибо никакой человек не может быть моим представлением, а следовательно, если наше положение верно, не может быть и предметом моего восприятия. А это лишает почвы все рассуждения, где я предполагал, что для другого человека нечто может быть таким же предметом, как и для меня; ибо если бы это даже и имело место, я бы об этом ничего не знал. Я не мог бы отличить то, носителем чего я являюсь, от того, носителем чего не являюсь. Придя к заключению, что нечто не является моим представлением, я сделал бы это нечто предметом моего мышления и тем самым моим представлением. Существует ли зеленый луг, если так рассуждать? Может быть, однако он оказывается недоступен моему зрению. Действительно, если луг не есть мое представление, то — согласно нашему положению — он не может быть предметом моего восприятия. Если же он есть мое представление, то для меня он не видим; ибо представления не воспринимаемы зрением. Хотя я могу иметь представление о зеленом луге, представление это не зелено; ибо зеленых представлений не бывает. Имеется ли, согласно такого рода взгляду, снаряд весом в 100 кг?[5] Может быть; однако о нем я ничего узнать не могу. Если снаряд не есть мое представление, то он, в соответствии с принятым нами положением, не может быть предметом моего восприятия, моего мышления. Если же снаряд есть мое представление, то он не имеет веса. Я могу иметь представление о тяжелом снаряде. Это представление содержит в качестве составной части представление о тяжести. Но это последнее, будучи частью представления о тяжелом снаряде, так же мало является его свойством, как Германия — свойством Европы. И мы заключаем:

Или ложно положение, согласно которому предметом моего восприятия может быть только то, что является моим представлением; или все мое знание, весь процесс моего познания ограничивается сферой моего представления, театральными подмостками моего сознания. В этом случае для меня есть только мой внутренний мир, а о других людях я ничего не знаю.

Удивительно, как в ходе подобных рассуждений противоположности переходят друг в друга. Возьмем, например, физиолога, изучающего органы чувств. Как и подобает ученому-естествоиспытателю, он поначалу далек от того, чтобы считать вещи, которые, по его убеждению, он видит и осязает, своими представлениями. Напротив, он верит в то, что чувственные впечатления составляют самые надежные свидетельства о вещах, которые существуют совершенно независимо от процессов восприятия, представления и мышления и которые не нуждаются в его сознании. Нервные волокна, нервные узлы интересуют его столь же мало, как и содержание его сознания, так что, наоборот, он скорее склонен рассматривать свое сознание зависящим от нервных волокон и нервных узлов. Он констатирует, что лучи света, проникая в глаз, падают на окончания зрительных нервов, вызывая в них изменения, производя раздражение. Какая-то доля этого раздражения передается по нервным волокнам к нервным узлам. Затем, по-видимому, в нервной системе начинаются дальнейшие процессы, и так возникают цветовые ощущения; а они объединяются в то, что мы, быть может, назовем представлением дерева. Между деревом и моим представлением о нем вклиниваются физические, химические, физиологические процессы. С моим сознанием, однако, непосредственно связаны, кажется, только процессы в моей нервной системе; и в нервной системе каждого, кто смотрит на дерево, происходят свои особые процессы. Пусть теперь лучи света, прежде чем они попадают в мой глаз, отражаются от зеркала и получают такое направление, как если бы они исходили от какого-то места за зеркалом. Воздействие на зрительный нерв и все остальное будет протекать теперь так, как если бы свет исходил от дерева, расположенного за зеркалом, и, распространяясь без помех, прямо попадал бы в глаз. В результате возникло бы представление дерева, даже если бы дерева совсем и не было. Благодаря преломлению света при посредстве глаза и нервной системы тоже может возникнуть представление, которому ничего не соответствует. Но для раздражения зрительного нерва свет совсем не обязателен. Когда вблизи ударит молния, нам кажется, что вспыхивает огонь, даже если мы не видели молнии. Зрительный нерв в этом случае раздражают, по-видимому, электрические токи, возникающие в нашем теле из-за удара молнии. Когда зрительный нерв испытывает такое же раздражение, какое произвели бы световые лучи, порождаемые пламенем, нам кажется, что мы видим огонь. Все дело в раздражении зрительного нерва; каким образом это раздражение происходит, безразлично.

Можно сделать еще один шаг. Собственно говоря, раздражение зрительного нерва не дано нам непосредственно — это всего лишь предположение, гипотеза. Мы верим в то, что некая вещь, не зависящая от нас, производит раздражение нерва и этим вызывает чувственное впечатление; но, строго говоря, переживаем мы только окончание этого процесса, когда он достигает нашего сознания[6]. Но не может ли это чувственное впечатление, это ощущение, которое мы сводим к раздражению зрительного нерва, иметь иную причину — подобно тому как одно и то же раздражение нерва может возникать различным образом? Когда мы называем это представлением, проникшим в наше сознание, — то и переживаем мы, собственно, лишь представление, а не его причину. И если исследователь пожелает оставить в стороне все то, что является только лишь предположением, в его распоряжении остаются только представления; все для него сведется к представлениям — и лучи света, и нервные волокна вместе с нервными узлами, из которых он исходил. Так в конце концов он подрывает основы собственной конструкции.

Все является представлением? Все нуждается в носителе, без которого оно не может существовать? Я смотрю на себя как на носителя своих представлений; однако не есть ли я сам — некое представление? Мне кажется, будто я лежу в шезлонге, вижу два начищенных носка сапог, переднюю часть брюк, жилет, части сюртука, особенно рукава, две руки, несколько волосков бороды, расплывчатые очертания носа. И вся эта совокупность зрительных впечатлений, все это представление — это я сам? Мне кажется также, будто вот там я вижу стул. Это некоторое представление. Собственно говоря, я не очень отличаюсь от него; ибо не есть ли я сам тоже совокупность чувственных впечатлений, некое представление? Но где же носитель этих представлений? Как я пришел к тому, чтобы выхватить некоторые из этих представлений и выставить их в качестве носителей других представлений? Почему это — именно то представление, которое мне было угодно назвать *я*? Не мог ли я с таким же успехом выбрать для этого другое представление — то, которое я поддался искушению назвать стулом? Но зачем вообще для представления нужен носитель? Ведь таковой был бы всегда чем-то отличным от самих представлений, носителем которых он является, был бы чем-то самостоятельным, не нуждающимся ни в каком отличном от него носителе. Когда все есть представление, не существует никакого носителя представлений. Так я снова оказываюсь перед переходом в противоположность. Если не существует носителя представлений, то не существует и представлений; ибо представления нуждаются в носителе, без которого они не могут существовать. Когда нет государя, то нет и подданных. Если больше нет носителя представлений, то отпадает зависимость ощущений от того, кто ощущает, к признанию которой я было пришел. То, что я называл представлениями, оказываются тогда самостоятельными предметами. Отпадает всякое основание предоставлять особое положение тому предмету, который я называю *я*.

Но возможно ли это? Может ли быть переживание без того, кто переживает? Чем был бы весь этот спектакль без зрителя? Может ли быть боль, страдание без

22 - 1742

того, кто испытывает, кто страдает? Боль необходимо связана с процессом ощущения, а последний в свою очередь — с тем, кто ощущает. Но тогда имеется что-то, что не есть мое представление, но есть предмет моего рассмотрения, моего мышления, и сам я такого же рода. Или я могу быть частью содержания собственного сознания, тогда как другая часть этого содержания, возможно, есть представление о Луне? Происходит ли это, например, тогда, когда я заключаю, что рассматриваю Луну? Тогда первая часть этого содержания была бы сознанием, а я, в свою очередь, был бы частью содержания этого сознания. И так далее. Что я таким образом был бы втянут в бесконечный процесс, пожалуй, немыслимо; ибо тогда существовало бы не одно мое *я* — их было бы бесконечно много. Я не есть свое собственное представление, и если я что-то о себе утверждаю, например, что в данный момент я не чувствую боли, то это мое суждение касается того, что не есть содержание моего сознания, не является моим представлением, — оно касается меня самого. Стало быть, то, о чем я нечто высказываю, не обязательно является моим представлением. Но, могут возразить, когда я думаю о том, что в данный момент не испытываю страдания, — не соответствует ли тогда слову «я» все же нечто в содержании моего сознания? И не является ли это представлением? Это может быть. С представлением о слове «я» в моем сознании может быть связано определенное представление. Но тогда оно есть представление наряду с другими представлениями, и я — его носитель, как и носитель других представлений. Я имею представление о себе, однако я не являюсь этим представлением. Надо четко различать то, что является содержанием моего сознания, моим представлением, и то, что является предметом моего мышления. Значит, ложно положение, согласно которому могут существовать только предметы моего рассмотрения, моего мышления, принадлежащие содержанию моего сознания.

Теперь открыт путь к признанию и других людей как самостоятельных носителей представлений. Я имею представление о себе; но я не смешиваю его с самим собой. И когда я высказываю что-то о своем брате, то высказывание это — не о представлении, которое я имею о своем брате.

Больной, испытывающий страдание, является носителем этого страдания; однако лечащий врач, размышляющий о причине этого страдания, не является его носителем. Он и вообразить не может, будто он в состоянии унять боль своего пациента тем, что сам примет обезболивающее лекарство. Конечно, страданию больного в сознании врача может отвечать соответственное представление; но оно не есть боль, не есть то, что врач старается снять. Представим себе, что лечащий врач пригласил к больному другого врача. В этом случае нужно различать: во-первых, страдание, носителем которого является больной; во-вторых, представление первого врача о страдании его больного; в-третьих, представление второго врача об этом же страдании. Последнее представление, хотя оно и принадлежит содержанию сознания второго врача, не составляет предмет его размышлений, — оно, возможно, окажется вспомогательным средством в его раздумьях, подобно, например, рисунку, который тоже может быть такого рода вспомогательным средством. У обоих врачей общий предмет — страдания их больного, носителями которых они не являются. Отсюда видно, что не только некая вещь, но и представление может быть общим предметом мышления людей, не обладающих этим представлением.

Итак, мне кажется, вопрос разъяснен. Если бы человек не мог мыслить и делать предметом своего мышления то, носителем чего он не является, то он, быть может, обладал бы внутренним миром, но окружающего мира для него не существовало бы. Однако, быть может, все это основано на некоей иллюзии? Я убежден, что представлению, которое я связываю со словами «мой брат», отвечает нечто, что не есть мое представление и о чем я что-то могу высказать. Однако не могу ли я в этом заблуждаться? Подобные заблуждения встречаются. Здесь мы вопреки собственным намерениям оказываемся в воображаемом поэтическом мире. В самом деле. С каждым шагом по завоеванию окружающего мира я подвергаю себя опасности заблуждения. И здесь я наталкиваюсь на дальнейшее отличие моего внутреннего мира от мира внешнего. То, что я имею зрительное впечатление зеленого, для меня несомненно; но то, что я вижу лист липы, это не столь достоверно. Так мы находим — в противоположность широко распространенному мнению, — что внутренний мир достоверен, а в наших вылазках во внешний мир нас никогда не покидает доля сомнения. Тем не менее во многих случаях тут вероятность почти не отличима от достоверности, так что мы можем отважиться судить о вещах внешнего мира. Мы даже обязаны отважиться на это, несмотря на опасность впасть в ошибки, если только не хотим подвергать себя гораздо большим опасностям.

В результате предыдущих рассмотрений я констатирую: не все, что может быть предметом моего познания, есть представление. Я сам как носитель представлений — не представление. И теперь ничто не мешает мне как носителю представлений признать таковыми других людей. И если такая возможность однажды допущена, ее вероятность очень велика, столь велика, что для меня она не отличается от достоверности. В противном случае разве существовала бы историческая наука? И не рухнули ли бы вся этика, все право? Что осталось бы от религии? Естественные науки могли бы расцениваться только как поэтический вымысел, наподобие астрологии и алхимии. Стало быть, выдвинутые мною соображения, согласно которым помимо меня существуют другие люди и они могут рассматривать те же предметы, могут мыслить о тех же предметах, что и я, — все это в сущности остается в полной силе.

Не все есть представление. Таким образом, я могу признать, что мысль не зависима от меня и что другие люди, подобно мне, могут ее постигать. Я могу признать науку, которой занимается много исследователей. Мы — носители наших представлений, но не носители мыслей. Мы обладаем мыслью, — но не так, как, скажем, мы имеем какое-то чувственное впечатление; и мы усматриваем мысль, — но не так, как, скажем, мы видим звезду. Поэтому целесообразно найти для этого особое выражение, и в качестве такового подходящим нам представляется слово «постигать» («fassen»). Постижению* мыслей должна отвечать особая умственная способность, сила мысли. Когда мы мыслим, мы не создаем мыслей, — мы их постигаем. Ибо то, что я назвал мыслью, находится ведь в тесной взаимосвязи с истиной. То, что я признаю́ истинным, о чем я сужу, что это истинно, совершенно не зависит от признания того, что это истина, — не зависит и от того, что я об этом думаю. К бытию истины некоторой мысли не относится то, что оно мыслимо. «Факты! факты! факты!» — восклицает естествоиспытатель, желая настоять на необходимости надежного обоснования науки. Что же такое факт? Факт есть мысль, которая истинна. И в качестве надежного, достоверного основания науки естествоиспытатель наверняка не признáет то, что зависит от изменчивых состояний человеческого сознания. Работа науки заключается не в том, чтобы что-то создавать, а в том, чтобы открывать истинные мысли. Астроном может использовать математическую истину, изучая события далекого прошлого, когда никто, во всяком случае на Земле, еще не мог знать этой истины. Он может это сделать потому, что бытие истины какой-либо мысли не зависит от времени. Значит, истина эта не возникла лишь тогда, когда она была открыта.

* Выражение «постижение» столь же наглядно-образно, что и «содержание сознания». Природа языка не позволяет ничего другого. То, что я держу в руке, можно ведь считать содержанием, содержимым руки, однако это содержимое совершенно иного рода — и намного более чуждо руке, нежели кости и мускулы, из которых она состоит, их напряжение и сокращение.

Не все есть представление. В противном случае психология вобрала бы в себя все науки или, по крайней мере, была бы для них высшим судьей; она подчинила бы себе логику и математику. Но для математики нет ничего более неприемлемого, чем ее подчинение психологии. Ни логика, ни математика не ставят задачу изучения души и содержания сознания, носителем которого является отдельный человек. Скорее, пожалуй, можно выдвинуть в качестве их задачи изучение ума, — ума, а не умов.

Постижение мыслей предполагает того, кто постигает, того, кто мыслит. Он в этом случае есть носитель мышления, но не мысли. Хотя мысль не входит в содержание сознания мыслящего, в сознании, однако, должно быть нечто, нацеленное на мысль. Но это нечто нельзя смешивать с самой мыслью. Так, звезда Алголь[7] отлична от того представления, которое кто-то о ней имеет.

Мысль не принадлежит ни моему внутреннему миру, как представление, ни внешнему миру, миру чувственно воспринимаемых вещей.

Этот результат, с какой бы необходимостью он ни вытекал из изложенного, вряд ли будет принят без сопротивления. Для многих, я думаю, покажется невозможным получение знаний о том, что не входит в их внутренний мир, кроме как с помощью чувственных восприятий. В самом деле, чувственное восприятие рассматривается зачастую как самое надежное, даже как единственный источник познания всего того, что не принадлежит внутреннему миру. Однако — по какому праву? К чувственному восприятию относятся — пожалуй, как необходимая составная часть — данные органов чувств, а они составляют часть внутреннего мира. Во всяком случае два человека не обладают одинаковыми чувственными впечатлениями, хотя и могут испытывать сходные ощущения. Но одни эти ощущения не раскрывают нам внешний мир. Быть может, есть такое существо, которое обладает только чувственными впечатлениями, не видя и не осязая вещей. Обладать зрительными ощущениями — еще не значит видеть вещи. Как происходит то, что я вижу дерево именно там, где я его вижу? Очевидно, все дело в моих зрительных ощущениях и в их особенностях, которые обусловлены тем, что у меня два глаза. В каждой из двух сетчаток возникает, говоря языком физики, особое изображение. Другой человек видит дерево на том же месте. У него на сетчатке тоже два изображения, но они отличаются от моих. Мы должны допустить, что эти изображения на сетчатке глаз определяют наши зрительные впечатления. В соответствии с этим мы получаем не только не одинаковые, но заметно различающиеся зрительные впечатления. И тем не менее мы перемещаемся в одном и том же внешнем мире. Для того чтобы видеть вещи, получение зрительных впечатлений хотя и необходимо, но не достаточно. То, что еще должно быть привнесено, не содержит ничего от данных органов чувств. Но это же и есть как раз то, что раскрывает перед нами внешний мир; ибо без этой внечувственной добавки каждый оказался бы заключенным в своем внутреннем мире[8]. Итак, поскольку решение принимается во внечувственной сфере, внечувственное могло бы и там, где не участвуют никакие внечувственные впечатления, выводить нас за рамки внутреннего мира и позволять нам постигать мысли. Кроме своего внутреннего мира, надо различать собственно внешний мир чувственно воспринимаемых вещей и мир того, что чувственно не воспринимаемо. Чтобы признать оба мира, требуется признание внечувственной сферы; но в случае восприятия вещей с помощью органов чувств нам нужны еще чувственные впечатления, а они целиком принадлежат внутреннему миру. Итак, то, на чем преимущественно основано отличие бытия вещи от бытия мысли, нельзя отнести ни к одному из этих миров — оно относится к внутреннему миру. Поэтому это различие я не нахожу столь большим, чтобы оно сделало невозможным наличие мысли, не принадлежащей внутреннему миру.

Конечно, мысль не есть то, что мы привыкли называть действительным, реальным. Мир фактов, мир действительного есть мир, в котором одно воздействует на другое, в котором происходят изменения, действие и противодействие. Все это — события во времени. То, что вне времени и вне изменений, мы вряд ли сочтем реальным. А мысль изменчива или вневременна? Мысль, высказываемая в теореме Пифагора, скорее, вневременна, вечна, неизменна. Но, быть может, существуют мысли, которые сегодня истинны, а через полгода ложны? Например, не станет ли через полгода ложной мысль, что вот то дерево покрыто зеленой листвой? Нет; ибо это будет совсем не та же мысль. Словосочетания «это дерево покрыто зеленой листвой» самого по себе не достаточно — для полноты выражения мысли требуется еще ссылка на время. Без указания времени произнесения данного словосочетания это не законченная мысль, то есть вообще не мысль. Лишь восполненное указанием времени и во всех отношениях завершенное, полное предложение выражает мысль. Но последняя, коли она истинна, — истинна не только сегодня или завтра, она истинна независимо от времени. Грамматическое настоящее — *Präsens* в словах «является истинным» указывает, таким образом, не на настоящее время, отнесенное к говорящему, а, если можно так сказать, на вневременное грамматическое время[9]. Когда мы используем одну лишь чистую форму утвердительно-повествовательного предложения, избегая слова «истинно», мы все равно должны различать две стороны: выражение мысли и ее утверждение. Например, если в предложении содержится указание на время, оно относится исключительно к выражению мысли, истина же, признание которой облечено в форму утвердительно-повествовательного предложения, пребывает вне времени. Правда, одно и то же словосочетание из-за изменчивости языка со временем может приобрести другой смысл, служить выражению другой мысли; однако подобное изменение касается только лингвистического аспекта.

И все же! Какую ценность для нас могло бы иметь всегда неизменное, то, что не подвержено никаким воздействиям и не могло бы влиять на нас? То, что с любых точек зрения совершенно неспособно было бы действовать — это полностью нереально и для нас не существует. Но вневременное должно как-то переплетаться с тем, что во времени, коли оно для нас должно быть чем-то. Чем была бы для меня мысль, если бы она никогда не была мною постигаема! Но когда я постигаю какую-либо мысль, я вступаю с ней в некое отношение — так же как она со мной. Возможно, что одна и та же мысль мыслима мною сегодня, а завтра нет. Тем самым, конечно, снимается строгая вневременность мысли. Однако мы склонны проводить различие между существенными и несущественными свойствами и считать нечто вневременным, если изменения, которые испытывает это нечто, затрагивают только несущественные свойства. А несущественным мы будем считать свойство мысли, которое заключается в том — или следует из того, — что она, эта мысль, постигнута кем-то мыслящим.

В чем состоит воздействие мысли? В том, что она постигается и признается истинной. Это — событие во внутреннем мире того, кто мыслит, могущее иметь такие последствия в этом внутреннем мире, которые, захватывая волевую сферу, проявляются в мире внешнем. Например, постижение мною мысли, выражаемой в теореме Пифагора, может иметь следствием то, что я призна́ю ее истинной, а затем, применяя ее и принимая соответствующее решение, окажу воздействие на скорость движущихся тел. Таким образом наши действия бывают обычно подготовлены мышлением и суждением. Так мысли опосредованно могут влиять на движение физических масс. Взаимодействие людей происходит по большей части путем передачи мыслей. Мы сообщаем какую-то мысль. Как это происходит? Мы производим изменения в общем нам всем внешнем мире, и эти изменения, воспринимаемые другим человеком, должны побуждать его к постижению некоей мысли и признанию ее истинности. Могли бы произойти великие свершения мировой истории, если бы не было обмена мыслями? И тем не менее мы склонны считать мысли нереальными, так как они кажутся нам не действенными, тогда как мышление, суждение, высказывание, понимание, все связанное с этим поведение есть дело человека. Все же сколь реальнее мысли кажется молот! Как отличается процесс передачи молота от одного человека к другому от сообщения мысли! Когда молот передается, его берут в руки и в ходе работы с ним может меняться его плотность и взаиморасположение частей. Ничего этого, собственно говоря, в случае мыслей нет. Мысль при ее передаче не покидает своего владельца; ибо по сути человек над ней не властен. Когда мысль постигается, она поначалу вызывает изменения только во внутреннем мире того, кто ее постиг; но все же сама она в своей основе этим не затрагивается, так как изменения, которые она претерпевает, относятся только к несущественным ее свойствам. Тут отсутствует то, что мы повсюду наблюдаем в естествознании: взаимодействие. Мысль не совсем нереальна, но ее реальность совершенно иного рода, чем реальность вещей. А ее действие вызывается активностью того, кто мыслит, — без него она бы не действовала, по крайней мере, насколько мы можем это заметить. И все же тот, кто мыслит, не создает ее, — он должен брать ее такой, какова она есть. Она может быть истинной независимо от того, что кто-то ее постиг; но и тогда она не совсем нереальна, во всяком случае когда ее возможно постичь и благодаря этому придать ей действенность.

ОТРИЦАНИЕ. ЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Предложение-вопрос содержит требование либо признать некоторую мысль истинной, либо отбросить ее как ложную. Чтобы можно было верно выполнить это требование, словесный текст вопроса должен позволять полное и несомненное выяснение мысли и, далее, установление того, что она не принадлежит поэтической сфере. Ответ на вопрос* есть утверждение, в основе которого лежит суждение, причем как тогда, когда вопрос подтверждается, так и тогда, когда он отвергается.

Однако здесь возникает одно сомнение. Если бытие любой мысли есть бытие истины, то выражение «ложная мысль» столь же противоречиво, что и выражение «несуществующая мысль»; тогда выражение «мысль, что три больше, чем пять» пусто, и поэтому в науке мы вообще не имеем права им пользоваться — разве что заключив его в кавычки; в этом случае мы не имеем права говорить также: «то, что три больше пяти, ложно», ибо грамматический субъект в этом случае пуст.

Но нельзя ли хотя бы выдвигать вопрос о том, что нечто истинно? В любом вопросе надо отличать требование о вынесении суждения от конкретного содержания вопроса. В дальнейшем я буду это конкретное содержание называть просто содержанием вопроса или смыслом соответствующего предложения-вопроса. Итак, имеет ли предложение-вопрос

«Является ли 3 большим, чем 5?»

какой-либо смысл, если бытие мысли состоит в бытии истины? Мысль в этом случае не может быть содержанием вопроса, и мы склонны говорить, что вопросительное предложение вообще не имеет смысла. Однако это, пожалуй, происходит потому, что мы тут же вспоминаем о ложности. Так, имеет ли смысл вопросительное предложение:

$$\text{«Является ли } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ большим, чем число } \sqrt[10]{10^{21}}\ \text{?»}$$

Если бы выяснилось, что на этот вопрос следует ответить утвердительно, это предложение-вопрос можно было бы признать осмысленным, потому что его смыслом, была бы мысль. Но как быть, если вопрос отвергнут? Согласно нашему предположению, мысль мы не могли бы считать смыслом. Но ведь предложение-вопрос должно, вероятно, иметь какой-то смысл, если вообще оно претендует на то, чтобы

* Здесь и далее, когда я пишу просто — «вопрос», я всегда подразумеваю предложение-вопрос.

быть вопросом. И в самом деле, разве в нем не спрашивают о чем-то? И не является ли желательным получение ответа на вопрос? Значит, все зависит от того, признбем ли мы или нет содержание вопроса мыслью? Теперь пусть смысл предложения-вопроса понят нами еще до получения ответа на него, так как иначе никакой ответ вообще невозможен. Итак, то, что постигаемо как смысл предложения-вопроса до того, как на вопрос был дан ответ, — а только это может быть, собственно, названо смыслом предложения-вопроса — не может быть мыслью, если бытие мысли состоит в бытии истины. Однако — разве не истинно то, что Солнце больше, чем Луна? И не состоит ли бытие некоторой истины (Wahrheit) именно в его истинном бытии — бытии как истины (Wahrsein)? А тогда не следует ли все же смыслом вопросительного предложения

«Больше ли Солнце, чем Луна?»

признать некую истину, некую мысль, чье бытие состоит в ее бытии как истины? Нет! Бытие истины не может принадлежать к смыслу вопросительного предложения. Это противоречит сущности вопроса. Содержание вопроса есть то, о чем надо составить суждение. Поэтому бытие истины не может быть причислено к содержанию вопроса. Задав вопрос, является ли Солнце бульшим, чем Луна, я тем самым уже понял смысл вопросительного предложения:

«Больше ли Солнце, чем Луна?»

Если бы этот смысл был мыслью, бытие которой состояло в ее истинности, то я вместе с тем понял бы и этот смысл как бытие истины. Постижение смысла было бы вместе с тем суждением, и высказывание вопросительного предложения было бы вместе с тем некоторым утверждением, а значит, и ответом на вопрос. Однако в случае вопросительного предложения мы не имеем права утверждать ни истинности, ни ложности его смысла. Поэтому смысл вопросительного предложения не есть то, смысл чего состоит в бытии его истины. Сущность вопроса требует разделять постижение смысла и процесс суждения. А поскольку смысл любого вопросительного предложения всегда заключен также и в том утвердительно-повествовательном — утверждающем — предложении, в котором дается ответ на вопрос, такого рода разделение должно быть проведено и в отношении утверждающих предложений. Все дело в том, чту мы понимаем под словом «мысль». В любом случае мы нуждаемся в кратком обозначении того, что может быть смыслом вопросительного предложения. Я называю его мыслью. При таком словоупотреблении не все мысли истинны. Бытие мысли, таким образом, не состоит в ее бытии как истины. Мы должны признать, что имеются мысли именно в этом смысле, так как в научной работе мы нуждаемся в вопросах; ибо исследователь иногда принужден довольствоваться постановкой вопроса еще до того, как он окажется в состоянии получить на него ответ. Выдвигая вопрос, он постигает некоторую мысль. Значит, я могу также сказать: исследователь должен иногда довольствоваться тем, что он понял мысль. Это все же шаг к цели, хотя тут еще нет никакого суждения. Поэтому должны существовать мысли — в том смысле слова, который я установил. Мысли, которые, быть может, позже окажутся ложными, имеют свое оправдание в науке, и их нельзя рассматривать как несуществующие. Вспомните о косвенном доказательстве, в котором познание истины совершается как раз путем постижения некоторой ложной мысли. Учитель говорит: «Допустим, *a* не равно *b*». Начинающий сразу думает: «Какая бессмыслица! Я же вижу, что *a* равно *b*». Он смешивает отсутствие смысла в предложении с ложностью выраженной в нем мысли.

Конечно, из ложной мысли вывести ничего нельзя; но ложная мысль может быть частью некоторой истинной мысли, из которой нечто может быть выведено. Мысль, содержащаяся в предложении

«Если обвиняемый во время совершения преступления был в Риме,
то он не совершил убийства»*,

может быть признана истинной человеком, который не знает, был ли обвиняемый в Риме, когда произошло преступление, и совершил ли он убийство. Из двух частичных мыслей, составляющих целое, ни условие, ни заключение не высказываются с утверждающей силой, когда целое выдвигается в качестве истины. Здесь налицо только один-единственный акт суждения, но три мысли, а именно, мысль в целом, ее условие и ее следствие. Если одно из составляющих суждений окажется не имеющим смысла, бессмысленным становится и целое. Отсюда понятно, чем различаются случаи, когда предложение не имеет смысла, и случай, когда оно выражает ложную мысль[1]. Для мыслей, состоящих из условия и следствия, имеет силу закон, согласно которому, не вредя истине, можно сделать следствием то, что противоположно условию, и вместе с тем сделать условием то, что противоположно следствию. Англичанин называет такой переход *contraposition*.

В соответствии с этим законом от предложения

$$\text{«Если } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ больше, чем } \sqrt[10]{10^{21}}\text{, то } \left(\frac{21}{20}\right)^{1000} \text{ больше, чем } 10^{21}\text{»}$$

можно перейти к предложению

$$\text{«Если } \left(\frac{21}{20}\right)^{1000} \text{ не больше, чем } 10^{21}\text{, то } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ не больше, чем } \sqrt[10]{10^{21}}\text{ ».}$$

И такие переходы важны для косвенных доказательств: без них они были бы попросту невозможны.

Далее, если условие приведенной выше первой сложной мысли, а именно, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ больше, чем $\sqrt[10]{10^{21}}$, истинно, то следствие второй сложной мысли, а именно, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ не больше, чем $\sqrt[10]{10^{21}}$, ложно. Тот, кто в соответствии со сказанным признаёт наш переход от правила *modus pones* к правилу *modus tollens*, должен будет признать существующей и некую ложную мысль; ибо в противном случае остались бы: или от *modus ponens* только следствие, или от *modus tollens* только условие; но и из них что-то одно выпало бы как несуществующее[2].

Бытие всякой мысли можно понимать и так, что разные люди, размышляя, могут данную мысль истолковать как одну и ту же. Тогда несуществование мысли может состоять в том, что при наличии многих раздумывающих над ней людей каждый связывает с соответствующим предложением свой собственный смысл, и этот смысл

* Здесь надо допустить, что один словесный текст не полностью передает мысль, но что из обстоятельств, в которых он был произнесен, можно извлечь такие дополнительные сведения, которые сделают мысль завершенной.

в данном случае становится содержанием его отдельного сознания, так что не существует коллективно-общего смысла предложения, который могли бы постигать многие. Так не окажется ли теперь любая ложная мысль в этом смысле какой-то несуществующей мыслью? Ибо тогда исследователи, которые стали бы обсуждать в своем кругу вопрос, может ли туберкулез рогатого скота перейти к человеку, и в конце концов согласились бы в том, что подобного переноса не существует, — оказались бы в положении людей, которые, употребляя в своей беседе выражение «эта радуга», пришли к выводу, что эти их слова ничего не обозначают, потому что каждый из них располагает явлением, носителем которого он сам и является. Наших исследователей водила бы за нос ложная видимость; ибо выяснилось бы, что именно то предположение, которое и сделало бы все их действия и речи разумными, не выполнено; вопрос, который они обсуждали, не имел бы для них одного и того же, то есть общего смысла.

Все же постановка вопроса, на который, по сути дела, должен быть дан отрицательный ответ, возможна. Содержание подобного вопроса, согласно моему словоупотреблению, есть мысль. Возможно, что многочисленные слушатели одного и того же вопросительного предложения постигают один и тот же смысл и признáют его ложным. Ведь суд присяжных стал бы нелепым учреждением, если бы нельзя было допустить, что каждый из присяжных заседателей способен понимать предлагаемый ему вопрос в одинаковом с другими смысле. Поэтому смысл вопросительного предложения есть то, что может быть постигнуто многими и в том случае, когда его надлежит отрицать.

Далее, чтобы получилось, если бы бытие истины некоторой мысли состояло в том, что ее могут постигать — как одну и ту же, — многие люди, тогда как не существовало бы никакого общего смысла, который выражал бы нечто ложное и был бы постигаем многими?

Если мысль истинна и состоит из мыслей, одна из которых ложна, то, хотя вся мысль может постигаться многими как одна и та же мысль, — это не касается ложного компонента мысли. Такой случай может встретиться. Так, например, на суде присяжных вполне допустимо утверждать: «Если обвиняемый во время совершения преступления был в Риме, то он не совершил данного убийства», и вместе с тем может быть ложным, что обвиняемый находился в Риме, когда было совершено преступление. Тогда присяжные, слыша слова «Если обвиняемый во время совершения преступления был в Риме, то он не совершил данного убийства», могут постигнуть одну и ту же мысль, тогда как каждый из них может связывать с условием этого предложения свой собственный смысл. Возможно ли это? Может ли составная часть мысли, противостоящая всем присяжным как одна и та же, не быть для них общей? Если целое не нуждается в носителе, не нуждается в нем и любая его часть.

В соответствии со сказанным ложная мысль не есть несуществующая мысль даже тогда, когда под существованием понимается то, что у нее нет потребности в носителе. Ложная мысль должна быть признана если не истинной, то все же иногда незаменимой: во-первых, как смысл вопросительного предложения; во-вторых, как составная часть некоей гипотетической связи мыслей; в-третьих — при отрицании. Должно быть возможным отрицание ложной мысли, и чтобы это могло случиться, я в ней нуждаюсь. Я не могу отрицать то, чего нет. А то, что нуждается во мне как носителе, я посредством отрицания не могу превратить в нечто, чьим носителем я не являюсь, но что может многими людьми восприниматься как то же самое.

Но можно ли рассматривать отрицание мысли как расчленение последней на составные части? Присяжные заседатели, вынося свое отрицательное суждение, ничего не меняют в составе мысли, выраженной в предъявленном им вопросе. Мысль остается истинной или ложной совершенно независимо от того, верно или неверно о ней судят. И если она ложна, она все же остается мыслью. Если после того, как присяжные вынесли свой вердикт, обнаружится, что в нем была совсем не мысль, а осколки мысли, то это же самое состояние было и до того; в предъявленном им мнимом вопросе не было никакой мысли, а только ее осколки; у них не было совершенно ничего, о чем они могли бы вынести свое суждение.

Когда мы судим, мы ничего не можем изменить состав мысли. Мы можем только признать то, что есть. Вынося суждение, мы не можем навредить истинной мысли. Мы можем ввести «не» в предложение, которое ее выражает, и получить после этого предложение, которое, как было показано выше, не содержит какой-то немысли, но в качестве условия или следствия предложения находит полное оправдание в гипотетическом сложноподчиненном предложении. Только его нельзя высказывать с утверждающей силой, так как оно ложно. Но эта процедура оставляет совершенно незатронутой исходную мысль. Как и до этого, она остается истинной.

Можем ли мы посредством отрицания как-то затронуть ложную мысль? Тоже нет; ибо ложная мысль всегда остается мыслью и может встретиться в качестве составной части какой-либо истинной мысли. Введем в предложение

«3 больше, чем 5»,

имеющее ложный смысл и высказываемое без утверждающей силы, частицу «не» и получим

«3 не больше, чем 5»,

предложение, которое мы имеем право высказать с утверждающей силой. Здесь не заметно ничего, что можно было бы счесть расчленением мысли, разделением ее на части.

А как же вообще возможно расчленение, разложение мысли? Как можно разорвать взаимосвязь ее частей? Мир мыслей имеет своим отражением мир предложений, выражений, слов, знаков. Строению мысли соответствует взаимосвязь слов в предложении, причем их последовательность, в общем случае, не безразлична. Расчленение, разложение мысли будет поэтому соответствовать разрыву словесного текста, который происходит, скажем, тогда, когда бумагу, на которой записано предложение, разрезают ножницами и на каждом нарезанном куске бумаги оказывается выражение какой-либо части мысли. Эти обрезки могут быть затем как угодно разбросаны или унесены ветром. Взаимосвязь разорвана, первоначальный порядок более невосстановим. Происходит ли нечто подобное, когда мы отрицаем какую-то мысль? Нет! Мысль ведь эту свою казнь *in effigie*[3] без сомнения пережила бы. Слово «не» вклинивается в словесный порядок, в остальном оставляя его, однако, без изменения. Первоначальный словесный текст еще узнаваем; порядок слов нельзя менять произвольно. Есть ли это расчленение, разложение на части? Совсем нет! Результатом является прочная структура.

То, что отрицание не производит никакого расчленяющего, разделяющего воздействия, — это особенно ясно видно, когда мы рассматриваем закон *duplex negatio affirmat*[4]. Я исхожу из предложения:

«Снежка выше, чем Брокен».

Введя одно «не», я получаю:

«Снежка не выше, чем Брокен».

Оба предложения высказываются без утверждающей силы. Второе отрицание может привести, например, к предложению:

«Что Снежка не выше, чем Брокен, это не истинно».

Мы уже знаем: первое отрицание не может вызвать расчленения мысли, разложения ее на части. Но допустим на мгновение, что после первого отрицания мы имеем лишь осколки мысли; тогда мы должны допустить, что второе отрицание может снова соединить в единое целое эти осколки. Стало быть, отрицание получается похожим на меч, который может срастить отсеченные им члены. При этом, однако, требуется высочайшая осторожность. Ведь части мысли после первого отрицания становятся совершенно не связанными друг с другом, не находящимися ни в каких отношениях. И при неосторожном применении исцеляющей силы отрицания можно легко получить предложение

«Брокен выше, чем Снежка».

Ничто, не являющееся мыслью, не может стать таковой благодаря отрицанию, так же как ни одна мысль благодаря отрицанию не может перестать быть ею.

Даже предложение, которое содержит в предикате слово «не», способно выражать мысль, которую можно сделать содержанием некоторого вопроса, — вопроса, который оставляет открытым решение, каков должен быть ответ, как и любое предложение-вопрос.

А какие же, собственно, предметы должны были бы расчленяться с помощью отрицания? Ими не являются части предложений; части мысли — тоже. Вещи внешнего мира? До нашего отрицания им нет никакого дела. Представления во внутреннем мире того, кто отрицает? Но откуда же известно присяжному заседателю какие из своих представлений при данных обстоятельствах он должен был бы расчленять? Предъявленный ему вопрос не содержит для этого никаких указаний. Возможно, он вызовет у него какие-то представления. Но представления, которые возникают во внутреннем мире присяжных, различны. И тогда каждый из них будет иметь дело с разделением, с анализом мысли в своем собственном внутреннем мире, и это не будет суждением.

В соответствии со сказанным кажется невозможным указать, что же, собственно говоря, разлагается, расчленяется или разделяется благодаря отрицанию.

С верой в разделяющую, разлагающую на части силу отрицания связано то, что отрицающую мысль считают менее нужной, чем утверждающую. Совершенно бесполезным этот взгляд все же нельзя считать. Рассмотрим умозаключение:

> «Если обвиняемый во время убийства не был в Берлине, то он не совершил убийства; но обвиняемый во время убийства не был в Берлине; значит, он не совершил убийства» —

и сравним его со следующим умозаключением:

> «Если обвиняемый во время убийства был в Риме, то он не совершал убийства; но обвиняемый во время убийства был в Риме; стало быть, он не совершил убийства».

Оба умозаключения имеют одинаковую форму, и нет ни малейших фактических оснований для различения утвердительной и отрицательной посылок того умозаключения, закон которого лежит в основе данного выражения. Говорят об утвердительных и отрицательных суждениях. Кант тоже так поступал[5]. В переводе на принятый мною способ выражения это значит, что утвердительные и отрицательные мысли отличаются друг от друга. Это различение, по крайней мере для логики, совершенно не нужно, его причину следует искать вне логики. Мне не известен ни один логический закон, для словесного выражения которого было бы нужным или хотя бы полезным использование этих названий*. Относительно каждой науки, в

---

* Так я и поступил в своей статье «Мысль» (Beitrage zur Philosophie des deutschen Idealismus, I. Band, S. 58[наст. кн., с. 326]); там выражение «отрицающая мысль» не употребляется. Различение отрицательных и утвердительных мыслей только сбивает с толку. Нигде не представляется случая, высказывая что-либо об утвердительных мыслях, исключать при этом отрицательные, или, высказывая что-то об отрицательных, исключать при этом утвердительные.

которой вообще может идти речь о закономерности, надо поинтересоваться: а какие искусственные выражения нужны или хотя бы полезны, чтобы точно выразить законы этой науки? Что подобной проверки не существует — это недостаток.

К сказанному можно добавить: совсем не легко указать, что же такое отрицательное суждение (отрицательная мысль). Рассмотрим предложения «Христос бессмертен», «Христос живет вечно», «Христос не бессмертен», «Христос смертен», «Христос живет не вечно». Где здесь утвердительная, а где отрицательная мысли?

Мы привычно предполагаем, что отрицание простирается на всю мысль, когда «не» связано с глаголом предиката. Но отрицательное слово грамматически нередко образует также какую-то часть субъекта, как в предложении «ни один человек не старше ста лет». Отрицание может прятаться где-то в предложении, и это не делает мысль неоспоримо отрицательной. Мы видим, к каким каверзным вопросам может привести выражение «отрицательное суждение» (отрицательная мысль). Его следствием могут быть бесконечные, ведущиеся с большим остроумием и все же по сути дела, бесплодные споры. Поэтому я склоняюсь к тому, чтобы различение отрицательных и утвердительных суждений или мыслей оставить в покое до тех пор, пока мы не получим признак, по которому в каждом случае можно было бы с уверенностью отличать отрицательное суждение от суждения утвердительного. Располагая подобным признаком, можно было бы установить, какую, например, пользу можно надеяться извлечь из подобного различения. Пока еще я сомневаюсь, что это удается. Из языка этот признак извлечь нельзя; ибо языки в логических вопросах — плохая опора. Разве не является одной из задач логика — из числа самых незначительных — указание тех ловушек, которые язык расставляет тому, кто мыслит.

После того как мы опровергли заблуждения, будет полезно проследить источники, из которых они проистекали. Один из таких источников, как мне кажется, — это потребность давать дефиниции тем понятиям, которыми собираются пользоваться. Конечно, стремление как можно лучше выяснить смысл, который связывают с некоторым выражением, похвально. При этом, однако, не надо забывать, что не все поддается дефинициям. Когда во что бы то ни стало хотят дать дефиницию тому, что по своей сущности неопределимо, легко застревают на несущественных, второстепенных вещах, и в результате с самого начала переводят исследование на ложный путь. Так, пожалуй, случилось со многими, стремившимися определить, чем, по их мнению, является суждение, и для этого нагромождавших частности*. Суждение состоит из частей, расположенных в известном порядке и связанных друг с другом. Но разве есть целое, которое этим не отличалось бы?

---

* Употреблению повседневного языка, пожалуй, наиболее отвечает понимание суждения как некого действия — акта суждения, — подобно тому как прыжок понимается как совершение прыжка. При этом, разумеется, средоточие, ядро трудности остается нетронутым; теперь оно переходит к слову «судить». Судить, можно сказать далее, значит признать нечто истинным. Но то, что признается истинным, может быть только мыслью. Исходное ядро, таким образом, оказывается расколотым — расщепленным на две части; одна из них пребывает в слове «мысль», другая — в слове «истинным». Здесь, пожалуй, надо остановиться. Что нельзя до бесконечности строить все новые дефиниции — это же надо понимать с самого начала.

Если суждение есть некоторое действие, то оно происходит в определенное время, после чего уходит в прошлое. К действию, поступку имеет отношение и тот, кто его совершает, и мы не обладаем полным знанием о поступке, пока не знаем действующего лица. Тогда получается, что здесь нельзя говорить о синтетическом суждении в обычном смысле. Если то, что через две точки проходит только одна прямая линия, назвать синтетическим суждением, то под «суждением» будет пониматься не некое действие, совершенное определенным человеком в определенное время, а нечто вне времени, причем даже тогда, когда его бытие как истины не было еще познано ни одним человеком. Если это назвать истиной, то вместо слов «синтетическое суждение» было бы лучше говорить «синтетическая истина». Когда же, несмотря на это, предпочитают употреблять выражение «синтетическое суждение», тогда надо закрыть глаза на смысл глагола «судить».

С этим связана другая ошибка, а именно, взгляд, будто тот, кто судит, устанавливает связь между частями суждения, упорядочивает их и тем самым производит суждение. При этом постижение мысли и признание того, что она истинна, неотделимы друг от друга. Во многих случаях, конечно, эти действия так непосредственно следуют одно за другим, что кажется, — они слиты в единое действие, но бывает это не всегда. Между осознанием мысли — ее постижением — и признанием того, что это истина, могут пройти годы напряженного труда. Что этот процесс суждения не создает мысль, взаимосвязь ее частей, — это очевидно; ибо мысль существовала еще до этого. Но и постижение мысли не есть ее созидание, не есть установление порядка ее частей; ибо мысль была истинной еще до этого, значит, уже существовала в виде упорядочения своих частей, — до того, как ее постигли и осмыслили. Как путешественник не создает гóры, когда он их преодолевает, так и тот, кто выносит суждение, не создает мысль, когда он признает ее истинной. Если бы он это сделал, то одна и та же мысль не могла бы вчера признаваться истинной одним, а сегодня другим человеком; да ведь тогда и об одном и том же нельзя было бы ту же самую мысль признавать верной в различное время, а надо было бы предположить, что бытие этой мысли есть нечто дискретно-прерывное.

Если мы сочтем для себя возможным созидание в процессе суждения того, что в результате этого мы признáем истинным, устанавливая взаимосвязь и порядок частей суждения, — то следующим нашим шагом будет признание аналогичной способности к разрушению. Как разрушение противоположно построению, установлению порядка и связи, — так и отрицание кажется противостоящим процессу суждения; и тогда легко прийти к допущению, будто разрыв связи частей с помощью отрицания происходит так же, как и процесс созидания посредством суждения. Таким образом, процессы суждения и отрицания оказываются двумя противоположными полюсами, причем полюсами одного и того же ранга, наподобие, скажем, окисления и восстановления в химии. Однако, когда мы поймем, что процесс суждения не создает никаких взаимосвязей, а упорядочение частей мысли наличествует еще до суждения, все предстанет в ином свете. Надо снова и снова указывать на то, что постижение любой мысли еще не есть процесс суждения; что мысль можно выразить в предложении, не утверждая тем самым ее как истинную; что в предикате предложения может содержаться отрицающее слово и что смысл этого слова тогда становится составной частью смысла всего данного предложения, составной частью некоторой мысли; что в результате введения одного «не» в предикат предложения, которое высказывается без утверждающей силы, мы получаем предложение, которое, как и то, из которого мы исходили, выражает некую мысль. Если теперь назвать подобный переход от мысли к тому, что ей противоположно, процессом отрицания, то нельзя считать, что это отрицание имеет одинаковый ранг с процессом суждения и уж совсем нельзя смотреть на него как на полюс, противоположный суждению; ибо когда мы производим суждение, речь всегда идет об истине, тогда как от одной мысли можно перейти к противоположной, не ставя вопроса об истине. Чтобы исключить недоразумения, замечу еще, что этот переход совершается в сознании мыслящего, но что как та мысль, с которой начинается переход, так и мысль, которой переход завершается, имеются в наличии еще до того, как это произойдет, что, стало быть, этот душевно-психический процесс ничего не меняет в составе и отношениях мыслей друг к другу.

Быть может, подобный процесс отрицания, который, как противоположный полюс процесса суждения, влачит сомнительное существование, есть химерическое образование, вырастающее из процесса суждения и его отрицания, которое я признал возможной составной частью мысли и которому в языке соответствует слово «не» как составная часть предиката, — химерическое потому, что эти части совершенно разнородны. А именно, процесс суждения как душевно-психический процесс предполагает в качестве своего носителя того, кто судит; отрицание же как составная часть мысли — подобно самой мысли — не нуждается ни в каком носителе, и его нельзя рассматривать как содержание сознания. И все же не так уж непонятно, как может возникать — по крайней мере как иллюзия — подобное химерическое образование. В языке ведь нет никакого особого слова, никакого особого слога для выражения утверждающей силы, — она заложена в форме утверждающего предложения, особенно четко выявляющейся в предикате. С другой стороны, слово «не» находится в тесной связи с предикатом— на него можно смотреть как на составную его часть. Так может возникать иллюзия, будто между словом «не» и утверждающей силой — а ведь ей в языке соответствует процесс суждения — образуется связь.

Однако различение двух видов отрицания — тягостное занятие. Полюс, противоположный процессу суждения, я ввел в рассмотрение, собственно говоря, только для того, чтобы как-то освоиться с чуждым мне взглядом. Теперь я возвращаюсь к моему первоначальному словоупотреблению. То, что я по ходу дела называл полюсом, противоположным процессу суждения, я теперь буду рассматривать как второй вид акта суждения; это не означает, будто я считаю, что этот второй вид существует. Таким образом, я объединяю оба полюса под общим названием «процесс суждения», что можно сделать потому, что противоположные полюсы неотделимы друг от друга. Тогда вопрос может быть поставлен так.

Существуют ли два разных способа процесса суждения, из которых один употребляется при утвердительном, а другой — при отрицательном ответе на вопрос? Или же процесс суждения в обоих случаях один и тот же? Входит ли процесс отрицания в процесс суждения? Или отрицание есть часть мысли, которая подчиняется процессу суждения? Является ли процесс суждения и в случае отрицательного ответа на какой-либо вопрос признанием истинности некоторой мысли? Тогда последняя окажется содержащейся не непосредственно в вопросе, но в мысли, которая ей противоположна.

Пусть, например, вопрос гласит: «Умышленно ли обвиняемый поджег свой дом?» Как может звучать ответ в форме утвердительно-повествовательного предложения, если на вопрос будет получен отрицательный ответ? Если для акта отрицания имеется свой особый способ суждения, мы должны располагать соответствующим особым способом утверждения. В этом случае я выражаюсь, например, так: «ложно, что...» — и устанавливаю, что это всегда должно быть в связи с утверждающей силой. Тогда ответ будет гласить примерно так: «Ложно, что обвиняемый умышленно поджег свой дом». Если же, напротив, существует единственный способ вынесения суждения, мы произнесем с утверждающей силой: «Обвиняемый поджог свой дом не умышленно». А здесь в качестве истинной выдвинута такая мысль, которая противоположна мысли, выраженной в вопросе. Слово «не» входит здесь в выражение этой мысли. Напомню теперь два умозаключения, которые я раньше сравнивал друг с другом. Там вторая посылка первого умозаключения была отрицательным ответом на вопрос «Находился ли обвиняемый во время убийства в Берлине?», причем ответом на вопрос, избранный для того случая, когда имеется только один способ вынесения суждения. Мысль, содержащаяся в этой посылке, заключена в условном предложении, входящем в первую посылку, но высказана эта мысль без утверждающей силы. Вторая посылка второго умозаключения была утвердительным ответом на вопрос «Находился ли обвиняемый во время убийства в Риме?». Эти умозаключения совершаются по одним и тем же законам умозаключения, и это хорошо согласуется с тем мнением, что процесс суждения как будто один и тот же, как в случае отрицательного, так и в случае утвердительного ответа на какой-либо вопрос. Если же в случае отрицания мы должны будем признать наличие некоего особого способа вынесения суждения, которому в мире слов и предложений соответствует особый способ утверждения, положение становится иным. Первая посылка первого умозаключения гласит по-прежнему: «Если обвиняемый во время убийства не был в Берлине, то он его не совершал».

Сказанное не следует понимать как «Если это ложно, что обвиняемый во время убийства был в Берлине»; ибо установлено, что слова «это ложно» всегда должны быть связаны с утверждающей силой; но признание истинности первой посылки не означает признания истинности ни содержащегося в ней условия, ни истинности следствия. Напротив, вторая посылка должна теперь гласить: «Это ложно, что обвиняемый в момент убийства был в Берлине»; ибо как посылка она высказывается с утверждающей силой. Теперь умозаключение, в отличие от того, что было ранее, уже невозможно, так как мысль, содержащаяся во второй посылке, больше не совпадает с условием, содержащимся в первой посылке, — это мысль, что обвиняемый во время убийства был в Берлине. Если же мы все же захотим сохранить в силе данное умозаключение, мы должны будем признать, что во второй посылке содержится мысль, что обвиняемый во время убийства не был в Берлине. Этим мы отделяем акт отрицания от акта суждения, изымаем его из смысла выражения «это ложно, что...» и соединяем отрицание с данной мыслью.

Итак, допущение двух различных способов процесса суждения надлежит отбросить. Однако же какие последствия имеет это решение? Его можно было бы счесть бесполезным, если бы благодаря ему не экономились исходные логические компоненты и то, что им соответствует в языке. Допущение двух различных способов процесса суждения требует:

1) утверждающей силы в случае утверждения;

2) утверждающей силы в случае акта отрицания, например нерасторжимо связанной со словом «ложно»;

3) отрицательного слова, такого, как «не», в предложениях, высказываемых без утверждающей силы.

Напротив, если принять единственный способ вынесения суждения, нам для того же требуется только:

1) утверждающая сила,

2) отрицательное слово.

Подобная экономия всегда означает более детальное расчленение на части, а это приводит к более ясному пониманию сути дела. С этим связана экономия законов умозаключения. Где предлагаемое нами решение позволяет обходиться одним из них, там в противном случае требуется два. Если мы можем обойтись одним-единственным видом вынесения суждения, мы и должны это сделать, а тогда мы можем не направлять один вид процесса суждения на установление порядка и взаимосвязи, а другой — на их разрушение.

Поэтому с каждой мыслью соотносится некая противоречащая мысль* — таким образом, что мысль объявляется ложной, когда противоречащая ей признается истинной. Предложение, выражающее противоречащую мысль, образуется с помощью отрицательного слова из выражения исходной мысли.

Отрицательное слово или отрицательная частица часто кажется более тесно присоединенной к одной из частей предложения, например к предикату. А отсюда может возникнуть мнение, будто отрицается содержание не всего предложения, а только этой его части. Какого-либо человека можно назвать незнаменитым и тем самым вы-

---

* Можно было бы сказать— «некая противоположная».

ставить ложной мысль о том, что он знаменит. Это можно рассматривать как отрицательный ответ на вопрос «Является ли этот человек знаменитым?», откуда видно, что тем самым отрицается не только смысл одного слова. Неверно было бы говорить, что, «поскольку отрицательная частица связана с одной частью предложения, не происходит отрицания смысла всего предложения». Более того: благодаря тому что отрицательная частица связана с одной частью предложения, отрицается содержание всего предложения. Это должно означать: тем самым возникает предложение, в котором содержится мысль, противоречащая мысли исходного предложения.

Сказанное не расходится с тем, что отрицание иногда распространяется только на одну часть всей мысли.

Данная мысль, противоречащая какой-либо мысли, есть смысл некоторого предложения, и по нему легко построить предложение, которое выражает данную мысль. В соответствии с этим данная мысль, противоречащая некоторой мысли, оказывается составленной из данной мысли и ее отрицания. Под этим я не подразумеваю деятельность по отрицанию. Однако слова «составлена», «состоять», «составная часть», «часть» могут привести к неверному пониманию. Когда мы здесь будем говорить о частях, то части эти все-таки не стоят рядом друг с другом как нечто самостоятельное, к чему мы привыкли, имея дело с обычными частями некоторого целого. А именно, мысль для своей целостности не нуждается ни в каком восполнении, она завершена в себе. Напротив, отрицание нуждается в восполнении с помощью какой-либо мысли. Обе эти составные части, если мы пожелаем воспользоваться таким выражением, совершенно разнородны и совершенно по-разному участвуют в образовании целого. Первая — восполняет; вторая — восполняется. И на этом восполнении держится целое. Чтобы показать средствами языка эту потребность в восполнении, можно выписать «отрицание того, что...» — «die Verneinung von...». При этом пробел, следующий после слов «того, что», соответственно, «von» — указывает, куда надо поместить восполняющее. Ибо восполнению в мире мыслей и их частей соответствует нечто похожее в мире предложений и частей предложений. Вместо «того, что» — соответственно, предлога «von» — с последующим существительным может, впрочем, стоять родительный падеж существительного, что с точки зрения языка хотя, быть может, и более уместно, однако недостаточно хорошо для выражения той части, которая требует восполнения. Пример сделает более понятным, чтó я имею в виду. Мысль, противоречащая мысли,

$$\text{что } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ равно } \sqrt[10]{10^{21}},$$

есть мысль,

$$\text{что } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ не равно } \sqrt[10]{10^{21}}.$$

Вместо этого можно сказать:

$$\text{«Мысль, что } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ не равно } \sqrt[10]{10^{21}},$$

есть отрицание мысли,

$$\text{что } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ равно } \sqrt[10]{10^{21}}\text{».}$$

23 – 1742

Это последнее выражение — после соответствующего «есть» — можно понять как мысль, составленную из части, требующей восполнения, и части восполняющей. Слово «отрицание» я в дальнейшем буду здесь употреблять — кроме, скажем, случаев заключения в кавычки, — всегда только с определенным артиклем. Определенный артикль «die» — это данное — в выражении

«Данное отрицание той мысли, что 3 больше, чем 5»

позволяет понять, что это выражение должно обозначать некоторое определенное единичное. Здесь это единичное есть некоторая мысль. Определенный артикль превращает все выражение в единичное имя, в представителя некоего собственного имени.

Отрицание мысли поэтому само есть мысль и может снова служить для восполнения отрицания. Используя отрицание той мысли, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равно $\sqrt[10]{10^{21}}$, для восполнения отрицания, я получаю отрицание отрицания той мысли, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равно $\sqrt[10]{10^{21}}$. Это снова некоторая мысль. Обозначения мыслей, образованных таким образом, получаются, следуя образцу

«данное отрицание отрицания мысли *A*»,

причем «*A*» представляет здесь обозначение некоей мысли. Подобное обозначение поначалу можно мыслить составленным из частей

«данное отрицание того, что...»

и «данное отрицание мысли *A*».

Однако возможно и такое истолкование: это выражение образовано из частей

«данное отрицание отрицания того, что...»

и «*A*».

Здесь я сначала объединил среднюю часть данного обозначения с частью, стоящей слева, а затем то, что получилось, — со стоящей справа частью «*A*», тогда как первоначально средняя часть была объединена с «*A*», а полученное таким путем обозначение

«данное отрицание мысли *A*»

было объединено со стоящей слева частью

«данное отрицание того, что...».

Двум различным истолкованиям рассматриваемого обозначения соответствуют два различных истолкования строения обозначаемой мысли.

Сравнивая обозначения

«данное отрицание отрицания того, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равно $\sqrt[10]{10^{21}}$»

и

«данное отрицание отрицания того, что 5 больше, чем 3», мы определяем общую составляющую часть

«данное отрицание отрицания того, что...»,

которая есть обозначение некоей общей требующей восполнения части мысли. Эта часть в каждом из двух случаев восполняется с помощью некоторой мысли, в первом случае с помощью той мысли, что $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ равно $\sqrt[10]{10^{21}}$, а во втором случае — с помощью той мысли, что 5 больше, чем 3. Результат этого восполнения в каждом из этих случаев есть некая мысль. Общую составляющую часть, требующую восполнения, можно назвать двойным отрицанием. Этот пример показывает, как нечто, требующее восполнения, может сливаться с другим нечто, требующим восполнения, и снова давать нечто, требующее восполнения. Здесь перед нами своеобразный случай, когда нечто — данное отрицание того, что... — сливается с самим собой. При этом, впрочем, нам отказывают образы, заимствованные из области физических тел; ибо тело не может слиться с самим собой так, чтобы в результате возникло нечто от него отличное. Но тело ведь и не нуждается в восполнении — в том смысле, который здесь подразумевается. Мы можем образовывать конгруэнтные тела, и в области обозначений мы тоже получаем здесь конгруэнцию. Но конгруэнтным обозначениям в области обозначаемого соответствует одно и то же[6].

Образные выражения, если их употреблять с осторожностью, могут все же несколько помочь в разъяснении вопроса. Я сравниваю то, что нуждается в восполнении, с одеянием, которое, подобно сюртуку, само по себе держаться не может, а требует, чтобы было нечто, на что его можно было бы надеть. На это нечто можно затем надеть другую одежду, например пальто. Два одеяния соединяются в одно. Таким образом, возможно двоякое истолкование. Можно сказать: человек, уже надевший на себя сюртук, облекся еще во второе одеяние — пальто; или же что на нем комбинированная одежда, состоящая из двух одеяний — сюртука и пальто. Эти истолкования вполне равноправны. Дополнительное одеяние всегда соединяется с уже имевшимся в новое одеяние. Правда, при этом никогда нельзя забывать, что в случае комбинации одеяний мы имеем дело с процессами, происходящими во времени, тогда как то, что соответствует этому в области мыслей, протекает вне времени.

Если A есть мысль, не принадлежащая искусству, то к ней не принадлежит и отрицание мысли A. Из двух мыслей: A и отрицания мысли A всегда истинна одна, и только одна. Точно так же тогда из двух мыслей— данного отрицания мысли A и данного отрицания отрицания мысли A всегда одна, и только одна, мысль истинна. А раз так, данное отрицание мысли A либо истинно, либо не истинно. В первом случае ни A, ни данное отрицание отрицания мысли A не истинно. Во втором случае как A, так и данное отрицание отрицания мысли A истинно. Стало быть, обе мысли— мысль A и данное отрицание отрицания мысли A — либо обе истинны, либо ни одна не истинна. Я могу выразить это и так:

облекая мысль в одеяние двойного отрицания, мы ничего не меняем в ее истинностном значении.

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ. ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ: СТРУКТУРА МЫСЛИ*

Удивительные вещи совершает язык, выражая с помощью немногих слогов необозримо много мыслей; даже для мысли, которую впервые постиг какой-нибудь обитатель Земли, он находит облачение, благодаря которому ее может понять другой человек, — человек, для которого она совершенно нова. Это было бы невозможно, если бы мы не могли различать в мысли части, которым соответствуют части предложения; но это возможно, и строение предложения становится отражением строения мысли. Разумеется, перенося на мысли отношение между целым и частью, мы, собственно, пользуемся этим уподоблением иносказательно. Тем не менее уподобление это настолько уместно и в целом столь убедительно, что когда оно где-то в чем-то хромает, мы вряд ли это замечаем.

Если взглянуть таким образом на мысли, считая их состоящими из составляющих частей — простых компонентов, и допустить, что им в свою очередь соответствуют простые части предложений, то становится понятно, почему из немногих частей предложений может быть образовано большое многообразие предложений, которым в свою очередь соответствует большое многообразие мыслей. Здесь напрашивается вопрос, как совершается построение мысли и посредством чего компоненты мысли соединяются вместе, так что целое становится чем-то бо́льшим, нежели отдельные его части. В моей статье «Отрицание»** я рассмотрел случай, когда мысль оказывается составленной из одной части, требующей восполнения, или, как еще можно сказать, ненасыщенной части, которой в языке соответствует отрицательное слово, и одной мысли. Мы не можем отрицать, не имея того нечто, которое мы отрицаем, а это есть мысль. Благодаря тому что мысль насыщает ненасыщенную часть — или, как можно еще сказать, восполняет часть, нуждающуюся в восполнении, — и достигается единство целого. Тут напрашивается предположение, что в логической сфере соединение в некое целое вообще происходит посредством насыщения ненасыщенного***.

Теперь мы должны рассмотреть особый случай подобного соединения, а именно, случай, когда две мысли соединяются в одну-единственную. В сфере языка этому будет соответствовать сочленение двух предложений в некое целое, которое также есть предложение. Взяв за образец слово из грамматики— «сложноподчиненное предложение», я образую выражение «сложноподчиненная, сложносоставленная мысль», причем я вовсе не желаю этим сказать ни того, что каждое сложноподчиненное предложение имеет своим смыслом сложносоставленную мысль, ни того,

---

* Первая часть: Мысль (см. выше, с. 326—342) — вторая часть: Отрицание (с. 343—355).

** См. выше, с. 343 и далее [в наст. книге][1].

*** Здесь и далее надо постоянно иметь в виду, что это насыщение, это соединение в целое не является процессом, происходящим во времени.

что каждая сложносоставленная мысль есть смысл некоторого сложноподчиненного предложения. Под сложносоставленной мыслью я буду понимать мысль, состоящую из мыслей, но не только из них. Поскольку мысль завершена и насыщена, чтобы существовать она не нуждается в восполнении. Поэтому мысли нельзя присоединить друг к другу, если их не скрепить чем-то, не являющимся мыслью. Мы имеем право предположить, что это скрепляющее начало — ненасыщенно. Сложносоставленная мысль сама должна быть некоей мыслью, а именно, такой, относительно которой верно следующее: она либо истинна, либо ложна, ничего третьего не существует.

Не всякое предложение, с лингвистической точки зрения состоящее из предложений, может доставить нам подходящий пример; ибо грамматика знает предложения, которые логика не может признать собственно предложениями, потому что они не выражают никаких мыслей. Об этом свидетельствуют относительные придаточные предложения; ибо если такое придаточное предложение отделить от главного, мы не сможем узнать, чтó должно обозначаться относительным местоимением. В подобном предложении отсутствует смысл, об истинности которого мы могли бы поставить вопрос; другими словами: мысль не является смыслом отдельно стоящего относительного придаточного предложения. Мы, стало быть, не можем ожидать, что некоему сложноподчиненному предложению, состоящему из главного предложения и относительного придаточного предложения, будет соответствовать, как его смысл, некоторая сложносоставленная мысль.

Первый вид сложносоставленных мыслей

С лингвистической точки зрения самым простым кажется случай, когда некое главное, независимое предложение сочленяется с некоторым главным предложением посредством связки «и». Однако этот вопрос не так прост, как поначалу может показаться; ибо в утвердительно-повествовательном предложении следует различать две стороны: выраженную в нем мысль и акт утверждения. Здесь пойдет речь только о первой стороне; ибо связыванию подлежат отнюдь не акты суждения*. Поэтому предложения, соединенные с помощью связки «и», я понимаю так, что они высказываются без утверждающей силы. Легче всего устранить утверждающую силу, превратив целое в некий вопрос; ибо в вопросе можно выразить ту же мысль, что и в утвердительно-повествовательном предложении, но уже без утверждения. Когда мы с помощью связки «и» соединяем два предложения, высказанные без утверждающей силы, то возникает вопрос, является ли смысл возникшего таким образом целого — мыслью. Если да, то не только каждая из двух частей предложения должна иметь смысл, но и целое тоже должно обладать смыслом, который может быть сделан содержанием некоторого вопроса. Когда перед присяжными заседателями ставится вопрос: «Умышленно ли обвиняемый поджег поленницу дров и умышленно ли он вызвал лесной пожар?», все зависит от того, как считать: заключены ли здесь два вопроса или же один-единственный. Если присяжным дозволено дать утвердительный ответ на вопрос, касающийся поленницы дров, а на вопрос, касающийся лесного пожара, — отрицательный, то мы

---

* Логики, как мне кажется, часто понимают под «суждением» то, что я называю мыслью. Я говорю: мы судим, когда некоторую мысль признаем истинной. Акт, действие, состоящее в подобном признании, я называю суждением. Суждение становится явленным благодаря предложению, высказанному с утверждающей силой. Но можно постигнуть и выразить мысль, не признавая ее истинной, то есть не вынося никакого суждения.

имеем два вопроса и каждый из них содержит некоторую мысль. Сложная мысль, составленная из этих двух мыслей, тогда не находится под вопросом. Но когда присяжные обязаны отвечать только «да» или «нет», не расчленяя целое на части, составляющие вопрос,— а здесь это я именно и предполагаю, — тогда это целое есть один-единственный вопрос, и утвердительный ответ на него следует давать только тогда, когда обвиняемый умышленно и поджег поленницу дров, и вызвал лесной пожар. В любом другом случае вопрос подлежит отрицанию. Итак, если присяжный заседатель полагает, что хотя обвиняемый и поджег умышленно поленницу дров, но огонь потом вопреки его намерению распространился и охватил лес, — то на данный вопрос он должен дать отрицательный ответ. Тогда от двух частей мысли надо отличать мысль, содержащуюся в вопросе как целом. Последний, кроме обеих частей мысли, содержит то, что их связывает, а в языке этому соответствует «и». Это слово употребляется здесь особым образом. Здесь учитывается только то, что оно является союзом, связывающим собственно предложения. Собственно предложением я называю предложение, выражающее некую мысль. Но эта мысль есть то, относительно чего имеет силу положение: оно истинно или ложно, третьего не дано. Связка «и», о которой здесь идет речь, должна и тут соединять только такие предложения, которые высказываются без утверждающей силы. Это не исключает возможности вынесения суждения, однако когда это происходит, высказываемое должно относиться ко всей сложносоставленной мысли. Если мы захотим представить структуру рассматриваемого здесь сложного предложения первого вида как истинную, мы можем употребить, например, оборот «это истинно, что... и что...».

Подобно тому как наше «и» не может связывать утвердительно-повествовательные предложения, оно не может этого сделать и в случае вопросительных предложений. В рассматриваемом примере присяжным был предложен только один-единственный вопрос. Однако мысль, которую этот вопрос поставил на их рассмотрение, состоит из двух мыслей. В качестве ответа присяжный должен выдать лишь одно-единственное суждение. Тут можно, конечно, видеть некую претенциозную изощренность. Разве не одно и то же, отвечает ли присяжный сначала утвердительно на вопрос «Умышленно ли обвиняемый поджег поленницу дров?», а потом утвердительно же — на вопрос «Умышленно ли обвиняемый вызвал лесной пожар?», или же он сразу дает утвердительный ответ на весь предложенный ему вопрос? Так действительно может показаться в случае утвердительного ответа; разница станет более ясной, когда этот вопрос получает отрицательный ответ. Поэтому полезно выражать мысль в виде некоторого вопроса; ибо тогда нужно рассматривать как случай, когда ответ отрицателен, так и случай, когда он утвердителен, — при условии, что мысль понята верно.

Союз «и», применение которого уточнено таким образом, оказывается двояко ненасыщенным. Для своего насыщения он требует предложения, за которым он стоит, и предложения, которое за ним следует. То, что соответствует союзу «и» в области смысла, тоже должно быть ненасыщено двояким образом. Когда «и» насыщается с помощью мыслей, оно связывает эти мысли*. Просто как вещь, наше «и», разумеется, столь же мало ненасыщено, как и любая другая вещь. С точки же зрения способа употребления союза «и» как знака, который должен выражать некий смысл, его можно назвать ненасыщено, так как в этом случае он только благодаря своему положению между двумя предложениями может обладать подразумеваемым в нем смыслом. Его цель как знака требует восполнения с помощью некоторого предшествующего и некоторого последующего предложения. Собственно

---

* Ср. с. 356—357 [настоящей книги].

говоря, ненасыщенность пребывает в области смысла, и лишь оттуда переносится на знак.

Когда «*A*» есть собственно предложение, высказываемое без утверждающей силы и не как вопрос, и когда то же самое справедливо и относительно «*B*», тогда «*A* и *B*» есть тоже некое собственно предложение, и его смысл есть сложносоставленная мысль первого вида. Вместо этого я также говорю: «*A* и *B*» выражает сложносоставленную мысль первого вида.

Что «*B* и *A*» имеет тот же смысл, что и «*A* и *B*» — это можно усмотреть без всякого доказательства, просто вдумавшись в смысл. Мы сталкиваемся здесь со случаем, когда выражениям, различным с точки зрения языка, отвечает одинаковый смысл. Отклонение знаков от выражаемых ими мыслей есть неизбежное следствие отличия мира мыслей от того, что происходит в пространстве и времени*.

В заключение укажу умозаключение, которое здесь имеет место:

A истинно**;
B истинно; стало быть,
(*A* и *B*) истинно.

Второй вид сложносоставленных мыслей

Данное (die) отрицание сложной структуры первого вида, когда одна мысль соединена еще с некоей мыслью, — такое отрицание само есть соединение, сочленение тех же двух мыслей. Его я буду называть сложносоставленной мыслью второго вида. Всегда, когда структура первого вида, состоящая из двух мыслей, ложна, структура второго вида, состоящая из этих мыслей, истинна, и наоборот. Структура второго вида ложна только тогда, когда каждая из соединяемых мыслей истинна. Сложносоставленная мысль второго вида всегда истинна, когда хотя бы одна из соединяемых мыслей ложна. При этом неизменно предполагается, что соответствующие мысли не относятся к художественной сфере. Выдвигая сложносоставленную мысль второго вида в качестве истинной, я объявляю соединяемые мысли несовместимыми.

Не зная того,

$$\text{больше ли } \left(\frac{21}{20}\right)^{100}, \text{ чем } \sqrt[10]{10^{21}},$$

и не зная того,

$$\text{меньше ли } \left(\frac{21}{20}\right)^{100}, \text{ чем } \sqrt[10]{10^{21}},$$

можно все же понять, что структура первого вида, состоящая из этих двух мыслей, ложна. Поэтому структура второго вида, состоящая из тех же мыслей, истинна. Кроме соединяемых мыслей мы имеем нечто, что их связывает. Эта связка в данном случае также ненасыщена двояким образом. И связывание, соединение происходит таким образом, что компоненты мысли насыщают то, что их соединяет, — связку.

---

* Другой случай этого вида таков: «*A* и *A*» имеет тот же смысл, что и «*A*».

