Б. А. Кулик

Логические основы здравого смысла

ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Санкт-Петербург 1997

ББК 87.4
К90
УДК 161/162

Кулик Б. А.

К90 Логические основы здравого смысла/Под ред. Д. А. Поспелова. — СПб.: Политехника, 1997. — 131 с.: ил.

ISBN 5-7325-0442-7

Что значит «рассуждать логично»? Можно ли связать строгую логику с расплывчатыми понятиями естественного языка? Как сделать предмет логики более доступным? Какова связь между логикой и здравым смыслом? Эти и другие актуальные проблемы, связанные с логикой, обсуждаются в книге. Предложено математическое обоснование традиционной логики.

Книга предназначена для широкого круга читателей: преподавателей логики и математики, философов, лингвистов, специалистов по искусственному интеллекту и тех, кто интересуется проблемами современной логики.

К $\frac{0301060000-201}{045(01)-97}$ Без объявл. ББК 87.4

ISBN 5-7325-0442-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известный американский специалист в области искусственного интеллекта Мервин Минский в одной из своих статей написал: «Никто не возьмет на себя смелость объяснять другим людям значение слов, которое они и без того хорошо понимают». И надо обладать очень большой смелостью, чтобы заняться столь неблагодарным делом, когда в качестве этих «других людей» выступают те, кто создавал и создает строгое и стройное здание формальной логики.

Так что в смелости автору этой книги не откажешь. Уже название книги может стать поводом для научной дискуссии. Для большинства психологов и специалистов в области интеллектуальных систем утверждение, что в фундаменте того, что принято называть здравым смыслом, лежит строгая логическая система, не может быть принято, как очевидное. В этих науках рассуждения, основанные на здравом смысле (по-английски это common sense reasoning), всегда противопоставлялись формальным дедуктивным схемам рассуждений. Знакомство же с содержанием книги, если читатель живет в мире привычных для него профессиональных математических и логических представлений, способно вызвать целый спектр реакций — от бурной радости открытия для себя новой научной парадигмы до полного отвержения предлагаемого взгляда на давно установившиеся вещи.

Но в одном, пожалуй, не откажет автору никто. Книга написана увлекательно и с той внутренней уверенностью в своей правоте, которая всегда отличает книги, созданные учеными, от книг, написанных (даже самыми блестящими) популяризаторами науки.

Люди живут в мире мифов. Мифы формируются на основе личного опыта или извлекаются из той среды, в которой человек живет. И по сути, утверждение некоторой дамы о том, что все брюнеты подлецы, в обосновании которого она говорит, что хорошо знала одного такого, и расхожее мнение, что «яйца курицу не учат», явления одного порядка. Мифологично не только бытовое знание. Научное знание столь же мифологично. Это кажется удивительным лишь на первый взгляд. Все развитие науки — это процесс отвержения старых мифологем и формирование новых. На смену модели Вселенной Птолемея пришла гелиоцентрическая система, наивная теория флогистона заменилась современной теорией горения, казавшаяся незыблемой геометрия Евклида стала сосуществовать как предельный случай с более экзотическими геометриями.

Развитие науки — непрерывный процесс разрушения и формирования представлений, происходящий на фоне накопления все новых и новых знаний. Эту идею прекрасно сформулировал философ Карл Поппер при поиске определения того, что можно назвать научными знаниями. В отличие от догматических знаний, основанных на вере и мифах, научные знания всегда могут быть фальсифицированы, и нахождение фальсификаторов знаний — одна из центральных задач в процессе развития науки.

Но, как заметил известный специалист в области теоретической информатики Ю. Шрейдер, в наше время для людей далеких от науки научное знание стало своеобразной религиозной догмой. Миф о всесильности научных знаний стал одним из основных мифов XX века. Научные знания приобрели эзотерический характер, ибо для овладения ими надо потратить огромные усилия на изучение того особого языка, на котором они сформулированы, и тех представлений, в рамках которых они интерпретируются. Жрецы науки поддерживают миф о всесильности науки. Часть из них делает это, искренне веря в миф о всесильности, а остальные не утруждают себя критикой того, что дает им право на работу и высокое положение в развитом обществе.

Но даже на этом общем фоне мифологизации науки формальная логика выделяется как особо мифологизированная область. Ни в одной другой научной дисциплине не встретишь положений, которые не пересматривались бы многие сотни лет и даже тысячелетия. Силлогистика Аристотеля — уникальный пример таких положений. Даже новая математическая логика, ставившая перед собой задачу сделать философскую логику точной наукой, вынуждена была отступить от крепости, воздвигнутой великим греческим мыслителем задолго до того, как возникла современная математика и лежащая в ее основе теория формальных систем.

Б. А. Кулик в книге, которую вы начали читать, в который уже раз доказывает справедливость истины, что многое новое есть просто забытое старое. Алгебра множеств, на которую он предлагает обратить внимание, известна давным давно. Но сила автора книги в том, что он предлагает взглянуть на этот формализм несколько под другим углом зрения. И тогда оказывается, что многие проблемы теории формальных систем, кажущиеся непреодолимыми и изначально присущими математическим построениям, легко разрешимы, а то, что доставляло много хлопот любителям силлогистики, изящно объясняется с помощью созданного Б. А. Куликом аппарата в графовой модели рассуждений.

Когда я читал рукопись, мне вспомнился разговор с моим добрым знакомым, одним из тех, кто внес большой вклад в развитие логических методов анализа и синтеза дискретных устройств, Аркадием Дмитриевичем Закревским. Я тогда искал способы компактного описания работы устройств, функционирование которых явно зависит от времени, и увлекался в связи с этим всякими экзотическими способами логических рассуждений. На мои сетования по поводу консервативности логики и слабости того, что лежит в ее основе, Закревский, загадочно усмехнувшись, сказал, что, по его мнению, идеи Аристотеля еще до конца не поняты, надо только посмотреть на созданное им современными глазами. Я тогда не обратил особого внимания на эти слова. А через пару лет после этого разговора появилась статья Аркадия Дмитриевича, в которой он блестяще подтвердил свою мысль, построив полисиллогистику, развивающую основные положения силлогистики Аристотеля.

Судьба этой публикации показательна. На нее не обратили внимания, не оценили содержащихся в ней идей. Еще раз сработал стереотип мифологизации научных достижений. На фоне современных математических и логических идей полисиллогистика показалась анахронизмом.

Очень хотелось бы, чтобы книга Б. А. Кулика, близкая по духу к написанной почти два десятилетия тому назад статье А. Д. Закревского, не разделила ее участи.

Академик РАЕН,
д-р техн. наук проф. Д. А. Поспелов

О необходимости применения логики во всех аспектах современной и во многом «нелогичной» жизни сказано немало. Без нее просто невозможно представить современную науку. Но и в нашей повседневной практике логика буквально стучится во все двери. Она так или иначе присутствует в житейских и философских спорах, в попытках согласовать наше поведение со статьями уголовного или гражданского кодекса, в попытках доказать свою правоту представителям исполнительной или законодательной власти или выбрать среди многочисленных партий или политических течений те, которые соответствуют нашим представлениям о добре и справедливости.

В своем выборе мы часто руководствуемся не логикой, а интуицией, но в тех случаях, когда интуиция нас подводит, мы нередко забываем логически проанализировать наши ошибки, сосредотачиваясь на чужих ошибках, принимая за основу наше «безошибочное» мнение. Разумеется, без интуиции нам не обойтись, но и она порой нуждается в помощи логики, но, к сожалению, часто не находит ее.

Парадокс современной жизни заключается в том, что логика как наука перестала быть общеобразовательной дисциплиной. Спрос на нее большой, но предложения (т. е. многочисленные руководства и учебники) часто не выдерживают никакой критики: либо они безнадежно устарели и долго и невнятно разъясняют нам, почему из двух суждений «Все люди смертны» и «Сократ человек» — обязательно должен получиться вывод о том, что Сократ смертен, либо настолько сложны, что их с большим трудом понимают даже высокообразованные люди, а если и понимают, то, как правило, не могут объяснить ни себе, ни другим, какое отношение эта логика имеет к нашей повседневной реальности.

Еще один парадокс заключается в том, что сейчас появилось довольно много самых разнообразных логик. Специалисты по логике относятся к этому факту «философски», не особенно затрудняя себя проблемой о возможности существования единой «самой правильной» логики. Но с точки зрения здравого смысла получается, что выбирая разные, не согласованные друг с другом логики, люди начинают как бы существовать в разных мирах, теряя возможность конструктивного общения друг с другом. Современное состояние науки логики таково, что проблема перевода текстов с одного национального языка на другой оказывается намного проще, чем перевод одной системы логики в другую. А для многих пар разнообразных логических теорий «перевод» друг в друга невозможен в принципе.

В такой ситуации, видимо, бесполезно убеждать, используя традиционные методы обоснования, преимущества какой-либо одной логики перед другими. В таких обоснованиях, как правило, присутствует бремя наших стойких предубеждений. И, может быть, поэтому имеет смысл предоставить право выбора в этом бесперспективном споре самому беспристрастному судье — математике.

Эта книга рассчитана на широкий круг читателей. И в качестве математических оснований логики в ней выбрана простая и доступная даже школьникам математическая основа, которая известна как «алгебра множеств». Но выбор именно этой системы объясняется не только стремлением к популярности изложения. Эта система в том или ином объеме известна тем, кто хотя бы немного имел дело с современной информатикой. Но многим специалистам по логике и информатике неизвестен точный смысл этого понятия — его нередко отождествляют либо с булевой алгеброй, либо с теорией множеств, что в принципе неверно. Попытки использовать эту математическую систему в качестве оснований логики известны давно, но начиная с XX века в математической логике появился другой фундамент — теория формальных систем, на основе которой развилась современная математическая логика и в которой алгебре множеств была отведена весьма скромная роль.

Причины такой смены приоритетов довольно сложны — о них здесь еще будет сказано. Математическую логику можно считать наукой XX века. Ее достижения впечатляют — на ее основе создавалась гигантская индустрия современных компьютеров; примерами ее применения являются многие работающие системы искусственного интеллекта: экспертные системы, системы машинного перевода, электронные шахматисты, играющие на уровне гроссмейстера и т. д. Но при этом в процессе бурного развития математической логики и ее приложений возникло немало серьезных нерешенных и неразрешимых проблем и одной из них, может быть, самой главной, является проблема связи математической логики с содержательной логикой, т. е. с логикой, которая присутствует и в наших житейских или философских спорах, и в политике, и в законотворческой деятельности. В математической логике, по сути, невозможно найти строгого определения таких необходимых в повседневной практике понятий, как «ошибка в рассуждении», «обоснованные или необоснованные аргументы» и т. д., которые часто встречались ранее, но о которых мы начали уже постепенно забывать. В таких случаях обычно рекомендуется «традиционная» логика с ее «суждениями», «силлогизмами», «умозаключениями» и т. п. Но эта логика существует как бы отдельно от математической логики и на фоне ее математической строгости и впечатляющих успехов выглядит весьма скромно и уступает ей в убедительности своих оснований.

Основная цель книги заключается в обосновании того, что выбор в качестве математического фундамента «традиционной» логики уточненного варианта алгебры множеств позволяет не только сделать ее более доступной для понимания, но и расширить ее возможности. Но здесь предпочтение отдано не сухому языку математики, который сейчас в достаточном объеме понятен только специалистам, а более простому языку, в котором число математических терминов сведено к минимуму. Для тех же, кто предпочитает язык математических формул и теорем, в приложении дано строгое обоснование того, о чем рассказывается в основном тексте.

В первой главе я позволил себе вторгнуться в весьма загадочную и для многих неясную сферу философской аргументации, приняв во внимание то, что термин «здравый смысл» соотносится не только с житейской практикой, но и является также, правда, с некоторыми оговорками, и философским термином. Не являясь философом по образованию, я не могу гарантировать того, что изложенная в этой главе точка зрения в целом не была ранее высказана кем-то из философов. Однако поискам, связанным с решением логических проблем, во многом помогли попытки их философского осмысления, и поэтому я решился включить в книгу эти, возможно, не во всем последовательные на взгляд профессионала философские заметки.

Пользуясь случаем, выражаю признательность и благодарность инженеру-программисту Е. Я. Елифтерьевой, д-ру философ. наук Б. И. Липскому, канд. философ. наук В. П. Мухачеву, академику РАЕН И. А. Рябинину, а также инженеру-системотехнику Р. В. Саминскому, взявшим на себя нелегкий труд внимательно прочитать сырую рукопись и сделавшим ряд критических замечаний и предложений, многие из которых были учтены при ее доработке, профессору СПбГУ А. И. Юрьеву, убедившему меня в целесообразности подробного ознакомления с философскими и математическими работами Лейбница для более ясного понимания сути проблемы, а также моим коллегам по работе Н. П. Зотову, А. И. Индейцеву, А. И. Курочкину, М. В. Наумову и А. А. Шалыто, без поддержки и дружеского участия которых эта книга вряд ли была бы завершена.

Особо следует отметить неоценимую помощь, оказанную мне учителем математики и методистом В. И. Рыжиком. Достаточно сказать, что приведенная в гл. 3 система рассуждений была разработана при решении поставленной им проблемы. Им же были предложены методические приемы, позволяющие по возможности доступно изложить многие весьма непростые идеи, лежащие в основе математической модели рассуждений. Ряд промежуточных результатов этой главы был получен в ходе совместных обсуждений. По сути, В. И. Рыжик является соавтором этой главы, хотя я позволил себе в этой главе изложить в собственной редакции ряд выводов философского характера, в понимании которых мы не пришли к полному согласию.

Автор будет весьма признателен всем, кто захочет высказать свои критические замечания и предложения.

1. ФИЛОСОФСКИЕ И ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЗДРАВОГО СМЫСЛА

> «Главное отличие человека от животных есть вопрос почему? Надежда разрешить этот вопрос составляет возможность жизни для человека. <...> Люди, которые смеются над усилиями искателей причины причин, отрекаются от своего человеческого достоинства и равняют человека с животным».
>
> **В. Ф. Одоевский**

1.1. ЗАЧЕМ НУЖЕН ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ?

Современный мир, тонущий в спорах об истине, которые нередко переходят в большие и малые вооруженные столкновения, как никогда ранее пронизывает стремление к единению. Возможна ли в принципе реализация этого стремления в виде какой-либо философской идеи, которая, с одной стороны, была бы понятна и доступна многим, а с другой — не вызывала бы существенных возражений со стороны носителей многих различающихся в своей основе точек зрения? Мечта о такой идее в настоящее время кажется утопией. И тем не менее, попытки выразить эту идею пронизывают всю историю философии, и даже сейчас, когда многие мощные философские системы, владевшие умами цивилизованного мира и претендовавшие на всеобщность, рассыпались, как карточные домики, оставив лишь немногочисленных поклонников, эта мечта является стимулом для многих «искателей причины причин».

Дифференциация или, точнее, лавинообразное размежевание сейчас происходит во всех сферах общественной жизни: в политике, религии, науке, искусстве и даже в таких «мелочах», как «неформальные объединения», семья и т. д. На фоне этого размежевания и во многом вследствие оного вдруг неожиданно обнаружились мощные объединяющие силы, но не в сфере духовной культуры и нормальных человеческих взаимоотношений, а совсем в иной сфере: объединяются корыстолюбцы и преступники, для которых уже не являются препятствием ни национальные или мировоззренческие различия, ни государственные границы. И чем больше размежевание в нормальном обществе, тем больше возможностей для объединения этих темных сил.

А с чем идет в XXI век современная наука? А идет она туда, образно говоря, раздробленная на мелкие огородики со своими строгими стражами и своими методами обработки, и этот процесс дробления почти неуправляем, потому что многие стражи порядка даже на самом высоком уровне крайне заинтересованы в таком положении вещей, поскольку большинство из них «вышли в люди», исповедуя «огородную» идеологию. Эта идеология носит безобидное название «процессы дифференциации в науке». Противоположные процессы — «интеграции» — также стихийны и в настоящее время имеют немало общих внешних признаков с процессами дифференциации. Для успешного развития процесса дифференциации необходима безусловная свобода мифотворчества, и потенциальные мифотворцы этой свободой обеспечены достаточно, если не считать не всегда объективных ограничений, связанных с публикацией и пропагандой создаваемых или исповедуемых ими философских взглядов, религиозных учений, теорий, концепций и парадигм.

Но для нормального развития процесса интеграции необходима одна общепризнанная методологическая идея. В чем суть этой идеи? С этим пока что не имеющим ответа вопросом и вступает в XXI век современная наука. И, может быть, отсутствие ответа на этот вопрос является одной из главных причин увеличения взаимного непонимания не только в науке, но и в общественной жизни.

Наивный лозунг кота Леопольда «Ребята, давайте жить дружно!», с которым многие простые люди мысленно обращаются к современным идеологам и власть имущим, торпедируется во всех высоких сферах. Но есть надежда, что этот лозунг станет более весомым, если найти для него простую и в то же время достаточно обоснованную философскую истину. Мне кажется, что такой истиной является здравый смысл. Но что такое здравый смысл?

Обратимся сначала к «Философскому словарю» (1980 г.). «*Здравый смысл* — совокупность взглядов, навыков, форм мышления, используемых рядовым человеком в его повседневной практической деятельности...». В этом определении подразумевается, что *нерядовому* человеку здравый смысл необязателен. Но это просто голое умозаключение. Но есть и факты, и не откуда-то из политических сфер, а из недавней истории развития науки.

Наверное, многие еще помнят, что в период хрущевской оттепели, когда вместе с политическими запретами были отменены и запреты на некоторые «идеалистические» науки, среди популяризаторов науки (а в их числе были не только журналисты и писатели с техническим образованием, но и многие известные ученые и философы) у нас в стране началась усиленная атака на здравый смысл. В качестве оправдания этого массированного наступления часто приводилось высказывание Нильса Бора: «Перед нами — безумная теория. Вопрос в том, достаточно ли она безумна, чтобы быть правильной». Я не уверен, что эти слова были сказаны общепризнанным корифеем науки Н. Бором без оттенка иронии. Но дело даже не в этом. Дело в том, что хмель свободы настолько вскружил головы, что никто не заметил в период этого наступления элементарной логической ошибки: для того, чтобы смешать с пылью здравый смысл, его просто отождествили с догматизмом и примитивным упрощенчеством. И с этим ярлыком он ходит уже давно. Так что же тогда здравый смысл на самом деле?

Да, он догматичен, поскольку базируется на старых истинах, к которым многие *рядовые* и *нерядовые* люди пришли уже давно: на *простоте*, *честности* и *милосердии*. Вопрос только в том, как эти простые истины облечь в форму обоснованного философского мировоззрения, которое могло бы стать объединяющей силой в сфере духовной культуры? И вообще, можно ли в философии здравого смысла выйти за рамки «философии» кота Леопольда и объединить в себе многие, казалось бы, несоединимые особенности различных мировоззрений, идеологий и мнений? Выделим сначала главные полюсы несоприкосновения, которые во многом являются реальной силой, раздирающей общество нормальных людей. Выразим их в виде следующих антитез:

1) антитеза религиозного мировосприятия и мировосприятия людей, сомневающихся в Божественном происхождении мира и разума;
2) антитеза национального и интернационального;
3) антитеза «гуманитарного» и «точного» знаний.

Первые две антитезы, надо полагать, понятны без пояснений. Суть третьей антитезы заключается в том, что представители «гуманитарного» направления убеждены в том, что в идеологии нет необходимости опираться на некоторые подчас непростые истины, полученные к настоящему времени в «точном» знании (в первую очередь в математике и формальной логике). В то же время многие «физики» убеждены, что идеология «лириков», игнорирующая «точное» знание, является заведомо ошибочной.

В настоящее время трудно назвать известную и достаточно популярную философскую систему, в которой эти три антитезы были бы совместимы. Но идея, с помощью которой неоднократно предпринимались попытки совместить их, известна давно. Однако эта идея в современных спорах об истине не является популярной, поскольку считается, что ее применение хотя и достаточно для обоснования совместимости первых двух антитез, но совершенно недостаточно для обоснования совместимости третьей. Я имею в виду идею, которую можно условно назвать «нравственной философией». Действительно, нравственную философию можно было бы построить, исходя из комплекса этических принципов, которые не вступают в серьезные противоречия с основными принципами религиозной этики и национального самосознания. И эта нравственная философия могла бы стать мировоззренческой основой для многих проявлений социально-психологической и общественно-политической сфер жизнедеятельности. Но можно ли совместить нравственную философию с привлекательной для многих свободой личности и в первую очередь — со *свободой познания* и *свободой творчества*?

Если хотя бы бегло проанализировать разнообразный спектр современных наиболее популярных философских направлений, то окажется, что этот вопрос в них лежит в стороне от основного направления поисков, поскольку явно или неявно подразумевается, что ответ на этот вопрос отрицательный. Таким нейтральным (а в ряде случаев и антиэтическим) подходом к построению всеобъемлющей философской системы отличаются практически все известные философские течения XX столетия — логический позитивизм, аналитическая философия, гносеология диалектического материализма, экзистенциализм, различные разновидности феноменологий, постмодерн и т. д.

В настоящее время обсуждается сравнительно немного источников философской мысли, в которых предпринята попытка совместить этику с познающей способностью человека. Но несмотря на то, что эти источники известны практически всем, кто хотя бы поверхностно интересуется философией и ее историей, их конструктивное начало оказалось за пределами внимания всех властителей дум в современной философии, с точки зрения которых эти попытки «соединить несоединимое» оказались всего лишь заслуживающим уважения (но не более!) анахронизмом. Познавательная суть этики, которая пронизывает памятники древнеиндийской и древнекитайской философии, диалоги Платона, сказания евангелистов, философские и математические работы Б. Паскаля и Г. В. Лейбница, литературные и публицистические произведения И. В. Гете и В. Ф. Одоевского, эпистолярное наследие А. А. Ухтомского, культуроведческие работы Д. С. Лихачева и некоторые другие литературные и философские произведения, сейчас мало кого интересует.

А может быть, действительно, познание и этика несовместимы? Ведь случалось же в истории, что авторами гениальных изобретений, научных открытий и признанных шедевров искусства оказывались отнюдь не праведники. И разве не факт, что большинство современных ученых, давших миру всю разрушительную и созидательную мощь техники XX века, абсолютно равнодушны к призывам многих «лириков» и «романтиков» о необходимости возвращения нравственного начала в идеологию познания? И разве не факт, что многие выводы и прогнозы классиков «нравственной философии» оказывались ошибочными? Под давлением этих и многих других неопровержимых аргументов любая попытка вернуть теории познания нравственное начало кажется смехотворной. Но если сопоставить насущные проблемы современного познания с формулировками и попытками решения аналогичных проблем в трудах непопулярных среди современных «интеллектуалов» мыслителей, то окажется, что многие из этих проблем либо сравнительно легко решаются, либо оказываются псевдопроблемами, поскольку вместе с утратой нравственного начала в теории познания была в значительной части утрачена культура мышления. С учетом этого *основной целью философии здравого смысла на данном этапе ее развития является восстановление утраченной культуры мышления.*

Основным этическим принципом философии здравого смысла можно считать отказ от приемов, методов и средств, мешающих естественному для каждого познающего (и не только познающего) человека *Стремлению к Взаимопониманию.* Этот принцип более подробно раскрывается в двух взаимосвязанных аспектах познавательной деятельности — языке и логике. Применительно к языку этот принцип реализуется как стремление преодолеть языковые барьеры познания, которые можно разделить на два типа: 1) языковые барьеры между гуманитарным и «точным» знаниями; 2) языковые барьеры между различными разделами и подразделами специальных наук. Ясно, что *Стремление к Взаимопониманию* может быть реализовано только на основе *литературного языка*, в котором используются лишь достаточно устойчивые и допускающие простое и ясное объяснение философские и научные термины. Альтернативные варианты для философии здравого смысла вряд ли приемлемы, поскольку мешают Взаимопониманию. Это сугубо этическое ограничение потребует от многих ученых, философов и просветителей немало труда и умственных усилий (все гениальное — просто!), но кто доказал, что реализация этого принципа невозможна?

Здесь требуется пояснить значение термина *«литературный» язык.* Философскую систему принято излагать на философском языке. Но современный философский язык за последнее столетие утратил многие характерные черты распространенного в прошлом философского языка, который по составу и значениям терминов мало отличался от языка художественной прозы и публицистики, разве что в нем более значительную роль играла логичность рассуждений и более часто встречались общенаучные термины (хотя проблематика философских произведений существенно отличалась от проблематики литературных и публицистических произведений). Часто даже не всегда удавалось отличить литературное произведение от философского (например, некоторые философские произведения И. В. Гете и В. Ф. Одоевского; в XX столетии после публикации философских работ В. С. Соловьева и Л. Шестова многие стали относить к философским литературные произведения Ф. Достоевского).

Современный философский язык утратил многие черты литературного языка, в частности, самое главное его достоинство — общедоступность. Понять сейчас современные работы по философии не в состоянии даже человек с высшим образованием, прошедший обязательный курс введения в философию. Философский язык по степени доступности сравнялся с языками специальных наук, хотя в нем в отличие от языка определенной науки в значительно большей степени допускается многосмысленность используемых терминов, многие из которых лишь при поверхностном подходе кажутся словами литературного языка. Поэтому используемый здесь термин «литературный язык» понимается как термин «философский язык», но отнюдь не в современном смысле. Утрата этого языка породила даже некоторую ностальгию у ученых. Характерно в этом плане высказывание известного физика Макса Борна: «Физика нуждается в философии, которая была бы понятна даже ребенку».

Что касается логики познания, то этот аспект в настоящее время не имеет в целом достаточно убедительного и внятного объяснения. Если ограничиться логикой, не выходящей за пределы силлогистики Аристотеля, то окажется, что ее можно использовать лишь для решения простых учебных примеров, но эта логика не является достаточной для глубокого понимания сути процессов познания. Достаточно богатые с точки зрения выразительных средств и методов логические системы разрабатываются в рамках математической логики, но для того чтобы понять и оценить познавательную суть многих выдающихся результатов, полученных в математической логике, требуется подход, существенно отличающийся от подхода на основе теории формальных систем, принятого как незыблемая парадигма в современной математике. Такой подход, позволяющий не только доступно изложить многие сложные понятия и методы, открытые в математической логике, но и найти решение некоторых ее непростых проблем, оказывается давно уже известен, но почему-то оказался забытым, может быть, в силу сложившегося в науке предубеждения, что сложные проблемы решить простыми средствами невозможно. В основе этого подхода, как уже было сказано выше, лежит алгебра множеств, и его содержание применительно к логике подробно рассматривается в последующих главах.