** Когда я пишу «*A* истинно», я, более точно, подразумеваю: «та мысль, которая выражена в предложении '*A*', истинна».

Чтобы коротко выразить сложноподчиненную мысль этого вида, я пишу

«Не [*A* и *B*]»,

причем «*A*» и «*B*» суть предложения, соответствующие связываемым мыслям. В этом выражении то, что связывает, — связка выступает яснее; это тот смысл, который наличествует в выражении помимо букв «*A*» и «*B*». Два пустых места в выражении

«Не [и   ]»

указывают на двойную ненасыщенность. Связующее — двояко ненасыщенный смысл этого двояко ненасыщенного выражения. Если заполнить соответствующие пустые места выражениями мыслей, то получится выражение некоторой сложносоставленной мысли второго вида. Однако нельзя, собственно, сказать, что так возникает сложносоставленная мысль; ибо это мысль, а мысль не возникает.

В сложносоставленной мысли первого вида обе мысли могут меняться местами. Эта перестановочность должна существовать и в отрицании сложносоставленной мысли первого вида, а значит, и в сложносоставленной мысли второго вида. Итак, если «Не [*A* и *B*]» выражает сложносоставленную мысль, то «Не [*B* и *A*]» выражает такую же структуру тех же мыслей. Здесь эту перестановочность, как и в случае структур первого вида, нельзя рассматривать как теорему[2]; ибо в мире смыслов тут нет никаких различий. Итак, само собой разумеется, что смысл второго сложносоставленного предложения истинен, когда истинен смысл первого; ибо это тот же самый смысл.

Здесь тоже можно привести соответствующее умозаключение.

Не [*A* и *B*] истинно;
A истинно; стало быть,
B ложно.

Третий вид сложносоставленных мыслей

Структура первого вида, когда отрицание первой мысли соединено с отрицанием некоторой второй мысли, есть тоже структура, в которой первая мысль соединена со второй. Я называю это структурой третьего вида, состоящей из первой и второй мыслей. Пусть, например, первая мысль такова — Павел умеет читать, а вторая мысль — Павел умеет писать. Тогда структурой третьего вида для этих двух мыслей будет мысль, что Павел не умеет ни читать, ни писать. Сложносоставленная мысль третьего вида истинна только тогда, когда каждая из обоих соединяемых мыслей ложна. Сложносоставленная мысль третьего вида ложна, когда хотя бы одна из соединяемых мыслей истинна. В сложносоставленной мысли третьего вида обе связываемые мысли тоже перестановочны. Если «*A*» выражает некоторую мысль, то «не *A*» должно выражать отрицание этой мысли. То же самое верно и в отношении «*B*». Если, далее, «*A*» и «*B*» являются собственно предложениями, то смысл выражения

«(не*A*) и (не*B*)»,

вместо чего я также пишу

«ни *A*, ни *B*»,

есть структура третьего вида, состоящая из обеих мыслей, выражаемых с помощью «*A*» и с помощью «*B*».

То, что соединяет, здесь есть смысл того, что наличествует в этом выражении, кроме «*A*» и «*B*». Оба пустых места в выражениях «(не) и (не)»

и

«ни , ни »

указывают на двоякую ненасыщенность этих выражений, которая соответствует двоякой ненасыщенности связки. Произведя ее насыщение мыслями, мы получаем структуру третьего вида.

Здесь тоже можно привести соответствующее умозаключение.

A ложно,
B ложно; стало быть,
истинно то, что (ни *A*, ни *B*).

Скобки служат для того, чтобы показать: их содержимое есть нечто целое, его смысл заявляется нами в качестве истины.

Четвертый вид сложносоставленных мыслей

Отрицание структуры третьего вида, состоящей из двух мыслей, является также структурой из этих двух мыслей. Эту структуру можно назвать сложносоставленной мыслью четвертого вида. Структура четвертого вида, состоящая из двух мыслей, есть структура второго вида для отрицаний этих мыслей. Если такую сложносоставленную мысль мы заявляем в качестве истинной, то тем самым мы хотим сказать, что по крайней мере одна из соединяемых мыслей истинна. Сложносоставленная мысль четвертого вида ложна только тогда, когда ложна каждая из соединяемых мыслей. Если опять «*A*» и «*B*» собственно предложения, то смысл выражения

«не [(не *A*) и (не *B*)]»

есть сложносоставленная мысль четвертого вида, где «*A*» и «*B*» выражают соединяемые мысли. То же самое верно и относительно

«не [ни *A*, ни *B*]».

Вместо этого мы пишем короче:

«*A* или *B*».

«Или», используемое в этом смысле, помещается только между предложениями, именно, между подлинными, или собственно предложениями. Признавая подобную сложносоставленную мысль истинной, я не исключаю того, что обе соединяемые мысли могут быть истинными. Мы здесь имеем неисключающее «или». То, что связывает, — связка — это смысл того, что в «*A* или *B*» находится вне «*A*» и вне «*B*», стало быть — смысл того, что

«(или)»,

где оба пустых места слева и справа от «или» указывают на двоякую ненасыщенность связки. Предложения, связанные друг с другом с помощью «или», надлежит рассматривать только как выражения мыслей, стало быть, по отдельности им не придается утверждающей силы. Напротив, данную сложносоставленную мысль можно признать истинной. В словесном выражении это с ясностью не обнаруживается. Когда утверждается, что «5 меньше, чем 4, или 5 больше, чем 4», каждая часть этого предложения облечена в такую же языковую форму, какую она имела бы и тогда, когда ее отдельно высказали бы с утверждающей силой, — в то время как в действительности только вся структура в целом может быть заявлена как истинная.

Быть может, некоторые найдут, что приведенный здесь смысл слова «или» не всегда согласуется с принятым словоупотреблением. По этому поводу надо прежде всего заметить, что, устанавливая смысл научного выражения, не следует выдвигать задачу полного совпадения его употребления в науке с его использованием в повседневной жизни; ведь оно в большинстве случаев не подходит для научных целей, где нужна более точная чеканка смысла. Естествоиспытателю надо разрешить употреблять слово «ухо» в смысле, отклоняющемся от обычного. В области логики сходные звучания и побочные соображения могут только мешать. В соответствии со сказанным относительно обращения с выражением «или» мы можем, не нарушая истинности, утверждать: «Фридрих Великий одержал победу под Росбахом *или два больше трех*». Кто-нибудь подумает: «Странно! Какое отношение к победе под Росбахом имеет бессмысленное утверждение, что два больше трех?» Что два больше трех — это ложь, но не бессмыслица. Легко или трудно усмотреть ложность некоторой мысли — это для логика ничего не меняет. Мы привыкли, имея дело с предложениями, связанными друг с другом союзом «или», предполагать, что смысл одного из них имеет какое-то отношение к смыслу другого, что между ними имеется какое-то сродство; в каком-то одном случае оно вполне может иметь место; однако в каком-то другом случае дело может обстоять по-иному, так что уже нельзя будет указать на смысловое родство — такое родство, которое всегда было бы связано с «или» и могло быть отнесено к смыслу этого слова. Но почему тот, кто высказал первое предложение, вообще добавил к нему второе? Если он хотел сказать, что Фридрих Великий победил под Росбахом, для этого ведь достаточно было первого предложения; следует согласиться и с тем, что говоривший не собирался утверждать, будто два больше трех. Если бы говоривший ограничился первым предложением, он в немногих словах сказал бы больше. Зачем же эта трата слов? Эти вопросы тоже касаются побочных соображений. Какой замысел и побудительные мотивы были у говорящего, когда он сказал именно это и ни что иное, — это нас совершенно не касается: нас интересует только то, что он говорит.

Сложносоставленные мысли первых четырех видов имеют между собою то общее, что связываемые с их помощью мысли перестановочны.

В заключение тоже приведем соответствующее умозаключение:

(A или B) истинно;
A ложно; стало быть,
B истинно.

Пятый вид сложносоставленных мыслей

Когда из отрицания некоторой одной мысли и некоторой другой мысли мы образуем структуру первого вида, получается сочленение, или структура, пятого вида, связывающая первую мысль со второй. Если «A» выражает первую мысль, «B» — вторую мысль, то смысл выражения

«(не A) и B»

является именно такой сложносоставленной мыслью. Структура этого вида истинна тогда, и только тогда, когда первая из связываемых мыслей ложна, а вторая истинна. Так, например, сложноструктурированная мысль, выраженная с помощью выражения

«(не $3^2 = 2^3$) и ($2^4 = 4^2$)»,

является истинной. Это мысль, что 3^2 не равно 2^3, а 2^4 равно 4^2. Установив, что 2^4, равно 4^2, кто-то может предположить, что вообще показатель степени и основание степени перестановочны. Другой постарается исправить эту ошибку, сказав: «2^4 равно 4^2, но 2^3 не равно 3^2». Если спросят, в чем различие между связыванием с помощью «и» и связыванием с помощью «но», то ответ на этот вопрос будет таков: для того, что́ я назвал мыслью или смыслом предложения,— совершенно безразлично, какой выбран оборот: с участием «и» или с участием «но». Различие состоит только в том, что я называю освещением, окраской* мысли; различие это не относится к области логики.

Связующее в сложносоставленной мысли пятого вида есть нуждающийся в двояком восполнении смысл выражения, требующего двоякого же восполнения:

«(не) и ( )».

Здесь связываемые мысли не перестановочны; ибо

«(не *B*) и *A*»

выражает не то же самое, что

«(не *A*) и *B*».

Место, которое занимает первая мысль — ее позиция в данной структуре — по своему характеру отлично от положения второй мысли. Поскольку я не решаюсь на образование нового слова, я вынужден употреблять слова «позиция» или «место» в переносном значении. Говоря о письменном выражении мысли, мы будем использовать слово «место» («позиция») в его обычном значении некоего расположения. Расположению, позиции в выражении мысли должно соответствовать нечто в самой мысли, и для этого я сохраняю слово «место». Здесь мы не можем просто разрешить для мыслей обмен местами; но мы можем на место первой мысли поместить отрицание второй и вместе с тем на место второй мысли поместить отрицание первой. Здесь, впрочем, тоже есть своя крупица соли; ибо не подразумевается, что действие это совершается в пространстве и времени. Таким образом из

«(не *A*) и *B*»

мы получаем

«(не (не *B*)) и (не *A*)».

Поскольку же «не (не *B*)» имеет тот же смысл, что и «*B*», мы имеем

«*B* и (не *A*)»,

что выражает то же самое, что и

«(не *A*) и *B*».

Шестой вид сложносоставленных мыслей

Отрицание сочленения пятого вида одной мысли с другой есть сочленение, или структура, шестого вида, связывающая первую мысль со второй. Можно также сказать: структура второго вида, содержащая отрицание первой мысли вместе со второй мыслью, есть сочленение шестого вида первой мысли со второй. Сочленение пятого вида первой мысли со второй истинно тогда, и только тогда, когда первая мысль ложна, вторая же истинна. Отсюда следует, что сочленение шестого вида первой мысли со второй тогда, и только тогда, ложно, когда первая мысль ложна, вторая же истинна. Такая сложносоставленная мысль, стало быть, истинна, когда первая мысль истинна — независимо от того, истинна или ложна вторая мысль. Эта

---

* Ср. мою статью «Мысль» в первом томе этого журнала, с. 63 [3].

сложносоставленная мысль истинна также тогда, когда вторая мысль ложна,— независимо от того, истинна или ложна первая мысль.

Не зная того, является ли

$$\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2 \text{ больше, чем } 2^2,$$

и не зная того, является ли

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ больше, чем } 2,$$

можно все же установить, что сочленение шестого вида первой мысли со второй истинно. Отрицание первой мысли и вторая мысль исключают друг друга. Это можно выразить так:

«Если $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ больше, чем 2,

то $\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2$ больше, чем 2^2».

Вместо выражения «сложносоставленная мысль шестого вида» я говорю также «гипотетическая сложносоставленная мысль» и называю первую мысль «следствием, а вторую «условием» в гипотетической сложносоставленной мысли. Таким образом, гипотетическая сложносоставленная мысль истинна, когда истинно следствие. Гипотетическая сложносоставленная мысль истинна также тогда, когда условие ложно — независимо от того, является ли следствие истинным или ложным. Но следствие всегда должно быть мыслью.

Пусть «*A*» и «*B*» снова собственно предложения; тогда

«не ((не *A*) и *B*)»

есть выражение гипотетической структуры, в которой следствие есть смысл (содержание мысли) выражения «*A*», а его условие есть смысл выражения «*B*». Вместо этого мы можем записать

«Если *B*, то *A*».

Правда, здесь могут возникнуть сомнения. Быть может, найдут, что это не соответствует принятому словоупотреблению. В ответ на это надо опять-таки подчеркнуть: науке должно быть позволено иметь свое собственное словоупотребление, она не всегда должна подчиняться обыденному языку. Для философии наибольшую трудность я вижу именно в том, что она для своей работы располагает мало пригодным для этого орудием, а именно — пользуется повседневным языком, на формирование которого значительное влияние оказывали совершенно иные потребности, нежели запросы философии. Поэтому логика и вынуждена изготавливать подходящий инструмент, надлежащим образом подгоняя для этого то, что она застала готовым. А для такой работы она нашла поначалу только весьма мало подходящие орудия.

Предложение

«Если 2 больше, чем 3, то 4 есть простое число» наверняка будет многими объявлено бессмысленным, и все же в соответствии с моими основоположениями оно истинно, потому что условие ложно. Быть ложным — не значит быть бессмысленным. Не зная того, является ли

$$\sqrt[10]{10^{21}} \text{ больше, чем } \left(\frac{21}{20}\right)^{100},$$

можно установить, что если

$$\sqrt[10]{10^{21}} \text{ больше, чем } \left(\frac{21}{20}\right)^{100},$$

то

$$\left(\sqrt[10]{10^{21}}\right)^2 \text{ больше, чем } \left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2;$$

и никто не усмотрит в этом бессмыслицу. Теперь: то, что

$$\sqrt[10]{10^{21}} \text{ больше, чем } \left(\frac{21}{20}\right)^{100},$$

это ложь. И также ложь, будто

$$\left(\sqrt[10]{10^{21}}\right)^2 \text{ больше, чем } \left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2.$$

Если бы это столь же легко можно было усмотреть, как ложность того, что 2 больше, чем 3, то гипотетическая сложносоставленная мысль в этом примере выглядела бы такой же бессмысленной, что и в предшествующем. Но легко или трудно убедиться в ложности какой-либо мысли — это ничего не значит для логики, ибо это различие — психологическое.

Мысль, выраженная в сложноподчиненном предложении

> «Если у меня есть петух, который сегодня снес яйцо, то завтра утром рухнет Кёльнский собор»,

тоже ведь истинна. «Но условие и следствие не имеют же здесь никакой внутренней взаимосвязи», — может сказать кто-то. Я в моем определении и не требовал никакой такой взаимосвязи и прошу только о том, чтобы под выражением «Если *B*, то *A*» понималось то, о чем я говорил и что выразил в форме

«не [не *A* и *B*]».

Правда, такое понимание гипотетического сложноподчиненного предложения сначала кажется странным. Мое определение не имеет отношения к обычному, повседневному словоупотреблению, которое для целей логики по большей части слишком расплывчато и неустойчиво. Тут в голову приходит всякое: например, отношение причины и действия, намерение, с которым говорящий высказывает предложение формы «Если *B*, то *A*», или причина, по которой он считает его содержание истинным. Говорящий делает иногда намеки по таким вопросам, которые лишь едва улавливаются слушающим. Подобные намеки относятся к тем несущественным вещам, которые в повседневном языке часто обрамляют мысли. Моя задача здесь состоит в том, чтобы, отрезав все побочное, выделить в качестве логического ядра сочленение двух мыслей, структуру, которую я назвал гипотетической сложносоставленной мыслью. Уяснение строения мыслей, сложившихся из двух мыслей, должно составить основание для рассмотрения многообразных сложных мыслей.

Сказанное мною о выражении «Если *B*, то *A*» не надо понимать так, будто всякое сложноподчиненное предложение этой формы выражает гипотетическую сложносоставленную мысль. Если «*A*» само по себе не является завершенным выражением некоей мысли, то есть не является подлинным предложением, или если «*B*» само по себе не является подлинным предложением, мы имеем иной случай. В сложноподчиненном предложении

«Если кто-либо — убийца, то он — преступник»

ни предложение-условие, ни предложение-следствие, взятые сами по себе, не выражают никакой мысли. Является ли предложение «Он — преступник», вырванное из связи речи, истинным или ложным, если не сопровождается подходящим намеком, — этого нельзя решить, потому что слово «он» не есть собственное имя, — в предложении, которое вырвано из общей связи и не сопровождается подходящим намеком, оно ничего не обозначает. Следовательно, наше предложение-следствие не выражает никакой мысли, то есть не есть собственно предложение. То же самое справедливо и относительно предложения-условия; ибо оно содержит одну составную часть — «кто-либо», — которая тоже ничего не обозначает. Несмотря на это данное сложноподчиненное предложение способно выразить мысль. «Кто-либо» и «он» намекают друг на друга. Благодаря этому да еще благодаря словам «если —, то —» оба предложения так связаны друг с другом, что вместе они выражают определенную мысль; и тогда в гипотетической сложноструктурированной мысли мы можем различить три мысли, а именно: условие, следствие и мысль, состоящую из обеих соединяемых мыслей. Не всегда поэтому сложноподчиненное предложение выражает сложносоставленную мысль, и чрезвычайно существенно различать два встречающихся случая сложноподчиненного предложения, имеющего форму

«Если *B*, то *A*».

Здесь тоже я добавляю соответствующее умозаключение:

[Если *B*, то *A*] истинно;
B истинно; стало быть,
A истинно.

Быть может, в этом умозаключении наиболее четко выступает все своеобразие сложносоставленной мысли.

Заслуживают внимания еще и следующие способы умозаключения:

[Если *C*, то *B*] истинно;
[Если *B*, то *A*] истинно; стало быть,
[Если *C*, то *A*] истинно[4].

Здесь уместно указать на один оборот речи, который вводит в заблуждение. Многие математики в своих работах выражаются так, будто из мысли, истинность которой еще сомнительна, можно выводить заключения. Когда говорят «я вывожу *A* из *B*» или «я вывожу следствие *A* из *B*», то под *B* понимают одну из посылок или единственную посылку умозаключения. Однако до того, как признана истинность мысли, ее нельзя использовать как посылку в умозаключении, нельзя на ее основании ни умозаключать, ни что-либо выводить. Если все же думают, что так можно делать, то смешивают, как мне кажется, признание истинности соответствующей сложносоставленной мысли с некоторым умозаключением, в котором условие, содержащееся в этой структуре, принимается в качестве посылки. Тогда и получается, что признание истинности смысла

«Если *C*, то *A*»

покоится на некотором умозаключении, как в приведенном выше примере, причем позволительно сомневаться в том, что *C* истинно*; но при этом посылкой рассматриваемого умозаключения является смысл предложения

«Если *C*, то *B*»,

а вовсе не мысль, выражаемая в «*C*». Если бы содержание мысли, выраженной с помощью «*C*», было посылкой умозаключения, оно бы не встретилось в результате умозаключения, так как именно этого требует механизм умозаключения.

Мы видели, что в сложносоставленной мысли пятого вида первую мысль можно заместить отрицанием второй и вместе с тем вторую мысль можно заместить отрицанием первой — и при этом смысл целого не изменится. А так как сложносоставленная мысль шестого вида есть отрицание сложносоставленной мысли пятого вида, то же самое справедливо и относительно сложносоставленной мысли шестого вида: в гипотетической структуре, не меняя смысла, условие можно заменить отрицанием следствия, а следствие — отрицанием условия. — Переход от *modus ponens* к *modus tollens* — контрапозиция[5].

Обзор шести сложноподчиненных мыслей[6]:

I. *A* и *B*;	II. не (*A* и *B*);
III. (не *A*) и (не *B*);	IV. не ((не *A*) и (не *B*));
V. (не *A*) и *B*;	VI. не ((не *A*) и *B*).

Напрашивается добавление:

A и (не *B*);

однако смысл выражения

«*A* и (не *B*)»

тот же самый, что и выражения

«(не *B*) и *A*»,

какими бы ни были собственно предложения «*A*» и «*B*». Поскольку же

«(не *B*) и *A*»

имеет ту же самую форму, что и

«(не *A*) и *B*»,

мы здесь не получаем ничего нового, а опять-таки только выражение сложносоставленной мысли пятого вида, и в

«не (*A* и (не *B*))

снова получаем выражение сложносоставленной мысли шестого вида. Наши шесть видов сложносоставленных мыслей образуют, таким образом, завершенное целое; а исходными составными частями выступают здесь структура первого вида и отрицание. Преимущество, которое, судя по этому, как кажется, имеет структура первого вида по сравнению с другими сочленениями, так приемлемая для психологов, логически не оправдано; ибо любую из шести видов сложносоставленных мыслей

* Точнее — в том, что истинна мысль, выраженная с помощью «*C*».

можно положить в основу и из нее с помощью отрицания вывести все другие[7], так что для логики все шесть видов равноправны. Если мы исходим, например, из гипотетической структуры

Если *B*, то *C*,

или

Не ((не *C*) и *B*)

и заменим «*C*» на «не *A*», то получим

Если *B*, то не *A*,

или

Не (*A* и *B*).

С помощью отрицания целого получается

Не (если *B*, то не *A*),

или

A и *B*.

Поэтому

Не (если *B*, то не *A*)

означает то же, что и

A и *B*,

а это есть структура первого вида, сведенная к гипотетическому сочленению и отрицанию. Поскольку же из структуры первого вида и отрицания могут быть выведены остальные сложносоставленные мысли, все сложносоставленные мысли наших шести видов тоже могут быть выведены из гипотетической структуры и отрицания. Сказанное о структурах первого и шестого видов справедливо вообще для сложносоставленных мыслей наших шести видов, так что ни один из этих видов не имеет преимущества по отношению к другому. Каждый из них может служить основанием для выведения всех других[7]. Выбор не определен положением дел в логике.

Нечто подобное мы видим в основаниях геометрии. Можно так определить две разные геометрии, что некоторые теоремы первой из них окажутся аксиомами второй, а некоторые теоремы второй — аксиомами первой.

Остается рассмотреть случаи, когда не различные мысли, а одна и та же мысль соединяется сама с собой. Если снова «*A*» есть собственно предложение, то

«*A* и *A*»

выражает ту же мысль, что и «*A*». Первое выражает не больше и не меньше того, что выражается во втором. Поэтому

«не (*A* и *A*)»

выражает то же самое, что и «не *A*».

Равным образом и

«(не *A*) и (не *A*)»

выражает то же самое, что и «не *A*». Следовательно, и

«не [(не *A*) и (не *A*)]»

выражает то же, что и «не не *A*», то есть «*A*».

Тогда

«не [(не *A*) и (не *A*)]»

выражает структуру четвертого вида. Вместо этого мы говорим также

«*A* или *A*».

Таким образом не только

«*A* и *A*»,

но и

«*A* или *A*»

обладают тем же смыслом, что и «*A*».

Иначе обстоит дело со структурой пятого вида. Сложносоставленная мысль, выражаемая как

«[(не *A*) и *A*]»,

является ложной, потому что из двух мыслей, из которых одна является отрицанием другой, одна всегда ложна, так что ложно и сочленение этих мыслей первого вида. Поэтому сочленение мысли с самой собой, если оно шестого вида, а именно, сочленение, выражаемое как

«не [(не *A*) и *A*]»,

является истинным, если «*A*» есть собственно предложение. Эту сложносоставленную мысль в языковой форме мы можем передать как[8]

«если *A*, то *A*»,

например, «если Снежка выше Брокена, то Снежка выше Брокена».

Здесь напрашиваются вопросы: «А выражает ли это предложение какую-нибудь мысль? Не пусто ли его содержание? Что нового получаем мы, когда его слышим?» Ну, может быть и так, что кто-то пока не услышал этого предложения, вообще о нем не знал и поэтому не признавал истинным. В известном отношении и при определенных обстоятельствах из него все же можно узнать то, что для кого-то и будет новым. Ведь нельзя же отрицать истину, что Снежка выше Брокена, если Снежка выше Брокена. Так как только мысли могут быть истинными, это сложноподчиненное предложение должно выражать некую мысль, а тогда и отрицание этой мысли будет мыслью, несмотря на ее кажущуюся бессмысленность. Надо только всегда помнить, что можно выражать мысль, не утверждая ее. Здесь речь идет только о мыслях. Видимость бессмысленности привносится той утверждающей силой, которую мы непроизвольно примысливаем к высказываемому предложению. Разве тот, кто высказывает предложение без утверждающей силы, делает это для того, чтобы высказать его истинность? Не исключено, что он имеет при этом как раз противоположное намерение[9].

Сказанное можно обобщить. Пусть «*O*» есть предложение, в котором выражен некоторый частный случай какого-то логического закона, но без указания, что он истинен. Тогда «не *O*» легко счесть бессмысленным, однако только при условии, что его воспринимают как высказанное с утверждающей силой. Утверждая некоторую мысль, которая противоречит какому-либо логическому закону, можно и в самом деле счесть ее если и не лишенной смысла, то все же ему противной, так как истинность логического закона ясна непосредственно из него самого, из того смысла, который заключен в его выражении. Но и мысль, противоречащая какому-либо логическому закону, тоже имеет право на свое выражение, потому что ее можно подвергнуть отрицанию. Само же «*O*» кажется почти бессодержательным.

Поскольку каждая сложносоставленная мысль — есть мысль, ее можно соединять с другими мыслями. Так, сочленение, выраженное как

«(*A* и *B*) и *C*»,

составлено из мыслей, выраженных с помощью

«*A* и *B*» и «*C*».

Но мы можем рассматривать его также и как сочленение, построенное из мыслей, выраженных с помощью

«*A*», «*B*», «*C*».

Так могут возникать сложносоставленные мысли*, которые содержат три мысли. Другие примеры структур, состоящих из трех мыслей, представлены выражениями:

«не [(не *A*) и (*B* и *C*)]» и

«не [(не *A*) и ((не *B*) и (не *C*))]».

Так можно подыскать и другие примеры сложносоставленных мыслей, которые содержат четыре, пять или больше мыслей.

Для образования всех этих структур достаточно сложносоставленных мыслей первого вида и отрицания, причем вместо первого вида можно избрать любой другой вид из наших шести. Тут возникает вопрос, всякая ли сложносоставленная мысль может быть образована подобным образом. Что касается математики, то я убежден, что в ней не встречается сложносоставленных мыслей, образованных по-другому. В физике, химии и астрономии дело вряд ли обстоит иначе; однако придаточные предложения цели призывают к осторожности и, по-видимому, требуют более тщательного исследования. Здесь этот вопрос я оставляю открытым. Все же мне кажется, что сложносоставленные мысли, которые образуются описанным мною образом из структур первого вида с помощью отрицания, заслуживают особого названия. Их можно было бы назвать математическими сложносоставленными мыслями. Это не означает, будто существуют другие сложносоставленные мысли. И еще в одном отношении математические сложносоставленные мысли представляются мне единым целым. А именно, если в одной из таких сложносоставленных мыслей заменить какую-то истинную мысль на истинную же мысль, то образовавшаяся таким образом сложносоставленная мысль окажется истинной либо ложной, смотря по тому, какой была исходная структура— истинной или ложной. То же справедливо и для случая, когда в какой-либо математической сложносоставленной мысли ложная мысль заменяется ложной же. Теперь я буду говорить: если две мысли или обе истинны — или обе ложны, — то они имеют одно и то же значение истинности, или истинностное значение. В соответствии с этим я говорю, что мысль, выраженная с помощью «*A*», имеет то же самое значение истинности, что и мысль, выраженная с помощью «*B*», если или

«*A* и *B*»

или

«(не *A*) и (не *B*)»

выражают истинную мысль. После того как это установлено, наше предложение можно выразить так:

> «Если в некоторой математической сложносоставленной мысли какая-либо мысль заменена мыслью, имеющей то же значение истинности, то полученная таким образом сложносоставленная мысль имеет то же истинностное значение, что и первоначальная»[10].

* На это возникновение не следует смотреть как на процесс, происходящий во времени.

ЛОГИЧЕСКАЯ ВСЕОБЩНОСТЬ

В этом журнале была опубликована моя статья о структурах мысли[1], в которой нашли свое место гипотетические мыслительные структуры. Естественно попытаться, отправляясь от этих структур, рассмотреть то, что в физике, математике и логике называют *законом*. Ведь о законе мы очень часто говорим в форме гипотетического сложноподчиненного предложения, состоящего из одного или более предложений, содержащих условие, и одного предложения, выражающего следствие. Однако тут перед нами возникает одно препятствие. Рассматривавшиеся мною гипотетические сложноподчиненные предложения не принадлежат к законам, потому что в них отсутствует всеобщность[2]; последняя отличает законы от единичных фактов, с которыми мы привыкли иметь дело, например в истории. На деле отличие законов от единичных фактов гораздо глубже. На этом основано коренное различие научной деятельности в физике и в исторической науке. Первая стремится к открытию законов; вторая занята установлением фактов. Конечно, и в истории присутствует причинное истолкование, и поэтому она должна хотя бы предполагать существование некоей закономерности.

Сказанного достаточно, чтобы показать необходимость более тщательного рассмотрения того, что́ такое всеобщность.

Познавательная ценность любого закона основана на том, что закон охватывает — в качестве частных случаев— много, даже бесконечно много единичных фактов. Мы извлекаем пользу из познания закона, когда, опираясь на него, получаем с помощью умозаключений, ведущих от общего к частному, богатый запас знаний, относящихся к конкретным данным, для чего, конечно, всегда нужна умственная работа — работа по построению умозаключений. Тот, кто знает, как совершаются подобные умозаключения, понимает, что такое всеобщность в том смысле слова, который здесь имеется в виду. С помощью умозаключений иного рода мы из уже признанных законов можем выводить новые.

В чем же состоит сущность всеобщности? Поскольку речь здесь идет о законах, а законы суть мысли, речь здесь может идти только о всеобщности мысли. Каждая наука развивается как некоторая последовательность мыслей, признанных истинными; при этом, однако, сами мысли редко бывают предметами рассмотрения, о которых нечто высказывается; в качестве таковых по большей части выступают чувственно воспринимаемые вещи. Когда мы о них что-то высказываем, мы оглашаем, заявляем мысли. В таком виде мысли обычно и фигурируют в науке. Когда мы здесь говорим о всеобщности применительно к мыслям, мы делаем мысли предметами нашего рассмотрения и помещаем их на то место, которое обычно занимают чувственно воспринимаемые вещи. Последние — именно они обычно, особенно в естествознании, являются предметом исследования — в корне отличаются от мыслей. Ибо мысли не воспринимаются с помощью органов чувств. Хотя знаки, выражающие мысли, слышимы или зримы, сами мысли таковыми быть не могут. Чувственные впечатления могут побудить нас признать истинность некоей мысли;

однако мы можем задаться мыслью без того, чтобы признать ее истинной. Ложные мысли — тоже мысли.

Если мысль чувственно невоспринимаема, то нельзя ожидать, что ее всеобщность окажется воспринимаемой. Я не в состоянии предъявить мысль — наподобие того, как минералог демонстрирует минерал, обращая при этом внимание на характерный для него блеск. Определить всеобщность посредством некоей дефиниции невозможно.

Выход из этого положения, как мне представляется, открывает язык; ибо предложения языка, с одной стороны, чувственно воспринимаемы, а с другой — выражают мысли. Как средство обмена мыслями язык должен уподобляться тому, что мыслится. Можно надеяться, таким образом, использовать его как мост, соединяющий чувственно воспринимаемое и внечувственное. Достигнув договоренности на уровне языка, нам легче распространить взаимопонимание на уровень того, что мыслится и что отражается в языке. Здесь идет речь не об обычном понимании языка, не о постижении выражаемых им мыслей, но о понимании того свойства мыслей, которое я называю логической всеобщностью. Конечно, при этом приходится рассчитывать на благожелательность со стороны другого, а этот расчет может обернуться разочарованием. Кроме того, использование языка требует осторожности. Нельзя не видеть глубокого разрыва, который несмотря ни на что разделяет области языкового и мыслительного и ставит известные пределы взаимному соответствию обеих областей.

Как же в языке проявляется всеобщность? Одну и ту же мысль всеобщего характера можно выразить по-разному:

«Все люди смертны»,
«Каждый человек смертен»,
«Если некто есть человек, то он смертен».

Различие этих выражений не относится к самой мысли. Для наших целей желательно использовать один-единственный способ выражения, чтобы второстепенные различия — скажем, в окраске мысли — не оборачивались различиями самих мыслей. Выражения, содержащие «все» и «каждый», не пригодны для того, чтобы их можно было применять везде, где встречается всеобщность, потому что не каждый закон можно облечь в эту форму. Последнее из приведенных выше выражений имеет форму гипотетического сложноподчиненного предложения — без этого способа выражения и в прочих случаях вряд ли можно обойтись, — а также содержит неопределенно указывающие компоненты: «нечто» и «он»; в них-то и заключено, собственно говоря, выражение всеобщности. От этого способа выражения мы можем легко перейти к особенному, частному, заменив неопределенно указывающие компоненты определенными указателями:

«Если Наполеон есть человек, то он смертен».

Эта возможность — осуществлять переход от общего к частному — и приводит к тому, что для нас подходят только выражения всеобщности, содержащие неопределенно указывающие компоненты; но если бы мы ограничились лишь этими «нечто» и «он», мы смогли бы рассматривать только очень простые случаи. Естественно напрашивается использование принятого в арифметике способа: применять буквы в качестве неопределенно указывающих компонентов предложения:

«Если *a* есть человек, то *a* смертен».

Буквы одинакового вида предполагают здесь ссылку друг на друга. Вместо буквы «*a*» мы могли бы с таким же успехом взять букву другой формы — «*b*» или «*c*». Важно лишь, чтобы буквы были одной и той же формы — были равноформными.

Тем самым, однако, мы, строго говоря, преступаем границы разговорного языка, рассчитанного на слуховое восприятие, и оказываемся в сфере языка, предназначенного для глаза, — письменного или печатного текста. Предложение, которое записывает автор, есть прежде всего указание, как построить произносимое вслух предложение в языке, последовательности звуков которого служат для выражения некоторого смысла. Таким образом, сначала возникает лишь опосредованная связь между письменными знаками и некоторым выражаемым ими смыслом. Но как только такого рода связь возникла, на написанное или напечатанное предложение можно смотреть так же, как на непосредственное выражение соответствующей мысли, стало быть, как на предложение в собственном смысле слова. Так получается язык, предназначенный для зрительного восприятия, — язык, которому в случае необходимости сможет научиться и глухой. В этом языке отдельные буквы можно воспринимать как неопределенно указывающие компоненты предложения. Очерченный язык, который я буду называть *вспомогательным языком*, должен служить нам в качестве моста, соединяющего чувственно воспринимаемое с внечувственным. Этот язык содержит две различные *составные части*: *образы слов* и *отдельные буквы*. Первые соответствуют словам в звуковом языке, вторые служат средством неопределенного указания. От вспомогательного языка следует отличать тот язык, на котором совершается мое мышление. Это обычный письменный или печатный немецкий язык, мой *язык изложения*[3]. В отличие от этого, предложения вспомогательного языка — это предметы, о которых можно говорить на моем языке изложения. Поэтому я должен быть в состоянии обозначать их на этом языке, подобно тому как в некоторой астрономической статье планеты обозначаются собственными именами — «Венера», «Марс». *Как* такого рода *собственные имена, предложения вспомогательного языка и используются мною, но только после заключения их в кавычки*. Отсюда следует, далее, что с предложениями вспомогательного языка никогда не связана утверждающая сила. «Если *а* есть человек, то *а* смертен» есть предложение вспомогательного языка, и в этом предложении выражена всеобщность мысли. Мы переходим от общего к частному, заменяя неопределенно указывающие равноформные буквы собственными именами, которые тоже равноформны. То, что равноформные собственные имена обозначают один и тот же предмет — это заключено в природе нашего вспомогательного языка. Пустые знаки (имена) тут не являются именами собственными*. Замещая неопределенно указывающие компоненты, например имеющие форму буквы «*а*», собственными именами, например словоформой «Наполеон», мы получаем:

«Если Наполеон есть человек, то Наполеон смертен».

На это предложение, однако, не следует смотреть как на умозаключение, потому что с предложением «Если *а* есть человек, то *а* смертен» не связана утверждающая сила, и мысль, которая в нем выражена, здесь поэтому не выступает как признанная истинной; *ибо только мысль, признанную истинной, можно сделать посылкой умозаключения*. Но мы можем получить умозаключение, освободив от кавычек оба предложения нашего вспомогательного языка, в результате чего становится возможным придать всему предложению утверждающую силу.

Сложноподчиненное предложение *«если Наполеон есть человек, то Наполеон смертен»* — *«wenn Napoleon ein Mensch ist, ist Napoleon sterblich»* — выражает некоторую гипотетическую сложносоставленную мысль, которая состоит из одного усло-

---

* *Равноформными* я называю такие собственные имена нашего вспомогательного языка, которые, согласно намерению автора, должны иметь одинаковую форму и размеры,— при условии, что это намерение нами понято; хотя, впрочем, в полной мере это не достижимо[4].

вия и одного следствия. Первое выражено в предложении «*Napoleon ist ein Mensch*» («*Наполеон есть человек*»), а второе — в предложении «*Napoleon ist sterblich*» («*Наполеон смертен*»). Однако в нашем сложноподчиненном предложении, строго говоря, не содержится предложений, имеющих такую форму, как «*Napoleon ist ein Mensch*» и «*Napoleon ist sterblich*». В этом отклонении языкового от мыслимого проявляется недостаток нашего вспомогательного языка, который еще подлежит устранению[5]. Теперь я облеку мысль, которую я выразил в сложноподчиненном предложении «*wenn Napoleon ein Mensch ist, ist Napoleon sterblich*», в предложение «*wenn Napoleon ist ein Mensch, so Napoleon ist sterblich*», которое я в дальнейшем буду называть вторым предложением. Таким же образом я буду поступать и в других, подобных этому случаях. Так, предложение «*wenn a ein Mensch ist, ist a sterblich*» я перестрою в предложение «*wenn a ist ein Mensch, so a ist sterblich*», которое я в дальнейшем буду называть первым предложением*. В первом предложении я отличаю обе буквы, представленные формой «*a*», от остальных частей.

---

* Второе предложение, в отличие от первого, не выражает сложносоставленную мысль, так как ни «*a есть человек*» («*a ist ein Mensch*»), ни «*a смертен*» («*a ist sterblich*») не выражает какой-либо мысли. Здесь налицо, собственно, только части предложений, а не предложения.

МОИ ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ

Нижеследующее, быть может, будет для многих полезно в качестве ключа к пониманию моих результатов

Когда кто-либо признает нечто истинным, он судит, выносит суждение. То, что он признает истинным, есть мысль. Мысль нельзя признать истинной, пока она не постигнута. Любая истинная мысль была истинна еще до того, как она была постигнута каким-то человеком. Мысль не нуждается в человеке как некоем носителе. Одна и та же мысль постигаема многими людьми. Процесс суждения не может изменить мысль, признанную истинной. Когда мы судим, мысль, признаваемую истинной при вынесении суждения, можно всегда очистить от ее оболочки, и к последней процесс суждения не относится. Слово «истинный» («истинно») не есть имя прилагательное в общепринятом смысле. Когда к словам «морская вода» я присоединяю предикативно слово «соленая», я образую некое предложение, выражающее некоторую мысль. Чтобы сделать более ясным, что в этом случае данная мысль должна лишь выражаться, но не утверждаться, я преобразую ее в зависимую форму придаточного предложения: «что морская вода является соленой». Вместо этого я мог бы попросить актера, чтобы он в рамках своей роли произнес ее на театральной сцене; ибо известно, что слова актера на сцене только по видимости обладают утверждающей силой. Знание слов «является соленой» необходимо для понимания данного предложения, так как оно, это понимание, вносит существенный вклад в данную мысль; ведь в словах «морская вода» самих по себе нет вообще никакого предложения и никакого выражения мысли. Совершенно по-другому обстоит дело со словом «истинно». Если я предикативно присоединю его к словам, «что морская вода является соленой», то я тоже получу некое суждение, выражающее некоторую мысль. По той же причине, что и раньше, я преобразую и ее в зависимую форму придаточного предложения, гласящего: «что истинно (wahr ist), что морская вода является соленой (salzig ist)». Выраженная здесь мысль совпадает со смыслом предложения, гласящего, «что морская вода является соленой». Смысл слова «истинно», стало быть, не вносит в мысль никакого существенного вклада. Когда я утверждаю: «истинно, что морская вода является соленой», я утверждаю то же самое, что и произнося слова: «морская вода является соленой». Из этого видно, что утверждение заложено не в слове «истинно», а в той утверждающей силе, с которой высказывается данное предложение. Поэтому можно было бы предположить, что слово «истинно» вообще не имеет смысла. Но тогда не имело бы смысла и предложение, в котором «истинно» служит предикатом. Можно только сказать: слово «истинно» имеет смысл, который ничего не привносит в смысл всего предложения, в котором оно служит предикатом.

Однако как раз поэтому кажется, что это слово пригодно для того, чтобы раскрыть сущность логики. Любое другое прилагательное — слово, выражающее свойство, в силу своего особого смысла было бы менее пригодно для этого. Таким образом, кажется, что слово «истинно» («истинный») делает возможным невозможное, а именно — выявляет утверждающую силу как компоненту мысли. И попытка так подойти к делу — несмотря на то, что она оканчивается неудачей, или, напротив, потому, что она оказывается неудачной, — указывает на специфическую особенность логики, и в силу этого логическая специфичность кажется существенно отличной от особенностей эстетики и этики. Ибо слово «прекрасный» все-таки действительно — и достаточно ясно — указывает на сущность эстетики, так же как слово «благой» — на сущность этики; слова же «истинный», «истинно» — это, собственно говоря, неудачная попытка отличить логику[1], поскольку то, о чем собственно тут идет речь, заложено вовсе не в этих словах, а в той утверждающей силе, с которой высказывается данное предложение.

Многое, присущее мысли, — например, отрицание или всеобщность, — кажется находящимся в более тесной связи с утверждающей силой или истиной. Это заблуждение исчезает, когда мы обнаруживаем высказывания, не имеющие утверждающей силы, например условные предложения или слова актера, исполняющего свою роль.

Как же тогда получается, что слово «истинно» («истинный»), хотя оно и кажется содержательно пустым, оказывается неустранимым? Можно ли совершенно без него обойтись, по крайней мере при обосновании логики, где оно приводит только к путанице? То, что мы не можем этого сделать, заключено в несовершенстве языка. Если бы мы имели логически более совершенный язык, нам, быть может, вообще не нужна была бы логика или ее можно было бы вы́читать из этого языка. Но от этого мы еще очень далеки. Дело логики по большей части и состоит как раз в борьбе с логическими недостатками языка, который, тем не менее, является для нас неотъемлемым орудием. Лишь после того, как будет завершена наша логическая работа, мы получим более совершенный инструмент.

То́, что с наибольшей ясностью указывает на сущность логики,— это утверждающая сила, с которой высказывается мысль[2]. Силе этой, однако, не соответствует ни одно слово, ни одна части предложения; один и тот же словесный текст может быть в одном случае высказан с утверждающей силой, а в другом — без таковой. Лингвистически утверждающая сила связана с грамматическим предикатом.

КОММЕНТАРИИ

При составлении настоящих Комментариев использовались примечания к различным изданиям трудов Фреге на языке оригинала, к русским и английским переводам его текстов, а также работы о Фреге и вообще о логике Нового времени, в том числе и принадлежащие авторам этих строк.

Помимо оговариваемых ниже, в Комментариях применяются также сокращенные обозначения литературных источников, которые были использованы в предисловии переводчика.

Нумерация комментариев — цифровая в отличие от подстрочных примечаний в тексте перевода, которые унифицированы и обозначены звездочками.

Часть первая

ЗАПИСЬ В ПОНЯТИЯХ

Расположение текстов Фреге в этой части — как и в двух других — в общем и целом хронологическое: соответствует году их публикации либо написания; немногие отклонения от этого принципа объясняются дидактическими причинами.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ, ЯЗЫК ФОРМУЛ ЧИСТОГО МЫШЛЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЙ ПО ОБРАЗЦУ АРИФМЕТИЧЕСКОГО

Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens

Первая публикация: Verlag von L. Nebert. Halle a. S., X, 88 S. Это сочинение Фреге в данных Комментариях будет обозначаться как ***BS***. Репрографическое издание *BS* с исправлением ошибок и опечаток: Begriffsschrift und andere Aufsatze. 2. Auflage. Mit E. Husserls und H. Scholz' Anmerkungen herausgegeben von Ignacio Angelelli. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Darmstadt, 1964 und G. Olms Verlag, Hildesheim, 1964. XVI, 244 S.; 2-е изд.: Olms Verlag, Hildesheim, N.Y., 1977. Настоящий перевод выполнен по изданию 1977 г., в которое внесены надлежащие исправления (часть из них устраняет опечатки оригинала 1879 г.), принадлежащие его редактору (они указаны в разделе Textkritische Bemerkungen. S. 122), это издание в дальнейшем будет обозначаться ***BS*-2**. Нами также учтены исправления, сделанные в книге: *Frege G.* Kleine Schriften. 2. Auflage. Herausgegeben und mit Nachbemerkungen zur Neuauflage versehen von I. Angelelli (G. Olms Verlag, Hildesheim; Zürich; New York, 1990) ее редактором (они указаны на с. VI этой книги). Приняты во внимание и исправления, сделанные К. Тилем и отмеченные в упомянутой книге на с. 436*, 437*. Наконец, учтены исправления в *BS*, сделанные в книге: *Heijenoort*.

Термин *Begriffsschrift* использован Фреге для обозначения разработанного им логического исчисления. Адекватная передача его на русском языке вряд ли возможна. В имеющихся переводах работ Фреге встречаются варианты: исчисление понятий, запись понятий, запись в понятиях, понятийная запись, алфавит понятий, идеография и даже шрифт понятий. Переводчику и редактору представляется, что наиболее близкими к термину Фреге были бы варианты «запись понятий», «запись в понятиях» и «понятийная запись» (последние два термина используются во Введении и Послесловии переводчика), но от систематического их применения при переводе было решено отказаться из-за расхождения с русской математико-логической терминологией. Принятый в данном издании термин «исчисление понятий» или, в некоторых случаях, просто «исчисление», а также «знаковая система», «символическая система» и др. соответствуют существу термина Фреге, хотя последний и отмечал отличие его теории от *calculus*, используемого как синоним «математического анализа», и употреблявшихся Г. В. Лейбницем терминов *calculus ratiocinator* и *calculus philosophicuis* (см. также примечание 5 к с. 66). Чтобы сделать перевод более ясным, мы во многих случаях помещаем немецкое название *Begriffsschrift* после используемого русского эквивалента. В переводах заголовков фрегевских статей и его архивных материалов мы всюду используем термин «исчисление понятий», хотя в самих текстах мы прибегаем также и к «записи в понятиях» и «понятийной записи».

Заметим, что выбор названия «исчисление понятий» оправдан и современным употреблением термина *исчисление*. Так, Хаскелл Б. Карри (1900–1981) в своей известной монографии использует термин «исчисление» применительно к системам со связанными переменными (каковой была теория Фреге), в то время как для систем без связанных переменных он считает уместным термин «алгебра», например «алгебра высказываний». Он следующим образом оправдывает свое решение: «Эти термины согласуются с их обычным употреблением в математике, где отличительной чертой исчисления бесконечно малых в противоположность элементарной алгебре является наличие в них связанных переменных» (*Карри Х. Б.* Основания математической логики/Пер. с англ., М.: Мир, 1969. С. 192). Относительно понятия «связанная переменная» — в отличие от «свободной переменной» — см. комментарий 10 на с. 385.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Einleitung

[1] Здесь Фреге исходит из *разграничения двух родов* истин, восходящего по крайней мере к *Лейбницу* (G. W. Leibniz; 1646–1716). В трактате «Монадология» (Monadologie), содержащем сжатое изложение лейбницевской метафизики, говорится, что существует два рода истин: *истины разума*, или необходимые истины, и *истины факта*, или случайные истины. Поскольку дальше в фрегевском Предисловии к *BS* следует ссылка на идеи Лейбница, имеются все основания считать, что именно его взгляды имеет в виду Фреге.

«Истины разума, — пишет автор «Монадологии»,— необходимы, и противоположное им невозможно; истины факта случайны, и противоположное им возможно». Основания необходимой истины можно найти путем анализа, — разлагая ее на идеи и истины более простые, пока не дойдем до первичных». В математике ее теоремы и правила сводятся таким путем к определениям, аксиомам и постулатам — *первоначальным принципам*, как их называет Лейбниц; их нельзя определить или доказать. «Это тождественные положения, противоположные которым заключает в себе явное противоречие» (*Лейбниц Г. В.* Соч.: В 4 т. М., 1982. Т. 1. С. 418–419; при дальнейших ссылках возможно сокращение: ***Лейбниц***).

В «Новом опыте о человеческом разуме» — труде, в котором Лейбниц полемизирует с Дж. Локком, автором сочинения «Опыт о человеческом разуме» (1690), он, обсуждая вопрос о том, все ли истины зависят от опыта, говорит о существовании истин, покоящихся на иной основе, — необходимых истинах «вроде тех, которые встречаются в чистой математике, и в особенности в арифметике и геометрии»; они основаны на принципах, доказательства которых не зависят от свидетельств чувств (хотя, тонко замечает он, «не будь чувств, нам никогда не пришло бы в голову задумываться над ними»; там же, М., 1983. Т. 2. С. 49). «Изначальные доказательства необходимых истин, — поясняет Лейбниц, — вытекают только из разума, а прочие истины получаются только из опыта или чувственных наблюдений» (там же. С. 81–82).

К различию между двумя родами истин Лейбниц возвращался неоднократно. Не ясно, какие из Лейбницевых источников были известны Фреге, когда он создавал свой труд 1879 г. Исходный французский текст «Монадологии» при жизни его автора не издавался, латинский вариант этого трактата увидел свет в 1721 г., французский же оригинал — лишь в 1840 г.; таким образом, Фреге мог быть с ним знаком. То же можно сказать, например, и о таких работах Лейбница, как трактат «Об универсальной характеристике или философском исчислении» и о «Замечаниях к общей части Декартовых "Начал"», — работах, в которых Лейбниц также излагает свои взгляды на необходимые и случайные истины; обе работы были изданы впервые в том же 1840 г. Можно не сомневаться, что автору *BS* были известны «Новые опыты...» (этот труд был впервые опубликован еще в 1765 г., правда, это случилось полвека спустя после кончины Лейбница). Однако следующая ниже ссылка на А. Тренделенбурга заставляет предполагать, что при создании *BS* Фреге скорее всего опирался не столько на Лейбницевы оригиналы (если таковое вообще имело место), сколько на сведения, приведенные Тренделенбургом. Выглядит убедительным, что непосредственно трудами Лейбница Фреге занялся уже после выхода *BS*: из приводимого Л. Крайзером списка заказывавшейся Фреге литературы в библиотеке университета Иена (*Kreiser L.* Freges «Die Grundlagen der Arithmetik» — Werk und Geschichte//Frege Conference 1984/Hrsq. G. Wechsung. — Berlin: Akademie-Verlag, 1984, S. 13–27; при последующих ссылках: ***Kreiser*, 1984**) явствует, что семь томов издания Герхардта и два тома издания И. Эрдмана (об этих изданиях см. ниже) были на его руках с 25 октября по 10 декабря 1879 г. (заметим, что Предисловие к *BS* помечено автором 18 декабря 1878 г.).

В последующем Фреге достаточно основательно вошел в круг идей Лейбница, познакомился с рядом лейбницевских работ, включая извлеченные из его архива, о чем свидетельствуют ссылки на все большие издания его сочинений — И. Эрдмана, Г. Перетца и К. Герхардта, вышедшие в интервале 1840–1867 гг. (данные об этих изданиях можно найти в Примечаниях к т.1 упомянутых выше «Сочинений» Лейбница, т. 1, с. 572). Например, в труде «Основания арифметики» (1884) Фреге неоднократно цитирует автора «Новых опытов...» по изданию Эрдмана либо по второму тому книги И. Ю. Баумана (J.J. Baumann) «Учения о пространстве, времени и математике...» (1869), содержавшем немецкие переводы латинских текстов Лейбница. В. Е. Майер утверждает, ссылаясь на книгу Клуге (E. H. W. Kluge, 1980), что Фреге был знаком с названными выше классическими изданиями текстов Лейбница (*V. E. Mayer.* Der Wert der Gedanken. Frankfurt a. M., Berlin, N.Y., Paris, 1989, S. 34). Однако, насколько нам известно, нет сведений о том, что Фреге знал и тем более использовал более позднее издание 1903 г., осуществленное Луи Кутюра (см. данные об этом издании в названных выше Примечаниях, с. 573), где, в частности, увидела свет важная для понимания сущности логической программы Лейбница его работа «Общие исследования, касающиеся анализа понятий и истин» (Generales inquisitiones de analysi notiones et veritatum), в которой Лейбниц в следующих словах характеризует истины разума: «Истинное необходимое предложение может быть доказано сведением его к тождественным или противоположного ему — к противоречивым» (Соч. Т. 3. С. 605), и это сведе́ние должно носить логический характер.

Как убедится читатель *BS*, «истины факта», или «случайные» истины, интересуют Фреге гораздо меньше, чем необходимые истины, которые он называет *логическими*, так как именно они имеют место в логике и математике. Эта позиция Фреге тем более понятна, что «достаточное основание» фактических истин Лейбниц усматривал в Боге, о чем у Фреге нет и речи. «Истинное случайное предложение, — согласно Лейбницу, — не может быть сведено к тождественным, однако оно доказывается ссылкой на то, что, если разложение продолжать все дальше и дальше, оно постоянно приближается к тождественным, но никогда не может их достигнуть. Поэтому один только Бог, охватывающий мыслью все бесконечное, может познать все случайные истины в их полной определенности» (Там же. С. 605).

Было бы ошибкой, однако, полагать, что истины факта совсем выпадали из поля зрения Фреге: не говоря уже о том, что они встречаются в приводимых им примерах; они, фактические истины, облаченные в выражения естественного языка, играют существенно важную роль при разработке его логической семантики (ср. часть вторую настоящей книги).

Обратим внимание читателя на то, что принимая в *BS* Лейбницево различение двух родов истин, Фреге учитывал вместе с тем ту систему форм суждений, которая была выработана И. Кантом в его «Критике чистого разума», где различались, с одной стороны, суждения (истины) *a priori* и *a posteriori* и, с другой стороны, суждения *аналитические* и *синтетические*. Так, в § 9 главы первой *BS* Фреге говорит, что суждения, выражающие одинаковость двух содержаний, являются синтетическими в кантовском смысле. А в «Основных законах арифметики» (1884) он скрупулезно критически исследует всю палитру упомянутых Кантовых дистинкций, причем склоняется к тому, что кантовские аналитические суждения близки тому, что он называет *логическими истинами*, — истинами, которые, в свою очередь, совпадают с Лейбницевыми необходимыми истинами или близки к ним (ср. *Kutschera*, S. 19, 48, 49). Однако к пониманию суждений математики в духе Канта — как *синтетических* и *априорных* Фреге стал склоняться лишь в конце жизни (ср. предисловия Ф. Камбартеля и Ф. Каульбаха к фрегевским «Nachgelassene Schriften», S. XXIII, XXXI–XXXIII). *К с. 65.*

[2] Это сравнение встречается у того же *Лейбница*, писавшего: «если изобретение телескопов и микроскопов принесло столько пользы познанию природы, можно легко себе представить, насколько полезнее должен быть *этот новый органон* (то есть универсальная характеристика и исчисление умозаключений, см. ниже комментарий 5. — *Б.Б.*, *З.К.*), которым, насколько это в человеческой власти, будет вооружено само умственное зрение» (Соч. С. 3. С. 499). Это — цитата из работы Лейбница «Об универсальной науке или философском исчислении» (De scientia universali seu calculo philosophico), которая, как свидетельствует ссылка на нее в статье Фреге о логической теории Дж.Буля (см. настоящую книгу, с. 158), была ему известна. Однако можно полагать, что используемое им сравнение было навеяно скорее развивавшемся в Иене оптическим производстом Карла Цейса, которое началось именно с изготовления микроскопов. *К с. 66.*

[3] Фрэнсис *Бэкон* (Bacon, 1561–1626) — выдающийся английский мыслитель и политический деятель, автор грандиозного замысла «Великого Восстановления Наук» (Instauratio Magna Scientiarum), над которым работал многие годы, — свою цель как ученого видел в разработке нового научного метода. Последний он противополагал схоластической философии и аристотелевской силлогистике; проектируемый им метод должен был, по его замыслу, указывать кратчайший путь к познанию природы. В Предисловии к «Великому Восстановлению Наук» Бэкон писал, что «необходимо открыть человеческому разуму новую дорогу, совершенно отличную от той, которая была известна нашим предшественникам, и дать ему новые средства помощи, чтобы дух мог пользоваться своими правами на природу» (*Бэкон Ф.* Соч.: В 2 т. М., 1971. Т. 1. С. 63). Бэкон считал, что «ничего нельзя узнать иначе, как в определенном порядке и определенным методом» (там же. С. 82–83). «Ибо разум, если им не управляют и не помогают ему, бессилен и вовсе не способен преодолеть темноту вещей», — писал он в самом знаменитом своем сочинении — «Новом Органоне» (Novum Organum Scientiarum, 1620; русск. перев.: *Бэкон Ф.* Соч.: В 2 т. 2-е изд. М., 1978. Т. 2. С. 15). Разработку нового метода он противопоставлял «преждевременной и ребяческой погоне» за отдельными научными результатами.

Именно эту — и только эту — сторону методологии Бэкона имеет в виду Фреге. В остальном бэконовский подход глубоко чужд его воззрениям, потому что Бэкон критически относился к формальной логике («аналитике») как неспособной служить открытию истины — в отличие от индуктивного метода, основанного на отборе и анализе опытных данных. Установка Бэкона — наилучшее из всех доказательств это то, которое основано на систематически поставленных наблюдениях и экспериментах, вряд ли могла найти отклик у Фреге, почему он впоследствии и не ссылался на Бэкона в своих публикациях; нет имени Бэкона и в сохранившихся фрегевских архивных материалах. — *К с. 66.*

[4] Фридрих Адольф *Тренделенбург* (Trendelenburg, 1802–1872), профессор Берлинского университета с 1833 г., известный философ и логик, исследователь философско-логического наследия Аристотеля; так, том I упоминаемого Фреге труда (этот том вышел в Берлине в 1846 г.) был озаглавлен «История учения о категориях» и имеет

следующую структуру: часть первая — «Учение Аристотеля о категориях», часть вторая — «Учение о категориях в истории философии». Тренделенбург защищал аристотелевскую логику от критики со стороны Гегеля, что не могло не импонировать молодому Фреге. Том третий данного труда, в котором излагаются логические взгляды Лейбница и на который ссылается Фреге, озаглавлен «Работы разного содержания» (Vermischte Schriften); он был выпущен в Берлине в 1867 г. Имеются основания считать, что термин «Begriffsschrift» Фреге заимствовал именно у Тренделенбурга.

На коллоквиуме 1993 г., посвященном столетию первого тома труда Фреге «Основные законы арифметики», К. Тиль следующим образом осветил историю термина «Begriffsschrift»: «20 мая 1824 г. Вильгельм фон Гумбольдт выступил на историко-философском отделении Королевской Академии наук в Берлине с докладом "О буквенном письме и его связи со строением языка". Он сравнивает буквенное письмо (Buchstabenschrift) сначала со звуковой знаковой системой (Lautschrift), затем с иероглифической записью (Bilderschrift) и, наконец, с "письмом, в котором понятия передаются с помощью фигур". Последнее он называет некоей "записью понятий" (eine "Begriffsschrift"). Это же выражение используется Тренделенбургом в 1856 г. в его докладе на юбилейном заседании Лейбницевского общества; доклад озаглавлен "О Лейбницевом проекте универсальной Характеристики" — Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik" (*Thiel Ch.* "Nicht aufs Gerathewohl und aus Neurungssucht". Die Bedriffsschrift 1879 und 1893//Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium Jena 1993/Hrsg. I. Max und W. Stelzner. Walter de Gruyter. Berlin; N.Y., 1995, S. 20; при последующих ссылках на данную статью: ***Thiel*, 1995**). Этот доклад был в том же году опубликован в Трудах Берлинской академии, затем вошел в качестве первой статьи в том III трехтомника Тренделенбурга, занимая в нем с. 1—37. На с. 4 появляется термин «Begriffsschrift».

В русском переводе опубликован другой труд Тренделенбурга — «Логические исследования» (в двух частях; М., 1868). *К с. 66.*

[5] Творчество *Лейбница* пронизывает высказанная еще в его диссертации «О комбинаторном искусстве» (De arte combinatoria, 1666) идея ***всеобщей символики*** — «универсальной характеристики», понимаемой им как путь к всеобъемлющему способу открытия и доказательства истин.

Накопленные человечеством знания нуждаются в упорядочении и систематизации, в основу чего, по замыслу Лейбница, должно быть положено сведение *всех* понятий к конечному числу понятий простых, исходных (это отдаленный аналог известных категорий Аристотеля). Простые понятия должны быть выделены в процессе анализа знаний и составить «алфавит человеческих мыслей». Он позволит доказывать все возможные истины, и их перечень составит «энциклопедию доказательств». Для этого и нужно изобрести универсальную символику — Лейбниц называет ее *caracteristica universalis*; она должна быть способной выражать все понятия, как простые, исходные, так и производные, а также все возможные суждения. После этого доказательство истин сведется к оперированию со знаками, которые Лейбниц, следуя распространенной в его время терминологии, называет ***характерами*** (characteres). На должное применение «характеров» Лейбниц возлагал большие надежды: задуманная им «характеристика» должна была стать искусством пользования знаками для любых точных вычислений (ср. *Лейбниц*. Соч. Т. 3. С. 503). Необходимые для этого оперативные средства должна была доставить новая, усовершенствованная логика — *calculus ratiocinator.*

Над своим грандиозным проектом Лейбниц работал всю жизнь, получил много важных результатов, актуальных до настоящего времени; так, символика, изобретенная им в дифференциальном и интегральном исчислении, используется и до сих пор. Отмечаемое Фреге воодушевление, с которым Лейбниц трудился над своей логической программой, хорошо выражают его знаменитые слова: в результате ее осуществления, «когда возникали бы споры, нужда в дискуссии между двумя философами была бы не большей, чем между двумя вычислителями. Ибо достаточно было бы им взять в руки перья, сесть за свои счетные доски и сказать друг другу <...> *давайте посчитаем*!» (там же, с. 497).

Русские переводы главных логических работ Лейбница собраны в томе 3 его «Сочинений». *К с. 66.*

[6] Впоследствии Фреге отказался от распространения своей понятийной записи — исчисления понятий на *геометрию*, так как пришел к заключению, что арифметика, задача формализации которой была определяющей для его замысла, отлична от геометрии: последняя имеет свой собственный «познавательный источник», который не носит логического характера (хотя и предполагает применение логики). См. об этом в Послесловии к данной книге. *К с. 67.*

[7] Фреге имеет в виду *топологию.* Термин *analysis situs* (анализ положений) принадлежит Лейбницу, который в том же смысле употреблял выражение «geometria situs». В сентябре 1679 г. он писал Хр. Гюйгенсу, что, помимо алгебры и математического анализа, необходим еще новый анализ — геометрический или чисто линейный, который непосредственно выражал бы положение линий и фигур. Термин *analysis situs* использовал Л. Эйлер в своей знаменитой топологической задаче о кёнигсбергских мостах. В XIX в. это выражение уступает место названию «топология»; впервые оно появляется в сочинении «Предварительные исследования по топологии» гёттингенского математика и физика, ученика К. Гаусса — И. Б. Листинга (*Listing J.B.* Vorstudien zur Topologie. Göttingen, Studien, 1847; русск. перев.: М., 1932; см.: История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т./Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. С. 126–127; Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций/Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1981. С. 98). Термином «analysis situs» широко пользовался А. Пуанкаре (1854–1912), в XX в. он встречается, например, у Г. Вейля (1885–1955). *К с. 67.*

[8] Мысль о необходимости «борьбы» с (естественным) языком, имеющей целью выявление того, что важно для логики, математики и гносеологии, будет много раз повторяться в различных текстах Фреге. Фрегевский отказ от членения суждения на субъект (S) и предикат (P) — см. ниже — был одним из проявлений этой «борьбы». Если Лейбниц — и тем более Кант — следовали здесь традиции, то Фреге решительно порывает со схемой S—P. Впрочем, подгонка всех суждений под субъектно-предикатную форму не удовлетворяли многих логиков и до Фреге. Так, А. де Морган, изучая роль связок в предложениях, пришел к выводу, что подобная форма, то есть выражение суждений в виде, например, «Все *A* суть *B*», «*C* не есть *D*» и пр., на деле затемняет существо отношений между *A* и *B*, *C* и *D* и т.д. Это побудило его заняться изучением отношений как таковых. В результате он ввел операции над двуместными отношениями, создав соответствующую теорию. Это был путь, на который впоследствии вступил Э. Шрёдер, о котором еще будет идти речь. См. например, *Кузичева*, с. 412.

Заметим, что переосмысленная по-своему, мысль Фреге о преодолении языковых трудностей стала чуть ли не руководящей идеей так называемой «аналитической философии». Однако, в отличие от позиции Фреге, для представителей этого философского направления первичным считались языковые феномены, и «логический анализ языка» стал трактоваться как предшествующий и логике, и гносеологии, и даже заменяющий собой философию. Подобные воззрения, конечно, совершенно «нефрегевские». *К с. 67.*

I. ОБОЗНАЧЕНИЯ

I. Erklärung der Bezeichnungen

[9] Термин *учение о величинах* (нем. «Größenlehre», лат. «scientia qantorum») вплоть до последней трети XIX в. употреблялся как обозначение математики в собственном смысле — в отличие от теоретической механики, которую тогда тоже относили к математике. Считалось, что в учение о величинах входят прежде всего арифметика и математический анализ, рассматриваемый в его связях с геометрическими и физическими приложениями. В соответствии с этим, например, Б.Больцано различал *чистое* и *прикладное*

учение о величинах (*Bolzano*. Bd. I, 87, S. 409 f.). В философии математики, развивавшейся братьями Германом и Робертом Грассманами, учение о величинах строилось как абстрактная теория, предшествующая остальным разделам математики, а также логике (см.: *H. Grassmann.* Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, Leipzig, 1844, раздел «Введение»; *R. Grassmann.* Die Formenlehre oder Mathematik (Erstes Buch der Formenlehre oder Mathematik: Die Grössenlehre). Stettin, 1872; расширенный вариант этого сочинения был издан Р. Грассманом в 1875/76 гг.). Благодаря опубликованному ныне списку литературы, которую Фреге заказывал в университетской библиотеке, нам известно, что первые две части труда Р. Грассмана «Учение о величинах» Фреге держал на руках с 21 ноября 1879 г. по 23 июля следующего года, то есть пользовался этим источником уже *после* публикации *BS* (см. ***Kreiser*, 1884**).

Грассмановское «учение о величинах» явилось историческим предшественником «универсальной алгебры» А. Н. Уайтхеда (*Whitehead A. N.* A Treatise of Universal Algebra with Application, Cambridge, 1898). Фрегевское употребление термина «учение о величинах» было связано с тем, что он трактовал вещественные числа не как «численности» (количественные числа, Anzahlen), а как числовые меры (Maßzahlen), то есть числа, выражающие отношения величин к величине, принятой за единицу (фрегевское учение о числе очерчено в Послесловии к данной книге). Об «учении о величинах» см. статью: *F. K*[*ambartel*]. Größenlehre//Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftswissenschaften. Bd. I/ Hrsg. von J.Mittelstraß. München, Wien, Zürich, 1980, S. 817–819). *К с. 68.*

[10] Здесь Фреге по сути впервые вводит понятие *переменной* (точнее, свободной переменной) как знака, отличного как от тех языковых выражений, которые таковыми не являются (в частности от того, что впоследствии получило название *постоянных,* или *констант*). При этом, как увидит в дальнейшем читатель, проводится различение выражений языка — и естественного, и искусственного, в частности фрегевского исчисления понятий, — от внеязыковых реалий, к которым Фреге относит как предметы внешней, чувственно воспринимаемой реальности, так и «логические предметы», то есть абстрактные объекты типа величин, функций, чисел, понятий, истинностных значений и пр. В статьях логико-семантического цикла (см. вторую часть настоящей книги) Фреге показывает несостоятельность перенесения различений в мире языка (переменные, имена и описательные выражения; выражения, служащие для передачи всеобщности, — связанные переменные и пр.) на внеязыковые объекты. Задавая вопрос, могут ли вообще существовать переменные в мире внеязыковых объектов, Фреге дает на него категорически отрицательный ответ. Рассматривая в качестве примера выражение (1) *число, которое с точностью до миллиметра отвечает длине этого железного стержня*, он отвергает распространенный в его время взгляд на такого рода языковые выражения как на задающие «переменные величины», поскольку длина стержня изменчива и зависит от температуры. Хотя последнее и верно, считать эту длину «переменным числом» нельзя. Действительно, сравнив (1) с выражением (2) *правитель данного королевства*, мы, по аналогии с (1), и его должны были бы счесть обозначающим «переменный предмет», каковым может быть и взрослый человек, и юноша, и даже женщина. Значит ли это, что (2) обозначает некоего «неопределенного человека»? Очевидно, нет. Соответствующая неопределенность носит лингвистический характер. Она снимается путем указания времени, к которому следует относить данное выражение. Подобное указание окажется тем самым аналогом переменной, и в зависимости от его значения оно будет обозначать того или иного конкретного человека. Это полностью относится и к выражению (1), которое в зависимости от времени и температуры в одном случае может обозначать 1000, а в другом 1001; но говорить, что число 1000 превратилось в число 1001 было бы столь же нелепо, как и считать, например, что куб числа может стать простым числом, а иррациональное число — рациональным.

Хотя фрегевское понимание переменных и утвердилось в математической логике, не все современные математики столь же категоричны в отвержении «переменных величин». Так, А. Н. Колмогоров в статье «Величина», помещенной в «Математическом энциклопедическом словаре» (М., 1988. С. 113), пишет: «В традиционной математической терминологии говорить о «переменных числах» не принято. Однако логичнее такая точка зрения: числа, как и длины, объемы и т.п., являются частными случаями величин и, как всякие величины, могут быть и переменными и постоянными». *К с. 68.*

[11] Буквой *l*, в соответствии с терминологией своего времени, Фреге обозначает *натуральный логарифм*, основанием которого является число *e*; ныне используется обозначение ln. Обращаем, внимание на то, что используемые ниже *заглавные греческие буквы* являются у Фреге тем, что теперь в логике называют *метазнаками*, то есть знаками, обозначающими (другие) знаки. *К с. 68.*

[12] *Приам* — последний царь Трои («Илиада»), отец многочисленного семейства; его сын Гектор был главным троянским героем. *К с. 69.*

[13] Немецкие *beurtheilbarer Inhalt* — и его отрицание *unbeurtheilbarer Inhalt* — не имеют аналогов в русском языке; первое буквально можно перевести как «обсуждаемое содержание», небуквально же — как «содержание, о котором следует (или можно) вынести суждение»; мы по большей части будем пользоваться оборотами «содержание, подлежащее превращению в суждение», «содержание, о котором можно судить»; что касается отрицательного варианта фрегевского термина, то его мы будем передавать словами «содержание, о котором нельзя вынести (или не выносится) суждения», «содержание, которое не подлежит суждению», «содержание, которое не превращаемо (не может быть превращено) в суждение». Заметим, что в дальнейшем Фреге использует выражение *beurtheilbarer Satz*; в этом случае перевод «обсуждаемое предложение» представляется особенно неуместным. Помещая слева от штриха содержания (предложения) штрих суждения, Фреге, по существу, приписывает возникающему при этом суждению истинностное значение «истина» (или «ложь»). В соответствии с этим немецкий термин *beurtheibarer Inhalt* мы будем передавать также оборотом «содержание, допускающее истинностную оценку», «истинностно оцениваемое содержание» (и соответствующим образом переводить его отрицательный вариант). То же касается и оборота *Beurtheilung fähig*, который применяется ниже — его тоже можно передать словами «подлежит оценке»; ясно, что речь здесь идет об истинностной оценке содержания — о суждении о нем.

Горизонтальная черта ——, которую Фреге впоследствии называет также горизонталью, то есть *штрих содержания*, и вертикальная черта, то есть *штрих суждения*, имеют, каждая, самостоятельное значение в том смысле, что штрих суждения можно не только приписать слева к штриху содержания, но и, наоборот, разъединить части знака $\vdash$—, превращая суждение («утверждаемое содержание») $\vdash$—*A* просто в содержание —— *A*; что касается штриха суждения, то он встречается всегда вместе со штрихом содержания. В *BS* знак $\vdash$—— помещается перед «основными законами» и теоремами, и именно так он употребляется в современной логике, принимая вид $\vdash$. При этом, однако, он рассматривается как единое целое, не состоящее из осмысленных частей, — как знак того, что формула, стоящая непосредственно справа от него, доказуема; он также используется как знак выводимости заключения из посылок: запись $\Phi_1,\ldots, \Phi_n \vdash \Psi$ означает, что Ψ логически следует из посылок $\Phi_1, \Phi_2,\ldots, \Phi_n$, причем следование не ограничивается одним правилом *modus ponens*, как это было у Фреге (в его пропозиционной логике).

В разделе III данного сочинения Фреге вводит сходный по написанию знак *определения, дефиниции* (Festsetzung, Erklärung, Definition) $\Vdash$——, который используется им затем и в труде «Основные законы арифметики» (1893, 1903). Подобно большим греческим буквам, знаки ——, $\vdash$—— и $\Vdash$—— носят метаязыковый характер. *К с. 69.*

[14] Битва при *Платеях* (город в области Беотия) — одно из сражений в Греко-персидских войнах (479 г. до н.э.); окончилось победой греков. *К с. 168.*

[15] Немецкое *begriftlicher Inhalt* — понятийное содержание — можно также передать как «отвлеченное содержание». Это толкование соответствует смыслу, который вкладывал в него Фреге. Есть основание полагать, что он принял этот термин по ассоциации с одним из терминов Лейбница. Дело в том, что свой замысел «всеобщей символики» («универсальной характеристики») Лейбниц пытался реализовать, отправляясь от конкретных разделов математики, а в них стремился использовать идею создания «хороших» символов. Одним из таких разделов был создаваемый им математический анализ. Здесь ему принадлежат термины и символы для интеграла, дифференциала, функции

и т.д., употребляемые и до сих пор. В качестве синонима термина «дифференциальный треугóльник» в математическом анализе часто используется «характеристический треугольник». Последнее выражение предложено Лейбницем, возможно, потому, что оно соответствовало его представлениям о знаках, долженствующих составить его «характеристику» (о характеристическом треугольнике см., например: *Фихтенгольц Г.* Основы математического анализа. М., 1956. Т. I. Гл. 14, особенно с. 415–418). «Характеристический» для Лейбница — значит достойный быть элементом универсальной характеристики. Фреге, подобно Лейбницу, придавал большое значение удачной терминологии и символике. Не исключено, что по аналогии с выражением «характеристический» (characteric) можно воспринимать фрегевское «begrifflich» — как «относящийся к Begriffsschrift». Конечно, русское словосочетание «содержание, относящееся к Begriffsschrift», вряд ли можно принять в качестве термина; тем более что позднее сам Фреге отказался от этой терминологии (см., например, его статью «О смысле и значении», перевод которой помещен в наст. книге). *К с. 69.*

[16] Фреге отвергает, таким образом, традиционно утвердившееся в логике выделение в суждении (высказывании) логических субъекта и предиката — отвергает знаменитую схему *S есть* (*не есть*) *P*, заменяя ее анализом понятий и суждений в терминах аргументов и функций, соответствующим образом обобщенных (см. ниже). Это привело его к понятию *предиката* в современном смысле, хотя сам Фреге говорил лишь о *понятиях* (одноместных предикатах, в современной терминологии) и об *отношениях* (то есть многоместных предикатах). В Примечаниях к первому русскому переводу данного фрегевского труда (*Фреге Г.* Шрифт понятий, скопированный с арифметического формульный язык чистого мышления//Методы логических исследований. Тбилиси: Мецниереба, 1987. С. 143; авторы примечаний М. Н. Бежанишвили и Л. И. Мчедлишвили; в дальнейшем при ссылках: ***BS* — Бежанишвили**) в связи с этим отмечается, что традиционный субъектно-предикатный анализ суждений был для Фреге, возможно, неприемлем также и из-за неявно заключенного в нем субъективного момента, связанного с тем, что в традиционной логике под логическим сказуемым нередко понимается то, на что делается так называемое *логическое ударение* (то есть, говоря словами Фреге, является тем, «на что особенно желают обратить внимание слушателя»). В этой связи нами вспоминается пример, который в своих лекциях по логике, читанных на философском факультете МГУ в конце 40-х гг., приводил профессор П. С. Попов: в суждении «Семен едет завтра в Москву» логическое сказуемое можно выделять по-разному. Если логическое ударение сделать на «Семене» — «*Семен* едет завтра в Москву», мы получаем суждение «Тот, кто завтра едет в Москву, — это Семен»; но под ударение можно поставить и другие элементы исходного суждения: «Семен *едет* завтра в Москву», «Семен едет *завтра* в Москву», «Семен едет завтра *в Москву*», перетолковав соответствующим образом каждое из них. Впрочем, не ясно, как отнесся бы Фреге к подобному перетолкованию; принцип *контекстности*, о котором он говорит в своих «Основаниях арифметики» (1884), а также его логико-семантические рассмотрения (см. вторую и третью части настоящей книги) не позволяют с определенностью утверждать, что он счел бы эти суждения имеющими одинаковое содержание. *К с. 70.*

[17] *Особенные* (besondere) суждения в понимании Фреге близки к тому, что логики его времени называли *частными* суждениями. Однако здесь Фреге не употребляет этого термина (*particuläre Urtheile*) — по-видимому потому, что частные суждения традиционной логики предполагают членение суждений на субъект (*S*) и предикат (*P*), которое он отвергает. Впрочем, в дальнейшем Фреге использует и традиционную терминологию, говоря о частно-утвердительном (particulär bejahendes) суждении; но понимает он его иначе, чем в традиционной логике. *К с. 70.*

[18] Фреге вполне последователен в своем отрицательном отношении к понятиям традиционной логики, отбрасывая в своих рассмотрениях принятое в ней деление суждений: ни выделение *категорических*, *гипотетических* и *разделительных* суждений (которое он считает имеющим лишь грамматическое значение), ни противопоставление суждений *ассерторических* и *аподиктических* не нужно для тех задач, которые он преследует

в своем труде «Исчисление понятий»: первое деление снимается используемым им пропозициональным базисом (состоящим из операций *импликации* и *отрицания*, см. ниже), а второе поглощается вводимой им *всеобщностью* (использованием квантора общности), вполне достаточной для выражения нужной ему необходимости логических и арифметических законов. *К с. 71.*

[19] Здесь и далее (§ 5–7) Фреге фактически осуществил то, что ныне называется *табличным определением* операций логики высказываний — пропозициональных операторов. Много позже, в «Логических исследованиях» — во второй и особенно третьей их части (см. в наст. книге, с. 343–376) — он изложит это определение в более явной форме, связав с основными пропозициональными операторами (знаками операций логики высказываний) соответствующие способы *умозаключений.* Людвиг *Витгенштейн* (1889–1951) — мыслитель, которому нередко приписывается приоритет в методике «матричного» построения данного раздела логики, — в «Логико-философском трактате» (1921) придал фрегевскому подходу законченную форму табличного развертывания теории высказываний (см. *Л. Витгенштейн.* Философские работы. Ч. I. М.: Гнозис, 1994. С. 31 и далее; при дальнейших ссылках на этот источник: ***Витгенштейн***).

В § 5 *BS* Фреге «таблично» задает свою «условную связь». В самом деле, если отождествить *утверждение* (bejahen) содержания с его *истинностью*, а *отрицание* (verneinen) содержания с его ложностью (что молчаливо предполагается Фреге), то мы получим перебор всех четырех возможных распределений значений *истинно/ложно* по двум произвольным содержаниям, представленных буквами *А* и *В*; исключение же третьей возможности — когда *В* утверждается, а *А* отрицается — делает условную связь двух содержаний — *ложной.* В результате получается хорошо известная ныне таблица истинности для операции импликации:

B	A	$B \supset A$
и	и	и
л	и	и
и	л	л
л	л	и .

Ниже Фреге поясняет, что «условная связь» верна, с одной стороны, при истинности ее следствия — консеквента *А*, независимо от того, каким, истинным или ложным, является условие — антецедент *В*, а с другой стороны, при ложности условия — антецедента *В*, независимо от того, каким, истинным или ложным, является консеквент *А*. В современной логике это называют принципами: «Из лжи следует (в смысле условной связи — импликации) все что угодно» и «Истина следует из всего что угодно». То, что при этом не предполагается содержательной (причинной, говорит Фреге, рассматривая далее конкретный пример) связи между условием и следствием, убеждает в том, что здесь им вводится операция, называемая ныне *материальной импликацией. К с. 71.*

[20] Предлагаемое Фреге истолкование приведенной в этом абзаце двумерной формулы его исчисления — ошибочно, в чем нетрудно убедиться, например, записав ее в линейном виде $((B \supset A) \supset \Gamma)$ и составив для нее таблицу истинности. Эта формула отвергает не тот случай, о котором говорит Фреге, а следующие три: когда *В* и *А* утверждаются, а *Г* отрицается; когда и *В*, и *А*, и *Г* отрицаются; и когда *А* отрицается, *В* утверждается, а *Г* отрицается. На эту ошибку первым указал Э. Шрёдер в своей рецензии на *BS* (*Schröder* — Rezension, S. 88). В письме к Б. Расселу от 22 июня 1902 г. Фреге просит адресата вычеркнуть соответствующий абзац как ошибочный, присовокупив замечание, что ошибка эта не отражается на последующем изложении. *К с. 73.*

[21] Это знаменитое правило *modus ponens* (модус поненс): из посылок $B \supset A$ и B следует *А*; в современных обозначениях это правило имеет вид

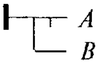
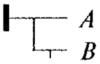
$$\frac{B \supset A,\ B}{A}\ ,$$

или в линейной записи: $B \supset A$, $B \vdash A$, где знак $\vdash$ выражает логическое следование заключения из посылок. *К с. 73.*

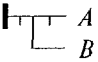
[22] Здесь Фреге изложил способ *сокращенной записи* умозаключений своего исчисления, предложив одновременно некий вариант того, что впоследствии получило название «анализа доказательства», то есть комментирования доказательственного процесса, не входящего в само доказательство. Посылки, которые не выписываются, но подразумеваются, обозначаются буквами X, XX, XXX; их сопровождают одинарные либо двойные двоеточия, причем первые служат указанию, что пропущена первая сверху посылка, а вторые — что пропущена вторая посылка и т.д.; умозаключение же *всегда* производится по правилу *modus ponens*, знаком чего выступает горизонтальная линейка, слева от которой помещаются упомянутые буквы. Двукратное применение этого правила маркируется двумя линейками. Очевидно, что этот способ сокращенной записи может быть распространен на фрегевские формулы любой сложности. *К с. 74.*

[23] Таким образом Фреге показывает, что в логической теории, которую он здесь развивает, то есть в логике высказываний (пропозициональной логике), — а она будет им строиться дедуктивно-аксиоматически (см. раздел II *BS*), — достаточно одного лишь правила вывода: *модуса поненса. К с. 75.*

[24] Присоединяя к «условной связи» — *импликации*, выражаемой союзом «если..., то», операцию отрицания (в современной записи обычно передаваемой знаком $\neg$), Фреге получает функционально полную систему связок (операторов) пропозициональной логики. Не используя категорию пропозициональной функции и не доказывая полноты системы связок $\{\supset, \neg\}$ (нечто подобное он сделает много позже, в своих «Логических исследованиях»), он ниже выражает через них основные операции пропозициональной логики, используя, как уже отмечалось, фактически метод *таблиц истинности*. В данном параграфе он показывает, что его формулы

 и 

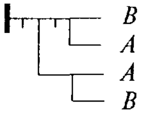
выражают, говоря языком современной логики, соответственно *антиконъюнкцию* (штрих Шеффера): $\neg(B\&A)$, что эквивалентно (равносильно) тому, что $(\neg B \vee \neg A)$, или, используя знак равенства как (мета)обозначение равносильности: $\neg(B\&A) = (\neg B \vee \neg A)$, и *дизъюнкцию* $(B \vee A)$; антиконъюнкция и дизъюнкция в совокупности, отмечает Фреге, дают то, что теперь называется *строгой дизъюнкцией* (или B, или A, но не то и другое вместе). *Конъюнкция* (точнее, конъюнктивная формула $(A\&B)$) передается на языке исчисления Фреге как

 ;

Фреге вводит трехчленные конъюнктивные и дизъюнктивные формулы, молчаливо предполагая ассоциативность соответствующих операций — это оправдано приводимым им их табличными заданиями. Что касается известной равносильности $(B \supset A) = (\neg B \vee A)$ — с ее помощью, как увидит читатель, Фреге впоследствии, в статье «О смысле и значении», объяснял смысл условной связи, — то она получается из его формулы  с помощью одного из правил Де Моргана и снятия двойного отрицания содержания A, что в современной записи имеет вид: $(B \supset A) \underset{\mathrm{Df}}{=} \neg(B \,\&\, \neg A) = (\neg B \vee \neg\neg A) = (\neg B \vee A)$. О введении и снятии двойного отрицания Фреге явно не говорит, хотя допустимость этого вытекает из его определений (а во втором разделе *BS* для этого вводятся нужные схемы аксиом). Далее Фреге приводит формулы, отвечающие двум «антиимпликациям»: $\neg(B \supset A) = (B\&\neg A)$ и $\neg(\neg A \supset \neg B) = (\neg A\&B)$. В заключение Фреге вводит формулу, выражающую *антидизъюнкцию* (штрих Нико). Сводку способов выражения основных пропозициональных операторов во фрегевском исчислении можно найти, в частности, в его статье «Булева вычислительная логика» (в наст. книге, с. 159—160).

Отметим, что Фреге предусмотрел возможность использования и базиса $\{\&, \neg\}$, — для союза «и», связывающего два содержания Γ и Δ, можно было бы тогда, говорит он, ввести особый знак, и выражение импликации через отрицание и конъюнкцию приобрело бы вид: $(B \supset A) = \neg (B \,\&\, \neg A)$, который ныне хорошо известен (и выше предполагался при демонстрации равносильности $(A \supset B)$ и $(\neg A \vee B)$).

Мы рекомендуем читателю выработать навык чтения фрегевских формул, имея в виду, что при их восприятии взгляд должен попеременно двигаться слева направо в случае *отрицаний* и снизу вверх в случае *импликаций*. Мы предлагаем читателю прочесть таким способом формулу

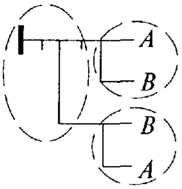


,

которая в современной записи имеет вид $((B \supset A) \,\&\, (A \supset B))$, что равносильно формуле $(B \equiv A)$, где $\equiv$ есть знак *эквиваленции* пропозициональной логики.

В фрегевской «рисунчатой» понятийной записи фрагменты, соответствующие операциям *конъюнкции*, *дизъюнкции* и *эквиваленции*, можно выделять, используя следующий прием, предложенный К. Тилем (*Thiel*, 1995, S. 32), — окружать замкнутой пунктирной линией типа круга либо овала соответствующие части формулы в записи Фреге. Тогда, например, структура формулы:

$((A \vee B) \,\&\, (B \supset A))$

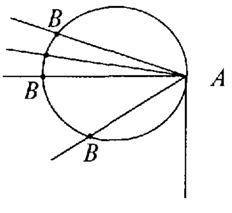


$(B \supset A)$

$(\neg A \supset B) = (A \vee B)$

становится более ясной. В известной бесскобочной записи, предложенной Я. Лукасевичем, этот прием особенно нагляден: мы легко получаем: К*АА*В*С*В*А*, где К — знак конъюнкции, А — дизъюнкции, С — импликации. *К с. 75.*

[25] Этот не слишком понятный *пример* требует разъяснения. Луч вращается вокруг точки *А*, лежащей на окружности (см. рис.).



Вращаясь, луч образует секущую, один конец которой — точка *А*, другой — точка *В*; в некоторый момент луч совпадает с диаметром окружности, проходящем через точку *А*. Когда он станет перпендикулярен диаметру, секущая превращается в касательную к окружности в точке *А*. Другой конец секущей, обозначенный поначалу как *В* и во всех остальных положениях отличный от *А*, совпадет с точкой *А*. *К с. 78.*

[26] Здесь Фреге не просто возвращается к тому различению «содержания» (мыслимого обстоятельства) и его знакового представления, с чего он начал свое изложение, — он фактически подходит к тому, что впоследствии оформилось в его *учение о смысле и значении* языковых выражений. Это отчетливо видно из геометрического примера, в котором один и тот же объект обозначается разными способами, имеющими различную смысловую нагрузку, а также из следующего затем пояснения возникающей в подобных случаях ситуации.

Следует заметить, что для обозначения *отношения равенства* (одинаковости, тождества) Фреге в *BS* использует знак $\equiv$, причем применяет его ко всем рассматриваемым им «онтологическим» сущностям — *предметам*, *функциям* и *суждениям*, а также к их обозначениям; в последующих работах он пользуется обычным знаком $=$. Идея равенства в логике, не отличающаяся в *BS* особой ясностью, получает уточнение в логико-семантических работах Фреге (см. вторую часть настоящей книги). *К с. 79.*

[27] Использованный Фреге способ объяснения понятий *функция* и *аргумент* в какой-то мере сходен с тем, как логический предтеча Фреге — Бернард Больцано (он родился в 1781 г., скончался же в год рождения иенского мыслителя) характеризовал введенное им понятие *вариации представлений.* Это понятие рассматривается во втором томе его фундаментального труда «Учение о науке» (Bolzano, Bd. II) — томе, носящем название «Учение об элементах» и трактующем знаменитые больцановские понятия («элементы») — *истина в себе*, *представление в себе, предложение в себе*, которые выступают как отвлеченные от человека абстрактные объекты. Метод, названный Больцано «вариацией представлений», используется им для исследования «предложений в себе»; он состоит в замене в предложении отдельных представлений на другие. Варьировать можно любые представления, кроме логических констант. Например, в предложении «*A* имеет *b*» можно заменять *A* и *b* (при фиксированном «имеет») другими представлениями; но *A* и *b* не являются взаимозаменимыми (см. об этом, например, кн.: *Федоров*). *К с. 79.*

[28] Фреге имеет в виду римского политика Марка Порция *Катона Младшего* (Cato, 95–46 г. до н.э.), правнука Катона Старшего. Будучи непримиримым противником Юлия Цезаря, Катон после поражения в сражении под г. Утика предпочел заколоть себя собственным мечом, чем сдаться в плен. Имя Катона Утического стало символом верности республиканской идее и отвержения диктатуры. *К с. 80.*

[29] В *BS* Фреге еще недостаточно четко различает функцию и аргумент (аргументы) как некие объективные сущности, с одной стороны, и имена функций (функциональные имена, функциональные выражения) и имена аргументов — с другой. Полная ясность в истолковании соответствующих понятий достигается им в последующих работах (см. особенно статью «Что такое функция?», перевод которой помещен во второй части настоящей книги). *К с. 80.*

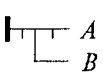
[30] Уже в этом обобщенном истолковании функций и аргументов, когда в качестве их значений могут фигурировать любые объекты, была заложена возможность противоречия, много позже открытого Б. Расселом. С. А. Яновская связывала эту противоречивость с фактически принимавшимся Фреге постулатом об универсальности предметной области в логике. Эти ее взгляды были положены в основу книги: *Бирюков Б. В.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике (М.: Высшая школа, 1963). В примечании 9 к выпущенному в Тбилиси переводу труда Фреге 1879 г. («Шрифт понятий...») авторы примечаний выводят парадокс Рассела, оперируя непосредственно аппаратом, изложенным Фреге в первых десяти параграфах этого труда; это натяжка, так как Фреге в «Исчислении понятий» не ввел еще — в явной форме, во всяком случае — ни понятия *пробега значений функции*, ни *принципа абстракции*, которые позволяют облечь данный парадокс во «фрегевскую» форму (см. Послесловие к данной книге). Правда, Расселова формулировка парадокса, названного его именем, — формулировка, которую он дал в знаменитом письме к Фреге (см. Введение в данной книге), — использует по существу лишь упоминаемое Фреге в *BS* допущение переменных для функций, и это говорит в пользу реконструкции грузинских авторов.

Как бы то ни было, фрегевское исчисление понятий, представлявшее собой, как убедится читатель (с учетом Послесловия в данной книге), расширенное исчисление предикатов с равенством, оказалось антиномичным. Но в нем можно выделить непротиворечивую часть, если ограничиться узким (без кванторов по предикатам) функциональным логическим исчислением — исчислением первого порядка (с единственным квантором — квантором общности: существование определялось Фреге через всеобщность и отрицание, см. ниже). *К с. 82.*

[31] Параграфы 11 и 12 исключительно важны. В первом из них Фреге вводит *квантор общности* («всеобщность», как он обычно говорит в своих работах). Формула $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{a})$ означает «для всякого $\mathfrak{a}$ имеет место $\Phi(\mathfrak{a})$», в современных обозначениях: $\forall \mathfrak{a} \Phi(\mathfrak{a})$. Вместе с квантором общности естественно вводятся и *связанные переменные*, обозначаемые малыми готическими буквами. В следующем параграфе через *всеобщность* и *отрицание* задается *квантор существования* $\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!- \Phi(\mathfrak{a})$, в современной записи: $\exists \mathfrak{a} \Phi(\mathfrak{a})$. При чтении фрегевских формул «существование» удобно выделять пунктирным кругом: $\vdash\!\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!- \Phi(\mathfrak{a})$. *К с. 82.*

[32] Ограничения, которые Фреге накладывает на обращение со связанными переменными, устраняет возможность того, что в современной логике называется *коллизией переменных*; опасность ее состоит в том, что она из истинности может порождать ложь. Ниже сходные ограничения вводятся и для малых латинских курсивных букв, которые Фреге вводит для упрощения записи формул, начинающихся с квантора общности. *К с. 83.*

[33] Изображая «логический квадрат», по сути дела, в его традиционном виде, Фреге не оговаривает, что в его системе из подчиняющих суждений рассматриваемой им структуры подчиненные суждения логически не следуют. Так, из суждения $\forall \mathfrak{a}\,(X(\mathfrak{a}) \supset P(\mathfrak{a}))$ не вытекает, что $\exists\, \mathfrak{a}\,(X(\mathfrak{a})\,\&P(\mathfrak{a}))$ (ср. фрегевское выражение конъюнктивной формулы

$(A\,\&B)$ в виде ).

Для получения соответствующей выводимости в исчислении Фреге (как и вообще в логике предикатов) нужно добавить посылку $\exists \mathfrak{a} X(\mathfrak{a})$, передающую аристотелевский постулат о непустоте термина, являющегося «субъектом» суждения. *К с. 86.*

[34] Вместо «контрарные» должно стоять «субконтрарные», что и отмечено в подстрочном примечании редактора *BS*-2, с. 23. *К с. 86.*

II. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ВЫВОД НЕКОТОРЫХ СУЖДЕНИЙ ЧИСТОГО МЫШЛЕНИЯ

II. Darstellung und Ableitung einiger Urtheile des reinen Denkens

[35] Фреге не поясняет, какие «принципы чистого мышления», не представимые в его исчислении, он имеет в виду. Как явствует из последующих его работ, к таковым, по-видимому, он относил, в частности, положения своего семантического учения, особенно ярко представленные в статье «О смысле и значении» (наст. книга, с. 230–246). *К с. 87.*

[36] Первый из двух приводимых Фреге «основных законов» для импликации является иным выражением принципа, о котором мы говорили в комментарии 19, «Истина следует из всего что угодно»: $\vdash (a \supset (b \supset a))$, который он ниже соответствующим образом и поясняет. Вводимый затем второй «основной закон» (формула 2) $\vdash ((c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a)))$ выражает самодистрибутивность «условной связи». Эти — и все последующие — свои «основные законы», относящиеся к пропозициональной логике, Фреге обосновывает, показывая, что они верны при любых значениях *истинно/ложно* входящих в них «содержаний»; законы же, относящиеся к отношению равенства (тождества), так же как и единственный «основной закон», касающийся квантора общности, он считает вытекающими из тех семантических соображений, которые он изложил в разделе I своего труда.

Малые латинские буквы в этом разделе *BS* выступают не как свободные переменные, значениями которых являются «содержания» (каковую роль эти буквы играли в первом разделе), а как *метаобозначения содержаний*. Подобная их трактовка оправдана тем, что в *BS* отсутствует правило подстановки. Таким образом, фрегевские «основные законы» являются тем, что ныне называется *схемами аксиом*. *К с. 87.*

[37] Используя эту таблицу, мы можем записать умозаключение, приводящее к формуле (3) (с. 90—92), в виде логического перехода:

$$\frac{(a \supset (b \supset a)),\ a}{(b \supset a)}\ ,$$

где горизонтальная черта, как и у Фреге, означает применение правила *modus ponens*. В дальнейшем мы лишь в отдельных случаях будем передавать формулы Фреге языком современной логики. Соответствующая работа уже проведена грузинскими переводчиками *BS* (см. комментарий 16), где почти вся символика Фреге заменена современной. *К с. 91.*

[38] Жирной линейкой Фреге отделяет одно умозаключение от другого. *К с. 94.*

[39] В параллель с данными фрегевскими выкладками приведем истолкование этих умозаключений в традиционной (нематематической) логике. В ней термином *modus ponens* обозначают следующую форму *гипотетического силлогизма*: «Если M есть N, то P есть Q. Но M есть N. Следовательно, P есть Q». Если обозначить «M есть N» буквой A, «P есть Q» — буквой B, то этот силлогизм запишется в виде: «Если A, то B. Но A. Следовательно, B», и мы получаем правило *modus ponens*, принятое в современной логике. *Modus tollens* в традиционной логике выглядит так: «Если M есть N, то P есть Q. Но P не есть Q. Следовательно, M не есть N», то есть (используем на этот раз современную символику): $A \supset B,\ \neg B \vdash \neg A$. Фреге связывает с термином *modus tollens* иное умозаключение: $(A \supset B) \vdash (\neg B \supset \neg A)$, то есть контрапозицию. *К с. 103.*

[40] «Второй основной закон для отрицания» $\vdash \neg\neg a \supset a$ исключительно важен, так как характеризует логическую теорию Фреге как *классическую* — в отличие от *интуиционистской*, где этот закон отсутствует. *К с. 104.*

[41] Фреге несколько «вольно» читает формулу 33: строго говоря, в ее истолковании выражения «*a* или *b*» и «*b* или *a*» должны обменяться местами. Но коммутативность дизъюнкции — связки *или* оправдывает фрегевский перевод. И этим — так же как и коммутативностью связки *и* (конъюнкции) — Фреге широко пользуется при «чтении» своих формул. *К с. 105.*

[42] Этим «основным законом» Фреге завершает построение той части своего исчисления, которая относится к логике высказываний — пропозициональной логике. Последняя задается шестью аксиомами, точнее схемами аксиом, в современной записи имеющими вид:

[1] $\vdash (a \supset (b \supset a))$	[4] $\vdash ((b \supset a) \supset (\neg a \supset \neg b))$
[2] $\vdash ((c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a)))$	[5] $\vdash (\neg\neg a \supset a)$
[3] $\vdash ((d \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (d \supset a)))$	[6] $\vdash (a \supset \neg\neg a)$,

и правилом вывода *modus ponens*.

Заметим, что по мере введения своих «основных законов» Фреге доказывает формулы, оказывающиеся после этого верными. Так, вслед за установлением законов, относящихся к двойному отрицанию (§ 19), он показывает доказуемость формулы (47), выражающей схему *рассуждения по случаям*, которой в традиционной логике соответствует так называемая *простая конструктивная дилемма*: «*c* или *b*; если *b*, то *a*; если *c*, то *a*; следовательно, *a*».

Фрегевское исчисление высказываний *дедуктивно полно*, хотя и избыточно. В частности, [3] следует из [1] и [2]. Доказательство этого факта легко получить, если учесть, что «основные законы» [1] и [2], как теперь известно, служат доказательству *теоремы о дедукции*, а ее применение позволяет без труда обосновать схему аксиом [3]. Дедуктивная полнота фрегевской системы пропозициональной логики следует, например, из того, что в этой системе выводима формула [3'] $((\neg a \supset \neg b) \supset (b \supset a))$, выражающая «обратную» контрапозицию (соответствующее доказательство можно найти, например, в кн.: *Franz von Kutschera.* Gottlob Frege. Eine Einfürung in sein Werk. Walter de Gruyter.

Berlin; New York, 1989, S. 29—30; в дальнейшем эта книга обозначается: ***Kutschera***); схема аксиом [3'] отличается тем, что если ее присоединить к [1] и [2], то получится дедуктивно полная система логики высказываний, то есть система, в которой каждая выводимая формула (тождественно) истинна (в 1921 г. эту систему предложил Я. Лукасевич как упрощение фрегевской пропозициональной логики).

Дедуктивную полноту аксиоматически строящегося исчисления высказываний Фреге не доказывал (впервые это сделал Э. Пост в том же 1921 г.), но можно считать, что он доказал его *непротиворечивость*; данный факт следует из того, что семантика фрегевских пропозициональных операций, как показано в *BS*, определяет (тождественную) истинность аксиом (схем аксиом) фрегевского пропозиционального исчисления, а модус поненс эту истинность сохраняет. Таким образом, в логике высказываний Фреге выводимы только истинные суждения, что и служит доказательством ее непротиворечивости.

Поражает логическая интуиция Фреге, проявившаяся, в частности, в понимании важности упоминавшегося выше принципа «Истина следует из всего что угодно» и «формульного» образа ослабленного (за счет введения условия *c*) модуса поненса (схемы аксиом [1] и [2]). Значимость их в том, что в аксиоматически строящемся исчислении высказываний они позволяют доказывать такое мощное средство логической выводимости, как упомянутая выше (мета)теорема о дедукции. Вместе с тем обращает на себя внимание тот факт, что Фреге не ставит вопроса о *разрешимости* своей пропозициональной логики: не предъявляет метода, позволяющего отделять доказуемые формулы его логического языка от недоказуемых. *К с. 107.*

[43] Здесь Фреге формулирует схему аксиом (формула 58), служащую тому, что теперь называется *удалением квантора общности*. В самом деле, фрегевская формула имеет вид: $\vdash (\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \supset f(c))$. И если дан антецедент этой импликативной формулы, то применение правила *modus ponens* позволяет «снять» всеобщность и получить $f(c)$. Что касается *введения* квантора общности, то для этого Фреге не формулирует особого «основного закона», предполагая, очевидно, что здесь достаточно разъяснений категории *всеобщности*, данных им в первом разделе его труда.

Стоит особо указать, что во втором разделе *BS* квантор общности к функциям не применяется, а потому изложенную в нем аксиоматическую теорию, как мы уже говорили (см. комментарий 30), можно рассматривать как узкое исчисление предикатов (исчисление предикатов первого порядка) с равенством, свойства которого задаются формулами 52 и 54 — «основными законами» $\vdash ((c \equiv d) \supset (f(c) \supset f(d)))$ и $\vdash (c \equiv c)$; последняя формула считается выражающей *принцип тождества*. *К с. 110.*

[44] *Felapton* и *Fesapo* — способы (модусы) умозаключения в *категорической силлогистике*, построенной Аристотелем. Латинские названия этих модусов — как и всех прочих форм умозаключения этой главной части логической теории великого эллина — были придуманы в средние века схоластическими учеными. Большинство букв в этих словах, а также расположение букв имеют вполне определенный смысл. Так, гласные буквы указывают на то, какими — общеутвердительными, общеотрицательными, частноутвердительными или частноотрицательными являются две посылки силлогизма и его заключение. Первая гласная буква в названиях этих модусов — *e* указывает на то, что первая (так называемая бóльшая) посылка есть общеотрицательное суждение, вторая гласная буква — *a* означает, что вторая (меньшая) посылка является общеутвердительным суждением, а третья гласная буква — *o*, что заключение должно быть суждением частноотрицательным.

Felapton — это одно из силлогистических умозаключений так называемой третьей фигуры, совершающееся по схеме: «Ни одно M не есть P. Все M суть S. Следовательно, некоторые S суть P». *Fesapo* относится к силлогизмам четвертой фигуры, он имеет вид: «Ни одно P не есть M. Все M суть S. Следовательно, некоторые S не суть P». Поскольку суждения форм «Ни одно M не есть P» и «Ни одно P не есть M» имеют, по существу, одинаковый смысл, они взаимно переводимы с сохранением истинности — *salva veritate*. В результате модус *Fesapo* может быть сведен к модусу *Felapton*, и наоборот.

Каждый модус категорического силлогизма — и его реализации в конкретных рассуждениях — может быть записан двояко: как правило вывода и как единое условное суждение, консеквентом которого является заключение силлогизма. В аристотелевском изложении силлогистики из-за особенностей естественного языка, на котором излагал свою теорию Стагирит, это различие размыто. Вообще, в конкретных рассуждениях провести такого рода дистинкцию затруднительно, но при изложении *теории* силлогистических выводов его приходится делать.

В традиционной (доматематической и нематематической) логике силлогизмы представляются в виде правил вывода. Наилучшим отечественным руководством здесь является книга: *Г. И. Челпанова*. «Учебник логики». Эта книга известного русского психолога (даты его жизни: 1862—1936) издавалась до революции девять раз, была переиздана в советское время (1946) с сокращениями, вызванными идеологическими причинами, в полном же виде снова увидела свет лишь в 1994 г. (М.: Издательская группа «Прогресс»; эту книгу мы будем обозначать: ***Челпанов***). К книге Челпанова мы и отсылаем читателя, желающего более подробно ознакомиться с категорической силлогистикой в ее традиционной, столетиями культивировавшейся форме. Кроме того в комментариях к русскому переводу «Первой аналитики» Аристотеля (труда, где излагается его силлогистическая теория) — имеется в виду книга: *Аристотель.* Аналитики первая и вторая, М., 1952 — читатель в примечаниях может найти конкретные примеры умозаключений по всем модусам силлогизмов, которые изучал Аристотель (модусы четвертой фигуры он не рассматривал, считая, по-видимому, соответствующие умозаключения неестественными для мышления; эти модусы были введены последователями Аристотеля, стремившимися к полной законченности его теории); в примерах, фигурирующих в упомянутом издании «Аналитик» Стагирита, модусы трактуются как *правила вывода.*

Иную позицию в реконструкции аристотелевской силлогистики занял Ян Лукасевич (J. Lukasiewicz, 1878—1956). В посвященной этому вопросу книге (вышла на английском языке в 1951 г.; русский перевод: «Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики» [М., 1956]) Лукасевич представляет модусы силлогизмов в виде *импликативных суждений.*

Покажем теперь, как Фреге трактует рассуждение, соответствующее двум упомянутым выше модусам. Предварительно заметим, что Аристотель принимал во внимание лишь *общие* и *частные* суждения и не распространял свою теорию на суждения *единичного* характера, то есть суждения, имеющие вид «*Это* S есть (не есть) P». В примере, который приводит Фреге, такую форму имеет суждение «Этот страус есть птица». В ходе последующего развития силлогистической теории единичные суждения стали рассматриваться наряду с общими, то есть считаться неучитываемыми в теории их частными случаями; подобная их трактовка была оправдана тем, что она не нарушала теорию Аристотеля.

Фреге, для которого существовало лишь одно правило вывода — модус поненс, естественно истолковывал силлогистические умозаключения как *условные суждения.* И с учетом сказанного в предшествующем абзаце мы должны были бы записать приводимый им пример силлогистического умозаключения в следующем виде: «Если ни один страус (M) не может летать (P) и все страусы (M) суть птицы (S), то некоторые птицы (S) не летают (P)». Поскольку Фреге отвергает принятую в традиционной логике субъектно-предикатную структуру суждений, для него не существует различия как между суждениями «Ни один страус не может летать» и «Ни одно летающее существо не есть страус», так и между суждениями «*Этот* страус не может летать» и «Ни одно летающее существо не есть *этот* страус». Поэтому в его исчислении исчезает различие между упоминаемыми им модусами.

В своем подходе к силлогистике Фреге — в полном соответствии с духом логики предикатов — не может не принимать во внимание *единичности* тех или иных суждений. В данном случае это проявляется в записи формулы 59, имеющей вид: $(g(b) \supset (\neg f(b) \supset \neg \forall \mathfrak{a}\, (g(\mathfrak{a}) \supset f(\mathfrak{a}))))$, где $g(b)$ и $f(b)$ — единичные суждения. Учитывая, что $\neg\, \forall \mathfrak{a} \Phi(\mathfrak{a}) = \exists\, \mathfrak{a} \neg \Phi(\mathfrak{a})$, а два антецедента этой формулы можно соединить конъюнктивно, мы получаем $\vdash ((g(b) \& \neg f(b)) \supset \exists\, \mathfrak{a}\, (g(\mathfrak{a}) \& \neg f(\mathfrak{a})))$, что полностью соответствует примеру Фреге. Очевидно, что это лишь частный случай тех модусов, о которых говорит автор *BS*. *К с. 111.*

[45] *Barbara* — модус первой фигуры категорического силлогизма, пользующийся наибольшей известностью. Он имеет вид: «Если все M суть P и все S суть M, то все S суть P»; в случае единичного S он переходит в форму, где меньшая посылка — «*Это* S есть M», а заключение — «*Это* S есть P». Очевидно, что фрегевское суждение 62: $\vdash (g(x) \supset (\forall \mathfrak{a}\, (g(\mathfrak{a}) \supset f(\mathfrak{a})) \supset f(x)))$, или в виде правила логического перехода $g(x), \forall\, \mathfrak{a}\, (g(\mathfrak{a}) \supset f(\mathfrak{a})) \vdash f(x)$, не соответствует этой форме — хотя бы потому, что в формуле 62 фигурируют аналоги не *трех* терминов (S, M, P), требуемых силлогистической теорией, а только *два*. На деле у Фреге здесь предполагается удаление квантора общности и после этого применение модуса поненса. Поэтому, наверное, Фреге и говорит, что данная формула *заменяет* (ersetzt) для мышления модус *Barbara*. Приводимая далее формула 65: $\vdash (\forall \mathfrak{a}(h(\mathfrak{a}) \supset g(\mathfrak{a})) \supset (\forall \mathfrak{a}(g(\mathfrak{a}) \supset f(\mathfrak{a})) \supset (h(x) \supset f(x))))$ также не соответствует этому модусу: заключение $(h(x) \supset f(x))$ является единичным суждением, а по схеме этого модуса оно должно быть общим, то есть иметь вид $\forall \mathfrak{a}(h(\mathfrak{a}) \supset f(\mathfrak{a}))$. Таким образом, и в данном случае формула Фреге лишь *заменяет* модус Аристотеля, а не служит его точным переводом, так как в ней имеет место снятие квантора общности у заключения, что выходит за рамки данного модуса. *К с. 112.*

III. КОЕ-ЧТО ИЗ ОБЩЕГО УЧЕНИЯ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

III. Einiges aus einen allgemeinen Reihenlehre

[46] Напомним (см. комментарий 13), что $\Vdash$ есть знак равенства ($\equiv$) по определению. Правая часть формулы (69) — она стоит после знака равенства — вводится как сокращенная запись левой части. В настоящее время в аналогичных случаях часто используют знаки = Df (или $\overset{\mathrm{Df}}{=}$, или $\underset{\mathrm{Df}}{=}$). Однако, в отличие от фрегевской записи, определяемое выражение помещается слева, а определяющее справа от него. *К с. 115.*

[47] Фреге был достаточно знаком с логическим учением И. Канта, особенно в той его части, которая касается математики. В «Критике чистого разума» и ряде других сочинений великого философа различаются обычная («общая») логика — Кант называет ее также *формальной* — и логика *трансцендентальная*. Последняя направлена на выявление *априорных* (доопытных и внеопытных) условий знания, сообщающих последнему *необходимость* и *всеобщность*. Знание же, по Канту, выражается в суждениях, имеющих традиционную субъектно-предикатную структуру. Различаются также суждения *аналитические* и *синтетические*. В предикате (логическом сказуемом) аналитического суждения происходит раскрытие того, что уже содержится в его субъекте (логическом подлежащем), как это, согласно Канту, имеет место в суждении «Все тела протяженны»; суждения такого рода носят поясняющий характер. Аналитические суждения в кантовском понимании *не расширяют* знание. Таковое возможно только с помощью синтетических суждений, ибо в каждом из них осуществляется синтез знания, заключенного в субъекте, и знания, заключенного в предикате (таково, по Канту, суждение «Некоторые тела твердые»). Кант различал, далее, суждения *априорные* (*a priori*) и *апостериорные* (*a posteriori*). В суждениях последнего рода синтез субъекта и предиката основывается на опыте, как это имеет место в суждении «Некоторые лебеди — черные». Аналитическое суждение не может быть апостериорным, синтетическое же суждение — как апостериорным, так и априорным; таково, по Канту, суждение «Все тела протяженны». В априорных суждениях связь субъекта и предиката мыслится предшествующей опыту и от него не зависящей (пример Канта: «Все, что случается, имеет причину»).

Кант придавал большое значение синтетическим суждениям *a priori*, так как именно они, согласно его логическому учению, характерны для математики и теоретического естествознания. Рассматривая вопрос, как возможны такого рода суждения в математике, он связывал таковую с чувственным созерцанием пространства (геометрия) и чувственным созерцанием времени (арифметика, где счет предполагает временнýю последовательность шагов). При этом Кант считал пространство и время *априорными* формами чувственности. Именно они, согласно Канту, придают суждениям математики безусловную *общность* и *необходимость*.

Фреге отверг Кантово представление об априорной синтетичности суждений арифметики (и значит, математического анализа), но принял его взгляд на суждения геометрии (разумеется, не согласившись с Кантовым пониманием структуры суждений). В «Основаниях арифметики» (1884) Фреге критически проанализировал различные аспекты учения Канта о математических суждениях, констатируя, что последний недооценивал познавательное значение аналитических суждений и ошибался, считая, что без опоры на чувственное созерцание не может быть дан ни один предмет, в том числе и в математике. Вместе с тем Фреге высоко оценил Кантово различение аналитических и синтетических суждений (*GL*, S. 17–19, 100–103 u.a.). О логико-гносеологическом учении Канта см., например: История философии: Запад — Россия — Восток. Кн. 2: Философия XV–IX вв./Под ред. Н. В. Мотрошиловой. М., 1996 (см. с. 354–375); логическая теория Канта кратко, но четко изложена в ст.: *Асмус В.* Кант//Философская энциклопедия. М., 1962. Т. 2 (см. с. 420–421). *К с. 115.*

[48] Фреге весьма последователен в конструировании знаков своего формульного языка. Использование удвоенной вертикальной черты в знаке $\Vdash$ он мотивирует тем, что дефиницию можно понимать как содержащую два суждения: одно стоит слева, другое справа от знака $\equiv$, причем выражение, стоящее справа, получает статус суждения именно благодаря соответствующей дефиниции. *К с. 115.*

[49] Переведем дефиницию § 24 на современный логический язык:

$$\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right. = \mathrm{Df}\ (\forall\ \mathfrak{d}(F(\mathfrak{d}) \supset \forall \mathfrak{a}(f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \supset F(\mathfrak{a})))).$$

Как явствует из последующих разъяснений, это означает следующее — для любого предмета $\mathfrak{d}$, обладающего свойством F: если применение процедуры f к $\mathfrak{d}$ имеет результатом $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}$ обладает свойством F. В левой части этой дефиниции, в конструкции $\begin{array}{c}\delta\\ |\\ \alpha\end{array}$, буква α указывает предмет, на который переносится (благодаря процедуре f) свойство F, а буква δ — (произвольный) предмет, с которого, благодаря применению f, происходит такого рода перенос. Быть может, роль δ и α станут яснее, если вместо $|$ мыслить стрелку $\downarrow$, что даст $\begin{array}{c}\delta\\ \downarrow\\ \alpha\end{array}$. Если использовать, отступая от фрегевской записи, греческие буквы в *определяющей* части дефиниции § 24, то мы получим: $(\forall\ \delta(F(\delta) \supset \forall\ \alpha(f(\delta,\alpha) \supset F(\alpha))))$.

Отсюда понятно, почему Фреге ниже называет бессмысленной запись

$$\begin{array}{c}\alpha\\ |\\ \delta\end{array}\left(\begin{array}{l}F(\alpha)\\ \\ f(\delta,\alpha)\end{array}\right. .$$

Ибо попытка ее «расшифровки» в стиле фрегевской дефиниции § 24 привела бы к формуле, не позволяющей переносить свойство F с предмета на предмет. Но если в левой ее части, то есть в записи $\begin{array}{c}\alpha\\ \downarrow\\ \delta\end{array}$, обменять местами греческие буквы, то мы получим осмысленную формулу.

Малые греческие буквы являются у Фреге дефиниционалыными метаобозначениями, их смысл — он это особо подчеркивает — зависит только от их взаиморасположения. *К с. 115.*

[50] В следующей ниже формуле, как это вытекает из дефиниции § 24, буквы α и δ слева от скобки надлежит обменять местами. *К с. 116.*

[51] В формуле $\begin{array}{c|l} \alpha & \Sigma(\alpha) \\ | & \\ \delta & \Lambda(\delta,\alpha) \end{array}$ α и δ слева от скобки должны быть обменены местами, и тогда она будет соответствовать «расшифровывающей» ее формуле, в современной записи имеющей вид: $(\forall \mathfrak{d}(\Sigma(\mathfrak{d}) \supset \forall \mathfrak{a}(\Lambda(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \supset \Sigma(\mathfrak{a}))))$, что читается так: для всякого $\mathfrak{d}$, если $\mathfrak{d}$ есть человек, то всякий $\mathfrak{a}$, который является сыном человека $\mathfrak{d}$, есть человек. *К с. 116.*

[52] Если для определения понятия *свойство F наследуемо в f-последовательности* (§ 24) Фреге не требовался выход за рамки логики предикатов первого порядка, то уже следующее важное определение теории последовательностей — дефиниция (§ 26) отношения *у следует в f-последовательности за х,* то есть y может быть получен, исходя из x, за конечное число шагов, быть может даже за один шаг, формула (76) $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$ — предполагает такой выход. Поэтому Фреге в определяющей части дефиниции (76) использует квантор общности по свойству $\mathfrak{F}$, то есть фрегевская логика расширяется до исчисления предикатов второго порядка. То же самое относится и к дефиниции (§ 29, формула (99)) отношения *принадлежности элемента z к f-последовательности, начинающейся с х*:

$$\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\approx}} f(x_\gamma, y_\beta),$$

означающего, что z, исходя из x, можно получить за конечное (быть может даже нулевое) число шагов, поскольку при определении этого отношения использовалось выражение $\underset{\beta}{\overset{\gamma}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$, определяемое дефиницией § 26. Следствия, вытекающие из свойств этих отношений, также принадлежит расширенной логике предикатов. *К с. 119.*

[53] В этом примечании Фреге указывает на то, что он учитывает различные отношения, которые в настоящее время называют *отношениями порядка.* К ним относятся упомянутое Фреге родословное древо, отношение субординации и др. Эти отношения таковы, что не для любых пар x, y в f-последовательности верно, что либо y следует за x (и значит, x предшествует y), либо x следует за y (то есть y предшествует x). Когда «следование за» (соответственно, «предшествование») имеет место для любых пар x, y, то возникает отношение линейного порядка. Кольцеобразное движение может быть проиллюстрировано любым циклически направленным графом, например, когда из вершины *а* достижима вершина *б*, из *б* — вершина *в*, из *в* — вершина *г*, а из *г* — вершина *а*. *К с. 120.*

[54] Фреге имеет в виду метод доказательства, называемый ныне полной (совершенной) *математической индукцией.* Во времена Фреге доказательства по индукции связывали с именем швейцарского математика Якова Бернулли (1654—1705), так как полагали, что он был первым, кто стал ими пользовался. Но первенства Бернулли здесь не было. На деле история индуктивных математических доказательств уходит в античную древность. Что касается Нового времени, то считается, что «впервые точно определил и применил их для доказательства» французский математик и философ Блез Паскаль (1823—1662) (Математический энциклопедический словарь. М., 1988. С. 735). *К с. 122.*

[55] Не ясно, что в этом примечании хотел сказать Фреге. В § 11 он действительно вводит квантор общности: $\forall \mathfrak{a} \Phi(\mathfrak{a})$ в виде $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \Phi(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — предметная переменная. Квантор же общности по *свойству* $\mathfrak{F}$ Фреге использовал впервые в § 26 (формула 76). *К с. 126.*

[56] Левая часть дефиниции (99), согласно определениям Фреге, может быть прочитана так: «Если неверно, что в f-последовательности z следует за x, то z совпадает с x». Контрапозиция приводит к суждению: «Если z не совпадает с x, то z в f-последовательности следует за x». Учитывая, что это можно понимать как дизъюнктивное суждение, мы получаем: «z совпадает с x или z в f-последовательности следует за x», то есть то, что ниже сказано у Фреге. *К с. 129.*

[57] Напоминаем (см. выше, комментарий 22), что удвоенная горизонтальная линейка означает сокращенную запись двух умозаключений: в одном предполагается использование формулы 96, а в другом — формулы 92 при соответствующей замене одних латинских букв другими латинскими буквами. *К с. 130.*

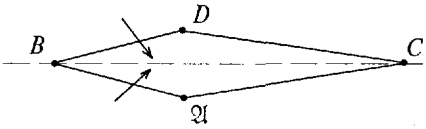
[58] Более полное словесное выражение левой части дефиниции (115) выглядит так. Пусть для любого $\mathfrak{d}$ из того, что $\mathfrak{e}$ есть результат применения процедуры f к $\mathfrak{d}$, и из того, что $\mathfrak{a}$ есть результат применения f к $\mathfrak{d}$, следует, что $\mathfrak{a}$ совпадает с $\mathfrak{e}$; тогда мы говорим: «процедура f однозначна». Взятое в кавычки выражение является, по существу, сокращением левой части дефиниции, так что ее правую часть, то есть $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{|}}\ f(\delta, \varepsilon)$, можно передать словами: «процедура f, примененная к δ, однозначно порождает ε». Использование стрелки в записи $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\downarrow}}$ делает сокращение Фреге более понятным. *К с. 134.*

ПРИМЕНЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ

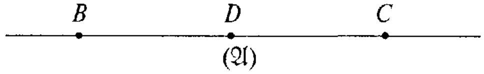
Die Anwendungen der Begriffsschrift

Статья воспроизводит доклад Фреге на заседании Иенского Медицинского и естественно-научного общества (Jenaische Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft), сделанный им 24 января 1879 г. Впервые опубликована в журнале: Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. XIII, 1979, Supplement II, S. 29–33. Отдельно изданный оттиск этого доклада датирован как «заседание 10 января». Перевод сделан с репрографического переиздания в *BS*-2, в которое внесено исправление, сделанное в оттиске от руки [возможно, самим Фреге].

[1] Конгруэнтность пар точек (A, B) и (C, D) — Фреге пишет AB и CD — означает здесь, что отрезки AB и CD имеют равную длину (то есть $|AB| = |CD|$) и могут быть совмещены поступательными перемещениями и поворотами. В примере Фреге фигурируют четыре точки: B, C, D и $\mathfrak{A}$. Они образуют четырехугольник, так как в каждой из этих точек сходятся два отрезка:



При этом $|BD| = |B\mathfrak{A}|$, $|CD| = |C\mathfrak{A}|$. Проведем прямую BC (обозначена пунктиром) и повернем отрезки BD и $B\mathfrak{A}$ вокруг точки B до совмещения каждого из них с прямой BC. Получим



Точки D и $\mathfrak{A}$ совпадут в силу того, что $|BD| = |B\mathfrak{A}|$ и $|CD| = |C\mathfrak{A}|$. *К с. 143.*

[2] Относительно обозначения отношения «y принадлежит f-последовательности, начинающейся с x» см. § 29 «Исчисления понятий» и наше разъяснение к нему (комментарий 52). *К с. 143.*

[3] Предыдущая формула в немецком тексте содержит опечатку, так как в ней отсутствует штрих отрицания, который должен стоять в ее начале. *К с. 145.*

[4] В 1770 г. английский математик У. Э. Варинг (1734—1798) сформулировал теоретико-числовую проблему: всякое натуральное число представимо суммой четырех квадратов, девяти кубов, двенадцати четвертых степеней. В общем виде проблема Варинга формулируется так: для любого $n \geq 2$ существует такое $k = k(n)$, зависящее только от n, что любое натуральное число есть сумма k n-х степеней натуральных чисел (см., например: *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. 2-е изд. М.; Л., 1948).

Число 30 представимо в виде суммы четырех квадратов: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16$.

Формулировкой теоремы Варинга в качестве примера Фреге пользовался и в *BS* (см. наст. книгу, с. 80). *К с. 146.*

БУЛЕВ ЛОГИЧЕСКИЙ ФОРМУЛЬНЫЙ ЯЗЫК И МОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift

Статья, сохранившаяся в архивном наследии Фреге и впервые опубликованная в книге: Nachgelassene Schriften, 1969; S. 53—59; она перепечатана во втором издании этой книги (содержащем исправление опечаток и новые важные материалы), выпущенном в 1983 г.; напоминаем, что ссылаясь на это издание, мы обозначаем его как ***NS*-2**, в отличие от первого издания, которое обозначается как ***NS***. Мы также пользуемся для обозначения этих изданий термином «Наследие» (Фреге).

Издатели архивных материалов Фреге считают, что данную статью с большой вероятностью можно отождествить с текстом, который Фреге отправил в журнал *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie*, издававшийся Р. Авенариусом совместно с М. Гейнце и В. Вундтом. Р. Авенариус возвратил Фреге его текст вместе с письмом от 20.4.1882 г. (оно опубликовано в издании Briefwechsel, S. 1. Авенариус в этом письме отказывает Фреге в публикации его текста, называя фрегевскую статью «Boole's logische Formelsprache». По письму Авенариуса издатели и произвели датировку данной статьи, отнеся ее к 1882 г. (см. *NS*-2, S. 53). Перевод выполнен по публикации в *NS*-2.

[1] Издатели *NS* и *NS*-2 полагают, что Фреге имеет в виду журнал Р. Авенариуса (см. «Наследие», с. 53). *К с. 147.*

[2] Джордж *Буль* (G. Boole, 1815—1864) — английский математик и логик. Два его основных труда по математической логике: «Математический анализ логики» (The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning. Cambridgt, 1847; при дальнейших упоминаниях: ***Boole*, 1847**) и «Исследование законов мышления» (An Invesigation of the Lows of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. London, 1854; при дальнейших ссылках: ***Boole*, 1854**). *К с. 147.*

[3] Комментаторы издания «Наследия» Фреге указывают, что в первых шести томах журнала Авенариуса (1877—1782) о булевской логике заходит речь во многих статьях: *A. Riel.* Die englische Logik der Gegenwart (Bd. 1, S. 50—80); *W. Schlötel.* Eine Berichtigung zu dem Aufsatz von A. Riel (Bd. 1, S. 455—457; *его же*, Eine Selbstberichtigung (Bd. 1, S. 614 f.); *A. Riel,* Рецензия на книгу: *F. A. Lange,* Logische Studien. Ein Beitrag zur Neubegründung der formalen Logik (Iserlohn, 1877) (Bd. 2, S. 240—250, особенно S. 249 f.); *S. Günther*, Рецензия на книгу: *E. Schröder.* Der Operationskreis des Logikkalkuls (Leipzig, 1877) (Bd.3, S. 111—119); *B. Erdmann,* Logische Studien I (Bd. 6, S. 28—61, особенно же S. 32, 49 f.) (*BS*-2, S. 53, примечание). На этом фоне отказ в публикации работы Фреге выглядит удивительной несправедливостью. *К с. 147.*

[4] Поскольку фрегевское изложение логической теории Буля не дает достаточного о ней представления, мы ниже осветим ее основные положения.

В первом разделе труда «Математический анализ логики» Буль излагает *исчисление классов*. Обозначая классы буквами x, y, z,, он вводит на множестве классов операции: (1) $x{\cdot}y$ — умножение (пересечение) двух классов, порождающее класс, состоящий из тех и только тех элементов, которые принадлежат и классу x, и классу y; (2) $x + y$ — суммирование (объединение) *непересекающихся* классов x и y; эта операция порождает класс, который состоит из всех элементов класса x и всех элементов класса y; (3) $x - y$, или вычитание класса y из класса x; эта операция определена, если y является подклассом класса x, то есть если каждый элемент класса y есть элемент класса x; тогда разность $x - y$ состоит из всех тех и только тех элементов класса x, которые не принадлежат классу y; при этом если $y = x$, то $x - y$ есть пустой класс.

Буль указывает простейшие свойства введенных им операций: $x{\cdot}y = y{\cdot}x$; $x + y = y + x$ (коммутативность операций пересечения и объединения двух классов); $x{\cdot}x = x$ (идемпотентность операции пересечения классов); если классы x и y не пересекаются (то есть не имеют общих элементов), то $z(x+z)$ влечет равенство $x{\cdot}z + z{\cdot}y$, но из того, что класс $x{\cdot}z$ не пересекается с классом $y{\cdot}z$, не следует, что x не пересекается с y; поэтому из $z{\cdot}x + z{\cdot}y$ не следует, что x не пересекается с y. Пустой класс обозначается символом 0, универсальный класс («мир речи», «универсум рассуждения» — universe of discourse) — символом 1. При этом Буль выбирает универсальный класс в зависимости от обстоятельств: если x, y, z — классы чисел, то 1 может означать, например, совокупность всех натуральных, целых или вещественных чисел. Если же x, y, z — какие-то группы людей, то в качестве универсума принимаются, например, «все люди», или «все британцы», или «все жители Лондона» и т.п. Если универсум 1 выбран, то каждый элемент x однозначно задает свое дополнение — совокупность элементов «универсума рассуждения», не принадлежащих классу x; его Буль обозначает формулой $1 - x$.

В главе IV трактата «Исследование законов мышления» Буль подразделяет предложения на два типа: ***первичные*** (primary) и ***вторичные*** (secondary). К первому типу он относит предложения, в которых речь идет о соотношениях между понятиями (классами). Предложения второго типа выражают связи между истинностью (или ложностью) первичных предложений. Так, если X, Y, Z — предложения первого типа, то предложения «X истинно», «Неверно, что истинно Y», «Если истинно X, то истинно Y или Z» — второго типа (An Invesygation..., p. 172). Каждому предложению X Буль ставит в соответствие *промежуток времени*, в течение которого X истинно, обозначая его буквой x; тогда $1 - x$ есть отрезок времени, в течение которого x ложно; 1 означает «всегда», а 0 — «никогда». Если класс x является подклассом класса y, то Буль записывает это в виде $x = vy$, где v — некоторый неопределенный класс. Предложению «Если X, то Y» как раз и соответствует такое равенство, поскольку промежуток времени, когда истинно X, содержится в промежутке, в течение которого истинно предложение Y.

В том же 1847 г., когда Буль выпустил свой первый логический труд, в Лондоне вышел трактат Августа *Де Моргана* (A. De Morgan, 1806–1871) «Формальная логика» (Formal Logic, or the Calculus of Inference, Necessary and Probable), в котором, в частности, вводились операции над объемами понятий (классами), полностью соответствующие теоретико-множественным операциям пересечения, объединения (*любых* классов), а также дополнения класса до универсума; отметим, что термины «универсум» и «дополнение» (класса) принадлежат именно Де Моргану.

Операции над классами, помимо теоретико-множественного истолкования, могут быть интерпретированы в терминах логики высказываний; при этом операции пересечения соответствует союз «и» (то есть операция *конъюнкци*), операции дополнения — отрицание «не-», операции объединения — союз «или» (*дизъюнкция*). Поскольку Буль разрешал объединять лишь непересекающиеся классы, его «сложению» соответствует разделительное «или» (*строгая дизъюнкция*), Де Морган же принимает более распространенный вариант — неразделительное «или», причем операция объединения, как мы отметили выше, определена у него для любых классов. Система, в которой имеются 1 и 0, а также операции «$\cdot$», «+», «—» (дополнение, отрицание) в настоящее время носит название *булевой алгебры*. Поскольку «или» у Буля разделительное, его система, строго говоря, *не является* булевой алгеброй. К сожалению, это обстоятельство не всегда принимается во внимание. Заметим, что в историко-логической литературе бытует мнение, будто булева алгебра впервые появляется у Ст. Джевонса (см. ниже комментарий 6), в то время как она была введена Де Морганом много лет ранее. *К с. 147.*

[5] См. статью Фреге «Булева вычислительная логика и мое исчисление понятий». *К с. 147.*

[6] Уильям Стенли *Джевонс* (W.S. Jevons, 1835–1892) — профессор логики, философии и политической экономии в Манчестере, затем в Лондоне. Его основные сочинения по логике: «Чистая логика» (Pure Logoc, or The Logic of Quality apart from Quantity, London, 1964), «Основы науки» (The Principles of Science, a Treatise on Logic and Scientific Method, London, 1874; русск. перев.: Основы науки. Трактат о логике и научном методе. СПб., 1881). На множестве классов Джевонс определяет операции: (1) $x{\cdot}y$ — пересечения классов x и y, соответствующее по смыслу союзу «и»; (2) — объединения *любых* классов x и y, соответствующее неразделительному «или»; (3) $\bar{x}$ — дополнения класса x до универсума, обозначаемого единицей; 0 означает пустой класс, «=» — отношение тождества (равенства). Джевонс принимает законы тождества $x = x$, противоречия $x{\cdot}\bar{x} = 0$ и исключенного третьего $x + \bar{x} = 1$, а также принцип замещения равных. Заметив, что набор конституент (об этом понятии см. комментарий 29 к статье «Булева вычислительная логика и мое исчисление понятий») зависит только от числа заданных классов и может быть использован для решения разных по содержанию задач, в которых фигурирует одно и то же число классов, Джевонс построил логическую машину, «способную» решать задачи, условия которых включают до четырех классов (см. гл. «Математическая логика»//Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей/Под ред А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1978. С. 37–30). *К с. 148.*

[7] Эрнст *Шрёдер* (E. Schröder, 1841–1902) — немецкий алгебраист и логик. В его работах логика классов – *алгебра логики*, которую он называл также *логическим исчислением* (Logikkalkül) получила дальнейшее развитие; ему же принадлежит и термин «исчисление высказываний» (Aussagenkalkül). На множестве классов он использовал операции «·» (пересечение), «+» (объединение любых классов), x_1 (дополнение x до универсума); универсум обозначался единицей, пустой класс – нулем. Первым логическим сочинением Шрёдера была работа «Сфера операций логического исчисления» (Der Operationskreis des Logikkalküls, Leipzig, 1877). Итогом его обширных логических исследований явились трехтомные «Лекции по алгебре логики» (Vorlesungen über die Algebra der Lolgik, Leipzig, 1890–1905). О вкладе Шрёдера в логику см., например: *Бирюков Б. В., Туровцева А. Ю.* Логико-гносеологические взгляды Эрнста Шрёдера//Кибернетика и логика. Математико-логические аспекты становления идей кибернетики и развития вычислительной техники. М.: Наука, 1978; при дальнейших ссылках на эту статью: ***Бирюков, Туровцева*** (см. также комментарий 29 к статье «Булева вычислительная логика и мое исчисление понятий», с. 31–33). *К с. 148.*

[8] Фрегевскому соотношению более и менее «простых» обозначений (и содержаний меньших и бóльших) в традиционной логике соответствует так называемый закон обратного отношения между содержанием и объемом понятия; см. *Челпанов*, гл. IV. *К с. 148.*

[9] Ср. § 5 «Исчисления понятий»; наст. кн., с. 71 и далее. *К с. 149.*

[10] Фреге имеет в виду статью Шлётеля, указанную в комментарии 3. В ней этот автор выражает сожаление по поводу того, что Булева трактовка союза «или», хотя и «неуклюжая», но, как он считает, строгая, была полностью вытеснена его неисключающим пониманием, распространившимся после работ Ст. Джевонса. *К с. 149.*

[11] Фреге, таким образом, относит к «собственно гипотетическим суждениям» такие условные суждения, которые, говоря современным языком, содержат свободную переменную, то есть суждения вида $(B(x) \supset A(x))$ или даже $\forall x(B(x) \supset A(x))$. Ср. *BS*, § 11 (наст. кн., с. 82 и далее), а также раздел «Всеобщность» в статье «Введение в логику» (наст. кн., с. 297–306) и материал «Краткий обзор моих логических концепций» в наст. книге, с. 292–296. Редакторы *NS* в примечании к этому месту фрегевского текста высказывают взгляд, что в понимании гипотетических суждений Фреге примыкает к тому их истол-

кованию, которое развил Б. Больцано во втором томе своего «Учения о науке» (Wissenschaftslehre, Bd. II, § 164, с.198 и далее). *К с. 152.*

[12] Первоиздатели данной работы Фреге, предположив, что здесь имеет место описка: вместо «чисел» (Zahlen) должно стоять «знаки» (Zeichen) (как это мы и приняли при переводе), все же допускают прочтение «числа», так как Буль, помимо 0 и 1, использует и другие числа (см. *NS*-2, S. 59). *К с. 152.*

О НАУЧНОЙ ПРАВОМЕРНОСТИ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift

Статья опубликована в Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. 81. 1882, S. 48—56. Репрографически переиздана в *BS*-2. Данный перевод сделан с этого издания.

[1] Перечисленные Фреге предложения, действительно, теоремы. Исходной для величин является так называемая *трихотомия*: для любых двух величин a, b верно одно из трех: 1) $a = b$, 2) $a < b$, 3) $b < a$. Евклид не постулирует эти свойства (взаимоотношения) величин. Приведенные Фреге предложения — следствия трихотомии, то есть теоремы, и их, вообще говоря, следовало бы доказывать, хотя доказательство представляется очевидным. *К с. 154.*

[2] Русск. перев.: «Не лишенный изящества опыт абстрактных доказательств»//*Лейбниц.* Т. 3. С. 632—640. *К с. 156.*

[3] О Буле, Джевонсе и Шрёдере см. комментарии 2, 4, 6 и 7 к статье Фреге «Булев логический формульный язык и мое исчисление понятий». Что касается Роберта Грассмана (R. Grassmann, 1815—1901), младшего брата известного немецкого математика Германа Грассмана, то Фреге имеет в виду его книгу «Учение о понятиях, или Логика» (Die Begriffslehre oder Logik, Stettin, 1872; при дальнейших ссылках: ***R. Grassmann*, 1872**). Положения этого труда были разработаны совместно обоими братьями. См.: *Бирюков Б. В.*, *Бирюкова Л. Г.* Учение о формах [величинах] Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике. I//Вопросы кибернетики I; *Бирюкова Л. Г.* //Вопросы кибернетики II. *К с. 156.*

[4] Именно такими свойствами должна была обладать задуманная Лейбницем «универсальная характеристика». Ср. комментарий 5 к «Исчислению понятий». *К с. 156.*

БУЛЕВА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЛОГИКА И МОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ

Booles rechnende Logik und meine Begriffsschrift

Статья опубликована в «Наследии», с. 9—52. Согласно примечанию редакторов этого издания (*NS*, S. 9), Фреге посылал ее поочередно в журналы Zeitschrift für Mathematik und Physik, Mathematiscne Annalen, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, и она всюду была отклонена. О. Шлёмильх (O. Schlömilch), один из редакторов первого из вышеназванных периодических изданий, в письме от 22 июня 1881 г., отказывая Фреге в печатании его статьи, ссылался на перегруженность портфеля журнала рукописями, принятыми для публикации (*BW*, S. 254). Феликс Клейн, один из издателей «Математических анналов», в письме, датированном августом того же года (*BW*, S. 134—135), сообщал Фреге, что статья не подходит для журнала по содержанию и что к тому же в ней содержатся ссылки на малоизвестные публикации (как можно предположить, он имел в виду *BS*, так как работы Буля вряд ли можно было считать малоизвестными); кроме того, он упрекнул Фреге в том, что тот не упоминает «работ Р. и особенно Г. Грассмана». Заметим, что как раз к этому времени Клейн открыл для себя значение грассмановских работ и в одном из номеров своего журнала за 1879 г. опубликовал статью о жизни и научном — в математике и физике — творчестве Германа Грассмана; с ней он предлагал ознакомиться Фреге (учтиво добавляя, что его адресату она, быть может, уже известна). Клейн советовал Фреге направить статью в какой-либо философский журнал. Именно это Фреге в конце концов и сделал — и тоже получил отказ. Г. Ульрици, соредактор журнала «Философия и философская критика», отклоняя фрегевскую статью (письмо от 18 сентября 1881 г., см. *BW*, S. 259), мотивировал свое решение тем, что она слишком длинна, а предполагающегося в ней знакомства с Булевой «вычислительной логикой» от большинства читателей данного журнала вряд ли можно ожидать

В конце концов это сочинение Фреге так и осталось неопубликованным. Когда в 30-е гг. Г. Шольц (H. Scholz) стал готовить к изданию логические труды иенского логика, работа Фреге была перепечатана на пишущей машине. Из доклада Г. Шольца и Ф. Бахмана (F. Bachmann) «Научное наследие Готтлоба Фреге» (Der wissenschaftliche Nachlaß von Gottlob Frege), сделанном на Международном философском конгрессе в Париже в 1935 г. (см.: Actes du congrès international de philosophie scientifique, Paris, 1935), можно заключить, что утраченный оригинал (о судьбе архива Фреге см. в Предисловии к данной книге) представлял собой готовую к опубликованию рукопись на 103 страницах в четверть листа (от нее сохранились — в фотокопиях — две последние страницы, которые были выставлены для обозрения на названном выше Парижском конгрессе). Шольц и Бахман утверждают, кроме того, что Фреге посылал рукопись этой статьи Р. Авенариусу для издания ее в Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie. Однако редакторы *NS* считают, что речь здесь идет о другой работе Фреге — статье «Булев логический формульный язык и мое исчисление понятий» (см. наст. кн., с. 147–152), так как в письме к Фреге от 20 апреля 1882 г. Авенариус упоминает статью под заголовком «Булев логический формульный язык», в публикации которой он отказывает (см. наш комментарий к этой статье, наст. кн., с. 400).

Редакторы *NS* определяют время написания данной статьи — не раньше 1880 года, то есть года, когда появилась рецензия Шрёдера на *BS*: Фреге говорит о ней в своей статье (наст. кн., с. 167).

При переводе статьи и ее комментировании учтены примечания Л. Крайзера в кн.: Aus dem Nachlaß. S. 261–267.

[1] Характеризуя логическую программу Лейбница, теперь вместо *lingua charactrica* пишут *lingua characteristica* (*universalis*) — «универсальная характеристика». Но оба эти термина *не совпадают* с тем, какое выражение употреблял сам Лейбниц. Он говорил: *lingua sive Characteristica universalis*, то есть «язык, или Универсальная характеристика». В примечании редакторов *NS* указывается, что, согласно Г. Патцигу (*G. Patzig*, Einleitung zur Auswahlausgabe: *G. Frege*, Logische Untrsuchungen, Göttingen, 1966, S. 10, Anm. 8), термин *lingua characterica* впервые появляется в одном заглавии, фигурирующем у Р. Распе (R. E. Raspe) — в его издании философских сочинений великого мыслителя (1765, p. 533); затем этот термин употребил И. Эрдман в своем собрании лейбницевских философских работ (1840; см. с.162 и указатель); сведения об этих изданиях читатель может почерпнуть из Примечаний к тому I «Сочинений» Лейбница.

Патциг высказал предположение, что источник этого фрегевского словоупотребления следует искать в труде А. Тренделенбурга (имеется в виду третий том сочинения последнего, на который Фреге ссылался в Предисловии к *BS*; см. наш комментарий 4 к этому Предисловию). Впрочем, как показывает данная статья, более основательное ознакомление Фреге с работами Лейбница могло привести иенского логика к тому, что он счел термин, использовавшийся в издании Эрдмана, принадлежащим самому Лейбницу. *К с. 158.*

[2] В примечании редакторов *NS* (S. 10) указывается, что цитируемые Фреге слова Лейбница в издании Эрдмана (S. 83) звучат так: «si daretur vel lingua quaedam exacta

(qualem quidam Adamicam vocant) vel saltem *genus*...» В русском переводе *вся* эта фраза передана так: «Если бы существовал какой-то точный язык (называемый некоторыми *Адамовым* языком), или хотя бы *истинно философский род писания*, при котором понятия сводились к некоему *алфавиту человеческих мыслей*, тогда все, что выводится разумом из данных, могло бы открываться посредством *некоторого рода исчисления*, наподобие того, как разрешают арифметические или геометрические задачи» (*Лейбниц Г. В.* Об универсальной науке, или философском исчислении»//*Лейбниц*. С. 495 (перевод выполнен по изданию К. Герхардта). *К с. 158.*

[3] Обе Лейбницевы работы — «Не лишенный изящества опыт абстрактных доказательств» и «Добавления к опыту универсального исчисления» — имеются в русск. переводе в томе 3 его «Сочинений», с. 632—640 и 564—571. *К с. 158.*

[4] В русском перев.: «$A + B \infty L$ означает, что *A входит* в *L*, или содержится в нем» (*Лейбниц*. С. 633). *К с. 158.*

[5] Примечание редакторов *NS* (S. 10): «Это, по-видимому, означает: поскольку *lingua characterica* задумывалась Лейбницем как точное языковое представление мыслительных *содержаний*, она выходит за рамки упомянутого Фреге объемно-логического (umfangslogischen) *calculus ratiocinator*. Впрочем, употребление Лейбницем слов «non» [не] и «ens» [существующее, сущее] выводит исчисление Лебница за рамки чистой логики классов. *К с. 159.*

[6] Изображать не слова, а мысли (франц.). *К с. 161.*

[7] См. комментарий 4 к статье «Булев логический формульный язык и мое исчисление понятий». *К с. 162.*

[8] О попытках Буля выразить частные суждения см. рассматриваемое Фреге его сочинение, с. 63, 228. Для представления частных суждений Буль использует символ *v* как обозначение «неопределенного класса», позволяющего, в частности, строить суждения, начинающиеся со слова «некоторые». Суждение «Некоторые *X* суть *Y*» представляется им в виде $vy = vx$. Ср. комментарий 4 к статье, упомянутой в предшествующем комментарии. *К с. 162.*

[9] Поскольку целых чисел, квадрат которых был бы равен 2, не существует, объем этого понятия пуст. Однако как таковой он представляет собой индивидуальный предмет. *К с. 163.*

[10] Под «гипотетическим отношением допускающих истинностную оценку содержаний» Фреге имеет в виду отношение «если..., то», понимаемое как материальная импликация. Ср. выше, в данной книге подстрочное примечание Фреге к на. 159—160. *К с. 164.*

[11] В своих логических сочинениях Фреге развивает функциональный подход — в отличие от алгебрологического направления в современной логике. С его точки зрения действительно излишне рассматривать «отрицательные понятия» типа «не-треугольник». В алгебре логики (логике классов), однако, таким выражениям соответствуют дополнения классов (объемов понятий) до универсума. Без понятия же универсума отрицание (дополнение) теряет свою четкость.