В философской системе, претендующей на научность, должны быть четко выделены объект исследования и методы исследования. *Объектом исследования* философии здравого смысла можно считать зафиксированные в виде текстов, устных высказываний и сформировавшиеся в памяти людей результаты познания окружающего мира разными людьми. Эти результаты распространяются в человеческом обществе в виде мнений, установок, концепций, парадигм, дискурсов, теорий и т. д. Для обобщенного названия этих объектов исследования автором был выбран термин «миф». Краткое обоснование правомочности такого выбора и содержание этого термина рассмотрено в п. 1.2.

Методы исследования условно можно разделить на предварительные (или поисковые) и детальные (или доводочные). *Предварительные методы* не являются совершенно точными и скорее относятся к мировоззренческим оценкам. Анализ мировоззренческих методов исследования достаточно освещен в философской литературе и выходит за рамки данной работы. Интересный и содержательный материал на эту тему содержится во многих неполитизированных работах по теории познания диалектического материализма. Работы многих философов этого направления примечательны еще и тем, что в них мировоззренческий анализ сочетается с неформальными, но в то же время достаточно строгими логическими методами анализа. В данной работе предлагается включить в состав поисковых методов исследования *психоэтический подход*, кратко рассмотренный в п. 1.3. Этот подход к настоящему времени в философской литературе как самостоятельный почти не рассматривался.

Детальные методы исследования имеют непосредственное отношение к логике. Они подробно рассмотрены в гл. 2 и 3. Стоит отметить, что во многих изложениях философских систем логический аспект теории познания освещается весьма поверхностно или же полностью игнорируется. Здесь предпринята попытка восполнить этот пробел на основе строгих математических методов обоснования. В гл. 3 приводится ряд новых результатов из этой области знаний. Для понимания этих результатов не требуется знаний, выходящих за рамки школьного курса математики. Некоторые необходимые дополнительные сведения из математики приведены в пп. 2.4, 2.5 и 3.2.

Несколько слов по поводу термина «здравый смысл». К здравому смыслу обращались философы самых разных направлений. Приведем лишь крайние точки зрения. Гегель считал, что всякая философия идет впереди здравого смысла, ибо здравый смысл не есть философия. Энгельс же полагал, что здравый смысл — это «логически необходимый результат великой, бессознательно логической истории». Видимо, ставить точку в этом споре еще рано. Каждый философ по-своему понимает здравый смысл. Здесь просто предлагается еще одно его понимание.

К сказанному необходимо добавить, что, с точки зрения приведенного выше определения объекта исследования, *содержание данной работы тоже относится к разряду мифов и уже в силу этого может и должно быть объектом критики.*

1.2. ПОЗНАЮЩИЙ ЧЕЛОВЕК В МИРЕ МИФОВ

«Миф есть в словах данная ЧУДЕСНАЯ личностная история».

А. Ф. Лосев

Одним из достижений философской мысли XX века являются работы А. Ф. Лосева по теоретическому обоснованию сущности мифа [1]. Приняв за основу эту точку отсчета, мы придем к выводу о том, что такие известные нам понятия, как «научная истина» или «философская истина», по сути являются не всегда согласованной совокупностью мифов. Учитывая это, термин «миф» в данной работе применяется как обобщение терминов «мнение», «теория», «концепция» и «парадигма». Такая трактовка мифа в деталях отличается от трактовки мифа по Лосеву, но в целом не противоречит ей, если рассматривать различные конкретные «мнения», «теории», «концепции», «парадигмы» и «учения» через отношение к ним познающих окружающий мир индивидов. Конкретный миф может быть совершенно неизвестен или неприемлем в одном сообществе, но в то же время являться незыблемой истиной в другой социальной среде. Мифы могут надолго забываться и возрождаться вновь, перемещаться и распространяться по странам и континентам. У каждого мифа своя судьба, и продолжительность жизни мифа, его распространение или забвение порой невозможно рационально объяснить.

По продолжительности жизни мифы можно условно разделить на три типа: устойчивые, предположительно неустойчивые и неустойчивые. Примерами весьма устойчивых мифов являются Этика Христа и Евклидова геометрия. Возможно, что отнесение Этики Христа к категории мифов для некоторых из читателей покажется святотатством, но в данном случае мы позволим себе рассматривать лишь этику, запечатленную в сказаниях евангелистов, не затрагивая решение сугубо интимной проблемы о происхождении этих сказаний. Для глубоко верующего человека вполне достаточным основанием для объяснения всех неточностей, несовпадений и негативных с точки зрения веры исторических оценок, связанных с этими сказаниями, является то, что Всевышний предопределил для человека самому доосмыслить суть и значение Своих заповедей, которые дошли к нам через человеческое восприятие Его избранников и уже поэтому не во всем последовательны и совершенны.

К предположительно неустойчивым мифам мы условно отнесем общепризнанные в мире науки теории, которые возникли не ранее последней четверти XIX века. Некоторые из этих мифов будут подробно рассмотрены в следующих главах.

К неустойчивым мифам можно отнести, например, теории-однодневки, которые сейчас появились во множестве в науке и которым порой присваивается статус теории только для того, чтобы повысить статус очередного научного работника. Жизнь таких неустойчивых мифов часто зависит от служебного положения и организаторских способностей их создателей. К таким же мифам можно отнести искусственно создаваемый имидж многих политических деятелей.

Рассмотрим в общем виде структуру мифа. Сознание каждого человека содержит самый причудливый набор фактов, терминов и суждений. *Факты* — это какие-либо реалии, которые мы когда-то прочувствовали непосредственно, о которых где-то читали или от кого-то услышали. *Термины* — некоторые простые или сложные обобщения и обозначения некоторых фактов или признаков («стулья», «точки», «линии», «адекватность», «домовые», «физические тела» и т. д.). *Суждения* — какие-либо простые (в основном парные или тройные) *соответствия* (т. е. взаимоотношения или взаимосвязи) между терминами, причем для формирования этих взаимосвязей требуются определенные логические соотношения («есть», «и», «больше», «равно», «содержит(ся)», «все», «существует при условии» и т. д.). Примеры суждений: «Между двумя разными точками можно провести только одну прямую», формулировки некоторых законов сохранения в физике, «В. Ф. Одоевский — незаслуженно забытый русский философ», «Дважды два не равно четырем», «Переселение душ — объективная реальность».

Суждения могут быть несимметричными, когда термины в них нельзя менять местами (например, если верно, что «*A* существует при условии *B*», то это не значит, что справедливо суждение «*B* существует при условии *A*») , и симметричными, когда при перестановке терминов смысл суждения не меняется. Симметричные парные суждения типа «*A* есть *B*» и «*B* есть *A*» в основном устанавливают тождество разных терминов. Очевидно, что набор фактов, терминов и суждений образует своеобразный банк исходных данных для умозаключений и рассуждений, и несомненно, что у каждого индивидуума этот банк данных имеет свои индивидуальные особенности.

Каждое из суждений может быть в зависимости от многих обстоятельств отнесено к одному из трех логических классов: *истинные*, *ложные* и *сомнительные*. Заметим, что у каждого индивидуума могут быть свои особенности логической классификации многих общеизвестных суждений и свои индивидуальные подходы к содержанию общих терминов. Одни считают, что переселение душ возможно, другие считают бессмысленным сам термин «переселение душ». Эти индивидуальные особенности назовем *мнениями*.

Природа «истины» — весьма трудная и тонкая проблема в логике и философии. Споры о том «Что есть истина?» не утихли и по сей день. Можно ли назвать истинной научную теорию, которая была в свое время общепринятой парадигмой, а сейчас перешла в разряд заблуждений? А где гарантия, что некоторые современные считающиеся истинными научные теории завтра не перейдут в разряд исторических курьезов? Если говорить о естественнонаучных знаниях, то критерием их истинности является *адекватность* (т. е. соответствие) этих знаний реальному миру или нашему представлению о нем. Но в логике проблема адекватности не столь существенна. Здесь одним из главных критериев является *логическая непротиворечивость*. Если построенная нами логическая система непротиворечива, то она для одной реальности или математической модели может быть адекватна и уже в силу этого истинна, а для другой — нет. Если же наша логическая система противоречива, то о ее адекватности чему бы то ни было и соответственно ее истинности не может быть речи в любом случае.

Так понимается сугубо логическая истина. Но есть еще и научная истина. И здесь уже начинают проявляться многие коллизии. Например, некто обнаружил явление или экспериментально подтверждаемый факт, который противоречит общепринятой теории. Тогда этот факт с точки зрения тех, кто убежден в безусловной истинности теории, считается ложным. А сколько таких «ложных» фактов стало источником новых научных открытий! Если же с такими критериями подойти к обычным житейским истинам, то тут получается еще более запутанная картина. Наверное, единственным спасением здесь могла бы стать логика. Впрочем, и это тоже не бесспорно. Многие в таких запутанных ситуациях считают единственным спасением *веру*.

Истина, как всегда в таких принципиальных случаях, лежит посередине. И логика нужна, но не доведенная до абсурда. И нужны мифы, в которые веришь. Но далеко не все.

Перейдем теперь к *рассуждениям*. Целью рассуждения является попытка перевести некоторые сомнительные суждения в класс истинных или ложных суждений. Рассуждение — это процесс построения в сознании или в задокументированном тексте цепочек суждений по определенным логическим правилам, причем в рассуждении эти цепочки могут причудливым образом переплетаться, образуя своеобразную сеть рассуждения. В начале этих цепочек находятся безусловно истинные факты или суждения (их с некоторым приближением можно отнести к классу аксиом), в конце — те, которые до построения рассуждения относились к разряду сомнительных или неизвестных [2].

Цепочки суждений строятся по определенным правилам (например, «сочленять можно только пару суждений, если конец первого суждения и начало второго суждения соответствуют одному термину» или «в несимметричных суждениях термины нельзя менять местами»). Комплекс этих правил и способов построения цепочек рассуждений изучается логикой. Если учесть, что усилиями большой плеяды математиков и философов в настоящее время появился помимо классической логики целый ряд альтернативных «неклассических» логик («логика умолчаний», «немонотонная логика», «паранепротиворечивая логика» и т. д.) со своими критериями правильности рассуждений, то мы имеем большой выбор правил и можем теперь в тех случаях, когда сомнительное суждение не выводится в одной логике, переходить к какой-либо другой логике и добиваться успеха. Это многообразие логик — одно из многочисленных «достижений» нашего столетия. Кроме того, такой же успех обеспечен нам даже в рамках классической логики, если мы предвзято отнесемся к выбору фактов, терминов и суждений для использования их в качестве аксиом.

Рассмотрим какую-либо, созданную на добровольной основе, группу индивидуумов (например, члены родительского комитета, Ассоциации Парапсихологии, участники научного симпозиума и т. д.). Что же для каждой из них является групповым сознанием? На первый взгляд, это совокупность разнообразных мнений и даже правил логики. А что же их объединяет в таком случае? Конечно же, искусно созданный миф (или идеология), построение которого должно реализовываться как рассуждение, в котором аксиомами являются бесспорные для данной группы суждения, а правила логики доступны и понятны если не всем, то, по крайней мере, большинству. Если же правила логики доступны только узкому кругу людей (например, ситуация, в которой сейчас находится современная математическая логика), то любой миф, основанный на этих правилах, при выходе за рамки этого узкого круга индивидуумов оказывается неприемлемым.

В содержании многих мифов часто заложены аксиомы, которые трудно обосновать с помощью какой-либо, даже неклассической, логики. Например, в основе многих современных мифов явно или неявно содержится аксиома «Если будете безусловно верить мифотворцу (или мифоносителю), то станете умнее (счастливее, здоровее, сильнее и т. д.)», причем во многих случаях логические основания для такой «аксиомы» весьма сомнительные. Но даже в этих случаях подобные мифы имеют успех в определенных группах индивидуумов, в основном у людей с раздробленным сознанием, подготовленным для внедрения какого-либо авторитарного мифа. Механизм такого внедрения во многом напоминает механизм гипноза: вначале с помощью пассов или словесных внушений гипнотизера дробится сознание индивидуума (или группы индивидуумов), после чего отдается подчиняющий воле гипнотизера словесный приказ, который в сознании гипнотизируемых преобразуется в скрытую установку или доминанту, и человек, не осознавая этого, становится «зомби». Гипнотизеры или «гуру» часто действуют, как и политики, по принципу «разделяй и властвуй» — только этот принцип реализуется в ином измерении. Поэтому нет ничего удивительного, что многие мифы проникают в наше сознание без соответствующего критического анализа и владеют нами под влиянием чисто психологических факторов, мешая адекватному восприятию других, даже более обоснованных, мифов.

В заключение этого раздела имеет смысл более подробно рассмотреть взятое в качестве эпиграфа к нему определение мифа, сформулированное А. Ф. Лосевым, которое в отрыве от основного текста кажется не совсем понятным. Работы А. Ф. Лосева по диалектике мифа в основном направлены на обоснование связи мифа с *чудом*. Так в чем же заключаются *чудесные* свойства мифа? *Чудо* начинается тогда, когда миф в каком-либо личностном восприятии становится *верой*. Вера помогает человеку исцелиться в безнадежных случаях, совершить деяния, необъяснимые с точки зрения голого рассудка. Но у каждой медали есть своя оборотная сторона. Вера делает человека слепым в тех случаях, когда перед его глазами или разумом возникает нечто противоречащее основным положениям мифа, завладевшего его сознанием. И преодолеть эту слепоту часто не в состоянии ни бесспорные факты, ни безупречные доводы.

1.3. ПСИХОЭТИКА МИФОВ

> «Согласимся, пожалуй, с Бентамом и при всяком происшествии будем спрашивать самих себя, на что оно может быть полезно, но в следующем порядке: 1-е — человечеству, 2-е — родине, 3-е — кругу друзей или семейству, 4-е — самим себе.
>
> Начинать эту прогрессию наизворот есть источник всех зол, которые окружают человека с колыбели. Что только полезно самим нам, то, отражаясь о семейство, о родину, о человечество, непременно возвратится к самому человеку в виде бедствия».
>
> **В. Ф. Одоевский**

В настоящее время термины «этика» и «этические принципы» не входят в число основных понятий обширного конгломерата психологических наук. Результатом такого пренебрежения к понятию «этика» является то, что с точки зрения разнообразных психологических типологий в один и тот же класс могут попасть индивиды или социальные группы с отличающимися этическими принципами, которыми они руководствуются в своей деятельности. Эти группы могут иметь одинаковые цели, но разные средства для их достижения: например, если у одних насилие и террор неприемлемы, то у других — приняты как необходимые для достижения вроде бы тех же целей. При этом надо учесть, что выбор тех или иных «средств» приводит к тому, что сами цели, на первый взгляд, одинаковые по смыслу, становятся принципиально различными. В основе этих «средств» как раз и находится этика. Таким образом, «чистая» психология так же как и многие ее разделы (патопсихология, социальная психология, политическая психология и т. д.), оказываются недостаточными для адекватного описания объектов своих исследований — личности или социальной группы.

Комплекс этических принципов, не всегда явно сформулированных, которыми руководствуется определенный индивид или определенная социальная группа, является определенным свойством индивида или социальной группы. Это свойство по своему статусу является промежуточным между некоторыми психологическими характеристиками (например, «доминанта» или «установка») и философской характеристикой «мировоззрение». Поскольку в литературе автору не удалось найти термина, обозначающего это свойство, предлагаем для его обозначения термины «психоэтика» (применительно к индивидууму) и «социоэтика» (применительно к социальной группе). Проанализируем связи между этими понятиями и некоторыми другими психологическими характеристиками.

Во многих известных философских системах предпринималась попытка построить систему этических правил, исходя из каких-либо первичных оснований. В качестве таких оснований иногда принимались некоторые свойства человека или группы (например, «категорический императив» И. Канта, «классовое сознание» у классиков диалектического материализма, «чувство стыда» и «чувство красоты» у В. С. Соловьева, «стремление к объединению» у П. А. Кропоткина). Однако оказывалось, что эти идеальные первичные основания допускали множество взаимоисключающих толкований, либо же имели весьма отдаленную связь с человеческой сутью этики (например, математизированная система этики Б. Спинозы). Такие системы обоснования этики были весьма абстрактны и либо находили признание лишь в довольно узком кругу интеллектуалов, либо, взятые на вооружение стремящимися к власти авантюристами, рано или поздно обнаруживали на практике свою несостоятельность. В этом плане религиозная этика оказалась более реалистичной и более устойчивой, чем этика многих убежденных материалистов, так как она исходит из реальных качеств человека, некоторые из которых ведут человечество к взаимному истреблению и неизбежной гибели в будущем. И спасением его является лишь Истинная Этика.

Подробный анализ различных этических систем выходит за рамки данной книги. Здесь нам придется согласиться с тем, что в настоящее время единой общепризнанной этики не существует. Мало того, каждый из нас в зависимости от обстоятельств в разное время руководствуется принципиально различными этическими нормами, хотя эти переходы из одного класса этических норм в другой мы сами часто и не замечаем. Речь в данном случае идет не об элементарной беспринципности или двуличии, а о том, что мы в одно и то же время являемся и индивидами, борющимися за свое собственное существование, и членами больших и малых социальных групп (семьи, производственной или общественной организации, религиозной конфессии, нации, государства и т. д.). Конфликты между этими различными сферами нашей жизни для некоторых людей могут оказаться причиной сильных душевных потрясений, другие же их просто не замечают, но реальность их несомненна, и в основе этих конфликтов лежат различные этические нормы, на основе которых формируются и существуют эти социальные группы.

Решаются такого рода конфликты по-разному. Одни обращаются в поисках ответа к духовному культурному и философскому наследию человечества, другие прибегают к помощи специалистов по психоанализу, третьи, возможно, самые слабые и незащищенные, становятся жертвами различного рода новоявленных сект, лжепророков и «спасителей рода человеческого», число которых в обществе резко возрастает в период государственной смуты. Многие методы психологического воздействия, которыми раньше владели лишь немногие «избранные» — жрецы, колдуны, шаманы и т. д., стали достоянием современной открытой науки и применяются не только для лечения неврозов и психозов, но и для оболванивания больших групп людей весьма сомнительными личностями.

Трудно, а может быть, и невозможно дать однозначный ответ на вопрос: заложен ли «нравственный инстинкт» в самой природе человека? К сожалению, многие печально известные факты истории и нашей повседневной жизни не позволяют сделать этого. Если взглянуть на эту проблему с эволюционной точки зрения, то какие-то зачатки «нравственного инстинкта» можно найти у животных. Например, в волчьей стае неукоснительно соблюдается принцип «лежачего не бьют»: толчком для снятия агрессии во время «разборок» является поза покорности или незащищенное горло соперника.

Известный, но незаслуженно забытый русский писатель, публицист, просветитель, педагог и философ В. Ф. Одоевский (1804–1869) тесно связывал «нравственный инстинкт» и с национальным самосознанием и с познавательной способностью человека [3]. Чтобы лучше понять точку зрения В. Ф. Одоевского, предоставим слово ему самому (думаю, читатели простят мне длинные цитаты):

«В сем нравственном инстинкте, кажется, лежат основания всех наших знаний и чувствований; он отнюдь не одинаков у всех людей; всякий имеет его в разной степени; ближайшие степени понимают друг друга, отдаленные не понимают; мы нашими знаниями и действиями должны бы развить это чувство, но мы не замечаем его в чаду наших предметов; мы следуем указаниям страстей, расчетов, систем. К сему чувству должен обращаться ученый, а тем более поэт; ученый, обращающийся к сему чувству, поэтизирует науку; поэт делается предвещателем...»

«Нравственный инстинкт требует развития, как всякая другая сила человека...»

«Одно материальное просвещение, образование одного рассудка, одного расчета, без всякого внимания к инстинктуальному, невольному побуждению сердца, словом, одна наука без чувства религиозной любви может достигнуть высшей степени развития. Но, развившись в одном эгоистическом направлении, беспрестанно удовлетворяя потребностям человека, предупреждая все его физические желания, она растлит его; плоть победит дух (сего-то и боится религия); мало-помалу погружаясь в телесные наслаждения, человек забудет о том, что призвало их; пройдет напрасно время, в которое бы человек должен был двинуться далее; но в природе не даром летит это время; природа покорная (без свободной воли) вышним судьбам, совершит путь свой и вдруг явится человеку с новыми, неожиданными им силами, пересилит его и погребет его под развалинами его старого обветшалого здания! Такова причина гибели стольких познаний, которыми древние превышали новейших. Так будет и с нами, если религиозное чувство бескорыстной любви не соединится с нашим просвещением».

В своих поисках истины В. Ф. Одоевский, один из немногих энциклопедистов своего времени, шел, если использовать его терминологию, «по узкому пути», стремясь избежать предвзятости в своих оценках. Результатом явилось то, что его не поняли и не приняли ни либералы, ни ревнители «сильной власти», ни славянофилы, ни западники. Даже В. Г. Белинский, положительно (а порой и восторженно) оценивая литературные достоинства произведений Одоевского, тем не менее ставил ему в упрек «чрезмерную дидактичность». И этот упрек, если учесть громадное влияние Белинского на российское образованное общество, стал для идей, высказанных Одоевским, своеобразным обвинительным заключением на многие последующие десятилетия.

Разумеется, эти цитаты не отражают всей глубины философского мировоззрения и прозорливости В. Ф. Одоевского. И «нравственный инстинкт», видимо, не так просто выделить и обосновать как заложенную природой мотивацию человека. Но среди психологических характеристик человека есть одна четкая характеристика, имеющая непосредственное отношение к формированию «нравственного инстинкта», хотя она почему-то прошла мимо внимания многих психологов и философов. Это — *стремление к власти*. Другая сторона этой характеристики — *способность признания власти*.

Стремление к власти так или иначе реализуется всегда, если устойчивая группа состоит хотя бы из двух человек. Кто-то считает себя более компетентным в данном вопросе, кто-то хочет сказать последнее слово в споре или в науке, кто-то хочет иметь возможность купить все, что продается, и всех, кто продается, и т. д. и т. п. Возможны группы, в которых при осуществлении разных видов деятельности лидеры меняются местами. Даже в самых, казалось бы, безобидных научных спорах стремление к власти проявляется в большей или меньшей степени — нередко в науке торжествует не самая лучшая точка зрения только потому, что она имеет под собой более мощную чисто психологическую подоплеку (яркая и сильная личность носителя мифа, многочисленность последователей и т. д.). Это обстоятельство подтверждает даже статистика: установлено, что средний период времени между моментом открытия выдающейся научной идеи и ее признанием составляет 11 лет. Такой большой срок обусловлен не только инерцией мышления (старые мифы в сознании человека стремятся удержать свои позиции), но и сопротивлением главных идеологов знания в этот период времени.

Стремление к власти и признание власти пронизывают всю нашу сознательную и подсознательную жизнь. Например, учителю, чтобы привлечь внимание многих учеников, требуются не только определенный общественный статус и глубокие знания, но и некоторые психологические особенности, которые тесно связаны с методами достижения власти. Даже очарование в любви есть эмоционально окрашенное и не всегда полностью осознаваемое признание власти духовного или физического совершенства. И, возможно, что многие носители зла среди людей — это индивидуумы, у которых в силу каких-то причин оказалось ущемленным гипертрофированное стремление к власти.

Самое удивительное, что даже в весьма глубоких работах по психологии и политической психологии стремление к власти и признание власти не выделяются в качестве основных мотивов человеческой деятельности (в частности, политической деятельности [4]). Трудно не видеть, что политическая деятельность — это в первую очередь борьба за власть, даже если в основе этой борьбы лежат самые благородные побуждения. Человек, отдавший на суд общественности литературный, философский или научный труд, тоже борется за власть, точнее, за признание хотя бы некоторыми людьми нетрадиционных, как ему кажется, особенностей его собственного мировоззрения.

Стремление к власти не является непосредственным следствием стремления к выживанию — в историях народов, устойчивых групп, семейных династий и т. д. немало примеров, когда ради достижения власти ставились на карту благополучие и жизнь близких людей и даже собственная жизнь. Эволюционная необходимость стремления к власти тоже достаточно обоснована — в любой устойчивой группе даже из двух человек для обеспечения ее стабильности требуется лидер, необходимо также, чтобы его путь к лидерству был тернистым. Легкие пути к власти, скорее, исключение, чем правило.

Еще со времен античности было выделено два способа достижения превосходства в споре: «к толпе» и «к разуму». В более общем случае стремление к власти реализуется с помощью двух противоположных с точки зрения этики методов воздействия: «авторитарного» и «разумного». В первом случае индивид

стремится возвыситься за счет подавления воли и разума других индивидов, во втором — за счет обращения к их разуму и обогащения их разума. Прошло более двух тысячелетий после этого открытия, а человечество осталось на том же уровне и не стремится воспользоваться им, чтобы вовремя распознавать рвущихся к власти авантюристов и мизантропов.

Эмоции окружающих — питательная среда для стремления к власти и в значительной степени индикатор этого скрытого или тщательно скрываемого мотива. Для многих людей, реализующих этот мотив, питательной средой являются положительные эмоции окружающих — этих людей с точки зрения психоэтики можно считать нормальными. К противоположному полюсу относятся люди, для которых питательной средой является обстановка страха и слепого поклонения. Ведь «монстр» (индивид, преступления которого отличаются особой жестокостью) истязает свою жертву не из любви к анатомическим исследованиям, а из желания окунуться в эмоции страха и ужаса жертвы.

Часто власть достигается и поддерживается с помощью примитивных психологических приемов внушения, во многом сходных с бюрократическими методами подавления инициативы. Иногда это стремление к власти завуалировано, казалось бы, гуманными целями, с которыми обращаются к людям многочисленные «гуру», «целители» и «спасители рода человеческого». Их влияние особенно усилилось в последнее время, и это вполне объяснимо, если учесть, что такое «целительство» приносит иногда положительные результаты, так как число психосоматических заболеваний среди людей весьма велико и постоянно увеличивается. Во многом это обусловлено отсутствием простой и понятной для многих людей научно обоснованной философской парадигмы.

Многие люди, стремящиеся к тем или иным формам власти, до поры до времени скрывают от окружающих и, возможно, до конца не осознают полностью, что многими их поступками движет именно этот мотив. Само по себе это стремление, вопреки устоявшемуся мнению, не является чем-то постыдным, но здесь весьма важно знать, к какой форме власти стремится данный индивид. Если в нем заложено или воспитано стремление к достижению беспрекословного подчинения или поклонения окружающих, то последствия его прихода к большой власти могут оказаться самыми трагичными, даже если эта власть на первых порах не выходит за рамки научного мифотворчества. Ярким примером этого является Т. Д. Лысенко в отечественной биологии, сумевший развалить отечественную генетику, а заодно уничтожить или убрать из науки тех, кто не признавал за безусловную истину отстаиваемый им миф.