Отвергая отрицательные понятия, Фреге вместе с тем понимал всю значимость отрицания как логической операции, и в своих «Логических исследованиях» посвятил отрицанию отдельную статью (см. наст. книга, с. 343—355). *К с. 165.*

[12] Фреге имеет в виду рецензию на труд английского ориенталиста, профессора Оксфордского университета Арчибальда Генри *Сейса* (1845—1933), автора двухтомного труда «Введение в науку о языке». Рецензент Август *Фик* (1833—1916) был филологом, профессором Гёттингенского университета, сотрудничавшим с «Göttingische gelehrte Anzeigen». *К с. 165.*

[13] Имеется в виду труд немецкого ученого, одного из основателей научной психологии — Вильгельма *Вундта* (W. Wundt, 1832—1920) «Logik», Bd. I, 1880; этот труд третьим изданием вышел в 1906 г. Редакторы *NS* отмечают, что в первом издании книги Вундта, которым Фреге пользовался (см. ниже его подстрочное примечание в этой статьи, наст. кн., с. 181), приводимое им сравнение отсутствует. Отсюда предположение, что, просматривая много позже свою рукопись, Фреге использовал третье издание сочинения Вундта. *К с. 165.*

[14] В оригинале — *Nachsatz*, что можно передать также как «заключение» (условного суждения); Фреге пользовался также термином *Vorsatz* — «посылка». Применял он и выражения «условие» (*Bedingung*) и «следствие» (*Folge*). В современной логике в применении к импликативным предложениям $A \supset B$ часто используют аналогичные термины: A называют посылкой, антецедентом («предшествующим»), а B — заключением, консеквентом («последующим»). *К с. 166.*

[15] Шрёдер рассматривает только уравнения вида $f(\mathfrak{a}) = 1$. Всеобщность, выражаемая готической буквой $\mathfrak{a}$, простирается на все уравнение. В отличие от этого Фреге может — благодаря структуре своих формул и наличию лунки, слева и справа от которой располагаются горизонтальные штрихи, — рассматривать и случаи, когда всеобщность распространяется только на некоторую часть формулы (ср. примечание редакторов *NS*, S. 22). *К с. 167.*

[16] Из этих пояснений Фреге отчетливо видно, что он придавал смысл каждому отдельному элементу своей «рисунчатой» символики (горизонтальным и вертикальным штрихам). *К с. 168.*

[17] Эта поправка учтена в *BS*-2 и, следовательно, в нашем переводе. Относительно смысла формул, фигурирующих в примерах 3, 4 и последующих, см. с. 115, 119 в наст. книге; см. также комментарий 52 к *BS* (с. 398 наст. кн.). *К с. 169.*

[18] Определение функции, непрерывной в данной точке, которое привел Фреге в примере 13, звучит удивительно современно. Это относится и к другим определениям, рассмотренным в его примерах. *К с. 172.*

[19] Данное правило сформулировано Фреге не вполне аккуратно: не ясно, что значат слова «равенство символов друг другу». Теперь *равенство символов* понимается как их *графическое* равенство. Фреге, как это очевидно, имеет в виду не такого рода знаковую одинаковость, а равенство того, что́ обозначается знаками. Фреге здесь, по-видимому, предполагает взаимозаменимость знаков с сохранением истинности, то есть то, чему он впоследствии посвятил статью «О смысле и значении» (наст. книга, с. 230—246). *К с. 177.*

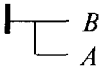
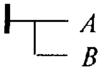
[20] Пунктирная линия книзу от формулы (6) указывает на логический переход, который состоит из нескольких шагов. Три линейки над формулой (12), с. 180, служат, очевидно, указанию на то, что формулы, ведущие к ней от формулы (11), пропущены; логические переходы, как и повсюду в пропозициональной части *BS*, совершаются по правилу *modus ponens*; помещенное слева *двойное* двоеточие при номерах (2) означает, что эта пропущенная формула была в выводе второй («меньшей») посылкой. См. примечание редакторов «Наследия», с. 34. Ср. также систему сокращения выводов, введенную и использованную Фреге в *BS* (наст. книга, с. 73, 74). *К с. 179.*

[21] О «бернуллиевой индукции» см. комментарий 54 к *BS*. *К с. 179.*

[22] Здесь Фреге в своей аргументации использует методологический принцип, обычно называемый «бритвой Оккама»; это название восходит к тезису схоластического философа XIII в. — Уильяма Оккама: «Сущности не следует умножать сверх необходимости» — все лишнее должно «отрезаться». *К с. 180.*

[23] Аликвотный делитель данного числа n — это такое число k, которое делит n без остатка; в арифметике в таком случае употребляется термин «делитель». Например, 1, 2, 3, 4, 6, 12 являются (аликвотными) делителями числа 12. *К с. 181.*

[24] Здесь и в последующем Фреге ссылается на издание 1880 г. *К с. 181.*

[25] Буль рассматривает исчисление классов, то есть объемов понятий, и приравнивание у него имеет смысл: «класс A является частью класса B, и класс B является частью класса A». В современной логике это записывается в виде «$A \subset B$ и $B \subset A$», где $\subset$ знак *включения* класса в класс; это означает: классы A и B совпадают, то есть состоят из одних и тех же элементов. У Фреге же используется не отношение включения класса в класс, а *импликация*, и «  и  » задает эквивалентность *суждений* A и B, то есть формулу $((A \supset B) \& (B \supset A))$ исчисления высказываний, означающую, что высказывания (суждения) A и B равносильны. Таким образом, Фреге и Буль рассматривают в каком-то смысле *разные* вещи. *К с. 183.*

[26] Как отмечают издатели «Наследия» Фреге, он так и не предложил определения знака равенства с помощью других знаков своей понятийной записи; в труде 1884 г. — «Основания арифметики» (*GL*, 76 f.) он лишь присоединился к определению Лейбница «Eadam sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate» (*NS*-2, S. 40). Детальный анализ отношения равенства — как отношения взаимозаменимости в прямых (не косвенных) контекстах — Фреге предпринял в статье «О смысле и значении» (1892). Но в ней не использовалась его знаковая система. *К с. 184.*

[27] В Иене Фреге в числе прочих предметов изучал химию, и это отразилось на использовавшемся им логическом языке. Разыскание наиболее простых знаков в логике он сравнивал с химическим анализом, стремящемся получить наипростейшие вещества; для выражения акта восполнения функции (и ее знакового представителя) аргументом (аргументами), превращающего ее в завершенный объект — предмет его универсума он пользовался наглядным образом (химического) насыщения (sättigen). Ниже равносильные логические формулы Фреге сравнивает с аллотропным состоянием одного и того же химического элемента. *К с. 185.*

[28] См. Предисловие Фреге к *BS*, где два своих «основных закона» (31) и (41), выражающих снятие и введение двойного отрицания, он сводит к одному закону: $\vdash\!\!-(-\!\!\top\!\!\top\!\!-a \equiv a)$. *К с. 187.*

[29] Для решения рассматриваемой здесь задачи Буль использовал метод решения *логических уравнений* (равенств), который он называл исключением (элиминацией) символов классов. Под логическим уравнением он понимал любое равенство, содержащее символы данных классов; при решении им логических уравнений появлялись коэффициенты, отличные от единицы. Само же решение сводилось к выражению некоторых классов посредством комбинаций символов остальных классов, рассматриваемых в данной задаче. При этом результат, полученный по формальным алгебраическим правилам, мог не иметь логического истолкования; например, он мог выражаться в виде дроби, в то время как в числе булевских логических операций деления не было. Чтобы осмыслить такие решения, Буль разработал процедуру разложения логических выражений на конституенты.

Конституентами Буль называл подклассы, на которые заданные классы разбивают универсум. Количество таких подклассов зависит от числа исходных классов. Так, если задан один класс x, то универсум делится на два непересекающихся подкласса (подмножества): x и $1 - x$, где $1 - x$ есть дополнение x до универсума, обозначаемого единицей. Два класса x, y задают четыре конституенты: xy, $x(1 - y)$, $(1 - x)y$ и $(1 - x)(1 - y)$. Вообще n классов разбивают универсум на 2^n подклассов-конституент. Для определения коэффициентов в разложении данного выражения по конституентам Буль подставляет в это разложение единицу вместо всех вхождений x и нуль вместо всех вхождений $1 - x$ (и то же самое для классов y, z и т.д.); логические операции не могут привести к коэффициентам, отличным от 1 и 0, и если такого рода коэффициенты появляются в разложении, Буль заменяет их символом «неопределенного класса» v.

Ход решения логического уравнения, по Булю, хорошо виден на следующем примере. Пусть уравнение $ax + b(1 - x) = 0$, в котором a и b не содержат x, решается относительно класса x. Известные алгебраические преобразования приводят это уравнение к виду $(a - b)x + b = 0$, откуда

$$x = \frac{b}{b - a}. \tag{*}$$

Дроби не имеют логического смысла, и чтобы осмыслить правую часть полученного равенства, Буль разлагает ее на конституенты; поскольку в задаче, кроме класса x, фигурируют еще только два класса a и b, получается четыре конституенты: ab, $a(1 - b)$, $(1 - a)b$, $(1 - a)(1 - b)$. Чтобы найти коэффициент при конституенте ab, в правую часть равенства (*) вместо a и b подставляется 1 и получается $\frac{1}{0}$; чтобы получить коэффициент при следующей конституенте, вместо a подставляется единица, а вместо b — нуль и получается

$\frac{0}{-1}$, и т.д. В результате, просуммировав конституенты, каждая из которых берется с соответствующим коэффициентом, мы приходим к разложению:

$$\frac{b}{b-a} = \frac{1}{0}ab + \frac{0}{-1}a(1-b) + \frac{1}{1}(1-a)b + \frac{0}{0}(1-a)(1-b).$$

Первая конституента ab приравнивается нулю («делить на нуль нельзя!») и отбрасывается; коэффициент при второй конституэнте равен нулю, и эта конституэнта тоже отбрасывается; третья конституента сохраняется, а коэффициент четвертой конституенты, представляющий собой выражение $\frac{0}{0}$, заменятся символом неопределенного класса. Окончательно получаем: $x = (1-a)b + v(1-a)(1-b)$.

Свой способ Буль демонстрирует на простом примере. Предложение «Все люди смертны» записывается в виде уравнения

$$y = vx,$$

где y — класс людей, x — смертных существ. Требуется исключить неопределенный класс v. Вычтем из обоих частей этого равенства по vx, то есть перенесем vx влево со знаком минус:

$$y - vx = 0.$$

При $v = 1$ мы получаем $y - x = 0$; $v = 0$ дает $y = 0$. Перемножив почленно полученные равенства (и учтя идемпотентность операции пересечения классов), имеем:

$$y - yx = 0, \text{ или } y(1-x) = 0.$$

Последний результат истолковывается так: «Не существует людей, которые не были бы смертными существами», или «Бессмертных людей не бывает». Это заключение, разумеется, легко получить из исходного предложения без всяких преобразований, но для более сложных случаев требуется применение булевского метода. См. *Boole*. 1854, p. 107—112.

Прежде чем обратиться к *задаче Буля*, которую Фреге решает своими методами, изложим кратко ход булевских рассуждений. Класс предметов, обладающих свойством A, Буль обозначает буквой x, обладающих свойством B, — буквой y, свойством C — буквой z, свойством D буквой w, свойством E — буквой v. Исходные данные он записывает в виде равенств

$$\bar{x}\bar{z} = qv(y\bar{w} + w\bar{y}), \quad (1)$$

$$\bar{v}xw = q(yz + \bar{y}\bar{z}), \quad (2)$$

$$xy + xv\bar{y} = w\bar{z} + z\bar{w}, \quad (3)$$

где $\bar{x},\ldots,\bar{v}$ — дополнения соответствующих классов (то есть $(1-x,\ldots, 1-v)$, q есть символ неопределенного класса. Для начала Буль исключает q из (1) и из (2), для чего домнажает каждое из них на дополнение своей правой части. Результаты он складывает с равенством (3) и получает

$$\bar{x}\bar{z}(1 - vy\bar{w} - vw\bar{y}) + \bar{v}xw(y\bar{z} + \bar{y}z) + (xy + xv\bar{y})(wz + w\bar{z}) +$$

$$+ (w\bar{z} + \bar{w}z)(1 - xy - xv\bar{y}) = 0. \quad (4)$$

На следующем шаге ему необходимо достичь выражения x через символы остальных классов. Путем последовательных преобразований, которые Буль не выписывает подробно, он приводит (4) к виду

$$(wz + y\bar{w}\bar{z})x + (w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z})\bar{x} = 0. \quad (5)$$

Если обозначить левую часть равенства (5) через $f(x)$, мы получим равенство $f(x)=0$. Ранее он показал, что x в таком случае получается по формуле

$$x = \frac{f(0)}{f(0) - f(1)}. \qquad (**)$$

Следовательно, подставляя в (5) сначала $x = 0$, затем $x = 1$ и используя (**), получаем:

$$x = \frac{w\bar{z} + \bar{w}z + \bar{y}\bar{w}\bar{z}}{w\bar{z} + \bar{w}z + \bar{y}\bar{w}\bar{z} - wz - y\bar{w}\bar{z}}.$$

Разложение этой дроби по конституентам дает

$$x = z\bar{w} + w\bar{z} + \bar{y}\bar{z}\bar{w}. \qquad (6)$$

Это равенство Буль истолковывает в соответствии с тем, что «+» означает «или», умножение означает «и», дополнение истолковывается как «не принадлежит». Ответ на первый вопрос: при наличии признака A должно иметь место C или D, но не оба вместе, или же отсутствуют все три признака B, C и D; и наоборот, если встречается один из признаков B, C или D, и же отсутствуют все три признака B, C и D, то обязательно имеет место признак A. Отсюда ответ на второй вопрос: между B, C, D независимых отношений нет.

После этого Буль исключает класс y. Для этого он преобразует (5) к виду

$$(xwz + x\bar{w}\bar{z} + \bar{x}w\bar{z} + \bar{x}z\bar{w})y + (xwz + \bar{x}w\bar{z} + \bar{x}z\bar{w} + \bar{x}\bar{z}\bar{w})\bar{y} = 0,$$

откуда, разлагая по конституентам, получает

$$y = \bar{x}\bar{w}\bar{z} + \frac{0}{0}(\bar{x}zw + xw\bar{z} + xz\bar{w}). \qquad (7)$$

Исключая неопределенный класс $\frac{0}{0}$ и группируя члены, он получает

$$xzw = 0, \qquad (8)$$

$$\bar{x}\bar{z}w = 0, \qquad (9)$$

$$\bar{x}z\bar{w} = 0. \qquad (10)$$

Равенство нулю некоторого класса означает, что он пуст, поэтому (10) имеет смысл: нет элементов, принадлежащих классу $\bar{x}z$ и классу $\bar{w}$, то есть xz есть часть класса w. Этот факт Буль обозначает равенством $\bar{x}z = \frac{0}{0}w$, которое истолковывает так: при наличии признака C и отсутствии A имеет место D.

Далее, складывая (8) и (9) и решая полученное равенство, Буль получает

$$xz + \bar{x}\bar{z} = \frac{0}{0}\bar{w}. \qquad (***)$$

Равенство (7) дает ответ на третий вопрос: при наличии признака B либо отсутствуют все три признака A, C и D, либо отсутствует один из них. И наоборот, отсутствие всех трех признаков A, B, C означает, что имеет место B. Из (***) следует ответ на четвертый вопрос: если A и C либо оба отсутствуют, либо оба имеют место, то D отсутствует, независимо от наличия или отсутствия B (См.: *Boole*, 1854, p. 147–149).

Покажем теперь, как эту задачу Буля решал *Э. Шрёдер*. Приведем сначала некоторые свойства операций над классами. Пусть x, y, z — классы, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — соответствующие дополнения. Тогда

$$x + x = x; \qquad x \cdot x = x; \qquad \overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y};$$

$$x + \overline{x} = 1; \qquad x \cdot \overline{x} = 0; \qquad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}.$$

$$\overline{\overline{x}} = x; \qquad x \cdot 1 = x;$$

$$x \cdot 0 = 0;$$

Скобки раскрываются обычным образом, общий множитель можно выносить за скобки. Если x является подклассом класса y, то $x + y = y$, $x \cdot y = x$.

Пусть, например, требуется исключить b из равенства $ay = b\,(x+z)$. Для этого обе его части домножаются на дополнение к $x + z$, то есть на $\overline{x+z}$, что равно $\overline{x} \cdot \overline{z}$; тогда $a\,y \cdot \overline{x}\,\overline{z} = b(x+z)(\overline{x+z}) = 0$, следовательно, b можно исключить, и мы имеем равенство $ay\overline{x}\,\overline{z} = 0$.

Вернемся к задаче Буля. Признакам A, B, C, D, E Шрёдер ставит в соответствие классы a, b, c, d, e. Тогда условия задачи записываются в виде

$$(\alpha) \qquad \overline{a}\,\overline{c} = xe\,(b\overline{d} + \overline{b}\,d);$$

$$(\beta) \qquad \overline{e}ad = y\,(bc + \overline{b}\,\overline{c});$$

$$(\gamma) \qquad a\,(b+e) = c\overline{d} + \overline{c}\,d,$$

где x, y — символы неопределенных классов. Шрёдер начинает с исключения символов x и y из первых двух уравнений. Для этого он домножает обе части (α) на $(\overline{e} + bd + \overline{b}\,\overline{d})$ — дополнение к $e(b\overline{d} + \overline{b}\,d)$, что дает ($\alpha'$): $\overline{a}\overline{c}(\overline{e}+bd+\overline{b}\,\overline{d})=0$; затем обе части ($\beta$) домножаются на $(b\overline{c} + \overline{b}\,c)$ — дополнение к $(bc+\overline{b}\,\overline{c})$ и получается (β'): $ad\,(b\overline{c} + \overline{b}\,c)\,\overline{e} = 0$. Чтобы привести равенство (γ) к уравнению требуемого вида, Шрёдер домножает его левую и правую части сначала на дополнение к левой части, то есть на $\overline{a} + \overline{b}\,\overline{e}$, и получает $(\overline{a} + \overline{b}\,\overline{e})(c\overline{d} + \overline{c}\,d) = 0$; затем обе части ($\gamma$) домножаются им на дополнение к правой части, то есть на $cd + \overline{c}\,\overline{d}$; получается $a(b+e)\cdot(cd + \overline{c}\,\overline{d}) = 0$. Сложение полученных равенств дает (γ'): $a(b+e)(cd+\overline{c}\,\overline{d})+(c\overline{d}+\overline{c}d)(\overline{a}+\overline{b}\,\overline{e})=0$.

Теперь исходные условия имеют вид

$$(\alpha') \qquad \overline{a}\,\overline{c}(\overline{e} + bd + \overline{b}\,\overline{d}) = 0;$$

$$(\beta') \qquad ad(b\overline{c} + \overline{b}\,c) = 0;$$

$$(\gamma') \qquad a(b+e)(cd+\overline{c}\,\overline{d})+(c\overline{d}+\overline{c}d)(\overline{a}+\overline{b}\,\overline{e})=0.$$

Заметим, кстати, что при переходе от α и β к α' и β' исчезли символы неопределенных классов x, y; они элиминированы. Теперь Шрёдеру нужно исключить e. Он складывает все три уравнения и, перегруппировав члены, выделяет коэффициенты при e и $\overline{e}$, а также слагаемые, не зависящие от e и $\overline{e}$:

$$a(cd+\bar{c}\bar{d})e+(\bar{a}\bar{c}+ab\bar{c}d+a\bar{b}cd+\bar{b}c\bar{d}+\bar{b}\bar{c}d)\bar{e}+(\bar{a}\bar{c}bd+\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}+abcd+$$

$$+ab\bar{c}\bar{d}+ac\bar{d}+\bar{a}\bar{c}d).$$

Ранее Шрёдер показал, что исключение символа x и его дополнения из равенства $fx+g\bar{x}+z=0$ дает $z=0$. Используя этот результат, он перемножает коэффициенты при e и $\bar{e}$, что, после приведения подобных, дает $a\bar{b}cd$; складывая это произведение со свободным членом равенства (*), он получает:

$$\bar{a}(c\bar{d}+\bar{c}d+\bar{b}\bar{c}\bar{d})+a(bcd+b\bar{c}\bar{d}+\bar{b}cd)=0.$$

Заметим, что $bcd+\bar{b}cd=cd(b+\bar{b})$, но $b+\bar{b}=1$, поэтому $bcd+\bar{b}cd=cd$. В результате

$$(\delta):\qquad a(cd+b\bar{c}\bar{d})+\bar{a}(c\bar{d}+\bar{c}d+\bar{b}\bar{c}\bar{d})=0.$$

Нетрудно проверить, что произведение коэффициентов при a и $\bar{a}$ равно 0. Для исключения a и $\bar{a}$ из этого равенства следовало бы умножить его сначала на дополнение к $cd+b\bar{c}\bar{d}$, затем на дополнение к $c\bar{d}+\bar{c}d+\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, но, поскольку эти коэффициенты в произведении дают 0, они дополняют друг друга до универсума, и попытка исключить a из (δ) дает тождественное равенство 0 = 0. Шрёдер истолковывает это как ответ на второй вопрос: между B, C и D нет отношений, зависящих от других признаков.

Объединение (сумма) нескольких классов равняется нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю. Поэтому из (δ) следует $a(cd+b\bar{c}\bar{d})=0$. Это значит, что a есть дополнение к $cd+b\bar{c}\bar{d}$. Но выше мы заметили, что дополнением к $c\bar{d}+b\bar{c}\bar{d}$ является $c\bar{d}+\bar{c}d+\bar{b}\bar{c}\bar{d}$. Поэтому, в силу единственности дополнения, имеем

$$a=c\bar{d}+\bar{c}d+\bar{b}\bar{c}\bar{d},$$

что полностью описывает A: всюду, где появляется признак A, должен присутствовать признак C или D, но не оба вместе; или же они оба отсутствуют вместе с признаком B, и наоборот, всюду, где имеется признак C или D, но не оба, или же отсутствуют B, C и D, обязательно имеется признак A.

Затем Шрёдер аналогичным образом исключает класс b из (δ), что дает ответ на последний вопрос, разумеется, такой же, какой получил Буль.

Раскрыв скобки в (δ) и перегруппировав слагаемые, Шрёдер получает

$$(\varepsilon):\qquad ba\bar{c}\bar{d}+\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{d}+acd+ac\bar{d}+a\bar{c}d=0,$$

из чего следует, что $b=(c+d)v+\bar{a}\bar{c}\bar{d}$. Это означает: при наличии признака B должен иметь место или признак C, или D, либо и C и D должны отсутствовать вместе с A. И наоборот, если одновременно отсутствуют C, D и A, то имеется B.

Заметим, что (ε) имеет вид $fx+g\bar{x}+z=0$, поэтому $acd+ac\bar{d}+a\bar{c}d=0$. Относительно a, в силу последнего равенства, имеем:

$$a=w(\bar{c}+\bar{d})+c\bar{d}+\bar{c}d.$$

Это и есть ответ на четвертый вопрос: из наличия признака A можно заключить о наличии одного из признаков C и D. Наоборот, из наличия одного из признаков C и D можно заключить о наличии A. Поскольку в выражении a через c и d отсутствует символ класса b и его дополнения, значит ответ на последний вопрос не зависит от B (См.: *Schröder*, 1877, S. 25–28). *К с. 187.*

[30] Значение остальных заглавных греческих букв: B означает наличие признака B, Γ — наличие признака C, Δ — признака D, E — признака E. *К с. 188.*

[31] Предлагаемое Фреге решение *задачи Буля* нуждается в комментарии. Для лучшего понимания фрегевского перевода его формул на словесный язык и тех преобразований, которым он их подвергает, решая задачу, — равно как и для усвоения стиля его предшествующих выкладок — следует учитывать, как с помощью знаков $\supset$ и $\neg$ выражаются операции конъюнкции и дизъюнкции (см. комментарий 24 к *BS*) и вообще основные равносильности, связывающие эти операции (например, законы Де Моргана). Особенно надо иметь в виду, что Фреге широко пользуется свойством транзитивности материальной импликации, то есть тем, что в пропозициональной логике называется *принципом* (или *правилом*) *силлогизма*: $(\Phi \supset E), (E \supset \Psi) \vdash \Phi \supset \Psi$). Принцип этот используется им для элиминации компонент в импликативных формулах (как в вышеприведенной выводимости элиминируется формула E). Не менее важно иметь в виду, что многоантецедентная (многопосылочная) импликативная формула равносильна импликативной формуле с тем же консеквентом, но в которой посылки (все или только некоторые) соединены конъюнктивно, — это тоже использует Фреге. Так, уже свою первую формулу $(\neg\Gamma \supset (\neg A \supset E))$ он на словах передает как формулу $((\neg\Gamma \,\&\, \neg A) \supset E)$. Фреге также пользуется перестановочностью посылок импликативного суждения (оговоренной в *BS* в виде правила: «если предложение является следствием двух условий, то порядок их безразличен», наст. книга, с. 96), коммутативностью и ассоциативностью операций & и $\vee$, «склеиванием» одинаковых посылок в импликативной формуле и одинаковых конъюнктивных (соответственно, дизъюнктивных) членов в конъюнктивной (соответственно дизъюнктивной) формуле. Наконец, — и об этом тоже надо помнить — Фреге постоянно прибегает к сложной контрапозиции: обмену местами консеквента всей формулы и одной из ее посылок (любой), сопровождающегося «навешиванием» отрицаний на переставляемые формулы; при этом одновременно может производиться перестановка посылок и снятие двойных отрицаний. Примером здесь может служить переход от формулы

$$(\neg E \supset (\Delta \supset (A \supset (\neg B \supset \neg \Gamma))))$$

к равносильной ей формуле $(\Delta \supset (A \supset (\neg B \supset (\Gamma \supset E))))$. И последнее замечание: слова Фреге о том, что некая формула *выполняется независимо от содержаний* входящих в нее (под)формул, означают, что формула эта тождественно-истинна (логически очевидна, как говорит автор *BS*).

Выше мы говорили, что фрегевские словесные формулировки, как правило, отклоняются от буквального прочтения его формул. В еще большей мере это справедливо в отношении того, как Фреге передает ответы на вопросы *задачи Буля*: ответы эти непросто сопоставить с соответствующими булевскими или шрёдеровскими формулами, а иногда таковое вообще затруднительно. Фреге был не очень аккуратен, демонстрируя на данном примере работу своего исчисления. Он может не использовать всех условий задачи, которые сам же и сформулировал (таково условие, которое записано у него в виде формулы (12), см. ниже), или оперировать в своих выкладках тождественно-истинной формулой, подчас ему совершенно не нужной (ср. формулу (13)).

Исходные данные задачи Фреге передает формулами (1)–(12), которые мы ниже запишем в современных обозначениях. Условие (α) передают первые три формулы. Знаковое представление формулы (1) приведено выше. Формула (2), если следовать тому, как объясняет ее Фреге, должна быть равносильна формуле (2*) $((\neg\Gamma \,\&\, \neg A) \supset (B \vee \Delta))$. Обратим внимание на то, что у Фреге формула (2) имеет консеквент $(\neg\Delta \supset B)$. Здесь используются равносильности: $(\neg\Delta \supset B) = (\neg\neg\Delta \vee B) = (\Delta \vee B) = (B \vee \Delta)$. Таким образом (2) и (2*) равносильны. Не продолжая подобных выкладок, поступим так: выпишем в колонку с левой стороны формулы Фреге, а в правой колонке сопоставим им равносильные формулы, в которых встречаются знаки $\vee$, $\neg$, и только они. Цель предлагаемого читателю сопоставления импликативных формул Фреге и равносильных им дизъюнктивных формул — помочь читателю, владеющему методикой работы с дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами исчисления высказываний, прослеживать формальный ход мысли Фреге.

(1)	$(\neg \Gamma \supset (\neg A \supset E))$	$(\Gamma \vee A \vee E)$	(1')
(2)	$(\neg \Gamma \supset (\neg A \supset (\neg \Delta \supset B)))$	$(\Gamma \vee A \vee \Delta \vee B)$	(2')
(3)	$(\neg \Gamma \supset (\neg A \supset (\Delta \supset \neg B)))$	$(\Gamma \vee A \vee \neg\Delta \vee \neg B)$	(3')
(4)	$(\neg E \supset (\Delta \supset (A \supset (B \supset \Gamma))))$	$(E \vee \neg\Delta \vee \neg A \vee \neg B \vee \Gamma)$	(4')
(5)	$(\neg E \supset (\Delta \supset (A \supset (\neg B \supset \neg\Gamma))))$	$(E \vee \neg\Delta \vee \neg A \vee B \vee \neg\Gamma)$	(5')
(6)	$(B \supset (A \supset (\neg \Delta \supset \Gamma)))$	$(\neg B \vee \neg A \vee \Delta \vee \Gamma)$	(6')
(7)	$(B \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma)))$	$(\neg B \vee \neg A \vee \neg\Delta \vee \neg\Gamma)$	(7')
(8)	$(E \supset (A \supset (\neg \Delta \supset \Gamma)))$	$(\neg E \vee \neg A \vee \Delta \vee \Gamma)$	(8')
(9)	$(E \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma)))$	$(\neg E \vee \neg A \vee \neg\Delta \vee \neg\Gamma)$	(9')
(10)	$(\neg \Delta \supset (\Gamma \supset A))$	$(\Delta \vee \neg \Gamma \vee A)$	(10')
(11)	$(\Delta \supset (\neg \Gamma \supset A))$	$(\neg \Delta \vee \Gamma \vee A)$	(11')
(12)	$(\Delta \supset (\neg E \supset B))$	$(\neg \Delta \vee E \vee B)$	(12')

Ниже мы, однако, будем комментировать решение Фреге, строго следуя используемому им логическому аппарату.

Рассматривая *первый* вопрос задачи, Фреге устанавливает, что формулы (6) и (7) дают лишь «частичный ответ»: при условии A наличие B влечет, что $(\Delta \vee \Gamma)$ и $(\neg\Delta \vee \neg\Gamma)$, то есть верно одно из двух Δ или B, но оба вместе.

Формулу (13) $(\neg \Gamma \supset (\neg A \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma))))$ Фреге получает из (1) и (9), используя «принцип силлогизма». Но (13) равносильна формуле

$$(\Gamma \vee A \vee \neg A \vee \neg \Delta \vee \neg \Gamma) \qquad (13')$$

и если учесть, что $(A \vee \neg A)$ тождественно-истинна, то тождественно-истинна и формула (13'), а значит, и формула (13). Но это означает, что из нее нельзя извлечь никаких сведений относительно Γ, Δ и A.

Далее Фреге устраняет из рассмотрения формулы, в которых нет A или же A входит в них в отрицательной форме: они ничего не могут дать для ответа на первый вопрос. Он также оставляет в стороне формулы, в которых имеется E, так как этот признак не фигурирует в данном вопросе. Сопоставляя последовательно формулы (1) и (9), (1) и (8), (4) и (8), он показывает, что они не позволяют прийти к заключению об отношениях между признаками B, C и D при условии A, так как если к любой из выписанных выше пар формул применить правило силлогизма (что в данном случае означает исключение признака E), то получится тождественно-истинная формула. Так, пара (1)–(9), то есть

$$(\neg \Gamma \supset (\neg A \supset E)) \ \text{ и } \ (E \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma)),$$

приводит к формуле $(\neg \Gamma \supset (\neg A \supset (A \supset (\Delta \supset \neg\Gamma))))$, получающей у Фреге номер (13), о которой говорилось выше. Ее тождественная истинность особенно очевидна, если, переведя ее в равносильную дизъюнктивную форму, для наглядности выделить в скобках противоречащие дизъюнктивные члены:

$$((A \vee \neg A) \vee (\Gamma \vee \neg \Gamma) \vee \neg\Delta),$$

так что подформулы $(A \vee \neg A)$ и $(\Gamma \vee \neg \Gamma)$ окажутся в ней «представителями» закона исключенного третьего. Тождественную истинность формулы (13) Фреге поясняет, указывая на два факта, каждый из которых определяет независимость ее «выполнимости» (то есть ее истинности) от входящих в нее «содержаний». Первый состоит в том, что среди ее посылок имеются две противоречащие друг другу формулы (A и $\neg A$), а второй — в том, что среди ее условий встречается формула, совпадающая с ее консеквентом. В самом деле, трижды переместив формулу $\neg \Gamma$ вправо, мы получим

$$(\neg A \supset (A \supset (\Delta \supset (\neg \Gamma \supset \neg \Gamma)))); \qquad (*)$$

но $(\neg \Gamma \supset \neg \Gamma)$ есть (под)формула, «представляющая» закон тождества, и это, в силу свойств операции материальной импликации, обращает формулу (*) в «логическую очевидность». Из (*), используя контрапозицию $(\neg \Gamma \supset \neg \Gamma) \supset (\Gamma \supset \Gamma)$ и применяя правило силлогизма, мы получим тождественно-истинную формулу, импликативным консеквентом которой является закон тождества без отрицательных формул: $(\Gamma \supset \Gamma)$.

Какой бы ни была «логически очевидная» формула, из нее нельзя извлечь никаких сведений относительно входящих в нее «содержаний». Тем не менее присоединение такой формулы к конкретной нетождестенно-истинной формуле — заметим, что под «присоединением» мыслится конъюнктивная связь, например такая, какая по-существу предполагается в правиле силлогизма, — может привести к выяснению соотношений рассматриваемых содержательных компонент. Поэтому понятно, почему Фреге использует формулу (13), пытаясь получить ответ на четвертый вопрос задачи (правда, сопоставление (13) и (7), которое Фреге считает результативным, ничего, кроме самой формулы, (7) дать не может).

При ответе на *первый* вопрос во многом безрезультатно и сопоставление формул (14) и (15) (они получаются после «перестройки» формул (4) и (5)) с формулами (6) и (9): в трех случаях исключение формулы E приводит к тождественно-истинным, то есть к внелогически бессодержательным выражениям, и лишь сопоставление (15) и (9) результативно:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{l}(15)\quad (\Delta \supset (A \supset (\neg B \supset (\Gamma \supset E))))\\ \qquad\qquad (9)\ (E \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma)))\end{array}}{(\Delta \supset (A \supset (\neg B \supset (\Gamma \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma))))))}}{(A \supset (\Delta \supset (\Gamma \supset (\neg B \supset \neg \Gamma))))}}{(A \supset (\Delta \supset (\Gamma \supset (\Gamma \supset B))))}}{(A \supset (\Delta \supset (\Gamma \supset B))).} \qquad (16)$$

Формула (16) не дает ничего нового, если она сопоставляется с формулой (6), но оказывается результативной при сопоставлении с формулой (7):

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{l}(16)\quad (A \supset (\Delta \supset (\Gamma \supset B)))\\ \qquad\qquad (7)\ (B \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma)))\end{array}}{(A \supset (\Delta \supset (\Gamma \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma)))))}}{(A \supset (\Delta \supset (\Gamma \supset \neg \Gamma)));}$$

но $(\Gamma \supset \neg \Gamma) = (\neg \Gamma \vee \neg \Gamma) = \neg \Gamma$. Окончательно получаем: $(A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma))$, то есть

$$(A \supset (\neg \Delta \vee \neg \Gamma)),$$

что равносильно формуле $(A \supset (\neg (\Delta \& \Gamma)))$.

Итак, *ответ* на *первый* вопрос таков. При условии А (согласно формуле (17), вытекающей из (16) и (7)): *признак* В *влечет, что из двух признаков* С *и* D *один исключает* другой (ср. (6) и (7)); и что безотносительно к В оба они не могут иметь места. Кроме того, (6) указывает на то, что (при том же условии А) признак В предполагает наличие одного из признаков С или D.

Обращаясь к ответу на *второй* вопрос, Фреге составляет таблицу из 12 парных сопоставлений формул: от пары (6)—(10) и до пары (16)—(18), утверждая, что все эти пары образуют, как показывает его метод, такие формулы, которые выполнимы (то есть истинны) «независимо от их содержаний», или, как он еще выражается, «логически очевидны». Однако в двух случаях он ошибается: пары (7)—(17) и (16)—(17) не влекут «логическую очевидность». Так, формула (17), которую Фреге получает из формул (7) и (16), будучи конъюнктивно связанной с последней, приводит к выражению, «зависищему от содержания» своих компонент: если положить, что A, Δ, Γ истинны, а B ложно, то обе формулы оказываются ложными. Что же касается пары формул (7)–(17), из которых вторая есть подформула первой, то их «содержания» также могут быть подобраны так, что обе они станут ложными. Впрочем, сам по себе *ответ* Фреге на *второй* вопрос задачи остается верен, так как из (7)–(17) и (16)–(17) нельзя исключить A и, следовательно, узнать, как связаны друг с другом признаки C и D независимо от признака A (признак E в рассматриваемых здесь формулах не представлен).

В поиске *ответа* на *третий* вопрос привлечение формулы (19) — в добавление к формулам (6) и (7) — излишне. Каждая из пар (6)–(19) и (7)–(19) приводит к тождественной истинности. *Ответ* заключен в формулах (6) и (7); он вычитывается из каждой из них порознь. Формула (6) позволяет заключить, что при наличии признака B и отсутствии признака D имеет место по крайней мере одно из двух: либо отсутствие A, либо наличие C. Если же — при том же условии — признак D имеется, то признаки A и C не могут присутствовать вместе. Этот ответ несколько расходится с ответом, который дает Фреге, что, по-видимому, связано, с одной стороны, с истолкованием формулы (19), а с другой — с молчаливо предполагаемым наличием признака B, о чем пишут издатели «Наследия» в примечании на с. 49.

Переходя к *четвертому* вопросу, заметим, что редакторы *NS* в своем примечании (S. 47) справедливо считают (γ_3) и (γ_4) не вполне понятными. В самом деле, в условии (γ_3) не ясен смысл второй фразы, а в (γ_4) не понятны слова «здесь может быть только B» (наст. книге, с. 189). Поэтому мы будем исходить не из словесной формулировки этих условий, а из формул (10) и (11). Что касается формулы (12): $(\Delta \supset (\neg E \supset B))$ — формулы, которую Фреге тоже связывает с условием (γ_4), — то авторы упомянутого примечания считают ее неверной, так как она не вытекает из конъюнкции условий (α), (β) и (γ), особенно же — из одного условия (γ); издатели «Наследия» предлагают заменить ее двумя формулами:

$$(12')\quad (\Gamma \supset (\neg \Delta \supset (\neg E \supset B))) \quad \text{и} \quad (12'')\ (\Delta \supset (\neg \Gamma \supset (\neg E \supset B))),$$

не поясняя, зачем это нужно, тем более что по их же словам — и это верно — Фреге нигде не использует формулу (12).

Ответ на *четвертый* вопрос, в истолковании Фреге, требует удаления B из шести пар формул, члены которых пригодны для сопоставлений; большинство сопоставлений, однако, не дает результата. Заметим, что в правой колонке первым членом в каждой паре является тождественно-истинная формула (13). Сопоставление ее с формулами (6), (7) и (19) безрезультатно, почему ее можно вообще не рассматривать. Тогда остаются формулы: (6) $(B \supset (A \supset (\neg \Delta \supset \Gamma)))$; (7) $(B \supset (A \supset (\Delta \supset \neg \Gamma)))$ и (19) $(\Delta \supset (\neg \Gamma \supset (B \supset A)))$. Структура этих формул такова, что их попарное сопоставление не позволяет исключить B, как того требуют условия задачи. Что же касается пар (2)–(6), (2)–(7) и (2)–(19), то хотя исключение формулы B здесь и возможно, оно приводит к «логически очевидным» — бессодержательным — формулам. Но если принять гипотезу комментаторов «Наследия», высказанную в связи с третьей задачей, и принять, что отношения между признаками A, B и C ищутся в предположении B, то мы получим:

$$(6')\ (\neg \Delta \supset (A \supset \Gamma))\ (\text{из } (6)), \qquad (7')\ (\Delta \supset (A \supset \neg \Gamma))\ (\text{из } (7)),$$

$$(19')\ (\Delta \supset (\neg \Gamma \supset A))\ (\text{из } (18')).$$

Эти формулы приводят к заключению, что при наличии признака D признаки A и C либо оба отсутствуют, либо хотя бы один из них присутствует.

Впрочем, резюмируя свое решение задачи Буля, Фреге для получения *ответа* на *четвертый* вопрос предлагает сопоставлять формулы (10), (11) и (17). Поскольку в них фигурируют только A, Γ и Δ и их отрицания, из этих формул можно заключить о взаимоотношениях рассматриваемых признаков: (17) показывает, что из наличия A и D вытекает отсутствие C. Если же D нет, то налицо A или C (формула (10)), но если D наличествует, то отсутствие C влечет признак A (формула (11)).

Рассматривая *ответы* на вопросы, фигурирующие в *задаче Буля*, следует иметь в виду, что они могут быть сформулированы в различных терминах: условной связи, наличия либо отсутствия признаков, их несовместимости и т.д. Отсюда — возможные разночтений в их словесных формулировках у Буля, Шрёдера и Фреге.

Как оценивать решение *задачи Буля* тремя авторами? По-видимому, предпочтительнее все же метод Шрёдера. Это и не удивительно. Его работа была написана почти двадцать лет спустя после публикации труда Буля, когда многие вопросы прояснились и многие затруднения были преодолены. Но — и это самое главное — Шрёдер решал *задачу Буля* именно теми методами, которые имелись в виду, когда она была поставлена ее автором, то есть методами алгебры логики. Цель, которую ставил Фреге, разрабатывая свое логическое учение, была шире и глубже, чем алгебрологическая концепция того времени. Естественно при этом — и Фреге сам это показал, — что развитое им исчисление позволяло решать задачи алгебры логики. Но решения эти были не очень «прозрачными» и, как сказали бы мы теперь, недостаточно эвристичными и алгоритмичными. Эвристико-алгоритмический потенциал решения задач, подобных *задаче Буля,* был уже в XX в. реализован на основе идей русского логика П. С. Порецкого (1846–1907) в форме методики приведения алгебрологических выражений к сокращенной конъюнктивной нормальной форме (так называемому силлогистическому многочлену), позволяющей извлекать все следствия (определенного вида) из заданных посылок. Этот метод излагала в своих лекциях по математической логике в 50–60-х гг. XX в., читанных в Московском государственном университете, С. А. Яновская. Стоит заметить, что появившийся значительно позже известный «метод резолюций» явился воскрешением и дальнейшим развитием этого метода.

И еще одно необходимое замечание. Фреге неоднократно высказывал неодобрение по поводу того, что Буль и другие представители алгебрологического направления (в том числе Шрёдер и Дж. Пеано) понимают символы своего исчисления то как объемы понятий, то как предложения (суждения). Но в этом нет ничего удивительного. И исчисление классов (объемов понятий), и исчисление предложений (высказываний) можно рассматривать как примеры *булевой алгебры.* Под последней при этом понимается система, в которой на некотором множестве заданы двуместные операции объединения, пересечения, дополнения (до универсума), а также единица (универсум) и пустое множество (нуль). О такого рода двойственности см., например, в кн.: *Кутюра Л.* Алгебра логики. Одесса, 1909 (пер. с франц. с добавлениями И. Слешинского). *К с. 188.*

[32] Фреге имеет в виду использование контрапозиции в сочетании с перестановкой посылок и применением принципа силлогизма. Формула (19) получается из формулы (3) так:

$$(\neg \Gamma \supset (\neg A \supset (\Delta \supset \neg B))) \qquad (3)$$

перестановка посылок

$$(\neg \Gamma \supset (\Delta \supset (\neg A \supset \neg B))) \qquad ((\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A))$$

обратная контрпозиция

правило силлогизма

$$(\neg \Gamma \supset (\Delta \supset (B \supset A))). \qquad (19)$$

К с. 192.

[33] Это правило — частный случай известного ныне «рассуждения по случаям», когда используется закон исключенного третьего (у Фреге: $E \vee \neg E$). *К с. 192.*

О ЦЕЛИ ИСЧИСЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ

Ueber den Zweck der Begriffsschrift

Первая публикация: Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenshaft für das Jahr 1882, Bd. XV; цитируется также как публикация в дополнительном томе издания Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. XVI, 1883 (Neue Folge, Bd. 9, 1882/1883), Supplement, S. 1–10. Это доклад, прочитанный Фреге на заседании «Иенского медицинского и естественно-научного общества» 27 января 1882 г. Перевод выполнен по изданию *BS*-2.

[1] Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXV, 1881, S. 81–94. *К с. 194.*

[2] Равенства $A = A \cdot A = A \cdot A \cdot A$ выполняются в обычной алгебре только для $A = 0$, $A = 1$, а равенства $A = A + A = A + A + A$ только для $A = 0$. *К с. 195.*

[3] *Рабус* (G.L. Rabus) был профессором гимназии в Эрлангене. В книге, которую называет Фреге, содержался первый отклик на фрегевский труд 1879 г.: в ней последнему был посвящен особый параграф. Будучи противником логической формализации — для Рабуса логика была философско-антропологической наукой, он критически оценивал концепцию Фреге. В труде 1895 г. — «Logik und System der Wissenschaften», вышедшей в Лейпциге, он возвратился к Фреге и назвал его «представителем странного направления алгебраизации логики» (S. 48), что говорит о полном непонимании этим автором сути фрегевского подхода. *К с. 197.*

ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ПОНЯТИЙ ГОСПОДИНА ПЕАНО И О МОЕМ СОБСТВЕННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene

Первая публикация: Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse, Bd. XLVIII, 1897, S. 361–378. Статья представляет собой доклад, сделанный на внеочередном заседании Саксонского Королевского научного общества 6 июля 1896 г. Перевод выполнен по переизданию в труде: Kleine Schriften, S. 220–233.

[1] Джузеппе *Пеано* (Peano; 1857–1932) — итальянский математик и логик. Широко известна его система аксиом для арифметики (аксиомы Пеано). Пеано — один из создателей современной математической логики. Его системы занимают промежуточное положение между алгебраическими (Де Морган, Буль, Шрёдер) и функциональными (Г. Фреге) логическими построениями. Он внес заметный вклад в создание современной терминологии, а также теоретико-множественной и логической символики. Пеано отчетливо различал отношение принадлежности элемента множеству — для этого отношения он ввел знак ε, ныне трансформировавшийся в знак $\in$ ($a \in A$ означает: a есть элемент A) — и отношение включения одного множества в другое в качестве подмножества, обозначаемое знаком Ↄ, ныне имеющем вид $\supset$: $A \supset B$ означает, по Пеано, что A есть подмножество (подкласс) множества B. Теперь знаком $\supset$ часто обозначают импликацию (именно этим знаком мы пользуемся в наших комментариях), а для отношения включения применяется знак $\subset$ либо знак $\subseteq$. Кроме того, как и Фреге, Пеано настаивал на различении индивида и множества, единственным элементом которого является этот индивид: a и $\{a\}$ — разные объекты. Упомянутый выше «Формуляр математики», в написании которого принимали участие и ученики Пеано: Бетацци, Бурали-Форти, Кастеллано, Фано, Джудиче, Вайлати, Виванти, — это подлинная математическая энциклопедия, включавшая основные разделы математики и математическую логику. *К с. 201.*

[2] Это намерение Фреге осуществил. В томе 6 этого журнала (1895/1896) была напечатано письмо Фреге Lettera del sig. G. Frege all'editore [Giuseppe Peano], датированное 29 сентября 1886 г. (р. 53–59); вслед за текстом Фреге был помещен ответ Пеано. Письмо Фреге перепечатано в *BW*, S. 181–186, и в «Kleine Schriften», S. 234–239. *К с. 201.*

[3] *Peano G.* Notations de logique mathématique. Introduction on formulaire de mathématique// Rivista di Matematica, Turin, 1894; братья Bocca и Ch. Clausen были издателями «Формуляра». *К с. 203.*

[4] *Peano G.* Formulaire de Mathématiques, v. 1–5, Turin, 1895–1905. Ко времени написания Фреге данной его статьи свет увидел только первый том «Формуляра». *К с. 203.*

[5] «20. После написания формулы в символическом виде следует применить к ней логические преобразования. Мы увидим, можно ли свести ее к более простой форме, и легко сможем распознать, правильно ли составлена эта формула.

21. Таким образом, логические обозначения не являются только тахиграфией — [системой] символов, представляющих в сокращенной форме математические предложения; они — мощный инструмент для анализа предложений и теорий». *К с. 204.*

[6] «25. Можно также представить доказательства предложений или, по крайней мере, те связи, которые существуют между последовательно расположенными предложениями. Но символическое преобразование доказательства в общем труднее, чем изложение какой-либо теории». *К с. 204.*

[7] Как уже отмечалось, Фреге явно вводит квантор общности, выражая квантор существования через всеобщность и отрицание. Пеано, как и Фреге, вводит только квантор общности. *К с. 204.*

[8] «Λ, représente l'absurde» — представляет абсурд. *К с. 205.*

[9] «Равенство $a = b$ имеет всегда одно и то же значение: a и b тождественны, или a и b — два имени, данные одной и той же вещи». *К с. 205.*

[10] Фреге имеет в виду статью «О смысле и значении», с. 230–246 в наст. книге. *К с. 206.*

[11] «В качестве предложений принимаются знаки, введенные для классов в рамках соответствующей символики». *К с. 207.*

[12] « $a \supset b$ означает: 'a влечет b', или 'b есть следствие a'». *К с. 207.*

[13] «Если a и b суть предложения, содержащие неопределенные буквы $x, y, \ldots$, то есть являются условиями, налагаемыми на эти буквы, то дедукция $a \supset b$ означает: любые $x, y, \ldots$, удовлетворяющие условию a, удовлетворяют и условию b» *К с. 208.*

[14] «Если a и b — предложения, не содержащие неопределенных букв, то дедукция $a \supset b$ всегда означает: 'если a истинно, то истинно и b'». *К с. 208.*

[15] «то есть или a истинно и b истинно, или a ложно, а b истинно, или a ложно и b ложно; исключается единственный случай: a истинно, b ложно». *К с. 208.*

[16] В более принятой современной записи следующая ниже формула имеет вид: $\forall y (\forall x (\Phi(x) \supset \Psi(x, y)) \supset X(y))$. Выражения вида $\forall x (A(x) \supset B(x))$ называют ныне, следуя Б. Расселу, ***материальной импликацией***. *К с. 210.*

[17] «Индексы при знаке $\supset$ удовлетворяют требованиям, которые еще не достаточно изучены. Сама по себе неясная теория при этом становится еще более непонятной, если не сопроводить ее правила примерами. Лучше всего изучать роль этих знаков и правил их преобразования на примерах формул и доказательств математики». *К с. 210.*

[18] Пеано, как и Фреге, отмечает, что роль «неопределенно указывающего символа» меняется, если он следует за выражением всеобщности, то есть квантором общности. Теперь говорят, что квантор общности ***связывает переменные***, то есть x в $\forall x (A(x))$ — связанная переменная. Пеано такие переменные называет кажущимися (мнимыми) переменными (variables appearentes). *К с. 212.*

ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА

ФУНКЦИЯ И ПОНЯТИЕ

Funktion und Begriff

Первая публикация в виде брошюры: H. Pohle, Jena, 1891, S. I, 1–31. Перепечатана в кн.: G. Frege, Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien//Herausgegeben und eingeleitet von G. Patzig. Göttingen, 1962; эта книга не раз переиздавалась. Настоящий перевод осуществлен с 3-го, пересмотренного издания (1969), в котором данная работа Фреге занимает с. 17–39; это издание нами обозначается как ***FBB***, а данная статья Фреге — как ***FB***.

[1] Фреге имеет в виду свой доклад «О фрмальных теориях арифметики» («Über formale Theorien der Arithmetik»). Ныне он переиздан в *KS*, S. 105–11). *К с. 216.*

[2] В современном понимании, функция — это соответствие, в силу которого некоторому элементу одного множества отвечает элемент, вообще говоря, другого множества. Запись $y = f(x)$ означает, что задано определенное соответствие между x и y. Но воспринимать запись $f(x)$ можно по-разному: с одной стороны, как указание на соответствие f, с другой же — как значение (одноместной) функции $f(x)$ при каком-то значении x (из заданной области значений). Чтобы различить эти случаи, А. Чёрч в 1932 г. ввел так называемый оператор *функциональной абстракции* λ. Выражение $\lambda x\, f(x)$ означает, что имеется в виду функция (соответствие), а не ее значение для некоторого x. Запись же $\lambda x_1\, f(x_1, x_2)$ указывает на функцию одной переменной x_1 с параметром x_2, а $\lambda x_2\, f(x_1, x_2)$, наоборот, — на функцию от переменной x_2 с параметром x_1; тогда $\lambda x_1 x_2\, f(x_1, x_2)$ означает функцию от двух переменных x_1, x_2 (см.: *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Изд-во иностран. лит-ры, 1957, с. 37). *К с. 218.*

[3] Вместо термина «пробег значений функции» в настоящее время обычно употребляют «область значений функции». Однако в русск. переводе труда Гильберта и Бернайса (*Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979; 2-е изд. М., 1982) используется фрегевский термин (см. с. 33 и далее). *К с. 219.*

[4] Введение понятия *пробега значений функции* в специфическом фрегевском понимании, когда всеобщность равенства значений двух функций отождествляется с равенством пробегов их значений, — это существенное дополнение, сделанное Фреге по сравнению с теорией, изложенной в *BS*. Вместе с допущением абсолютной универсальности предметной области, на которой должны быть определены *все* функции, включая понятия и отношения, это привело к тому, что логико-арифметическая система Фреге оказалась противоречивой. См. об этом в Послесловии в данной книге. *К с. 219.*

[5] Функция, о которой говорит здесь Фреге, — это функция Дирихле. Она может быть выражена не только словесно, но и в виде формулы, правда, довольно сложным образом: $D(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos m!\pi x\right)^{2n}$. *К с. 220.*

[6] В современной логике функции, содержащие предметные переменные и превращающиеся в высказывания (предложения, суждения) при подстановке на место переменных имен произвольных элементов предметной области, называют *пропозициональными*, или *высказывательными*, функциями (функциями-высказываниями). Например, если в функции $x^2 = 9$, $x < 5$, x — *простое число*, вместо x подставлять соответственно 3, 25, 13, мы получим истинное, ложное, истинное высказывания. Объект a (из соответствующей области) удовлетворяет пропозициональной функции $\Phi(x)$, если высказы-

вание, полученное из $Ф(x)$ при подстановке a на место аргумента x, то есть высказывание $Ф(a)$, истинно. *К с. 221.*

[7] В настоящем издании — статья «О смысле и значении», с. 230—246. *К с. 221.*

[8] Здесь Фреге присоединяется к направлению в основаниях математики, сторонники которого полагают, что математика является частью, ветвью логики, — направлению, ныне называемому *логицизмом.* Первым такой точки зрения придерживался, по-видимому, Лейбниц. К этому направлению примыкали, например, Р. Дедекинд, Дж. Пеано, Б. Рассел. Фреге, однако, был, так сказать, неполным «логицистом»: он не сводил к логике геометрию. См. Послесловие «В логическом мире Фреге» (в наст. книге, с. 443 и далее). *К с. 221.*

[9] Согласно современной терминологии, выражение «(   ) завоевал Галлию» является пропозициональной функцией, «Цезарь» — конкретным объектом, вернее, именем конкретного объекта, подставляемым на аргументное место, в данном случае выделенное скобками. Вместо них обычно используется предметная переменная, свободная для подстановки имен предметов. *К с. 222.*

[10] Объекты, которые могут замещать аргументные места, в случае числовой функции образуют область изменения функции. Если речь идет о пропозициональных функциях, то области изменения их аргументов зависят от того, какая предметная область рассматривается в каждом конкретном случае, то есть от «мира речи», или «универсума рассуждения», как сказали бы Дж. Буль и А. Де Морган. А «вести речь», «высказывать нечто» можно, конечно, не только о числах. Область изменения аргументов пропозициональной функции, таким образом, это — некоторая предметная область (область предметов). Фреге считал, что она абсолютно универсальна и все функции должны быть на ней определены. Это касается и числовых функций, почему он ниже и рассматривает выражение $\odot + 1$, которое считает осмысленным, но ложным. Допущение абсолютной универсальности «универсума рассуждения» — допущение, согласно которому *предметом является все то, что не есть функция,* — привело к тому, что логико-арифметическая система Фреге, изложенная в «Основных законах арифметики» (т. I, 1893) оказалась противоречивой. См. подробнее в Послесловии в данной книге. *К с. 223.*

[11] В «Исчислении понятий» 1879 г. (см. наст. кн., с. 68—69). *К с. 224.*

[12] Онтологическое доказательство бытия Бога исходит из понятия о Боге как абсолютно необходимой сущности, обладающей всеми возможными совершенствами. Выдвинутое еще Августином Блаженным (354—430) и развитое далее Ансельмом Кентерберийским (1033—1109), оно было сформулировано Р. Декартом (1596—1650) в виде «силлогизма»: Бог необходимо обладает всеми совершенствами; существование есть одно из совершенств; следовательно, Бог существует. Это — «картезианское» — доказательство подверг критике И. Кант еще в свой «докритический» период, а в «Критике чистого разума» посвятил этому вопросу целый раздел — «О невозможности онтологического доказательства бытия Бога». Понятие Бога, писал Кант, как «абсолютно необходимой сущности есть чистое понятие разума, то есть лишь идея, объективная реальность которой не доказана тем, что разум нуждается в ней» (*Кант И.* Соч.: В 6 т. Т. 3, М., 1964. С. 517). *Бытие*, утверждал он, не есть «реальный предикат», в своем «логическом применении» оно есть лишь связка в суждении (там же, с. 521).

Фреге постарался внести логическую ясность в эти положения Канта. Еще в «Основных законах арифметики» (1884), в § 53, он отверг взгляд, будто существование есть свойство *предметов.* В предложении «Лошади существуют» утверждается не бытие лошадей, а то, что понятие *лошадь* не пусто. *Бытие* является, по Фреге, понятием *второй* ступени и может быть высказано лишь о понятиях первой ступени. К Фреге восходит надолго утвердившийся в логике взгляд, что существование передается соответствующим *квантором* вида $\exists x\, A(x)$. В последние десятилетия XX в., однако, получили развитие «нефрегевские» логические системы, в которых бытие трактуется как предикат. Об онтологическом доказательстве бытия Бога с логической точки зрения см. статью: R[einer] Wi[mmer]. Gottesbeweis (раздел 2) в кн.: Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie, Bd. 1. Herausgegeben von J. Mittelstraß, 1980, S. 800—804. *К с. 227.*

[13] *Г. Патциг* в подстрочном примечании к этой статье Фреге (в издании *FBB*) отмечает (с. 38), что данная фукнция служит определению понятия «однозначного соответствия» (eindeutige Beziehung). *К с. 228.*

[14] Ср. *GGI*, § 21–25, S. 36–42. *К с. 229.*

О СМЫСЛЕ И ЗНАЧЕНИИ

Über Sinn und Bedeutung

Статья впервые опубликована в журнале Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Bd. 100, 1892: S. 25–50. Перевод выполнен по этому изданию; при переводе учтены исправления и замечания Г. Патцига, сделанные при ее переиздании в кн.: *FBB*, S. 40–65.

[1] В *BS* и *GL* понятие *равенства* (тождества, одинаковости) — в применении к языковым и неязыковым объектам — не было подвергнуто тому детальному анализу, которого оно заслуживает. Теперь Фреге предпринимает такой анализ. Данная его статья представляет собой одну из наиболее глубоких работ великого логика. При ознакомлении с ней мы рекомендуем читателю учесть относящиеся к ее тематике места во Введении Алонзо Чёрча в его книге «Введение в математическую логику» (М., 1960. Т. 1). *К с. 230.*

[2] Фреге имеет в виду статью «О понятии и предмете» (см. в наст. кн., с. 253–262). *К с. 231.*

[3] Вопрос о смысле «подлинно собственных» — личных имен типа «Аристотель» — уязвимый пункт учения Фреге о «смысле и значении». А. Чёрч предложил считать, что смысл личного имени заключается в том, что это имя обозначает данный предмет. Но сам Фреге занимал иную позицию. То, что он фактически предлагает, состоит в том, что с каждым такого рода именем надлежит связывать какое-либо описательное имя, имеющее то же значение, в случае Аристотеля, например, имя — «ученик Платона и воспитатель Александра Великого». При таком подходе оба имени будут считаться имеющими не только одно и то же (предметное) значение, но и одинаковый смысл, заключенный в описательном «напарнике». В естественном языке это, конечно, субъективизирует смысл личных имен. Но Фреге это особенно не беспокоит, так как его анализ нацелен на точные — и прежде всего логические — языки науки, выражения которых четко определены по смыслу и значению и поэтому лишены субъективности. *К с. 231.*

[4] Знаменитое учение Фреге о соотношении *знака* (имени, языкового выражения и пр.), обозначаемого знаком, предмета — *значения* знака и его *смысла* положило начало развитию того раздела логической семантики, который известен ныне как *теория референции*. *К с. 231.*

[5] Логико-семантические работы Фреге, особенно же данная статья, утвердили в логике различение *упоминания* (цитирования) языковых выражений (для этого в письменной речи используются разного рода кавычки, курсив и другие способы выделения) и их *употребления — прямого* и *косвенного*. Косвенное употребление выражений, выявляющее их *смысл*, в последующем развитии привело к учениям *интенсиональной логики*, противостоящей *логике объема* или *экстенсиональной логике*. Сам Фреге, развивая свое логическое исчисление, стоял на точке зрения последней, но в своих логико-семантических работах, в том числе и в данной статье, в определенном смысле предугадал возможности *логики содержания*. *К с. 232.*

[6] *Буцефал* — имя коня Александра Великого. *К с. 232.*

[7] Вопросы, затронутые в этом абзаце, Фреге подробно анализирует в своих «Логических исследованиях» (см. третью часть наст. книги). *К с. 233.*

[8] Фреге имеет в виду статью «О понятии и предмете» (см. наст. книги, с. 253–262). *К с. 235.*

[9] В этой статье Фреге еще не очень настаивает на объективности мысли, что характерно для более поздних его работ, особенно же для «Логических исследований» (см.

третью часть наст. книги). Ср. слова Фреге о том, что с одним и тем же словом разные люди могут связывать разные смыслы. При этом смысл, утверждает он здесь же, не является чем-то субъективным. *К с. 235.*

[10] Не совсем ясно, в каком смысле здесь и далее употребляет Фреге выражения *субъект* и *предикат.* В *BS* он отверг субъектно-предикатный анализ суждений. По-видимому, в данном случае субъект для него — индивидуальный предмет (мысль, что 5 есть простое число, см. ниже), а предикат — свойство быть истинным. *К с. 235.*

[11] Это можно представить таблицей:

А	*А* истинно
и	*и*
л	*и*

где *и* и *л* — обозначение *истины* и *лжи. К с. 235.*

[12] «Тождественные [термины] суть те, которые можно подставлять один вместо другого с сохранением истинности» (лат.). Г. Патциг в подстрочном примечании к переизданию (в *FBB*) данной статьи Фреге обращает внимание на то, что в «Основаниях арифметики» приводится иной вариант той же мысли: «Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate» — «*Тождественные* [термины] суть те, один из которых может быть поставлен вместо другого с сохранением истинности» (Определение 1 в работе «Не лишенный изящества опыт абстрактных доказательств» — *Лейбниц.* М., 1984. Т. 3. С. 632). Что касается Лейбницевой дефиниции равенства (тождества) языковых выражений, приведенной Фреге в данной статье, то Патциг находит ее — с заменой слова *mutuo* на *ubisque* — в кн: *Couturat L.* Opuscules et Fragmentes de Leibniz, S. 264. См. *FBB*, S. 50. *К с. 235.*

[13] В основу следующей ниже классификации придаточных предложений немецкого языка Фреге положил такую классификацию частей независимого (главного) предложения, в которой сочетается различение *членов предложения* (подлежащее, сказуемое, дополнение), с одной стороны, и различение того, что принято называть *частями речи* (существительное, прилагательное, наречие) — с другой; эта классификация, по-видимому, отражала состояние немецкой грамматической теории того времени и вместе с тем была связана — для Фреге — с задачей «объединения того, что является логически однородным» (ниже, с. 237). Все это существенно затрудняет перевод последующего текста. Чтобы полнее воспроизвести ход рассуждений Фреге, мы для передачи применяемых им терминов *Nennsatz*, *Beisatz* и *Adverbsatz* используем серию описательных оборотов — путь, на который до нас вступил первый переводчик данной статьи на русский, Е. Э. Разлогова (см.: *Фреге Г.* Смысл и денотат//Семиотика и информатика. Вып. 8. М., 1977. С. 181–210), и опыт которой был нами учтен. Обращаем внимание на то, что мы отказались от передачи выражения «Nennsatz» как «дополнительного и подлежащного придаточного предложения» (Разлогова) в пользу менее определенного термина — *называющее предложение.* Читателю, желающему глубже вникнуть во фрегевские дистинкции, относящиеся к *немецкому* языку, мы рекомендуем, наряду с нашим переводом, воспользоваться переводом 1977 года, памятуя при этом, однако, что в нем не отражены некоторые *логические* тонкости, да и весь перевод грешит известной терминологической модернизацией (так, в нем немецкий термин *Bedeutung* передан англицизмом «денотат»). *К с. 236.*

[14] Фреге поднимает здесь проблему того, что впоследствии получило название *эпистемических модальностей,* — проблему, которая со временем вылилась в направление так называемой *эпистемической логики* как «логики знания» и «логики веры». В последующих рассуждениях Фреге многое можно считать определенным подходом к такого рода логике. *К с. 237.*

[15] Имеется в виду битва при Ватерлоо. *La belle Alliance* — название хутора, недалеко от которого находился центр французской позиции. Командный пункт Веллингтона был расположен в селении Ватерлоо. *К с. 238.*

[16] Здесь Фреге фактически возвращается к той трудности, с преодоления которой он начал свою статью, — к тому, что впоследствии получило название *антиномии отноше-*

ния именования. Суть этой антиномии (которая была известна уже Лейбницу) в том, что обращение с выражением, имеющим *косвенное* значение, как с выражением, обладающим *прямым* значением, способно из истины порождать ложь. В данном случае, если в истинном предложении «Из того, что Земля шарообразна, Колумб заключил, что, отправившись на запад, он сможет достичь Индии» заменить слово *Земля*, имеющее косвенное значение, выражением *планета, спутник которой обладает диаметром большим, чем одна четвертая часть его собственного диаметра*, — выражением, прямое значение которого совпадает с прямым значением слова «Земля», то мы получим явно ложное предложение. Эта антиномия получила широкую известность после приведенного Б. Расселом примера, в котором фигурировали *Вальтер Скотт* и *автор Ваверлея.* См. об этом Послесловие в данной книге. *К с. 238.*

[17] Иначе говоря, высказывание «Кеплер не умер в нищете, или имя 'Кеплер' ничего не означает» является отрицанием высказывания «Кеплер умер в нищете, и имя 'Кеплер' имеет значение»; в тексте Фреге слова «и имя 'Кеплер' имеет значение» подразумеваются. По правилам логики высказываний $\neg(A \ \& \ B)$ равносильно тому, что $\neg A \vee \neg B$. *К с. 241.*

[18] Напомним, что Фреге подразумевает здесь *формальную импликацию*, то есть условное суждение, выражающее всеобщность. В следующем абзаце речь пойдет об «обычном» условном суждении. *К с. 241.*

[19] Фреге имеет в виду следующий факт. В 1864 г. канцлер Пруссии Бисмарк развязал (в союзе в Австрией) войну против Дании, кончившуюся тем, что датские владения — княжества Шлезвиг и Гольштейн отошли: первое к Пруссии, а второе к Австрии. Последовавшая затем австро-прусская война 1866 г. привела к тому, что Шлезвиг—Гольштейн стал прусской провинцией. *К с. 241.*

[20] Здесь Фреге определяет материальную импликацию $A \supset B$ через дизъюнкцию и отрицание, как $\neg A \vee B$. Данный пример — да и весь ход мысли автора — показывает, что он не предполагает смысловой связи между условием A и следствием B. Подобное истолкование союза «если..., то», как показало последующее развитие оснований математики, вполне отвечает тем целям, которые ставили Фреге, Рассел и другие математические логики, разрабатывавшие философско-математические вопросы. Но уже при жизни Фреге начали возникать концепции, авторы которых стремились к созданию таких логических систем, в которых отражалась бы содержательная связь между антецедентом и консеквентом импликативного суждения (теории «строгой импликации»). *К с. 243.*

[21] В этих и ряде других предшествующих и последующих рассуждений Фреге предполагается *принцип контекстности*, то есть зависимости смысла слов от контекста, в том числе и ситуационного. Этот принцип имелся в виду уже в «Основаниях арифметики» 1884 г., но там он не получил применения в силу самой тематики книги — логико-арифметической и философско-математической. *К с. 244.*

[22] Август *Бебель* (1840—1913) — один из основателей (в 1869 г.) марксистской «Социал-демократической рабочей партии» Германии, активный деятель II Интернационала. Фреге резко отрицательно относился к социал-демократизму и марксизму, что и прозвучало в приводимом им примере: Фреге подразумевает, что высказанная Бебелем мысль *ошибочна.* В своих «Логических исследованиях» Фреге относит неявные аспекты содержания предложений к их «окраске» (см. третью часть наст. кн.). В том же духе высказывается Фреге и относительно выражения «воля народа», которое он не без основания считатет не имеющим четкого смысла и служащего лишь для демагогических злоупотреблений (ср. *Gabriel G.* Der Logiker als Metaphoriker. Zur philosophischen Rhetorik Freges//G. Gabriel. Zwischen Logik und Literatur. Stuttgart, 1991, S. 65—88). Эти взгляды Фреге — только в гораздо более резкой форме — представлены в его (политическом) «Дневнике» 1925 г., где он говорит, например, что слово «капитализм» употребляется без четко очерченного смысла — его содержание содержит больше от чувства, чем от зрелой мысли. О «Дневнике» Фреге см. Введение в наст. книге. *К с. 244.*

[23] Этот пример Фреге становится яснее, если перевести его на язык логики предикатов. Обозначив лед буквой *a*, а свойство обладать удельным весом, который меньше удельного веса воды, буквой *P*, мы получаем *P* (*a*) как значение первой мысли. Вторая мысль представляет собой формальную импликацию $\forall x\,(P(x) \supset Q\,(x))$, где *Q* обозначает свойство плавать в воде. Из этих посылок *Q* (*a*) — утверждение, что лед плавает в воде, — получается, только если мы применим правило удаления квантора общности. Смысловое единство трех выделенных Фреге мыслей связано с наличием во второй мысли «неопределенно» указывающего компонента *нечто* (etwas). *К с. 245.*

[24] Грамматика относит такие предложения к обстоятельственным условным предложениям нереального характера. В современной логике их называют *контрфактическми*, то есть противоречащими факту. Их рассмотрению ныне посвящено немало работ, и Фреге, таким образом, стоит у истоков также и этого направления логических (точнее логико-семантических) исследований. *К с. 245.*

[РАЗМЫШЛЕНИЯ О СМЫСЛЕ И ЗНАЧЕНИИ]

Ausführungen über Sinn und Bedeutung

Первая публикация в Nachgelassene Schriften, S. 128–136.

Как указывают издатели «Наследия» Фреге, эти «Размышления» были составлены не ранее 1892 г., когда из печати вышло сочинение Фреге «О смысле и значении». Они составляют вторую часть документов из папки, озаглавленной «Логика Шрёдера». Эта рукопись существовала в полном варианте, но либо погибла вместе с архивом Фреге, либо (если архив сохранился) до сих пор не найдена. Первая ее часть представляла собой набросок статьи Фреге «Критическое рассмотрение некоторых пунктов в «Лекциях по алгебре логики» Э. Шрёдера». Заголовок публикуемому тексту дан издателями «Наследия», на что указывают квадратные скобки, в которые он заключен.

[1] С каждым понятием связываются *содержание* — совокупность признаков предметов, отражаемых в понятии, и *объем* понятия — множество (класс) предметов, подпадающих, как выражается Фреге, под данное понятие. В логике классов (алгебре логики) оперировали объемами понятий. В зависимости от контекста выбирался универсум (целое), например рациональные числа. В качестве подклассов этого универсума могут выступать целые числа, натуральные числа, правильные дроби, отрицательные, рациональные числа, квадраты целых чисел и т.п. Признаками чисел как предметов, называемых четными числами, являются: быть целым числом и быть кратным двум.

В зависимости от того, что́ принимается в качестве первичного — содержание или объем, говорят о *логике содержания* и *логике объема*. Первую ныне обычно называют *интенсиональной* логикой, вторую — *экстенсиональной*. Хотя, как ясно показывает статья «О смысле и значении», Фреге фактически стоит у истоков первой, для теоретического рассмотрения он считал эффективной и строил только вторую — объемную — логику. И эту позицию он решительно отстаивает в настоящих «Размышлениях». *К с. 247.*

[2] В наст. книге, с. 230–246. *К с. 247.*

[3] В наст. книге, с. 215–229. *К с. 247.*

[4] Как отмечают издатели «Наследия» (*NS*, S. 129), *В. Вундт* в томе I своей «Логики» (Фреге пользовался ее первым изданием 1880 г.), рассматривая предикативную часть единичного суждения и противопоставляя ее его, суждения, субъекту, трактует последний как «вариабельную составную часть мысли» (с. 141); это сходно с тем, как Фреге использует категорию «ненасыщенности» в применении к понятиям. Подобную же аналогию можно усмотреть и в использовании Вундтом и Фреге термина «предикативно». *К с. 248.*

[5] Это суждение, составляющее *материальную импликацию*: $\forall x\,(P(x) \supset Q\,(x))$, где *P* («равносторонний треугольник») и *Q* («равноугольный треугольник»), имеет, разумеется,

предикативную природу, выражающуюся в наличии «неопределенного указателя» (*нечто — это*), который служит для выражения всеобщности. *К с. 248.*

[6] История *отказа от универсальности* анализа суждений в терминах *субъекта* и *предиката* — относительно самостоятельная глава в истории логики. Лейбниц, например, полагал, что анализ предложений возможно осуществить, если все их привести к субъектно-предикатной форме, то есть к виду «*А* есть *В*» или «Все *С* суть *D*». Но уже Де Морган (ср. комментарий 8 к «Исчислению понятий»), изучая роль связок в предложениях, пришел к мнению, что субъектно-предикатная форма — не самая целесообразная для логического анализа предложений. Связка «есть» (или «суть») зачастую вуалирует, скрывает отношения между субъектом и предикатом. Отсюда задача — специально исследовать те свойства связок, которые используются в теории логического вывода. В результате он пришел к необходимости изучать абстрактные отношения. Де Морган явился первым из тех логиков, которые заложили основы современной *теории отношений* (см. об этом, например: *Кузичева З. А.* Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и кибернетики//Вопросы кибернетики I). Э. Шрёдер, существенно развивший теорию отношений, вместе с тем пользовался и субъектно-предикатным анализом предложений. Более того, его исходная логическая теория (которую он, впрочем, считал чисто математической) предполагала, так сказать, двойное понимание связки «есть» — «суть» (см.: *Бирюков Б.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике. М., 1963. С. 34 и далее; при ссылках: ***Бирюков*, 1963**), что как раз и отвергает Фреге, настаивая на различии отношения подпадения предмета под понятие и отношения подчинения понятий. Полемике со Шрёдером по этому вопросу Фреге посвятил отдельную статью (см. в наст. кн., с. 263—276). *К с. 249.*

[7] В заметке «О понятии числа. [2. Дискуссия с Керри]» Фреге пишет: «Если в предложении «Все млекопитающие суть сухопутные [животные]» принять в качестве субъекта «все млекопитающие», а в качестве предиката «*суть сухопутные* [животные]», то для отрицания всего предложения необходимо отрицать предикат, и мы получим «не суть сухопутные [животные]». Если вместо этого поставить отрицательную частицу «не» перед «все», то отсюда логически будет следовать, что «все» логически относится к предикату. Наоборот, если мы отрицаем предложение «Понятие млекопитающее подпадает под понятие сухопутное [животное]», то получим: предикат: «не подпадает под понятие сухопутное [животное]» (*NS*, S. 115, левый столбец). *К с. 249.*

[8] Данное определение *тождества* (равенства) предметов совпадает с принципом тождества неразличимых Лейбница. См. комментарий 12 к статье «О смысле и значении». *К с. 249.*

[9] Издатели «Наследия» отмечают, что в более ранних вариантах текста, положенных в основу настоящего издания, этот абзац, частично повторяющий уже сказанное, Фреге вычеркнул или заключил в скобки. Работу о функции и понятии, которую он упоминает, см. в наст. кн., с. 215—229. *К с. 250.*

[10] В имеющихся рукописях Фреге не вводит этот символ. В примечании к *NS* (S. 132) высказано предположение, что он был в отсутствующей первой части рукописи Фреге. *К с. 250.*

[11] Согласно Гомеру, слово μῶλυ означает волшебную траву, полученную Одиссеем от Гермеса (Эрмия), чтобы он мог защититься от козней волшебницы Церцеи. «Корень был черный, подобен был цвет молоку белизною; / *Моли* его называют бессмертные [боги]» («Одиссея» в пер. В. Жуковского). *К с. 251.*

[12] *Навсикая* — в греческой мифологии дочь царя феаков Алкиноя, оказавшая помощь Одиссею при возвращении домой («Одиссея», VI, 12—322). *К с. 251.*

[13] Доклад был прочитан на заседании Иенского медицинского и естественно-научного общества 17 июля 1885 г. Он назывался «Ueber formale Theorien der Arithmetik» и был опубликован в трудах упомянутого общества: Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. XIX, 1886, S. 94—104. Впоследствии он вошел в издание «Kleine Schriften». *К с. 251.*

[14] Фреге имеет в виду рецензию *Гуссерля* на Шрёдеревы «Лекции по алгебре логики» (*E. Schröder.* Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik), Bd.1, Leipzig, 1890);

которые были опубликованы в «Ученых записках» Гёттингенского научного общества — Göttingische gelehrte Anzeigen, Jg. 1891, Heft vom 1. April, S. 243—278. См. примеч. к с. 134 «Наследия». *К с. 251.*

[15] В рассматриваемых Фреге местах «Введения» Э. Шрёдера к тому I его «Лекций» последний связывает с оканчивающимися на «-значный» (-deutig) прилагательными количественные указания на объемы понятий. Рассуждая об именах, он называет собственные имена «однозначными» (eindeutig), общие имена (Gattungsnamen), вроде «моя рука» — «двузначными» (zweideutig), общие имена вообще — «многозначными» (mehrdeutig), а такие слова, как «ничего» (nichts) или «круглый квадрат», — «нульзначными» (undeutig). Соответствующие словообразования с окончанием «-смысленный» (-sinnig) служат Шрёдеру для отличения терминов, обладающих ровно одним фиксированным словоупотреблением (einsinnig или univok), от терминов, имеющих большее число смыслов (doppelsinnig, mehrsinnig или äquivok), а также терминов, лишенных смысла (unsinnig), к которым, по Шрёдеру, относится, например, «круглый квадрат». Ср. примеч. издателей фрегевского наследия, с. 134. *К с. 251.*

[16] В примечании издателей «Наследия» отмечается, что согласно замечанию специалистов, которые ранее занимались текстами Фреге, положенными в основу *NS*, из оригинала рукописи было не вполне ясно, к какому месту своих размышлений собирался Фреге отнести дополнение, напечатанное здесь в качестве примечания. Издатели следовали предложению своих предшественников. *К с. 251.*

О ПОНЯТИИ И ПРЕДМЕТЕ

Über Begriff und Gegenstand

Статья впервые опубликована в журнале Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie, Bd. XVI, 1892, S. 192–205; перевод выполнен по первопубликации. Статья перепечатана в изданиях: *FBB* и *KS*. В последующем данная статья будет обозначаться как ***BG***. Во фрегевском оригинале в качестве средства выделения используется разрядка. В соответствии с традицией переиздания трудов Фреге мы везде заменили разрядку курсивом.

[1] Бенно *Керри* (Benno Kerry) — приват-доцент (философия) в университете Зальцбурга. Фреге имеет в виду восемь статей Керри под названием «О наглядном представлении и его переработке в психике» (Über Anschanung und ihre psychische Verarbeitung), опубликованных в издании: Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie, Bd. IX, 1885, S. 433—493; Bd. X, 1886, S. 419—467; Bd. XI, 1887, S. 53—116, 249—307; Bd. XIII, 1889, S. 71—124, 392—419. *К с. 253.*

[2] Фреге различал *грамматический субъект* и *грамматический предикат*, с одной стороны, и *логический субъект* и *логический предикат* — с другой. В подстрочном примечании, относящемся к этому месту текста Фреге, первый переводчик (Е. Э. Разлогова) этой статьи, названной «Понятие и вещь» (Семиотика и информатикам, М., 1978. Вып. 10) справедливо отмечает (на с. 190), что Фреге часто просто говорит о *субъекте* и *предикате*. Это значит, что смысл этих выражений — грамматический или логический — устанавливается из контекста. Там же отмечается, что грамматические субъект и предикат понимаются Фреге как группа подлежащего и группа сказуемого. Мы рекомендуем читателю при изучении данной работы Фреге пользоваться также переводом 1978 г. *К с. 254.*

[3] Полемике со *Шрёдером* по этому вопросу посвящена помещенная ниже статья Фреге. *К с. 254.*

[4] Под *полным корнем*, который Шрёдер обозначает с помощью удвоенного знака корня $\sqrt{\sqrt{a}}$, подразумевается класс тех элементов, который состоит из всех тех чисел, квадрат которых равен a — в отличие от $\sqrt{a}$, представляющего одно определенное число из этого класса. В качестве примера «полного корня» Шрёдер записывает:

$$\sqrt{9} = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases} \text{или, короче, } \sqrt{9} = \pm 3 \quad .$$

См.: *E. Schröder.* Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik). Bd. I, Leipzig; B.G. Teubner, 1890 (репрографическое переиздание и исправлениями: Chelsea Publishing Company, Bronx; New York, 1966), S. 137 ff.; при ссылках на этот труд: ***Schröder*** **I**, 1890. *К с. 254.*

[5] В наст. кн., статья «О смысле и значении», с. 230–246. *К с. 255.*

[6] Наличие в немецком языке *определенного* и *неопределенного* артиклей облегчает задачу Фреге — провести различие между (единичным) предметом и понятием. В русском языке для этого приходится пользоваться оборотами «тот, который», «некоторый», и т.п., а также опираться на ситуативный и языковой контексты. *К с. 255.*

[7] «Ein edler Rat»; это устаревшая титулатура важной персоны: в выражении «Один благородный советник» вместо определенного артикля, который служил бы указанию на конкретное лицо, используется артикль неопределенный. Что касается термина Rat — «советник», то оно входило составной частью в почетные звания старой Германии: Hofrat — «надворный советник», Geheimrat — «тайный советник». Подобная титулатура имела параллели и в дореволюционной России. Впрочем, с точки зрения противопоставления двух разных немецких артиклей отдаленными аналогами могут, пожалуй, считаться обращения «Ваше благородие» и «Ваше превосходительство», хотя они и подобны немецким выражениям «Euer Wohlgeborene» и «Euere Exzellenz». *К с. 255.*

[8] Этот вопрос детально рассматривается Фреге в его «Логических исследованиях» (см. третью часть наст. книги). *К с. 256.*

[9] Фреге, по-видимому, ссылается на публикацию Керри в томе XI (1887) издания, указанного в комментарии 1. *К с. 257.*

[10] О фрегевском понимании чисел и их задании см. Послесловие в данной книге. *К с. 258.*

[11] Имеются в виду города, где происходили коронация императоров «Священной римской империи германской нации», либо где была их резиденция, хранились ценности, принадлежавшие императору. «Имперскими городами» считались Вена, Франкфурт (на Майне), Аахен. *К с. 259.*

[12] Не ясно, какую статью имеет в виду Фреге: вторая публикация Керри (т. X) занимает с. 419–467. Ср. комментарий 1. *К с. 260.*

КРИТИЧЕСКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПУНКТОВ В «ЛЕКЦИЯХ ПО АЛГЕБРЕ» Э. ШРЁДЕРА

Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik

Первая публикация: Archiv für systematische Philosophie, Bd. I, Heft 4, 1895, S. 433–456. Статья перепечатана в издании: *G. Frege.* Logische Untersuchungen. Herausgegeben und eingeleitet von Günther Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen, 1966; в следующем году она вошла в состав «Kleine Schriften». Перевод выполнен по изданию 1895 г.

[1] *Schröder* I, 1890. *К с. 263.*

[2] Термин *многообразие* (Mannigfaltigkeit) Шрёдер и Фреге употребляют здесь в смысле, которому в настоящее время обычно отвечают слова «совокупность», «множество». Термин же «многообразие» в настоящее время широко используется в топологии («топологическое многообразие»). *К с. 263.*

[3] В этой, как и в ряде других статей, Фреге пользуется двумя способами выделения фрагментов текста с помощью кавычек: путем обычных («двойных») кавычек выделяются *цитаты*, путем «одинарных» кавычек (постановка запятых до и после выражения) осуществляется то, что ныне называют его *упоминанием*. *К с. 263.*

[4] У Шрёдера пункт α) означает: под используемыми им буквами подразумеваются *области* некоторого многообразия элементов, пункт β) — *классы* или роды индивидов, особенно понятия, рассматриваемые с точки зрения их объема (см. *Schröder* I, S. 160). *К с. 264.*

[5] *Тождественное исчисление областей некоторого многообразия* (indentischer Kalkül mit Gebieten einer Mannigfaltigkeit) строилось Шрёдером как, говоря современным языком, алгебраическая структура, называемая *решеткой* (lattice) — частично-упорядоченное множество элементов («областей» многообразия *M*), порядок на котором устанавливается отношением включения области в область (отношением субсумции $\Subset$) и на котором определены две бинарные операции — *тождественное умножение* и *тождественное сложение*; они представляют собой операции взятия *точкой нижней* и *точкой верхней* граней для любых двух элементов (областей) многообразия *M*. Введя в качестве наименьшего элемента решетки «несобственный» элемент 0 путем *дефиниции* ($2_\times$) $0 \Subset a$ и установив (*дефиниция* (2_+)), что наибольший элемент 1, совпадающий с *M*, определяется как $a \Subset 1$ (где *a* — произвольный элемент рассматриваемого многообразия), Шрёдер получает следующую систему постулатов:

$$[1_\times]\quad a\cdot b \Subset a \qquad\qquad [1_+]\quad a \Subset a+b$$

$$[2_\times]\quad a\cdot b \Subset b \qquad\qquad [2_+]\quad b \Subset a+b$$

$$[3_\times]\quad \frac{c \Subset a,\ c \Subset b}{c \Subset a\cdot b} \qquad\qquad [3_+]\quad \frac{a \Subset c,\ b \Subset c}{a+b \Subset c}.$$

Так как отношение $\Subset$ есть отношение частичного порядка, наподобие отношения ≤ для чисел, формулы $[1_\times]$, $[2_\times]$ могут читаться: $a \cdot b$ меньше или равно *a* и меньше или равно *b*, а формула $[3_\times]$ — как утверждение того, что элемент $a{\cdot}b$ является самым большим (в смысле отношение $\Subset$) из тех элементов, которые меньше или равны *a* и меньше или равны *b*; ибо любой элемент *c*, который тоже меньше или равен *a* и меньше или равен *b*, оказывается обязательно меньшим или равным элементу $a \cdot b$. Элемент $a \cdot b$ — результат *тождественного перемножения* элементов *a* и *b* называется поэтому *точной нижней гранью* для элементов *a* и *b*. Очевидно, что из $[1_\times]$, $[2_\times]$ и $[3_\times]$ следует: если $c \Subset a\cdot b$, то $c \Subset a$, $c \Subset b$; это объясняет замысел введения Шрёдером операции *тождественного умножения* путем неявного определения — с помощью дефиниции (3) (с. 196, 197 тома I «Алгебры логики»): если $c \Subset a$, $c \Subset b$, то $c \Subset a\cdot b$, и наоборот: если $c \Subset a\cdot b$, то $c \Subset a$, $c \Subset b$. Из этой дефиниции непосредственно получаются $[1_\times]$, $[2_\times]$ и $[3_\times]$.

Аналогичные выкладки для *тождественной суммы* $a + b$ мы представляем читателю. Приведем только шрёдеровское определение операции *тождественного сложения*, которое мы на этот раз позволим себе записать в более наглядном виде логического перехода «сверху вниз и снизу вверх»:

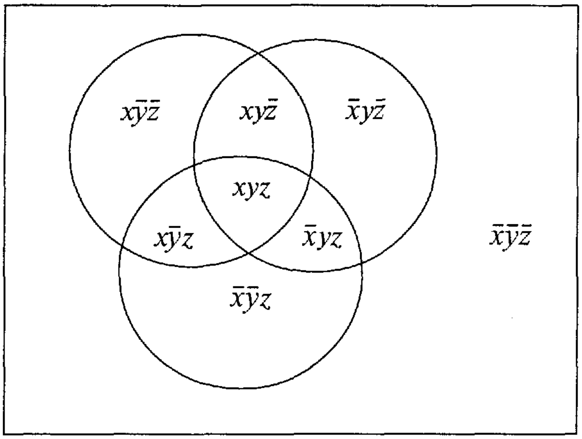
$$\Big\downarrow\ \frac{a \Subset c,\ b \Subset c}{a+b \Subset c}\ \Big\uparrow\ .$$

Для логики особое значение имеют так называемые *импликативные решетки*, в которых, помимо «·» и «+», определена бинарная операция, в некотором смысле обратная операции умножения (*деление* в решетке); название «импликативная» объясняется тем, что при переходе к логике (высказываний) деление оказывается (материальной) *импликацией*. Понятие импликативной решетки предполагает, что в ней имеется наибольший элемент — у Шрёдера им является 1, и что в ней может быть определена операция отрицания, если имеется также наименьший элемент; таковым в тождественном исчислении является 0. Отрицание вводится Шрёдером путем неявного определения — дефиниции (6) (с. 302 тома I «Алгебры логики»): отрицанием для *a* объявляется такой элемент $\bar{a}$ (Шрёдер пишет a_1, но мы будем пользоваться привычной ныне записью), что

$a\bar{a} \mathrel{=\!\!\!(} 0$ и $1 \mathrel{=\!\!\!(} a + \bar{a}$, откуда, в силу свойств 0 и 1, сразу получается: $a\bar{a} = 0$ и $1 = a + \bar{a}$; это конституирует *булеву решетку — булеву алгебру* в узком смысле.

В этом шрёдеровском построении логика находится как бы за сценой; приходится «держать в уме», что, например, решеточное отрицание оказывается в логике классов *дополнением* (до универсального класса 1), а в логике высказываний — обычным, таблично эксплицируемым отрицанием; что в логике классов «тождественное умножение» двух классов означает построение их пересечения, а «тождественное сложение» — построение их объединения. *К с. 264.*

[6] Этот упрек Фреге не вполне оправдан. Действительно, для «графического» представления исчисления областей (классов) *диаграммы Эйлера* (круги) не достаточны. Они разработаны Эйлером для иллюстрации соотношения терминов в традиционных суждениях. В алгебре логики более плодотворны диаграммы, разработанные Джоном Венном (J. Venn, 1834—1923), английским логиком и философом, автором труда Simbolic Logic (London, 1881). Метод *диаграмм Венна* является обобщением и развитием метода Эйлера; диаграммы Вена — это геометрическое изображение универсума вместе с подклассами, на которые универсум разбивается данными классами; эти подклассы — конституенты данной задачи (см. комментарий 29 к статье «Булева вычислительная логика и мое исчисление понятий»). Если в задаче речь идет об n классах, то универсум разбивается на 2^n подклассов. Так, при $n = 3$ конституенты классов x, y, z получают следующее представление:



Здесь три взаимопересекающихся круга представляют классы x, y, z, а прямоугольник отграничивает весь универсум. Диаграммы Венна были задуманы не просто как иллюстративный аппарат, но, главным образом, как инструмент для решения задач логики классов (см., например: *Кузичев*). *К с. 265.*

[7] Если данные классы не имеют общих элементов, то их пересечение пусто (не содержит ни одного элемента). На кругах Эйлера непересекающиеся классы изображаются, например, в виде отстоящих друг от друга на некотором расстоянии кругов. На диаграммах Венна пустые классы иногда заштриховывают. *К с. 265.*

[8] Возможность различной интерпретации («перевода») логических формул предусматривалась уже Булем. Он подчеркивал, что особенности исчисления зависят не от природы объектов, к которым применяются операции, а от законов, которым эти операции подчинены: «Те, кто знаком с подлинным состоянием символической алгебры, понимают, что обоснованность процессов анализа зависит не от интерпретации используемых символов, а лишь от законов их комбинирования. Равно допустима любая интерпретация, сохраняющая предложенные отношения, и, таким образом, подобный процесс анализа может при одной интерпретации представлять решение задачи теории

чисел, при другой — геометрической, а при третьей — проблемы динамики или оптики» (*Boole*, 1847, p. 3). *К с. 266.*

[9] Если буквами A и B обозначены некоторые классы, то есть объемы данных понятий, то предложение «Все A суть B» понимается естественным образом: каждый предмет, подпадающий под понятие, объем которого обозначен буквой A, является в то же время предметом, подпадающим под понятие, объем которого обозначен буквой B. Конечно, на практике такие длинноты не используются. Чтобы избежать упрека, подобного тому, какой здесь Фреге бросает Шрёдеру, приводя следующий ниже пример, Дж. Буль в своем «Математическом анализе логики» ввел двойные обозначения: классы, представляющие понятия, он обозначал строчными буквами, а предметы, подпадающие под соответствующие понятия, — прописными. Если x, y — некоторые классы, то, чтобы обозначить включение класса x в класс y, Буль пишет «Все X-ы суть Y-ки». *К с. 266.*

[10] Принцип II выражает транзитивность шрёдеровской субсумции: $a \mathrel{\not\prec} b$ и $b \mathrel{\not\prec} c$ влекут $a \mathrel{\not\prec} c$. О смысле субсумции и знаке $\mathrel{\not\prec}$ см. следующий комментарий. *К с. 266.*

[11] Разногласия между Фреге и Шрёдером определялись глубоким различием их взглядов на природу логики. Фреге исходил из положения, согласно которому законы логики столь универсальны, что распространяются на *любые* предметы, в силу чего недопустимо какое-либо ограничение предметной области. Кроме того, он считал логику *предшествующей* математике (арифметике и анализу). Шрёдер же, предпосылая логике свое тождественное исчисление областей некоторого многообразия, относил его не к логике, а *к математике* (предлагая, для начала, исходить из такого многообразия, как многообразие точек на плоскости). Далее, он указывал, что если под 1 понимать всеохватывающий, совершенно «открытый» класс — в том смысле, в каком понимал Буль свой univers of discource, — то мы придем к формальному противоречию. Получается оно так. Субсумцию $0 \mathrel{\not\prec} a$ Шрёдер читает «0 есть субъект для всякого предиката», а 0 — как «ничто» или «ничего», в терминах классов это *пустой класс*. Если допустить, что универсум включает *все* мыслимое, то в нем должен быть и класс a, состоящих из всех тех классов, которые равны единице. Значит, класс a содержит универсальный класс 1 и, кроме того, «ничего», то есть 0 (так как нуль содержится во всяком классе). Но ведь «ничего» (0) есть один из элементов класса a, состоящего из тех классов, которые равны 1, то есть это один из классов, равных 1. Получается, что «ничто» равно 1, то есть $0 = 1$. Для *пустого* универсума здесь противоречия нет. Но если универсум не пуст (что значит $0 \neq 1$), то получается парадокс — противоречие: $0 = 1$ и $0 \neq 1$. Впрочем, рассуждая по Шрёдеру, этот парадокс можно выразить проще. Например: «“Ничто” обладает любым свойством. Значит, оно обладает свойством быть чем-то. Получается, что ничто не есть ничто». Или в такой форме: «Пустой класс обладает любым свойством a. Значит, он обладает свойством не быть пустым». Фреге приводит следующую более общую форму подобного противоречия. Пусть b есть какой-то непустой класс (то есть $b \neq 0$). Возьмем в качестве a класс всех тех классов многообразия, которые равны b. Класс a состоит, во-первых, из b и, во-вторых, из 0, ибо $0 \mathrel{\not\prec} a$. Но раз a есть класс тех классов, которые равны b, значит 0 равен b: $b = 0$, а мы предполагали, что $b \neq 0$.

Когда появляется противоречие, утрачивается возможность всякого различения классов в универсуме, так как получается, что любой класс совпадает с любым другим.

В самом деле. Возьмем два произвольных класса a и b и докажем, что они совпадают. Из того, что $0 = 1$ следует, что $a \cdot 0 = a \cdot 1$ и $b \cdot 0 = b \cdot 1$. Поскольку для любого класса x: $x \cdot 0 = 0$, а $x \cdot 1 = x$, мы имеем $0 = a$, $0 = b$, откуда, в силу свойств отношения равенства, следует, что $a = b$.

Из всего этого Шрёдер делает следующий вывод. «Это рассуждение [обнаружение парадокса, формального противоречия] показывает, что булева универсальная интерпретация для 1 в действительности *была слишком широкой*», что «недопустимо оставлять многообразие 1 полностью неопределенным, совершенно неограниченным или открытым» (S. 246). И Шрёдер вводит следующее ограничение: среди элементов многообразия не должно быть классов, состоящих из элементов того же многообразия (см. S. 248). В многообразиях, удовлетворяющих этому ограничению, — их Шрёдер называет *чистыми* — противоречия не получается, так как в них *нельзя* образовать *класс а*, состоящий из *классов*, равных 1, ибо классы элементов многообразия 1 сами *не являются* элементами последнего. Классы элементов многообразия 1 являются элементами *другого*, так сказать более высокого, многообразия 1' — многообразия областей (классов) «предшествующего» многообразия 1. *К с. 266.*

[12] *Отрицание* в логике всегда вызывало трудности. В. Минто, например, говорил, что в логике отрицать какое-нибудь качество — значит, утверждать, что оно не присуще данному предмету, отрицание только устраняет, уничтожает, но не позволяет ничего подразумевать. «Не-*b* есть нечто совершенно неопределенное: оно может заключать в себе все, что угодно, кроме *b*» (*Минто В.* Дедуктивная и индуктивная логика. 5-е изд. М., 1905. С. 47). Понятие «универсум» и было введено для устранения подобной неопределенности отрицания. Правда, при этом понятия рассматриваются с точки зрения их объема. *К с. 267.*

[13] *Husserl E.* Rezension von *Schröder* I, 1890//Göttingische gelehrte Anzeigen, Jg. 1891, S. 243–278. Эдмунд *Гуссерль* (1859–1938), будущий основатель философского направления феноменологии, в 1891 г. выпустил труд «Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen» (Halle). Этот труд он прислал Фреге (вместе со своей статьей о логическом исчислении и рецензией на шрёдеровский труд) и этим открыл с ним переписку (1891, 1906–1907). *К с. 267.*

[14] *Quaternio terminorum* (лат.) — учетверение терминов. Ошибка в силлогистическом умозаключении, состоящая в том, что *средний термин* в двух посылках последнего имеет разный смысл, так что в силлогизме оказывается, кроме большего и меньшего терминов, еще и два разных средних термина; это не позволяет связать посылки друг с другом и получить верное заключение. У Пеано фигурирует следующий пример: «Некоторые господа суть землевладельцы. Господин Майер, господин Мюллер, господин Шмидт и господин Шульце суть некоторые господа. Следовательно, они суть землевладельцы». Здесь выражение «некоторые господа» в посылках употребляется в различных смыслах — имеет место «двусмысленность среднего термина», как выражается Шрёдер. *К с. 267.*

[15] Шрёдерово чистое исчисление областей — как любая булева алгебра — было непротиворечиво. Возможность противоречия появляется вместе с его интерпретацией на классах, элементы которых, в свою очередь, могут быть классы. К числу условий появления противоречия относятся: 1) определение $0 \notin a$, при любом a; 2) неразличение отношения принадлежности элемента множеству (или, в терминологии Фреге, принадлежности предмета классу предметов) — $\in$-отношения, и отношения включения класса в класс, $\subset$-отношения, то есть отношений, которые Фреге назвал *Subter* и *Sub*; 3) допущение в исчислении таких классов, которые содержат классы в качестве своих элементов.

Для устранения противоречия достаточно отказаться хотя бы от одного из этих условий. Поскольку исключение пустого класса парализует исчисление (например, операция пересечения классов станет не всегда выполнимой), приходится выбирать между отказом от 2) либо от 3).

Шрёдер пошел по пути отказа от 3), развив теорию *степеней многообразий* — историческую предшественницу *теории типов* Б. Рассела, Фреге же выбрал отказ от 2). Ниже он показывает, как различение $\in$- и $\subset$-отношений устраняет противоречие в системе Шрёдера. Вернемся (см. выше комментарий 11) к классу *a* всех тех классов многообразия, которые равны 1; каково отношение какого-то класса *b*, равного единице, к этому классу *a*? Конечно, это $\in$-отношение (subter-отношение), ибо *b* есть элемент класса *a*. Поэтому мы имеем право утверждать: $(b \notin a) \supset (b = 1)$. В определении же «тождественного нуля» фигурирует $\subset$-отношение: $0 \subset a$. Если мы попытаемся получить противоречие, взяв в качестве *b* класс *a*, то потерпим неудачу. Но если мы отождествим рассматриваемые отношения (использовав для этого знак $\notin$), то к противоречию придем: $(b \notin a) \supset (b = 1)$; возьмем в качестве *b* «тождественный нуль»: $(0 \notin a) \supset (0 = 1)$; в силу истинности субсумции $0 \nleqslant a$, получаем (по модусу поненсу) $0 = 1$; но наш универсум предполагается не пустым: $0 \neq 1$. Парадокс налицо.

Шрёдер подходил к делу совершенно иначе. В начале построения своего «тождественного исчисления» он принимает, что элементы многообразия сами являются классами, а именно «сингулярными» или «монадическими» классами. Переход к логике заставляет признать такой способ выражения неточным. Надо отличать произвольный элемент a многообразия 1 от сингулярного класса, состоящего из одного элемента a. Ибо стоит только ввести в число элементов многообразия хотя бы один сингулярный класс a, как в него тотчас «проберется» тождественный нуль и получится противоречие.

Отсюда следующая иерархия многообразий, соответственно универсумов. Многообразие 1 — универсум *первой* степени состоит из элементов, не являющихся классами. Многообразие 1' — универсум *второй* степени состоит из классов элементов многообразия 1. Классы элементов многообразия 1', то есть классы классов элементов многообразия 1, составляют универсум *третьей* степени — многообразие 1'', и т.д. В универсуме каждого уровня есть свои нуль и единица, своя субсумция, свои операции пересечения и объединения классов, своя операция взятия дополнения до (своего!) универсального класса.

Принципиальный вывод Шрёдера таков — нельзя рассуждения, касающиеся одного универсума — одного многообразия, смешивать с рассуждениями, относящимися к другому многообразию. Каждое рассуждение касается известного круга вещей: варьировать можно и многообразие 1; но коль скоро круг вещей — универсум первой степени — определен, на него можно смотреть как на чистое многообразие и отличать исследование отношений его элементов от исследования отношений классов этих элементов — классов, входящих в иной, более «высокий» универсум.

На шрёдеровскую теорию «степеней многообразий» как исторически первый вариант *теории типов* предметов впервые внимание обратил А. Чёрч, который в докладе на 5-й сессии Ассоциации символической логики 8 сентября 1939 г. рассмотрел отношение упомянутой теории Шрёдера к теоретико-типовой концепции Рассела (представление о ней можно получить, например, из кн.: *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957, с. 46—47; при ссылках на этот источник: ***Клини*, 1957**); ср. также критический анализ подхода Шрёдера со стороны Фреге, данный в настоящей его статье. Фрегевскую критику Чёрч назвал «резкой и убедительной» (*A. Church.* Schröder's anticipation of the simple theory of types. — The Journal of Symbolic Logic, v. IV, № 4, 1939, p. 76). Дискуссии Шрёдер — Фреге посвящена кн.: *Бирюков*, 1963.

В связи с оценкой А. Чёрча стоит обратить внимание на то, что убедительность фрегевской критики во многом подрывает тот факт, что математико-логическая теория автора «Исчисления понятий» спустя семь лет после полемики со Шрёдером оказалась жертвой противоречия («парадокса Рассела», см. Послесловие в данной книге), похожего на то, которое грозило Шрёдеру и которого он сумел избежать. Уместно также отметить, что в последующих томах своих «Лекций» (т. II—III, 1891—1905) Шрёдер развил — в продолжение идей американского философа и логика Чарльза Сандерса *Пирса* (C. S. Peirce, 1839—1914) — логическую *теорию отношений*. В результате появилась система, которая по заключению такого авторитета в математической логике, как Леопольд Лёвенгейм (1878—1940), была не менее сильна, чем расселовская теория. В статье «Выражение математики в исчислении отношений Шрёдера» он писал: «В стремлении к логизации математики наибольшим препятствием выступают парадоксы, открытые Расселом и др. Для преодоления парадоксов Рассел предложил теорию типов, но эта теория, даже в ее наиболее слабой форме, не удовлетворяет математиков. Я никогда не сталкивался с подобными трудностями — не сталкивался потому, что логизация для меня всегда означала: облечение в форму шрёдеровского исчисления отношений <...> Приверженность к расселовскому исчислению привела к тому, что проглядели лежащий на поверхности факт: парадоксы, которые вызвали такое волнение, не доставляют каких-либо трудностей, если следовать исчислению Шрёдера» (*L. Löwenheim.* Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul// The Journal of Symbolic Logic, 1940, v. 5, № 1, p. 1—2). *К с. 268.*

[16] К Дж. *Пеано* во многом восходит *современная логическая символика.* Как уже говорилось, знак ⊃ впоследствии трансформировался в знаки $\supset$ и $\subset$ (принимающие разный смысл в зависимости от того, имеем ли мы дело с логикой классов или логикой высказываний), а знак ε — в знак $\in$ принадлежности элемента множеству (классу). Пеано ввел также знаки $\cap$, $\cup$, $\wedge$,$\vee$, широко используемые в современной логической литературе. Распространение в логике знаков, придуманных Пеано, связано прежде всего с работами Б. Рассела, принявшего и развившего далее его символику. Система логических знаков Пеано — Рассела (и ее модификации) вполне соответствует понятийному каркасу теории Фреге, но не отвечает подходу Шрёдера, принявшего обозначения Ч. Пирса. См. об этом в ст.: *Бирюков*, *Туровцева. К с. 268.*

[17] Отстаиваемая Фреге точка зрения, согласно которой класс, состоящий ровно из одного предмета, следует отличать от последнего, преобладает в современных логике и теории множеств. Класс (множество), единственным элементом которого является a, в настоящее время обозначаемый посредством $\{a\}$, обладает следующими свойствами: $a \neq \{a\}$, $a \in \{a\}$; если A — некоторый класс (множество) и a есть элемент A, тогда $\{a\}$ — подкласс класса A, то есть $\{a\} \subset A$. Эти обозначения еще раз подчеркивают, что «быть элементом» и «быть подклассом (подмножеством)» — разные отношения, первое имеет место между элементом и классом (множеством), второе — между двумя множествами. *К с. 270.*

[18] Требование это (помеченное Шрёдером как пункт χ, S. 245) таково: недопустимо понимать под 1 всеохватывающий, так сказать, совершенно открытый класс — наподобие того как Буль понимал свой «мир речи», или «универсум рассуждения». *К с. 271.*

[19] Дефиниция (3) — это то, что в комментарии 5 мы обозначили как постулаты $[3_\times]$ и $[3_+]$. *К с. 271.*

[20] В этой статье содержится одно из наиболее резких выступлений Фреге против так называемых «творческих» определений. См. об этом Введение в данной книге. *К с. 272.*

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ?

Was ist eine Funktion?

Статья впервые опубликована в сборнике, посвященном 60-летнему юбилею Людвига Больцмана: «Festschrift Ludwig Bolzmann gewidmet zum sechzigsten Geburgstage 20. Februar 1904 — Leipzig, J.A. Barth, 1904, S. 656—666. Перепечатано в книге: Kleine Schriften, 2. Aufl., 1990, S. 273—280. Перевод выполнен по первоизданию 1904 г. Дальнейшие ссылки на эту статью в переиздании 1990 г.: ***WF.***

[1] О современном понимании функции см. комментарий 2 к статье «Функция и понятие». *К с. 277.*

[2] Автор этих лекций — Э. Чубер (Emanuel Czuber, 1851—1925) был профессором математики в Немецкой Высшей технической школе в Брюнне (ныне Брно, Чехия), затем ее ректором; с 1891 г. он профессор в Венской Высшей технической школе, с 1894/95 г. ее ректор. Его «Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению» представляли собой двухтомное издание, вышедшее в Лейпциге (1898) и много раз переиздававшиеся. В числе работ Чубера были: «Знаковый язык математики» (1893) и «О понятии числа и величины» (1904). *К с. 279.*

[3] Grundgesetze II, S. 97—139. См. также статью Фреге «Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithetik aufs Neue nachgewiesen//Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. XVII, 1908, S. 52—55 (Schlußbemerkung//Ibidem, S. 56). *К с. 281.*

[4] Вместо *l*1 в настоящее время написали бы lg1. *К с. 281.*

[5] Герман Ганкель (H. Hankel; 1839—1873), с 1869 г. профессор Тюбингенского университета; автор труда «Theorie der complexen Zahlensysteme» (1867). В числе прочего занимался исследованиями по основаниям арифметики и историей математики. *К с. 282.*

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

ЛОГИКА

Logik

Текст опубликован впервые в *NS*, S. 2–8. Издатели «Наследия» считают, что это фрагмент задуманного Фреге учебника логики. В примечании (см. с. 290 данной книги) Фреге ссылается на Begriffsschrift. В дальнейшем используется термин beurteilbarer Inhalt, отсутствовавший в труде 1879 г. и появившийся позже, в первой половине 1891 г., как это следует из письма Фреге от 24 мая 1891 г., адресованного Э. Гуссерлю. На этом основании редакторы *NS* относят данный текст к периоду между 1879 и 1891 гг.

Фреге неоднократно начинал составлять учебное пособие по логике; см. ниже его тексты «Введение в логику» и «Логика. Введение» (наст. книга, с. 297–325).

Данный фрагмент начинается с плана задуманного Фреге изложения. Пункт А плана подразумевал «Введение», содержание которого — после пунктов В, С, D и Е — Фреге успел конспективно изложить и которое совпадает с первой частью следующего ниже текста.

[1] В дальнейшем Фреге реализует пункт А своего плана: «Введение». *К с. 287.*

[2] Это пункт В плана Фреге: «Beurteilbarer Inhalt». В нем — только начало предполагавшегося раздела учебника. В последующем он собирался осветить следующие вопросы:

«Отрицание, duplex negatio [двойное отрицание].

Соединение друг с другом содержаний, допускающих истинностную оценку. «И», «ни..., ни», «не-» и т.д.

Умозаключения».

(*NS*, S. 1). *К с. 291.*

[3] Дальнейший план предполагал, что после завершения данного раздела последуют:

«С. Разделение суждения на части. Понятие, предмет. Всеобщность. Условие, следствие. Или. Подчинение понятий. Суждение существования (Имеется [Es gibt]). Удаление вспомогательных предметов (Hilfsgegenstände). Частные (partikuläre) суждения. Отношения (Beziehungsbegriffe). Пары.

D. Определение (Definition) понятий.
С помощью признаков. Сложные случаи (Verwickeltere).

E. Определение предметов.
Опосредованное с помощью понятий. Непосредственное.
Суждение узнавания (Wiedererkennungsurtheil).
Неадекватное (ungehörig) суждение существования».

(*NS*, S. 1). *К с. 291.*

КРАТКИЙ ОБЗОР МОИХ ЛОГИЧЕСКИХ КОНЦЕПЦИЙ

Kurze Übersicht meiner logischen Lehren

Текст опубликован в *NS*, S. 213–218. Редакторы «Наследия» указывают, что данный фрагмент во многом совпадает с «Введением в логику», которое в настоящей книге помещено непосредственно после него. Издатели «Наследия» Фреге датируют текст 1906 г.

[1] Эту латинскую формулировку — «третьего не дано» — обычно связывают с *законом исключенного третьего* ($A \vee \neg A$). В классической логике (коей было фрегевское логичес-

кое учение) этот закон по существу совпадает с принципом *двузначности* высказываний (истинно/ложно), поскольку отрицание высказывания A означает в ней его ложность. *К с. 293.*

[2] Это значит, что условное суждение $A \supset B$ равносильно суждению $\neg (A \& \neg B)$. *К с. 295.*

[3] Латинские *tot* — столько, а *quot* — сколько. Например, Quot homines, tot sententiae — сколько людей, столько мнений. *К с. 295.*

[4] Относительно терминов «насыщенный», «ненасыщенный» подробно говорится в статьях Фреге «Функция и понятие» и «Что такое функция?», переводы которых помещены в настоящей книге. *К с. 296.*

ВВЕДЕНИЕ В ЛОГИКУ

Einleitung in die Logik

Впервые опубликовано в *NS*, S. 201–212. Перепечатано в издании: Aus dem Nachlaß, с примечаниями Л. Крайзера. Перевод выполнен по публикации в «Наследии».

Текст представляет собой материал, сходный с дневниковыми записями, так как он снабжен датировками, относящимися к отдельным его частям. Все они помечены августом 1906 г. Редакторы «Наследия» считают, что этот материал лег в основу фрагмента Фреге «Краткий обзор моих логических концепций» (наст. книга, с. 292–296). По мнению Л. Крайзера, перед нами текст, впоследствии развернутый Фреге в первую часть его «Логических исследований» («Мысль», в наст. книге, с. 326–342).

[1] Датировано 5.VIII.06. *К с. 297.*

[2] В *Begriffsschrift* (1879) Фреге решительно выступил против традиционного субъектно-предикатного членения суждения. Однако уже в некоторых статьях логико-семантического цикла он пользуется терминами «субъект» и «предикат», причем зачастую не только в грамматическом смысле; нередко грамматическое и логическое в применении этих терминов слитно настолько, что не ясно, какой смысл вкладывал в них автор (ср. комментарий 10 к статье *SB*). В материалах, вошедших в эту часть настоящей книги, Фреге уже систематически пользуется данной терминологией. *К с. 297.*

[3] *Hypothetische Satzverbindung.* В третьей части «Логических исследований» (наст. кн., с. 356 и далее) Фреге использует термин *hypothetisches Gedankengefüge* — гипотетическая сложносоставленная мысль. *К с. 297.*

[4] Мы находим его в «Исчислении понятий» 1879 г. (с. 71–72 наст. книги). *К с. 298.*

[5] Спустя 12 лет К. И. *Льюис* (C. I. Lewis. Survey of Symbolic Logic, Berkeley, 1918) развил идею «строгой импликации». Выражение «A строго имплицирует B» определяется им как «невозможно (A и не-B)». Л. Крайзер в примечании к комментируемой фразе Фреге подчеркивает модальный характер льюисовской импликации. Действительно, с труда Льюиса 1918 г. берет начало *модальная логика. К с. 298.*

[6] Если субъектом данного суждения считать единичное имя «Христос», то суждение окажется единичным, если же трактовать его как «Существуют (Es giebt) люди, которых Христос привлек на сторону своего учения», то оно окажется частным (см. *NS*, S. 203, примечание 2). *К с. 299.*

[7] *Кондукт* — от латинского «conduco» — стягивать, сдвигать. В настоящее время для такой операции используется термин «конъюнкция». В связи с последующими рассуждениями Фреге заметим, что отрицание конъюнктивного суждения ($p \& q$) равносильно дизъюнктивному соединению отрицаний ($\neg p \vee \neg q$) в соответствии с законами Де Моргана. А «противоположность кондукту, состоящему из противоположности первой мысли и из второй мысли», есть в современных обозначениях $\neg(\neg p \& q)$. Она равносильна импликативному суждению ($q \supset p$). *К с. 300.*

[8] Датировано 8.VIII.06. *К с. 300.*

[9] Выражение «*a* в квадрате больше, чем 2» — это пропозициональная функция. Она становится истинным или ложным высказыванием при подстановке вместо *a* некоторого элемента из предметной области, которая у Фреге универсальна, а значит, содержит и числа. Тогда, например, «5 в квадрате больше, чем 2» — истинное, а «1 в квадрате больше, чем 2» — ложное высказывание. Если же вместо *a* подставить предмет, не являющийся числом, то возникнет ложное высказывание. *К с. 301*

[10] Относительно латинских quot и tot см. комментарий 3 к статье «Краткий обзор моих логических концепций». *К с. 301.*

[11] Датировано 9.VIII.06. *К с. 302.*

[12] Латинское *sit venia verbo* буквально означает «Пусть это слово будет принято снисходительно»; иначе — да позволено мне будет так сказать. *К с. 302.*

[13] Датировано 10.VIII.06. *К с. 303.*

[14] О применении готических и латинских букв см. «Исчисление понятий», § 11. *К с. 303.*

[15] Датировано 12.VIII.06. *К с. 305.*

ЛОГИКА
Введение

Logik
Einleitung

Текст впервые опубликован в *NS*, S. 137–163. Перепечатан в книге: Aus dem Nachlaß, где этот фрегевский материал снабжен примечаниями Л. Крайзера. Редакторы «Наследия», руководствуясь фигурирующими у Фреге (в одном используемом им примере, с. 313 наст. книги) датой 1 января 1897 г., относят его именно к этому году. В пользу подобной датировки говорит и ссылка на рецензию к книге, вышедшей в 1896 г. (см. ниже, с. 322).

Текст Фреге начинается с тезисного постраничного представления содержания последующего изложения; оно охватывает не весь материал. Мы не сочли целесообразным включение в перевод этих фрегевских тезисов, однако использовали их в некоторых наших комментариях. Работа «Логика. Введение» не была закончена автором. Она обрывается в самом начале раздела «Verbindung von "Gedanken"» (S. 163), который также не вошел в настоящий перевод.

Следует иметь в виду, что данный текст был использован Фреге при написании первой части его «Логических исследований» — Der Gedanke (в наст. кн., с. 326 и далее); в частности, в нее вошли рассуждения Фреге, касающиеся слова «истинный», которые содержатся в данном тексте. В нем имеются также положения, впоследствии подробно изложенные автором во второй и третьей частях упомянутых «Исследований»: Die Verneinung, Gedankengefüge.

[1] В тезисах, которыми открывается эта работа, Фреге пишет: «Слово «истинный» характеризует логику» (*NS*, S. 137). *К с. 307.*

[2] В тезисах Фреге говорится: «Истинное изначально и просто» (*NS*, S. 137). *К с. 307.*

[3] Пользующееся широкой известностью *определение понятия истины*, предложенное *А. Тарским* («'*p*' истинно тогда, и только тогда, когда *p*») в его работе «Понятие истины в формализованных языках» (*A. Tarski.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen// Studia Philosophica, Bd. I, 1935; перепечатано в кн.: *K. Berka, L. Kreiser.* Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik. 4. Auflage, Akademie-Verlag. Berlin, 1986, S. 445–546) не соответствует, конечно, тем требованиям, которые Фреге предъявляет к определениям как разъяснениям *смысла* определяемого понятия (термина): оно просто *повторяет* положение Фреге, согласно которому мысль об истинности суждения ничего к нему не добавляет, коль скоро оно истинно. Тем не менее при рас-

смотрении фрегевских идей целесообразно учитывать подход польского логика, так как его «определение» послужило исходным пунктом анализа категории истинности в формально строящихся языках; подход Тарского во многом стоит у истоков одного из тех направлений логической семантики, которые отличны от фрегевского. *К с. 307.*

[4] Вопреки высказанному еще в «Исчислении понятий» отказу от анализа предложений (суждений) в терминах *субъекта* и *предиката* Фреге, рассматривая термины *истина, истинно,* здесь и далее пользуется выражением «предикат». Однако он ясно дает понять, что термины эти не выражают какого-либо свойства в обычном понимании. В статье «Мысль» Фреге оговаривает, что он лишь поначалу, пока не прояснен вопрос, говорит об истине «так, словно она является некоторым свойством» (наст. кн., с. 329). Вообще он стремится обходиться без выражений «субъект» и «предикат», которые, как уже отмечалось, он связывает не столько с логикой, сколько с грамматикой. *К с. 308.*

[5] *Сцилла* — описанное в «Одиссее» чудовище, подстерегавшее моряков на скале у узкого пролива, на другой стороне которого обитало другое чудовище — Харибда. Сцилла была о шести головах и двенадцати ногах. Одиссею удается провести свой корабль через пролив, но Сцилла успевает схватить шесть его спутников и сожрать их. *К с. 308.*

[6] Речь идет о *Вильгельме Телле* (Tell), персонаже легенды, повествующей о событиях XIV в. в Швейцарии. Телль, славившийся меткой стрельбой из лука, получил приказ от местного ландфогта — должностного лица Габсбургов, правивших в «Священной римской империи германской нации», — сбить стрелой яблоко с головы малолетнего сына; он выполнил это, а затем покончил с ландфогтом и поднял народное восстание. В сознании швейцарцев Вильгельм Телль — воплощение их свободолюбия и героизма. *К с. 308.*

[7] См. об этом статью Фреге «О смысле и значении» (в наст. книге, с. 230–246). *К с. 309.*

[8] Редакторы «Наследия» отмечают, что, как явствует из указания, сделанного на копии текста Фреге специалистами, которые готовили манускрипты Фреге к изданию (этой работой до Второй мировой войны руководил Г. Шольц), следующие ниже два абзаца были зачеркнуты автором. *К с. 310.*

[9] Латинское изречение «О вкусах не спорят». *К с. 311.*

[10] Фреге имеет в виду парадокс «Лжец», приписываемый древнегреческому мыслителю Эвбулиду (IV в. до н.э.), учителю Евклида — основателя мегарской философской школы; этой школе приписывается ряд других софизмов и парадоксов. Согласно Диогену Лаэртскому, житель Крита Эпименид сказал: Все критяне — лгуны (то есть говорят только ложь); Эпименид — критянин; значит, то, что он высказал, ложно; но если ложно, что все критяне лгуны, значит некоторые критяне не лгут, что противоречит сказанному Эвбулидом.

В древнегреческой философии были предложены более простые формулировки этого парадокса (их сводку можно найти, например, в кн.: *J. M. Bocheński.* Formale Logik, 3. Auflade, Freiburg; München, 1970, S. 151–152), например, в виде: «Тот, кто говорит «я лгу», лжет и вместе с тем высказывает истину» (Александр Афродизийский). Аристотель имеет в виду парадокс «Лжец», когда в соч. «О софистических опровержениях» говорит о том, «что один и тот же в одно и то же время говорит неправду и правду» (180b, 1–3; *Аристотель.* Соч.: В 4 т. М., 1978. Т. 2. С. 582). Фрегевское возражение укладывается в схему этого рассуждения: если некто утверждает, будто ложно (то есть отрицается), что истина *независима* от ее признания таковой, то, значит, он утверждает, что она *зависима* от ее признания; если же он принимает, что ложно говорить о ее *зависимости* от признания ее истинной, то истина для него оказывается *независимой* от ее признания таковой. *К с. 311.*

[11] Данный абзац Фреге кратко резюмирует в тезисах: «Со смыслом слова «истинно» теснейшим образом связано признание независимости [этого смысла] от нашего признания»; «Мысли независимы от нашего мышления» (*NS*, S. 138). *К с. 311.*

[12] Слова этого типа называют теперь *индексными выражениями*, их изучение составляет особое направление логического анализа (естественного) языка. Фреге детально рассматривает логический аспект использования такого рода слов в первой статье своих «Логических исследований» — в статье «Мысль». *К с. 313.*

[13] См. *Dedekind*, 1888. 11. Aufflage,1967, S. 14. *К с. 313.*

[14] В трактате «Парадоксы бесконечного» Б.Больцано еще до Дедекинда проводит аналогичное рассуждение. Пусть *А* — некоторое высказывание. Тогда *В*, означающее «*А* есть высказывание», также является высказыванием. Обозначим через *С*: «*В* есть высказывание», через *D*: «*С* есть высказывание» и т.д. Получим потенциально бесконечную последовательность высказываний *А*, *В*, *С*, *D*, ... (*B. Bolzano*. Paradoxien des Unendlichen. Leipzig, 1851. Перевод на русский язык: *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного. Одесса, 1911. С. 17). *К с. 314.*

[15] Подобный взгляд высказал немецкий естествоиспытатель и философ-материалист Карл *Фогт* (Vogt; 1817–1895). *К с. 314.*

[16] Латинские *capere* (1-е лицо ед. числа — capio), брать, взять, ловить, получать; *percipere* (percipio), принимать, получать, овладевать; *comprehendere* (comprehendo), схватывать, поймать; *intelligere* или intellegere (intellego), ощущать, познавать, мыслить, — все включают значения «воспринимать», «усваивать»; те смысловые оттенки, которые, указывает Фреге, в этих глаголах представление по-разному. *К с. 314.*

[17] Ср. первую часть «Логических исследований» — «Мысль» (наст. кн., с. 326–342). *К с. 315.*

[18] В тезисах Фреге, предваряющих данный текст, читаем: «В утвердительно-повествовательном предложении не всегда заключено утверждение. Постижение мысли часто предшествует признанию данной истины» (*NS*, S. 138). *К с. 316.*

[19] Мчались суда, погружаясь в волны носами; ветрила / Трижды, четырежды были разорваны силою бури. *Гомер.* Илиада. Одиссея. Пер. с древнегреч. М., Библ. всемирной литературы, серия 1, т. 3, 1967, с. 515. *К с. 316.*

[20] Во время Семилетней войны (1756—1763) прусский король Фридрих II в 1757 г. под селением Росбах (Rossbach; ныне в земле Саксония-Анхальт) наголову разбил соединенную франко-австрийскую армию. *К с. 318.*

[21] Фреге имеет в виду труд *В. Вундта* «Основы физиологической психологии» (*Wundt W.* Gründzüge der physiologischen Psychologie), который, начиная с 1874 г., выходил многими изданиями. Л. Крайзер в примечании 11 к этому фрегевскому тексту (Aus dem Nachlaß, S. 254) приводит следующие слова Вундта во втором томе его труда: «физическое понятие субстанции есть всего лишь продукт нашего собственного мышления»; объекты «превращаются» в представления (Bd. II, 3. Auflage, 1887, S. 550). *К с. 320.*

[22] Анализ логико-семантических вопросов выводит здесь Фреге на известную — и не решенную понынe — *психофизическую проблему*, то есть проблему взаимоотношения психических явлений и физиологических (нейрофизиологических) процессов. Не рассматривая ее (что увело бы нас в сторону), мы отсылаем читателя к такому авторитету, как Джон фон Нейман, который решительно отстаивал принцип *психофизического параллелизма* (в гл. IV своей книги «Математические основы квантовой механики», русск. перев. М., 1964, с. 307–308). См. ниже, комментарий 6 к статье «Мысль. Логическое исследование». *К с. 321.*

[23] Имеется в виду рецензия *Т. Ахелиса* (Th. Achelis) на книгу: *A. Vierkandt.* Naturvölker und Culturvölker. Ein Beitrag zur Socialpsychologie, Leipzig, 1896. Как установил К.Тиль, в *NS*, S. 158, подстрочное примечание, в заголовке книги Фиркандта ошибочно указано «Sozialphilosophie». Согласно его же предположению, квадратные скобки в данной цитате указывают на то, что у Фреге она была приведена не полностью и ее закончили издатели *NS*. Названное Фреге приложение вышло 3 февраля 1897 г. *К с. 322.*

[24] Теодор *Моммзен* (Mommsen, 1817–1903) — выдающийся немецкий историк Древнего Рима, публикатор 15-томного «Собрания римских надписей», исследователь римского государственного устройства и римского права. Автор обобщающего труда по римской истории (в русск. перев.: История Рима, т. I—III и V. М., 1936–1941, 1949). Лауреат Нобелевской премии по литературе 1902 г. *К с. 324.*

МЫСЛЬ. ЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Der Gedanke. Eine logische Untersuchung

Первая из трех статей, объединенных подзаголовком «Логическое исследование» (в заголовке третьей статьи это название фигурировало уже во множественном числе и с добавлением: третья часть, что и позволяет считать все их единым целым). Впервые опубликована в издании Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus. Bd. I, 1918/1919, S. 58–77. Перепечатана в кн.: *G. Frege*. Logische Untersuchungen. Herausgegeben und eingeleitet von G. Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen, 1966 (дополненное 2-е изд., 1976) (при дальнейших ссылках на эту книгу: ***Patzig*** — **LU**) и Kleine Schriften, 1990. Перевод выполнен по тексту, представленном в этом последнем издании.

[1] См. комментарий 3 к материалу «Логика. Введение». *К с. 327.*

[2] Детальный логический анализ придаточных предложений был проведен Фреге в статье «О смысле и значении» (наст. кн., с. 236 и далее). *К с. 329.*

[3] Это имя носил приемный сын Фреге. См. Введение в настоящей книге, с. 46, 49. *К с. 330.*

[4] Это принципиально важное заключение, по существу составляющее главный тезис первой статьи «Логических исследований» и однозначно выражающее «платонистский» характер онтологии Фреге. См. Послесловие в данной книге, с. 458 и далее. *К с. 335.*

[5] Пример, очевидно, навеян военным временем. *К с. 336.*

[6] Здесь снова стоит отметить принцип *психофизического параллелизма*, как его понимал Дж. фон Нейман (ср. комментарий 22 к статье «Логика. Введение»). Он рассматривал пример — измерение температуры. Произведя соответствующие расчеты, мы можем установить температуру окружения ртутного сосуда термометра и констатировать: такова температура воздуха, которую измеряет термометр. Мы можем произвести соответствующие вычисления и сказать: такова длина ртутного столба, которую видит наблюдатель. Далее, мы могли бы ввести в рассмотрение источник света, учесть рассеяние световых квантов на непрозрачном столбике ртути и другие процессы вплоть до возникновения изображения на сетчатке глаза и только тогда сказать — это изображение регистрируется наблюдателем. Наконец, располагая надлежащими знаниями, мы могли бы пойти еще дальше и указать химические реакции, которые вызываются этим изображением на сетчатке глаза, в нерве и мозгу, и только после этого сказать: эти химические изменения в своих мозговых клетках воспринимает наблюдатель. Однако в любом случае мы должны будем когда-нибудь сказать: это воспринимается наблюдателем. Это значит, говорит фон Нейман, что мы всегда должны делить мир на две части — наблюдаемую систему и наблюдателя, причем положение границы между ними в высокой степени произвольно (см.: *И. фон Нейман.* Математические основы квантовой механики/Пер. с нем. М., 1964. С. 307–308). *К с. 337.*

[7] *Алголь* (Algol) — двойная звезда в созвездии Персея. *К с. 340.*

[8] Здесь, судя по всему, звучит мотив, восходящий к учению *И. Канта* об априорных формах созерцания как необходимых условиях познания. *К с. 340.*

[9] Современная лингвистика знает такое время: оно обнаружено в некоторых языках. Например, в древнерусском литературном языке (старославянском, церковно-славянском) оно выражалось глагольной формой, носящей название *аориста*. См.: *Беляков А.А.* О содержании наследия равноапостольных Кирилла и Мефодия и его исторических судьбах//Вестник Международного славянского университета. Вып. 2. М., 1997. *К с. 341.*

ОТРИЦАНИЕ. ЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Die Verneinung. Eine logische Untersuchung

Вторая статья «Логических исследований» опубликована там же, где и первая статья, с. 143—157, и перепечатана в 60-х гг. в изданиях *Patzig*-LU и *KS*. Перевод выполнен по изданию: Kleine Schriften, 1990.

[1] В истории науки Фреге одним из первых стал решительно подчеркивать то, что наряду с дихотомией *истинно/ложно*, в логике следует учитывать противопоставление *осмысленно—бессмысленно. К с. 345.*

[2] В предположении правила *modus ponens* переход к правилу *modus tollens* ($A \supset B$), $\neg B \vdash \neg A$) совершается с помощью контрапозиции:

$$\frac{\begin{array}{l} A \supset B \vdash \neg B \vdash \neg A \text{ (контрапозиция)} \\ \qquad\qquad \neg B \supset \neg A, \neg B \vdash \neg A \text{ (modus ponens)} \end{array}}{A \supset B, \neg B \vdash \neg A.}$$

Здесь используется транзитивность отношения логического следования $\vdash$. Что касается «противного случая», то относящееся к нему рассуждение Фреге не отличается ясностью. *К с. 345.*

[3] *In effigie* (лат.) буквально «в изображении». *К с. 347.*

[4] *Duplex negatio affirmat* (лат.) — двойное отрицание утверждает. *К с. 347.*

[5] *Кант*, принимая, в общем, традиционную концепцию логики (известно, что свои лекции по «общей» логике, как он называл формальную логику в «Критике чистого разума»), сохранил и подразделение суждений «по качеству»; но наряду с утвердительными и отрицательными суждениями он выделял еще суждения «бесконечные» (в них субъект суждения мыслится в сфере понятия, лежащего за пределами конечной сферы»), не очень последовательно отмечая, что «различение бесконечных суждений от отрицательных» не относится к логике. См.: *Кант И.* Логика. Пособие к лекциям. 1800 г.// *Кант И.* Трактаты и письма. М.: Наука, 1980 (см. с. 406—407). *К с. 348.*

[6] Здесь под конгруэнтностью Фреге, по-видимому, понимает возможность совмещения геометрических объектов. Например, конгруэнтны два отрезка, имеющие равные длины, два треугольника, у которых соответствующие стороны равны и т.п. (см. комментарий 1 к статье «Применение исчисления понятий»). *К с. 355.*

ЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ. ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ: СТРУКТУРА МЫСЛИ

Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge

Эта третья часть «Логических исследований» опубликована в том же издании, что и первые две: Bd. III, 1923—1926, Heft 1, 1923, S. 36—51. Перепечатана в тех же книгах, что и «Мысль» и «Отрицание». Перевод выполнен по изданию: *KS*, 1990.

[1] Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, Bd. I, 1918/1819, S. 143—157. *К с. 356.*

[2] Исключительно *содержательное* — к тому же без всякой символики — изложение Фреге, изложение, опирающееся на *смысл* выражений, исключает, таким образом, формальное представление операции конъюнкции логики высказываний и ее свойства *коммутативности*, выражающееся равенством $A \& B = B \& A$. В дальнейшем то же самое имеет место при фрегевском рассмотрении операции дизъюнкции. *К с. 360.*

[3] Имеется в виду издание, указанное выше в примечании 1: т. I (в наст книге, с. 326 и далее). *К с. 363.*

[4] Этим умозаключением, основанным на свойстве транзитивности операции (материальной) импликации и ныне в математической логике обычно называемым *принципом силлогизма*, Фреге широко пользовался в своем исчислении (ср. комментарий 31 к статье «Булева вычислительная логика и мое исчисление понятий»). *К с. 366.*

[5] См. комментарий 2 к статье «Отрицание». *К с. 367.*

[6] Ниже Фреге приводит выражения логики высказываний, построенные с помощью операций конъюнкции (A & B), антиконъюнкции (штрих Шеффера: $(A \mid B) = \mathrm{Df} \neg (A \,\&\, B)$), антидизъюнкции (штриха Нико: $(A \uparrow B) = \mathrm{Df} \neg (A \vee B)$), дизъюнкции ($A \vee B$), антиимпликации (отрицания импликации: $(A \not\supset B) = \mathrm{Df} \neg (A \supset B)$) и импликации: ($A \supset B$). В дальнейшем рассматривается также обратная импликация $(A \subset B) = \mathrm{Df}(B \supset A)$ и подразумевается ее отрицание: $(A \not\subset B) = \mathrm{Df} \neg (B \supset A) = (B \,\&\, \neg A)$. Во второй статье «Логических исследований» Фреге рассмотрел отрицание высказывания, что дает $\neg A$ и $\neg B$. Ниже он говорит о тождественно-ложном ($\neg A \,\&\, A$) и тождественно-истинном ($\neg (\neg A \,\&\, A)$) высказываниях. Если перейти на язык функций истинности логики высказываний, в которой для двух произвольных высказываний A, B можно образовать 16 попарно различных функций, то Фреге как бы «потерял» четыре функции. Очевидно, что это: сами высказывания A и B, а также эквиваленция ($A \equiv B$), отрицание которой порождает строго-дизъюктивное суждение: $A \dot\vee B = \neg (A \equiv B)$. *К с. 367.*

[7] Здесь у Фреге содержится идея (функциональной) полноты любого набора, состоящего, каждый, из какой-либо из шести рассматриваемых им «сложноподчиненных мыслей» (I—VI) и отрицания (заметим, что в случае мыслей вида II и III — антиконъюнкции и антидизъюнкции — отрицание даже не нужно, так как оно выразимо через II и через III; так $A|A = \neg A$). В конце статьи Фреге высказывает точку зрения, что «всякая сложносоставленная мысль может быть выражена подобным образом», то есть что формализма логики высказываний достаточно для выражения *такого рода* мыслей в точных науках. На логико-предилектный уровень он выходит в четвертой, изложенной не полностью, части своих «Логических исследований» (см. ниже, материал «Логическая всеобщность», перевод которого помещен вслед за данной статьей). *К с. 368.*

[8] Ибо $\neg (\neg A \,\&\, A) = (\neg\neg A \vee \neg A) = (A \vee \neg A) = (\neg A \vee A) = (A \supset A)$. *К с. 369.*

[9] Напомним: высказать некоторое содержание без утверждающей силы, значит, согласно Фреге, не приписать ему истинностного значения «истинно». Когда говорят, например: «Пусть a — вещественное число», не обязательно подразумевают, что a на самом деле таково. Это только допущение, которое в последующих рассуждениях может оказаться как истинным, так и ложным. *К с. 369.*

[10] Это — не что иное, как формулировка логического принципа экстенсиональности (объемности). *К с. 370.*

ЛОГИЧЕСКАЯ ВСЕОБЩНОСТЬ

Logische Allgemeinheit

Опубликовано в *NS*, S. 278–281. Ссылка Фреге на третью часть своих «Логических исследований» позволяет заключить, что данный текст был написан не ранее 1923 г. Очевидно также, что это — начало четвертой части этих «Исследований», которую он не успел завершить.

[1] Третья статья цикла «Логические исследования». См. в наст. кн., с. 356–370. *К с. 371.*

[2] Фреге противопоставляет здесь условным высказываниям (выражающим сложносоставленные мысли, заключенные в «гипотетических сложноподчиненных предложениях») формы $A \supset B$, где связка $\supset$ понимается как материальная импликация, высказывания вида $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ — «материальные импликации». Законы природы, устанавливаемые в физике и химии, передаются, по его мнению, именно такого рода высказываниями. В последующем развитии логики возникла проблематика так называе-

мых *номологических* (от греч. νόμος — закон) высказываний и *каузальной импликации*, состоящая в выявлении *смысловой связи* компонентов закона и заключенной в нем *необходимости*. *К с. 371.*

[3] Понятие «обычный письменный или печатный немецкий язык, мой язык изложения» в какой-то мере можно понять как *мета*язык, то есть язык, на котором рассматривается какой-либо другой язык, изучается строение выражений этого языка, производится доказательство теорем о его свойствах и устанавливается отношение его к другим языкам; этот другой язык в таком случае называют языком-объектом, или предметным языком (о метаязыке см., например: Философская энциклопедия. М., 1964. Т. 3. С. 408–409). Фрегевский «вспомогательный язык» можно истолковать именно как язык-объект. *К с. 373.*

[4] В своей монографии «Теория алгорифмов» *А. А. Марков* использует *абстракцию отождествления*, чтобы констатировать одинаковость букв в словах, составленных из букв некоторого фиксированного алфавита. Например, первая и третья буквы слова «обод» одинаковы, а первая и вторая нет. Абстракция отождествления позволяет установить понятие абстрактной буквы и тем самым — понятие абстрактного слова и абстрактного словообразования. См.: *Марков А. А.* Теория алгорифмов. Труды Математического института им. В. А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 42. С. 7–8. См. также *Марков А. А., Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. М.: Изд-во «Фазис», 1996. Гл. 1, § 5. *К с. 373.*

[5] Это свое намерение Фреге так и не осуществил. *К с. 374.*

МОИ ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗЗРЕНИЯ

Meine grundlegenden logischen Einsichten

Текст опубликован в *NS*, S. 271–272. В примечании издателей «Наследия» указывается, что согласно помете Г. Шольца на копии, которая положена в основу публикации, этот фрегевский материал следует датировать 1915 г. Другая датировка, данная при первой попытке издания манускриптов Фреге, гласит: «В военные годы».

[1] Это утверждение несколько расходится с тем, что Фреге говорит, начиная свой анализ «мысли» в первой части «Логических исследований». *К с. 376.*

[2] По-видимому, Фреге не вполне осознавал масштабы того вклада, который он внес в логику. Быть может, субъективно, для него самого все его достижения рисовались в конце жизни связанными с различением мыслей, высказываемых с «утверждающей силой», то есть таких, которым соответствуют в его исчислении предложения вида $\vdash\!\!\!— A$, с одной стороны, и мыслей, высказываемых без какой-либо истинностной оценки (им в его исчислении соответствует запись $— A$), — с другой. Хотя это различение (которое впоследствии нередко оспаривалось) и вошло в современную математическую логику, воплотившись в знаке доказуемости $\vdash$, странно было бы видеть в нем «основополагающее» достижение автора «Логических исследований». См. Послесловие в данной книге. *К с. 376.*

ПОСЛЕСЛОВИЕ

В ЛОГИЧЕСКОМ МИРЕ ФРЕГЕ

В шеренге замечательных ученых XIX столетия, созидавших современную формальную (математическую, символическую) логику, — таких, как Дж. Буль, А. Де Морган, Дж. Венн, Э. Шрёдер, П. С. Порецкий, Дж. Пеано, Ч. Пирс и др., — Фреге занимает особое место. Оно определяется не только главной его заслугой — не очень им, по-видимому, осознававшейся — созданием первой в истории науки формализованной логической системы (формально построенного аксиоматического исчисления логики) и применением этой системы к обоснованию конкретной научной дисциплины — арифметики. Не меньшее значение имеет многообразие и глубина его логико-философских прозрений, делающее его наследие прочным научным достоянием и живым источником идей, питающих логическую и философско-лингвистическую мысль вплоть до наших дней. Приведем хотя бы фрегевскую формулировку характеристических свойств формальной логико-математической системы. Для построения формализованной арифметики, пишет Фреге, «к проведению доказательства должны быть предъявлены гораздо более высокие требования строгости, чем принято обычно в арифметике. Необходимо заранее ограничить круг немногих способов умозаключения и вывода следствий, и ни один шаг не должен происходить иначе, как по этим правилам. При переходе к новому суждению нельзя поэтому удовлетворяться — как это математики до сих пор почти всегда делают — тем, что правильность этого перехода кажется ясной, но необходимо разлагать его на простые логические шаги, из которых он состоит, а таковых часто отнюдь не мало. Ни одна из предпосылок тут не должна остаться незамеченной, каждая аксиома, в которой мы нуждаемся, должна быть установлена. Ведь именно те посылки, которые мы допускаем молча и без всякого осознания, препятствуют проникновению в теоретико-познавательную структуру [логического] закона. — Для того чтобы подобное предприятие могло оказаться успешным, понятия, которые при этом могут потребоваться, должны быть, конечно, строго уточнены (scharf gefasst werden)»[1].

В этих скупых словах — абрис программы логических исследований, которым посвятили себя поколения логиков XX столетия.

Построения Буля или Шрёдера — как и других логиков, развивавших свои теории в их стиле, — не были формальными системами в современном понимании этого понятия, хотя они и строились их авторами как «исчисления»[2]; конечно, в каждом случае неявно содержавшаяся в них такого рода система («логистическая»,

---

[1] *Frege.* Grudgesetze I. S. 1.

[2] Ср. Комментарии, с. 380.

по терминологии А. Чёрча) могла быть реконструирована; но реконструкция эта означала, по сути дела, переход на фрегевские позиции[3].

В настоящей статье мы подвергнем более детальному рассмотрению те идеи, которые можно назвать миром мысли Фреге и которые представлены в предлагаемых читателю его текстах. При этом, поскольку логическое учение Фреге было нацелено на обоснование математики, нам предстоит войти также и в круг его философско-математических концепций.

Множества и свойства. Функции

Для оценки философской позиции того или иного мыслителя — логика и математика очень важно установить, как он понимает *множество*. В данном случае это тем более важно, что, как мы уже отмечали во Введении, логико-арифметическое построение Фреге можно истолковать как логизированную теорию множеств.

Эмпирико-номиналистическое направление в методологии науки ставит под сомнение реальность множеств (классов) предметов, как и вообще общих, абстрактных сущностей. Считается, что реальное бытие присуще лишь отдельным конкретным индивидам с характеризующими их признаками, свойствами, а наличие множеств людей, животных, белых предметов и т.д. — и тем более объектов, рассматриваемых в математике или теоретической физике, — есть только результат абстрагирующе-обобщающей активности мышления.