Человек разумный живет в мире мифов и для более уверенной ориентации в среде обитания вынужден выбирать для себя определенный миф или определенную совокупность мифов. Выбор этих мифов далеко не во всех случаях обусловлен логическими соображениями или познавательными мотивами, а определенными внешними и не всегда отчетливо проявляющимися свойствами мифа, которые могут оказаться приемлемыми или неприемлемыми для данного индивида. В этих свойствах большую роль играют такие качества мифа, как его доступность для восприятия, контингент его носителей и приверженцев, декларируемые или подразумеваемые средства, с помощью которых предполагается внедрение мифа в социальной среде, его направленность на определенную социальную группу, определение «врагов» этого мифа и т. д. Все эти качества имеют непосредственное отношение к тому, что здесь названо *социоэтикой мифа*. Социоэтика мифа тесно связана с психоэтикой тех, кто создавал и совершенствовал этот миф, и тех, кто поверил этому мифу и стал его носителем.

При выборе мифа определенным индивидуумом большую роль играет его предрасположенность к принятию «правил игры», обусловленных социоэтикой определенного мифа и его стремлением оказаться во власти мифа или мифотворца и в то же время сохранить хотя бы какое-то чувство свободы. Взаимодействие психоэтик и социоэтик в динамическом мире мифов еще не исследовано и поэтому говорить сейчас о каких-то четких методических рекомендациях преждевременно. В мою задачу входит лишь обоснование реальности этого взаимодействия и целесообразности его более подробного изучения. Однако несколько общих соображений по этому поводу все же хотелось бы высказать.

Когда речь идет о познании и о творчестве в сфере познания, то здесь, разумеется, немалую роль играет чувство свободы. Но часто оказывается так, что человек, стремящийся обрести свободу с помощью отказа от определенных этических норм, попадает во власть определенного, возможно, созданного им самим, авторитарного мифа и тем самым становится рабом этого мифа, а заодно и слепцом, не замечающим все те ошибки, которые сопровождают любой, даже самый, казалось бы, строго обоснованный миф, особенно в начальной стадии его становления. А внешние признаки таких авторитарных мифов весьма прозрачны — неэтичное пресечение каких-либо дискуссий по поводу мифа. О том, как часто прибегали к навешиванию ярлыков и обидных прозвищ идеологи марксизма, знают многие. Но подобные случаи происходили и в «чистой» науке. Многим известны слова Д. Гильберта: «Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор», но мало кто помнит, что попытки критики программы Гильберта формализации математики сам Гильберт охарактеризовал как «попытку организовать

путч». В стане «путчистов» оказались такие известные математики, как Л. Э. Я. Брауэр, Г. Вейль и к тому времени давно почивший Л. Кронекер, один из первых критиков теории множеств Г. Кантора.

Иногда эти дискуссии пресекаются прямыми авторитарными методами (например, гласный или негласный запрет в некоторых научных журналах публикаций любых дискуссионных или антагонистичных определенному мифу статей), а иногда и косвенными, когда язык мифа настолько непонятен, что отбивает охоту у любого здравомыслящего критика ввязываться в дискуссию. Анализ этих косвенных методов пресечения дискуссий с точки зрения здравого смысла относится уже к детальным методам исследования. О них разговор пойдет в следующих главах.

2. ЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЗДРАВОГО СМЫСЛА

2.1. АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ПРОБЛЕМ СОВРЕМЕННОЙ ЛОГИКИ

> «Если бы несовершенства языка как орудия познания были взвешены более основательно, то часть споров, создающих столько шума, прекратилась бы сама собой, и путь к знанию, а, может быть, также и к миру, стал бы более свободным, чем в настоящее время».
>
> **Джон Локк**

Отрицательная или положительная оценка мифа на основе психоэтики или социоэтики так же как и мировоззренческая оценка, является лишь предварительной оценкой, но не доказательством ошибочности или правильной обоснованности мифа. Такого рода оценки лишь помогают ориентироваться в безбрежном океане современных мифов, но не дают четкой гарантии правильного выбора. Для более точной оценки требуются более тонкие методы анализа — логические. Эти методы позволяют не только отвергать или принимать определенные мифы, но и выявлять в них неточности и ошибки, преодоление которых позволяет существенно обогатить миф. Однако применение логических методов связано с большими трудностями и требует в первую очередь не только искусства, но и большой эрудиции, поскольку современная логика как наука содержит в себе не только обширный арсенал методов анализа, но и многочисленные нерешенные проблемы, а в некоторых случаях и заблуждения, принятые сейчас как истины.

В настоящее время образцом для подражания и источником основных идей и методов для большинства научных мифов является математика, которая также представляет собой совокупность слабо связанных мифов (математических теорий и подходов). Попытки связать эти разрозненные мифы в единый миф предпринимались давно. Одним из выдающихся представителей идеи единения в математике был философ и математик Г. В. Лейбниц (1646–1716), предпринявший попытку объединить не только математику, но и все остальные науки на основе логики. Многие результаты его математических исследований в области логики стали основой для зарождения математической логики, которая считается (с этим, правда, согласны не все математики) объединяющей теорией математики. В первой половине нашего столетия математическую логику пытались представить как основу всего познания представители аналитической философии и логического позитивизма. Некоторые из них (Б. Рассел, Г. Рейхенбах, В. Куайн, А. Н. Уайтхед и др.) внесли значительный вклад в развитие самой математической логики. Однако под давлением весьма обоснованной критики как со стороны философов, ориентирующихся на «поток сознания» (экзистенциализм и связанные с ним феноменологии), так и со стороны философов, защищавших основные положения теории познания диалектического материализма, идея построить теорию познания на основе формальной логики оказалась непопулярной. Но с утратой популярности этой идеи в мире научных и философских мифов сложилась весьма парадоксальная ситуация: математическая логика настолько обросла многочисленными специальными терминами и непонятными для неспециалиста подробностями, что перестала восприниматься не только философами, но и многими специалистами в точных науках, и превратилась, по выражению философа К. А. Свасьяна, в «своеобразный род переписки между специалистами» [5]. В то же время многие появляющиеся сейчас научные и философские мифы, авторы которых весьма пренебрежительно относятся к логике, грешат элементарными логическими ошибками. И эти ошибки обнаруживаются не только в следствиях, но и в основных предпосылках мифов.

В настоящее время многие математические теории принято излагать на основе теории формальных систем (ТФС), бурное развитие которой началось на рубеже XIX–XX столетий. Своеобразным толчком для этого развития оказались парадоксы теории множеств, основоположником которой считается немецкий математик Георг Кантор. Эти парадоксы весьма разнообразны, но структура рассуждений у них имеет много общих свойств. Основной из них — парадокс Рассела, который ставит под сомнение соотношение между двумя основными понятиями теории множеств — «множества» и «элемента». Суть этого парадокса в следующем.

Каждое множество состоит из объектов, которые называются элементами множества. Ясно, что большинство множеств не являются элементами самих себя (например, множество всех котов не есть кот). Назовем такие множества *несамоприменимыми*. Но имеются множества, которые содержат себя в качестве элементов, например, множество всех множеств. Такие множества назовем *самоприменимыми*. Рассмотрим теперь множество S всех несамоприменимых множеств. Спрашивается, к какому типу относится само это множество? Предположим, что оно несамоприменимо. Тогда оно должно быть элементом самого себя и в силу определения самоприменимости является самоприменимым. Предположим теперь, что оно самоприменимо. Тогда получается, что оно содержит в своем составе себя, что противоречит определению множества S как множества несамоприменимых множеств.

У всех, кто впервые знакомится с этим парадоксом, возникает ощущение, что тут что-то не в порядке с логикой. Но авторитет специалистов по математической логике, уверяющих, что это не так, настолько велик, что это ощущение пропадает. Этот авторитет пытался развеять в начале нашего века математик и философ А. Пуанкаре [6], но ему не поверили. Попробуем все же еще раз усомниться в логической корректности формулировки парадокса.

Рассмотрим само определение самоприменимости. Оно является отрицанием свойства несамоприменимости, которое присуще обычным множествам. Существование множеств со свойством самоприменимости доказывается примером «множества всех множеств». Но множество всех множеств тоже не является самоприменимым, потому что это множество содержится не в самом множестве всех множеств, а в множестве всех его подмножеств, а это уже другое множество (стало быть, здесь имеет место подмена термина!). С некоторым приближением самоприменимыми множествами можно считать множества, состоящие точно из одного элемента: множество из одного кота можно назвать котом. Но тогда множество S не может быть самоприменимым, даже если оно содержит самого себя и хотя бы множество всех котов, т. е. содержит в себе более одного элемента.

Несомненно, что такое «нестрогое» объяснение этого парадокса не для всех убедительно. Более строгий анализ этого парадокса на основе некоторых точных математических соотношений приведен в гл. 3.

Логики не заметили, что в формулировках этого и многих других парадоксов, связанных с теорией множеств, содержатся логические ошибки, известные еще античным философам, и стали создавать формальную логику, в которой можно найти множество новых и порой весьма небрежно определенных терминов, но в которой невозможно найти формального определения этих ошибок. Впоследствии эта логика приобрела новые свойства, которые опять же вступили в противоречие со здравым смыслом. Эти свойства обнаружились в тридцатых годах нашего столетия и получили название «неполноты формальных систем».

В чем заключается суть «неполноты»? Если отвлечься от многих символов и терминов ТФС, то суть ее сравнительно проста. В ТФС существует два вида правил: 1) правила, с помощью которых формулируются синтаксически правильные предложения (формулы); 2) правила, с помощью которых выводятся истинные предложения. Чтобы в какой-либо формальной системе проверить истинность произвольного синтаксически правильного предложения, необходимо проверить, можно ли это предложение вывести из аксиом с помощью правил вывода формальной системы. Казалось бы, все ясно: если предложение синтаксически правильно и выводимо, то оно истинно, в противном случае — ложно. Но оказывается, что в некоторых формальных системах существуют такие предложения, которые истинны и невыводимы. Эти системы как раз и являются неполными формальными системами. Но пусть бы такие системы существовали только в воображении некоторых математиков — это было бы еще полбеды. Но дело в том, что к этим системам относятся формальные описания некоторых математических систем, которые используются в повседневной практике, например формальная система арифметики. Арифметика всегда считалась логически непогрешимой, и математик Курт Гедель, который предложил метод доказательства неполноты формальной системы арифметики, обессмертил свое имя.

Попробуем разобраться, что означает свойство неполноты формальных систем. Оказывается, в формальных системах со свойством неполноты можно сформулировать хотя бы одно синтаксически правильное предложение, которое невозможно доказать или опровергнуть. Чтобы узнать, что означает невозможность доказать или опровергнуть, придется обратиться к доказательствам этой невозможности. Эти доказательства приводятся во многих работах по основаниям математической логики и весьма сложны для понимания, потому что требуют знания многих сложных понятий математической логики. Но все они сводятся к одному: для предложения, которое невозможно доказать или опровергнуть вначале приводится доказательство его выводимости с помощью правил вывода, а затем приводится доказательство выводимости отрицания этого предложения. Другими словами, *недоказуемым в формальной системе называется предложение, которое выводимо с помощью правил вывода, но при этом с помощью тех же правил вывода выводимо отрицание этого предложения*. И здесь возникает естественный вопрос: если правила вывода в ТФС считаются логическими правилами, то почему свойство этих правил выводить в некоторых формальных системах как само предложение, так и его отрицание, называется «неполнотой» исследуемой системы, а не «противоречивостью»?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо узнать, что понимается под *непротиворечивостью* в ТФС. Допускаются два принципиально разных определения непротиворечивости. Рассмотрим их по порядку.

В первом утверждается, что формальная теория противоречива, если в ней выводимы все синтаксические правильные предложения (формулы), в противном случае она непротиворечива [7, с. 69]. Это означает, что в противоречивой формальной теории любое предложение выводимо вместе со своим отрицанием. Такое определение является своеобразной формализацией известного философского принципа: «из противоречия можно вывести все, что угодно». Стоит отметить, что некоторые другие известные специалисты по математической логике формулируют это определение более осторожно или вообще избегают его использовать, и для такой осторожности есть основания, о которых будет сказано чуть позже.

Во втором определении непротиворечивость связывается с понятием интерпретации. Под *интерпретацией* понимается представление аксиом и правил вывода в формальной теории в виде соотношений какой-то другой теории, непротиворечивость которой установлена.

Теперь сопоставим первое определение непротиворечивости с «неполнотой». Оказывается, что это определение непротиворечивости является своеобразным оправданием «неполноты». В самом деле, если в какой-то формальной теории мы установили, что хотя бы для одного истинного в данной теории предложения невозможно доказать его отрицание, то эта теория будет уже непротиворечивой, даже если все остальные предложения этой теории «недоказуемы» (т. е. выводятся вместе со своим отрицанием). Но в такой ситуации более естественным кажется вывод о том, что в самих основах теории содержатся скрытые противоречия. Мы же вынуждены довольствоваться установленным в ТФС *соглашением* о том, что эти основы непротиворечивы. Однако такого рода соглашения не кажутся логичными. Вряд ли со мной сейчас согласятся многие математики, но представляется, что о такой логике даже не могли и мечтать все схоласты прошлых веков.

Первое определение непротиворечивости также не выдерживает критики с познавательной точки зрения. Допустим, некто создал теорию и начал проверять ее непротиворечивость. Столкнувшись с первым противоречием, он может выбрать две стратегии: 1) строить из посылок все заключения, чтобы убедиться, что действительно из данных посылок выводится «все, что угодно»; 2) остановиться на первом полученном противоречии и попытаться его проанализировать и, возможно, внести коррективы в некоторые исходные посылки. Первая стратегия соответствует духу ТФС, в то время как вторая гораздо чаще используется в реальной жизни. В п. 3.5 будет показано, как эту вторую стратегию можно формализовать.

Перейдем ко второму определению непротиворечивости. В истории развития логики в качестве интерпретаций, на основе которых можно было бы строго обосновать законы и правила логики, использовались некоторые математические системы: арифметика, универсальная алгебра, алгебра классов, теория множеств. Рассмотрим эти системы по порядку.

До некоторых пор арифметика считалась одним из самых надежных возможных фундаментов для формальной логики, но после публикации знаменитой статьи К. Геделя о «неполноте арифметики» уверенность в этом заметно пошатнулась. Многие из тех, кто пытался объяснить этот «сокрушительный», по мнению многих философов и математиков, результат, не соизволили заметить, что речь в статье Геделя шла не о «повседневной» арифметике, а об арифметике, основы которой сформулированы в соответствии с правилами и традициями ТФС. Этот незамеченный нюанс отражен даже в названии его знаменитой работы («On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems»). Если же под арифметикой понимать алгебру числовых структур, в которой выбор произвольных предложений существенно ограничен по сравнению с выбором, предусмотренным в ТФС, то в такой арифметике доказать «неполноту» уже невозможно. Поэтому пользователи арифметики, занимающиеся подсчетом семейного бюджета или расчетом предполагаемой орбиты очередного спутника Земли, могут спать спокойно — власть «неполноты» на них не распространяется.

Универсальная алгебра как интерпретация логики рассматривалась в работах многих математиков. Одним из пионеров этого направления можно считать математика А. И. Мальцева [8]. Однако для философской логики интерпретация на основе универсальной алгебры весьма сложна. И, возможно, пришлось бы остановиться на этой интерпретации, если бы не было другого выбора.

Нам осталось рассмотреть теорию множеств и алгебру классов. Теории множеств Г. Кантора как основополагающей теории математики не суждено было оправдать возлагавшихся на нее надежд: после обнаружения в ней парадоксов (один из них был обнаружен самим Кантором) в основаниях математики стал наиболее популярным формальный подход, преобразовавшийся впоследствии в ТФС. Но причина невозможности использования теории множеств в качестве интерпретации заключается не только в известных парадоксах. Понять эту причину можно, внимательно присмотревшись к другой возможной интерпретации логики — алгебре классов. Здесь, правда, имеется одна терминологическая неувязка: то, что сейчас в традиционной логике [9] принято называть алгеброй классов, на самом деле представляет собой строгую и точную математическую систему, называемую «алгеброй множеств». А терминологическая неувязка возникла из-за того, что некоторые философы и специалисты по логике, видимо, отождествляют алгебру множеств с «запятнавшей себя» противоречиями теорией множеств и поэтому пытаются избежать даже упоминания термина «множество». Чтобы прояснить эту ситуацию, рассмотрим подробно алгебру множеств и заодно то, как она соотносится с теорией множеств Кантора.

2.2. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

В начале XX века после многочисленных споров и дискуссий здание математической логики начали строить по принципам, которые выразили в своих многочисленных трудах и выступлениях математики и философы, считающиеся классиками современной математической логики: Г. Фреге, Дж. Пеано, Д. Гильберт, Б. Рассел, А. Н. Уайтхед, Л. Витгенштейн и др. В современной математической логике эти принципы реализовались в виде определенной системы символов, которая в упрощенном варианте выглядит следующим образом.

Объектом изучения математической логики являются символы (знаки), и в этом отношении она имеет много точек пересечений с семиотикой — наукой о знаковых системах. В основу любой логической системы закладываются несколько групп символов.

Первая группа — *символы для констант и переменных* (иногда они разделяются на две подгруппы: отдельно для констант и отдельно для переменных). Если использовать «запрещенные» понятия, связанные с множествами, то константы являются конкретными элементами некоторых множеств, а переменные — неконкретно заданными элементами множеств (их конкретизация в некоторых логических системах является одной из задач математической логики). Область определения переменных в математической логике устанавливать необязательно (иначе трудно обойтись без термина «множество»), но уж если область определения все-таки необходима, то можно назвать эту область определения *сортом* и перейти к одному из вариантов математической логики — *многосортной логике.*

Вторая группа — *логические символы* и *скобки.* К логическим символам относятся: & (и), $\vee$ (или), $\neg$ (не), $\supset$ (импликация). Смысл первых трех символов и их связь с понятиями традиционной логики понятны. Что же касается импликации, то математически она определена вполне корректно: выражение $A \supset B$ равносильно выражению $(\neg A) \vee B$ (не A или B). А вот содержательный смысл импликации не совсем понятен.

Некоторые логики и математики считают, что $A \supset B$ означает то же самое, что и «если A, то B». Такого же мнения придерживаются и многие из тех, кто математическую логику знают весьма поверхностно. Другие же считают, что импликация не имеет никакого отношения к понятию «следование» в «обычной» логике. Но мы пока что не будем вмешиваться в эти споры, а перейдем к следующим группам символов. Заметим, что первые две группы символов достаточны для построения системы *исчисления высказываний*, если первую группу символов использовать для обозначения некоторых «элементарных» высказываний, которые могут быть либо истинными, либо ложными. Содержание же этих высказываний может быть любым (например, «Все вороны белые») — с точки зрения исчисления высказываний оно не существенно. Важна лишь его логическая оценка (истинно или ложно).

Следующая более высокая ступень знаний в математической логике — это *исчисление предикатов*. Здесь уже к логическим символам добавляются еще два: $\forall$ (все) и $\exists$ («некоторые» или «существуют»). Эти символы называются *кванторами*. Кроме кванторов в исчислении предикатов используются еще две группы символов: символы для обозначения *функций* и символы для обозначения *предикатов*. Константы, переменные и функции являются *термами*, а предикаты — *формулами* (точнее, атомарными формулами). С точки зрения строгих канонов математической логики разница между термами и формулами определяется с помощью сугубо синтаксических правил. Содержательный смысл этих понятий можно определить, если воспользоваться некоторыми понятиями универсальной алгебры, но в работах по математической логике этот смысл, как правило, не раскрывается.

Если мы запомнили (или где-нибудь записали) эти символы и правила обращения с ними, то теперь предлагается освоить более высокую ступень логических знаний — изучить правила построения из введенных символов *синтаксически правильных выражений*. В некоторых руководствах по математической логике эти синтаксически правильные выражения называют «п.п.ф.» — правильно построенные формулы. Правила построения (а некоторые из них весьма сложны для усвоения) мы здесь рассматривать не будем, а сразу перейдем к аксиомам и правилам вывода.

Аксиомы — это некоторое множество (в этом определении слово «множество» разрешается использовать) синтаксически правильных формул, о которых специалистам по математической логике достоверно известно, что они *общезначимы*. В обыденном представлении это означает, что они всегда истинны независимо от того, что содержится в этой формуле вместо некоторых знаков, входящих в нее. Например, в исчислении высказываний содержится всего три аксиомы [10]:

1) $A \supset (B \supset A)$;
2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;
3) $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.

В эти аксиомы вместо символов A, B и C мы можем подставлять все, что угодно — истинность формул при этом сохранится.

Правила вывода — это правила, с помощью которых можно некоторое множество исходных формул преобразовывать в другие формулы. Для исчисления высказываний, например, достаточными являются следующие два правила:

1) *правило подстановки* позволяет вместо символов A, B и C в приведенных выше аксиомах подставлять любые синтаксически правильные формулы и выражения исчисления высказываний;

2) *правило Modus ponens*: из A и $A \supset B$ следует B.

Заметим, что смысл слова «следует» в правиле Modus ponens не совпадает со смыслом импликации. В грубом приближении «следование» в правилах вывода означает «выводимость» и, как правило, обозначается другим символом, обычно «$\Rightarrow$».

Чтобы получить систему аксиом и правил вывода исчисления предикатов, достаточно добавить в приведенную выше систему аксиом исчисления высказываний еще две аксиомы, а в состав правил — еще одно правило [10, с. 65]. Кроме того, правило подстановки нужно распространить на некоторые формулы и выражения исчисления предикатов. Смысл этих добавлений уже весьма трудно понять без знания синтаксических правил и освоения некоторых довольно сложных понятий, таких как «терм», «формула», «свободная и связанная переменные», «теория» и др. Заметим, что термин «теория» в математической логике имеет весьма отдаленное смысловое сходство со словом «теория» в естественном языке.

Кроме того, в данной системе можно не ограничиваться установленными аксиомами, но добавлять к ней еще какие-то аксиомы, что позволяет создавать новые «теории». Эти новые аксиомы называются «собственными» или «нелогическими» аксиомами. Таким образом, в математической логике обеспечивается полная свобода творчества, тем более привлекательная, что вопрос о противоречивости новоявленных теорий решается весьма непросто и в силу этого часто игнорируется. Правила вывода изменять не рекомендуется, так же как не рекомендуется исключать из теорий «логические» аксиомы. Впрочем, насчет правил вывода среди специалистов по математической логике тоже нет единого мнения. Всемирно известный специалист по математической логике А. Черч считал, что «возможны различные множества правил вывода для одного и того же языка» [11, с. 210]. Ко всем этим «несущественным» разногласиям по поводу правил вывода и содержательного смысла термина «импликация» прибавляется еще и то, что синтаксические правила, которые являются необходимым элементом математической логики, излагаются в разных вариантах, сопоставление которых порой представляет значительные трудности.

Уже из этого, весьма упрощенного, изложения основ математической логики видно, что они не бесспорны. Наверное, трудно возразить против того, что математическая логика является одним из весьма интересных разделов математики и что многие ее результаты используются на практике. Можно также некоторые неясности и противоречия, содержащиеся в ней сейчас, отнести к вполне естественным болезням роста. Однако многочисленные заявления многих математиков, логиков и философов о том, что математическая логика в ее современном варианте является основой наших «точных» знаний и единственным критерием правильности наших рассуждений и умозаключений, вызывают сомнения.

После подробного изучения математической логики появляется возможность понимать смысл многих ее теорем и теорий. Но тут возникает одна проблема, о которой почему-то не принято говорить в научных публикациях: как только мы пытаемся перейти с помощью языка математической логики к построению даже сравнительно простых рассуждений, доступных для понимания многим школьникам старших классов, то оказывается, что: 1) перевод этих рассуждений с естественного языка на язык математической логики требует не только значительных умственных усилий, но часто по числу требуемых для воспроизведения рассуждения символов значительно превышает число слов рассуждения, воспроизведенного на естественном языке; 2) наши логические построения становятся совершенно непонятными многим собеседникам, даже тем, кто по роду деятельности связан с точными науками. И дело тут не только в том, что математическая логика весьма сложна для изучения, а в том, что при оценке наших рассуждений на естественном языке мы часто используем такие понятия, как «обоснованные или необоснованные аргументы», «противоречивые суждения», «логически неверные рассуждения» и т. д. Но найти аналоги этих понятий в современной математической логике невозможно, если только не принять на веру весьма сомнительный тезис: «Все, что выражено на языке математической логики, безусловно правильно, а все остальное — от лукавого». К сожалению, именно это суждение, зародившееся в начале XX века, со временем превратилось в один из устойчивых мифов, который для одних является символом веры, а для других — совершенно непонятен и неприемлем.

К сожалению, этот миф оказывает свое разрушительное воздействие на тех, кто еще сохранил верность традиционной логике — получается, что у математической логики имеется строгое математическое обоснование, а у традиционной логики, кажется, нет. Однако, если обратить внимание на историю развития логики, то математическое обоснование традиционной логики можно найти. Надо лишь более внимательно присмотреться.

2.3. ВЗГЛЯД НА ИСТОРИЮ РАЗВИТИЯ ТРАДИЦИОННОЙ ЛОГИКИ

Одним из первых дошедших до нас учебников по логике можно считать труды древнегреческого философа Платона, написанные в форме диалогов. Темы диалогов самые разные, в них обсуждаются не только философские, но и сугубо житейские проблемы. Диалоги Платона служат прекрасной иллюстрацией для сравнения правильных и неправильных рассуждений. Правильные рассуждения в основном принадлежат главному герою этих диалогов — знаменитому философу Сократу, его же многочисленные собеседники часто использовали неправильные рассуждения, которые Сократом корректировались.

(В скобках замечу, что для меня и некоторых моих хороших знакомых, из которых, кстати, не все полностью соглашались с идеями марксизма-ленинизма, своеобразным учебником логики служили некоторые произведения классиков марксизма (в частности, «Анти-Дюринг» и «Немецкая идеология»). В этих работах полемика сопровождалась не только великолепным литературным языком и глубокими знаниями авторов, но и весьма тонким логическим анализом, на первый взгляд, вполне логичных утверждений оппонентов).

Ученик Платона Аристотель предпринял попытку сформулировать и обосновать основные принципы правильности рассуждений. Результатом этой беспримерной в истории науки работы явилась теория силлогизмов, которая на протяжении более двух тысячелетий изменилась весьма незначительно и сейчас еще сохранилась в основах «традиционной» логики. Видимо, идеями Платона и Аристотеля руководствовался Евклид, когда создавал свою «Геометрию». Знаменательно то, что один из основателей современной математической логики Д. Гильберт начал свою работу по ее созданию с коренного пересмотра основных положений «Геометрии» Евклида. Одним из результатов пересмотра оказалось то, что в математике помимо Евклидового пространства появилось Гильбертово пространство, затем новые пространства посыпались как из рога изобилия: пространство Минковского, Банахово пространство, Хаусдорфово пространство и т. д. Заодно многие математики убедились, что существует еще пространство Лобачевского и Риманово пространство, хотя на такое открытие ни Лобачевский, ни Риман, жившие и творившие в более «догматичном» XIX веке, не претендовали. В XX веке не только пошатнулась «традиционная» логика, но вместе с этим начали изменяться в сторону плюрализма и наши пространственные представления. Вопрос о том, хорошо это или плохо, оставим открытым и вернемся к основной теме нашего исследования — к логике.

При обосновании правил силлогистики Аристотеля часто используется термин, который сейчас в логике принято называть «объемом понятия». По сути объем понятия имеет тот же смысл, что и термин «множество» в современной математике: многие понятия литературного и научного языка можно представить как совокупности (множества) каких-то конкретных или абстрактных объектов (точки, жирафы, домовые и т. д.). В виде множеств можно выразить и многие признаки объектов. Например, утверждение «Все вороны черные» математически можно понимать как то, что некоторое множество (вороны) полностью включено в множество каких-то объектов черного цвета (птиц, животных и т. п.).

Отметим, что в истории развития логики «множественные» представления об объектах изучения логики тесно переплетались с представлениями об этих объектах как о некоторой формализованной знаковой системе, и часто в трудах одного и того же мыслителя, оставившего заметный след в истории логики, «формальный» и «множественный» аспекты логики трудно разделить. Здесь в кратком обзоре мы уделим особое внимание именно «множественному» аспекту логики.

По-видимому, впервые мысль о том, что для «объемов понятий» можно построить своеобразную математически строгую алгебру, пришла в голову Г. В. Лейбницу. В нескольких его работах по логике, которые приблизительно датируются 1686–1690 гг. [12], рассматривается система логического исчисления, в которой легко распознаются известные сейчас законы алгебры множеств. По неясным причинам эти работы остались неизвестными для многих исследователей и были впервые опубликованы лишь в конце XIX века, когда алгебра множеств была уже создана.

После Лейбница «множественное» представление объектов логики разрабатывалось Л. Эйлером (1707–1783), и в логику прочно вошел термин «круги Эйлера». С помощью кругов Эйлера оказалось возможным легко анализировать многие сложные соотношения между понятиями.

Идеи Эйлера были развиты в работах французского астронома и математика Ж. Д. Жергонна (1771–1859). Жергонну удалось в опубликованной в 1817 г. работе «Основы рациональной диалектики» [13] представить все классы суждений, выделенных Аристотелем, с помощью соотношений между множествами. Эти соотношения получили в математике и логике название «жергонновых отношений». Рассмотрим их более подробно.

В основе силлогистики лежат простые суждения, представленные четырьмя типами: **A** — общеутвердительное (все X есть Y);

E — общеотрицательное (все X не есть Y); **I** — частноутвердительное (некоторые X есть Y); **O** — частноотрицательное (некоторые X не есть Y).

Если для «терминов» X и Y использовать их «объемы» в виде некоторых площадей на плоскости, ограниченных прямоугольниками, то с точки зрения жергонновых отношений каждый тип суждения можно наглядно представить в виде следующих возможных вариантов соотношений между «объемами» (рис. 1).

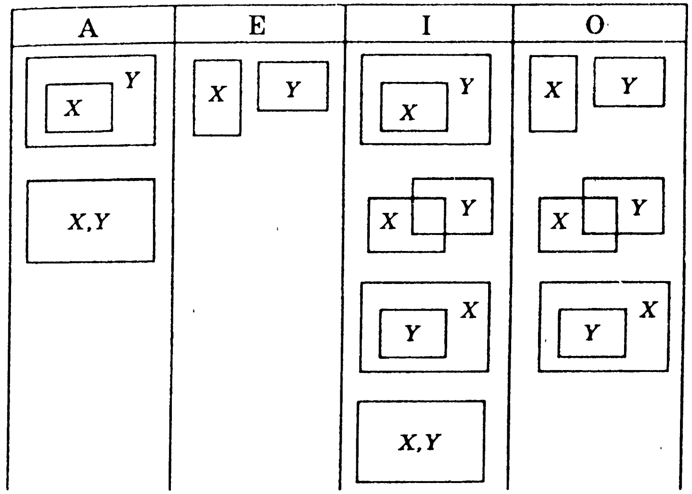

Рис. 1

Чтобы эти соотношения были более понятны, рассмотрим некоторые примеры. Например, суждение типа **I** может быть представлено в четырех вариантах жергонновых отношений. Для первого варианта подходит предложение «Некоторые числа, делящиеся на 4, делятся на 2» (хотя на 2 делятся все числа, делящиеся на 4, и не только числа, делящиеся на 4, тем не менее это суждение тоже истинно). Для второго варианта вполне подходит суждение «Некоторые японцы говорят на русском языке» (ясно, что не все японцы говорят на русском языке и не все, говорящие на русском языке, являются японцами). Третий вариант может быть представлен суждением «Некоторые линии являются прямыми» (ясно, что класс линий шире класса прямых). К четвертому варианту можно отнести суждение «Некоторые числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3, делятся на 6» (нетрудно доказать, что эти классы чисел совпадают, но приведенное более «слабое» суждение тоже верно). В то же время суждение «Некоторые устрицы умеют ездить на велосипеде» не является истинным, поскольку речь в нем идет о классах объектов, которые не имеют общих элементов и соответствуют пятому варианту жергонновых отношений. Точно так же можно проанализировать и другие типы суждений.

Жергонновы отношения часто использовались для строгого обоснования не только правил вывода для простого категорического силлогизма, в котором в качестве посылок используется два суждения, но и для более сложных силлогизмов, когда в качестве посылок допускается большее число суждений. Вершиной анализа такого рода можно считать работы английского логика и философа Дж. Венна (1834–1923). Многочисленные примеры анализа рассуждений на основе жергонновых отношений приведены в работах [2, 14].

Однако применение жергонновых отношений в логике связано с рядом трудностей. Главной из них является то, что практически все типы суждений (за исключением типа Е) представляют несколько вариантов отношений и при увеличении количества исходных суждений число возможных вариантов анализа возрастает в степенной зависимости. Поэтому для многих логиков и математиков более привлекательными оказались формальные методы анализа, в которых это «проклятие размерности» в ряде случаев (но далеко не во всех) легко преодолевается.

В то же время жергонновы отношения стали исходной точкой для развития алгебры множеств. Но если математики и логики XIX и начала XX века (М. С. Дробиш, А де Морган, Е. Л. Буницкий, Дж. Венн и др.) в своих работах пытались сохранить связи между логикой и алгеброй множеств, то в дальнейшем под влиянием работ Г. Кантора по теории множеств, а также математиков Гильбертовской школы, сводивших всю математику к соотношениям между знаками, эта связь начала постепенно утрачиваться. В традиционной логике сохранился лишь сокращенный вариант алгебры множеств — алгебра классов, а в математической логике соотношения алгебры множеств остались как не для всех обязательная и признаваемая отнюдь не всеми специалистами по математической логике интерпретация формальных теорий с помощью соотношений между множествами. Чтобы восстановить эту связь и обосновать ее преимущества, требуется более внимательно присмотреться к самой алгебре множеств и уточнить отличие этой математической системы от теории множеств Г. Кантора.

2.4. ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ МНОЖЕСТВ

Теории множеств посвящены многочисленные математические работы. Одни только основания теории множеств излагаются в солидных монографиях [15, 16, 17 и др.]. Что касается алгебры множеств, то вряд ли можно найти солидную книгу по

ее основам, но не потому, что алгебра множеств малоизвестна, а потому, что для изложения основ алгебры множеств и основных ее результатов достаточно нескольких страничек [18, с. 12–22 или 19, с. 163–173]. Эти основания в том или ином виде включены в математические работы с самой разнообразной тематикой (теория множеств, математическая логика, теория графов, кибернетика, информационно-поисковые системы, теория меры и т. д.). Причем алгебра множеств представлена в этих публикациях в виде отдельных слабо связанных фрагментов и часто усложнена весьма запутанной терминологией. Но самое удивительное то, что некоторые весьма простые и легко выводимые результаты алгебры множеств, известные еще в XIX веке, в этих работах, за редким исключением, не встречаются.

Изложение основ алгебры множеств здесь во многом соответствует изложению в работе [19], и можно было бы просто отослать читателя к этой замечательной книге. Но, во-первых, несмотря на то, что книга эта издавалась на русском языке, по крайней мере, два раза, достать ее сейчас непросто. Кроме того, в нашем изложении появятся некоторые новые аспекты, которые позволяют считать алгебру множеств и основой для логики, и основой для современного математического анализа.

Термин «алгебра множеств» используется в математике нечасто. Человеку, для которого математика стала первой или хотя бы второй профессией, слова «алгебра множеств» и «соотношения алгебры множеств» говорят о многом, но даже среди математиков имеются расхождения в определении объемов этих понятий. Одни считают, что алгебра множеств состоит только из операций (пересечение, объединение, разность множеств и дополнение множества), и такое понимание вполне понятно, если следовать точному определению слова «алгебра»: алгеброй является некоторая совокупность S объектов и множество операций с этими объектами, результатом которых являются объекты из S. Например, в арифметике, если ее рассматривать как алгебру, результатом сложения чисел является число, а не геометрическая фигура.

Другое более широкое понимание алгебры множеств заключается в том, что в состав алгебры множеств включаются не только операции, но и некоторые соотношения между парами (в более сложных случаях тройками, четверками и т. д.) объектов из S. В этом случае система, если придерживаться строгих математических канонов, является уже не алгеброй, а *алгебраической системой* [8]. Между *операцией* и *соотношением* имеется весьма существенное различие: если результатом операции является какой-либо объект из S, то «результатом» соотношения является ответ на вопрос: является ли это соотношение истинным (ложным, сомнительным или неопределенным)? Например, результатом операции сложения двух чисел A и B является число, в то время как соотношение «A больше B» может быть истинным или ложным. Если же в качестве A и B используются какие-то числовые функции, то соотношение «A больше B» может оказаться до поры до времени неизвестным. Может также оказаться, что для одних значений переменных, входящих в функции A и B, соотношение «A больше B» окажется истинным, а для других — ложным. В математической логике это различие между операцией и соотношением учитывается не всегда. Примером является путаница с понятием «импликация», которую некоторые авторы изначально определяют как логическое соотношение «Из A следует B» ($A \to B$), а потом используют ее как операцию, утверждая, что формула $A \to B$ эквивалентна формуле $\neg A \vee B$ (не A или B), в которой логические связки $\neg$ (не) и $\vee$ (или) по смыслу соответствуют операциям.

Традиционно *множество* определяется как совокупность некоторых элементов. Для этого вводится простая система обозначений: фигурными скобками ограничивается совокупность элементов, например, запись $S = \{a, b, c\}$ означает, что множество S состоит из элементов a, b и c. Те же обозначения можно использовать и для записи некоторых бесконечных множеств. Например, множество всех чисел натурального ряда можно записать как $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. При этом мы должны еще уточнить, по какому правилу формируются последующие члены ряда.

Для обозначения *соотношения принадлежности* элемента множеству вводится символ «$\in$». Запись $a \in S$ означает, что элемент a принадлежит множеству S. Альтернативным соотношению принадлежности является соотношение, обозначаемое символом «$\notin$». Запись $d \notin S$ означает, что элемент d не принадлежит множеству S.

Для множеств порядок записи при перечислении элементов является несущественным. Например, множество $M = \{7, 10, 3, 8\}$ целых чисел мы можем расположить в любом порядке. Иногда более удобно такие множества располагать в определенном порядке, например, $M = \{3, 7, 8, 10\}$, но для множеств это делается только в целях удобства или в том случае, когда из множеств формируются определенные *последовательности* для решения каких-либо задач, выходящих за рамки алгебры множеств. У последовательностей уже появляются свои отличительные свойства, с некоторыми из них мы ознакомимся в следующей главе. Заметим, что в тех случаях, когда отношение строго определено или задано в виде таблицы, оно может быть математически представлено как множество последовательностей.

В традиционном определении множества как совокупности элементов содержится ряд логических трудностей. Из каких элементов, например, состоит отрезок прямой линии? Традиционно считается, что он состоит из точек. Но число возможных точек в отрезке не поддается никакому учету даже с помощью

супер-ЭВМ. Можно, разумеется, это число обозначить каким-либо символом, например, символом «∞» (бесконечность), но здесь уже появляются свои трудности, о которых мы пока не будем говорить, а поступим более просто: *будем считать, что деление таких «трудных» множеств на элементы не является раз и навсегда заданным, и в определенных случаях целесообразно для описания одних и тех же множеств использовать разные «элементы»*. Рассмотрим пример.

Пусть на каком-то отрезке AB прямой линии задана система интервалов (рис. 2).

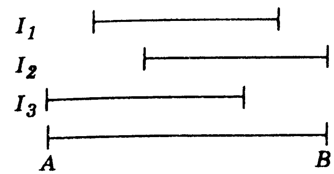

Рис. 2

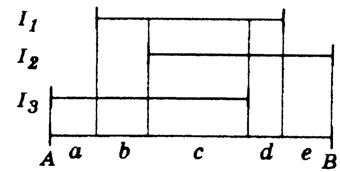

Рис. 3

Эти интервалы для наглядности вынесены за пределы отрезка. Если система интервалов задана окончательно, то мы можем представить эту систему как состоящую из множества элементов, которые сами являются интервалами. Как это сделать? Очень просто. Проведем из концевых точек наших интервалов перпендикуляры на отрезок AB и на другие интервалы нашей системы (рис. 3). Тогда мы получим множество элементарных интервалов, т. е. своеобразных кирпичиков, из которых мы можем построить любой интервал нашей системы. Например, интервал I_1 состоит из кирпичиков b, c и d, каждый из которых содержит, скорее всего, бесконечное число точек. Для большей точности мы должны еще учитывать, что сами интервалы могут быть *замкнутыми* (т. е. содержащими в себе свои концевые точки), *открытыми* (т. е. не содержащими в себе концевых точек) и *полуоткрытыми* (т. е. содержащими в себе только одну из двух концевых точек). Заметим, что длина интервала остается одной и той же независимо от того, будет ли этот интервал замкнутым, открытым или полуоткрытым.

Еще проще эту же систему можно представить, как состоящую из множества граничных открытых интервалов $\{a, b, c, d, e\}$ и множества граничных точек, которые можно считать вырожденными замкнутыми интервалами, состоящими из одной точки. Тогда все законы алгебры множеств для этой системы будут соблюдаться, а число «элементов» (или элементарных множеств) в ней будет равным не бесконечности, а всего лишь 11 (пять открытых интервалов и шесть точек). Главное требование для элементов некоторого множества заключается в том, что любая пара таких «элементов» в системе не должна содержать некоторых общих элементов при любом разложении исходного множества.

Введем еще одно важное соотношение на множествах — *соотношение включения*. Множество A включено в множество B, если в множестве A не существует такого элемента, который не содержался бы в множестве B. Соотношение включения обозначают знаком «$\subseteq$» и запись «$A \subseteq B$» означает, что A включено в B. Здесь необходимо обратить внимание на то, что соотношение $A \subseteq B$ подразумевает и то, что A может совпадать с B — это следует из определения включения. Если мы хотим подчеркнуть, что A включено в B, но не совпадает с B, то обозначаем это соотношение как $A \subset B$ (*A строго включено в B*). Если соотношения $A \subset B$ или $A \subseteq B$ соблюдаются, то в этом случае A называется *подмножеством* B, а B — *надмножеством* A. Например, жирафы являются подмножеством класса млекопитающих (в данном случае очевидно, что это строгое подмножество).

Еще одним соотношением для множеств является отношение *эквивалентности*. Для того чтобы доказать, что множества A и B эквивалентны (обозначается $A = B$), требуется доказать, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Менее общим, но более понятным является определение эквивалентности двух множеств как совпадающих по составу своих элементов. Если множества A и B не эквивалентны, то это соотношение между ними обозначается знаком «$\neq$» (не равно).

В алгебре множеств предполагается, что любая *система множеств* содержит в себе два множества: *пустое множество* (обозначается «$\varnothing$») и *универсальное множество* (или *универсум*). Для универсума нет общепринятого обозначения — мы будем обозначать его буквой U. Рассмотрим эти множества более подробно.

В алгебре множеств принято считать, что *пустое множество является подмножеством любого множества*. Это допущение не взято с потолка, а связано с тем, что нам часто приходится рассматривать множества, существование которых проблематично. Доказательство существования (или несуществования) часто сводится к тому, что мы сначала определяем, подмножеством каких множеств может быть это множество, а затем доказываем, что это множество не пусто (или пусто). Например, можно обосновать, что пустым является множество жирафов, говорящих на русском языке, и, наоборот, непустым — множество жирафов, живущих в Санкт-Петербурге. Чтобы убедиться в справедливости первого суждения, можно попытаться взять интервью у каждого из живущих в данное время жирафов. Но можно поступить более просто и вывести это суждение, взяв за основу некоторые положения науки о поведении животных. Чтобы убедиться в справедливости второго суждения, достаточно сходить в Санкт-Петербургский зоопарк.

Универсумом (U) называется множество такое, что все рассматриваемые в системе множества являются подмножествами U. Можно поступить просто и в качестве U раз и навсегда выбрать множество всех возможных множеств. Но такое определение U, хотя и используется (особенно его почему-то любят некоторые специалисты по математической логике), но весьма неконструктивно и часто приводит к противоречиям. Поэтому, если мы изучаем, например, свойства простых чисел, то в качестве универсума можно выбрать множество целых или множество рациональных чисел, но добавлять в этот универсум еще и множество жирафов, по-видимому, нет необходимости.

Теперь, когда мы разобрались с основными соотношениями алгебры множеств, можно перейти к основным операциям. Здесь хотелось бы отметить, что когда в математике речь идет даже о «чистой» алгебре, т. е. об алгебре без соотношений, то это не совсем верно. Любая алгебра прямо или косвенно начинается с определения основного множества S и с определения (или хотя бы разъяснения) таких свойств объектов, для которых справедливо соотношение принадлежности к S.

В алгебре множеств основными операциями являются пересечение и объединение множеств. Кроме того, существует ряд операций (дополнение множества, разность множеств и некоторые другие), которые являются производными от основных.

Пересечением двух множеств A и B (обозначается $A \cap B$) является множество, содержащее те и только те элементы, которые содержатся как в A, так и в B. Например, множество всех ручных жирафов является пересечением множества всех жирафов и множества всех животных, прирученных человеком.

Можно ли определить операцию пересечения, используя не соотношение принадлежности, а соотношение включения? Оказывается можно, но при этом необходимо использовать понятие, которое считается частным математическим понятием — понятие максимума. Тогда получим: *пересечением двух множеств A и B является максимальное множество, которое включено как в A, так и в B.*

Дотошный логик тут же задаст вопрос: «А может ли в этом случае алгебра множеств претендовать на роль основы математики, если в ней основные определения даются через частные математические понятия?»

В защиту этого определения сначала приведем слова Л. Эйлера: «Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума». С теологической посылкой Эйлера кое-кто может и не согласиться, но если обратиться к истории математики, то окажется, что многие начальные термины и аксиомы в ней прямо или косвенно содержат понятия, связанные с максимумом или минимумом. Прямая — это кратчайшая линия между двумя ее произвольными точками; среди всех ромбов с одинаковым основанием максимальную площадь описывает квадрат; круг — это максимальная площадь, ограниченная замкнутой линией определенной длины. Даже в сугубо логическом понятии «все» косвенно содержится понятие максимума: все объекты со свойствами P — это максимальное множество объектов, обладающих данным набором свойств. С учетом этого приведенное выше определение можно было бы сформулировать так: «Пересечением множеств A и B является множество, состоящее из всех подмножеств, являющихся подмножествами как A, так и B».

Следующая основная операция — объединение множеств — может быть также определена двояко: с помощью соотношения принадлежности и с помощью соотношения включения.

Объединением двух множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, содержащее те и только те элементы, которые содержатся в A или в B. Например, если $A = \{a, c, e\}$ и $B = \{b, c, d, e\}$, то их объединение $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$. Объединением множества жирафов и множества млекопитающих является множество млекопитающих. И в то же время можно при определении объединения множеств не использовать понятие «элемент», но использовать понятие «минимум». *Объединением двух множеств A и B называется минимальное множество, содержащее в качестве подмножеств как A, так и B.*

Третья основная операция — дополнение множеств — традиционно считается самостоятельной операцией.

Дополнением множества A (обозначается $\overline{A}$) является множество, содержащее все элементы универсума U, не являющиеся элементами A.

Но вряд ли будет логической ошибкой, если мы определим дополнение с помощью ранее введенных соотношений и операций при условии, что универсум (U) для данной системы множеств однозначно определен, следующим образом.

Дополнением множества A является множество $\overline{A}$ такое, что соблюдаются следующие соотношения: 1) $A \cap \overline{A} = \varnothing$ и 2) $A \cup \overline{A} = U$.

Заметим, что в произвольных системах множеств для реализации операций пересечения и объединения множеств нет особой необходимости определять универсум данной системы. Для реализации же операции дополнения определение универсума в алгебре множеств обязательно.

Определим еще одну производную операцию — разность множеств.

Разностью двух множеств A и B (обозначается $A \backslash B$) *является множество, определяемое соотношением* $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

Смысл разности множеств заключается в том, что разность множеств $A \backslash B$ содержит все элементы множества A, кроме тех, которые содержатся в B. С помощью операции разности можно дать еще одно определение дополнения множества: $\overline{A} = U \backslash A$.

Нетрудно доказать, что $A \backslash B = B \backslash A$ только в том случае, когда эти множества эквивалентны. Если пересечение множеств A и B пусто, то $A \backslash B = A$ и $B \backslash A = B$. Например, разность между множеством всех жирафов и множеством членов партии «Наш Дом — Рынок» (НДР) равна множеству всех жирафов. Впрочем, за всеми политическими событиями трудно уследить. Возможно, что на последнем съезде НДР некоторые жирафы согласились стать членами этой партии. Тогда наши «расчеты» нужно откорректировать.

С помощью введенных соотношений и операций легко доказываются многие другие соотношения. Некоторые из этих соотношений называются законами алгебры множеств. Здесь мы приведем без доказательства только некоторые из этих соотношений. Пусть в заданном универсуме U заданы некоторые множества X, Y и Z. Тогда справедливы следующие соотношения между ними:

1) законы идемпотентности (поглощения): $X \cap X = X$; $X \cup X = X$;

2) законы коммутативности (перестановки): $X \cap Y = Y \cap X$; $X \cup Y = Y \cup X$;

(заметим, что операция разности не является коммутативной: соотношение $X \backslash Y = Y \backslash X$ соблюдается только в редких случаях);

3) инволюция (двойное дополнение): $\overline{\overline{X}} = X$;

4) законы де Моргана: $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$; $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$;

5) свойства универсального и пустого множества:

$\overline{\varnothing} = U$; $\overline{U} = \varnothing$; $\overline{X} \cap X = \varnothing$; $\overline{X} \cup X = U$;
$X \cap \varnothing = \varnothing$; $X \cap U = X$; $X \cup \varnothing = X$; $X \cup U = U$.

6) соотношения между включением и некоторыми алгебраическими операциями:

а) $X \subseteq Y$ равносильно $\overline{X} \cup Y = U$ или равносильно $X \backslash Y = \varnothing$;
б) из $X \subseteq Y$ при заданном универсуме необходимо и достаточно следует $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$;

7) свойство транзитивности включения:
из $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$ следует $X \subseteq Z$.

Доказательства этих соотношений мы не приводим. Заметим, что все они сравнительно легко проверяются на диаграммах, подобных тем, которые приведены при рассмотрении жергонновых отношений (см. рис. 1). На рис. 4, 5 приведены иллюстрации к обоснованию соотношений 7) и 6,б) (отметим, что эти соотношения являются ключевыми при построении математической модели рассуждений, которая подробно рассматривается в гл. 3). На рис. 5 универсум ограничен жирной линией. Здесь фигура X, ограниченная отрезками с концевыми точками a, b, c, d, включена в фигуру Y, ограниченную отрезками с концевыми точками e, f, g, h. Дополнением X является фигура с пустотой, ограниченная точками A, B, C, D, a, b, c, d, а дополнением Y меньшая фигура с пустотой, ограниченная точками A, B, C, D, e, f, g, h. Ясно, что $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$.

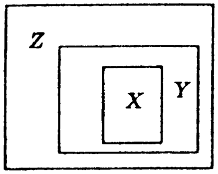

Рис. 4

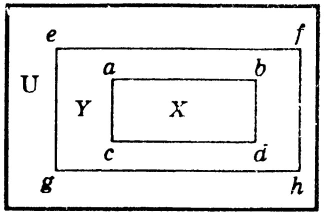

Рис. 5

Такого рода рисунки (они называются диаграммами Венна) используются не только для иллюстрации доказательства тех или иных утверждений, но и для поиска простого пути к строгому доказательству или опровержению этих утверждений. Поэтому, когда из математики под влиянием идей логического формализма стали изгонять всякого рода «наглядную агитацию», то, по сути, закрыли многие пути для понимания и реализации математического творчества.

Законы алгебры множеств справедливы не только для сугубо математических объектов, но и для объектов, встречающихся в повседневной практике. Например, для многих читателей достоверно известно, что пересечение множества математиков и множества мошенников не является пустым (будем надеяться, что это множество невелико по объему). Если использовать один из законов де Моргана, то дополнением множества математиков, занимающихся мошенничеством, является множество, состоящее из объединения всех нематематиков и всех немошенников (среди них, разумеется, могут быть и мошенники, не являющиеся математиками). Разностью между множествами математиков и мошенников, является множество честных математиков.

Некоторые специалисты по математической логике сумели представить алгебру множеств как формальную дедуктивную систему. Известно несколько способов такого построения — одна из таких систем приведена в работе [19], но при всем их разнообразии все они имеют общее свойство: *они представляют непротиворечивую и полную теорию*. Тем самым они существенно отличаются от формальной теории арифметики и формальной теории множеств, которые в соответствии с теоремой Геделя являются «неполными» теориями.