Для Фреге такая позиция была совершенно неприемлема. Предлагавшиеся в его время определения *множества* (системы, класса предметов) не удовлетворяли его прежде всего потому, что придавали этому понятию субъективный характер. В Предисловии к первому тому «Основных законов арифметики» Фреге критикует определение Р. Дедекинда: «Очень часто случается, что по какому-то побудительному поводу различные вещи *a*, *b*, *c* рассматриваются с одной общей точки зрения, сопоставляются и объединяются в уме (im Geiste), тогда и говорят, что они образуют систему *S*»[4]. Фреге возражает против подобного взгляда, указывая на то, что умственное сопоставление и объединение вещей не есть объективный признак. «Я спрашиваю: в чьем уме? Если в одном уме они объединяются, а в другом нет, то образуют ли они в таком случае систему? Ведь то, что объединено в моем уме, должно в нем и содержаться. *Но разве вещи вне меня не образуют системы? Разве система — субъективное образование в отдельном уме?* Является ли в таком случае созвездие «Орион» системой? И какие элементы образуют ее? — Звезды, молекулы или атомы?»[5]

Что же придает данным предметам реальное бытие как класса, как множества, как происходит выделение, отграничение классов? Ответ Фреге: «классы

[3] История логики знает только один выразительный случай, когда фрегевская логическая методология (точнее, методология Фреге—Рассела, кульминировавшая в знаменитых Principia mathematica Уайтхеда и Рассела) была отвергнута и предпочтение было отдано алгебрологической теории отношений Пирса—Шрёдера. Это — воззрения Л. Лёвенгейма, решительно отстаивавшего преимущества подхода Шрёдера по сравнению с «традиционными» средствами логики предикатов и известных аксиоматических теорий множеств (*Löwenheim L.* Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul//The Journal of Symbolic Logik, 1940, vol. 5, №1). См. об этом в ст. *Бирюков Б. В., Туровцева А. Ю.* С. 241—243.

[4] *Dedekind*, 1888. S. 1, 2.

[5] Grundgesetze I, S. 2. Выделено мною. — *Б.Б.*

определяются свойствами, которыми должны обладать их индивиды»[6]. При этом Фреге отождествлял свойство, присущее предметам данной группы, с *понятием*, под которое *подпадает* каждый предмет этой группы[7]. Мы читаем у него, например: «и в самом деле, если не принимать во внимание понятие, не учитывать общие свойства, — в чем другом, тогда можно усмотреть основание существования класса?»[8]

В Предисловии к тому I «Основных законов арифметики» Фреге говорит, что высказывание о числе предметов некоторой группы предполагает, что последняя «всегда определена некоторым понятием, то есть свойствами, которые должен иметь предмет, чтобы принадлежать данной группе»[9]. В том же Предисловии, касаясь *определения понятия*, Фреге пишет, что оно состоит в указании того, какое *свойство* должен иметь предмет, чтобы подпадать под данное понятие. Например, пусть дано следующее определение нуля: это то, что, будучи прибавлено к единице, дает единицу. По Фреге, смысл этого определения состоит в указании свойства, которое должен иметь предмет, чтобы подпадать под понятие нуля.

Фрегевское отождествление понятий с общими свойствами предметов обнаруживается особенно ясно, когда он проводит различение *свойств предметов* и *признаков понятия*. Слова «признак» и «свойство» служат у него для обозначения того, что выражается такими предложениями, как: «Φ есть свойство, присущее Γ» и «Φ есть признак, присущий Ω». Он объясняет: «Я называю понятия, под которые подпадает некоторый предмет, его свойствами, так что

"быть Φ есть свойство, присущее Γ"

есть только другой оборот для

"Γ подпадает под понятие Φ".

Если предмет Γ обладает свойствами Φ, X и Ψ, то я могу объединить их в Ω, и окажется: сказать, что Γ имеет свойство Ω, — это значит сказать то же самое, что и: Γ обладает свойствами Φ, X и Ψ. Тогда я называю Φ, X и Ψ признаками понятия Ω и вместе с тем свойствами, присущими Γ»[10].

Фреге приводит следующий пример. Вместо того чтобы выразиться: «2 есть положительное число», «2 есть целое число» и «2 меньше, чем 10», мы можем сказать: «2 есть положительное целое число, которое меньше, чем 10». Здесь предикаты: *быть положительным числом*; *быть целым числом*; *быть меньше, чем 10*, выступают в качестве свойств предмета 2 и вместе с тем в качестве признаков понятия *положительное целое число, которое меньше, чем 10.*

Итак, Фреге называет понятие, под которое *подпадает предмет*, его *свойством*. Φ, X и Ψ являются и *свойствами предмета* Γ и *понятиями*, под которые подпадает Γ. Свойства Φ, X и Ψ в их совокупности можно рассматривать тоже как некое свойство (свойство W). Вместе с тем W есть понятие, под которое подпадает Γ и которое само состоит из составляющих понятий — признаков Φ, X и Ψ. Сложное понятие Ω *подчинено* каждому из понятий-признаков.

Приведем в заключение следующий отрывок из письма Фреге математику Генриху Либману (Гёттинген): «Понятия в большинстве случаев состоят из составляю-

---

[6] В наст. книге с. 275 (статья «Критическое рассмотрение некоторых пунктов в "Лекциях по алгебре логики" Э. Шрёдера» <оригинал: 1895. S. 452>. Эта статья обозначается нами как ***KBS.***

[7] Предмет, по Фреге, «подпадает под понятие», если, высказав о предмете это понятие, мы получаем истинное суждение.

[8] В наст. книге, с. 275 <*KBS*. S. 452>.

[9] Grundgesetze I, S. IX.

[10] В наст. книге, с. 259—260 (статья 1892 г. — «О понятии и предмете» <*BG*, S. 201—202>.

щих понятий, признаков. *Черный шелковый платок* имеет признаки *черный, шелковый* и *платок*. Предмет, подпадающий под это понятие, имеет признаки в качестве свойств. То, что в отношении *понятия* является признаком, есть *свойство* предмета, подпадающего под это понятие»[11].

Таким образом, слова «общее свойство *Ф*» и «понятие *Ф*» значат в сущности одно и то же. Различие между ними состоит лишь в способе их речевого использования. Если мы желаем употребить слово «свойство», мы скажем: «*Г* имеет свойство *Ф*». Если же мы хотим применить слово «понятие», мы, по Фреге, должны сказать: «*Г* подпадает под понятие *Ф*». Наконец, ту же мысль мы можем выразить, сказав просто: «*Г* есть *Ф*».

* * *

В истолковании множеств и функций Фреге идет новым, оригинальным путем, отличающимся от того пути, которым шли его предшественники и современники. Начиная с Дирихле, в математике утвердилось понимание функции как соответствия между элементами двух множеств[12]. При этом понятие множества рассматривалось как в некотором смысле предшествующее понятию функции. Но введение функций через множества создало бы в системе Фреге порочный круг. В самом деле, об определенном множестве можно говорить только в том случае, когда составляющие его предметы в каком-то смысле известны. Если множество конечно, то принципиально всегда возможно их все указать. В случае бесконечных множеств так поступить нельзя. Знать элементы бесконечного множества — значит уметь относительно каждого предмета предметной области решить, принадлежит ли он к этому множеству или нет. Иначе говоря, задание бесконечных множеств совершается с помощью характеристической функции (функции, характеризующей множество). Так называется функция, относящая каждому элементу характеризуемого множества какой-либо фиксированный предмет (например, 1 или *истинность*), а каждому предмету, не принадлежащему данному множеству, — какой-либо другой фиксированный предмет (например, 0 или *ложность*). Всякую характеристическую функцию можно рассматривать как логическую функцию. Как мы знаем, логические функции впервые (во всяком случае, в явном виде) ввел именно Фреге. Но как раз это расширение понятия функции сделало невозможным (для него, во всяком случае) определение (произвольной) функции через понятие множества, ибо сами множества определялись функциями. Представляется убедительным, что Фреге заметил эту опасность и, чтобы избежать ее, принял в качестве исходной категории не множество, а функцию. Во всяком случае, Фреге поступает следующим образом: понятие функции вводится без какого-либо формального определения (дефиниции); оно разъясняется с помощью описаний и примеров, и уже опираясь на это, определяется понятие *пробега значений* функции, о котором подробно мы будем говорить ниже. При таком подходе Фреге считал, вероятно, некорректным говорить о пробеге значений функции как о ее графике, то есть о множестве пар предметов, хотя и намекал, что в математике это так и есть. Аналогично обстояло дело с понятием и его объемом. Понятие (свойство) вводилось без формального определения, и уже через понятие как характеристическую функцию определялся *объем* понятия. Такого рода подход Фреге считал единственно соответствующим логической сути дела. Этим и объясняется, почему он не употреблял термин *Menge* («множество», «собрание», «совокупность»), предпочитая говорить об «объеме понятия».

---

[11] Briefwechsel, S. 150.

[12] Еще раньше Дирихле подобное понимание функции мы находим у Лобачевского.

Феномен «ненасыщенности»

Проводимое Фреге отождествление понятий со свойствами тесно связано с его учением о том, что такое *функция*. В статье «О понятии и предмете», возражая Б. Керри, критиковавшему его теорию понятия, Фреге писал: «мое определение (того, что такое понятие. — *Б. Б.*) не следует понимать как дефиницию в собственном смысле этого слова. Ведь нельзя же требовать, чтобы все поддавалось дефиниции, как нельзя требовать от химика, чтобы он подвергал все вещества химическому разложению. То, что является простым, не может быть разложено, и то, что является логически простым, не может быть определено — для него нельзя дать дефиницию в собственном смысле. Логически простое — как и большинство химических элементов — не дано ведь изначально, но получено лишь в результате научных исследований. И если мы теперь найдем нечто, что является простым или по крайней мере пока должно быть принято как таковое, то ему должно быть дано четкое название, так как язык первоначально не имеет выражения, точно соответствующего этому нечто. Дефиниция, имеющая целью ввести название для того, что является логически простым, невозможна. Поэтому не остается ничего другого, как с помощью намеков дать знать читателю или слушателю, как следует понимать то, что имеется в виду под данны словом»[13]. По мнению Фреге, таким «логически простым» и является то, что он обозначает словами «предмет», «функция», «понятие». Поскольку, как мы мы уже упоминали во Введении, понятия для Фреге являются частным случаем функций, рассмотрение Фрегевой теории понятия приводит нас к его учению о функции.

Вопросу о функции Фреге посвятил статьи «Функция и понятие» (1891) и «Что такое функция?» (1904), переводы которых помещены в данной книге. В первой из них он напомнил, что еще в эпоху возникновения математического анализа на вопрос, что такое функция, предлагался ответ: функция от x есть аналитическое выражение, содержащее x, т.е. формула, в которую входит x. Но ответ этот неудовлетворителен, так как не позволяет различить форму и содержание, знак и обозначаемое[14]. Четкое различение имени и обозначаемого этим именем предмета, языка и выражаемого этим языком объективного содержания является основным принципом логического метода Фреге. Методологическая ценность такого подхода очевидна: на нем, как уже отмечалось во Введении, зиждется вся фрегевская логико-семантическая концепция. Именно применение этого принципа, исключительно решительное и последовательное, ставит Фреге на ступень выше не только своих современников — математиков и логиков, но и возвышает его над многими мыслителями последующего периода.

Фреге различает *функцию* и ее *имя*. Предметом математики являются сами функции, а не их имена. Фреге подчеркивает, что «аналитическое выражение, как группа знаков, вовсе не относится к арифметике. Формальную теорию, выдающую знаки за предметы этой науки, я, пожалуй, могу считать полностью опровергнутой в результате моей критики»[15].

В своем понимании функций Фреге склоняется к другой трактовке, также имеющей свою традицию в истории математической мысли, а именно, к истолкованию функций как того, чья сущность состоит в отнесении чего-то к чему-то, совершающемуся по определенному закону. Если это что-то назвать — в стиле Фре-

---

[13] В наст. книге, с. 253 <*BG*, S. 193>.

[14] См. в наст. книге, с. 215–216, статья «Функция и понятие» <*FB*, S. 2–3>.

[15] Наст. книга, с. 281, статья «Что такое функция?» <*WF*, S. 662–663>.

ге — *предметами*, то сущность функции будет заключаться в законе, по которому одним предметам ставятся в соответствие (в общем случае) другие предметы. Например, сущность функции sin x состоит в установлении соответствия между числами, которые подставляются вместо x (аргументы), и числами, выступающими в качестве значения всего выражения sin x (значения функции). Закон этого соответствия математики выражают уравнением $y = \sin x$. Главной частью этого уравнения является *sin*, что и рассматривается в собственном смысле как функция *синус*, так как здесь заключена особенность соответствующего закона (со)отнесения. Поэтому на «sin» можно смотреть как на имя данной функции.

О «законе (со)отнесения» Фреге прямо не говорит, но его изложение фактически подразумевает это понятие. Уже в первом параграфе первого тома «Основных законов арифметики», приведя в качестве примера выражение '$(2+3x^2)\,x$', которое при последовательной подстановке на место x чисел '0', '1', '2', '3' приводит к числам '0', '5', '28', '87', он пишет: «Сущность функции проявляется скорее в той взаимосвязи (Zusammengehörigkeit), которую она устанавливает между числами, знаки которых мы подставляем на место 'x', и числами, которые выступают в качестве значений нашего выражения, — взаимосвязи, неявно представимой формой той кривой, уравнение которой в прямоугольных координатах есть

'$y = (2 + 3x^2)\,x$'»[16] .

Функции, конечно, должны быть как-то наименованы, и имена, знаки функций — функциональные выражения имеют, по Фреге, характерную особенность, отличающую их от имен предметов, — особенность, которая никогда не отмечалась в философии математики: функциональные имена *не насыщены*, «нуждаются в восполнении» именем предмета. Например, знак «sin» требует восполнения символом числа: «sin 0», «sin 1», «sin 2». После такого восполнения имя функции превращается в имя предмета (например, в знак числа). Требование *восполнения* знака функции можно сделать видимым, применив скобки, содержащие пробел, например «sin ( )». Вместо скобок с внутренним пробелом можно договориться употреблять какой-нибудь знак; в «Основных законах арифметики» Фреге использует для этого букву ξ. Тогда знак функции синус получает вид «sin ξ», причем «ξ» только отмечает место, на которое можно подставлять восполняющий знак.

Фрегевский символ ξ есть то, что ныне принято называть *свободной переменной*. Разъяснение понятия переменной, как оно употребляется в математической логике, составляет важную заслугу Фреге. Прежде всего он подвергает критике традиционное представление о *переменных величинах*. Фреге не отвергал переменные *физические* величины (например, величины длин, углов, масс), но считал, что они относятся не к самой математики, а к сфере ее приложений. Что касается «переменного числа», то оно, подчеркивал Фреге, вообще лишено смысла. Всякое число сохраняет неизменными свои свойства. Переменных чисел нет, числа всегда постоянны. Можно подумать, писал Фреге, будто выражение «число, указывающее длину этого стержня в миллиметрах» обозначает переменное число. Но это не так. Данное выражение аналогично выражению: «король этого государства». Поскольку в разное время в данном государстве могут быть разные короли, это выражение без указания времени не обозначает никакого конкретного человека. «Равным образом, выражение «то число, которое указывает длину этого стержня в миллиметрах» без указания времени вовсе не является обозначением числа. Если мы присоединим к нему ссылку на время, то тем самым мы обозначим число, например 1000; послед-

[16] Grundgesetze I, S. 5.

нее же не переменно, а неизменно. Если мы укажем другое время, мы получим другое выражение, которое теперь может обозначить другое число, например 1001»[17]. Нелепо думать, будто число 1000 увеличилось и превратилось в 1001; на самом деле увеличилась длина стержня, и число, выражавшее его прежнюю длину, заменилось другим числом — выражением его новой длины.

Для чего же применяются в математике буквы n, x, y и т.д., если они не являются обозначениями переменных чисел? Ими, говорит Фреге, обычно пользуются для выражения *всеобщности*. Когда выписывают равенство, например $x^2 + 3x = x(x+3)$, этим хотят выразить тот факт, что после замены x любым обозначением некоторого числа всякий раз будет получаться верное равенство. Иную роль выполняет буква x, когда мы имеем дело с аналитическим выражением, скажем, $x^2 + 3x$. Здесь x служит для указания характера восполнения, которого требует имя функции сложения, или — что то же самое — для того, чтобы отметить пустые (аргументные) места в имени функции, на которые можно помещать восполняющие знаки — имена предметов. Переменная не обозначает этих предметов так, как имя обозначает предмет, а, как говорит Фреге, *неопределенно указывает*, намекает на них. Выражаясь языком современной логики, буква x в первом случае является связанной переменной (она связана квантором общности «для всякого x»), а во втором случае — свободной. Что касается Фреге, то он считал, что слово «переменная» из-за его двусмысленности лучше не употреблять, а для того, чтобы не возникало смешения свободных переменных с именами предметов и связанными переменными, — применять в качестве свободной переменной всегда одну и ту же букву или буквы; в «Основных законах арифметики» таковыми являются: буква ξ (если функция зависит от одного аргумента) и буквы ξ и ζ (если функция зависит от двух аргументов).

«Естественно, — считал Фреге, — что своеобразию знака функции, названному нами ненасыщенностью, соответствует нечто в самих функциях. Их мы тоже можем назвать ненасыщенными и этим охарактеризовать коренное их отличие от чисел. Это, конечно, не дефиниция; однако она здесь и невозможна»[18]. «Ненасыщенность», «невосполненность» самих функций состоит в том, что если функцию восполнить аргументом (поставив его имя на пустое место в имя функции), то мы получим *предмет* — значение функции. В отличие от имен функций, имена предметов (собственные имена) «насыщены», то есть не нуждаются в восполнении чем-либо, как «насыщены» и сами предметы. В этом и состоит *коренное различие* между предметами и функциями, между собственными именами и функциональными выражениями.

Пробег значений функции. Принцип абстракции

Итак, понятие *функции* в учении Фреге тесно связано с понятием *предмета*. Предметами он называет все то, что *не есть* функция и что может выступать в качестве аргументов и значений функций. К предметам, по Фреге, относятся прежде всего чувственно воспринимаемые, объективно существующие вещи; кроме них, предметами, по Фреге, являются так называемые *логические предметы*, например *числа*; сюда же относятся *истинность*, *ложность* и *пробеги значений функций*. Все они составляют единую *универсальную предметную область*, которую уместно назвать *универсумом Фреге*.

Понятие *пробега значений функции* (Wertverlauf einer Funktion) является в системе Фреге очень важным. Но оно не сразу появилось в его учении: ни в «Исчислении понятий» 1879 г., ни в «Основаниях арифметики» 1884 г. этого понятия не было. Впервые оно появляется в статье «Функция и понятие» 1891 г. Оно служит для

---

[17] Наст. книга, с. 278; статья «Что такое функция?» <*WF*, S. 658>.

[18] Там же, с. 282 <S. 665>.

перехода от понятийной записи, как она была изложена в труде 1879 г., к более совершенной, с его точки зрения, знаковой системе, средствами которой развертывается грандиозная конструкция «Основных законов арифметики».

Фреге осознавал важность своего нововведения, хотя и не предвидел заключенной в нем опасности. В Предисловии к первому тому «Основных законов арифметики» он писал: «Введение пробегов значений функций — это существенный шаг вперед, которому [понятийная запись] обязана существенно большей гибкостью (Beweglichkeit)»[19]. Однако, как мы теперь понимаем, суть дела состояла не столько в гибкости, сколько в том, что пробеги значений функций в определенном смысле завершали универсум Фреге — картину его *логического мира*. Ибо с их помощью в его системе конституировался весь «предметный универсум» арифметики и, как следствие, математического анализа.

Пробег значений функции задавался с помощью того, что ныне называют *принципом абстракции*[20]. «Я употребляю, — пишет Фреге, — слова

"функция $\Phi(\xi)$ имеет тот же *пробег значений*, что и функция $\Psi(\zeta)$"

во всех случаях как равнозначные словам

"функции $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\zeta)$ для одного и того же аргумента всегда имеют одно и то же значение"»[21].

Таким образом, пробег значений функции определяется как то общее, что присуще двум функциям, если всегда, когда совпадают их аргументы, совпадают и их значения. При этом, хотя Фреге и не дает прямого определения пробега значений функции, нетрудно видеть, что это понятие близко к тому, что обычно называют *графиком функции*, то есть некоторой совокупностью пар[22], в каждой из которых первый элемент — аргумент, а второй — значение функции для этого аргумента. Заметим при этом, что имеются в виду функции одного аргумента. Такое понимание пробега значений функции следует, например, из того разъяснения этого понятия, которое Фреге дает в докладе «Функция и понятие»[23], и того его использования, которое имеет место в «Основных законах арифметики».

Для пояснения данного понятия воспользуемся примером, которым Фреге оперирует в первом томе своих «Основных законов арифметики». Рассмотрим функции $\varepsilon^2 - \varepsilon$ и $\alpha(\alpha - 1)$. Очевидно, что для любого предмета, который берется в качестве их аргументов, обе функции будут неизменно принимать одно и то же значение; таким образом, они имеют один и тот же пробег значений. Что же он собой представляет? Предположим, что мы в состоянии составить бесконечные таблицы для обеих функций, выражающие соответствие значений функций их (одинаковым) аргументам. «Осуществив» это, мы увидим, что обе таблицы совпадут:

ε	α	$\varepsilon^2 - \varepsilon$	$\alpha(\alpha - 1)$
1	1	0	0
2	2	2	2
3	3	6	6
4	4	12	12
...	...	...	...

;

[19] Grundgesetze I, S. IX.

[20] Мы используем этот термин с полным пониманием того, что он применяется и к иным, нежели фрегевская, процедурам введения абстрактных объектов. Все они, однако, родственны, что и оправдывает оперирование данным термином.

[21] Grundgesetze I, S. 7.

[22] Причем, по Фреге, обязательно бесконечной; см. ниже.

[23] См. в наст. книге, с. 215 и далее (статья *FB*).

для простоты мы начали колонки для аргументов с выписывания обозначений для целых положительных чисел, но в эти колонки, по Фреге, должны были бы быть включены не только все числа, известные математике, но вообще *все предметы* универсума Фреге, точнее, их имена. Получается, что эта таблица есть то общее, что имеют данные две функции, и, значит, по определению, мы вправе назвать его «пробегом значений» обеих функций. Разумеется, это только *наглядный образ* понятия пробега значений функции, которое является абстрактным объектом и как таковое наглядно не представимо. Ни табличное, ни «рисунчатое» — в виде графика — представление функции не есть в *точном фрегевском смысле* пробег ее значений. Подобное отождествление невозможно не просто потому, что требует *бесконечных таблиц*. Суть дела в следующем.

Аргументы обеих функций — это *все* предметы универсума Фреге, включая предметы реального мира, данные человеку в его эмпирическом опыте. Значения обеих функций для всех них должны быть *как-то* заданы. Но какое значение они могут получить, если аргументом явится, скажем, Солнце (обозначаемое кружком с точкой посередине; этот пример, правда, в ином контексте, приводит Фреге)? И какой вид приобретут в этом случае «табличное задание» и «графики» обеих функций?

В «Основных законах арифметики» Фреге обходит эту трудность, так как *систематически строит* свой логико-математический универсум, ничего не говоря при этом о внематематических и внелогических предметах. Однако в этом случае возникает другая трудность: предметы фрегевского универсума должны быть как-то наименованы, иначе невозможным становится предполагаемое Фреге их знаковое представление. Но теория Фреге как логизированная теория множеств должна допускать несчетность тех или иных бесконечных множеств. Универсум Фреге, таким образом, должен быть «богаче» предметами, включая пробеги значений функций, чем совокупность возможных предметных имен. Получается, что «онтология» Фреге не вполне согласуется с его семантическим учением.

До сих пор речь шла о функциях от одного аргумента. А как обстоит дело с функциями от большего их числа? Понятие пробега значений Фреге для них специально не вводит, но на примере двуместных функций показывает, как это можно сделать. Он использует для этого своего рода суперпозицию пробегов значений одноместных функций — суперпозицию, которую он называет «удвоенным пробегом значений» (Doppelwertverlauf). Существенно, что подобный «пробег» находится на том же предметном уровне, что и пробеги значений одноместных функций. Таким образом, в отличие от «мира функций», для которого — еще начиная с труда 1879 г. (см. наше Введение в этой книге) — допускались функции от функций и, значит, в принципе неограниченная иерархия функций, в предметном *универсуме Фреге* никаких уровней *нет*.

В «Основных законах арифметики» введение пробегов значений функций на языке своего исчисления Фреге записывает в виде равенства:

$$\vdash\!\!-\!\!-(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \acute{\alpha}\Psi(\alpha)) = (-\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\ \Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})),$$

составляющего знаменитый «основной закон» (V) — наиболее «каверзный» принцип его системы обоснования арифметики[24]. Здесь малые греческие буквы в левой части всего этого равенства — это, говоря современным языком, пере-

[24] Grundgesetze I, S. 16, 36. На с. 16 этот принцип формулируется не в чисто «формульном» виде и там используются буквы *Φ* и *Ψ*; на с. 36 он фигурирует уже как формула его исчисления и в соответствии с принятым в этом исчислении использованием букв разных алфавитов вместо приведенных выше больших греческих букв применяются малые латинские буквы *f* и *g*.

менные, связанные оператором введения «пробегов значений»; этот оператор Фреге обозначает с помощью знака придыхания в латинском языке (spiritus lenis), то есть используя запятую, помещаемую над малой греческой буквой; малые *готические* буквы в правой части равенства — это переменные, связанные квантором общности; он передается с помощью лунки, в которую помещена готическая буква. Что касается знака $\vdash$, то он означает следующее: предложение, помещаемое непосредственно после него, выражает *истинное суждение*; при этом данный знак является, по Фреге, составным — горизонтальная черта в нем означает *возможность* истинностной оценки соответствующего суждения, а добавление слева вертикальной черты обращает это суждение в *истину*. При этом следует иметь в виду важную особенность «горизонтали»: запись вида $-\!\!-\!\!-\ \xi$ (где ξ есть произвольная функция) имеет тот смысл, что $-\!\!-\!\!-\xi$ истинно, если значением функции ξ является истинностное значение *истинно*, и ложно, если эта функция принимает значение, *отличное* от упомянутого истинностного значения (то есть она *не обязана* приниматьб значение *ложность*). Эта особенность фрегевской «горизонтали» есть непосредственное следствие принимаемой Фреге универсальности предметной области его логической системы[25]. Заметим, что $-\!\!-\!\!-\xi$ есть *понятие* во фрегевском смысле.

Для современного читателя более привычна запись принципа (V) в таком виде (мы сохранили символику Фреге для «пробегов значений»):

$$\forall\ x\,(\Phi(x) = \Psi(x)) \equiv (\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\,\Psi(\alpha)).$$

Эту эквивалентность можно прочесть так: всеобщность равенства значений указанных двух функций эквивалентна (равнозначна) равенству того, что Фреге называет пробегами значений этих функций. «То, что <...> всеобщность равенства значений двух функций можно рассматривать как на некоторое равенство, а именно, как равенство двух пробегов значений, — это, как мне кажется, — говорит Фреге, — не требует доказательства: на это надо смотреть как на логический закон»[26]. При этом отношение равенства, выражаемое словом gleich и знаком =, понимается Фреге в том же значении, что и «совпадающее *с*», «одинаковое, тождественное *с*»[27]. А то, что на пробеги значений функций следует смотреть как на предметы, вытекает из самой записи, в которой выражение «$\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\,\Psi(\alpha)$» обозначает равенство *предметов* (поскольку «$\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$» и «$\grave{\alpha}\,\Psi(\alpha)$» «насыщены», так как не содержат аргументных мест).

Из сказанного ясно, почему «основной закон» (V) естественно понимать как *принцип абстракции*. Ведь с его помощью в *универсум Фреге* вводятся пробеги значений функций, представляющие собой некие *абстрактные объекты*, частным случаем которых являются *объемы понятий*, или классы, то есть *множества* каких-то элементов (по Фреге, предметов), если пользоваться общепринятым теоретико-множественным языком. Абстрактными объектами являются и «удвоенные» пробеги значений (двуместных) функций. Они у Фреге имеют вид[28]: $\grave{\varepsilon}\grave{\alpha}\,\Phi(\varepsilon, \alpha)$, или после использования еще одних скобок $\grave{\varepsilon}\ (\grave{\alpha}\,\Phi(\varepsilon, \alpha))$, и их тоже можно естественным образом истолковать в теоретико-множественном смысле.

Фреге придавал большое значение введению обозначений для пробегов значений функций; оно «кажется мне, — писал он, — одним из плодотворнейших дополнений к моему исчислению понятий <...> [Этим] одновременно расширяется

---

[25] См. Grundgesetze I, S. 7, 8.

[26] См. в наст. книге, с. 219 (статья «Функция и понятие» <*FB*, S. 10>).

[27] См. Grundgesetze I, S. IX.

[28] Grundgesetze I, S. 54–55.

круг того, что может рассматриваться в качестве аргументов функций. Например, $\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon) = \dot{\alpha}(\alpha\cdot(\alpha - 1))$ есть значение функции $\xi = \dot{\alpha}(\alpha\cdot(\alpha - 1))$ для аргумента $\dot{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon)$»[29].

Понятия и отношения. Классы как объемы понятий

Мы уже говорили о важности для логики того шага вперед, который сделал Фреге в понимании функций, допустив в качестве их аргументов и значений всевозможные предметы, а не только числа. Это дало ему возможность рассматривать понятия как частный случай функций. В качестве примера понятийных выражений Фреге приводит «$\xi^2 = 4$» и «$\xi > 2$»; первое выражение есть имя такой функции, которая числу 1 ставит в соответствие ложь (так как предложение «$1^2 = 4$» ложно), числу 2 — истину (так как предложение «$2^2 = 4$» истинно), числу 3 ставит в соответствие ложь и т.д. Предложения, получающиеся после подстановки имен аргументов на «пустое место» в имя функции «$(\quad)^2 = 4$», суть имена особого рода — имена либо *истинности*, либо *ложности*; истинность и ложность, выступающие в качестве значений предложений, Фреге, как мы знаем, назвал *истинностными значениями* (значениями истинности, Wahrheitswerthe). Он писал: «значение (Werth) функции $\xi^2 = 4$ есть или *истинностное значение* истинность, или *истинностное значение* ложность»[30]; истинность и ложность, как мы уже имели случай говорить, рассматриваются им в качестве особых *логических предметов*.

Функции, подобные функциям $\xi^2 = 4$ и $\xi > 2$, в современной логике носят название *логических функций*. Фреге именует их *понятиями*, если это функции от одного аргумента, и *отношениями*, если это функции от двух аргументов. Он указывает на то, что функция одного аргумента, имеющая своим значением истинность или ложность, совпадает с тем, что в логике называется понятием; поэтому «представляется целесообразным прямо назвать *понятием* функцию, значением которой всегда является истинностное значение»[31].

В отношении понятий Фреге, как мы знаем, установил следующий способ выражения. Если Γ — некоторый предмет, а $\Phi(\xi)$ — какое-то понятие, и если $\Phi(\Gamma)$ истинно, то Фреге предлагает говорить: «предмет Γ *подпадает* под понятие Φ». Например, число 2 подпадает под понятие $\xi^2 = 4$, так как выражение «$2^2 = 4$» есть истинное предложение. Как мы уже говорили, по Фреге эту же мысль можно выразить и в терминах свойств, сказав: «быть числом, которое, будучи умноженным на себя, дает число 4, есть свойство, присущее числу 2». Наконец, можно просто сказать: «2 есть число, которое, если его умножить на себя, дает число, равное 4».

Пробег значения истинностнозначной одноместной функции получает у него название *объема понятия*. Объем понятия можно также определить с помощью *принцип абстракции* — как то общее, что присуще двум понятиям (двум логическим функциям от одного аргумента), которые одному и тому же аргументу относят одно и то же истинностное значение. «В логике, — писал Фреге, — это называется равенством объемов понятий. Поэтому мы можем охарактеризовать объем понятия как пробег значений функции, значение которой для любого аргумента есть истинностное значение»[32]. В качестве примера таких функций Фреге — в первом томе «Основных законов арифметики» — приводит: $\xi^2 = 4$ и $3\xi^2 = 12$. Обе функции имеют

---

[29] Ibidem, S. 15–16.

[30] Ibidem, S. 7.

[31] Ibidem, S. 8. Имеются в виду одноместные функции.

[32] В наст. книге, с. 222, статья «Функция и понятие» <*FB*, S. 16>).

один и тот же пробег значений: $\grave{\varepsilon}$ ($\varepsilon^2 = 4$) = $\grave{\alpha}$ ($3\alpha^2 = 12$), так как при любом ξ верно, что ($\xi^2 = 4$) = ($3\xi^2 = 12$).

Таким образом, если функция $\Phi(\xi)$ является понятием, то фрегевское задание пробега ее значений доставляет критерий равенства понятий по объему. Ибо у двух равнообъемных понятий то общее, что делает их равными, состоит в следующем: каждому из них соответствует одна и та же совокупность пар такого вида, что первый элемент пары — предмет из «универсума Фреге», а второй — какое-то истинностное значение (истинность или ложность), причем в это множество входят *все* пары, у которых первые элементы попарно различны и нет и не может быть двух пар, различающихся *только* вторыми элементами. Ясно, что каждой такой совокупности пар соответствует некоторая совокупность первых элементов этих пар (предметов из «универсума Фреге»), состоящая из тех предметов, для которых в данной паре стоит *истина*. Наоборот, любой совокупности предметов (из фрегевского универсума) — в том числе и пустой — отвечает некоторая совокупность пар рассматриваемого вида, имеющая следующее строение: в нее входят все те пары, первые элементы которых состоят из предметов универсума, а вторым элементом во всех них является *истина*, а также все те пары, в которых первым элементом выступают те предметы универсума, которые не входили в исходную совокупность, а вторым элементом в них является *ложь*. Поскольку все понятия определены на едином универсуме, обратное отношение тоже однозначно. Таким образом, по Фреге, каждой совокупности пар рассматриваемого вида взаимно-однозначно соответствует некоторый класс предметов из универсальной предметной области. Этот класс можно поэтому также рассматривать как то общее, что имеют два равнообъемных понятия, и называть его *объемом* этих понятий.

Так, объем понятия $\xi > 2$ и $\xi > 4 - 2$ можно представить как класс предметов 3, 4, 5, ..., поскольку, согласно фрегевскому определению, каждый из них подпадает под оба понятия: предложения $3 > 2$, $4 > 2$, $5 > 2$, ... и $3 > 4 - 2$, $4 > (4 - 2)$, $5 > (4 - 2)$, ... истинны. Рассматривая эти предложения (ограничимся функцией $\xi > 2$), мы видим, что все они имеют одну и ту же составную часть «> 2», или (выделяя с помощью скобок аргументное место для данной функции) «$(\ \ ) > 2$», что, как мы знаем, естественно рассматривать как выражение *общего свойства*, присущего элементам данного класса. Мы знаем также, что это же выражение, по Фреге, обозначает некоторое понятие. Таким образом, общее свойство *быть больше, чем два* и понятие *больше, чем два* — это просто одно и то же. Тогда включение предмета в класс предметов, соответствующих определенному понятию, совпадает с наличием у предмета соответствующего свойства, а также с принадлежностью данного предмета объему понятия, рассматриваемого как класс предметов, подпадающих под данное понятие, то есть имеющих соответствующее общее свойство. Таким образом, фрегевское понимание класса как объема понятия полностью совпадает с содержательными представлениями о свойстве и о классе — как о том, что состоит (или может состоять) из предметов, обладающих соответствующим свойством. Существенное для подобного представления положение о том, что два класса совпадают, когда совпадают их элементы, справедливо и в его логической концепции.

Подчеркнем, что в теории Фреге представимы все основоположения логики классов, включая определения пустого и универсального классов, операций над классами и отношений между ними, а также доказательства соответствующих законов. Хотя у Фреге все это связано с принятием универсальной предметной области, эти основоположения сохраняют свою силу и в случае ее ограничения — при условии, что мы рассматриваем классы именно в этой и только в этой ограниченной области.

Отметим, что учение Фреге вполне объясняет необходимость введения в логику и математику *пустых понятий*, то есть понятий с пустым объемом. Если, как устанавливает Фреге, понятие есть то, сущность чего состоит в отнесении истинностных значений предметам из его универсума, то понятия, которые каждому предмету ставят в соответствие истинностное значение *ложь*, ничуть не менее допустимы, чем всякие иные. Хотя объем таких понятий не будет содержать ни одного предмета — соответствующий класс окажется пустым, — тем не менее они вполне оправданы с логической точки зрения. Если собственные имена, не обозначающие никакого предмета, считает Фреге, недопустимы в науке, то без пустых понятий, подчеркивает он, обойтись нельзя.

Логические функции от двух аргументов, значениями которых могут быть только истинность или ложность, Фреге называет *отношениями*. Примерами отношений могут быть $\xi = \zeta$ (отношение *равенства*) и $\xi > \zeta$ (отношение *быть больше*). Если даны два предмета Γ и Δ и логическая функция $\Psi(\xi, \zeta)$, а подстановка этих предметов вместо ξ и ζ, то есть $\Psi(\Gamma, \Delta)$, порождает истину (то есть обозначает истинностное значение «истина»), то можно прибегнуть к обороту «предмет Γ находится в отношении $\Psi(\xi, \zeta)$ к предмету Δ». Этому отношению, как и всякой (двуместной) функции соответствует «удвоенный пробег значений», то есть *объем* (*бинарного*) *отношения*.

В литературе, посвященной логическому учению Фреге, справедливо обращается внимание на те требования, которые он предъявляет к понятиям. Среди них — условие, чтобы каждое понятие (и отношение, да вообще любая функция) было определено для всех предметов универсума, чтобы на аргументные места в обозначениях понятий (отношений, функций) не попадали выражения, не имеющие значения[33]. В соответствии с этим Фреге считал «заповедью научной строгости», чтобы ни одно выражение не могло оказаться не имеющим значения, чтобы не производилось вычислений (rechnen), в которых оперировали бы с пустыми знаками, полагая, что имеют дело с предметами.

Предикативность понятий. Концепция универсальности предметной области в логике — коренная черта онтологии Фреге

В теории Фреге *понятия* являются частным случаем функций, и как сами функции, так и их имена, по Фреге, «ненасыщены», нуждаются в «восполнении». В случае понятий их невосполненность составляет их *предикативную природу*. В предложении «Утренняя звезда есть планета» грамматический субъект обозначает предмет, а грамматический предикат — понятие (свойство). Понятийное выражение «планета» не насыщено, оно требует восполнения именем предмета — требует этого в том смысле, что иначе оно не может указывать ни на истину, ни на ложь. Но после восполнения именем «Утренняя звезда», которое совершается с помощью связки «есть» (указывающей, что форма данного выражения есть утверждающее предложение), оно превращается в выражение *мысли* и претендует на *истинность*. В первом томе «Основных законов арифметики» Фреге приводит пример: «Функция $\xi^2 = 4$ <...> может иметь только два значения, а именно истину для аргументов 2 и −2 и ложь для всех прочих аргументов. Сфера того, что допускается в качестве аргументов, должна быть расширена и распространена на предметы вообще. В соответствии с этим я отношу к *предметам* все, что не есть функция, например числа (Zahlen), истинностные значения и <...> пробеги значений. Имена предметов, *собственные имена* не

---

[33] Ср. *Kutschera*, S. 99; Kleine Schriften, S. 133.

влекут вместе с собой никаких аргументных мест, они так же насыщены, как и сами предметы»[34].

В отличие от понятия предмет не предикативен. Согласно Фреге сущность понятий можно охарактеризовать, указав на то, что они имеют предикативную природу. Предмет же никогда не может быть высказан о чем-либо. Когда говорится «Вечерняя звезда есть Венера», имеются в виду не *Венера*, но *совпадающая с Венерой*. В языке предметам соответствуют собственные имена, а понятиям — понятийные слова[35].

Во всяком предложении какая-нибудь его часть должна быть не восполнена, иначе будет невозможна связь между частями мысли. Нельзя, утверждал Фреге, чтобы все части мысли были завершены, но надо, чтобы по крайней мере одна из них была как-то ненасыщена, или, иначе говоря, носила *предикативный характер*, ибо в противном случае они не будут связаны друг с другом[36]. Так, в предложении «2 есть простое число» ненасыщенным является выражение «простое число». Это предложение выражает подпадение предмета 2 под понятие *простое число*, и отношение подпадения предмета под понятие следует отличать от отношения, в котором объем одного понятия находится к объему другого понятия, когда первое понятие *подчинено* второму понятию. Подобное отношение выражается, например, в предложении «Все млекопитающие имеют красную кровь». В этом предложении есть *две* части, нуждающиеся в восполнении (два понятийных выражения): «млекопитающие» и «имеют красную кровь». Смысл этого предложения можно передать так: «Если нечто есть млекопитающее, то оно имеет красную кровь»; восполнение обоих понятий здесь произведено не с помощью собственного имени, а с помощью, как говорит Фреге, *неопределенно указывающего* слова «нечто», которое служит для выражения всеобщности.

Эти положения теории Фреге — вместе с его учением о *смысле* и *значении* языковых выражений, значимых для логики, — закладывали, как мы знаем, основы логической семантики, в частности того, что впоследствии получило название теории *семантических* (или *синтаксических*) *категорий*. Для этой теории важно подчеркивавшееся Фреге положение, согласно которому связность мыслей требует наличия в составе предложений — выражений предикативного характера. Разработанный Фреге способ формализации общих суждений ныне общепринят в логике. Кроме того, следует помнить, что в рамках своей теории Фреге ввел понятия второй, третьей и т.д. ступеней и выявил отношения между ними, что дало ему возможность определить числа, а также пролить свет на некоторые вопросы, связанные с понятием существования в логике (о связанной с этим трудности мы будем говорить особо).

Предикативность понятий, по Фреге, предполагает универсальность предметной области их определения. В параграфе 3 «Основных законов арифметики» после разъяснения понятия пробега значений он рассматривает уже приводившиеся нами функции $\xi^2 = 4$ и $3\xi = 12$ и говорит, что этот случай имеет место, «*по крайней мере* когда в качестве аргументов берутся числа. Но мы можем мыслить знаки возведения в квадрат и умножения определенными так, что функция

$$(\xi^2 = 4) = (3\xi^2 = 12)$$

для *любого* аргумента получает в качестве значения — истинность»[37].

---

[34] Grundgesetze I, S. 7.

[35] См. с. 254 и далее (статья «О понятии и предмете»); впрочем, эти положения Фреге развивает во многих своих работах.

[36] См. наст. книга, статьи «Функция и понятие», «О понятии и предмете» в первой части, а также статью «Мысль» в части третьей.

[37] Grundgesetze I, S. 7 (курсив мой. — *Б.Б.*).

Итак, по Фреге, все понятия (как и функции вообще) имеют одну и ту же область определения (Definitionsbereich) — область, из которой берутся аргументы и которая охватывает *все* предметы *универсума*. Но если *universe of discourse*, употребляя выражение Буля, столь всеохватен, то как быть, например, с математическими понятиями, когда некий предмет a заведомо «нематематичен», скажем, это Солнце, обозначаемое знаком ⊙? Фреге предлагает в этом случае считать значением понятия $F(\xi)$ любой выбранный нами предмет b, например, полагать, что в записи $F(a) = b$ предмет b есть то же, что и a.

Все это надо постоянно иметь в виду, когда мы рассматривает понятие *предикации* во фрегевском смысле. В параграфе 56 второго тома «Основных законов арифметики» Фреге формулирует свой *принцип полноты* и вводит представление о предикации в контекст своей концепции универсальности предметной области, причем связывает это с законом исключенного третьего. Дефиниция понятия (потенциального предиката), — пишет он, — должна быть *полной* (vollständig), для любого предмета она должна недвусмысленно определять, подпадает ли он под данное понятие (можно ли высказать о предмете данный предикат и получить истину) или нет <...> наглядно это можно выразить так: понятие должно иметь резкие границы <...> нечетко (unscharf) определенное понятие мы не в праве называть понятием»[38]. Таким понятиям не место в логике. «Закон исключенного третьего есть, собственно говоря, только другая форма требования, чтобы понятие было четко отграничено. Произвольный предмет Δ подпадает либо не подпадает под понятие Φ: *tertium non datur*»[39].

Возможное подпадение предмета Δ под понятие Φ (то есть $\Phi(\Delta)$) приводит к *суждению*, причем, как мы знаем, если перед Φ поставлена горизонтальная черта $-\!\!-\, \Phi(\Delta)$, это означает, что данное суждение может быть как истинным, так и ложным, добавление же к горизонтальной черте слева вертикальной черты (создающее знак '$\vdash\!\!-$' означает утверждение истинности суждения: $\vdash\!\!-\, \Phi(\Delta)$. Отрицание же суждения (то есть констатация того, что Δ не подпадает под понятие Φ) Фреге выражает с помощью вертикальной черточки, помещаемой снизу от знака '$-\!\!-$': $\vdash\!\!\top\!\!-\, \Phi(\Delta)$. Впрочем, исчисление Фреге мы подробнее опишем ниже.

Мы знаем, что для функций Фреге предусматривает их иерархию, но не допускает таковую для предметов и, значит, пробегов значений функций, классов и классов, состоящих из классов, и т.д: все они находятся на одном и том же предметном уровне, независимо от уровней функций, которые они — как можно сказать — представляют как пробеги их значений. Принятие иерархии предметов — и, значит, иерархии аргументных мест в функциях, приводящей к «теории типов» предметов (которая была уже у Шрёдера[40]), — это был совсем не тот путь, которым шел Фреге в своем обосновании арифметики. Помимо соображений, вытекавших из характера развертываемой им логико-арифметической системы, здесь действовал и более общий, философский мотив: принятие предметной иерархии не соответствовало его глубокому убеждению в абсолютной универсальности законов логики, которые, как он считал, всегда и везде одни и те же — неизменны и вечны, точнее, имеют вневременной и внепространственный характер. Конечно, предметы могут иметь различное, часто весьма сложное строение — так же как и

---

[38] Grundgesetze II, S. 69. Курсив мой. — *Б.Б.*.

[39] Ibidem.

[40] См. об этом в кн.: *Бирюков*, 1963. В 1939 г. А.Чёрч в докладе на 5-й сессии «Ассоциации символической логики» выступил с сообщением о «шрёдеровском предвосхищении простой теории типов» Бертрана Рассела (см.: The Journal of Symbolik Logic, v. IV, № 4, p. 76).

их имена, — но на предикации это не сказывается. Но то, что функции могут быть по-разному устроены с точки зрения их «ненасыщенности», «требования в восполнении» — это в логической теории учитываться должно обязательно. И связывание переменной в функции $F(\xi)$, коль скоро последняя является понятием, с помощью квантора общности, порождающем суждение $\forall\, xF(x)$, или на языке исчисления Фреге $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\,\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, не отменяет ее предикативной природы, но, так сказать, нейтрализует ее «ненасыщенность». Квантификация не отменяет «ненасыщенности», а лишь подчеркивает ее. Заметим сразу же, что Фреге непосредственно использует лишь квантор общности $\forall$, с помощью которого (и отрицания) он выражает квантор существования $\exists$ хорошо ныне известным способом: $\neg\forall x\neg F(x)$, или на языке исчисления понятий: $\neg\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\neg\,\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$.

Предикативный характер понятий особенно заметен в случае функций второго порядка. Если $F(f)$ есть такого рода функция, то ее — согласно построению 1893 г. — уже не следует понимать как функцию от функции (как это было в труде 1879 г.); ее надо считать двуместной функцией, то есть функцией, требующей двукратного восполнения: подстановки предметов на места, занимаемые знаками «f» и «F», то есть как некую функцию вида $G(F, f)$.

Особо следует сказать о функциях, значениями которых предполагаются истинностные значения. Их не следует отождествлять с тем, что ныне называется пропозициональными функциями, или функциями-высказываниями, то есть с операциями отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и пр. в их *современном* понимании, допускающем табличное задание. Это объясняется фрегевской «онтологией»: их аргументами могут быть *любые* предметы *универсума Фреге*. Отсюда приводившееся выше определение *отрицания*: это такая функция, которая принимает значение «ложь», когда ее аргумент есть истинностное значение «истина», и значение «истина»[41] — при *любых других* аргументах.

Законы логики и универсум Фреге

Подведем некоторые итоги. Онтология Фреге, признающая существование *универсальной предметной области,* охватывающей все предметы мира, эмпирические и абстрактные, вытекала из его общефилософской концепции, именно — из понимания им *логических законов.* Фреге исходил из мысли, что на всякий закон, говорящий о том, что *есть* в действительности, можно смотреть как на предписание мыслить в соответствии с этим законом. В этом смысле все законы — законы геометрии или физики не менее, чем законы логики, — являются «законами мышления».

В чем же специфика законов, которые изучаются в логике? Сущность законов логики он видел в том, что они носят всеобщий, абсолютный характер. Название законов логики «“законами мышления”, — говорит Фреге, — лишь тогда оправдано, когда этим хотят сказать, что они являются самыми всеобщими, что их предписания, как следует мыслить, имеют силу всюду, где вообще мыслят»[42].

Фреге, разумеется, понимал, что «исторический способ рассмотрения, пытающийся прислушаться к становлению вещей и из становления познавать их сущность, конечно, имеет большие основания»[43]. Но способ этот, по мнению Фреге, ограничен. Законы мышления, согласно концепции Фреге, не носят исторического

---

[41] Поэтому фрегевское определение пропозициональных операторов не следует представлять, как это сделано в книге Кучеры (*Kutschera*, S. 91), в форме отображения множества {*и*, *л*} на себя.

[42] Grungesetze I, S. XV.

[43] Grundlagen, S. VII.

характера. Они имеют безусловную, вечную силу. Они одни и те же всегда и везде. С точки зрения Фреге, всякий закон мышления предписывает, «как следует судить, где бы, когда бы и кто бы ни высказывал суждения»[44]. Если когда-либо будут открыты мыслящие существа, отличные от людей, они тоже будут мыслить по этим законам.

Естественно возникает вопрос: почему, по какому праву мы признаем истинным некоторый логический закон? Фреге не имел на него ответа и считал, что логика здесь бессильна. Она может только свести данный закон к другим логическим законам. А там, где это невозможно, она молчит. «Выходя за пределы логики, — пишет Фреге, — можно сказать: в силу нашей природы и внешних обстоятельств мы принуждены прибегать к суждениям, и когда мы судим, мы не можем отвергнуть данный закон — например, закон тождества, — мы должны его признать, если мы не хотим внести путаницу в наше мышление и в конце концов отказаться от всякого суждения»[45].

Из фрегевского понимания законов логики само собой получалось, что исходить в последней следует всегда из универсальной предметной области, элементами которой являются и всевозможные конкретные вещи, и абстрактные сущности типа истинностных значений, пробегов значений функций, классов (множеств) предметов, классов, состоящих из классов, классов классов, в свою очередь состоящих из классов, и т.д. В этой связи представляет интерес спор, возникший у Фреге с Э. Шрёдером.

В своей «Алгебре логики» Шрёдер отказался от представления об универсальной предметной области, так как в случае ее допущения предложенное им определение «тождественного нуля» (пустого класса) вело в его логическом исчислении к противоречию. На предметную область («многообразие»), в которой ведется данное рассуждение, Шрёдер наложил следующее ограничение: в числе предметов многообразия не должно быть таких, которые являются классами предметов из той же области. Если исходную предметную область (многообразие) обозначить через M, то классы предметов этой области будут принадлежать уже к другой предметной области M_1, классы классов предметов будут составлять новую область M_2 и т.д. Таким образом, Шрёдер предложил своеобразную *теорию типов*. В соответствии с этой теорией Шрёдер считал, что всякое рассуждение всегда проводится в определенной области предметов, которую следует заранее указать и которая не может быть всеобъемлющей.

Фреге резко выступил против шрёдеровского ограничения предметной области. В статье «Критическое рассмотрение некоторых пунктов в “Лекциях по алгебре логики” Э. Шрёдера»[46] он показал, что трудность, которая возникла у Шрёдера, можно преодолеть иным путем: посредством различения отношений *включения* класса в класс и *принадлежности* предмета классу предметов; при этом универсальную предметную область, был убежден Фреге, можно и нужно сохранить.

Однако Фреге казалось недостаточным показать, что помимо пути Шрёдера возможен и другой путь, при котором сохраняется допущение универсальности предметной области. Он стремился доказать, что решение Шрёдера вообще несостоятельно, что проводимое последним ограничение предметной области никак не может быть сохранено в шрёдеровском исчислении. К этому Фреге толкало убеждение в том, что «логика имеет право притязать на неограниченность области дей-

---

[44] Grundgesetze I, S. XVII.

[45] Ibidem.

[46] См. наст. книгу, с. 263 –276.

ствия своих законов» и что поэтому мы не должны в каждом данном случае как-то ограничивать поле своих логических действий.

Теория типов Шрёдера, с помощью которой последний устранил в своем логическом исчислении парадокс, связанный с тождественным нулем, была, однако, вполне правомерной; она была даже в известном смысле *лучше* теории Фреге, ибо исключала также и антиномию Рассела.

* * *

Введение Фреге всеохватывающей предметной области тесно связано с приводившимся выше его требованием, чтобы каждое понятие было, как он говорит, строго отграничено, имело четкие границы. Такое требование к понятиям Фреге выводил из расширения круга аргументов и значений функций и связывал его с принципом, согласно которому в науке не должно быть бессмысленных, ничего не значащих выражений.

Фреге рассматривает следующий пример. Если речь идет об арифметике целых чисел, то a и b в формуле $a + b$ означают целые числа. Но что значит $\odot + 1$, если $\odot$ означает Солнце: можно ли считать это выражение не имеющим значения? Нет, так как заповедью научной строгости является принцип: в науке не должно быть выражений, не имеющих значения. Значит, для выражения $\odot + 1$ должно быть установлено какое-то значение. Довольно безразлично, как это сделать, но как-то установить это значение надо. Для понятий указанная заповедь означает требование, чтобы они для каждого аргумента имели в качестве значений истинность или ложность, «чтобы для каждого предмета было определено, подпадает ли он под данное понятие или нет; другими словами: для понятий выдвигается требование их четкой отграниченности, без выполнения которого невозможно установление относящихся к ним логических законов»[47]; «требование четкой отграниченности понятий влечет за собой для функций как таковых требование: они должны для каждого аргумента иметь какое-либо значение»[48]. Так, если понятие $\xi + 1 = 10$ строго отграничено, должна быть строго отграничена и функция $\xi + 1$, ибо если бы она не была строго отграничена, то есть для какого-либо аргумента не имела значения, то и рассматриваемое понятие не относило бы к этому аргументу ни истинности, ни ложности. Таким образом, все функции и понятия должны быть определены на всей универсальной области предметов, включающей в качестве особых предметов *истину* и *ложь*. Специфически математические функции должны быть соответствующим образом *доопределены*, с тем чтобы областью их аргументов стал весь предметный мир. Предполагая это в своей логико-математической системе, изложенной в «Основных законах арифметики», Фреге тем не менее *строит* этот мир — универсум Фреге — как *мир пробегов значений функций.*

Фрегевское требование строгого отграничения понятий есть требование того, чтобы каждое понятие имело постоянный, неменяющийся объем. В его логическом исчислении оно приобретает форму «основного закона» (V), который мы привели выше; его содержательным аналогом является фрегевское требование *полноты.* Все это вместе может рассматриваться как утверждение того, что *каждое понятие имеет объем в смысле неизменного, строго фиксированного предмета.* Этот принцип мы выше назвали *принципом абстракции*; но его называют и *принципом объемности* или *экстенсиональности*, поскольку он позволяет вводить в рассмотрение абстрактные объекты типа объемов понятий. Признание этого принципа придавало фрегевской

---

[47] В наст. книге, с. 223—224, статья «Функция и понятие» <*FB*, S. 20>).

[48] Там же.

логике *экстенсиональный, объемный, теоретико-множественный* характер. Хотя Фреге и не отождествлял понятие с его объемом, тем не менее, в силу принципа объемности, в его логической системе понятие считается заданным, если определен его объем, то есть указан класс предметов, подпадающих под данное понятие. Этому же принципу, по мнению Фреге, подчиняется и логика обычного содержательного мышления.

До сих пор наши рассуждения в общем отвечали тому содержанию, которое отражено в предлагаемых читателю текстах Фреге. Теперь мы поговорим о том, что в этих текстах не представлено.

О логической архитектонике «Основных законов арифметики»

Ниже мы кратко охарактеризуем логические особенности обоснования арифметики, предпринятого Фреге в труде 1893–1903 гг.

Фреге начинает с введения главных категорий своей теории — функции и ее аргументов, истинностных значений, противопоставления предметов функциям как того, что требует «восполнения», а также имен функций и имен предметов (собственных имен). Новым по сравнению с трудом 1879 г. является различение *смысла* и *значения* для знаков, обозначающих предметы. В параграфе 3 вводится новая категория — *пробег значений* функции и ее спецификация — *понятие*, а также приведенная уже нами терминология, относящаяся к понятиям. Далее проводится различение между *суждением* (Urtheil) и *мыслью* (Gedanke): под суждением понимается признание истинности некоторой мысли. Задание суждений — их Фреге называет предложениями (Sätze) своей понятийной записи — совершается с помощью уже знакомого нам знака '$\vdash\!\!-\!\!-$'; как мы знаем, это сложный знак, и его вертикальная черта получает название *штриха суждения*, горизонтальная же (ее Фреге называет просто «горизонталью») служит обозначению функции, задающей категорию истинностного значения; $-\!\!-\!\!-\Delta$ есть истина, если предложение Δ истинно, и ложно, если Δ *не является* истинным. При этом Фреге указывает в примечании, что раньше (имеется в виду труд 1879 г.) штрих суждения он называл *штрихом содержания*, поскольку он еще не ввел различения между *значением истинности* и *мыслью*. Поскольку $-\!\!-\!\!-\xi$ есть истиннознанная функция (то есть функция, принимающая значение *истинно* или *ложно*), она есть понятие. Далее вводится операция отрицания $-\!\!\!\!\top\!\!-\xi$, которая в силу истиннозначности функции $-\!\!-\!\!-\xi$, тоже является истиннозначной функцией (и таковыми же оказываются *все* функции, или операции, логики высказываний). Далее определяется отношение равенства: '$\Gamma = \Delta$' есть *истина* тогда, и только тогда, когда Γ совпадает с Δ. Затем следует введение квантора общности[49], $-\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\Phi(\mathfrak{a})$, то есть (истиннозначных) формул вида $\forall x \Phi(x)$.

Принципиальная новизна начинается с введения обозначения для *пробега значений* функции — знака ' в выражениях вида $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$; этот знак[50] связывает перемен-

---

[49] Введение кванторов, начиная с труда 1879 г., составляет бесспорную заслугу Фреге. Позже и независимо от него кванторы были введены Пирсом, Шрёдером, Пеано, Расселом, но все они — исключая Б. Рассела — делали это в гораздо менее четкой форме.

[50] В литературе, посвященной логическому учению Фреге, этот знак нередко отождествляют со знаком ламбда-конверсии А. Чёрча (см. *Мадер В.В.* О логико-арифметической концепции Готлоба Фреге//Историко-математические исследования. Вып. XXX/Отв. ред. А.П. Юшкевич. М., Наука, 1986, с. 270 и далее; при последующих ссылках на эту статью — *Мадер*), так что $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ рассматривают наподобие $\lambda x \Phi(x)$. Однако оператор Чёрча строит по значению функции Φ для произвольного аргумента x самою эту функцию (точнее, ее имя). Ведь $\lambda x \Phi(x)$ читается: «та функция, которая по терму x выдает значение $\Phi(x)$», что не соответствует тому, что хотел сказать Фреге.

ную в функции $\Phi(\xi)$; в случае понятий он может быть истолкован как оператор образования класса, который действует на свойство, выражаемое соответствующим понятием. Трудность, вытекающая из фрегевского задания понятия пробега значений, осмысливается им в параграфе 10 — здесь ключ ко всему построению Фреге.

Суть дела в том, что пробеги значений Фреге — математик, требовавший обязательно *явных* дефиниций, — определяет, говоря современным языком, с точностью до равенства: он прямо признает, что таким путем значение имени вида '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' «полностью ни в коей мере не определено»[51]. Если нам дан некий предмет, мы не можем решить, является ли он «пробегом значений функции» — и какой именно функции; не можем мы решить и вопрос, обладает ли заданный пробег значений функции данным свойством, пока не узнаем, что свойство это связано с неким свойством функции, о которой идет речь. Вполне отчетливо эта неоднозначность «пробегов» выступает в следующей описываемой Фреге ситуации. Пусть имеется функция $X(\xi)$ такая, что она не принимает одинаковых значений для разных аргументов (то есть является функцией, обеспечивающей взаимно-однозначное соответствие между ее аргументами и значениями). Тогда признаки опознавания предметов, имена которых имеют вид '$X(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$', совпадают с признаками опознавания предметов, знаки которых имеют вид '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$'. И получается, что '$X(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = X(\dot{\alpha}\Psi(\alpha))$' равнозначно тому, что '$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$'; но последнее равенство эквивалентно тому, что '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = \dot{\alpha}\Psi(\alpha)$'. Это значит, что в качестве пробега значений функции Φ можно взять как $\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, так и $X(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$.

Эту неопределенность Фреге устраняет тем, «что для каждой функции при ее введении устанавливается, какие значения она принимает для аргументов, которые являются пробегами значений, так же как и для всех прочих аргументов»[52]. Для *введенных уже функций* $\xi = \xi$, $-\!\!-\xi$ и $\top\!\!-\xi$ *это было сделано; можно лишь добавить,* что функция $-\!\!-\xi$ сводится к равенству, так как $-\!\!-\xi$ равнозначна тому, что $\xi = (\xi = \xi)$, поскольку функция $\xi = \xi$ для любого аргумента принимает значение «истинно». При этом приходится трактовать истинностные значения как пробеги значений, и Фреге поступает следующим образом: определяет пробег $\dot{\varepsilon}\,(-\!\!-\varepsilon)$ как «истину», а пробег $\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon = (\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ — в современной записи: $\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon = \neg\forall \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ — как «ложь», *то есть как объем понятия, отвергающего принцип тождества* $\xi = \xi$. Произвольные предметы тоже можно рассматривать как «пробеги значений», а именно следующим образом: если Δ есть предмет, то мы строим пробег значений функции *быть равным* Δ: '$\dot{\varepsilon}\,(\Delta = \varepsilon)$'. При *систематическом построении логико-арифметической системы* следует исключить возможность коллизии, вызываемой тем, что для Δ *уже ранее* был введен (быть может, иной) пробег значений; это достигается тем, что при введении всех основных функций даются определения, опирающиеся на уже введенные функции — и то же касается пробегов их значений; благодаря этому каждой функции его исчисления ставится в соответствие один и только один пробег. Этой систематичности Фреге, конечно, не придерживается в случае общелогических рассмотрений (то есть рассмотрений, выходящих за рамки его логического исчисления) — когда он, например, обсуждает понятие *совпадающее с Венерой* и его объем (ср. выше). Таким образом, хотя Фреге и не говорит этого прямо, *все* предметы его универсума суть *пробеги значений* или по крайней мере могут быть истолкованы как таковые; во всяком случае то, что он называет *логическими предметами*, — это обязательно пробеги значений, включая истинностные значения.

---

[51] Grundgesetze I, S. 16.

[52] Ibidem.

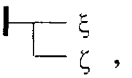
Далее Фреге вводит (§ 11 «Основных знаков арифметики») средство задания (единичных) предметов в терминах классов $\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$; этому служат понятия, под которые подпадает ровно по одному предмету Δ и которые имеют вид $\Delta = \xi$ (так что выражение '$\dot{\varepsilon}\ (\Delta = \varepsilon)$' задает единичный класс). Согласно фрегевской точке зрения, это соответствует ситуации, когда в естественном (немецком) языке используется определенный артикль (исключая случаи, когда он фигурирует в выражениях типа «Турок осадил Вену»). Рассел для такого рода ситуаций стал употреблять оборот «тот, который» и называть соответствующее выражение *определенной дескрипцией*, что и утвердилось в современной логике.

Скажем об этом более точно: Фреге вводит особую функцию $\backslash\xi$, которую можно назвать «опознавателем единичности». Эта функция принимает в качестве своего значения предмет Δ, если и только если ее аргументом является $\dot{\varepsilon}\ (\Delta = \varepsilon)$; иначе говоря, '$\dot{\varepsilon}\ (\Delta = \varepsilon) = \Delta$' есть истинное предложение, если Δ существует и является единственным предметом, удовлетворяющим условию $\Delta = \varepsilon$; таким образом, '$\backslash\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' означает предмет, подпадающий под понятие $\Phi\ (\zeta)$, коль скоро такой предмет Δ только один. Если такого предмета Δ нет либо под функцию $\Phi\ (\zeta)$ подпадает более одного предмета, то значение функции $\backslash\xi$ совпадает со значением выражения '$\dot{\varepsilon}\Phi\ (\varepsilon)$'.

Примеры помогают уяснить, как Фреге задает «опознавателя единичности». Так, $\backslash\dot{\varepsilon}\ (\varepsilon + 3 = 5)$ есть *тот единственный предмет, который, будучи сложенным с 3, дает 5*, то есть число 2. Далее, $\backslash\dot{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 = 1) = \dot{\varepsilon}\ (\varepsilon^2 = 1)$, так как под понятие $\xi^2 = 1$, то есть понятие *корня квадратного из единицы*, подпадает более чем один предмет (а именно два предмета 1 и -1); $\backslash\dot{\varepsilon}\ (\mathbin{-\!\!\top\!\!-}\ \varepsilon = \varepsilon) = \dot{\varepsilon}\ (\mathbin{-\!\!\top\!\!-}\varepsilon = \varepsilon)$, так как под понятие быть неравным самому себе $(\mathbin{-\!\!\top\!\!-}\ \varepsilon = \varepsilon)$ не подпадает ни одного предмета. Поскольку функция $\backslash\xi$ определена на универсуме Фреге, для нее устанавливаются значения и для тех случаев, когда рассматриваются не понятия (одноместные истиннозначные функции), а функции вообще, причем значение функции $\backslash\xi$ определяется способом, аналогичным описанному выше, например, $\backslash\dot{\varepsilon}\ (\varepsilon + 3) = \dot{\varepsilon}\ (\varepsilon + 3)$.

Таков фрегевский аналог определенного артикля.

Введение функции $\backslash\xi$ («тот, который») составляет, наряду с пробегами значений функций, главное из того, что Фреге ввел в свою логическую символику после труда 1879 г. В остальном развертывание системы «Основных законов арифметики» идет тем же путем, что и прежде. Вводится функция *условной связи*



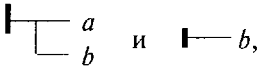
то есть $\xi \supset \zeta$ — операция *материальной* импликации. Применяя к импликативной формуле квантор общности, Фреге получает то, что впоследствии было названо Расселом «формальной импликацией» (в современной записи: $\forall\ x\ (\Phi\ (x) \supset \Psi\ (x))$; затем вводятся формы общеутвердительных и частноутвердительных предложений; отношение подчинения понятий; показывается, как с помощью импликации (отношения обусловливания, как его называет Фреге) и отрицания определяются функции (операции) — конъюнкция, (слабая) дизъюнкция и эквиваленция. Квантор существования выражается через всеобщность и отрицание уже приводившимся нами — и ныне хорошо известным — способом: как формула $\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top \Phi\ (\mathfrak{a})$, то есть (в современной записи): $\neg\forall x\ \neg\Phi\ (x)$.

Следует особо подчеркнуть, что Фреге одним из первых ввел в логику надолго утвердившийся в ней взгляд, согласно которому *существование* не есть ни свойство предмета, ни составная часть понятия. В одной из лекций, которые записал Карнап[53],

[53] О Карнаповых записях лекций Фреге см. Введение в данной книге.

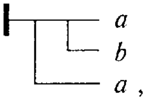
Фреге говорил: «Существование не есть *составная часть* понятия, это его особенность (Beschaffenheit)» — и, применяя этот взгляд к *онтологическому доказательству* бытия Бога, утверждал, что речь в этом случае идет не о существовании, «а о вопросе, какие особенности имеет понятие “Бог”»[54].

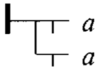
Свойства всех этих (и иных, вводившихся Фреге) логических категорий задаются с помощью того, что он называет «основными логическими законами»[55], а также правилами вывода. В совокупности с дефинициями все это образует систему фрегевских основоположений, которые, в общем случае, формулируются с использованием того, что ныне называют *метазнаками*. Сначала задаются правила вывода: *modus ponens* — если



то, значит, $\vdash a$ — (и его усложнения), а также производные от него правила, облегчающие доказательства, такие, как правила: транзитивности импликации и его усложнения; перестановки посылок (антецедентов) в импликативных формулах и их «склеивания», если посылки одинаковы; правило контрапозиции и его усложнения и пр. Для оперирования со всеобщностью формулируется правило введения квантора $\forall$, записываемое в виде логического перехода от функции $\Phi(\xi)$ к суждению $\vdash \Phi(\xi)$, причем формулируются правило переименования связанных переменных и условия, исключающие коллизию переменных.

Схемами аксиом — Фреге называет их законами, относящимися к знакам его исчисления (Begriffsschriftzeichen), — являются: закон «истина следует из всего что угодно» $\vdash a \supset (b \supset a)$, в записи Фреге имеющий вид



и его варианты, в которых используется отрицание, а также закон тождества $\vdash a \supset a$, который получается из первого путем подстановки в него a на место b и «склеивания» посылок; закон исключения квантора общности и его обобщения; аксиомные схемы, выражающие свойства отношения равенства, а также правило подстановки; закон, вводящий оператор «тот, который», а также закон исключенного третьего  и др. В качестве «основного закона» за номером (V) фигурирует принцип абстракции, задающий пробеги значений функций. Часть из описанных выше принципов («основных законов») представляет собой (или содержит) функции первой ступени, а часть — функции второй ступени; таковы, в частности, функции, относящиеся к кванторам и пробегам значений. С помощью квантора существования (выражаемого — напомним это еще раз — с помощью квантора общности и отрицания) определяются такие важные свойства, как «быть непустым понятием» ($\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\,\varphi(\mathfrak{a})$), «быть непустым (бинарным) отношением», «быть непустым понятием, под которое подпадает один и только один предмет» и др.

Фреге вводит представление о функциях разных ступеней: «Мы называем функции, аргументами которых являются предметы, *функциями первой ступени*; а те

[54] *Carnap* — Mitschrift, S. 18.

[55] Перечень этих законов помещен в конце Grundgesetze I как одно из приложений. Другие два дополнения содержат перечни дефиниций и важнейших теорем. В приложениях к тому II Фреге приводит только перечни дефиниций и основных теорем.

функции, аргументами которых являются функции первой ступени, будут называться *функциями второй ступени*». Значение нашей функции $\neg\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top\!\!-\varphi(\mathfrak{a})$ (функции, выражающей свойство «быть непустым понятием». — *Б.Б.*), — продолжает он, — всегда есть некоторое истинностное значение, какую бы функцию первой ступени мы ни взяли в качестве ее аргумента <...> мы будем поэтому называть ее *понятием второй ступени* — в отличие от *понятий первой ступени*, которые суть функции первой ступени»[56]. В соответствии с этим Фреге различает аргументы разного рода, смотря по тому, каковы они: предметы или функции первой ступени от одного или двух аргументов; и, переходя с функционально-понятийного уровня на уровень знаковый, констатирует, что ‘$-\!\!-\xi$’, ‘$-\!\!\top\!\!-\xi$’, ‘$\backslash\xi$’ суть имена функций от одного аргумента первого рода; ‘$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!-\ \xi\\ \quad\llcorner\!-\ \varsigma\end{array}$’ и ‘$\xi = \zeta$’ это имена функций первой ступени от двух аргументов тоже первого рода, в то время как ‘$-\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\varphi(\mathfrak{a})$’ и ‘$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$’ — имена функций второй ступени от одного аргумента второго рода[57].

Фреге устанавливает и основоположения теории определений (дефиниций), служащей ему для введения новых имен, для чего применяется знак $\Vdash\!\!-$ «равенства по определению», используемый следующим образом: *слева* от входящего в соответствующую формулу знака = (или ≡) помещается *определяющее*, а *справа* — *определяемое* выражение (в отличие от принятого ныне способа использования знака «=Df», относительно которого определяемое и определяющее располагаются противоположным образом). Примечательно, что первое использование знака ‘$\Vdash\!\!-$’ вводит дефиницию «принадлежности предмета объему понятия», выражаемую знаком $\frown$. Теоремы логики, а потом и арифметики — в частности, теоремы теории классов, то есть начальных разделов теории множеств[58], — выражаются по большей части в виде импликативных формул вида $(\xi_1 \supset (\xi_2 \supset \ldots \supset (\xi_n \supset \zeta)\ldots))$, так что при принятой Фреге двумерной символике одна формула может занимать целую страницу. Стремясь сделать свою запись более обозримой, Фреге практикует ряд способов сокращения своего формульного текста, а также сопровождает умозаключения тем, что ныне называется «анализом доказательства»[59].