А теперь рассмотрим, как с помощью соотношений и операций алгебры множеств можно определить типы суждений в силлогистике Аристотеля на основе жергонновых отношений (см. рис. 1). Пусть X и Y — «объемы» некоторых терминов или понятий. Тогда соответствующие типы суждений можно определить как соотношения алгебры множеств:

$$\mathbf{A}: X \subseteq Y; \quad \mathbf{E}: X \cap \overline{Y} = \varnothing; \quad \mathbf{I}: X \cap Y \neq \varnothing; \quad \mathbf{O}: X \cap \overline{Y} \neq \varnothing.$$

Получилась сравнительно простая система соотношений. Но оказывается, что анализ силлогизмов и более сложных систем логического вывода можно еще упростить настолько, что этим анализом сможет овладеть любой школьник, освоивший законы алгебры множеств. Перефразируя слова Макса Борна о физике, я позволю себе высказать утверждение, что логика нуждается в философии, которая была бы понятна даже ребенку. Но рассмотрение этой системы логического вывода мы несколько отложим, поскольку еще не ответили на вопрос о том, в чем же заключается отличие алгебры множеств от теории множеств. Некоторые философы считают этот вопрос одной из ключевых проблем современной логики.

2.5. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ. КОЛЬЦА И ПОЛУКОЛЬЦА

В предыдущем параграфе изложено не совсем строгое с точки зрения математики определение алгебры множеств. Начнем это определение с определения понятия «система множеств».

Системой множеств называется некоторая совокупность S_1, $S_2, \ldots$, S_n объектов, которые все без исключения являются подмножествами некоторого множества U.

Допустим, что в любой из систем, которые мы будем рассматривать, содержится только конечное число таких объектов, хотя сами объекты при определенном подходе к их рассмотрению могут быть представлены как бесконечные множества. Например, в качестве системы множеств мы можем рассматривать некоторое конечное число отрезков прямой, при этом каждый из отрезков может содержать бесконечное число точек.

Для логики свойство конечности системы множеств имеет существенное значение. Дело в том, что с множествами связаны основные объекты исчисления предикатов: константы, области определения переменных, функции и предикаты. Этим объектам можно сопоставить как конечные, так и бесконечные множества. Но если число таких объектов будет бесконечным, то такую систему хотя и можно вообразить, но реализовать практически невозможно, ибо даже в том случае, если удастся каждый из этих объектов обозначить каким-либо конечным набором символов, число таких наборов должно превосходить число элементарных частиц в наблюдаемой части Вселенной. Между тем в руководствах по математической логике стали уже дежурной фразой такие слова, как «Число нелогических символов (т. е. обозначений объектов) формальной теории счетно бесконечно». И это не просто ни к чему не обязывающая декларация — дело в том, что принятие бесконечного числа символов в качестве исходного положения сразу же влечет за собой декларацию свойств системы, которые вступают в противоречие со свойствами системы с конечным числом символов.

Для объектов произвольной системы множеств возможны самые разные соотношения: некоторые из объектов этой системы могут быть подмножествами других объектов, а могут и не быть. Возможно, что результат какой-либо операции хотя и является множеством, но по каким-то причинам не входит в состав этих объектов. Например, объединение двух множеств, являющихся объектами системы множеств, может не входить в состав этих объектов, потому что не обладает некоторыми свойствами, присущими всем объектам этой системы. Чтобы это стало более понятным, рассмотрим пример (рис. 6).

Пусть система множеств, заданных на плоскости, представлена только такими множествами, которые ограничены прямоугольниками со сторонами, параллельными координатным осям. На рисунке 6 показана часть такой системы множеств, где U является универсумом, а X и Y — подмножествами этого универсума. Ясно, что в системе множеств с такими ограничениями пересечение X и Y является прямоугольником, в то время как объединение этих множеств и их дополнения прямоугольниками не являются. Это не означает, что этих множеств не существует вообще, но в данной системе множеств их не должно быть. Для «чистой» алгебры множеств такие ограничения не имеют места.

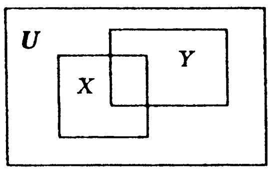

Рис. 6

Определение 1. *Конечной алгеброй множеств* называется конечная система множеств с универсумом, характеризующаяся следующими свойствами:

(i) пустое множество ($\varnothing$) входит в состав этой системы;

(ii) в состав системы входит дополнение любого множества системы;

(iii) в состав системы входит пересечение любой пары множеств этой системы.

Этих свойств оказывается достаточно, чтобы доказать, что в состав системы множеств с этими свойствами входит объединение любой пары этих множеств.

Теорема 1. В системе множеств, являющейся конечной алгеброй множеств, объединение любых пар множеств этой системы является множеством этой системы.

Доказательство. Пусть X и Y — произвольные множества системы. Ясно, что в системе есть дополнения $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ этих множеств (свойство ii). Есть в этой системе также и множество, равное $\overline{X} \cap \overline{Y}$ (свойство iii). И есть в этой системе дополнение этого множества, т. е. $\overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}$, которое в силу закона де Моргана равно $X \cup Y$, что и требовалось доказать.

Конечная алгебра множеств не является единственным представителем конечных систем множеств. Другими весьма интересными и полезными представителями систем множеств являются кольца и полукольца [20]. Рассмотрим их, не вдаваясь в сложные математические подробности.

Точное определение *кольца множеств* содержится в работе [20]. Для нас здесь важно лишь то, что частный случай колец — *конечное кольцо множеств с единицей* — по сути то же самое, что и конечная алгебра множеств. А *единицей кольца* является уже известный нам универсум.

Еще одной интересной системой множеств является полукольцо.

Определение 2. *Конечным полукольцом множеств* называется конечная система множеств со следующими свойствами:

(i) пустое множество ($\varnothing$) входит в состав этой системы;

(ii) в состав системы входит пересечение любой пары множеств системы;

(iii) если множества X и Y входят в систему множеств и $X \subset Y$, то множество Y можно представить как объединение попарно непересекающихся множеств, входящих в эту систему, среди которых имеется и множество X.

Такое сложное определение уже требует пояснений. К полукольцам, в частности, относятся системы множеств, которые геометрически можно представить как системы прямоугольников на координатной плоскости со сторонами, параллельными координатным осям. Пример таких полуколец мы уже приводили на рис. 6. Свойство (iii) поясним также с помощью рисунков.

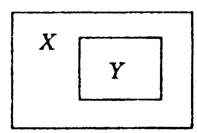

Рис. 7

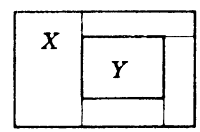

Рис. 8

На рис. 7 показаны множества X и Y, для которых справедливо $X \subset Y$. Ясно, что разность этих множеств $Y \setminus X$ не является прямоугольником, но эту сложную фигуру можно разбить на несколько прямоугольников (рис. 8), которые в совокупности будут равны этой разности, а объединение всех этих прямоугольников с множеством X в точности будет равно Y. Здесь мы, правда, не учитывали границы и точки сочленения, но при более точном представлении это легко можно сделать.

Свойствами колец и полуколец обладают многие более сложные по сравнению с теми, которые здесь представлены в качестве примеров, структуры. Сформулируем без доказательства одно важное свойство колец и полуколец, которое позволит лучше понять разницу между алгеброй множеств и теорией множеств.

Теорема 2. Если S_1, $S_2, \ldots$, S_N — конечная система S множеств со свойствами кольца или полукольца, то существует и может быть построена конечная система E различных множеств E_1, $E_2, \ldots$, E_M $(M \geq N)$ со следующими свойствами:

(i) для любой пары (E_i, E_k) при $i \neq k$ $E_i \cap E_k = \varnothing$;

(ii) любое множество системы S в точности равно объединению некоторых множеств системы E.

Что же нам дает эта теорема? А то, что мы можем любую конечную систему множеств со свойствами алгебры множеств, колец или полуколец представить как состоящую из конечного числа неделимых «квантов» (пусть даже они и являются бесконечными множествами), которые в отличие от множеств в произвольной системе абсолютно равноправны: между ними не может быть никаких других отношений кроме одного — они попарно не пересекаются. И из этих «квантов», которые с полным правом можно назвать новыми элементами, можно составить путем объединения любое множество исходной системы.

2.6. ДВЕ ОШИБКИ ГЕОРГА КАНТОРА

Пожалуй, сейчас трудно назвать имя математика, который по числу ссылок на его работы превзошел бы немецкого математика Г. Кантора (1845–1918). Его имя связано и с теорией функций действительного переменного, и с теорией множеств, лежащей в основе современного математического анализа, и с топологией, и с математической логикой. Правда, в математической логике ссылки скорее негативные, чем позитивные: здесь принято считать, что «наивная» теория множеств Кантора, в которой специалисты по математической логике нашли массу противоречий, лишь подтвердила необходимость изгнания понятия «множество» из логики. В то же время «ненаивная» формальная теория множеств стала развиваться по канонам математической логики, результатом чего явилась ее «неполнота», доказанная К. Геделем в начале 30-х годов XX

века (напомним, что неполной является формальная теория, у которой некоторые утверждения выводятся вместе со своим отрицанием).

Кантор был глубоко убежден, что понятие «множество» должно лежать в основе всей математики, и это убеждение пронизывает все его основополагающие работы. Но введя в свою теорию множеств некоторые закономерности алгебры множеств, он все же не учел ряд других ее закономерностей. Эту ошибку, видимо, чувствовали некоторые известные математики — современники Кантора, такие как Л. Кронекер и А. Пуанкаре. Но, видимо, их возражения оказались недостаточно обоснованными и вскоре оказались забытыми. Отметим также, что в то время алгебра множеств еще не достигла вершины своего развития, к тому же некоторые из ее результатов среди математиков были малоизвестны, так как они не связывались с классическим математическим анализом.

Так что же не учел Кантор при построении своей теории? На мой взгляд, первой его ошибкой является весьма негибкий подход к соотношению принадлежности: он считал, что элементами математических (и, в частности, непрерывных) множеств могут быть только точки. Подходы к построению математических множеств с помощью интервалов появились значительно позже, но тем не менее даже они в своей основе исходили из положений теории множеств Кантора. Методы разбиения математических множеств на элементарные интервалы тоже стали известны значительно позже. Во многом эти методы аналогичны методу, который рассмотрен здесь на примере разложения системы интервалов (см. рис. 2, 3), но применительно к более сложным системам, заданным на плоскости и в пространстве, требуют более сложных математических построений и рассуждений (см. п. 2.5).

Вторая ошибка Кантора непосредственно связана с первой ошибкой. Когда перед ним встала проблема сравнения математических множеств, он не нашел ничего лучшего, как сравнивать эти множества на основе точечного их представления, и поэтому вынужден был сравнивать сугубо бесконечные множества. Сравнение это производилось на основе *принципа взаимно однозначного соответствия*, суть которого применительно к бесконечным множествам можно понять на простом примере. Пусть имеется два бесконечных ряда чисел:

$1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; \ldots \;\; n \ldots$ — натуральный ряд;

$2 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 8 \;\; \ldots \;\; 2n \ldots$ — последовательность четных чисел.

Выберем в качестве мер множеств, заданных этими рядами, количество элементов в них. Эта мера в теории множеств называется *мощностью множеств*. Если предположить, что эти ряды продолжены в бесконечность, то на основе взаимно однозначного соответствия можно сделать вывод, что в бесконечности мощности этих множеств совпадают. Парадоксальность такого вывода состоит в том, что 2-й ряд является строгим подмножеством 1-го ряда и для любого даже сверхастрономического по величине, но конечного предела (например, таким пределом может быть число $10^{1000000}$) мощность множества четных чисел составляет половину мощности чисел натурального ряда. Тем не менее, эта парадоксальность не была принята во внимание. Мол, бесконечность на то и бесконечность, чтобы иметь необычные свойства!

Исходя из этих предпосылок, Кантор получил результаты, которые сейчас воспринимаются математиками без всякой критики и лежат в основе современного математического анализа (теории функций, дифференцирования и интегрирования, топологии в непрерывных пространствах и т. д.). Вкратце суть некоторых из этих результатов следующая:

1. В теории множеств понятие «мощность множества» является обобщением понятия «количество элементов множества». В основе измеримости бесконечных множеств лежит мощность счетного множества, равная мощности бесконечного ряда чисел 1, 2, 3, ... (натурального ряда). Мощность счетного множества принято обозначать символом $\aleph_0$ («алеф-ноль»).

2. Любое бесконечное подмножество счетного множества имеет ту же самую мощность — $\aleph_0$.

3. Множество всех рациональных чисел имеет ту же мощность $\aleph_0$.

4. Мощность множества действительных чисел не равно $\aleph_0$ и имеет уже более высокую мощность — мощность континуума.

Теперь сопоставим эти результаты с другими, также лежащими в основе современного математического анализа, — с результатами теории измеримых множеств [20]. Чтобы измерить множество, необходимо ввести определенную *меру*. Для дискретных множеств этой мерой может быть число элементов, вероятности или относительные веса (предел, к которому стремится отношение числа элементов подмножества к числу элементов универсума); для непрерывных — длины, площади или объемы соответствующих линий или фигур. Возможны и более сложные меры, но все они должны иметь определенное свойства, объединяющие их. Одно из этих свойств называется *аддитивностью меры множеств* и заключается в том, что мера объединения множеств, пересечение которых друг с другом пусто, равна сумме мер этих множеств. Если же множества имеют непустое пересечение, то мера их объединения должна быть не больше суммы их мер. Более точно соотношение между мерами (Me) двух пересекающихся множеств X и Y можно представить в виде равенства

$$Me(X \cup Y) = Me(X) + Me(Y) - Me(X \cap Y). \qquad (1)$$

Иллюстрацией этой формулы является система интервалов, приведенная на рис. 3. Пусть мерой интервалов является их длина. Возьмем, например, интервалы I_1 и I_3 и вычислим меру их объединения. Если мы просто сложим их длины, то получим величину большую, чем их общая длина, так как при сложении мы складываем длины общих интервалов b и c два раза. Поэтому, вычитая в соответствии с формулой (1) их длины из общей суммы, мы просто восстанавливаем справедливость.

Формула (1) наряду с более сложными соотношениями для измеримых множеств была сформулирована и обоснована в 1896 г. русским математиком Е. Л. Буницким. [14, с. 409–411]. Однако этот результат, опубликованный в научно-популярном журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики» (г. Одесса), оказался в то время незамеченным (а может быть, и непонятым).

Именно это соотношение вступает в противоречие с результатами Кантора. Рассмотрим пример. Пусть имеется два бесконечных ряда чисел: ряд 2, 4, 6, ... четных и ряд 1, 3, 5, ... нечетных чисел. Нетрудно убедиться, что пересечение этих множеств пусто и что их объединение равно натуральному ряду. Но если исходить из приведенных выше результатов Кантора, то мера объединения этих множеств не равна сумме их мер, так как мера каждого из этих множеств и мера их объединения равна одной и той же «величине» — мощности бесконечного счетного множества $\aleph_0$.

В современном анализе сумели преодолеть трудности, связанные с измеримостью бесконечных множеств, введя интервальную меру. Но при анализе измеримости дискретных бесконечных множеств в современной математике пока что не найдено выхода из Канторовских противоречий. Между тем выход здесь довольно простой: нужно только отказаться от предпосылки, что мерой бесконечных дискретных множеств может быть только их мощность.

Рассмотрим другой подход к измерению бесконечных дискретных множеств. Этот подход был намечен уже в работах Е. Л. Буницкого (1874–1952) в конце XIX века. Пусть мерой множества будет *относительный вес*, т. е. предел, к которому стремится отношение, $|S| / |U|$, где $|S|$ и $|U|$ — соответственно число элементов множества S и универсума U при условии $S \subseteq U$. Во многом эта мера совпадает с вероятностной мерой и имеет те же самые свойства, которые сопоставимы с законами алгебры множеств [21]. Если в качестве универсума взять множество положительных целых чисел (натуральный ряд), то ясно, что относительный вес самого этого множества равен 1, а относительные веса подмножеств четных и нечетных чисел равны одной и той же величине — 0,5. Ясно, что мера объединения этих множеств соответствует свойству аддитивности и равна 1. Рассмотрим более сложный случай.

Обозначим N — множество чисел натурального ряда, N_k — подмножество чисел, кратных целому числу k, а $Me(N_k, N)$ — относительный вес множества N_k по отношению к N. Ясно, что $Me(N_k, N) = 1/k$. Например, если в качестве подмножества натурального ряда брать только числа, делящиеся на 6, то их доля в бесконечно продолжающейся последовательности чисел натурального ряда стремится к величине $1/6$.

Пусть имеется два множества N_2 (числа, кратные двум) и N_3 (числа, кратные трем). Определим, чему равна относительная мера объединения этих множеств. Из приведенной выше формулы (1) ясно, что

$$Me((N_2 \cup N_3), N) = Me(N_2, N) + Me(N_3, N) - Me((N_2 \cap N_3), N).$$

Пересечением множеств N_2 и N_3 является множество чисел, кратных 6, т. е. множество N_6. Отсюда

$$Me((N_2 \cup N_3), N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

На основе относительного веса можно легко получить и более общий результат. Пусть m и k два произвольных целых числа, а N_m и N_k — бесконечные множества чисел, кратных числам m и k. Пересечением этих множеств является множество чисел, кратных величине $R(m,k)$ — наименьшему общему кратному чисел m и k. Зная это, можно легко вычислить меру объединения множеств N_m и N_k:

$$Me((N_m \cup N_k), N) = \frac{1}{m} + \frac{1}{k} - \frac{1}{R(m,k)}.$$

Хотя эта формула легко доказывается, но я, откровенно сказать, усомнился в ней. Чтобы убедиться в том, что здесь ничего не напутано, решил провести на компьютере вычислительный эксперимент с большими рядами чисел и разными значениями m и k. Результаты подтвердились с большой точностью.

Резюмируя сказанное, можно сказать, что Г. Кантор гениально предугадал огромную роль понятия «множества» во всей математике. Это подтверждается хотя бы тем, что его идеи распространились по всем основным разделам современной математики. Но связь законов алгебры множеств с законами меры множеств в его интерпретации оказалась ошибочной, и эта его ошибка сыграла отрицательную роль в развитии современного математического анализа.

В истории математики закономерности меры множеств на основе законов алгебры множеств развивались независимо от ошибочных предпосылок Кантора. Одним из первых четко сформулировал эти законы Е. Л. Буницкий. Расцвет теории меры на основе законов алгебры множеств пришелся на конец 20-х годов XX века и связан с именем А. Н. Колмогорова, который внес существенный вклад в разработку этой теории, и на ее основе создал конструктивный и логически обоснованный вариант теории вероятностей [21]. Но Канторовские сравнения бесконечных множеств, сделанные на основе сомнительных предпосылок, продолжают вносить смуту в умы преподавателей и студентов (а иногда даже и школьников) до настоящего времени. Чем вызван этот интерес к сомнительным теориям, объяснить трудно, если не принимать во внимание «чудесные» свойства мифов.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАССУЖДЕНИЙ

«Единственное средство улучшить наши умозаключения состоит в том, чтобы сделать их столь же наглядными, как и у математиков, — такими, что их ошибочность можно было бы увидеть глазами, и если между людьми возникают разногласия, достаточно было бы только сказать "Вычислим!", чтобы без дальнейших околичностей стало ясно, кто прав».

Г. В. Лейбниц

3.1. ЧТО ПОНИМАЕТСЯ ПОД «РАССУЖДЕНИЕМ»?

В современной, как в математической, так и в «традиционной» логике, термин «рассуждение» (в английском языке — reasoning, argument) в настоящее время почти не используется. Гораздо чаще он встречается в литературе по искусственному интеллекту (один из больших разделов в искусственном интеллекте носит официальное название Automated Reasoning). Под рассуждением обычно понимается и процесс дедуктивного вывода из некоторого множества исходных суждений (умозаключение), и рассуждения по аналогии, и рассуждения, опирающиеся на скрытые ассоциации, и т. д. [2]. Здесь мы ограничимся более узким пониманием рассуждения, которое по смыслу ближе к умозаключению [9, 22]. А термин «рассуждение» используется потому, что в рассматриваемой математической модели появляются новые соотношения, имеющие непосредственное отношение к анализу рассуждений.

Многочисленные проблемы, связанные с математическим моделированием рассуждений, обусловлены тем, что процесс рассуждения неотделим от многих сфер духовной культуры, в состав которой входят не только математически строгие доказательства, но так же и темы или сюжеты, многие из которых навеяны фантазией, далеко не всегда привязанной к реальности. Часто рассуждения используются с целью введения в заблуждение, и во многих случаях эта цель, к сожалению, достигается. И сфера науки здесь не является исключением — примеров тому немало. Среди тех, кто участвовал в разгроме «лженаук» в известный период нашей истории, было, повидимому, немало и таких, кто искренне верил в логическую обоснованность идеологизированной критики кибернетики, генетики, «буржуазной» социологии и т.д. В немалой степени успеху этой «критики» способствовало и то, что в период с 1917 по 1946 гг. логика в нашей стране подверглась идеологической дискриминации и перестала существовать как общеобразовательная наука [22]. И до настоящего времени этот пробел еще полностью не восстановлен.

Одной из причин появления в науке многочисленных логик со своими способами моделирования рассуждений и правилами вывода, видимо, является не вполне обоснованное убеждение, что логическая структура рассуждений существенно изменяется в зависимости от предметной области (точных наук, фольклора, мифологии, литературы, философии, искусствоведения и т. д.). Но многие выдающиеся мыслители прошлого (Ибн-Сина, Лейбниц и др.) считали, что логика едина независимо от сферы ее применения. Эта точка зрения вряд ли заслуживает забвения.

Что касается математического аппарата для построения системы моделирования рассуждений, то оказывается, что тут не надо изобретать велосипед. Этот математический аппарат давно известен. Нам остается только вывести его из забвения и немного расширить его возможности. Этот аппарат — алгебра множеств.

Начнем с определений некоторых необходимых терминов. Всякое рассуждение состоит из некоторой совокупности суждений. Под *суждением* мы будем понимать некоторое выраженное словами обоснованное, доказанное или просто предполагаемое *соотношение* между некоторыми сущностями (множествами, объектами, признаками, событиями и т. д.). Число этих сущностей в суждении может быть произвольным. Мы пока ограничимся только суждениями, в которых содержатся только две сущности (назовем их *бинарными суждениями*). Для многих, даже весьма сложных, рассуждений такое ограничение достаточно, тем более, что многие суждения, содержащие более двух сущностей, можно адекватно преобразовать в некоторое множество бинарных суждений.

Математически каждое суждение мы будем представлять как соотношение $X \to Y$, в котором X и Y обозначают некоторые множества, события или признаки, а связка «$\to$» может иметь несколько значений в зависимости от содержания суждения. Если X и Y — множества, то $X \to Y$ означает то же самое, что и $X \subset Y$, если же X и Y — события или признаки, то $X \to Y$ означает, что Y является необходимым условием или определяющим признаком X. Оказывается, что для всех этих вариантов значений соотношения $X \to Y$ правила вывода для совокупности таких соотношений являются общими, и построение логического вывода из некоторого множества суждений не зависит от того, какому из этих вариантов соответствует содержание каждого суждения.

Рассмотрим сначала представление различных типов суждений (A, E, I, O) в виде таких пар, взяв за основу жергонновы отношения (см. пп. 2.3 и 2.4). Ясно, что в итоговом результате

$$\mathbf{A}: X \subseteq Y; \quad \mathbf{E}: X \cap Y = \varnothing; \quad \mathbf{I}: X \cap Y \neq \varnothing; \quad \mathbf{O}: X \cap \overline{Y} \neq \varnothing$$

нашему определению суждения соответствует только представление общеутвердительного типа суждения (**А**) — $X \to Y$. Но оказывается, и остальные типы можно представить таким же образом. Проще всего такое преобразование осуществимо для типа **Е**: $X \subseteq \overline{Y}$ $(X \to \overline{Y})$.

Варианты логических значений этого выражения могут быть самые разные: «X не является Y», «X включено в дополнение Y», «Свойство Y не присуще X», «Отрицание Y является необходимым условием X».

Чтобы привести к такому виду остальные типы суждений, введем следующие обозначения: пусть все основные множества будут у нас обозначены прописными буквами (A, B, ..., X, Y, ...), а некоторые непустые подмножества этих множеств — соответствующими строчными буквами (a, b, ..., x, y, ...). Тогда очевидно, что

$$\mathbf{I}: x \subseteq Y \quad (x \to Y); \quad \mathbf{O}: x \subseteq \overline{Y} \quad (x \to \overline{Y}).$$

Проверить справедливость этих соотношений несложно. Достаточно проверить все варианты жергонновых отношений для каждого типа суждения (см. рис. 1) при условии, что во всех соотношениях включения ($\subseteq$) участвуют только непустые множества. А что делать в тех случаях, когда в исходных суждениях допускаются пустые множества, которые по законам алгебры множеств включены в любые множества?

Подробный ответ на этот вопрос будет дан позже. Здесь лишь заметим, что первый этап анализа рассуждений производится из «сильного» предположения, что все участвующие в рассуждении множества непустые. Если этот этап анализа ведет в тупик, то на втором этапе анализа рассматриваются варианты, когда некоторые множества, которые «не жалко потерять», рассматриваются как пустые. Но на этом этапе анализ производится уже по другим (менее жестким) правилам.

Кроме того, очевидно, что для всех «терминов» A, B, ..., X, Y, ... соблюдается $a \subseteq A$, $b \subseteq B$, ..., $x \subseteq X$, $y \subseteq Y$, ..., что соответствует суждениям $a \to A$, $b \to B$, ..., $x \to X$ и т. д.

Рассмотрим примеры. «Все люди (H) смертны (M)»: $H \to M$; «Некоторые камни (S) легче воды (E)»: $\text{в} \to S$ и $\text{в} \to E$; «Некоторые люди не в ладах с логикой»: $h \to H$ и $h \to \overline{L}$. Заметим, что в некоторых случаях для одного и того же термина X нам придется вводить не одно обозначение для словосочетаний «некоторые X», встречающихся в разных суждениях. В этом случае, если очевидно, что речь идет о разных «некоторых X», мы будем обозначать их строчными буквами с индексами: x_1, x_k и т. д. Ясно, что в суждениях, если к термину добавить некоторую логическую приставку («все», «некоторые», «не» или

«невозможно, что»), получим новое содержание. Эти различные логические варианты термина назовем модификациями термина.

Модификациями произвольного термина X в математической модели рассуждений называются следующие множества, обозначаемые соответственно: X — все элементы термина X; $\overline{X}$ — все не X в некотором универсуме U; x_1, x_2, ..., x_i — некоторые непустые подмножества представителей термина X. Далее нам понадобится еще две модификации: $\overline{x_i} = U \setminus x_i$ — назовем ее *отрицанием* (или дополнением) *частного случая* и Cx_i — *частный случай отрицания* (или дополнения) термина X. Соотношение между этими модификациями можно легко понять с помощью диаграмм Венна (рис. 9).

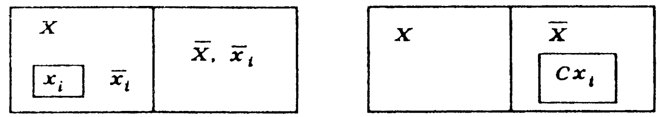

Рис. 9

Область $\overline{x_i}$ «охватывает» всю область $\overline{X}$ и часть области X за исключением «объема», заключенного в области x_i. Что касается области Cx_i (символ C здесь указывает на то, что мы «находимся» в дополнении (complement) области X), то она заключена внутри «объема» $\overline{X}$ и интерпретируется как некоторое подмножество не X.

Значительная часть бинарных суждений, встречающихся в научных рассуждениях или разговорной речи, может быть представлена как соотношения включения между множествами. Например, «Все улитки молчаливы» — множество улиток включено в множество молчаливых существ; «Все числа, делящиеся на 6, делятся на 3» — множество чисел, кратных шести, включено в множество чисел, кратных трем.

Но мы не будем ограничиваться только «множественной» интерпретацией «правильных» суждений. К «правильным» суждениям мы будем относить и такие суждения вида $X \to Y$, когда достоверно известно, или постулируется, или предполагается, что Y является *необходимым* условием X, или же X является *достаточным* условием Y (термины «необходимость» и «достаточность» здесь употребляются в сугубо математическом смысле и отличаются от одноименных терминов, используемых в философии или модальной логике). Например, суждение «Если на небе тучи, то идет дождь» с точки зрения нашего определения не является правильным, если речь в данном случае идет о реальном, а не внеземном или фантастическом мире. Здесь правильным будет суждение «Если идет дождь, то на небе тучи», — тучи являются необходимым, но недостаточным условием дождя (всем нам не раз случалось в пасмурную погоду наблюдать не только дождь, но и снег или град или же полное отсутствие каких-либо осадков). В данном случае, если мы в суждении хотим причину поставить перед следствием, то для обеспечения «правильности» можно воспользоваться равносильным суждением «Если нет туч, то нет и дождя».

В качестве еще одного примера такого рода суждений приведем известную теорему из геометрии: «Если четырехугольник ромб, то его диагонали перпендикулярны» — перпендикулярность диагоналей в четырехугольнике является необходимым, но недостаточным условием того, что данная фигура является ромбом: можно построить четырехугольник, у которого диагонали перпендикулярны, но стороны не равны.

В математической логике и в некоторых моделях рассуждения, построенных на ее основе, исходные предложения по форме строятся на основе импликации, которая обозначается символами «$\supset$» или «$\to$». Обычно считается, что импликация $X \to Y$ переводится на естественный язык как «Если X, то Y». Однако у импликации имеется математически точное определение с помощью таблицы истинности, в которой определяется истинность выражения $X \to Y$ в зависимости от истинности X и Y:

№ пп.	X	Y	$X \to Y$
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	0
4	1	1	1

В таблице логические константы «истинно» и «ложно» обозначены, как это принято в работах по математической логике, соответственно цифрами 1 и 0.

А теперь посмотрим, что получается в тех случаях, когда в предложении, построенном с помощью импликации $X \to Y$, X по смыслу является необходимым условием Y. Рассмотрим суждение «Если на небе тучи, то идет дождь» и обозначим события «на небе тучи» как X, а «идет дождь» — как Y.

По таблице истинности оказывается, что невозможная ситуация 2 (нет туч, идет дождь) является истинной, а возможная ситуация 3 («Есть тучи, нет дождя») является ложной. Более приемлема интерпретация, при которой в импликации $X \to Y$ событие «Идет дождь» обозначено как X, а событие «На небе тучи» — как Y. В этом случае явных противоречий нет, однако еще раз отметим, что в рассматриваемой здесь модели рассуждения бинарное условное суждение не является импликацией двух высказываний, а является соотношением,

что в математической логике с большим основанием соответствует понятию «двуместный предикат». Более точное определение бинарного суждения и более сложных типов суждений приведено в п. 2 Приложения (в Приложении в соответствии с терминологией математической логики суждения названы «предложениями»).

Отметим, что само по себе понятие «импликация», если его понимать только как соотношение $X \to Y = \neg X \vee Y$ (это соотношение равносильно приведенной выше таблице истинности импликации), ни у кого возражений не вызывает. Возражения у некоторых логиков вызывает это равенство в сочетании с переводом соотношения $X \to Y$ в предложение «Если X, то Y» (см. словарную статью «Парадоксы материальной импликации» в работе [24]). Тем не менее, многие специалисты по математической логике пришли к выводу, что такой «перевод» вполне оправдан.

Но и для импликации в нашей модели тоже найдется место — иногда полезно какое-либо спорное суждение проверить с помощью приведенной выше таблицы истинности, чтобы убедиться (или, наоборот, усомниться) в том, что одно из условий суждения является необходимым условием.

Суждения типа «Если на небе тучи, то идет дождь» могут определяться как «правильные» (точнее, допустимые) в рамках вероятностной или нечеткой логик (есть, оказывается, и такие!), но разговор об этих логиках выходит за рамки данного исследования.

Слово «правильность» при характеристике суждений взято в кавычки не случайно. Под «правильностью» суждений здесь понимается не их истинность, а их соответствие одному из вариантов допустимых значений бинарного суждения (см. выше). Это соответствие мы назовем *логической семантикой* суждений, связывая это понятие с понятием «интерпретация» в математической логике. Таким образом, под «правильностью» здесь понимается формальное свойство логической системы, но отнюдь не ее истинность или ее соответствие какой-либо реальности. Под логической семантикой суждения понимается не его конкретное содержание, а его рафинированная логическая суть.

Соответствие же логической семантики произвольного суждения какой-либо реальности или конкретному образу характеризуется другим свойством — *адекватностью*. Если в рассуждении речь идет о реальных вещах, то адекватность исходных или выведенных суждений реальным соотношениям является одной из проверок истинности данного рассуждения. Но проверка истинности рассуждений в логике не ограничивается только проверкой адекватности отдельных суждений — во многих случаях этого недостаточно, а иногда, если, допустим, речь идет о какой-то фантастической или игровой ситуации, и вовсе необязательно. И потому просто необходим другой критерий истинности рассуждений — *проверка непротиворечивости*. Рассмотрим его более подробно.

Множество «правильных» суждений не обязательно должно соответствовать какой-то реальности. Логика не запрещает рассуждений о фантастическом мире или о мире, для которого в реальности существуют лишь грубые приближения. Ни одна реальная точка и ни одна реальная линия или граница не совпадают в точности с «точками» и «прямыми» в логической системе, которая носит название Евклидовой геометрии. В логике никто не запрещает брать в качестве исходных суждений фразы «Все драконы любят шоколад» или «Все люди злые». Но если в процессе рассуждений мы встречаемся с такими суждениями (аргументами), которые приводят к опровержению этих фраз, то у нас остается три варианта выбора: 1) усомниться в исходных суждениях; 2) усомниться в аргументах; 3) согласиться с истинностью исходных суждений и аргументов, но считать при этом, что логика лишь мешает нам отстаивать любимые постулаты. К сожалению, в реальной жизни многие (а среди этих многих есть и ученые, и политики) нередко выбирают третий вариант. Но к логической истинности этот вариант не имеет никакого отношения. В рассматриваемой модели рассуждения «истинность» во многом совпадает с понятием «непротиворечивость». Заметим, что этот тезис, выдвинутый Д. Гильбертом в качестве одного из основных в логическом формализме, в данной модели не оспаривается.

В рассуждениях, которые так или иначе отражают некоторые стороны нашей повседневной жизни, мы часто вынуждены использовать в качестве посылок суждения, адекватность которых не является строго доказанной. Например, суждения «Все лебеди белые» или «Все демократы ратуют за рыночную экономику» основаны на каком-то ограниченном множестве подтверждающих примеров и вполне возможно, что в дальнейшем могут не подтвердиться. Спрашивается, можно ли такие «эмпирические» суждения использовать в нашей модели рассуждения, в которой для суждений предусматриваются довольно жесткие семантические ограничения? Разумеется, можно, но такие суждения целесообразно считать *гипотезами*, и если в процессе рассуждения будет получено противоречие, то в этом случае в некоторые из этих «эмпирических» исходных суждений необходимо ввести соответствующие поправки. Далее мы увидим, что на основе нашей математической модели можно сравнительно легко выявлять семантические неточности, допущенные в исходных суждениях.

Теперь, когда мы разобрались с суждениями, можно дать общее определение рассуждения. *Рассуждением называется процесс построения из множества исходных суждений множества заключительных суждений* (или следствий) *на основе некоторых правил вывода*. Правила вывода мы рассмотрим в п. 3.3. Кроме того, в процесс рассуждения мы также будем включать *проверку непротиворечивости* (или совместимости) множества исходных суждений. Сравнительно простые методы такой проверки в рассматриваемой математической модели рассуждений существенно отличают эту модель от традиционных умозаключений. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в пп. 3.4 и 3.5.

Чтобы представить процедуру вывода более наглядно, совокупность исходных и получаемых в процессе логического вывода суждений будем изображать в виде особых математических структур — графов. Обращение к графам диктуется не только соображениями наглядности — некоторые общие закономерности нашей модели рассуждений легко выводятся из закономерностей теории графов. Ниже приведены некоторые общие сведения по теории графов. Заметим, что в многочисленных работах по теории графов многие термины определяются и трактуются неодинаково. Приведенная здесь терминология соответствует в основном терминологии, принятой в известной работе [23].

3.2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Граф — это некоторая совокупность объектов (эти объекты называются *вершинами*), некоторые пары объектов в которой связаны *соотношением упорядоченности*. В изображениях графов *порядок* (т.е. предписанное отношение следования друг за другом) между парами вершин задается линиями со стрелками или без стрелок. Эти линии называются *дугами* или *ребрами* графа. Поскольку в графах существенным является только отношение порядка межу вершинами, то длина и форма этих линий (они могут быть прямыми или кривыми) не имеют значения. На рис. 10 изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$, в котором имеется пять парных связей между вершинами, из них три — со стрелками ($a \to d$, $d \to e$ и $e \to c$) и две — без стрелок ($b - c$ и $b - d$). Дуги со стрелками называются *ориентированными*, а без стрелок — *неориентированными*.

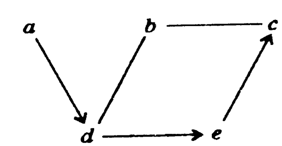

Рис. 10

Неориентированные связи в графах в отличие от дуг принято называть ребрами. Ребра будем считать состоящими из двух противоположно направленных дуг, соединяющих одни и те же вершины. Иногда ребра изображают линиями со стрелками на обоих концах — здесь подразумевается, что две разнонаправленные дуги наложены друг на друга. Пары вершин, связанных какой-либо дугой или ребром, называются *смежными*.

В некоторых работах по теории и применению графов в качестве дуг графов рассматриваются также и *петли*, т. е. дуги, направленные из вершины в ту же вершину. Здесь мы петли использовать не будем.

Граф можно представить, например, как сеть коммуникаций, при этом ориентированные дуги показывают, что связь между вершинами возможна только в одну сторону, а неориентированные ребра показывают двустороннюю связь — передача сообщений здесь возможна как в одну сторону, так и в другую. Если в графе отображается соотношение включения между множествами, то ясно, что вершины (в данном случае — множества), связанные ребром, являются эквивалентными, так как для этих множеств (например, X и Y) соблюдается основной критерий эквивалентности множеств: $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

По существу, *графы описывают некоторые соответствия между объектами*. И если здесь мы рассматриваем бинарные суждения как соответствия между парами сущностей, *то произвольный граф можно считать отображением более сложных суждений, состоящих из произвольного числа сущностей.*

Из большого многообразия понятий теории графов нам понадобятся лишь те, которые связаны с понятием достижимости в графе.

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 10. Можно ли в этом графе, используя предусмотренные в нем дуги, попасть из вершины a в вершину c? Оказывается, можно, и при этом мы можем «пройти» из вершины a в вершину c двумя различными «путями»: $a \to d — b — c$ и $a \to d \to e \to c$. А вот из вершины c пройти в вершину a уже нельзя: мы можем «пройти» из вершины c в вершину d, но дальше путь закрыт, так как стрелка идет от a к d, но не наоборот. Теперь остается только добавить, что понятие *путь* является одним из основных понятий теории графов, а с этим понятием непосредственно связано и понятие *достижимости*: вершина Y *достижима* из вершины X, если в графе существует путь из вершины X в вершину Y, в противном случае вершина Y в графе *недостижима* из X.

Еще одним понятием теории графов, которое нам понадобится, является понятие цикла. *Циклом* в графе называется путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают. Например, в графе на рис. 10 *путь* $d \to e \to c — b — d$ является циклом (из вершины d мы снова приходим в вершину d). Если две вершины соединены ребром, то подразумевается, что через эти две вершины проходит цикл. Например, для вершин b и c на рис. 10 можно построить два цикла: $b \to c \to b$ и $c \to b \to c$.

Изображения графов в виде рисунков не являются единственным способом их представления. Для расчетов и выводов основных соотношений на графах более удобны представления

графов в виде соответствия и в виде матрицы смежности. *Соответствием* для заданного графа называется перечисление всех его вершин, каждой из которых сопоставлено множество вершин, в которые направлены дуги из данной вершины. Граф на рис. 10 можно представить как соответствие:

$$a \to \{d\}; \quad b \to \{c,d\}; \quad c \to \{b\}; \quad d \to \{b,e\}; \quad e \to \{c\}.$$

На основе соответствия строится *матрица смежности* графа (рис. 11).

Строки и столбцы матрицы смежности графа соответствуют множеству всех вершин графа. Матрица смежности строится весьма просто. На пересечении строки, обозначенной вершиной x, и столбца, обозначенного вершиной y, вписывается единица только в том случае, если из x существует дуга в y, в противном случае вписывается ноль. Теперь на основе этих данных построим соответствие, в котором каждой вершине сопоставляется множество достижимых вершин (*соответствие достижимости*):

$$a \to \{b,c,d,e\}; \quad b \to \{b,c,d,e\}; \quad c \to \{b,c,d,e\};$$
$$d \to \{b,c,d,e\}; \quad e \to \{b,c,d,e\}.$$

На основе этого соответствия построим матрицу достижимости графа (рис. 12).

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
c & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
d & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Рис. 11

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & a & b & c & d & e \\
\hline
a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
b & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
c & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
d & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
e & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Рис. 12

Для графов с большим числом вершин и большим числом дуг построение соответствия достижимости по рисунку весьма утомительно. Однако если использовать матрицу смежности, то при выборе соответствующих структур данных преобразование ее на ЭВМ в матрицу достижимости даже для графов с сотнями вершин производится довольно быстро [23].

Взяв за основу соотношение достижимости или матрицу достижимости графа, можно построить граф достижимости исходного графа. Но часто из-за большого числа дуг в графе достижимости, такие изображения трудно анализировать. Поэтому во многих случаях более простым является анализ графов достижимости на ЭВМ с использованием соответствия достижимости или матрицы достижимости.

Теперь осталось только сформулировать ряд важных для понимания дальнейшего соотношений, которые можно наглядно показать на матрицах смежности и достижимости. Ясно, что эти матрицы являются *квадратными*, т.е. матрицами, у которых число строк равно числу столбцов. Для квадратных матриц определяется *главная диагональ*, т.е. диагональ из клеток, идущая из левого верхнего угла в правый нижний угол матрицы. Она является своеобразной осью симметрии матрицы и относительно нее легко определяется без рисунка, являются ли связи ориентированными или неориентированными. Например, на рис. 11 единицы, стоящие на пересечении строк и столбцов b и c, а также c и b, симметричны относительно главной диагонали, а это означает, что вершины b и c соединены ребром. Аналогичную закономерность (но здесь уже речь идет не о смежности) можно проследить и для матрицы достижимости.

Если в матрице достижимости единица стоит на главной диагонали, то через вершину, соответствующую этой клетке, проходит по крайней мере один цикл. На рис. 12 видно, что таким свойством характеризуются вершины b, c, d и e, в то время как диагональная клетка, соответствующая вершине a, содержит 0 и, следовательно, через вершину a не проходит ни одного цикла. Обратите внимание на то, что при использовании петель в графах, которые в матрице смежности отображаются единицами на главной диагонали, эти единицы как бы «заслоняют» единицы, появляющиеся в тех случаях, когда при построении матрицы достижимости образуется цикл. Поэтому при использовании петель в графах этот простой и удобный критерий распознавания циклов в графе применять нельзя.

И, наконец, последние сугубо числовые соотношения на графах. Нетрудно убедиться, что число единиц в матрице достижимости не может быть больше числа N^2, где N — число вершин графа, а это означает, что общее число полученных парных соответствий достижимости любого графа не может быть больше N^2. Для матрицы смежности общее число единиц не превышает числа $N^2 - N$ (поскольку мы не учитываем петель, то в диагональных клетках матрицы смежности всегда стоят нули) и, следовательно, общее число дуг в любом исходном графе (если он не является графом достижимости) не может быть больше числа $N^2 - N$.

3.3. ПРАВИЛА ВЫВОДА И ПОЛУЧЕНИЕ ВЫВОДИМЫХ СУЖДЕНИЙ

Предположим, что некоторая совокупность суждений может быть представлена как совокупность пар множеств, связанных соотношением включения. Тогда для того, чтобы получить не-

которые новые суждения, являющиеся следствиями исходных, воспользуемся законами алгебры множеств и, в частности, свойствами включения (см. п. 2.4). Их всего два: *закон транзитивности* включения (из двух соотношений включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$ выводится соотношение $X \subseteq Z$) и *закон контрапозиции* (соотношение $X \subseteq Y$ равносильно соотношению $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$).

В дальнейшем нам понадобятся следующие следствия из закона транзитивности:

Следствие 1. Для любой произвольной цепочки $X \subseteq Y \subseteq \ldots \subseteq Z$ включений соблюдается включение $X \subseteq Z$.

Следствие 2. Из истинности цепочки $A \subseteq X \subseteq \ldots \subseteq Z \subseteq A$ следует, что все множества $X, \ldots, Z$ эквивалентны множеству A.

Следствие 1 является очевидным — его справедливость легко показать на диаграммах Венна. Чтобы обосновать следствие 2, рассмотрим сначала более простую цепочку: $A \subseteq X \subseteq A$. Если множество X включено в множество A и в то же время не равно A, то первая часть цепочки ($A \subseteq X$) не соблюдается, так как условия $X \subseteq A$ и $X \neq A$ справедливы лишь тогда, когда X является строгим подмножеством A. А раз так, то невозможно $A \subseteq X$. Следовательно, справедливость двух соотношений $A \subseteq X$ и $X \subseteq A$ возможна лишь при условии $A = X$. Справедливость следствия 2 для более длинных цепочек можно доказать с помощью метода математической индукции.

Закон контрапозиции, хотя он и известен в алгебре множеств, используется редко и не имеет общепринятого названия. Термин «контрапозиция» известен в традиционной логике [24], но в современных системах логического вывода закон контрапозиции не используется в качестве правила вывода. Связано это с тем, что исходные высказывания как в традиционной, так и в математической логике, не обязательно должны быть «правильными» с точки зрения логической семантики суждений, рассмотренной в п. 3.1. Если суждение или высказывание по смыслу отличается от «правильного», то использование закона контрапозиции приводит к нарушению «равносильности» исходного и преобразованного высказывания или суждения [25]. Поэтому сформулированные в п. 3.1 *семантические ограничения* требуют более строгого, чем это принято в традиционной логике, подхода к формулировке исходных суждений, но, как мы увидим далее, при этом в самой процедуре анализа рассуждений появляется возможность математически обосновать некоторые известные еще древним логикам и философам и весьма распространенные ошибки в рассуждениях, такие как «круг в обосновании», «подмена тезиса», «неверная посылка» и т. д. Да и сама процедура логического вывода в этом случае существенно упрощается.

В итоге в нашей системе предусматривается всего два основных *правила вывода*:

1) *правило* ***С*** (контрапозиции): $X \to Y$ равносильно $\overline{Y} \to \overline{X}$;

2) *правило* ***Т*** (транзитивности): из $X \to Y$ и $Y \to Z$ выводится $X \to Z$.

Заметим, что при использовании правила ***С*** следует применять также и закон инволюции (исключение двойного дополнения или отрицания). Например, суждение $\overline{X} \to Y$ преобразуется по правилу ***С*** в суждение $\overline{Y} \to \overline{\overline{X}}$, которое в свою очередь равносильно суждению $\overline{Y} \to X$.

На первом этапе проверим применимость сформулированных правил при анализе умозаключений в категорическом силлогизме.

Категорический силлогизм — это последовательность из трех бинарных суждений, при этом первые два суждения являются посылками, а третье — возможным следствием из этих посылок. В категорическом силлогизме все три суждения должны принадлежать какому-либо из четырех типов (**A**, **E**, **I**, **O**), при этом в первых двух суждениях используется всего три термина (один из них встречается в каждой из посылок — он называется *средним термином*). Заключение должно состоять из двух остальных терминов — они называются *крайними терминами*. Силлогизм считается *правильным*, если заключительное суждение является следствием исходных суждений, и *неправильным* в противном случае.

Пример 1. Даны посылки (Л. Кэрролл) [26]:

«Все улитки молчаливы» (тип **A**) — первая посылка;

«Все забавные существа не молчаливы» (тип **E**) — вторая посылка;

«Все забавные существа не улитки» (тип **E**) — заключение.

При выводе в категорическом силлогизме ставится следующая задача: доказать, что третье суждение является следствием первых двух. Чтобы решить эту задачу традиционным способом, требуется довольно большое число правил. Мы эти правила здесь рассматривать не будем, поскольку они имеются в учебниках по логике, например, [9, 22]. У Л. Кэрролла (литературный псевдоним английского математика и писателя Ч. Л. Доджсона) правила вывода существенно отличаются от традиционных, но при решении более сложных задач логического вывода они оказываются не намного проще.

Однако при решении силлогизмов и соритов (о них речь впереди) Л. Кэрролл иногда ставил более общую и во многом более практичную задачу: не просто проверить, является ли

некоторое заключительное суждение следствием исходных суждений, а определить, что следует из исходных суждений. При этом оказывалось, что число выводимых суждений может быть больше одного и тогда из этого множества выведенных суждений выбирались наиболее интересные (или неочевидные). Этой идеей (в современной логике она не нашла применения) мы и воспользуемся — оказывается, в нашей математической модели рассуждений она позволяет намного упростить и в то же время сделать более точным и полным процесс решения задач логического вывода.

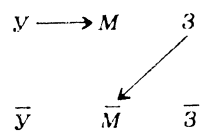

Рис. 13

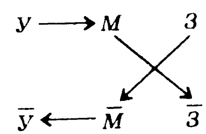

Рис. 14

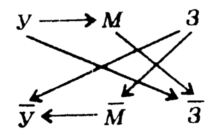

Рис. 15

Введем обозначения: $У$ — улитки, $М$ — молчаливые существа, $З$ — забавные существа. Очевидно, что $М$ является множеством представителей среднего термина, $У$ и $З$ — множествами представителей крайних терминов. Теперь, используя обозначения, предложенные в п. 3.1, исходные суждения можно выразить как бинарные суждения $У \to М$ и $З \to \overline{М}$. Далее, используя множество модификаций терминов $\{У, М, З, \overline{У}, \overline{М}, \overline{З}\}$, построим исходный граф (рис. 13). На следующем этапе построим контрапозиции исходных суждений (рис. 14), а на завершающем этапе, используя закон транзитивности, — граф достижимости для графа на рис. 14 (рис. 15).

Нетрудно убедиться, что дальнейшее использование правил вывода не позволяет получить ни одного нового суждения. Эта ситуация является *критерием остановки* процесса вывода. В итоге мы получили два суждения, связывающие два крайних термина «улитки» и «забавные существа»: $З \to \overline{У}$ (все забавные существа не улитки) и $У \to \overline{З}$ (все улитки не забавны). Одно из них является третьим суждением в силлогизме. Следовательно, третье суждение силлогизма является следствием первых двух. Рассмотрим примеры с использованием частных случаев.

Пример 2. Даны две посылки силлогизма: «Все P есть M» ($P \to M$) и «Некоторые S есть M» ($s \to S$ и $s \to M$) (например, «Все улитки молчаливы» и «Некоторые забавные существа молчаливы»). Что из этого следует?

Строим исходный граф (рис. 16) и, используя правила вывода, дополняем его до предела новыми дугами (рис. 17).

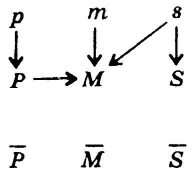

Рис. 16

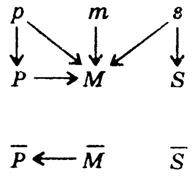

Рис. 17

Отметим одно новшество по сравнению с прежней схемой. Поскольку мы перешли к рассмотрению частных случаев (p, m, s), то на графе наряду с исходными суждениями ($P \to M$ и $s \to M$) появляются еще три очевидных исходных суждения ($p \to P$, $m \to M$ и $s \to S$). В итоге мы получили два новых суждения ($p \to M$ и $\overline{M} \to \overline{P}$), но среди них нет ни одного, который связывал бы какие-либо модификации крайних терминов (P и S). Попробуем немного изменить ситуацию: заменим исходное суждение «Некоторые S есть M» на «Некоторые S не есть M» (рис. 18, 19).

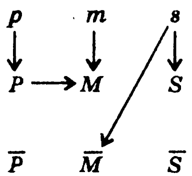

Рис. 18

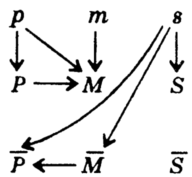

Рис. 19

Здесь уже крайние термины оказываются связанными в суждении $s \to \overline{P}$, а это означает, что категорический силлогизм: «Все улитки молчаливы» (тип **A**); «Некоторые забавные существа не молчаливы» (тип **O**); «Некоторые забавные существа не улитки» (тип **O**) — является правильным. Этот результат соответствует законам традиционной силлогистики.

Однако, если мы начнем так же проверять все известные правильные типы категорического силлогизма (их всего 19, и в традиционной логике они называются *модусами*), то окажется, что далеко не во всех случаях мы сможем получить требуемое заключение силлогизма. Рассмотрим еще один пример.

Пример 3. Даны посылки «Все A есть C» и «Все A есть B» (рис. 20). После применения правил $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{T}$ до предела получим граф, изображенный на рис. 21.

Среди новых связей нет ни одной, которая связала бы крайние термины C и B. А между тем, этой схеме соответствует

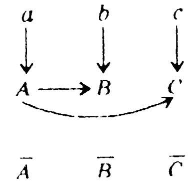

Рис. 20

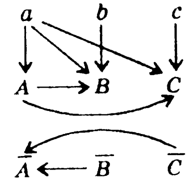

Рис. 21

известный правильный модус Darapti, в котором третьим суждением является «Некоторые B есть C». Не значит ли это, что в нашей модели рассуждений существуют изъяны? Попробуем разобраться.