Числа: численности и числовые меры

В первой части первого тома «Основных законов арифметики» излагается исчисление понятий (с. 5—69), вторая же часть (с. 70—238) посвящена арифметике и прежде всего категории *численности* (Anzahl, количественного числа); натуральные — целые неотрицательные — числа, естественно, оказываются при этом частным случаем численностей.

Численность для Фреге — это *логический предмет*; он не возникает путем абстрагирования от вещей наподобие цвета, веса, твердости — в этом смысле численность не есть свойство вещей. Число не есть нечто физическое, но оно и не субъективно, не есть представление, оно не возникает путем прибавления вещи к вещи.

---

[56] Grundgesetze I, S. 37—38.

[57] Ibidem,S. 48.

[58] Так, отношению включения предмета в объем понятия (класс, множество) отвечает теорема $\vdash\!\!-f(a) = a \frown \grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$.Эта теорема открывает список «важнейших теорем» в соответствующем приложении в первом томе «Основных законов арифметики»; это приложение включает теоремы как логики, так и арифметики.

[59] Полезные сведения о некоторых сторонах логической системы Фреге, равно как и о его логико-арифметическом построении, русский читатель может почерпнуть из работы: *Мадер.*

Фрегевская дефиниция числа строится строго на логической базе; высказывание о числе — это не высказывание о предмете; это — «задание высказывания о некотором понятии», — говорит Фреге в работе 1884 г.[60]. А в лекции, которую записал Р. Карнап, Фреге следующим образом пояснил свою мысль: «В выражении "две высокие башни" слова "две" и "высокие" выглядят как языково равноправные. *Однако*: каждая башня высокая, *но не* каждая башня — две [башни]»[61], и затем заметил, что уже Платон понимал: атрибут «один» обозначает не предмет, но понятие.

В сочинении 1884 г. Фреге лишь намечает общий путь к установлению «понятия численности» (Anzahlbegriff). Но смысл программы решения проблемы вырисовывается достаточно ясно. «Я надеюсь, — писал он в «Заключении» в своей монографии, — что это сочинение убедит в том, что законы арифметики суть аналитические суждения и, следовательно, суждения *a priori*. Таким образом арифметика становится лишь далеко продвинутой логикой, а каждое арифметическое суждение — логическим законом, только законом выводным (abgeleitet)»[62]. И, продолжая ту же мысль, говорит: «Я не претендую на большее, чем только вероятность моего предположения о том, что предложения арифметики аналитичны по своей природе; ведь все еще можно сомневаться, возможно ли их доказательство на основе чисто логических законов и не может ли случиться так, что где-то незаметно прокрались доводы иного рода. Это сомнение не устраняется тем, что я привел соответствующие доказательства отдельных предложений; это возможно будет только тогда, когда явлена будет цепочка умозаключений, не содержащая никаких пропусков, так что каждый шаг производится не иначе, как в соответствии с немногочисленными способами умозаключения, которые признаются чисто логическими»[63].

Число есть нечто объективное, так же как объективно и само логическое, на котором оно основано; оно не есть результат психической активности. Ибо «то, что из известных предложений следует некоторое другое, — это нечто объективное, нечто не зависящее от законов нашего внимания, и поэтому все равно, совершаем ли мы на самом деле данное умозаключение или нет»[64].

Для определения чисел Фреге вступает на путь, которым он шел, вводя «пробеги значений»; для этого ему требуется отношение равенства предметов, и в качестве такового он использует отношение *равночисленности понятий*. В параграфе 68 «Оснований арифметики» мы находим знаменитое определение численности: «Численность, присущая понятию *F*, есть объем понятия "равночисленно понятию *F*"». А что такое *равночисленность понятий*? — Фреге поясняет: некоторое понятие равночисленно некоторому другому понятию, если между предметами, подпадающими под одно понятие и подпадающими под другое понятие, можно установить взаимно-однозначное соответствие. При таком подходе выражение «равночисленно» определяется не через понятие числа, а независимо от него — благодаря констатации взаимно-однозначного соответствия между предметами, соответствия, обладающего свойствами «отношений типа равенства».

Это — знакомое нам применение принципа абстракции, или, как еще говорят, определения через абстракцию. Понятие взаимно-однозначного соответствия позволяет избежать круга в определении. Первым вводится отношение равночисленности, доставляющее *критерий равенства* «количественных чисел», которые

[60] Grundlagen, S. 81.
[61] *Carnap*— Mitschrift, S.19.
[62] Grundlagen, S. 99.
[63] Ibidem, S.102.
[64] Grundlagen, S. 113.

оказываются теперь логическими предметами. Свойства же отношения равенства (и отношений типа равенства) в системе Фреге заданы, причем, как мы уже говорили, в полном соответствии с принципом Лейбница: всякий предмет равен самому себе и если два предмета a и b равны, то из того, что любой из них обладает неким свойством F, следует, что им обладает и равный ему предмет (разумеется, верно и обратное отношение).

Справедливо считается, что использование принципа абстракции составляет непреходящее достижение Фреге, которое спустя десятилетия по достоинству оценил Рассел, указавший, что впервые ответ на вопрос «Что такое число?» дал Фреге в сочинении 1884 г.

Итак, численность понятия Φ есть объем понятия «быть равночисленным понятию Φ». Но объем понятия — это класс, множество предметов и, применяя теоретико-множественный язык, мы получаем: численность понятия Φ — это множество всех тех множеств, которые суть объемы (пробеги значений) понятий, равночисленных понятию Φ.

Численности Фреге по сути совпадают с кардинальными числами Кантора. Во фрегевском определении «количественных чисел» — Anzahlen содержится Канторово понятие *равномощности*. Но Фреге подчеркивает: численности — это предметы, а не понятия. Понятия же о численностях (Anzahlbegriffe) служат для того, чтобы за высказываниями о численностях можно было видеть высказывания о понятиях.

Более того, Фреге считал, что указание на применение чисел для счета (и измерения) должно входить в их характеристику. «И с этой точки зрения он провел различие между двумя родами чисел: *численностями*, с помощью которых мы отвечаем на вопрос "Сколько элементов содержит множество?", и *числовыми мерами* (Masszahlen), с помощью которых мы получаем ответ на вопрос "Каково значение некоторой величины по сравнению с величиной, принятой за единицу?"»[65].

Фрегевский подход пролил — для своего времени — новый свет на древнюю проблему природы числа как абстрактного объекта. Не считая его решение окончательным, отметим вместе с тем оригинальность его идеи о том, что, производя счет предметов, мы сначала подводим сосчитываемые вещи под понятие, которое им точно соответствует, а затем определяем численность этого понятия[66].

Числа натурального ряда (Zahlen) Фреге называет «конечными числами» и вводит понятие начального отрезка натурального ряда. Объем (пробег значений) некоторого данного понятия конечен, если, и только если, входящие в него предметы можно пересчитать с помощью чисел, входящих в подходящий начальный отрезок натурального ряда. Что касается общего понятия о численностях (то есть о множествах множеств), то, чтобы его получить, Фреге вводит отношение непосредственного следования одной «конечной численности» за другой.

В «Основаниях арифметики» Фреге, как мы знаем, не использовал свою понятийную запись; поэтому он оказался в состоянии доказать лишь некоторые теоремы арифметики. Примечательно, однако, то, что фрегевские дефиниции делают выполнимыми в его построении аксиомы Пеано, включая аксиому, выражающую принцип полной математической индукции[67]. Конечно, обоснование умозаключе-

---

[65] *Kutschera*, S. 121.

[66] Ср. там же, с. 56.

[67] *Kutschera*, S. 59–61. Фреге называл этот принцип «бернуллиевой индукцией», имея в виду Якова Бернулли (1654–1705), которому по большей части приписывают открытие этого метода. Однако до Бернулли этот принцип с полным осознанием его значения использовался Б. Паскалем — да и вообще метод этот уходит корнями в античную математику.

ния по схеме «совершенной» индукции, в которой используется операция взятия «непосредственного следующего» в натуральном ряду, предполагает, что фрегевский ряд «конечных численностей» построен. Такого рода построение и производит Фреге, начиная этот ряд с нуля (эта численность отвечает пустому понятию) и единицы; последняя есть такая отличная от нуля численность, которая соответствует понятию: какими бы ни были два предмета a и b, они равны, если обладают одинаковыми свойствами. Индуктивный переход происходит привычным ныне способом: численность $n + 1$ присуща понятию Φ, если существует предмет a, подпадающий под Φ, а понятие «обладать свойством Φ, но быть отличным от a» имеет численность n. Так, по Фреге, вводятся «конечные численности» — натуральные числа.

Общий же ход мысли Фреге таков: устанавливается понятие *численности*; определяются конкретные численности 0 и 1; вводится отношение непосредственного следования, отношение «меньше» и отношение линейного порядка. Затем определяется понятие «конечной численности» и происходит переход к понятию «численность понятия "быть конечным числом"»[68]. Это понятие есть понятие о *трансфинитных кардинальных числах*, то есть в Канторовом обозначении $\aleph_0$. Под это понятие подпадают все конечные численности — их бесконечно много, и для обозначения численности этого понятия Фреге избирает знак ∞_1: это численность понятия, под которое подпадают все натуральные числа.

Во втором томе «Основных законов арифметики» Фреге большое внимание уделяет критическому анализу теорий вещественных и иррациональных чисел, развитых его выдающимися современниками — Георгом Кантором, Рихардом Дедекиндом, Карлом Вейерштрассом, теорий, которые служили у них обоснованием математического анализа. Критика Фреге основывается на разработанном им учении о дефинициях, в центре которого уже упоминавшийся нами «принцип полноты» (Grundsatz der Vollständigkeit). Затем он предлагает собственный подход.

Как отмечается в литературе[69], идеи иенского логика относительно обоснования анализа менее оригинальны по сравнению с тем, что он сделал в логике и формализации арифметики натуральных чисел: ведь строгие определения вещественных и иррациональных чисел уже были даны, причем именно критиковавшимися им математиками. Не будем, однако, забывать, что Фреге в своих рассмотрениях пользуется аппаратом своего логического исчисления, включая язык логики второго порядка. Кроме того, он обогащает свой подход к числам: если натуральные числа (как и вообще все кардинальные числа) он трактует как численности, то теперь он переходит к системе понятий «теории величин»: не только вещественные числа, но и числа целые и рациональные (дроби) определяются им не как численности, а как *числовые величины*. При этом явный теоретико-множественный аспект, присутствующий в созданной Фреге теории натуральных чисел, сохраняется и в его трактовке числовых величин. Хотя вещественные числа определяются теперь как отношения величин к величине, принятой за единичность, стало быть как отноше-

---

[68] См. подробнее: *Мадер*, с. 290 и далее. *Kutschera* (S. 55—62) уточняет (опираясь, правда, на труд 1884 г.) фрегевское построение натурального ряда следующим образом (мы решили использовать символику Фреге): $0 = \dot{\varepsilon}(\vdash\!\!\top\, \varepsilon = \varepsilon)$; $1 = \dot{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$; $2 = \dot{\varepsilon}\dot{\alpha}(\varepsilon = 0\ \&\ \alpha = 1)$,..., $n = \dot{\varepsilon}\dot{\alpha}...\dot{\chi}(\varepsilon = 0\ \&\ \alpha = 1\ \&\ \chi = n - 1)$. Заметим, что в нашей записи мы использовали «многочленные» пробеги значений, которых у Фреге хотя и нет, но которые согласуются с его символикой. Данное построение напоминает известную конструкцию Дж. фон Неймана: $0 = \varnothing$, $1 = \{ 0 \}$,..., $n' = n \cup \{ n \}$, где $\varnothing$ пустое множество, знак «$'$» означает взятие непосредственно следующего числа в натуральном ряду, а фигурные скобки — образование множества.

[69] См., например: *Kutschera*, S. 120.

ние мер (Massrelation), теоретико-множественный аспект сохраняется. Ибо фрегевская конструкция вещественных чисел предполагает натуральные числа и числа целые, трактуемые фактически как это принято и ныне — в виде упорядоченных пар натуральных чисел[70]. Что касается иррациональных чисел, то Фреге не излагает их теорию, хотя вся подготовительная работа, нужная для их введения (равно как и для дальнейшего обоснования математического анализа), им проведена. Нам не известно, были ли у Фреге дальнейшие планы на этот счет.

Был ли Фреге платоником?

В современной литературе распространено представление о Фреге как о платонике. А. Чёрч в вышедшей в 1956 г. книге «Введение в математическую логику» называет Фреге «последовательным платоником»[71]. В какой мере справедлива эта оценка?

Заметим прежде всего следующее. Фреге, как мы знаем, был убежден в объективности множеств (классов) предметов. Множество (класс предметов) у Фреге совпадает с объемом понятия, понимаемым как особый предмет, который определяется с помощью принципа абстракции.

Далее. В логической системе Фреге большую роль играют понятия. Логическое исчисление он строит как «запись в понятиях». Фреге — решительный противник эмпиризма и номинализма — часто заявлял, что понятие «логически первенствует» по отношению к своему объему. В полемике со Шрёдером он решительно отверг глубоко ошибочный, по его мнению, «внешний, можно сказать, механический или количественный» взгляд на понятие, из которого вышли Эйлеровы диаграммы[72]. В другом месте Фреге говорит: «я считаю, что понятие с логической точки зрения предшествует своему объему, и отвергаю попытку видеть в объеме понятия класс, имеющий свое основание не в понятии, а в отдельных вещах»[73].

Итак, с точки зрения Фреге, классы, множества имеют свое основание не в отдельных вещах, а в понятии. Но фрегевские понятия не относятся к сфере человеческого ума, психики, мышления, а представляют собой нечто объективное; как мы говорили, понятия для Фреге, по сути дела, — это *общие* свойства вещей. В своих «Логических исследованиях» он подробнейшим образом рассмотрел и опроверг всякие сомнения в реальности как конкретных вещей и событий, так и (общих) свойств.

И предметы, и функции, и понятия Фреге относит к внеязыковой области *обозначаемого*. В области *обозначающего* (языка) им соответствуют *собственные имена* в том широком смысле, какой ныне вкладывают в понятие *дескрипции* как описательного выражения, задающего *индивидуальный* предмет; с точки зрения Фреге, частным случаем имен — случаем, который в логике очень важен, — являются, конечно, *предложения*; другие значимые для логики языковые объекты — это знаки функций и имена понятий — понятийные выражения. *Смыслы* же собственных имен и предложений, знаков функций и имен понятий составляют *объективное содержание мышления*. Предметы, функции и понятия находятся, по выражению Фреге, *на одной ступени* — на ступени объективного. Поэтому утверждение Фреге о «первенстве понятия по отношению к своему объему», его высказывания о том, что класс имеет свое основание в понятии и т.п., имели для него принципиальную значи-

---

[70] См.: *Kutschera*, S. 121—125.
[71] Русск. перев.: М., 1960.
[72] См. в наст. книге, с. 264—265, 276 <*KBS*, S. 436, 455>.
[73] Там же, с. 276 <S. 455>.

мость. Ведь с его точки зрения всякий класс есть объем понятия, он не есть механический агрегат индивидов — это множество вещей, имеющих общее свойство. Именно в понятии (общем свойстве предметов) заключено основание его бытия как *класса*. Фреге писал, что «объем понятия имеет свое основание не в индивидах, а в самом понятии, то есть в том, что высказывается о предмете, когда он подводится под понятие»[74]. В логике, настаивал Фреге, нельзя рассматривать классы просто как механические агрегаты вещей, не объединенных наличием общего свойства.

В свете всего сказанного, на вопрос — был ли Фреге *платоником*? — по нашему мнению, можно дать следующий ответ. Если под платонизмом понимать признание мира идеальных сущностей общего характера, *определяющих* мир единичных вещей, то очевидно, что ничего подобного во взглядах Фреге не было. Поэтому нет оснований считать Фреге представителем (да еще последовательным!) этого *общефилософского* направления. Но у Фреге, нам кажется, было *ощущение* преувеличенной роли общего, отнюдь не очевидное «опредмечивание» (да простит нас читатель за употребление этого термина, замусоленного марксистами) *истинности* и *ложности*, некая недоговоренность об отношении между предметом и понятием, между эмпирией и абстракцией. Несмотря на все его разъяснения, читателя его трудов не покидает странное чувство: кажется, будто автор не в состоянии до конца все разъяснить. Предмет есть то, что не есть функция, в частности не есть понятие. Но как понимать фрегевское понятие? Из объяснений Фреге явствует, что это в некотором смысле *общее* свойство вещей, но Фреге *прямо* этого не говорит. Почему он оставляет без обсуждения вопрос об отношении между предметами и *общими* свойствами, который так волновал логиков эпохи схоластики?

Несмотря на неясности, недоговоренности, имеющиеся в теории понятия Фреге и вообще в его «онтологии» и семантике, о чем мы еще будем говорить, а также на некоторые особенности его терминологии, взгляды Фреге, по-видимому, на самом деле близки к тому направлению в философии, которое носит название *умеренного реализма* и корнями своими уходит в схоластическую философию — да и в воззрения Платона тоже.

И сильные и слабые стороны философских взглядов Фреге ярко проявились в том, как он трактовал *истину*. Решительно отстаивая ее *объективность*, он постоянно повторял, что истина не зависит от человека, высказывающего суждение. Поэтому он так решительно выступал против субъективистско-психологической теории суждений как связи представлений. Для него — человека, рассматривавшего суждение не как пустую оболочку мысли, а как признание ее объективной истинности, — субъективистский подход к истине был совершенно неприемлем. *Быть* истиной и *считаться* истиной, подчеркивал Фреге, — это разные вещи.

Но мы знаем, что *истину* (истинность) и *ложь* (ложность) Фреге рассматривал как особые *предметы* — истинностные значения. Среди предметов одни являются чувственно воспринимаемыми вещами, другие же — тем, что Фреге называет *логическими предметами*. «Мы можем, — пишет он, — провести различие между физическими и логическими предметами, что, конечно, еще не позволяет разделить их исчерпывающим образом. Первые обладают действительностью в собственном смысле, вторые же нет; однако от этого они не становятся менее объективными; и хотя они не могут действовать на наши органы чувств, их можно постигать с помощью наших логических способностей. Подобными логическими предметами являются наши численности»[75]. Например, число, обозначаемое знаком '$\sqrt{\ }2$', нельзя по-

[74] Там же, с. 274 <S. 451>.
[75] Grundgesetze II, S. 86.

стичь, как бы мы ни скользили по поверхности вещей — суть дела все равно остается недоступной. Числа есть нечто одинаковое для всех, противостоящее людям одинаковым образом. Они совершенно не зависят от тех, кто высказывает о них суждения. К сфере логических предметов Фреге относил, как мы знаем, и объемы понятий, то есть множества (предметов). А истина и ложь — это ведь тоже предметы, почему они и не могут составлять части мысли: ведь они относятся к области объективного. Фреге пишет: «Значение истинности столь же мало может быть частью мысли, как, например, Солнце, так как оно является не смыслом, но предметом»[76].

Здесь самое время сказать о тех выводах, к которым Фреге пришел к концу жизни — в период создания своих «Логических исследований». Он и ранее разграничивал эмпирическое, психическое и абстрактное — теперь он четко различает три мира, три царства (Reiche — империи): царство *объективно-реального* (то есть физического), *субъективно-реального* (то есть психического) и *объективно-нереального* (Nicht Wirklichen). Первоначально объективно-нереальным были для него прежде всего логические предметы: истинностные значения, пробеги значений функций, объемы понятий — и сами функции и понятия. Теперь в качестве представителей «третьей империи» фигурируют главным образом непсихические пропозициональные содержания повествовательных предложений (Aussagesätze), родственные «предложениям в себе» Б. Больцано.

В статье «Мысль» Фреге утверждает: «мысли — это не вещи внешнего мира, не представления. — Надо признать третий мир (Reich). То, что к нему принадлежит, совпадает с представлениями в том, что оно не может восприниматься с помощью органов чувств, а с вещами — в том, что оно не нуждается ни в каком носителе, сознанию которого оно принадлежало бы. Так, например, мысль, которую мы высказываем в теореме Пифагора, истинна вне всякого времени и не зависит от того, считает ли кто-нибудь ее истинной. Она не требует носителя»[77]. Мысль, таким образом, относится к нереальному, но объективному миру. Запомним это.

В современной логике принято говорить о *постулатах* той или иной логической системы. Для Фреге подобная терминология была совершенно неприемлема. «Постулаты» он понимал в смысле Евклида, отмечая их родство с евклидовыми аксиомами. Свою логическую систему Фреге базирует на «основных законах», данных объективно, и на столь же объективных правилах обращения с ними. «Основные законы» логики и правила вывода конституируют весь его «логический мир» — третью империю, империю мысли. Заметим, что, как явствует из «Дневника» Фреге 1925 г., аллюзия между ментальной третьей империей и чаемой им политической третьим рейхом германского государства была достаточно явной[78].

Здесь, однако, возникают два вопроса, на которые концепция Фреге о трех «царствах», как нам кажется, не дает ясного ответа. Первый вопрос касается того, *как относятся* «вторая» и «третья» империи к *универсуму Фреге*. Второй же таков: если мысль объективна, то как быть с *ложными* мыслями. Неужели и они объективны? Не будем спешить с этими вопросами, оставив до поры их рассмотрение: они связаны с воззрениями позднего Фреге, а к ним мы еще не подошли. Ограничимся замечанием, что пересмотр понятия пробега значений функций, вызванный антиномией Рассела, существенно трансформировал фрегевскую онтологию. Обратимся же к расселовскому парадоксу.

---

[76] В наст. книге, с. 235–236 <SB, S. 35>.

[77] В наст. книге, с. 335 <*LU*I, S. 69>.

[78] См. подробнее: *Gabriel*, раздел второй — «Фреге между Мифом и Логосом Третьей империи». См. также наше Введение в настоящей книге.

Антиномия Рассела в системе Фреге

Во Введении был приведен перевод адресованного Фреге письма Бертрана Рассела, в котором последний сообщал о «трудности», с которой он столкнулся, изучая логико-арифметическое построение иенского новатора. Здесь мы покажаем, как реально выглядит эта «трудность» в системе «Основных законов арифметики»[79].

Из письма Рассела следует, что он обнаружил противоречие уже в первоначальной формулировке логической конструкции Фреге — в труде «Исчисление понятий» 1879 г. В нем Фреге допускал переменные для функций, то есть в его тогдашней понятийной записи могли строиться функции от функций. Такой — функциональный — вариант антиномии Рассела имел бы следующий вид.

Исходя из определения $\neg f(f) =\mathrm{Df}\ F(f)$ и взяв в качестве f функцию F, получаем $\neg F(F) = F(F)$, то есть противоречие. Однако Рассел упустил то обстоятельство, что Фреге предполагал *иерархию функций*, в силу чего запись вида $f(f)$ была недопустима.

Рассел не стал развивать эту свою мысль, а, схватив суть дела, изложил обнаруженное им противоречие сначала в терминах предикации, а потом в терминах принадлежности элемента классу (в терминах Фреге: принадлежности предмета объему понятия).

Фреге, сразу осознав антиномичность обнаруженной Расселом ситуации, пришел к заключению, что «трудность», о которой писал его новый корреспондент[80], заключена в понятии *пробега значений* функции.

Ниже мы опишем антиномию Рассела в терминах фрегевских «Основных законов арифметики», где пробеги значений функций и их важнейший частный случай — объемы понятий играют фундаментальную роль. Антиномию Рассела тогда можно представить так.

Объемы понятий (свойств), будучи особого рода *предметами*, входят, наряду с другими предметами, в универсальную предметную область. Таким образом, в универсуме Фреге имеются (индивидуальные) предметы, классы (множества) предметов, классы классов предметов и т.д. — об этом мы уже говорили. Значит, там должен быть и класс, который не имеет того свойства, которым обладают входящие в него предметы. Естественно назвать его *нормальным классом* и записать его дефиницию в виде следующего «равенства по определению»:

$$N(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) \ =\mathrm{Df}\ \neg\Phi(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)), \qquad (1)$$

или, используя запись в стиле Фреге:

$$\Vdash\!\!\!-\!\!-\ \neg\,\Phi(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = N(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)),$$

где $N(x)$ обозначает свойство *быть нормальным классом*, а буква Φ является переменной для свойств (понятий) — вместо нее можно подставлять их имена[81]; выражение $\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ есть переменный классовый терм: всякий раз, когда на место переменной Φ подставляется имя какого-либо свойства, выражение $\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ становится

---

[79] В литературе можно встретить различные реконструкции парадокса Рассела, приближенные к фрегевской системе. Мы предлагаем одну из самых простых. Изложение ее в той форме, в какой сам Фреге, получив письмо Рассела, представил ее в своем Послесловии ко второму тому своего главного труда, потребовало бы привлечения ряда таких средств его исчисления, которые мы не затрагивали.

[80] Вслед за этим письмом Фреге и Рассел обменялись еще двадцатью письмами (во всяком случае столько их сохранилось для истории).

[81] Ее можно считать и метазнаком для произвольных понятий.

именем определенного класса (а именно, того класса, предметы которого обладают свойством, имя которого подставлено на место Φ). Из (1) — благодаря тому, что двойное отрицание любого предложения эквивалентно его утверждению — следует, что *ненормальный класс* есть класс, который, если его рассматривать как особый предмет, как раз и обладает тем свойством, которое имеют составляющие его предметы, то есть

$$\neg N(\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) \equiv \Phi(\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon))^{82}, \qquad (2)$$

или в стиле Фреге,

$$\vdash\!\!-\; \Phi(\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)) = \neg\, N(\dot{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)).$$

Поставим теперь вопрос: если образовать *класс всех нормальных классов* (то есть класс всех предметов, которые обладают свойством *быть нормальным классом*), то будет ли этот класс обладать свойством *быть нормальным* — будет ли он нормальным классом или нет?

Чтобы данный вопрос приобрел осмысленный характер, мы нуждаемся в ряде предположений. Прежде всего следует допустить, что свойство *быть нормальным классом* имеет объем, то есть что класс всех нормальных классов *существует*. Это допущение предполагается в теории Фреге, так как в ней каждое понятие имеет объем. Далее, надо допустить, что класс всех нормальных классов является *предметом* и относительно него можно ставить вопрос о его свойствах, в том числе о свойстве «нормальности». Это допущение тоже предполагается в теории Фреге, поскольку согласно ей объем любого понятия есть предмет (правда, предмет особый — логический) и как таковой обладает какими-то свойствами. Наконец, мы нуждаемся в допущении, что класс всех нормальных классов однотипен по отношению к прочим предметам универсума — однотипен в том отношении, что относительно него можно ставить любые вопросы о его свойствах, в том числе и вопрос, обладает ли он свойством *быть нормальным классом* или нет. И это предполагается теорией Фреге, ибо в ней все предметы составляют единую область и все предметные свойства рассматриваются применительно именно к ней. Поэтому вопрос о свойстве *быть нормальным классом* может быть поставлен относительно любого предмета, а значит, и относительно класса всех нормальных классов[83].

Каков же тот ответ, который получается на рассмативаемый вопрос в теории Фреге? — Ответ оказывается противоречивым. В самом деле. Подставим в формулу (1) на место переменной Φ имя свойства *быть нормальным классом*, то есть N. Мы получим:

$$N(\dot{\varepsilon}\,N(\varepsilon)) \equiv \neg(N(\dot{\varepsilon}\,N(\varepsilon)))^{84}. \qquad (3)$$

Эта формула в теории Фреге является осмысленным и долженствующим иметь значение предложением. Действительно, оно составлено в соответствии с «основ-

[82] Мы заменили знак «равенства по определению «=Df», фигурировавший в (1), на знак эквиваленции «≡» логики высказываний, обычно используемый современной логикой в подобных контекстах, то есть когда справа и слева от него стоят высказывания (предложения, суждения).

[83] Мы не останавливаемся на других допущениях, необходимых для получения во фрегевской теории антиномии Рассела. К их числу относится, например, разрешение перехода от *дефиниций* (вводимых знаком $\Vdash\!\!-$) к *предложениям*, обладающим тем же смыслом, то есть разрешение трактовать определения как предложения, подлежащие истинностной оценке. Этим мы фактически воспользовались, когда от дефиниции (1) перешли к суждению (2).

[84] Вместо знака равенства по определению мы использовали знак эквиваленции. См. предшествующее примечание.

ными законами» его исчисления, и в нем нет компонент, лишенных смысла. Выражение $\dot{\varepsilon}N(\varepsilon)$ осмысленно и обозначает класс всех нормальных классов, существование которого не исключается фрегевской теорией. Выражения $N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ и $\neg N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ тоже осмысленны, так как, по Фреге, класс всех нормальных классов является предметом, что означает: как высказывание о принадлежности этому предмету какого-либо свойства, в данном случае свойства N (то есть предложение $N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$, так и отрицание такой принадлежности (то есть предложение $\neg N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ имеют смысл и должны быть либо истинны, либо ложны. В силу этого все выражение (3) не только имеет смысл, но и должно быть *истинным*, так как оно получено исходя из истинных[85] формул (1)–(3).

Каков же смысл этой формулы?

Выражения $N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ и $\neg N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ являются утвердительно-повествовательными *предложениями*. Согласно теории Фреге — это имена особого рода предметов: истинностных значений. Знак равенства, которым пользовался в подобных контекстах Фреге (мы заменили его привычным ныне знаком эквиваленции), означает полное совпадение (тождество) предметов, имена которых стоят слева и справа от него. Отсюда смысл формулы (3) заключается в утверждении того, что предложения $N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ и $\neg N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ либо оба истинны, либо оба ложны. Но формулу, в которой главным знаком является знак эквиваленции, можно рассматривать как «двойную» импликативную формулу («импликацию в обе стороны»). Поэтому формулу (3) можно переписать в виде:

$$((N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon)) \supset \neg N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))) \mathbin{\&} (\neg N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon)) \supset N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon)))). \tag{4}$$

Эта формула читается: если класс, соответствующий свойству *быть нормальным*, сам нормален, то он ненормален; если же он ненормален, то он нормален.

Мы получили противоречие: класс всех нормальных классов и нормален, и не нормален. В самом деле. Обозначим предложение $N(\dot{\varepsilon}N(\varepsilon))$ буквой A. Тогда формула (4) приобретает вид $((A \supset \neg A) \mathbin{\&} (\neg A \supset A))$. Поскольку $A \supset B$ эквивалентно $\neg A \vee B$, где « $\vee$ » есть знак (слабой) дизъюнкции, то есть логического союза «или» в неразделительном смысле, мы получаем:

$$((\neg A \vee \neg A) \mathbin{\&} (\neg\neg A \vee A));$$

но $(\neg A \vee \neg A)$ эквивалентно $\neg A$, $\neg\neg A$ эквивалентно A, а $A \vee A$ эквивалентно A, и мы имеем окончательно

$$(\neg A \mathbin{\&} A), \tag{5}$$

то есть противоречие. Так раскрывается смысл предложения (3).

Но формула (2) и, значит, формула (3), обе, должны быть признаны в системе Фреге истинными, так как они получены из формулы (1), являющейся истинной по определению, с помощью преобразований, которые из истины порождают истину. Таким образом, в системе Фреге выводимо в качестве истины (доказуемо) *противоречивое предложение*. А таковое имеет истинностное значение *ложь*.

Далее. В классической логике, коим является логическое исчисление Фреге, действует принцип: «Из лжи следует все что угодно»; принцип этот выражается формулой

$$\vdash \neg A \supset (A \supset B), \tag{6}$$

где B — произвольное предложение. Удалив знак конъюнкции из формулы (5), что естественным образом возможно в классической логике[86], мы получим по-отдель-

---

[85] Относительно истинности формулы (1) см. примечание 83.

[86] В системе Фреге это получается, если использовать законы $\vdash ((A \mathbin{\&} B) \supset A)$ и $\vdash ((A \mathbin{\&} B) \supset B)$ и *modus ponens* для «отделения» их консеквентов (вместо A при этом берется $\neg A$, а роль B играет A).

ности $\neg A$ и A; тогда мы можем, используя формулу (6), дважды применить *modus ponens* и получить

$$\vdash B, \tag{7}$$

то есть утверждение об истинности суждения B, *каким бы оно ни было по смыслу*. Получается, что *любое* предложение логико-арифметической системы Фреге доказуемо: вытекает из его «основных законов арифметики». Например, в подобной «арифметике» действует не только закон дистрибутивности (распределительности) умножения относительно сложения: $a \cdot (b+c) = ab + ac$, но и «закон» дистрибутивности сложения относительно умножения: $a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$; нетрудно представить себе, какую неразбериху в вычислениях породил бы подобный «закон».

Разрушительную «работу» противоречия можно показать на следующем примере. Пусть в обычной арифметике, в которой справедливо $\neg(0 = 1)$, то есть в более привычной записи $0 \neq 1$, добавлено предложение $0 = 1$, создающее противоречие. Тогда, заменив в верном арифметическом равенстве $2 = 1 + 1$ обе единицы на «равные» им нули, получим $2 = 0 + 0 = 0$; а поскольку нам известно, что $3 = 2 + 1$, мы получаем, что $3 = 0 + 0 = 0$; сопоставив «равенства» $2 = 0$ и $3 = 0$, мы приходим к заключению, что $2 = 3$. Продолжая подобные «выкладки», мы быстро убеждаемся в том, что все числа оказываются равными друг другу, включая случаи, когда они заданы постоянными арифметическими термами[87].

Итак, в противоречивой логико-арифметической системе все оказывается доказуемым, все оказывается истинным. Но, как обнаруживается, вместе с тем все и «опровержимо», так как в качестве любого «доказуемого» предложения B (см. (7)) можно взять его отрицание $\neg B$. Тем самым утрачивается всякое различие между истинностью и ложностью!

Почему расселовский парадокс ошеломил Фреге

Открытая Расселом антиномия, как мы знаем из Введения, произвела сильнейшее впечатление на Фреге. И это не просто потому, что противоречие разрушало его систему — пагубность антиномичности была для него очевидна. Главное состояло в том, что Фреге был до этого твердо убежден: развитый им способ построения логико-арифметической системы полностью гарантирует ее от каких-либо неприятностей.

В самом деле, система определений (дефиниций) тех понятий, которые он вводил, была разработана им с величайшей тщательностью, и то же самое касалось его «основных законов» логики и арифметики, а также правил обращения с логико-арифметическими предложениями. В конструкции Фреге каждое вновь вводимое предложение имело вполне определенное значение, полностью задаваемое определяющим выражением. В этом отношении показателен параграф 31 первого тома, который в Оглавлении имеет заголовок: «Наши простые имена нечто обозначают». Цель Фреге заключалась здесь в том, чтобы «показать, что собственные имена и имена функций, которые мы можем образовать на основе введенных доселе простых имен, всегда имеют какие-либо значения <...> для этого требуется только доказать, что наши первоначальные имена нечто означают»[88]. И Фреге перечисляет их: это имена функций первой ступени с одним аргументом (‘$—\xi$’, ‘$\top\!\!—\xi$’ и ‘$\backslash\, \xi$’), имена функций первой ступени с двумя аргументами (знаки операции импликации

[87] То есть определенными дескрипциями, в которых наряду с числами, записанными в принятой арабской системе счисления, могут фигурировать арифметические операции.

[88] Grundgesetze I, S. 48.

и отношения равенства), имена функций второй ступени с одним аргументом второго рода ('$\smile^{\mathfrak{a}}$— $\varphi(\mathfrak{a})$' и '$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$') и, наконец, имена двух функций третьей ступени с квантором общности по функциональной переменной. Затем показывается, что все они имеют значение. А дальше в дело вступает задание значений новых выражений на базе определенных ранее. Так, например, с помощью дефиниции вводится упоминавшееся выше отношение включения предмета в объем понятия. Делается это так: значение функции $\Phi(\xi)$ для аргумента Δ, то есть $\Phi(\Delta)$, задается с помощью 'Δ' и '$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' в виде формулы '$\Delta \cap \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$'. «Стало быть, предмет $\Phi(\Delta)$ выступает как значение функции $\xi \cap \zeta$ с двумя аргументами — для Δ как ξ-аргумент и для $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ как ζ-аргумент»[89]. И затем Фреге определяет функцию $\xi \cap \zeta$ для всех возможных предметов как аргументов.

Вспомним теперь, для Фреге понятие «значение» охватывает и «значения истинности». В результате каждая функция и каждое понятие оказываются определенными в своем значении для всех возможных аргументов. Мало того, Фреге утверждает, что каждому предложению (как имени истинностного значения) соответствует вполне определенный *смысл*, так как для него установлены условия его истинности, смысл же предложения заключается в том, что эти условия выполняются[90].

Чтобы обеспечить реализацию всего этого, Фреге в особом параграфе первого тома (за номером 33) излагает свои «принципы определения (Definitionen)», где на первом месте находится требование: «Каждое имя, которое правильно образовано с помощью имен, уже имеющих определение, должно обладать некоторым значением»[91]. А поскольку Фреге считает, что это требование в его системе выполняется, он принимает, что все имена предметов в его универсальной области имеют определенное значение и что при любых значениях переменных из этой области функции, которые он вводит, каждый раз принимают определенное значение.

Конечно, это возможно только при условии корректности системы определений, и Фреге возвращается к определениям (дефинициям) еще раз, во втором томе, где он — перед рассмотрением вещественных чисел — под заголовком «Принцип полноты» (параграф 56) формулирует требование: дефиниция каждого понятия (возможного предиката) должна быть такой, чтобы «для любого предмета было четко установлено, подпадает ли он под данное понятие или нет»[92], или, иными словами, может ли данный предикат быть высказан об этом предмете и привести к истине или же он к истине не приводит. «Понятие, — пишет здесь Фреге, — должно иметь резко очерченные границы (scharf begrenzt sein)»[93].

Иначе говоря, Фреге доказывает (точнее, старается доказать) семантическую (и даже синтаксическую) полноту своей системы, неизменно настаивая на том, что благодаря его семантическим основоположениям каждому понятию ставится в соответствие один-единственный, однозначно заданный объем. И если мы теперь вспомним, что «законы логики», по Фреге, во-первых, истинны (о чем свидетельствуют его дефиниции и использование приема сведения к нелепости) и, во-вторых, правила вывода истинность сохраняют, а, значит, все выводимые предложения его теории обязательно истинны, то глубокое убеждение Фреге в полноте его системы и ее непротиворечивости станет для нас вполне понятным.

Фреге не были известны такие привычные ныне категории, как *синтаксис* сис-

---

[89] Grundgesetze I, S. 52.
[90] Ibidem, S. 50; ср. *Kutschera*, S. 120.
[91] Grundgesetze I, S. 51.
[92] Grundgesetze II, S. 69.
[93] Grundgesetze II, S. 69.

темы, с которым сопоставляется ее *семантика*, ее *интерпретации*, — категории, с которыми, как мы теперь знаем, связаны весьма сложные проблемы. Синтаксис и семантика системы Фреге строились им одновременно: по мере введения все новых знаков и выражений обосновывалась их осмысленность и/или истинность. Как же в таких условиях не быть потрясенным сообщением, пришедшим от Б. Рассела!? Ведь наличие противоречия снимало сам вопрос о какой-либо полноте его системы, а значит, сделал вывод Фреге, обесценивало всю его логико-арифметическую конструкцию.

Здесь уместно привести данную Д. Гильбертом характеристику того положения, в котором оказался Фреге, а также тот вывод, который Гильберт из этого сделал. В докладе на III Международном математическом конгрессе (Гейдельберг, 1904) Гильберт сказал: «Г. Фреге ставит себе задачу обосновать законы арифметики средствами логики, понимая эту последнюю в обычном смысле <...>. Но, проводя последовательно свою точку зрения, он среди прочего принимает и тот основной закон, согласно которому понятие (множество) определено и может быть непосредственно применено, если только относительно каждого объекта известно, подпадает ли он под это понятие или нет[94]; при этом он не налагает никаких ограничений на понятие «каждый»[95] и, таким образом, оказывается под ударом тех теоретико-множественных парадоксов, которые заключаются, например, в понятии множества всех множеств и которые показывают, как мне кажется, что концепции и средства исследования логики, понятые в обычном смысле, не в состоянии удовлетворить тем строгим требованиям, которые ставит теория множеств. Напротив, *устранение подобных противоречий и объяснение этих парадоксов следует с самого начала рассматривать как главную цель при исследованиях, касающихся понятия числа*»[96]. Иначе говоря, там, где Фреге усмотрел крушение самого замысла логического обоснования арифметики, Гильберт увидел лишь начало движения по направлению цели, к которой математики должны стремиться.

В поисках выхода

Антиномии были известны еще в античности. Достаточно назвать парадоксы «Лжец» и «Куча» — да и апории Зенона Элейского тоже. Во времена Фреге — а в традиционной нематематической логике даже и в XX в.[97] — их относили к логическому фольклору и считали связанными скорее с лингвистическими формулировками, чем с реальными трудностями[98]. Серьезность ситуации стала осознаваться лишь в связи с канторовским учением о множествах. В 1899 г. Кантор открыл в своей теории противоречие, связанное с понятием множества *всех* множеств и вопросом о том, какова мощность (кардинальное число) всех подмножеств этого множества; об этом противоречии он сообщил в письме Р. Дедекинду (опубликовано оно было лишь в 1932 г.). В 1895 г. Кантор открыл другой парадокс — антиномию наибольшего кардинального числа.

---

[94] Ср. фрегевский «принцип полноты».

[95] То есть предполагает универсальность области предметов, на которой заданы все понятия.

[96] *Гильберт*, 1998. Т. I. С. 399.

[97] Выразительным примером здесь может служить учебник для средней школы С. Н. Виноградова «Логика» (М., 1947), где парадоксы фигурировали в качестве задач, причем текст книги не давал никаких указаний, как их решать.

[98] Ср.: *Stelzner*, S.73.

С легкой руки Ф. Рамсея[99] (1926) в логике и философии математики утвердилось разделение антиномий (парадоксов) на *логические* и *семантические*. Формулировка последних предполагает явное использование понятий, связанных с истинностью и осмысленностью *языковых* выражений, а также отношением именования, как это имеет место в случае, скажем, парадокса «Лжец». Логические антиномии требуют непосредственного участия понятий логики (прежде всего понятия логического следования), и хотя они тоже предполагают дихотомию «истина» — «ложь» и понятие осмысленности, но предположение это неявное. Логические антиномии обычно рассматриваются и как теоретико-множественные, хотя подобное отождествление выглядит подчас несколько натянутым: каждая логическая антиномия может истолковываться и как теоретико-множественная (поскольку логика, в них заложенная, экстенсиональна, или объемна), но обратное подчас неестественно, так как оба упомянутых парадокса Кантора привлечения логических средств — во всяком случае привлечения явного — не требуют. Конечно, эти различения во многом относительны, и некоторые парадоксальные ситуации могут быть представлены и «семантически» и «логически», и «логически» и «теоретико-множественно»[100].

Антиномия Рассела (и ее парафразы в форме, скажем, «Брадобрея» или «Каталога всех каталогов») — типичный *логический* парадокс, легко представимый теоретико-множественно в силу экстенсиональности фрегевской записи в понятиях.

Но вернемся к Фреге. Причину своей неудачи он усмотрел в том, что опирался на положение: у всякого понятия есть объем, который может быть выделен с помощью «принципа абстракции», а также на понимание объема понятия как постоянного, строго фиксированного предмета из его универсума — предмета, не содержащего в себе никакой неопределенности.

Рассмотрим вопрос более внимательно. Вспомним, что пробеги значений функций, в случае понятий оказывающиеся их объемами, характеризуются в теории Фреге неоднозначно: это заложено в самом «основном законе» (V), с помощью которого они вводятся. Отсюда и первая мысль Фреге: трудность таится в том способе, каким он вводил эту категорию — категорию, которая, как мы показали, следуя ходу мысли Фреге, недостаточно определенна.

К чести Фреге надо сказать, что, вводя свои «пробеги», он проявил редкую предусмотрительность, сделав в Предисловии к первому тому «Основных законов арифметики» соответствующее предупреждение. Он писал, что обоснование арифметики средствами одной чистой логики требует построения цепочек умозаключений, не содержащих никаких пробелов; для этого он сделал все что нужно. «Если же кто-то пожелает найти [в цепочке умозаключений] нечто ошибочное, то он должен быть в состоянии точно указать, где, по его мнению, заключена ошибка: в основных законах, в дефинициях, в правилах [вывода] или их применении в каком-то определенном месте <...>. Разногласия при этом, насколько я вижу, могут возникнуть только относительно моего основного закона (V), который логиками, по-видимому, специально еще не формулировался, хотя он и подразумевается, когда, например, речь заходит об объемах понятий. Я считаю данный закон чисто логическим. Во всяком случае здесь я обозначил то место, где надлежит принять соответствующее решение»[101].

---

[99] См.: *Ramsey F. P.* The Foundations of Mathematics and Othe Logical Essays/Ed. R. B. Braithwaite. London, 1931.

[100] Формулировку и анализ наиболее известных антиномий можно найти в кн.: *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики/Пер. с нем. М., 1947. Гл. 4, § 4; *Клини С. К.* Введение в метаматематику/Пер. с англ. М., 1957. Введение (при ссылках на эту книгу: ***Клини***); *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств/Пер. с англ. М., 1966. Гл. 1.

[101] Grundgesetze I, S. VII.

Неудивительно, что в Послесловии ко второму тому «Основных законов арифметики» Фреге приходит к выводу: «Речь идет о моем принципе (V). Я всегда признавал, что этот закон не обладает такой очевидностью, какую имеют другие законы, — очевидностью, которую, собственно говоря, надо требовать от логического закона. Поэтому-то я в Предисловии к первому тому, с. VII, и указал на этот уязвимый пункт. Я бы охотно отказался от этого основоположения, если бы смог найти для него какую-нибудь замену»[102].

В ответном письме Расселу (от 22 июня 1902 г.) Фреге поэтому и выражает сомнение относительно доказательства, проведенного им в параграфе 31: «Открытие этого противоречия, — пишет Фреге, — чрезвычайно обескуражило меня, и я, можно сказать, оказался почти в растерянности, так как тем самым пошатнулось то основание, на котором я задумал построить арифметику. Кажется, что после этого преобразование общности некоторого равенства в равенство пробегов значений (§ 9 моих «Основных законов арифметики») не всегда допустимо, что мой закон (V) (§ 20, с. 36) ложен и что соображений, высказанных мною в § 31, недостаточно, чтобы во всех случаях обеспечить значение для моих знаковых конструкций»[103]. «Положение тем более серьезно, — продолжает Фреге, — что с падением моего закона (V), как мне представляется, рушатся не только основания моей арифметики, но вообще единственно возможные для нее основания»[104].

Но не один Фреге оказался жертвой расселовского открытия. Узнав о парадоксе, относившемся как к логическим основаниям арифметики, так и к основам теории множеств, Р. Дедекинд, подобно Фреге, приостановил чтение своих лекций по основаниям математики и на некоторое время прервал публикацию полученных им результатов, — он счел их базис поколебленным антиномией Рассела. В 1911 г., в предисловии к 3-му изданию своего труда «Что такое числа и чем они должны быть» он признался в своей нерешительности, когда надо было принимать решение о переиздании этого его труда 1888 г., «поскольку тем временем заявили о себе сомнения в надежности важнейших оснований моих взглядов <...>. Однако, — продолжал он, — мое доверие к внутренней гармонии нашей логики этим не было поколеблено»[105]. И Дедекинд выражает надежду, что основания его труда можно сделать безупречными. Заметим в этой связи, что и Фреге не усумнился в логике. Вспомним, что дефиниция $F(f) = \mathrm{Df} \neg f(f)$, ведущая, согласно первому импульсу расселовской мысли, к противоречию, невозможна в исчислении Фреге из-за проводимого им различения функций разных ступеней — различения, которое, напомним, лишает смысла запись $f(f)$. Это было для Фреге явным утешением, так как он понимал, что логика предикатов, в том числе предикатов высших ступеней, как она изложена в «Исчислении понятий» 1879 г., не затрагивается теоретико-множественными парадоксами. Он явно говорит об этом в одном фрагменте, сохранившемся в его архиве и относящемся к 1906 г.: «Моя понятийная запись в главном от этого (открытия Рассела. — *Б.Б.*) независима»[106].

Не будем, однако, забывать, что «основной закон (V)» — принцип абстракции, или принцип равнообъемности, или принцип коэкстенсивности, или

[102] Grundgesetze II, S. 253.
[103] Briefwechsel, S. 213.
[104] Ibidem.
[105] *Dedekind*, S. XI (Vorwort zur dritten Auflage).
[106] Nachgelassene Schriften, S. 191.

принцип экстенсиональности, называемый также «определением через абстракцию», — в логической ли его записи, или в записи, принятой в аксиоматической теории множеств в виде

$$\forall z\ (z \in x \equiv z \in y\ ) \supset x = y^{107},$$

был важным открытием Фреге. Приведем в этой связи следующие слова Г. Вейля: «Насколько мне известно, этот принцип был впервые сформулирован Фреге («Основания арифметики», §§ 63–68), причем с большей ясностью, чем у кого-либо из последующих авторов, и с полным пониманием большого значения этого способа определения для всей математики»[108]. При соответствующих ограничениях, которые вводятся в аксиоматической теории множеств, можно принять, говоря словами того же Вейля, что «два свойства a и b коэкстенсивны, или равнообъемны, если каждый элемент, обладающий свойством a, обладает и свойством b, и vice versa (множество = «Begriffsumfang» у Фреге)»[109].

Фреге писал свое Послесловие ко второму тому «Основных законов арифметики», когда книга была уже в печати, но он успел выдвинуть предположение, как, по его мнению, можно было бы избежать антиномичности. «Основной закон (V)» можно расчленить на две импликативные формулы:

$$(\forall y\ (F(y) \equiv G(y)) \supset xF(x) = xG(x), \tag{Va}$$

$$(xF(x) = xG(x) \supset \forall y\,(F(y) \equiv G(y)), \tag{Vb}$$

и Фреге предлагает ослабить (Vb), что, по его выкладкам, должно снять обнаруженное противоречие. Однако эта его попытка оказалась неудачной. С. Левневский, а затем В.О. Куайн показали, что предложение Фреге не устраняет антиномии[110].

Но не только сомнения в принципе (V) одолевали Фреге: он понял, что под вопрос поставлен и тезис, согласно которому всякое понятие имеет объем. В теории Фреге это положение подразумевается в «принципе абстракции», но не имеет в ней «формульного» представительства. Таковое он получает в аксиоматических теориях множеств — в виде так называемого *принципа свертывания*, согласно которому каждое множество определяется как объем соответствующего понятия, или свойства, что на языке известной теории множеств Цермело – Френкеля (на языке ZF) записывается в виде аксиомы (схемы аксиом):

$$\exists y \forall x\ (x \in y \equiv F(x)),$$

где y— определяемое множество, а $F(x)$ выражает свойство, которым обладают его элементы, причем $F(x)$ не должно содержать y. Эта формула читается: существует множество y, содержащее те, и только те, предметы x, которые имеют свойство F. Будучи примененной без ограничений, эта аксиома (axiom of comprechension) влечет противоречие. Ибо взяв '$x \notin x$' в качестве '$F(x)$', мы получаем

$$\exists y\ \forall x\ (x \in y \equiv x \notin x),$$

а эта формула, как показывают известные преобразования логики предикатов, антиномична[111].

---

[107] Что читается как утверждение о равенстве двух множеств, коль скоро они имеют одни и те же элементы.

[108] *Вейль Г.* Математическое мышление/Пер. с англ и нем. М.: Наука, 1989. С.125 («Заключительные замечания» к «Континууму»). При ссылках на эту книгу: ***Вейль*, 1989**.

[109] *Вейль*, 1989. С. 79.

[110] *Quine W.V.* On Frege's way out. — Mind, v. 64.

[111] См.: *Френкель — Бар-Хиллел*, с.172–173.

Не будучи в состоянии преодолеть возникшую перед ним трудность, Фреге вместе с тем отдавал себе отчет в значимости сообщения Рассела. В своем ответе английскому философу он писал: «во всяком случае Ваше открытие совершенно поразительно и наверняка приведет к большому прогрессу логики, сколь нежелательным оно ни выглядит на первый взгляд»[112]. Что это так, понял сам первооткрыватель парадокса. И он же предложил исторически первый способ его устранения. Идея заключалась в том, чтобы распространить фрегевскую иерархию функций на предметный универсум, введя аналогичную иерархию предметов; это исключало возможность высказываний типа $x \in x$, так как перед знаком $\in$ (принадлежности элемента множеству) и за ним должны фигурировать предметы (точнее, имена предметов) обязательно различных типов. Этот запрет — Г. Вейль[113] отождествил его с «viciosus circle principle», то есть принципом запрета порочного круга, — Рассел сформулировал в следующих словах: «Ни одно множество не может содержать элементы, которые определяются в терминах самого этого множества».

Идею теории типов предметов — идею, порывавшую с универсумом Фреге, — Рассел выдвинул летом того же 1902 г. В адресованном Фреге письме, датированном 8 августа, он предложил для устранения антиномии ввести следующую иерархию: допустить, что $\varphi(x)$ предполагает восполнение *или* предметами, *или* пробегами значений функций, *или* пробегами пробегов значений, и т.д. «Эта теория, — писал он Фреге, — аналогична Вашей для функций первой, второй и т.д. ступеней; она делает невозможным $x \cap x$ (то есть $x \in x$. — *Б.Б.*)»[114].

Обсуждая эту возможность, Фреге в ответном письме (от 23 сентября 1902 г.) обращает внимание на отсутствие признака, позволяющего различать функции, имеющие пробеги значений, от функций, которые их не имеют, и, стало быть, отличать понятия, имеющие объем, от понятий, такового не имеющих[115]. Однако для преодоления рассматриваемой трудности учитывать это и не нужно. Как показал Рассел, путь, ведущий к иерархии предметов, аналогичной фрегевской иерархии функций, вполне осуществим[116].

В статье 1908 года[117], а потом в совместном с А.Н. Уайтхедом труде «Principia mathematica» (1910/1913) Рассел разработал теоретико-типовое логическое исчисление. Фреге этим путем не пошел. Существует взгляд, что произошло это потому, что при подобном подходе требовались аксиомы («основные законы»), логический характер которых вызывал у него сомнения[118], и в их числе ненужная, с точки зрения Фреге, «аксиома бесконечности».

Сам Фреге вынужден был признать, что тезис, согласно которому всякому понятию соответствует класс всех тех, и только тех, предметов, которые под него подпадают, и этот класс в свою очередь может быть (как предмет) членом других классов, не проходит. Однако к идеям, высказанным в Послесловии ко второму тому «Основных законов арифметики», он впоследствии фактически уже не возвращался: разрешить парадокс он не смог, хотя и понимал, что из-за этого его логическая программа обоснования арифметики неосуществима. Но проблема эта, видимо, не давала ему покоя, отзвуком чего можно считать фрагмент из его ар-

---

[112] Briefwechsel, S. 213.

[113] *Вейль*, 1989. С. 126.

[114] Briefwechsel, S. 226.

[115] Ibidem, S. 227—229.

[116] См. кн. *Клини*, раздел «Введение», с. 46—47, а также *Гильберт — Аккерман*, гл. 4 и Приложение I.

[117] *Russell B.* Mathematical logic as based on the theory of types//American Journel of Mathematics, v. 30, p. 222—262.

[118] Ср. *Stelzner*, S. 73.

хивного наследия, который издатели относят к 1906 г. Фрагмент посвящен критике статьи А. Шёнфлиса (A. Schoenflies), в которой рассматривались парадоксы теории множеств. Фреге высказывает здесь убеждение, что его положения о предикативном характере понятий и о резком разграничении функций и предметов не затрагивает проблемы непротиворечивости. А ставя вопрос, может ли объем какого-либо понятия подпадать под это понятие, он выдвигает гипотезу о возможности понятий, которые «совпадают по объему, хотя этот объем подпадает под одно понятие, но не подпадает под другое. Привлечение в этом случае понятий второй ступени здесь не может помочь», считает он[119]. Дальнейшего развития эта идея у него, однако, не получает.

Герман Вейль дал следующую характеристику ситуации, в которой оказались первопроходцы новой логики и теории множеств: «Под ударом неотразимых парадоксов теории множеств Дедекинд и Фреге отказались от своих исследований природы чисел и арифметических предложений»[120]. Общий итог: дело всей жизни Фреге — логическое обоснование математики — потерпело неудачу, во всяком случае так воспринял это автор «Основных законов арифметики». И до 1918/1919 г. он больше не пытался решать свою главную проблему; но тут у него возникла мысль, что числа — это не предметы, а понятия второй ступени или «несамостоятельные» части обозначений таких понятий[121]. Но и эта мысль развития не получила.

Почему же Фреге не видел выхода из создавшегося положения? Ведь в эти годы в основаниях математики шли активные и небезуспешные поиски. Думается, объясняется это родством его воззрений с «наивной» теоретико-множественной установкой математики конца XIX в. — воззрений, которые у него сочетались с убеждением, будто «логика имеет право притязать на неограниченность области действия своих законов». Но устремление Фреге к логическому порождению универсума, который охватывал бы *все предметы* любого уровня абстрактности, находящиеся на едином предметном уровне, было нереализуемо. Однако Фреге раз и навсегда принял для себя императивы абсолютности и всеобщности характера той области объектов, с которой логика *обязана* иметь дело; неизменности и постоянства сущностей, называвшихся им «предметами»; строгой фиксированности объемов понятий, которые, по его убеждению, не должны содержать в себе никакой неопределенности или расплывчатости; неприменимости категорий вариативности и развития применительно к логическим и логико-математическим системам. Можно сказать, что «альфой и омегой» его взглядов была абсолютизация принципа тождества в том широком смысле, какой был описан автором этих строк в статье «$A = A$», открывающей «Философскую энциклопедию»[122]. При таких философских убеждениях пессимизм Фреге вполне понятен.

Далее. Отношение Фреге к мучившей его проблеме носило, так сказать, выраженный личностно-психологический характер: создатель «Основных законов арифметики» не мог переступить через себя и принять видоизменения системы в духе расселовского подхода (так напоминавшего ту теорию, которую он подверг резкой критике в статье об алгебре логики Э. Шрёдера) либо аксиоматической теории множеств (не соответствовавшей его «содержательной» ориентации).

Между тем «послефрегевская» история логики и исследований в области оснований математики продемонстрировала, сколь многообразными могут быть и законы логики, и логические и логико-математические исчисления, и теоретико-множественные аксиоматизации; сколь разными могут быть и пути решения возникаю-

---

[119] Nachgelassene Schriften, S.191 f.
[120] *Вейль*, 1989. С. 241 (статья «Давид Гильберт»).
[121] Briefwechsel, S. 277.
[122] М., 1960. Т. 1.

щих в связи с ними проблем, среди которых *непротиворечивость* логической (теоретико-множественной) конструкции — только одна из них.

Крушение развернутой Фреге программы логического обоснования арифметики заставило его в конце концов радикально пересмотреть свои взгляды на природу арифметики вообще. В своей прежней конструкции он исходил из того, что — в отличие от геометрии — арифметика может быть обоснована без обращения к наглядным представлениям. Теперь он задумывает идти к арифметике от геометрии с ее опорой на наглядность.

Впрочем, ситуация с обоснованием математики радикально изменилась после знаменитых (мета)теорем К. Геделя о неполноте (и непополнимости) формализованной арифметики и невозможности доказательства ее непротиворечивости средствами, формализуемыми в ее же рамках. Это нанесло удар не только по логицизму, но и по другим направлениям аксиоматизации математических теорий, включая известную программу Гильберта. Стало ясно, что «финитизм» столь же уязвим, что и логицизм, что и теория типов и многие другие подходы к сооружению вполне «строгого» здания математического знания. На очередь дня стала задача «ослабления» законов логики, «обслуживающих» основания математики, — путь, на который вступили Г. Генцен и Р. Карнап. Но это — уже другая песня.

Проблема обоснования геометрии: полемика с Гильбертом

В течение своего длительного творческого пути Фреге вступал в переписку с рядом своих выдающихся современников: Эдмундом Гуссерлем, Эрнстом Шрёдером, Бертраном Расселом, Джузеппе Пеано, Морицем Пашем, Луи Кутюра, Филиппом Жорданом, Леопольдом Лёвенгеймом, Людвигом Витгенштейном и, наконец, Давидом Гильбертом. Не все из этой переписки дошло до наших дней: она разделила судьбу остального фрегевского архива. Но переписка с Гильбертом сохранилась, более того, некоторые письма Фреге Гильберту были опубликованы еще в 1940–1941 гг.

Эпистолярная дискуссия Фреге и Гильберта интересна тем, что раскрывает взгляды обоих ученых не только на обоснование геометрии, но и на подход к непротиворечивости математических теорий и роли в них дефиниций.

Фреге, как мы знаем, признавал только *явные* определения. В записи типа « $\Vdash\!\!\!— \xi = \zeta$», начинающегося со знака $\Vdash\!\!\!—$ «введения по определению», слева от знака равенства или знака '$\equiv$' (он использовался в труде 1879 г.) помещалось определяющее (ξ), а справа определяемое выражение — новый знак ζ, служащий для сокращенного обозначения того, что означает определяющее; при этом в ξ не должно быть ничего от знака ζ. По этой причине Фреге в труде 1884 г. категорически отверг рекурсивное определение операции арифметического сложения, данное Германом Грассманом[123], утверждая (в оглавлении книги): «Дефиниция, которую Грассман дал [выражению] $a + b$ ошибочна», поскольку в ней сумма определяется через самою себя[124].

Отвержение рекурсивных определений как содержащих якобы порочный круг, было одним из тех заблуждений Фреге, которое высветило последующее развитие исследований в области оснований математики[125]. Другое его заблуждение касалось

[123] *Grassmann H.* Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Stettin, 1860/1961.

[124] Grundlagen, S. VII, 8.

[125] О вкладе Германа Грассмана (и его брата Роберта) в становление рекурсивной математики см. в публикациях: *Бирюков*, *Бирюкова*. Вопросы кибернетики I. С. 36–92; *Бирюкова*. Вопросы кибернетики II. С. 45–111.

недооценки аксиоматического метода. Здесь воззрения Фреге шли вразрез с концепцией Гильберта.

Фреге не мог согласиться с пониманием системы аксиом (геометрии) как *неявных определений* тех понятий, которые Гильберт использовал при построении системы евклидовой геометрии. Этот вопрос явился главной темой их переписки.

Обмен посланиями двух ученых (он включает шесть писем и три почтовых карточки) имел место в 1895 и 1899—1903 гг. Переписку начал Фреге посланием от 1 октября 1895 г., где он поднимает вопрос о роли формул в математике. Фреге отстаивает взгляд, согласно которому в математике надо идти не от символики к ее применениям, а наоборот: «сначала [возникает] потребность [в искусственных языковых знаках], а потом ее удовлетворение»[126], считает он. Следующее письмо Фреге (от 27 января 1899 г.) было вызвано гильбертовской программой обоснования геометрии, которая, как было отмечено во Введении, стала известна Фреге еще до публикации Гильбертом своего труда на эту тему (1900). Обсуждая данную программу со своими коллегами по Иенскому университету — математиками Томе и Гутцмером (C. F. A. Gutzmer), Фреге пришел к выводу, что у него нет ясности относительно некоторых пунктов во взглядах Гильберта. Как следует из дальнейшего текста письма, это отсутствие ясности было вызвано тем, что Фреге не мог принять в качестве определений математических объектов их задание с помощью системы аксиом; он усматривал в построении Гильберта недопустимое, с его точки зрения, стирание грани между аксиомами и определениями. На это письмо последовал ответ Гильберта, затем Фреге отправил Гильберту второе подробное письмо (1900), однако дальнейший обмен посланиями постепенно прекратился, так как Гильберт вежливо отклонил продолжение дискуссии, сославшись на занятость.

Основное содержание эпистолярной контроверзы Фреге — Гильберт составляет обсуждение проблем дедуктивно-аксиоматического метода, обсуждение, в ходе которого Фреге оспаривал Гильбертово понимание таких ключевых логических понятий, как «аксиома», «определение» (дефиниция, Definition) и «разъяснение» (Erklärung). Придавая своим разногласиям с Гильбертом большое значение, Фреге предложил своему оппоненту опубликовать их переписку 1899—1900 гг., поскольку, как он считал, поднятые в ней вопросы имеют общий интерес; но Гильберт не дал на это своего согласия. Тогда Фреге в 1903 и 1906 гг. напечатал серию статей, озаглавленных «Основания геометрии»[127], в которых изложил свой подход к данной проблеме.

Мы не станем задерживаться на этих фрегевских публикациях, а сосредоточимся на полемике Фреге с Гильбертом. Суть их разногласий можно свести к проблеме соотношения истинности и непротиворечивости. Фреге исходил из принимаемого им положения о *содержательном* характере математики, определяющем и истинность и непротиворечивость ее предложений. Он писал Гильберту: «Из истинности аксиом следует, что они не могут противоречить друг другу. Поэтому тут не требуется никакого дальнейшего доказательства. Дефиниции тоже не должны противоречить друг другу <...> принципы построения дефиниций должны быть таковы, чтобы, следуя им, мы никогда не встретились с противоречием»[128]. Обратим внимание на то, что это было сказано в январском письме 1899 г., то есть *до* открытия расселовской антиномии.

---

[126] Briefwechsel, S. 39.

[127] Über die Grundlagen der Geometrie//Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XII, 1903, S. 319—324; вторая статья под тем же заголовком; там же, с. 368—375. Через три года Фреге публикует под этим же названием статью в двух номерах того же издания, т. XV, 1906. С. 293—309, 377—403.

[128] Briefwechsel, S. 63.

Не признавая неявных определений, в частности определений объектов через систему аксиом, Фреге фактически отвергал Гильбертову концепцию обоснования математических теорий путем доказательства их непротиворечивости. Не проводя четкой грани между синтаксическими и семантическими (относящимися к интерпретациям) рассмотрениями в применении к математическим теориям, он тем самым снимал сам вопрос о непротиворечивости системы аксиом. Мы знаем, как зло история за это ему отомстила.

Гильберт, естественно, не мог согласиться с фрегевским пониманием определений и аксиом. Аксиомы евклидовой геометрии трактуются им как неявные определения исходных понятий. Определяемое задается тем контекстом, в котором оно фигурирует. В «Основаниях геометрии» Гильберта система аксиом выступает как средство определения таких первоначальных понятий, как «точка», «прямая», «лежит на» и др., причем считается, что об этих объектах не известно ничего, кроме того, что они удовлетворяют данной системе аксиом.

Упрекая Гильберта в том, что данное им (в параграфе 3 его «Оснований геометрии») объяснение смысла понятия «между» не является определением, так как в нем не приведены основные признаки определяемого понятия, Фреге фактически исходил из своего, описанного нами выше «принципа полноты». Но этот принцип — как нечто основополагающее — не нужен Гильберту, хотя его аксиоматика евклидовой геометрии, разумеется, позволяет отличать, скажем, отношение «между» от других отношений, рассматриваемых в этой математической теории — но отличать, так сказать, с точностью до изоморфизма, что Фреге не могло удовлетворить.

Фреге считал аксиомы (схемы аксиом) предложениями (утверждениями, суждениями) и предполагал, что из истинности аксиом следует непротиворечивость их системы. Согласно Гильберту, наоборот, «если произвольно установленные аксиомы со всеми своими следствиями не противоречат друг другу, то они истинны, то существуют вещи, определяемые этими аксиомами»[129]. Непротиворечивость системы аксиом для Гильберта является критерием математической истинности и существования, для Фреге же система определений Гильберта «подобна системе равенств со многими неизвестными, при которой остается сомнительной ее разрешимость и особенно однозначность установления (Bestimmung) неизвестных»[130].

Еще резче высказался Фреге в письме своему гейдельбергскому коллеге Генриху Либману (H. Liebmann), которое относится к тому же времени (1900). В нем он называет «монстром» гильбертовскую систему понятий «точка», «прямая», «плоскость», считает недостатком неразличение Гильбертом понятий первой и второй ступеней и даже сравнивает Гильберта с Мюнхгаузеном, пытающимся, ухватившись за собственный чуб, вытащить себя из болота[131].

Нет сомнения, что в данной дискуссии историческая правота была на стороне Гильберта. Он закладывал основы будущего стиля философско-математического мышления. Фреге же не был в состоянии понять складывающуюся в обосновании математики новую «парадигму». И тем не менее переписка Фреге—Гильберт весьма примечательна: в ней обнаруживаются определенные пункты, так сказать, схождения взглядов двух больших мыслителей. Гильберт склоняется к тому, что каждая аксиоматическая теория задает не понятия, а «схему понятий», а Фреге соглашается с тем, что «аксиоматические определения» нечто определяют, а именно — отно-

---

[129] Ibidem, S. 66 (письмо Гильберта от 29.12.1899).
[130] Ibidem, S. 73 (письмо Фреге от 6.1.1900).
[131] Ibidem, S.148.

шения между понятиями (а не сами понятия)[132]. Однако главное расхождение во взглядах обоих ученых — разный ответ на вопрос о том, что́ нужно считать для математической теории первичным: ее непротиворечивость или ее содержательный смысл, — продолжало их разделять. Мало того, альтернативность их взглядов сохранила свою актуальность в последующем развитии оснований математики. В определенный период — во всяком случае до середины нашего века — подход Гильберта, вылившийся в концепцию метаматематики, получил широкое признание. Однако во второй половине нашего столетия все громче зазвучали голоса, утверждавшие, что понятия интерпретации, истинности и существования (особенно существования как результата конструктивного построения) предшествуют понятию непротиворечивости. В Предисловии к публикации переписки Фреге и Гильберта Ф. Камбартель справедливо отмечает[133] крепнущую тенденцию положительной оценки определенных сторон фрегевской критики аксиоматического метода в истолковании Гильберта.

Учение о смысле и значении

Выше мы часто пользовались фрегевским понятием *значения* знаковых выражений и говорили об их *смысле*. Настало время рассмотреть этот вопрос более подробно.

Теория (предметного) значения и смыслового содержания языковых образований для Фреге естественным образом вытекала из его логико-онтологических и гносеологических воззрений. Если, как считал Фреге, логика есть наука о *бытии истины*, не зависящем от человека, — в той мере, в какой это бытие постигается, «схватывается» логикой; если то, что логически «схватывается», всегда — либо *предмет*, либо *функция*, в частности *понятие* или *отношение*; если все это происходит с помощью *языка*, вообще *знаков*, — то нужна концепция, сводящая все эти положения воедино. Такой концепцией и является фрегевское *учение о смысле и значении* лингвистических сущностей, концепция, которая в совершенно новом свете представляет *понятия*, *суждения* и *умозаключения*.

В истории логики сложилась традиция рассматривать суждения как состоящие из понятий, соединенных связками, выявлять их «аристотелевские» формы или обобщения этих форм в стиле «квантификации предиката» (основывая на этом теорию умозаключений) либо сводить все к равенствам и алгебраизировать как сами формы понятий и суждений, так и совершающиеся с их помощью выводы. Фреге решительно отходит от этого пути, что было провозглашено им уже в труде 1879 г. (§ 3 части I). Ибо начинается его «исчисление понятий» с тезиса: «При любом истолковании суждения нет места различению *субъекта* и *предиката*»[134]. Разъясняя этот тезис, Фреге указывает, что положение субъекта в предложении играет роль *выделенного* места, на которое помещают то, на что хотят обратить внимание. Но содержание одного и того же предложения может быть облечено в разные формы, например пассивный залог может быть заменен активным. Как тут быть с выделением субъекта и предиката? Предложение «Архимед погиб при завоевании Сиракуз» можно выразить и по-другому, например в таком языке, где это предложение имело бы вид: «Насильственная смерть Архимеда при завоевании Сиракуз является фактом». Имея в виду подобный язык, Фреге отмечает, что он «имел бы единствен-

---

[132] Ср.: *Kambartwl F.* Einleitung des Herausgebers//*Gottlob Freges* Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1980, S. 1—2.

[133] Ibidem, S. 1—3.

[134] В наст. книге, с. 69.

ный предикат для всех суждений, а именно — «есть некоторый факт». Тут нет и речи о субъекте и предикате в обычном смысле. *Запись в понятиях и есть язык, который это учитывает*, а *знак* ├── *есть общий предикат для всех суждений*»[135]. Традиционному различению субъекта и предиката Фреге противопоставляет различение *аргумента* и *функции*, выражая убеждение, что последнее «сохранится надолго»[136].