Рассмотрим конкретный пример (Л. Кэрролл): «Все солдаты (A) храбрые C» и «Все солдаты сильные (B)». В соответствии с традиционной силлогистикой утверждение «Некоторые сильные храбры» ($b \to C$) следует из первых двух суждений (для знатоков классической логики отметим, что это модус **AAI** третьей фигуры категорического силлогизма).

В истории логики по поводу «правильности» силлогизма Darapti и еще одного «правильного» силлогизма Felapton высказывалось немало сомнений. Среди сомневающихся были известный бельгийский философ и логик А. Гейлинкс (1624–1669) и наш соотечественник М. В. Ломоносов [13]. Отголоски этих споров сохранились и в современном «противостоянии» традиционной силлогистики и математической логики: оказалось, что непосредственно вывести все правильные силлогизмы Аристотеля из аксиом исчисления высказываний или исчисления предикатов невозможно — для этого требуется ввести дополнительные «нелогические» аксиомы. Таких систем с дополнительными аксиомами разработано немало, в их создании принимали участие многие известные логики (Я. Лукасевич, Л. А. Калужнин, В. А. Смирнов и др.).

Проще всех подошел к этой проблеме Л. Кэрролл [26]. Он предположил, что из суждения «Некоторые X есть Y» непосредственно следует суждение «Некоторые Y есть X». Обосновывал он это тем, что суждение «Некоторые X есть Y» означает, что множества X и Y дают при пересечении непустое множество (некоторые X), и это множество можно также интерпретировать как «некоторые Y», которое включено в множество X. Тогда все силлогизмы, включая и сомнительные, оказываются «правильными». И возникает соблазн ввести в состав правил вывода еще одно обязательное правило: *из суждения «Некоторые X есть Y» следует суждение «Некоторые Y есть X»*.

Попробуем ввести в состав исходных посылок (а кто нам это запрещает?) еще одно суждение: «Некоторые сильные не являются храбрыми» ($b \to \overline{C}$). Если не пользоваться только что введенным правилом, то никаких противоречий в этом случае не возникает (из исходных посылок вовсе не следует, что все сильные храбры). Но если этим правилом (или правилами традиционной силлогистики) воспользоваться, то получается, что «некоторые сильные» одновременно и храбры, и не храбры. Ясно, что в двух суждениях $b \to \overline{C}$ и $b \to C$ множества b (некоторые сильные) имеют разное содержание, но в традиционной формальной логике эта тонкость не всегда принимается во внимание.

Если в качестве правил вывода оставить только правила транзитивности и контрапозиции, то при анализе всех известных правильных типов (модусов) категорического силлогизма окажется, что из 19 правильных модусов с помощью этих правил выводится только девять (все модусы первой и второй фигуры и модус **AEE** четвертой фигуры — это к сведению знатоков традиционной логики). Остальные правильные модусы категорического силлогизма не выводятся, и отсюда можно еще раз прийти к выводу, что *в общем исчислении суждений нужны еще какие-то дополнительные правила вывода или какие-то «нелогические» аксиомы*. Однако можно обойтись и без этих «издержек». Чтобы понять, как это делается, нужны еще некоторые математические соотношения, которые мы рассмотрим ниже, а сейчас перейдем к анализу случаев, не относящихся в традиционной логике к разряду спорных или сомнительных.

Увеличение числа исходных суждений в рассуждении приводит нас к более общему по сравнению с категорическим силлогизмом виду умозаключений — к соритам. В традиционной логике сорит так же как и категорический силлогизм, должен обладать определенной структурой, которая позволяет проверить правильность сорита с помощью разделения множества исходных суждений на пары суждений, которые являются исходными посылками правильных категорических силлогизмов.

Здесь мы, отойдя от общепринятого определения, будем считать *соритом* произвольное множество бинарных суждений без всяких ограничений на структуру этого множества, но при этом будем предполагать, что логическая семантика самих суждений строго определена. *Решением сорита* является вывод некоторых (или всех возможных) следствий из множества исходных суждений и проверка непротиворечивости множества исходных суждений. С некоторым приближением соритом можно считать некоторую систему «аксиом» (исходных суждений), для которой с помощью сформулированных в начале этого раздела правил вывода выводится некоторое множество «теорем» и проверяется непротиворечивость заданной таким образом «аксиоматической системы». В силу этого данное определение сорита является еще одним общим определением рассматриваемой здесь математической модели рассуждения. Рассмотрим простой пример.

Пример 4. Даны посылки (Л. Кэрролл):

1) «Всякие малые дети неразумны»;

2) «Всякий, укрощающий крокодилов, заслуживает уважения»;

3) «Всякие неразумные люди не заслуживают уважения».

Что следует из этих посылок? Введем обозначения: C — малые дети; S — разумные люди; T — укротители крокодилов; R — уважаемые люди. В итоге получим формальную запись исходных суждений:

$$1)\ C \to \overline{S};\quad 2)\ T \to R;\quad 3)\ \overline{S} \to \overline{R}.$$

Исходный граф для этой системы посылок показан на рис. 22. Здесь мы не будем выводить все следствия. Покажем только, как можно, используя наши правила вывода, получить основной результат (рис. 23).

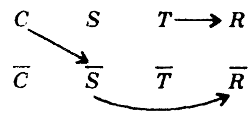

Рис. 22

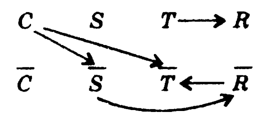

Рис. 23

Построим контрапозицию суждения $T \to R$: $\overline{R} \to \overline{T}$. Поскольку из C в $\overline{T}$ появился путь $C \to \overline{S} \to \overline{R} \to \overline{T}$, выводим суждение $C \to \overline{T}$ («Все малые дети не являются укротителями крокодилов»). Контрапозицией этого суждения является $T \to \overline{C}$ («Все укротители крокодилов не малые дети»). Это же решение можно получить с помощью диаграмм Венна [2], но в более сложных случаях, когда посылок много и среди них есть частноутвердительные или частноотрицательные суждения, традиционные методы работают плохо.

Стоит обратить внимание на то, что Л. Кэрролл в своих логических задачах использовал формы суждений, которые не укладываются в рамки классической силлогистики. Например, в задаче об укротителях крокодилов третье суждение ($\overline{S} \to \overline{R}$) не принадлежит ни одному из известных типов (**A,E,I,O**). В ряде задач он использовал в качестве посылок суждения, в которые включалась модификация термина, названная здесь частным случаем отрицания (например, «Некоторых нечестных людей уличают в неблаговидных поступках») — эта модификация в традиционной силлогистике почти не используется. И тем не менее, система рассуждений, предложенная им, не потеряла от этих нововведений своей строгости, но, к сожалению, оказалась забытой.

Рассмотрим случай, когда в рассуждениях из правдоподобных, на первый взгляд, посылок получаются неправдоподобные выводы. В этих рассуждениях среди исходных суждений встречаются такие, которые отрицают неправдоподобные свойства реальности (например, «Не существует зеленых чертей»). После проведения анализа исходных посылок вдруг неожиданно оказывается, что следствием этих посылок является некоторое другое неправдоподобное суждение (например, «Существуют серые черти»). И не всегда понятно, откуда оно появилось.

Пример 5. Даны три суждения (Л. Кэрролл):

1) «Все члены палаты общин находятся в здравом рассудке»;

2) «Ни один член парламента, носящий титул пэра, не станет участвовать в скачках на мулах»;

3) «Все члены палаты лордов носят титул пэра».

Что из этого следует? Введем обозначения: C — члены палаты общин; H — находящиеся в здравом рассудке; M — принимающие участие в скачках на мулах; P — носящие титул пэра. Будем считать, что возможный мир ограничен здесь только членами парламента. Тогда множество $\overline{C}$ представляет членов палаты лордов. Построим исходный граф (рис. 24), взяв за основу суждения: $C \to H$; $P \to \overline{M}$; $\overline{C} \to P$. Все следствия, получаемые из исходных с помощью двух наших правил вывода, показаны на рис. 25.

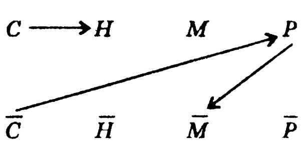

Рис. 24

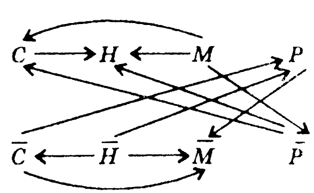

Рис. 25

Теперь раскроем содержание некоторых из полученных следствий. Получается: $M \to H$ (все, кто принимает участие в скачках на мулах, находятся в здравом рассудке); $\overline{H} \to \overline{C}$ (все, кто не в здравом рассудке, являются членами палаты лордов); $\overline{H} \to P$ (все, кто не в здравом рассудке, носят титул пэра) и т. д. Можно допустить, что предмет рассуждения не имеет никакого отношения к английскому парламенту и тем самым застраховаться от возможных международных осложнений.

Но вернемся еще раз к исходным посылкам. Все они правдоподобны и вряд ли против них будут возражать даже члены английского парламента. И тем не менее именно из них мы получили скандальные выводы. В чем же причина?

Причина в том, что при осмыслении этих посылок неявно допускается возможность того, что множества людей (в данном случае ограниченные членами парламента) включают в себя непустое множество людей, принимающих участие в скачках на мулах или не обладающих здравым рассудком. Стоит только допустить, что эти множества пустые, то все наши «скандальные» следствия становятся бессмысленными. А что при этом происходит со схемой рассуждения? Обратите внимание, что на рис. 25 в «сомнительные» множества M и $\overline{H}$ не входит ни одна стрелка, а это означает, что противоречивая ситуация, когда в пустое множество включено некоторое непустое множество, в данной схеме исключается. И если предположить, что M и $\overline{H}$ — пустые множества, то окажется, что все члены парламента находятся в здравом рассудке и никто из них не собирается принимать участие в скачках на мулах.

Здесь мы получаем еще один критерий проверки правильности конкретной модели рассуждений: *если в процессе наполнения исходного графа получены сомнительные следствия, то мы должны усомниться в исходных посылках или же в существовании некоторых объектов или событий, которые в исходных посылках подразумевались как непустые множества.*

Для полноты картины рассмотрим еще один аспект математической модели рассуждений. В последнем примере сравним множество исходных суждений

$$C \to H;\ P \to \overline{M};\ \overline{C} \to P$$

и полученное в результате применения правил вывода соответствие

$$C \to \{H\};\quad M \to \{C,\ H,\ \overline{P}\};\quad P \to \{\overline{M}\};\quad \overline{C} \to \{P,\ \overline{M}\};$$
$$\overline{H} \to \{\overline{C},\ \overline{M},\ P\};\quad \overline{P} \to \{C,\ H\}.$$

В исходных посылках нами было определено только три термина, причем каждый из них содержал только один необходимый признак или его обязательное отсутствие (например, в суждении $P \to \overline{M}$). Но когда эти термины стали рассматриваться как составляющие некоторой системы, то некоторые из них в процессе вывода получили дополнительное содержание (например, у термина $\overline{C}$ выявился еще один признак —

$\overline{M}$), а некоторые термины, определение которых в исходных посылках отсутствовало (например, термины M, $\overline{H}$ и $\overline{P}$), получили в процессе вывода полный набор необходимых признаков или родовидовых отношений, которые здесь ассоциируются с отношением включения множеств. Это означает, что при построении терминологической системы, в состав которой входит некоторое множество терминов, на первой стадии можно давать неполные определения, устанавливая только необходимые соотношения между некоторыми парами терминов. Уточнить содержание этих терминов в дальнейшем можно на основе принятых правил вывода и анализа полученных результатов.

3.4. ИДЕАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАССУЖДЕНИЙ

В нашей повседневной практике рассуждения используются в основном не для того, чтобы из исходных суждений вывести какие-либо неизвестные нам следствия, а как правило, чтобы обосновать какой-то определенный тезис, который на деле может оказаться недостаточно проверенным мифом. Когда мы начинаем обосновывать этот тезис, то мы намеренно или непроизвольно подбираем именно те аргументы, которые как раз и требуются для его обоснования, и игнорируем те аргументы, которые его опровергают. Когда же речь идет о выводе неизвестного тезиса из произвольного набора аргументов, то тут как раз и начинаются трудности, для которых в современной логике нет достаточно простой и понятной формальной модели. Даже такой распространенный случай, когда единственный аргумент оказывается решающим для опровержения, казалось бы, строго доказанного заключения, в современной формальной логике не имеет ясного теоретического обоснования. Посмотрим, можно ли решить эти проблемы или хотя бы приблизиться к их решению с помощью рассматриваемой здесь математической модели рассуждения?

В рассуждениях, которые мы используем в повседневной практике, в качестве исходных нередко выступают суждения, логическая семантика которых может оказаться недостаточно обоснованной: утверждения типа «Все X есть Y», «Множество X включено в множество Y» или «Y есть необходимое условие X» могут оказаться неверными в силу неполноты наших знаний. Часто ошибочные суждения используются в качестве исходных намеренно, чтобы подвести рассуждение к какому-либо выгодному в данной ситуации заключению. Мы не всегда имеем возможность проверить соответствие этих исходных суждений реальности, но, оказывается, можно обосновать сомнительность исходных суждений на основе анализа общих структурных свойств модели рассуждения.

Рассмотрим *идеальную модель рассуждения* ***M***, в которой все исходные и выводимые суждения соответствуют логической семантике, и попытаемся определить общие структурные свойства этой модели. Определив их, можно будет находить в анализируемых моделях рассуждений нарушения этих свойств и на основании этого делать вывод о том, что в исходных суждениях имеются какие-либо нарушения логической семантики, которые можно расценивать как неточности или ошибки в исходных посылках. Обратимся еще раз к законам алгебры множеств.

Для произвольного множества S построим множество всех его подмножеств $P(S)$. В математике множество всех подмножеств множества S называется *множеством-степенью* S и часто обозначается как 2^S. Смысл этого названия и обозначения сейчас станет понятен. Пусть множество S содержит три элемента, т.е. $S = \{a, b, c\}$. Тогда

$$P(S) = (\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\})$$

и содержит восемь подмножеств. Число 8 можно представить как третью степень числа 2, и такое соотношение не случайно: для общего случая, когда S содержит произвольное число N элементов, в алгебре множеств установлено, что число всех подмножеств множества S равно 2^N. Отсюда понятно название «множество-степень» и обозначение 2^S для $P(S)$. Обратим внимание также и на то, что в составе множеств $P(S)$ содержится пустое множество ($\varnothing$) и само множество S. Можно было бы назвать множество S «самоприменимым», если бы не одно обстоятельство: S входит в состав $P(S)$, а не в самого себя. Кроме того, если придерживаться строгих математических канонов, множество S нельзя даже назвать «элементом множества $P(S)$», поскольку $P(S)$ рассматривается здесь (и вообще в математике) не как множество каких-то элементов, а как *система множеств*. Если же мы попытаемся представить $P(S)$ как множество элементов, то в этом случае нам придется принять как неизбежность следующие сомнительные положения: 1) пустое множество может быть элементом; 2) некоторые пары множеств $P(S)$, содержащие общие элементы (например, $\{a,b\}$ и $\{a,c\}$), мы должны считать непересекающимися множествами.

Чтобы использовать более привычные для нас обозначения, разделим систему множеств $P(S)$ на пары, так чтобы один элемент каждой пары являлся дополнением другого в множестве S. В результате получатся следующие пары: ($\varnothing$, $\{a, b, c\}$); ($\{a\}$, $\{b, c\}$); ($\{b\}$, $\{a, c\}$); ($\{c\}$, $\{a, b\}$). Теперь, используя понятие дополнения, введем новые обозначения для подмножеств $P(S)$:

Старые обозначения......	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$;
Новые обозначения......	x	y	z	w	$\overline{w}$	$\overline{z}$	$\overline{y}$	$\overline{x}$.

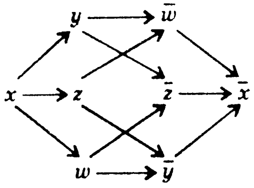

Рис. 26

Используя новые обозначения, построим граф всех непосредственных включений в $P(S)$ (рис. 26) и его матрицу смежности (рис. 27).

Теперь можно использовать свойство транзитивности включения и дополнить этот граф, преобразовав его в граф достижимости. Мы не будем загромождать рисунок новыми связями. Все они представлены в матрице достижимости (рис. 28).

	x	y	z	w	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{w}$
x	0	1	1	1	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0	0	1	1
z	0	0	0	0	0	1	0	1
w	0	0	0	0	0	1	1	0
$\bar{x}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{y}$	0	0	0	0	1	0	0	0
$\bar{z}$	0	0	0	0	1	0	0	0
$\bar{w}$	0	0	0	0	1	0	0	0

Рис. 27

	x	y	z	w	x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{w}$
x	0	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	0	1	1
z	0	0	0	0	1	1	0	1
w	0	0	0	0	1	1	1	0
$\bar{x}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{y}$	0	0	0	0	1	0	0	0
$\bar{z}$	0	0	0	0	1	0	0	0
$\bar{w}$	0	0	0	0	1	0	0	0

Рис. 28

Если попытаться дополнить этот граф, используя закон контрапозиции, то ничего нового мы не получим — для каждого из отношений включения этого графа уже существует его контрапозиция и ни одной новой связи в этом графе не появится. Отрицательный результат в этой процедуре — следствие законов алгебры множеств.

Матрицу всех включений $P(S)$ можно легко преобразовать так, что все соотношения между включениями и их контрапозициями окажутся симметрично расположенными. Эту своеобразную симметрию можно получить, если в матрице достижимости графа для $P(S)$ (рис. 28) переместить блок из четырех нижних строк матрицы вместе с их наименованиями в ее верхнюю часть (рис. 29).

	x	y	z	w	x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{w}$
$\bar{x}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{y}$	0	0	0	0	1	0	0	0
$\bar{z}$	0	0	0	0	1	0	0	0
$\bar{w}$	0	0	0	0	1	0	0	0
x	0	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	0	1	1
z	0	0	0	0	1	1	0	1
w	0	0	0	0	1	1	1	0

Рис. 29

Очевидно, что полученная матрица является симметричной относительно диагонали, проходящей из верхнего левого угла в нижний правый угол (заметим, что эта диагональ по смыслу отличается от главной диагонали, так как строки матрицы переставлены). Например, единице в матрице на рис. 29, представляющей включение $y \subseteq \bar{w}$, соответствует симметрично расположенная единица, представляющая включение $w \subseteq \bar{y}$, которое является контрапозицией предыдущего соотношения. Исключением не является даже единица, расположенная на диагонали этой матрицы и отображающая включение $x \subseteq \bar{x}$: контрапозиция этого соотношения дает то же соотношение (здесь надо только вспомнить, что двойное дополнение множества в алгебре множеств эквивалентно этому множеству).

В матрице смежности и в матрице достижимости можно было бы отобразить включение каждого множества в самого себя, т. е. заменить все нули в главных диагоналях матриц на рис. 27 и 28 единицами (в матрице на рис. 29 эти единицы были бы расположены более хаотично). В отличие от соотношения «быть элементом множества», для которого самоприменимость (т. е. свойство быть элементом самого себя) является весьма необычным и даже парадоксальным свойством, отношение включения сугубо «самоприменимо» — каждое множество включено в самого себя, и не допускается множество, которое не характеризовалось бы этой «самоприменимостью». Далее (в п. 3.6) мы убедимся, что каких бы то ни было парадоксов от этого не возникает. А в граф всех включений $P(S)$ и его матрицу смежности мы это «самоприменимое» соотношение не включаем по двум причинам. Во-первых, в нашей «идеальной» модели рассуждения предполагается, что все участвующие в рассуждении множества различны, в то время как «самоприменимость» включения характеризует одно и то же множество или множества, равные друг другу. Во-вторых, нам известно, что в ориентированном графе без петель единица в диагональном элементе матрицы достижимости служит критерием того, что через вершину, для которой диагональный элемент этой матрицы равен единице, проходит цикл. Если же мы сразу проставим все единицы на диагональных элементах матрицы смежности (что означает использование петель в графе), то воспользоваться этим удобным во многих отношениях критерием распознавания цикла в графе мы уже не сможем.

Попытаемся на этом примере проследить те свойства матрицы достижимости графа для $P(S)$, которые являются также и свойствами для любого S, число элементов которого произвольно (доказательство того, что эти свойства справедливы для любого конечного множества S, мы опускаем — они в математике известны и вполне корректны):

Свойство S1. В графе всех включений для $P(S)$ присутствуют также и контрапозиции всех включений.

Свойство S2. В графе всех включений для $P(S)$ отсутствуют циклы.

Свойство S3. В графе всех включений для $P(S)$ невозможны связи типа $X \to \overline{X}$ и двойные контрарные связи типа $X \to Y$ и $X \to \overline{Y}$, за исключением случая, когда вершина X представляет пустое множество.

Свойство **S2** в нашем примере, легко проверяется на матрице достижимости графа для $P(S)$ — все диагональные элементы этой матрицы представлены нулями. Свойство **S3** непосредственно следует из законов алгебры множеств и означает, что любое непустое множество не может быть включено в свое дополнение и не может быть включено одновременно в некоторое множество и в дополнение этого множества. А теперь вернемся к нашей идеальной модели рассуждения.

Предположим, что для построения некоторой идеальной модели рассуждения $\boldsymbol{M}$ достаточно выбрать некоторые подмножества некоторого универсального множества $\boldsymbol{U}$, причем в исходных суждениях $\boldsymbol{M}$, представленных в виде соотношений включений между множествами, эти включения соответствуют некоторым соотношениям включения в графе включений для $P(\boldsymbol{U})$. Для пояснения сказанного рассмотрим пример.

Пример 6. Даны посылки:

«Все драконы не любят шоколад»;

«Все, кто не любит шоколад, не попадут на Праздник Сладкоежек».

Что из этого следует? Оказывается, эту задачу можно «привязать» к универсуму из трех элементов и использовать в качестве ее интерпретации рассмотренные выше множества S и $P(S)$. Если обозначить драконов — y, тех, кто не любит шоколад, — $\bar{z}$, тех, кто не попадет на Праздник Сладкоежек, — $\bar{x}$, можно увидеть, что исходные соотношения $y \to \bar{z}$ и $\bar{z} \to \bar{x}$ представлены в матрице включений графа для $P(S)$. Попробуем решить эту задачу известным нам способом. Тогда исходные соотношения можно отобразить в виде графа (рис. 30). Последовательно применяя два наших правила вывода, получим новый граф (рис. 31).

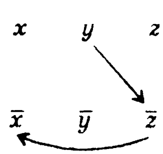

Рис. 30

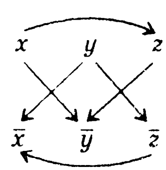

Рис. 31

Нетрудно убедиться, что все полученные таким способом новые соотношения — $z \to \bar{y}$, $x \to z$, $y \to \bar{x}$ и $x \to \bar{y}$ — также представлены и в матрице графа всех включений $P(S)$ (рис. 28). Разумеется, из условий задачи мы не сможем получить все связи, представленные в этой матрице (для этого нам недостаточно исходных данных), но получить связь, которая в матрице всех включений для $P(S)$ представлена нулем, просто невозможно.

Заметим, что множество x в нашей модели рассуждений необязательно должно быть пустым. Система всех включений $P(S)$ обладает одним замечательным свойством: *если граф включений какого-то конкретного $P(S)$ содержит пустое множество, то этот граф включений можно в некоторых случаях вложить в граф включений системы множеств более высокого порядка, при этом все множества исходной модели окажутся непустыми*. Чтобы в этом убедиться на нашей модели, достаточно добавить в каждое из множеств x, $\bar{y}$ и z один элемент (например, d). При этом все связи, представленные на рис. 31, сохранятся, но в этом случае данный граф будет частью графа включений для системы подмножеств множества из четырех элементов.

Процесс подбора подходящего $P(\boldsymbol{U})$ для каждой конкретной модели рассуждений весьма трудоемкий, тем более, что мощность $P(\boldsymbol{U})$ возрастает в степенной зависимости от увеличения числа элементов множества $\boldsymbol{U}$. Например, если $\boldsymbol{U}$ содержит 4 элемента, то $P(\boldsymbol{U})$ содержит 16 (т. е. 2^4) подмножеств, а число связей в матрице всех включений $P(\boldsymbol{U})$ равно 65. Число этих связей растет «экспоненциально» — в общем случае, если универсум содержит N элементов, общее число связей в $P(\boldsymbol{U})$ равно $3^N - 2^N$. Эти трудности возрастают многократно, если исходная модель рассуждения не верна и не укладывается ни в какой универсум. В этом случае время решения задачи будет стремиться к бесконечности.

Поступим проще. Будем считать, что наша исходная модель рассуждений «укладывается» в какой-то *неизвестный нам универсум* и поэтому мы имеем полное право использовать законы транзитивности и контрапозиции. Гарантией здесь служат и законы алгебры множеств, и сформулированное выше свойство **S1**. Но если в процессе построения новых связей мы увидим, что нарушаются свойства **S2** или **S3**, то нам ничего не остается, как сделать вывод о том, что наша исходная модель рассуждения неверна (т. е. для нее не существует интерпретации) со всеми вытекающими отсюда последствиями. Эти нарушения свойств **S2** или **S3** назовем *коллизиями*.

Для полноты картины введем еще ряд понятий. Будем считать, что при построении графа модели рассуждения в него вводятся не только те множества, которые участвуют в посылках, но и дополнения тех множеств, которые в исходных посылках встречаются только в одном (позитивном или негативном) варианте. Эти «лишние» множества в исходном графе не будут связаны с какими-либо другими вершинами. В теории графов такие «бессвязные» вершины называются *изолированными*.

Если для любого исходного графа модели рассуждений применять правила транзитивности и контрапозиции, он начнет пополняться новыми связями (но не новыми вершинами!). В какой-то момент времени возникнет ситуация, когда применение этих правил не позволит получить ни одной новой связи. Граф окажется насыщенным связями до предела. Полученный граф назовем ***CT-замыканием*** исходного графа [мы «замкнули» исходный граф, применяя для его наполнения только два правила: контрапозиции (***C***) и транзитивности (***T***)]. Процесс построения ***CT***-замыкания легко программируется и может быть выполнен в виде несложного калькулятора, с помощью которого вместо запутанных логических построений можно сразу же получать искомый результат в виде соответствия графа. Этот «калькулятор» был мной реализован в виде программы.

Теперь можно вернуться к проблеме «недостаточности» наших средств вывода для подтверждения справедливости всех правильных модусов категорического силлогизма. Здесь придется вспомнить проблему «неполноты» формальных теорий, которая рассматривалась в п. 2.1. Но подход к решению этой проблемы будет отличаться от традиционного.