За этими словами — результатом глубоких раздумий молодого ученого — стояла целая концепция мира и человека, опосредованная логикой. Концепция эта — *гносеологическая*, *методологическая*, *онтологическая* и *семиотическая*, или знаковая. Гносеологическая — потому что вопрос об истине есть центральный вопрос теории познания; методологическая — потому, что связана с пересмотром сложившихся в логике, математике и математическом естествознании средств анализа их понятий и теорий[137]; онтологическая — потому что познание истины, ее бытия предполагает определенный взгляд на сущее — ὄντως; семиотическая — потому что высказывания о бытии истины всегда опосредованы языком, речью — знаком. Поскольку онтология Фреге предполагает только две сущности — *предметы* и *функции*, ему надо было объяснить, как они относятся к *истине* и к *знаку*. Соответствующая концепция должна была при этом учитывать функциональное многообразие — ведь функции бывают различных типов, что зависит и от числа аргументных мест, и от характера самих аргументов. Фрегевская концепция должна была быть также согласована с основным гносеологическим тезисом Фреге — тезисом о единстве логических законов в их отношении к предметному миру. Это Фреге осуществил, отвергнув в отношении предметов принятый им для функций иерархический подход и введя универсальную предметную область, из которой черпаются все аргументы и все значения функций. Все это, естественно, получило отражение на языковом, знаковом уровне — как в построенном им «исчислении понятий», так и в проведенном им (исключительно в логических целях — подчеркнем это!) анализе выражений естественного (а именно немецкого) языка. Каждой из двух его онтологических сущностей поставлено в соответствие определенное языковое образование: предмету — его имя (название), *nomen proprium*; функции (включая понятие и отношение) — ее имя, или функциональное выражение; понятию — понятийное имя, или понятийное выражение, понятийный знак (*nomen apellativum*); отношению — его название. Ограничение онтологических сущностей лишь двумя типами объектов — предметами и функциями вытекало из принятого Фреге противопоставления константных сущностей — предметов, потенциальных аргументов и значений функций, — и сущностей, требующих восполнения предметами (аргументами), сущностей «ненасыщенных»; «насыщение» вторых первыми, заполнение аргументных мест в функциях-понятиях (либо отношениях) означало *предикацию*, приводящую к *суждениям*.

Слаженности возводимой Фреге конструкции он достиг не сразу: в труде 1879 г., да и в сочинении 1884 г. многое требовало дальнейшей детализации. Решение пришло в начале 90-х гг., когда окончательно сформировалось фрегевское учение о смысле и (предметном) значении языковых выражений — оно изложено в статьях, перевод которых составляет вторую часть настоящей книги. Но и в последующие годы Фреге продолжал шлифовать свою логико-семантическую концепцию. Для «позднего Фреге» это как бы постоянный мотив — мотив, которым проникнута его последняя большая работа: «Логические исследования».

---

[135] Там же, с. 70.

[136] Ср. раздел I «Исчисления понятий» и статьи логико-семантического цикла, помещенные во второй части настоящей книги.

[137] Здесь показательно уже Предисловие к «Исчислению понятий», где Фреге решительно подчеркивает значение *метода* в научном познании. Ср. в этой связи статью: *Thiel Cr.* Frege als Methodologe//Gabriel, Dathe, S. 137–149.

Главный корректив, который должен был внести Фреге, — он сделал это в упомянутых статьях 90-х гг. и в первом томе «Основных законов арифметики» — заключался в дальнейшем анализе категории *суждения*. Труд 1879 г. знал «содержание суждения» и его — суждения — «оцениваемое содержание», то есть содержание, подлежащее обсуждению с точки зрения его истинности либо ложности. Теперь, начиная со статьи «О смысле и значении», фрегевская «оценка» суждения расщепляется на его (предметное) значение — оно, как мы знаем, получает название «истинностного значения» («значения истинности») — и его смысл, каковым оказывается мысль, заключенная в (утвердительно-повествовательном) предложении — носителе суждения. «Смысл имени какого-либо (одного из двух. — *Б.Б.*) истинностного значения я называю *мыслью*»[138]. Иначе говоря, *суждение* оказывается *мыслью*, выражаемой (повествовательным, утверждающим) *предложением* как ее знаковым представителем.

В 1909 г. немецкий физик Людвиг Дармштедтер, собиравший тексты-автографы известных ученых, обратился к Фреге с просьбой прислать для его коллекции какой-либо рукописный научный материал. Фреге выполнил эту просьбу, и соответствующий текст ныне опубликован в его архивном наследии. Текст этот представляет собой краткое изложение основных фрегевских логико-математических взглядов, и в нем четко отражены те импульсы, которые направляли мысль Фреге. «Своеобразие моего взгляда на логику проявляется прежде всего в том, — пишет Фреге, — что на первое место я выдвигаю содержание слова «истинный», и затем в том, что сразу после этого я рассматриваю мысль как то, относительно чего вообще можно ставить вопрос о бытии истины. Стало быть, я исхожу не из понятий и не из образования из них мысли или суждения,— я получаю компоненты мысли путем ее расчленения на составляющие части. Этим моя запись в понятиях отличается от сходных достижений Лейбница и его последователей — несмотря на то, что я, быть может, и неудачно выбрал соответствующие названия»[139].

Резоны для введения основополагающих для фрегевской логической семантики категорий смысла и значения носили гносеологический (точнее, эпистемологический) характер. Они касались отношения равенства (тождества) и были конкретным преломлением идей Лейбница и Канта об аналитических и эмпирических (всегда синтетических) суждениях. Это очень ясно выражено уже в первых фразах статьи «О смысле и значении» (1892)[140]. В материале «Логика в математике», относящемся, по заключению издателей, к 1914 г., эпистемологическая мотивация звучит особенно четко.

Фреге рассуждает следующим образом. Рассматривая предложения о равенстве чисел, особенно больших, мы видим: убеждение в справедливости, например, того, что 137 + 469 = 606, требует соответствующего вычисления. Это предложение означает гораздо больше, чем предложение 606 = 606. С помощью первого — по Канту синтетического, отмечает Фреге, — происходит расширение нашего знания, второе же, согласно Лейбницу и Канту, аналитическое; продвижения в познании оно не дает. Стало быть, и мыслительное содержание (Gedankeninhalt) обоих предложений различно. Но, спрашивает Фреге, возможно ли обозначение одного и того же двумя различными именами или знаками, если мы не знаем, что обозначаемое в обоих случаях одинаково? — Да, отвечает он, возможно, да, собственно говоря, постоянно и происходит. Один наблюдатель, обнаружив неизвестный ему астеро-

---

[138] Grundgesetze I, S. 7.

[139] Nachgelassene Schriften, S. 273.

[140] См. в наст. книге, с. 230 и далее.

ид, может дать ему предварительное название, но дальнейшие наблюдения и вычисления убедят его в том, что это небесное тело уже известно и имеет название. Может, далее, случиться, что астроном пользовался обоими названиями, еще не зная того, что они обозначают один и тот же астероид. Значит, мы «можем называть один и тот же предмет разными именами, не зная того, что это одно и то же»[141].

Фреге рассматривает следующую конкретную ситуацию. Имена «Коперник» и «Основоположник гелиоцентрического учения о планетной системе» обозначают одного и того же человека, но обладают разным смыслом; ибо предложения «Коперник есть Коперник» и «Коперник является основоположником гелиоцентрического учения о планетной системе» выражают неодинаковые мысли[142] — одно, как мы сказали бы теперь, есть тавтология, второе же предложение о факте, синтетическое в смысле Канта.

В одной из лекций, которую слушал и записал Р. Карнап, Фреге приводит пример, перекликающийся с началом его статьи «О смысле и значении». Два предложения «Утренняя звезда светит отраженным светом» и «Вечерняя звезда светит отраженным светом» имеют различный смысл, но одно и то же значение. При этом мысль о том, что «утренняя звезда есть то же самое, что и вечерняя звезда» есть разультат особого акта познания; в отличие от этого предложение «Вечерняя звезда есть то же, что и вечерняя звезда», хотя как таковое оно и истинно (ist an sich wahr), не прибавляет нам знаний[143].

Напомним теперь о терминологии Фреге, которой мы фактически уже пользовались. Отношение, существующее между знаком, названием, именем (точнее, собственным именем), именуемым предметом и смыслом имени, Фреге описывает строго терминологично: знак, имя *обозначает* (называет) предмет — *значение* знака; предмет обозначается знаком; последний несет в себе — *выражает* — некий *смысл*, который *задает* предмет — значение знака. К этой концептуально-терминологической конструкции восходит — не формулировавшаяся Фреге — схема широко известного ныне *семантического треугольника*, в которой «имя *выражает* свой смысл и *обозначает* свое [предметное] значение»[144]:

(стрелки указывают «направление» тех умственных действий, которые отнесены к соответствующим сторонам треугольника).

С Фреге, следовательно, берет начало категория *отношения именования* (называния) — со всеми (указанными Фреге) свойствами ее элементов: что знак должен обозначать только один предмет (иметь единственное значение); что смысл должен однозначно указывать на предмет — значение знака как носителя данного смысла;

141 Nachgelassene Schriften, S. 242–243.
142 Ibidem, S. 243.
143 *Carnap* — Mitschrift, S. 15.
144 Grundgesetze I, S. 7.

что смысл для данного имени должен быть единственным; что предмет может обозначаться разными знаками и что поэтому его можно задавать, используя разные смыслы. Знак, далее, может иметь смысл, но не иметь значения. Подобные ситуации, подчеркивает Фреге, недопустимы в науке, пользующейся точным языком, но широко распространены вне ее — в художественной литературе, поэзии, вообще в том, что в немецкой философской литературе его времени носило название «наук о духе». Так, в предложении «Сцилла имеет шесть голов» слово «Сцилла» ничего не обозначает, но несмотря на это мы обнаруживаем, что в нем выражена некая мысль и что мы можем приписать слову «Сцилла» определенный смысл. Но эта мысль не относится к миру истины и науки, а принадлежит сфере мифологии и поэзии[145].

Для фрегевского подхода характерно четкое различение языкового и внеязыкового уровней рассмотрения. Языковые (знаковые) выражения он обычно заключает в одинарные кавычки, записывая, например '$\xi = \zeta$', когда речь идет о *знаковом выражении* соответствующего равенства, и $\xi = \zeta$, когда предполагается равенство *предметов* ξ и ζ. В самом языке (в частности, представленном его записью в понятиях) Фреге различает то, что теперь называется объектными знаками и метазнаками. В своем исчислении он использует квантор общности, связывающий переменные (готические буквы), но всеобщность он выражает, и применяя свободные переменные (малые латинские буквы). И четко отличает *упоминание* языковых выражений от их *употребления*. Вообще, к Фреге восходят основные *содержательные* (не связанные со спецификой его знаковой системы) черты современной логической символики типа различения констант, термов, дескрипций, свободных и связанных переменных и многое другое.

Фрегевское логико-семантическое учение содержит ряд неясностей и спорных моментов, о которых мы будем говорить особо. Но сейчас нас интересует его позитивный аспект. Поясним прежде всего понятие *собственного имени* как его понимал Фреге. *Под этим термином Фреге разумел имя отдельного предмета, сколь бы сложным оно ни было.* И «Коперник», и «Основоположник гелиоцентрического учения о планетной системе» — это имена собственные. Собственные же имена, как их понимают в грамматике, Фреге называет «подлинно (eigentliche) собственными именами». Собственные имена, отличные от «подлинных» или «настоящих» собственных имен, — это то, что впоследствии получило название (определенных) дескрипций или (в языках математической логики) функциональных выражений — термов. Мы знаем, что во фрегевском исчислении имелся знак, вводивший такого рода дескрипции: $\backslash\xi$; он соответствует «йота-оператору» современной математической логики; в обычном же языке типа немецкого для построения такого рода имен используется определенный артикль (предполагается, что он правильно применяется), в языках же, артиклей не имеющих (например, славянских), приходится использовать оборот «тот, который» либо опираться на контекст. Что касается «общих имен», о которых Фреге тоже говорит, то он относит их к обозначениям понятий[146].

Но вернемся к собственым именам в смысле Фреге. Это имена предметов, то есть предметных значений. О последних мы не раз уже говорили. Напомним, что ими могут быть конкретные вещи или явления эмпирического мира, но это и числа, геометрические точки или линии, классы и классы классов, истинностные значения и т.д.; что в свете фрегевской логики всякий предмет может пониматься как пробег значений некоторой функции. Однако больше того, что предмет — это то, что *не есть* функция, Фреге по существу ничего сказать не может.

---

[145] Nachgelassene Schriften, S. 243.

[146] Ср. письмо Фреге Эдмунду Гуссерлю от 24 мая 1891 г. <Briefwechsel, S. 96>.

Здесь уместно установить отношение фрегевской терминологии к современной. То, что Фреге называл значением, теперь обычно называют «экстенсионалом», «денотатом», «дезигнатом» или «референтом», а отношение именования — «отношением референции». Последнее рассматривается как ключевое понятие одного из направлений логической семантики, и Фреге по праву считают одним из главных его основоположников.

В самом деле, современные исследования двух важнейших логико-семантических категорий — отношения именования (о котором мы только что говорили) и *отношения взаимозаменимости* — восходит именно к Фреге. Мы будем исходить из того определения последнего отношения, которое дано в «Философской энциклопедии», — это «отношение между двумя языковыми выражениями, при котором замена одного другим в любом контексте данного языка (или какой-то выделенной его части) не меняет значения некоторой (для различных видов отношения взаимозаменимости различной) логической характеристики контекста»[147]. В теории Фреге логическими характеристиками являлись: *значение*, включая значение истинности, а также — здесь нам позже придется делать ряд оговорок — *смысл*, включая *мысль*. Взаимозаменяемыми же выражениями выступали собственные имена, понятийные выражения и (повествовательные, утверждающие) предложения; они же могли быть и контекстами, в которых разрешалась замена. Отношение взаимозаменимости является отношением типа равенства, и в соответствии с принципом абстракции (в явной форме введенным тем же Фреге) оно служит для выделения некоторого абстрактного объекта — объекта, воплощающего то общее, что имеется у попарно взаимозаменимых языковых выражений, — истины или лжи, значения, смысла.

Существует ряд формулировок отношения взаимозаменимости. В применении к учению Фреге один из исследователей — Франц фон Кучера формулирует его применительно к предложениям в двух формах, в одной из которых фигурирует понятие инвариантности (являющееся отношением типа равенства), а в другой — функциональная терминология. Эти принципы (Substitutionsprincipien) гласят: (I) *значение* предложения *инвариантно* относительно замены имен (шире — языковых выражений) именами (выражениями), имеющими то же значение; *смысл* предложения *инвариантен* относительно замены в нем выражений такими выражениями, которые имеют тот же смысл, и (II) *значение* предложения есть *функция от значений* входящих в него имен; *смысл* предложения есть *функция от смысла* входящих в него имен[148]. Эти принципы, в которых контекстами выступают предложения, нетрудно переформулировать для собственрных имен.

Заметим, что инвариантность относительно именной взаимозамены не запрещает *изменения смысла*, которым в случае предложений является *мысль*. То же касается первого принципа группы (II): *мысль*, которую выражает предложение, может измениться. Фреге говорит об этом так: два знака могут обозначать одно и то же, и все же по отношению к содержанию мысли в некотором предложении, в котором они встречаются, знаки эти могут быть не взаимозаменимы, так как имеют различный смысл[149]. Поэтому инвариантом подобных взаимозамен могут быть только истинностные значения, поскольку только они в этом случае остаются без изменения. В этом, собственно, и состоит фрегевское обоснование введения самой категории истинностного значения.

В статье «О смысле и значении» Фреге оставил в стороне важный вопрос о смысле *понятийных выражений*. Это вызывает некоторое удивление, так как к тому

---

[147] *Бирюков Б.* Взаимозаменимости отношение//Философская энциклопедия. 1960. Т. I. С. 250.

[148] *Kutschera*, S. 67.

[149] Nachgelassene Schriften, S. 243.

времени на этот счет у него сложился вполне определенный взгляд. Свидетельством этого является письмо Эдмунду Гуссерлю, датированное 24 мая 1891 г. (напомним, что упомянутая выше статья увидела свет в 1892 г.). Фреге разъясняет в нем всю систему разработанных им лингво-семантических отношений. «Мою точку зрения, — пишет он, — может пояснить следующая схема:

Предложение	Собственное имя	Понятийное выражение		
↓	↓	↓		
Смысл предложения (мысль)	Смысл собственного имени	Смысл понятийного выражения		
↓	↓	↓		
Значение предложения (Истинностное значение)	Значение собстственного имени (Предмет)	(Значение понятийного выражения (Понятие))	→	Предмет, подпадающий под данное понятие

Для перехода от понятийного выражения к предмету требуется одним шагом больше, чем при переходе от собственного имени к его значению — ибо понятие может быть пустым, но от этого понятийное выражение не перестает быть приложимым в науке. Я поместил обозначение последнего шага — шага, ведущего от понятия к предмету, сбоку, чтобы показать, что совершается он на том же уровне: предметы и понятия одинаково объективны <...>. Для применения в художественно-поэтической области (dichterisch) достаточно, чтобы все имело какой-то смысл, для науки же необходимо наличие значений. В своих «Основаниях [арифметики]» я еще не проводил различения смысла и значения <...>. То, что я ранее называл содержанием, подлежащим оценке, я теперь разложил на мысль и истинностное значение. Акт суждения в узком смысле можно было бы охарактеризовать как переход от мысли к истинностному значению»[150].

Здесь Фреге ничего не говорит о значении имен *функций*, но если учесть, что понятийные выражения являются частным случаем выражений функциональных, то становится ясным, что значением в этом случае является сама функция, от которой «на том же уровне» совершается переход к предметам. Примечательно, что Фреге не «объединяет» последние ни как «пробеги значений», ни как «объемы понятий» — классы.

В свете такого рода взглядов понятно, почему для Фреге была совершенно неприемлема традиция трактовать (утвердительно-повествовательные) предложения (или суждения) как состоящие из субъекта и предиката. Мы читаем у него: «Можно попытаться рассматривать отношение мысли к истинности не как отношение смысла к значению, а как отношение субъекта к предикту. Можно же сказать: "Мысль что 5 есть простое число, истинна". Однако, если посмотреть повнимательнее, мы заметим, что этим сказано совершенно то же, что и просто в предложении "5 есть простое число". Утверждение истины заключено в обоих случаях в *форме утвердительно-повествовательного предложения*»[151], которую, как мы знаем, Фреге описы-

---

[150] Briefwechsel, S. 96.

[151] В наст. книге, с. 235 < *SB*, S. 34>; курсив мой. — *Б.Б.*.

вал в терминах собственных имен и понятийных выражений, (предметных) значений и понятий, мыслей и суждений, свойств и отношений.

Поскольку для Фреге смысл имени — это тот способ, каким имя задает обозначаемый предмет (значение), то к смыслу утверждающего *предложения* следует относить то, и только то, что определяет его истинностное значение (включая факты, участвующие в конструировании смысла); подобный смысл Фреге отождествляет с *мыслью.*

Коренным свойством смыслов, в частности мыслей, является их *объективность* — независимость от того, кто формулирует суждение, кто судит, оценивает предложение с точки зрения его истинности. Этот тезис Фреге всесторонне обосновывает в первой части «Логических исследований». Процесс суждения не создает мысль; постижение, «схватывание» мысли человеком не есть ее созидание. Ибо мысль — истинная мысль — была таковой еще до того, как ее постигли и осмыслили. «Как путешественник не создает горы, когда он их преодолевает, так и тот, кто выносит суждение, не создает мысль, когда он признает ее истинной»[152]. В противном случае одна и та же мысль не могла бы быть истинной в разное время; лишилось бы смысла исследование мысли с точки зрения ее истинности; нельзя было бы говорить о «теореме Пифагора», а надо было бы выражаться «моя теорема Пифагора», «его теорема Пифагора» и т.д.[153] Но мысль может передаваться от одного человека к другому. Этим она отличается от представления, которое, будучи принадлежащим сознанию человека, сугубо личностно и другим людям не передаваемо.

Мысли не принадлежат ни к миру представлений, ни к реальному, внешнему миру. Тем не менее они объективны и составляют то, что Фреге назвал *третьим царством* (dritter Reich — «третьей империей»). Поэтому нельзя говорить об обязательности носителей для любой мысли.

Фреге обосновывает этот тезис, так сказать, от противного: «Если каждая мысль нуждается в носителе, к содержанию сознания которого она принадлежит, то это — мысль лишь данного носителя, и тогда не существует науки, которая была бы общей для многих людей и в которой могли бы работать многие; и возможно, что я имею свою науку <...>, другой человек имеет свою науку. Противоречия между двумя науками тогда невозможны; пустым занятием был бы спор об истине»[154].

В настоящее время существует ряд логических концепций, в которых рассматривается предикат «быть истиной», — предикат, с которым не связывается тех онтологических или эпистемологических допущений, которые явно или неявно предполагал Фреге. Не отвергая правомерности подобного подхода, мы должны отдавать себе отчет в его «нефрегевском» характере. «Истинно» для Фреге — это не *предикат*, так как с его точки зрения высказывание типа «Предложение p есть истина» сообщает не более, чем само предложение p; что касается связки «есть», то Фреге предлагает понимать ее как «обозначает» (то есть p обозначает истину).

Поскольку постижение смысла, «схватывание» мысли и ее истинностная оценка не создают смысловых сущностей как чего-то объективного, данного вместе с языком, мысль резко отличается от психического представления, которое субъективно, меняется от человека к человеку, зависит от времени. Поэтому Фреге трактует *значение предиката* как *понятие,* которое его выражает, — в объемной характе-

---

[152] В наст. книге, с. 350; статья «Отрицание. Логическое исследование» <*LU*II, S. 151>.
[153] В наст. книге, с. 334; статья «Мысль. Логическое исследование» <*LU*I, S. 68>.
[154] В наст. книге, с. 335 <*LU*I, S. 69>.

ризации последнего. Ф. Кучера в этой связи предлагает говорить об *экстенсиональных понятиях*[155]. Два предиката считаются выражающими одно и то же экстенсиональное понятие, если они равнообъемны. Объем, как мы знаем, есть для Фреге предмет, и его имя не может обозначать предиката; поэтому объем понятия не может быть значением предиката. Эта довольно громоздкая конструкция, объясняет Фреге, вытекает из особенностей языка. Говоря о них, Фреге, с одной стороны, подчеркивает значимость языковой гибкости, с другой же — утверждает, что логика вынуждена с этой гибкостью бороться. «То, что делает язык, — пишет он в материале «Логика в математике», — достойно восхищения <...>. Почему это оказывается возможным? Потому что мысли строятся из мыслительных строительных блоков. И эти блоки соответствуют группам звуков, из которых состоит предложение, выражающее мысль, так что конструкции (Aufbau) предложения из частей предложений соответствует конструкция мысли из частей мыслей»[156].

В «Логических исследованиях» Фреге пытается проследить этот, так сказать, строительный процесс. Он начинает с отрицания (часть вторая этих «Исследований»), отмечая, что «совсем не просто указать, что такое отрицательное суждение, отрицающая (verneidende) мысль»[157], так как мысли нельзя однозначно подразделить на отрицательные и утвердительные. В соответствии с этим он отвергает возможность двух форм суждений — утверждающих (bejahenden) и отрицающих (verneinenden). Отрицание — это составная часть мысли, без которой обойтись нельзя; ибо отрицание фигурирует, например, в суждении $\vdash \neg A \supset B$, которое не является «отрицательным». При этом отрицание всегда относится к суждению в целом, а не к его (грамматическому) предикату. Запись суждения с отрицанием имеет вид $\vdash \neg p$, что не мешает такого рода суждениям выступать как части других суждений.

Далее Фреге (в третьей части «Логических исследований») рассматривает, каким образом образуются сложные мыслительные структуры (Gedankengefüge). Эти его рассуждения носят исключительно содержательный характер, и в них средства его исчисления не используются. Ведутся они в рамках пропозициональной логики — только в четвертой, так и не законченной части Фреге трактует категорию всеобщности, то есть выходит на логику предикатов. В качестве средств анализа логических действий используется не импликация, как это было в его понятийной записи, а конъюнкция. Таким образом, он переходит к базису $\{\neg, \&\}$; при этом операция конъюнкции передается союзом «и», а отрицание — частицей «не-» (nicht) — в полном соответствии с исходной установкой «Логических исследований»: излагать логику, не обращаясь к символике его исчисления.

Фреге начинает с того, что приводит шесть видов сложных мыслительных структур, построенных, каждая, из *двух* мыслей (он обозначает их как A и B), причем сразу же указывает ряд умозаключений, которые с их помощью могут быть построены. Если мы прочитаем используемые при этом фрегевские выражения «A истинно» и «A ложно» (где A — произвольная мысль) как, соответственно, A и $\neg A$, то получим: $A \& B$; $\neg(A \& B)$; $\neg A \& \neg B$; $\neg(\neg A \& \neg B)$, то есть $A \vee B$; $\neg A \& B$; и, наконец, $\neg(\neg A \& B)$, то есть $B \supset A$, причем операция $\supset$ по-прежнему понимается в смысле материальной импликации. Для этих форм приводятся такие умозаключения, как $A, B \vdash A \& B$; $\neg(A \& B), A \vdash \neg B$; $\neg A, \neg B \vdash \neg A \& \neg B$; $A \vee B, \neg A \vdash B$; $B \supset A, B \vdash A$, где $\vdash$ есть (не использовавшийся Фреге) знак логического перехода от посылок к заключению. Учитывая, что Фреге исчерпывающим образом

[155] *Kutschera*, S. 78–79.

[156] Nachgelassene Schriften, S. 243.

[157] В наст. книге, с. 150 <*LU*II, S. 150>.

характеризует свойства содержательных «и» и «не-» и указывает, что с их помощью могут строиться мыслительные структуры, состоящие из более чем двух мыслей, получается, что он фактически доказывает *полноту системы операций* $\{\neg, \&\}$ логики высказываний. А приводимые им умозаключения в известной мере предвосхищают столь распространенные ныне в логике правила введения и исключения логических операторов (знаков логических операций).

Однако Фреге не был уверен в полноте своей схемы *вне точных наук*. Он выражает убеждение, что в математике, физике, химии, астрономии сложные мысли могут быть построены описанным им способом, если добавить еще оперирование со всеобщностью (то есть, на современном языке, правила введения и исключения квантора общности). Но, отмечает он, уже предложения цели призывают к осторожности и требуют особого изучения. Поэтому те способы построения сложных мыслей, которые им описаны, он предлагает называть *математическими* мыслительными структурами (mathematische Gedankengefüge), указывая, что для них действует принцип взаимозаменимости salva veritate — с сохранением истинности[158]. Таким образом, как и на заре своих логических исследований, Фреге при разработке *математической* логики принимает в расчет только экстенсиональный аспект.

Фреге подчеркивает, что его подход хорошо объясняет смысл предложений, выражающих *всеобщность*. Анализируя отдельные мысли, пишет он в наброске четвертой части «Логических исследований», мы выделяем в них компоненты двоякого рода: замкнутые (постоянные) и незамкнутые — «ненасыщенные». Восполнение вторых первыми представляет собой акт предикации. Меняя замкнутые компоненты мысли, мы — при данной ее «ненасыщенной» части — получаем то истину, то ложь. Эту ситуацию Фреге поясняет на примере компоненты «быть равным самому себе». Ее выражение в естественном языке сталкивается с определенной трудностью. Если предложение «Все равно самому себе» еще не искажает мысль, то предложение «Все равно всему» ее явно меняет. Поэтому стоит использовать опыт математики и записать $a = a$, где a, занимая место произвольного предметного имени, не служит ничему иному, кроме выражения всеобщности.

Подводя итог, можно сказать, что логическое учение Фреге — в его основной части — было отчетливо экстенсионально. В случае понятийной записи это вытекает из его принципа (V) и его словесных фрмулировок. Во фрагменте же «Размышления о смысле и значении» Фреге говорит: «То, что означают два понятийных слова, тогда, и только тогда, есть одно и то же, когда объемы соответствующих понятий совпадают <...>. Тем самым <...> взгляды сторонников объемной точки зрения в логике получают серьезную поддержку»; то, что представители «логики содержания» называют содержанием, продолжает он, есть смысл. «Они не понимают, что логике нет дела до того, как одни мысли вытекают из других, если не учитываются истинностные значения <...>, что логические законы — это прежде всего законы в области значений, которые лишь опосредованно относятся к смыслу»[159].

Косвенные контексты

То, что выражения языка в разных контекстах могут иметь различное значение, вещь общеизвестная. Это обстоятельство, однако, не принималось Фреге во внимание при разработке труда 1879 г.: реализованный в «понятийной записи» экстенсиональный подход был, так сказать, внеконтекстным. Но уже при создании «Осно-

---

[158] См. в наст. книге, с. 370 <*LU* III, S. 51>.

[159] В наст. книге, с. 250–251, материал «Размышления о смысле и значении» <*NS*, S. 133>.

ваний арифметики» (1884), где фрегевское логическое исчисление не используется, иенский мыслитель формулирует то, что можно назвать *принципом контекстуальности* (или *контектности*). Мы читаем: «Ставить вопрос о значении слов надо, учитывая их взаимосвязь»; «Только в контексте некоторого предложения слова нечто означают»[160]. Заметим, что это писалось, когда Фреге не различал еще смысл и значение: в «Основаниях арифметики» слова «значение», «смысл», «содержание» употребляются как равнозначные. Однако идея «контекстуализации» в этом труде не получает систематического развития, хотя у читателя и создается впечатление, что с точки зрения автора не компоненты предложения определяют его смысл, а, наоборот, смысл входящих в предложение слов вытекает из его смысла как целого. Ибо у Фреге черным по белому написано: «Достаточно того, что предложение как целое имеет некий смысл; тем самым содержание (Inhalt) получают и его части»[161].

После «Оснований арифметики» Фреге уже не возвращается к принципу контекстности в том его виде, в каком он намечен в этом труде. И понятно почему: для задач, которые призвано решать его логическое исчисление, этот принцип — в столь общей фрегевской формулировке, какую мы привели,— по-просту не нужен. И в языке его «записи в понятиях» нет никаких контекстно-зависимых законов или правил.

Было бы, однако, неверным считать, как полагает М. Даммет[162], что контекстуальность совсем не учитывалась Фреге в последующих его работах. Фреге не снимает принцип контекстуальности, а лишь сужает и вместе с тем уточняет его в рамках своего учения о смысле и значении.

Суть дела в следующем. Принцип взаимозаменимости salva veritate для значений распространяется им и на сложноподчиненные предложения, то есть предложения, содержащие как свои части придаточные предложения. Некоторые из них, будучи выделены из сложного предложения, сами представляют собой самостоятельные предложения. Такого рода придаточные предложения употребляются непрямым — *косвенным*— образом, и тогда они имеют косвенное же значение. Таковым оказывается не значение истинности, а то, что, если бы подобные предложения были выделены из сложного и употреблены обычным, прямым — не косвенным — образом, было бы их *смыслом*. Таким образом значение (придаточного) предложения оказывается зависящим от контекста.

Фрегевский подход к этому вопросу четко виден на примере предложения, которое анализируется в статье «О смысле и значении»[163]: «Бебель воображает, будто *посредством возврата Эльзас-Лотарингии можно ослабить реваншистские устремления Франции*» (обозначим это предложение буквой Б). Слова, набранные курсивом, не имеют истинностного значения, их значением, по Фреге, является высказанная Бебелем *мысль*. Если бы данное придаточное предложение было употреблено вне сложноподчиненного предложения, то в нем название «Франция» могло бы быть заменено *salva veritate*, скажем, выражением «страна, некогда бывшая римской провинцией Галлия». Но если подобную замену произвести в предложении Б, то возникло бы предложение (Г): «Бебель воображает, будто посредством возврата Эльзас-Лотарингии можно ослабить реваншистские устремления страны, некогда бывшей римской провинцией Галлия». Однако сомнительно, что вождь германской социал-демократии времен Фреге, предлагая вернуть Франции некогда отторгнутую от нее в результате Франко-германской войны 1870 г. территорию, думал о

---

[160] Grundlagen, S. XXII, 73.
[161] Ibidem, S. 71.
[162] *Dummett*, 1973, 1981.
[163] В наст. книге, с. 244–245 <*SB*, S. 47–48>.

Франции как о бывшей римской провинции. Приняв истинность предложения Б, мы вряд ли можем признать таковую и за предложением Г. Замена *salva veritate* не проходит.

Это — так называемая *антиномия отношения именования*, возникающая в результате того, что контексты, содержащие косвенно употребляемые выражения, рассматриваются так же, как и контексты, таких выражений не содержащие. Фреге имел в виду подобные ситуации, хотя и не говорил об их антиномичности.

В современной логике подобные контексты относят к категории *интенсиональных*. Таковыми, в частности, являются контексты (предложения), в которых используются обороты «X полагает, что», «X утверждает, что», «X верит в то, что» и т.п., а также «Необходимо, что», «Возможно, что»[164]. Термин «антиномия» здесь, однако, имеет особый смысл, которой будет раскрыт ниже. Пока же заметим, что речь идет о контекстах, содержащих выражения, которые, не обладая истинностным значением, тем не менее осмысленны, — передают некоторую *мысль*, или, говоря языком, введенным Р. Карнапом, *интенсионал*.

Расселу принадлежит известный пример антиномии отношения именования фрегевского типа. Однажды английский король Георг IV на одном из приемов, обращаясь к известному писателю Вальтеру Скотту, предложил тост: «За автора [повестей] Waverлея!»[165] Поскольку Вальтер Скотт скрывал свое авторство, тост этот можно понять как суждение (предложение): «Король Георг IV пожелал узнать, является ли Вальтер Скотт автором [повестей] Ваверлея»[166]. Если в этом *истинном* суждении заменить имя «автор [повестей] Ваверлея» на имя с тем же (предметным) значением — «Вальтер Скотт», то получится суждение: «Король Георг IV пожелал узнать, является ли Вальтер Скотт Вальтером Скоттом», которое без сомнения *ложно*.

Косвенно в некий контекст могут входить не только такие специфические имена, как предложения (суждения), но и другие выражения. Примером может служить предложение «Необходимо, что 9 = 9»[167], замена в котором одного или обоих вхождений имени «9» на равнозначное ему имя «число планет Солнечной системы» из истины порождает ложь (поскольку число планет Солнечной системы нельзя отнести к необходимым фактам). Другим примером косвенного вхождения имени в предложение может служить «местоположение Трои» в составе предложения «Шлиман искал местоположение Трои»[168], поскольку это истинное суждение превращается в ложное, если в нем «местоположение Трои» заменить равнозначным именем «холм Гиссарлык».

Вообще, из теории Фреге следует, что собственное имя употреблено косвенно, если его значением (в данном контексте) становится то, что было бы смыслом (мыслью — в случае предложений) при его прямом употреблении. Можно сказать, что Фреге *решает* антиномию отношения именования, положив: если замена некоторого выражения в заданном контексте равнозначным ему выражением из истины порождает ложь, то выражение это в этом контексте имеет своим значением свой обычный смысл.

Рассматриваемая Фреге ситуация антиномична еще и в следующем отношении. Вернемся к предложению Б. Если считать значением придаточного предложения в

---

[164] Их изучением занимаются эпистемическия и модальная логики, однако, мы не можем здесь вдаваться в этот вопрос.

[165] На это шотландский писатель ответил: «Сир, я не автор [повестей] Ваверлея».

[166] См.: *Чёрч*, с. 18–19 и 342.

[167] Это — видоизмененный пример, который использовал В. О. Куайн.

[168] Предложение это было использовано А. Чёрчем, хотя и в несколько иной связи. См.: *Чёрч*, с. 245. Заметим, что имя «Троя» в данном предложении также употреблено косвенно.

32 - 1742

высказанном Бебелем суждении истинностное значение «истина», то возникает следующий парадокс: получается, что, коль скоро Бебель убежден в истинности своей мысли, он должен — если это его убеждение отнести к (предметному) значению — быть убежденным *во всяком* истинном предложении: ведь все они имеют одно и то же значение истинности. Но допущение, будто Бебель столь доверчив, что убежден в истинности даже тех суждений, которые ему не известны, нелепо.

Описанная выше ситуация служит подтверждением подхода Фреге. Однако предложение Б — с учетом смысла фигурирующих в нем слов *воображает, будто* — оказывается все-таки противоречивым. Дело в том, что выделенные курсивом слова несут в себе то, что называют сопутствующим смыслом. Смысл этот состоит в признании мысли, высказанной Бебелем, *ложной* (как показано во Введении, это согласуется с политическими убеждениями Фреге). Получается, что одно и то же вхождение соответствующего придаточного предложения в сложноподчиненное предложение Б имеет сразу два *разных* значения: *мысль* Бебеля в одном случае и истинностное значение «ложь» — в другом.

Во всяком случае Фреге четко продемонстрировал зависимость *значений* выражений от контекстов (определенного рода, а именно, сложных предложений), в которые они входят. Для *смыслов* (в частном случае — *мыслей*) он этого не сделал: не ясно, что, например, следует считать смыслом придаточного предложения, входящего в Б. Быть может, таковым является выражение «смысл слов *посредством возврата Эльзас-Лотарингии можно ослабить реваншистские устремления Франции*»?[169] У Фреге ответа на этот вопрос нет.

Ф. фон Кучера склонен истолковывать фрегевские смыслы (имен, предложений, предикатов) весьма узко — так что два выражения равноосмыслены тогда, и только тогда, когда они *синонимичны*. Тогда возможна взаимозаменимость *salva veritate* в *любых* контекстах (данного языка).

Что, однако, следует считать синонимами? Являются ли, скажем, имена «2» и «наименьшее простое число» синонимами? Если мы это признáем, то натолкнемся на следующую трудность. Окажется, что предложения «Длина этого стержня 2 м» и «Длина этого стержня есть наименьшее простое число» — эти предложения рассматриваются Фреге, правда в другой связи, — должны быть одинаковы по смыслу. Но косвенное их употребление сразу же обнаруживает их смысловое различие. Действительно, образуем предложение «Ганс считает, что длина этого стержня 2 м» и допустим, что оно истинно. Тогда, в силу принципа *salva veritate* для смыслов должно быть истинным и предложение «Ганс считает, что длина этого стержня в метрах есть наименьшее простое число». Но это предложение вполне может быть ложным — Гансу может быть не известен соответствующий математический факт или он может думать, что наименьшим простым числом является единица.

Могут возразить, что выражения «2» и «наименьшее простое число» — не синонимы. Но тогда мы можем предложить выражение, которое бесспорно синонимично второму из названных выше имен: «простое число, которое меньше всех остальных простых чисел» — и предложить заменить им выражение «наименьшее простое число» в предложении «Ганс произнес фразу *два есть наименьшее простое число*». Очевидно, что если это предложение истинно, то после упомянутой замены мы получим ложь.

Таким образом, антиномия отношения именования (в данном языке) простой ссылкой на интенсиональность соответствующих контекстов не разрешается. На деле речь идет о целом ряде трудностей. Естественно, что, имея их, так сказать, на

---

[169] Это соответствует точке зрения А.Чёрча (см.: *Чёрч*, с. 346).

заднем плане, Фреге ограничил свое логическое исчисление экстенсиональным языком, считая его достаточным для обоснования математики. Вопрос о каком-либо неэкстенсиональном языке Фреге не просто не ставит — он прямо отвергает «логику содержания». Его содержательный подход, развитый им в «Логических исследованиях», есть просто изложение экстенсиональной логики средствами, не использующими языка исчисления понятий. Вместе с тем он вносит ясность в отдельные неэкстенсиональные аспекты языковых феноменов, например скрупулезно выявляет «интенсиональность» — в статье «О смысле и значении» — различных видов придаточных предложений естественного (а именно немецкого) языка. Здесь он демонстрирует «механизм действия» так называемых пропозициональных установок, неявно указывая тем самым возможные направления дальнейших исследований.

Трудности в семантике и онтологии Фреге

Фреге не ставил задачу создания всесторонней логико-семантической и онтологической концепции. Категории, которые впоследствии вошли в «золотой фонд» логический семантики, нужны были ему лишь в той мере, в какой этого требовало его логическое исчисление и применение последнего к арифметическому содержанию. Отсюда ряд уязвимых пунктов и недоговоренностей, которыми отмечено его изложение. О некоторых связанных с этим трудностях мы уже говорили. Продолжим этот разговор.

Как мы знаем, в последний период своего творческого пути Фреге задумывает развернуть цельную картину разработанного им логического учения — он пишет «Логические исследования». Начинаются они с возврата к уже рассматривавшемуся им понятию *мысли* как *смысла* утвердительно-повествовательного (утверждающего) предложения. Главный акцент при этом делается на *объективности* смыслов и мыслей. Проводится различие между *реальным* (действительным) и *объективным*, причем в случае мыслей их объективность реализуется в их бытии как истин (Wahrsein). И это несмотря на то, что *ложные* предложения, с его точки зрения, тоже выражают мысли. Он говорит: осмысленно и то, что истинно, и то, что ложно. Поэтому, говорит Фреге, можно сказать: мысль есть смысл предложения, *не утверждая этим, будто смысл каждого предложения есть какая-то мысль*[170]. Ниже мы скажем о том, что Фреге признает осмысленными, например, и повелительные предложения.

Вопрос о *ложных* мыслях естественно приводит его к проблеме *отрицания*. Рассматривая ее, он как раз и исходит из того, что существуют не только истинные, но и ложные мысли. Каков же их онтологический статус? Ложная мысль, говорит Фреге, «*не есть несуществующая* мысль <...>. Ложная мысль должна быть признана если не истинной, то все же иногда незаменимой: во-первых, как смысл вопросительного предложения; во-вторых, как составная часть некоей гипотетической связи мыслей; в-третьих, при отрицании»[171].

Что касается *истинности* мысли, то, например, в «Основных законах арифметики» мы находим утверждение о том, что мысль, содержащаяся в предложении, — здесь имеются в виду прежде всего предложения его логического исчисления, — устанавливается путем указания условий ее истинности: как мы уже говорили, смысл в этом случае состоит в том, что эти условия выполняются. Однако проследить «смысловую цепочку» используемых им категорий даже в формализованном им логико-арифметическом языке не просто. Тем более это касается его логического

---

[170] В наст. книге, с. 334 и далее. (Курсив мой. — *Б.Б.*)

[171] Там же, с. 346. (Курсив мой. — *Б.Б.*)

учения в целом. Тем более, что пригодных критериев равенства смыслов предложений — заключенных в них мыслей — он так и не предложил. Здесь добавим, что в воздухе повисает и вопрос о том, объективны ли ложные мысли, и если да, то как можно понять их объективность.

Не получает у Фреге убедительного ответа и вопрос о смысле «подлинно» собственных имен, то есть имен, не являющихся дескриптивными выражениями. Каков, например, смысл «настоящего» собственного имени «Аристотель», которым Фреге оперирует в статье «О смысле и значении»? Как можно себе представить, что личность Стагирита *задана* смыслом этого имени? И в чем состоит его смысл? В том, что (предметным) значением этого имени является то, что соответствующая личность зовется этим именем, как предлагает считать А. Чёрч[172]? Сам Фреге не разделяет этой банальной точки зрения. Он предлагает считать таковым смысл дескриптивных выражений, относимых к тому же предмету. Например, смыслом имени «Аристотель» может быть «ученик Платона и воспитатель Александра Великого»[173]. В «Логических исследованиях» Фреге много места отводит обсуждению вопроса, как одно и то же «подлинно» собственное имя может разными людьми пониматься по-разному. Различное понимание означает различное осмысление. Но где же у Фреге критерии равенства — а значит, и неравенства — смыслов?

Очень ясно трудность подобной ситуации отражена в письме Фреге Филиппу Жордану[174]. Фреге описывает следующую воображаемую ситуацию. Два исследователя с разных сторон наблюдают какую-то неизвестную дотоле снежную вершину, и один из них узнает от местных жителей, что она называется «Альфа», а другой — что ее название «Атеб»; дальнейшие исследования показывают, что «Атеб есть Альфа». Это предложение — в отличие от предложения «Атеб есть Атеб», которое просто выражает принцип тождества, — содержит все же определенное географическое знание. «Предмет, — заключает Фреге, — может быть задан (bestimmen) по-разному, и эти разные способы задания могут привести к различным именам, а тогда они имеют разный смысл; ибо то, что заданное по-разному на деле есть один и тот же предмет, — не очевидно». Когда вопрос об очевидности снят, это служит, конечно, расширению знания, но, спрашивается, в чем же все-таки состоит *объективность* смыслов имен «Альфа» и «Атеб»?

В первой части «Логических исследований» («Мысль») мы находим более развернутое рассмотрение подобной ситуации. В ней фигурирует некий Густав Лаубен. Один человек может понять его имя в том смысле, что это «тот доктор, который проживает в определенной квартире», тогда как другой — в смысле «лицо, которое родилось 13.9.1875 г. в *NN*». С каждым из этих имен связан свой смысл, почему такое, например, предложение, как «Доктор Густав Лаубен был ранен», выражает для них различный смысл. Эту смысловую неопределенность Фреге считает особенностью обычного языка и требует ее устранения в языках науки, где каждое выражение должно иметь четко определенный и не зависящий от субъекта — интерсубъективный — смысл. Но ведь смыслы предложений естественного языка, подобных приведенному выше и большому числу других, фигурирующих в статье «О смысле и значении», это *мысли*, и как таковые они должны иметь онтологический статус объективности

Не приводит Фреге и убедительных критериев отождествления смыслов дескриптивных выражений, предложений, понятий, предикатов. Все «замыкается» на

---

[172] *Чёрч*, с. 342.
[173] В наст. книге, с. 231, статья «О смысле и значении» <*SB*, S. 27>.
[174] Briefwechsel, S. 128.

значениях. Скажем, когда два *предложения* выражают одну и ту же мысль? В статье «О смысле и значении» этот вопрос не получает ответа, но в письме к Э. Гуссерлю от 9 января1906 г. Фреге, говоря о необходимости какого-то объективного критерия для «опознавания мысли как той же самой, так как без этого невозможен логический анализ», пытается такой критерий нащупать. Для двух предложений *А* и *В*, не содержащих «логически очевидных составных частей» (то есть компонентов аналитического типа), он предлагает считать таковым совпадение их истинности либо ложности, обнаруживающейся в результате акта суждения (beurteilbar sein) относительно содержаний этих предложений; «это я называю, — пишет Фреге, — мыслями, выражаемыми как предложением *А*, так и предложением *В*»[175]. Но акт суждения, реализующийся личностью, — пусть он и отличен, как говорит Фреге, от психических настроений, эмоций и представлений, — трудно считать чем-то объективным.

Фрегевское различение смысла и значения — уже в статье «О смысле и значении» — может дать повод к допущению бесконечной иерархии смыслов. Для каждой онтологической сущности, по Фреге, можно ввести ее имя, а оно должно иметь смысл; последнему в свою очередь можно дать имя — и так возникает неограниченная «башня» смысловых содержаний, которые никак не определены. Иерархию смыслов, вытекающую из концепции Фреге, попытался эксплицировать А. Чёрч[176], но эту его попытку, хотя она и сопровождается формальным построением, следует признать не очень успешной: смысловые содержания более высоких уровней не получают у Чёрча должной характеризации[177]. Тем более это касается значений, задаваемых этими смыслами. Ведь уже в случае косвенного употребления предложения Фреге не говорит об его значении. Это ясно видно, например, из следующей таблицы, приведенной Карнапом в его записи лекций Фреге[178]:

Знак	Собственное имя	Предложение	Понятийное слово	Предложение в косвенной речи
Смысл	Смысл собственного имени	Мысль	Смысл понятийного слова	
Значение	Предмет	Значение истинности	Понятие	Мысль

В этой таблице клеточку для значения предложения в косвенной речи Фреге оставил пустой.

Еще одна трудность связана с неявно фигурирующим у Фреге допущением, что всякий предмет может быть поименован. Это фрегевское положение не проходит для элементов бесконечных несчетных множеств, поскольку имена в любом языке образуют лишь счетное множество.

Подвергая логическому анализу естественный язык, Фреге, конечно, учитывает его богатейшие выразительные и коммуникативные возможности. Как мы уже отмечали, это приобретает у него форму отграничения *мысли*, которую выражает некоторое предложение, от ее «окраски», от оповещения о ней других людей и от обращения к ним. Здесь Фреге продолжает ту традицию логико-семантического «пре-

[175] Ibidem, S. 105–106.
[176] *Church*, 1943, 1951.
[177] См.: *Kutschera*, S. 87.
[178] *Carnap* — Mitschrift, S. 16.

парирования» языка, которая представлена в известном труде Дж. Ст. Милля «Система логики» (1843). Английский мыслитель проводит в нем различение *означения* и *соозначения* имен. Означение есть *прямое* именование предмета, соозначение — косвенное указание на него путем сообщения о его признаках. Редактор русского перевода книги Милля — В. И. Ивановский в примечании к соответствующему месту текста Милля поясняет: «*Означение* (denotation) имени есть то же, что другие логики называют *объемом*, *широтою* и т.п. термина; *соозначение* (connotation) соответствует *содержанию*, *интенсивности*»[179].

Фреге учитывает это различие и в связи с проблемой смыслового тождества предложений отличает *мысль* от *содержания* предложения, которое часто более «нагружено» коннотациями, чем она[180]. Отделить «означение» от «соозначения» — коннотации важно для мысли потому, что она, и только она, определяет истинностное значение предложения. Поэтому Фреге и прослеживает различные формы утвердительно-повествовательных предложений — например употребление их в активном и пассивном залогах или замену в предложении глагола «давать» (требующего дательного падежа) глаголом «получать [от]», предполагающего (в немецком языке) именительный падеж (а в русском винительный), — с тем чтобы уловить единство смысла в его отличии от «окраски», коннотации. Конкретные его решения здесь подчас не очень убедительны. Так, в третьей части «Логических исследований» он отождествляет смыслы формул A, $\neg\neg A$, $\neg(\neg A \& \neg A)$ и $A \vee A$[181]. «К содержанию предложения A, — говорит Фреге в письме к Э.Гуссерлю, — можно, конечно, отнести очень многое, например настроение, чувства, представления; но обо всем этом нельзя судить как об истинном или ложном»[182]. Это «многое» Фреге специально не анализирует, ограничиваясь выражением убеждения, что для логики оно не важно.

В общем контексте разграничения «денотации» и «коннотации» находит свое место и фрегевское различение разных видов предложений. Логика принимает во внимание только такие их виды, относительно которых можно ставить вопрос об их истинностном значении. Подобные предложения выражают *мысли*. Повелительные предложения тоже имеют смысл, но он не таков, чтобы спрашивать об их истинности, поэтому мыслей они, по Фреге, не содержат. То же справедливо и относительно предложений, выражающих пожелания, просьбы, а также восклицаний, в которых находят выход определенные чувства. Сложнее обстоит дело с предложениями, в которых имеются вопросительные слова. Это, по Фреге, неполные предложения, которые, однако, после требуемого восполнения приобретают подлинный смысл, то есть становятся выражением мысли. Что касается предложений-вопросов, то есть предложений, предполагающих ответ «да» или «нет», то, коль скоро ответы такого рода даются, это приводит к утвердительно-повествовательным предложениям, выражающим мысли.

Рассматривая языковые «коннотации», Фреге обращает внимание на роль таких выражений, как «здесь», «там», «сегодня» и т.п.[183]. С помощью подобных «индекс-

---

[179] *Милль Дж. Ст.* Система логики, силлогистической и индуктивной/Пер. с англ. М., 1914. С. 27. Вместо термина «интенсивность», фигурирующего в переводе В.И. Ивановского, мы сказали бы теперь «интенсиональность». Заметим также, что в своих дистинкциях Милль только восстанавливает забытую в Новое время традицию, существовавшую в средневековой схоластической логике.

[180] Ср. в наст. книге, с. 331; см. также: *Kutschera*, S. 78.

[181] В наст. книге, с. 368–369 <*LU*III, S. 49–50>. Напомним, что в этой работе Фреге не пользуется логической символикой и, например, вместо $\neg\neg A$ пишет «не-(не-A)».

[182] Briefwechsel, S. 105–106.

[183] См. в наст. книге, с. 330 и далее <*LU*I, S. 63 f>; ср. также Grundgesetze I, S. XVI f).

ных» выражений, как их называют теперь, потенциальная мысль вводится в контекст обстоятельств своего внешнего выражения; обстоятельства эти могут касаться и лица, высказывающего предложение, и указаний на время и место. Только в том случае, когда ситуационный контекст устраняет «индексность» предложения, оно становится выразителем определенной мысли[184].

Вдумываясь в эти рассуждения Фреге, мы должны постоянно иметь в виду следующие соответствия, предполагающиеся в его логической семантике и эпистемологии:

«1) построение мысли — мышление,

2) признание истинности некоторой мысли — акт суждения,

3) оглашение этого суждения — процесс утверждения [мысли]»[185].

В целом фрегевское разграничение смысла и «окраски» (коннотации, соозначения) языковых выражений, в частности предложений, далеко от однозначности. Бесспорна, однако, значимость самого этого противопоставления: *мысли* и ее *«окраски»*, значения и соозначения, мысли как таковой — и ее внешнего представления и сообщения другим людям. В первой части «Логических исследований» Фреге подробно обсуждает связанные с этим вопросы. Он подчеркивает, что утвердительно-повествовательное (утверждающее) предложение часто содержит, кроме мысли и ее утверждения, «нечто третье, на что не распространяется утверждение». Подобные составные части предложения в наибольшей мере представлены в поэзии, художественной литературе; «все [такого рода] составные части предложения, на которые не распространяется его утверждающая сила, не относятся к научному изложению». Несмотря на это они могут содействовать приближению к «мысленно неуловимому, когда используются догадки, предчувствия». Высказывая предложение «Альфред[186] еще не пришел», мы, собственно говоря, сообщаем, что «Альфред не пришел», и вместе с тем «даем понять»: мы ожидаем его прихода; однако это только подразумевается. Таким образом, заключает Фреге, «содержание предложения нередко превосходит содержание той мысли, которая в нем выражена»[187].

Ни в статье «О смысле и значении», ни в «Логических исследованиях», ни в других работах, где затрагиваются вопросы, относящиеся к языку, Фреге не пытается развить сколько-нибудь общую философско-лингвистическую теорию. Но признавая логику объема единственно важной для обоснования арифметики, он вместе с тем принимает во внимание немало из того, что впоследствии стало предметом разработки в интенсиональных, эпистемических и модальных теориях. Мы знаем теперь, что создание такого рода теорий означало существенный шаг вперед по сравнению с экстенсиональной логикой. Но шаг этот оказался важен не столько для математической логики и ее приложений к вопросам оснований математики (чем был озабочен Фреге), сколько для логического анализа естественных языков, изобилующих «коннотациями» и непрямыми контекстами, а также для уяснения некоторых черт языка таких наук, как физика. Но все это следует отнести к «нефрегевскому» этапу развития логической науки.

---

[184] Различение предложений и их внешнего выражения впоследствии получило развитие в логических исследованиях языковой коммуникации, например у И. Бар-Хиллела; см.: *Kutschera*, S. 77.

[185] В наст. книге, с. 329 <*LUI*, S. 62>. Вообще можно смело сказать, что Фреге предвосхитил многие аспекты того, что впоследствии вошло в теорию интеллектуальной коммуникации, в частности в теорию «речевых актов» Дж. Остина и Дж. Серля (J. L. Austin, J.R. Searle).

[186] Напомним (см. Введение), что это было имя приемного сына Фреге.

[187] Там же, с. 331 <*LUI*, S. 64>.

Последние мысли великого логика

Во Введении мы рассказали о судьбе архива Фреге и кратко осветили то новое, что его манускрипты вносят в понимание взглядов иенского мыслителя на завершающем этапе его творческого пути.

В рукописях Фреге не раз встречаются рассуждения о сущности логики и логической стороны мышления — в отличие от психологической. В материале «Логика» (1897) он уточняет свое понимание логики, характеризуя ее как «науку о *наиболее общих* законах бытия истины»[188]. К типичному для Фреге противопоставлению «законов бытия истинного» (Gesetze des Wahrseins) психологически трактуемым «законам мышления» (Gesetze des Denkens) присоединяется различение *всеобщих* и *специальных* законов истинностного бытия. К логике, согласно его взглядам, относится только «наиболее общее», имеющее силу для всех областей мышления. Однако проведение жесткой грани между логическим — относящимся ко всеобщим законам бытия истинного, не зависящим от времени и пространства, — и психологическим столкнуло Фреге, этого неутомимого борца против психологизма в логике, с некоторыми трудностями, поскольку психологическое тесно связано с формами обычных языков, а именно в этих последних находят свое выражение законы логики. Преодолению такого рода трудностей и служило уже описанное нами учение Фреге об *определениях*. Этому вопросу, как мы отмечали, он посвятил значительную часть второго тома «Основных законов арифметики». А в материалах его архива была обнаружена большая статья «Логика в математике» (написана весной 1914 г.), где мы находим, пожалуй, наиболее полное изложение взглядов Фреге на определения. По Фреге значения слов устанавливаются двумя способами: путем объяснений (Erläuterungen) и с помощью подлинных определений — дефиниций, которые представляют собой простые *сокращения*. Поскольку система сокращений не может уходить в бесконечность, должны иметься некоторые простые или первоначальные термины. Но как они уясняются? С помощью объяснений на *естественном* языке. С последним же для логики связаны немалые трудности.

Здесь мы должны вспомнить, что Фреге в свой основной творческий период — период, когда он был убежден в осуществимости своей программы *чисто логического* обоснования арифметики (и анализа), — был, так сказать, логицистом не до конца. Уже тогда Фреге не охватывал своим замыслом геометрию, приписывая ей особый познавательный источник — не логический, а основанный на созерцании, наглядной данности ее объектов.

Все это позволяет понять тот итог, к которому Фреге пришел в своих последних — неопубликованных! — работах, относящихся к 1924/25 гг. Во-первых, Фреге признает: он вынужден отказаться от взгляда, что арифметика является ветвью логики и что поэтому в арифметике все должно доказываться чисто логически. Во-вторых — и это для нас сейчас наиболее важно — он подчеркивает значение «борьбы» (это его собственное выражение) с естественным языком. В одной из своих незаконченных статей, написанных незадолго до смерти, — «Познавательные источники математики и математического естествознания», — констатируя конфликт между обычным языком и мышлением, Фреге ставит вопросы: «Как возможно, чтобы мышление вступало в спор с языком? Не является ли это спором, который мышление ведет с самим собой? И не пропадает ли из-за этого сама возможность мышления?»[189] В поисках ответа он проводит различение между «словесным язы-

---

[188] В наст. книге, с. 307 <Nachgelassene Schriften, S. 139>. (Курсив мой. — *Б.Б*).

[189] Nachgelassene Schriften, S. 298.

ком» и «языком математических формул». Последний — такое же создание людей, как и обычный язык, однако отличается от него тем, что позволяет избегать навязываемых языком логических ошибок.

В свое время, в труде 1879 г., Фреге писал: «Если задача философии — сломить господство слова над человеческим духом (Geist), раскрывая заблуждения, касающиеся отношений между понятиями, которые часто почти неизбежно возникают из-за употребления языка, освободить мысль от того, что навязано ей лишь свойствами словесного способа выражения, — то мое исчисление, будучи с этой целью далее усовершенствовано, может стать для философов полезным орудием»[190]. Теперь, после десятилетий исследований, он приходит к заключению, что «сами математики очень подвержены влиянию языка»[191], что этого искажающего воздействия не всегда можно избежать. И мы понимаем — почему: та цепочка дефиниций-сокращений, о которых Фреге говорит, развивая свое учение об определениях, упирается в объяснения слов, которые даются на естественном языке.

Описанный ход мысли приводит Фреге — этот поборника объективного вне времени и пространства — к гносеологическим и лингвистическим рассмотрениям. Он развивает некий вариант учения об «источниках познания», на основе которых возникают суждения как носители истинности. Им выделяются *чувственный*, *логический* и *геометрический* познавательные источники. Анализируя первые два, он большое внимание уделяет тому, как они — вместе с языком — способствуют возникновению ошибок и заблуждений. Главное значение Фреге придает геометрическому источнику познания, не зависящиму, как он считает, от чувственного и логического. Поздние манускрипты Фреге — упомянутая выше незаконченная статья, материалы «Числа и арифметика», «Новая попытка обоснования арифметики» (всех их издатели фрегевского «Наследия» датируют 1924/25 гг.) — свидетельствуют о том, что Фреге все решительнее склоняется к мысли, что познавательный источник математики заключен в геометрии. Издатели материалов фрегевского архива считают, что произошло это под влиянием идей Канта, философии которого Фреге в последние годы своей жизни уделял много внимания[192]. И в самом деле, мысль о том, что логика, имеющая дело с *формами*, не позволяет познавать *предметы*, что для этого нужно непосредственное созерцание, — несомненно кантовская.

Геометрический познавательный источник, считает теперь Фреге, менее всего подвержен «загрязняющему» мышление влиянию языка и обладает той сильной стороной, что из него «вытекает бесконечное в подлинном и наиболее строгом смысле этого слова»[193], то есть актуально бесконечное. Окончательный вывод, к которому приходит Фреге, таков: «арифметика и геометрия, а значит, и вся математика проистекают из одного и того же, а именно геометрического источника познания, который тем самым получает ранг собственно математического познавательного источника, причем, конечно, логический источник познания всегда действует вместе с ним»[194].

Эти слова показывают, почему Фреге в принципе не мог принять ни теории типов Б. Рассела, ни финитизма Д. Гильберта, ни предикативизма Г. Вейля, ни интуционизма Л. Э. Я. Брауэра, ни того подхода к обоснованию математики, кото-

---

[190] В наст. книге, с. 67 <Begriffsschrift, S. XII f>; ср. также с. 349 <*LU*II, S. 370>.

[191] Nachgelassene Schriften, S. 289.

[192] См.: *Kaulbach F.* Der neue Ansatz und die Geometrische Erkenntnisquelle//Nachgelassene Schriften, S. XXXI f.

[193] Nachgelassene Schriften, S. 293.

[194] Ibidem, S. 299.

рый ныне называется конструктивным. Впрочем, кроме подхода Рассела, остальные направления философии математики, складывавшиеся в начале XX в., остались, как это следует из материалов его архива, ему не известными. Это касается даже Гильберта, первые публикации которого по основаниям математики были для Фреге, разумеется, слишком «формалистичными», а работа, в наиболее ясной форме представлявшая Гильбертов финитизм и могла бы быть воспринята Фреге как нечто ему более близкое — доклад «О бесконечном», прочитанный великим математиком в Мюнстере, не мог стать известен Фреге, так как он был сделан всего за 22 дня до кончины последнего (опубликован же был только в 1926 г.)[195]. Что уж тут говорить о концепциях Брауэра и Г. Вейля или о становлении рекурсивной математики. Можно сказать, что, за исключением некоторых вопросов теории множеств (связанных с антиномиями), Фреге в последнее десятилетие своей жизни по существу не следил за развитием философско-математических и математико-логических исследований.

В своих поздних работах Фреге говорит о «детских числах» (Kleinkinder-Zahlen), то есть числах, с которых начинается приобщение детей к математике и которые в определенном смысле близки «конструктивным объектам» математиков-конструктивистов середины XX в. С такого рода чисел Фреге сам начинал, строя свою теорию арифметики, однако теперь он пришел к выводу, что ничего путного с их помощью сделать нельзя. Отправляясь от «детских чисел», невозможно прийти к геометрии с ее актуально бесконечным. «Чем больше я размышлял, — пишет Фреге во фрагменте «Числа и арифметика», — тем все более убеждался в том, что геометрия и арифметика выросли на одной и той же почве, а именно геометрической, так что вся математика есть, собственно говоря, геометрия»[196]. Как пишет Ф.Камбартель — автор одной из вводных статей к изданию «Наследия» Фреге, последнему кажется, что «проблема актуально-бесконечного в геометрии проще, и в конце концов он пытается дать определение сразу комплексных чисел, используя отношения направленных отрезков на плоскости»[197] с тем, чтобы на этой основе затем построить арифметику. Однако замысел этот не вышел из стадии общей идеи. Подобно Канту, рядом с пространством Фреге ставит теперь время и считает, что последнему тоже «соответствует некоторый источник познания, и из него мы тоже черпаем бесконечное. Бесконечное в обе стороны время похоже на бесконечную в обе стороны прямую»[198]. Следует согласиться с выводом автора упомянутой статьи, что взгляды Фреге эволюционировали в сторону кантовского понимания математики, в частности, в сторону признания синтетическими суждениями *a priori* не только геометрических, но и арифметических суждений.

Здесь мы наблюдаем определенное сближение воззрений Фреге и Гильберта. Мы ограничимся цитатами из последнего: «никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор» своим учением о бесконечных множествах, —«содержательная логика необходима и незаменима»[199]; «Кант был классическим представителем <...> точки зрения, что помимо логики и опыта мы обладаем еще и некоторыми априорными знаниями о действительности <...>, для построения арифметики нам необходима определенная априорная установка <...>, философская задача — *a priori* зафиксировать эту созерцательную установку»[200].

---

[195] В русск. пер.: *Гильберт Д.* О бесконечном//Гильберт Д. Избранные труды. М., 1998. Т. I. С. 432–448 (пер. Н.М. Нагорного). При дальнейших ссылках на эту книгу: ***Гильберт*, 1998**.

[196] Nachgelassene Schriften, S. 297.

[197] *Kambartel F.* Zur Formalismuskritik und zum Logikbegriff Ferges//Nachgelassene Schriften, S. XXIII.

[198] Nachgelassene Schriften, S. 294.

[199] *Гильберт*, 1998. С. 439 (статья «О бесконечном»).

[203] Там же, с. 461 (публикация «Познание природы и логика»).

* * *

Совпадение некоторых аспектов философских ориентаций Фреге и Гильберта не могло быть, однако, сколько-нибудь органичным. «Логицистские» взгляды Фреге сказывались, по-видимому, и тогда, когда — в конце своего научного пути — он стал связывать перспективы обоснования математики с «геометрическим познавательным источником». Во всяком случае Карнап, слушавший лекции Фреге, вынес впечатление, что Фреге никогда не отказывался от своего «арифметического» логицизма. Издатель записей этих лекций — Г. Габриель считает, что этот взгляд не подтверждается материалами фрегевского архива[201]. Однако, по-видимому, это не совсем так. Конечно, Фреге пришел к убеждению, что — как передает его мысль Габриель — ему «кажется»: на основе одного логического источника познания нельзя прийти ни к каким предметам; а из этого следует, что числа для Фреге больше не являются *логическими* предметами, хотя он и продолжает смотреть на них как на предметы, а на их задание — как на высказывания о понятиях. Но если Фреге сохранил убеждение, что *вся* математика, а значит и геометрия, может быть построена с помощью логики, то это, считает Габриель, может быть понято лишь в свете его работы «Логика в математике», где Фреге говорит: и в арифметике, и в геометрии выводы (Schlußweisen) носят логический характер[202].

Вчитаемся же в то, что Фреге пишет в этой, так и не увидевшей света при его жизни, статье[203]: «Надо стремиться к тому, чтобы как можно более сузить круг недоказуемых *исходных истин* (Urwahrheiten); ибо в этих исходных истинах как бы в зародыше содержится вся математика. Сущность математики должна определяться этим зародышем; и пока нам не станут известны эти исходные истины, у нас не будет ясности относительно того, что, собственно говоря, есть математика. Если предположить, что нам удается открыть эти исходные истины, то математика предстанет системой истин, связанных друг с другом с помощью логических умозаключений (logische Schlüsse)»[204].

Эти слова все ставят на свое место. Источником «исходных истин» математики Фреге теперь считает геометрию, а основанные на этом источнике математические истины связывает воедино логика. Так под «логицизм» подводится база в виде изначальных истин, получаемых с помощью геометрического умозрения.

«Поздний» Фреге и новые логические концепции начала XX века

Судьба логического учения Фреге напоминает судьбу аристотелевской логики. Главное логическое достижение Аристотеля — силлогистика, — сохранив свое значение на века, со временем обросла уточнениями, ограничениями либо расширениями, сохранив при этом свое ядро: учение о категорическом силлогизме. Подобно этому основной вклад Фреге в логику — создание классического исчисления предикатов, на десятилетия сохраняя свою значимость, стал в последующий период объектом разработки и развития в самых разных направлениях. И подобно логическому учению Стагирита — учению, ядро которого не поддается сколько-нибудь существенному развитию, — логическая теория Фреге в своей основе также «нереформируема»: ее можно либо принять (что и было сделано в классической математической логике), либо отвергнуть, предложив альтернативные подходы.

Описание «нефрегевских» логических теорий выходит за рамки данного Послесловия. Здесь мы ограничимся тем, что кратко укажем на те новые логические (и философско-математические) концепции и системы, которые появились еще *при жизни* Фреге.

---

[201] *Gabriel*, S. VIII.

[202] Ibidem, S. VII.

[203] По мнению издателя Карнаповых конспектов фрегевских лекций эта статья передавала содержание того лекционного курса, который читался Фреге под тем же названием. Мы не располагаем сведениями, опубликованы ли уже соответствующие записи Карнапа.

[204] Nachgelassene Schriften, S. 221.

Сначала сухая хронология. Год 1907-й — провозглашение Брауэром программы (математического) *интуиционизма*; годы 1910, 1912—1913-е — публикация статей Н. А. Васильева о *воображаемой логике*; год 1918-й — выдвижение Г. Вейлем в своем знаменитом «Континууме» концепции *предикативизма*. В том же 1918 г. — разработка К. И. Льюисом системы *строгой импликации*. В 1920—1921 гг. появляются первые исчисления *многозначной логики* (Я. Лукасевич, Э. Пост). В 1921 г. Г. Вейль присоединяется к интуиционистской программе Брауэра. Далее назовем: появление первых систем *модальной логики* (Льюис, 1918, 1920); построение Т. Сколемом (1921) системы *рекурсивной арифметики*, означавшей продвижение в сторону теории алгоритмов; наконец, появление (1924) знаменитой статьи М. И. Шейнфинкеля, заложившей основы *комбинаторной логики*. И это — не говоря уже о развитии *аксиоматической теории множеств* и *метаматематики* Гильберта.

Взглянем же на эти достижения с точки зрения того, какие фрегевские положения они развивали, отменяли либо ставили под вопрос.

Интуиционизм переворачивал «с ног на голову» логицистскую установку Фреге: математика, точнее математическая деятельность, провозглашалась предшествующей логике. Программа Брауэра, далее, требовала отказа от идеи актуальной бесконечности, за которую столь цепко держался Фреге. Брауэровский интуиционизм предполагал отказ от ряда принципов классической логики, и в их числе — от общезначимости закона исключенного третьего, который Фреге считал одним из устоев своего логического учения. В «воображаемой» же логике Васильева, где в качестве одной из форм мышления допускались противоречивые суждения, этот закон заменялся «законом исключенного четвертого».

Концепция предикативизма (которую предвосхитил еще А. Пуанкаре), запрещая предикативные определения как содержащие *circulus vitiosus*, служила оправданием расселовской теории типов. Абсолютизации логической бинарности — признанию лишь *двух* значений истинности был нанесен удар, когда Я. Лукасевичем была построена логика с *тремя* истинностными значениями — «истинно», «ложно» и «неопределенно», а потом на свет появилась и логическая система с любым конечным числом значений истинности (Э. Пост). Эти логические подходы ставили под сомнение тезис Фреге о нелогическом характере «окраски» мысли: значение «неопределенно» Лукасевич, например, связывал с истинностной оценкой суждений о будущих событиях, то есть предлагал ввести в логику временной аспект мыслительного акта.

Возможность подхода, альтернативного фрегевскому взгляду на внелогичность мыслительных «коннотаций», явственно обнаружилась, когда появились первые варианты модальных логик, систем строгой импликации (порывавших с материальной импликацией как уточнением условной логической связи, из чего исходил Фреге), когда получила развитие вероятностная логика (существование которой — у того же Буля — Фреге игнорировал). Наконец, комбинаторная логика показала всю относительность установленного Фреге противоположения констант и переменных, поскольку конструкция Шейнфинкеля означала построение логики с помощью небольшого набора исходных функций — логических констант, не предполагающих переменных.

В философии математики программа Гильберта — вместе с аксиоматической теорией множеств и складывающейся теорией моделей — подняла обоснование математических теорий на новую ступень, раскрыв принципиальную важность таких — отчетливо «нефрегевских» — проблем, как доказательства (относительной) непротиворечивости формальных теорий, их полноты и разрешимости. А начавшееся развитие теории алгоритмов (первоначально в форме теории рекурсии) придало этим проблемам такую определенность и точность, что возможными стали знаменитые теоремы Гёделя.

Итак, можно сказать, что *почти все* сколько-нибудь важные принципы логики и философии математики, сформулированные Фреге, еще при его жизни начали подвергаться тому или иному пересмотру, уточнению, обобщению либо ограничению. Однако незыблемым оставался созданный им становой хребет математической логики — дедуктивно-аксиоматически строящееся пропозициональное исчисление и теория предикатов. И очень многие логические новации отталкивались — пусть негативно — от идей иенского мыслителя. Во многом это происходило не прямо, а косвенно, например через посредство «Principia mathematica» Уайтхеда и Рассела, метаматематику Гильберта или интуиционизм Л.Э.Я. Брауэра и Г. Вейля. Но если разыскивать их истоки, мы во многих случаях приходим к Фреге.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-06-80467.

Б.В. Бирюков

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Прямым шрифтом набираются номера страниц с именами, упоминаемыми Фреге, курсивом — упоминаемыми в научном аппарате («От переводчика», «Введение», «Комментарии», «Послесловие»). В именной указатель включены также имена мифологических персонажей.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Готтлоб Фреге

ЛОГИКА И ЛОГИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА

Ведущий редактор **Л. Н. Шипова**. Корректор **А. А. Баринова**

Компютерная верстка **О. С. Коротковой**

ИД № 00287 от 14.10.99

Подписано к печати 31.08.2000. Формат $70\times100^1/_{16}$. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 41,6. Тираж 7000 экз. Заказ № 1742.

Издательство «Аспект Пресс». 111398 Москва, ул. Плеханова, д. 23, корп. 3.
Сайт в Интернете: www.aspectpress.ru. Тел.: 309-11-66, 309-36-00

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат». 143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.