Начнем со «злополучного» модуса Darapti (см. пример 3), анализ которого мы так и не завершили. Представим, что исходные посылки этого модуса являются «нелогическими» аксиомами некоторой «теории» («логическими» аксиомами в нашей системе являются некоторые законы алгебры множеств) и для вывода всех заключений достаточно двух правил вывода: контрапозиции (***C***) и транзитивности (***T***). Представим также, что некоторые наши «теории» могут быть неполными. *Неполной* называется «теория» (в нашей терминологии — конкретная модель рассуждения), у которой ***CT***-замыкание не содержит коллизий и при добавлении в состав исходных некоторых новых посылок, не являющихся заключениями исходных, ***CT*** замыкание также не содержит коллизий.

Пример 7. Возьмем исходную модель рассуждений из примера 3, но в состав исходных посылок добавим суждение, которое является заключением в модусе Darapti, т. е. посылку $b \to C$ (рис. 32), и построим для этого исходного графа ***CT***-замыкание.

Работа утомительная даже для трех основных терминов, если делать ее вручную (автору было легче — он пользовался специальной программой для ПЭВМ), но чего не совершишь ради достижения истины! В итоге получим ***CT***-замыкание, не содержащее коллизий (рис. 33).

Но это еще не все. Если в исходную модель вместо суждения $b \to C$ ввести более «сильную» посылку $B \to C$ («Все B есть C»), то в ***CT***-замыкании появятся новые связи (рис. 34), однако конечный результат останется тем же: коллизии не появляются.

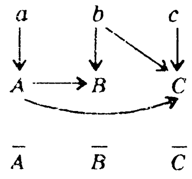

Рис. 32

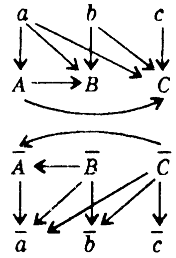

Рис. 33

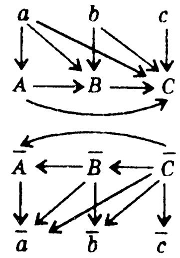

Рис. 34

Если точно так же исследовать остальные девять «сомнительных» с точки зрения математической модели рассуждения правильных модусов категорического силлогизма, получится тот же результат — все они окажутся «правильными» (т. е. в данном случае не «провоцирующими» коллизий). Кроме того, мы обнаружим некоторые новые «правильные» заключения, которые в классической силлогистике не предусмотрены.

Таким образом, оказывается, что систему традиционной силлогистики можно не только математически обосновать, но и дополнить. И делается это не за счет введения «нелогических» аксиом в исчисление высказываний или предикатов, а за счет введения дополнительных и не ведущих к коллизиям суждений в частные конкретные системы исходных посылок.

Чтобы лучше понять полученный результат, рассмотрим более подробно процесс проверки «неполноты» на основе теории формальных систем. В исчислении предикатов для того чтобы доказать неполноту той или иной формальной теории, требуются весьма сложные преобразования всех возможных формул теории в некоторую числовую систему, после чего в этой формальной теории нужно найти такую формулу, для которой числа, соответствующие этой формуле и ее отрицанию, были бы допустимыми в упомянутой выше числовой системе. Процесс такого построения доказательства неполноты весьма сложен и, на мой взгляд, не совсем корректен — в нем используются самоприменимые конструкции (о некорректности такого рода конструкций будет сказано ниже). Кроме того, сам процесс доказательства неполноты довольно трудно представить в виде программы (на данный момент времени мне неизвестны программные продукты, которые предназначены для решения задач такого типа).

В то же время в рассматриваемой здесь математической модели рассуждения задача проверки неполноты и непротиворечивости заданной аксиоматической системы сводится к задаче проверки существования коллизий при построении **CT**-замыкания для исходной системы или для системы, в которую помимо исходных суждений добавлены некоторые новые суждения. И для решения этой задачи уже составлена работающая программа.

А что делать, когда появляются коллизии?

3.5. КОЛЛИЗИИ В РАССУЖДЕНИЯХ

Рассмотрим первую коллизию — нарушение свойства S2. Назовем ее *коллизией эквивалентности*. Она получается в рассуждении, если в результате вывода два разных термина являются тождественными, хотя изначально они представлялись как различные. В традиционной логике этой коллизии соответствует ошибка «круг в доказательстве», но было бы неправильным рассматривать эту коллизию только как ошибку. Иногда ее обнаружение позволяет решить некоторую непростую задачу. Рассмотрим пример.

Пример 8. В закрытом ящике находится неизвестное число предметов, которые можно описать тремя параметрами: формой (шар или кубик), цветом (белый или красный) и материалом (пластмасса или дерево). Необходимо определить, какие типы предметов могут находится в ящике, если известно следующее: 1) все шары красного цвета; 2) все деревянные предметы окрашены в белый цвет; 3) все пластмассовые предметы являются шарами.

Обозначим: S — шары, W — белые предметы, P — пластмассовые предметы. Тогда, учитывая взаимоисключаемость значений признаков, получим: $\overline{S}$ — кубики, $\overline{W}$ — предметы красного цвета, $\overline{P}$ — предметы из дерева. Всего для данного набора признаков возможно 8 типов предметов: S, W, P; $S, W, \overline{P}$; $S, \overline{W}, P$; $S, \overline{W}, \overline{P}$ и т. д.

А теперь представим нашу задачу как модель рассуждения с исходными суждениями: $S \to \overline{W}$, $\overline{P} \to W$ и $P \to S$. Построим исходный граф модели (рис. 35) и все контрапозиции исходных

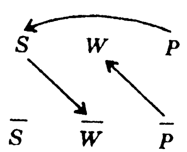

Рис. 35

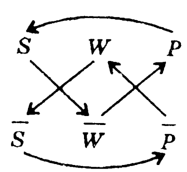

Рис. 36

суждений (рис. 36).

В графе на рис. 36 явно не соблюдается свойство **S2**, так как в нем появились два цикла: $S \to \overline{W} \to P \to S$ и $\overline{S} \to \overline{P} \to W \to \overline{S}$. Если достраивать дальше этот граф, используя свойство транзитивности, то окажется, что все дуги графа превратятся в неориентированные ребра, после чего никаких новых дуг уже нельзя будет построить.

Хотя ситуация с циклами и является коллизией, но большой тревоги, как правило, не вызывает — можно считать все вершины, связанные циклом, эквивалентными и преобразовать все участвующие в цикле модификации терминов в одну обобщенную модификацию, сохраняя при этом для данной обобщенной модификации все связи с модификациями терминов, не входящими в цикл. Такая операция в теории графов называется *стягиванием вершин графа*. В нашем примере после стягивания вершин графа (см. рис. 36) получится граф, содержащий всего две вершины без какой-либо связи между ними (изолированные вершины).

Что это означает? Если вспомнить основной критерий эквивалентности множеств или следствие 2 из закона транзитивности включения, можно заключить, что классы предметов с признаками (S, $\overline{W}$, P) эквивалентны друг другу, и точно так же эквивалентны друг другу классы предметов с признаками ($\overline{S}$, W, $\overline{P}$). Ответ ясен: в ящике находится не более двух классов предметов, а именно: красные пластмассовые шары и белые деревянные кубики.

Вторая коллизия — нарушение свойства **S3** — не так безобидна, как предыдущая, и говорит о более серьезных проблемах или ошибках в исходных суждениях. Назовем ее *противоречием*. Рассмотрим пример.

Пример 9. Условия те же, что и в примере 8, но третье условие формулируется иначе: «Все пластмассовые предметы не являются шарами». Граф исходной модели приведен на рис. 37.

Начнем для этой модели строить **CT**-замыкание. Из $P \to \overline{S}$

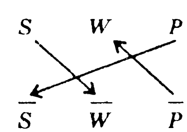

Рис. 37

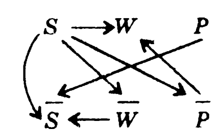

Рис. 38

следует $S \to \overline{P}$ (правило **C**); из $S \to \overline{P}$ и $\overline{P} \to W$ следует $S \to W$ (правило **T**); из $S \to W$ следует $\overline{W} \to \overline{S}$ (правило **C**); из $S \to \overline{W}$ и $\overline{W} \to \overline{S}$ следует $S \to \overline{S}$ (правило **T**) (рис. 38).

Получено противоречие. Но в данном случае, если продолжать дальше строить **СТ**-замыкание, то «все, что угодно» мы не получим: соотношение $S \to \overline{S}$ будет в графе **СТ**-замыкания единственной коллизией. В таких случаях целесообразно предположить, что множество S является пустым множеством. Тогда соотношение $S \to \overline{S}$ будет вполне корректно, а множество $\overline{S}$ будет равно универсуму (U). Это означает, что в ящике шаров нет, а все предметы являются кубиками. Для исключения противоречия в данной задаче можно просто исключить из исходного графа вершины S и $\overline{S}$ со всеми их связями и построить **СТ**-замыкание полученного графа (рис. 39, *а*, *б*). Из рис. 39, *б* ясно, что в ящике могут находиться белые деревянные или красные пластмассовые кубики. Но поскольку в **СТ**-замыкании не установлена эквивалентность классов (обе связи ориентированные), то возможны еще какие-то классы предметов. Какие же?

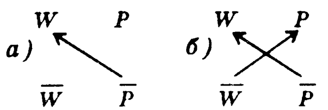

Рис. 39

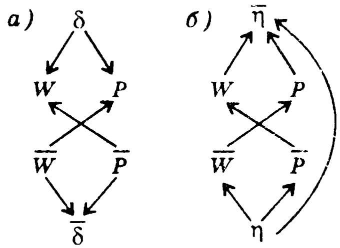

Рис. 40

Проверим гипотезу о непустоте пересечения классов W и P. Это означает, что в ящике могут находиться белые пластмассовые кубики. Для проверки этой гипотезы достаточно в нашу модель ввести промежуточный класс δ со связями $\delta \to W$ и $\delta \to P$, ввести в граф его дополнение ($\overline{\delta}$) и проверить отсутствие противоречий при построении **СТ**-замыкания (рис. 40, *а*). Поскольку противоречий нет, то существование этого класса не противоречит условиям задачи. В то же время, если мы попытаемся проверить гипотезу о непустоте пересечения классов $\overline{W}$ и $\overline{P}$ (существование красных деревянных кубиков), введя промежуточный класс η (рис. 40, *б*), то получим противоречие $\eta \to \overline{\eta}$. Ответ ясен: в ящике могут находиться не более трех определенных классов предметов.

Однако простое исключение противоречивых пар не во всех случаях является корректным. Сформулируем более общее правило.

Правило исключения противоречия: при возникновении коллизии $X \to \overline{X}$ (или $\overline{X} \to X$) необходимо в исходном графе проверить существование связей, входящих в пустое множество, и связей, исходящих из универсума. При наличии таких связей присвоить значение $\varnothing$ вершинам, из которых исходят дуги в пустое множество, и значение U — вершинам, в которые входят дуги из универсума, затем присвоить контрарные значения вершинам, альтернативным переозначенным (т. е., если, допустим, вершине W присвоено значение U, то вершине $\overline{W}$ должно быть присвоено значение $\varnothing$). Процесс переозначивания продолжать до тех пор, пока в исходном графе не останется коллизий типа $Y \to \varnothing$ (при этом $Y \neq \varnothing$) и $U \to Y$ (при этом $Y \neq U$). При появлении коллизии типа $U \to \varnothing$ универсуму присваивается значение $\varnothing$. Это означает, что исходные посылки полностью противоречивы.

Подоплека правила очевидна: в пустое множество может быть включено только пустое множество, а универсум может быть включен только в универсум.

Этот пример показывает, что противоречие с формальной точки зрения не всегда является неразрешимым противоречием и порой может быть основой для конструктивных выводов. В следующем примере мы рассмотрим появление противоречий, связанных с подменой тезиса.

Пример 10. Проверить, являются ли противоречивыми следующие суждения, принятые за исходные:

1) «Все, кто не с нами, тот против нас»;
2) «Сидоров не против нас»;
3) «Сидоров пошел в кино не с нами».

Обозначим: C — Сидоров, H — те, кто с нами, Π — те, кто против нас. Тогда исходные суждения можно представить как связи: 1) $\overline{H} \to \Pi$; 2) $C \to \overline{\Pi}$; 3) $C \to \overline{H}$. Построим исходный граф (рис. 41), после чего построим с помощью правил вывода некоторое множество следствий из исходных посылок (рис. 42). Например, $C \to \Pi$ следует из $C \to \overline{H}$ и $\overline{H} \to \Pi$; $\overline{\Pi} \to \overline{C}$ следует из $C \to \Pi$, а $C \to \overline{C}$ — из $C \to \overline{\Pi}$ и $\overline{\Pi} \to \overline{C}$. Получился целый букет противоречий: Сидоров и против нас, и не против нас; он же и с нами, и не с нами. К тому же сам Сидоров оказывается вовсе и не Сидоров ($C \to \overline{C}$). Система «развалилась», так как мы не можем просто исключить из данной системы Сидорова — его существование не вызывает сомнений.

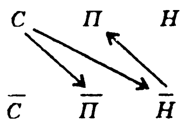

Рис. 41

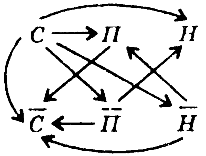

Рис. 42

Разумеется, против данного анализа исходных условий задачи можно привести ряд возражений. Ну, например, почему мы должны понимать словосочетание «с нами» в первом суждении как «постоянное времяпровождение с нами»? Если мы это самое «с нами» понимаем не так, а, допустим, как «поддерживает наши принципы», то тогда третье суждение не может быть формализовано как $C \to \overline{H}$. На самом деле Сидоров «с нами», хотя и пошел в кино без нас. Тогда и противоречий никаких не будет.

Все правильно. Но только в этом анализе мы заняли позицию буквоеда, который не признает никаких «метафор» — если в рассуждении дан термин «с нами», то он имеет один и тот же смысл в любом суждении. И в какой-то степени он прав. Раз это логический анализ, то предполагается, что каждый термин не должен менять свой смысл в процессе рассуждения, иначе имеет место ошибка, которая в классической логике носит название «подмены тезиса».

Оказывается, что коллизии, появляющиеся из-за подмены тезиса, не всегда вызывают отрицательные эмоции. Примером коллизий такого рода являются литературные метафоры, логическая суть которых сводится к тому, что некоторые слова или устойчивые речевые обороты употребляются в необычном или необщепринятом смысле. Разумеется, далеко не каждую коллизию такого рода можно назвать метафорой. Чтобы коллизия стала метафорой, необходимо в дополнение к логическому анализу оценить ее с точки зрения эстетических критериев, анализ которых уже значительно сложнее и, по-видимому, не формализуется. Эстетические характеристики метафоры во многом зависят от конкретных значений слов, и здесь немалую роль играет анализ адекватности системы, выраженной с помощью метафоры.

Коллизии в ряде случаев являются также структурной основой некоторых образцов юмористического творчества. Чтобы это стало более понятно, рассмотрим пример анализа известной шутки Марка Твена: «Нет ничего легче, чем бросить курить — я сам сто раз бросал». С точки зрения буквоеда соль шутки заключается в том, что термины «бросить курить» и «бросать курить» во многом сходны не только по форме, но и по значе-

нию, и внешне фраза построена так, что это сходство значений как бы подтверждается. Но после того, как смысл фразы «доходит» до слушателя или читателя, оказывается, что в данном контексте смысл этих терминов прямо противоположный, и получается, что вторая часть фразы опровергает первую. Логически это означает, что при поверхностном анализе фразы коллизия отсутствует, а при более глубоком анализе она проявляется. Ничего смешного в этом нет, но это — с точки зрения логики, а не с точки зрения эстетики.

Не берусь утверждать, что так же легко можно проанализировать многие литературные или поэтические метафоры. Да и надо ли вообще заниматься этим при чтении художественной литературы? Но не только в литературном, но и любом профессиональном языке (и язык математики здесь не исключение) есть паралогизмы или какие-либо другие известные в языкознании феномены разговорного языка, анализ которых просто необходим для более ясного понимания окружающего мира. При знакомстве с научной или философской литературой часто приходится встречаться с терминами-оборотнями, меняющими свой смысл от предложения к предложению. Но назвать такого рода тексты литературными метафорами или образцами юмора невозможно в силу их явного несоответствия эстетическим критериям. А для того, чтобы считать их логически правильными, нет оснований. Далее мы рассмотрим примеры такого рода рассуждений.

3.6. СТРУКТУРА ПАРАДОКСОВ

О парадоксах написано немало. И отношение к ним весьма неоднозначное. Среди специалистов по математической логике преобладает в основном пессимистическая точка зрения, которую достаточно ясно выразил один из известнейших специалистов в этой области С. Клини: «В математическом мире полного согласия в вопросе о происхождении парадоксов и способов избавления от них нет до сих пор, и весьма сомнительно, чтобы оно когда-нибудь наступило» [27]. Другой известный специалист в этой области Э. Мендельсон после пересказа знаменитых парадоксов уверенно заявляет: «Все эти парадоксы являются подлинными в том смысле, что они не содержат явных логических изъянов» [10].

Противоположная точка зрения (ее, в частности, придерживался А. Пуанкаре [6]) заключается в том, что парадоксы возникают из-за того, что в исходных посылках содержатся логические ошибки. Эту точку зрения мы и примем за исходную. Но здесь существует одна нерешенная проблема: ошибки, которые выявляются в процессе анализа многочисленных парадоксов, не подкреплены строгими математическими соотношениями. Средства и методы, используемые в современной математической логике, оказываются недостаточными для решения этой проблемы.

Однако, если присмотреться внимательно, окажется, что предпосылки для ее решения в современной математической логике имеются. Здесь самое время вспомнить одно из определений непротиворечивости логической системы (см. п. 2.1): система является непротиворечивой, если для нее существует интерпретация — это означает, что для данной системы можно построить логико-семантическую модель в виде соотношений между некоторыми множествами. Но эта исходная предпосылка не получила соответствующего развития, потому что она «работает» только в одну сторону: можно доказать, что логическая система непротиворечива, если для нее находится соответствующая интерпретация. Другая сторона проблемы — как доказать невозможность построения интерпретации для систем, у которых она не находится методом простого перебора, — в математической логике осталась нерешенной. По существу, вторая часть проблемы интерпретации вышла из поля зрения специалистов после того, как в основе математической логики стали использовать теорию формальных систем, в которой не нашлось подходящего места математическому термину «множество».

Осталось сделать один шаг: найти методы доказательства невозможности построения интерпретации, используя методы и средства алгебры множеств. И этот шаг нами уже сделан в заключительной части п. 3.4. Рассмотрим только, как эти методы можно использовать на примере анализа знаменитых парадоксов. Один из них (парадокс «Лжец») будоражит умы логиков и философов уже более двух тысячелетий. Другой парадокс — парадокс Рассела — намного моложе (опубликован Расселом в 1902 г.), но именно он заставил многих математиков и логиков усомниться в конструктивности термина «множество».

История логики и математики связывает с этими парадоксами немало драматических и даже трагических событий. «Предание говорит, что древнегреческий философ Диодор Кронос (умер около 307 г. до н. э.) умер от огорчения, убедившись в неудаче своих попыток решить этот парадокс, а некий Филит Косский окончил жизнь самоубийством» [24]. Известный немецкий логик, математик и философ Готлиб Фреге, получивший в 1895 г. письмо от Б. Рассела, в котором тот изложил содержание своего парадокса, отказался от публикации бывшего уже в печати второго тома своего фундаментального труда о логических основаниях арифметики и после этого (умер в 1925 г.) не опубликовал ни одного крупного труда по логике [24]. Мне неизвестно, знал ли Георг Кантор о парадоксе Рассела, но после того, как он в 1899 г. открыл парадокс, похожий по структуре на парадокс Рассела, он перестал заниматься математическими исследованиями, и, возможно, обострение душевной болезни в последние годы его жизни было инициировано этим открытием.

Парадокс «Лжец» был сформулирован древнегреческим философом Эвбулидом из Милета (IV в. до н. э.). Суть его в следующем: критянин Эпименид сказал: «Все критяне лжецы». Нужно определить, солгал ли Эпименид или сказал истину. В классической формулировке парадокса молчаливо предполагается, что лжец тот, кто всегда говорит только ложь, в противном случае ничего парадоксального в этой ситуации нет. Теперь, если исходить из этого условия, получается, что любое предположение («Эпименид сказал истину» или «Эпименид солгал») приводит к противоречию.

Не будем повторять рассуждения, которые приводят к этим результатам (они присутствуют почти во всех учебниках по логике и математической логике), а попробуем применить методы, основанные на нашей математической модели рассуждения. Пусть заданы только два основных множества: множество критян (K) и множество истинных предложений (T). Тогда соответственно k будет обозначать критянина Эпименида, а t — некоторое истинное высказывание. Предположим, что Эпименид сказал истину ($k \to t$), тогда его высказывание является истинным суждением $K \to \overline{T}$, которое должно войти в множество исходных посылок. Тогда все исходные посылки можно отобразить на схеме (рис. 43). Теперь достаточно построить контрапозицию $K \to \overline{T}$ (получится $T \to \overline{K}$), чтобы убедиться, что существует путь из k в $\overline{K}$ (рис. 44).

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[dr] & \overline{K} \\ t \arrow[r] & T & \overline{T} \end{tikzcd}$$

Рис. 43

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & K \arrow[dr] & \overline{K} \\ t \arrow[r] & T \arrow[ur] & \overline{T} \end{tikzcd}$$

Рис. 44

Противоречие явное — Эпименид одновременно является и не является критянином. Рассмотрим другой вариант — Эпименид солгал. Следовательно, истинным является отрицание его высказывания. Но здесь отрицание суждения «Все критяне лжецы» может быть двояким. В классической логике рассматривается только вариант «сильного» отрицания — «Все критяне говорят только истину». Эта ситуация тоже ведет к противоречию. На схеме эту ситуацию можно отобразить, если некоторое ложное высказывание обозначить как Ct (частный случай дополнения — об этом ранее говорилось) с обязательным соотношением $Ct \to \overline{T}$. Тогда исходными суждениями будут $k \to Ct$ и $K \to T$ (рис. 45). В итоге, если на рисунке изобразить контрапозицию суждения $K \to T$ (получится $\overline{T} \to \overline{K}$), то, учитывая, что из k появился путь в $\overline{K}$, мы опять придем к противоречию: $k \to K$ и $k \to \overline{K}$ (рис. 46).

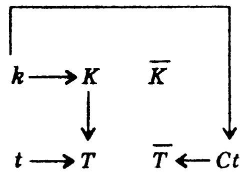

Рис. 45

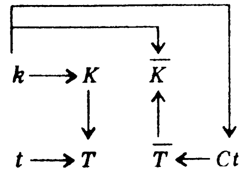

Рис. 46

Продолжим анализ парадокса «Лжец». Мы еще не рассмотрели «слабый» вариант отрицания суждения «Все критяне лжецы», а именно: «Не все критяне лжецы». В математической логике это суждение равносильно суждению «Некоторые критяне говорят истину». Посмотрим, что получится в этом случае (рис. 47). Здесь k_i — некоторые критяне, среди которых нет Эпименида. В этом случае построение всех возможных следствий (рис. 48) не приведет к противоречию, даже если мы введем такую модификацию термина, как $\overline{k_i}$ (отрицание частного случая). Даже кажущаяся, на первый взгляд, противоречивой связь $k \to \overline{k_i}$ на самом деле таковой не является, если мы примем к сведению, что множества k и k_i не пересекаются. Так что при использовании «слабой» формы отрицания приходится согласиться со специалистами по математической логике в том, что парадокс «Лжец» не является «настоящим парадоксом» [10].

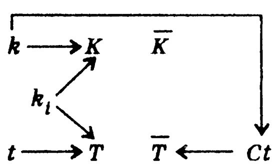

Рис. 47

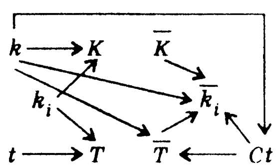

Рис. 48

Но наш анализ этого парадокса еще не закончен. Предположим (что нам мешает это сделать?), что Эпименид является единственным критянином. Вот здесь-то мы и получим «настоящий» парадокс. Предположение о том, что Эпименид сказал истину, можно не рассматривать — оно и в этом случае ведет к очевидному противоречию. Но предположение о том, что Эпименид солгал, тоже противоречиво. Посмотрите на

рис. 48. Наше предположение о том, что Эпименид — единственный критянин, дает нам право ввести двустороннюю связь между k и k_i. В итоге получается, что из k есть путь в T, и в то же время из k есть путь в $\overline{T}$. Противоречие явное.

Предположение «Эпименид является единственным критянином» позволяет для случая, когда предполагается, что он солгал, построить более простую схему рассуждений без использования модификации k_i (рис. 49). С точки зрения данной схемы Эпименид (k) сочетает в себе и того, кто сказал ложное утверждение, и заодно тех «некоторых критян», которые не лгут. Противоречие здесь очевидно и без дальнейших построений.

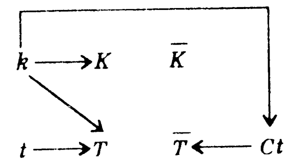

Рис. 49

Ответ, почему это происходит, кажется вполне ясным: *для исходных суждений не существует системы множеств, в которую эти исходные суждения могли бы быть вложены.* Но здесь же возникает желание пойти дальше с этими «почему»; другими словами, найти еще более простое объяснение этому парадоксу. Довод типа «Таковы законы алгебры множеств, и тут ничего не поделаешь» можно подвергнуть сомнению, к тому же многие исходные посылки в рассуждениях не всегда легко преобразовать в соотношения алгебры множеств. Рассмотрим другой вариант объяснения.

В классической логике принято разделять элементы суждения на *субъект* и *предикат*: первый термин в суждении является субъектом, второй — предикатом. Например, «Некоторые лошади белые»: «лошади» — субъект, «белые» — предикат — тут все ясно. Но термины «субъект» и «предикат» выбраны не совсем удачно, потому что в этом случае как бы предполагается, что первый термин должен обозначать предметы, а второй — некоторое свойство предметов. На самом деле, в суждениях допускаются не только сочетания «предмет — свойство», но и «предмет — предмет» (если нет туч, то нет и дождя), «свойство — свойство» (если раки вареные, то они красные) и даже «свойство — предмет». Деление на субъект и предикат в суждениях является не «грамматическим», а логическим: *предикат независимо от своего грамматического статуса является определяющим признаком или необходимым условием существования субъекта.*

Заметим, что в трудах Аристотеля логическая семантика суждения более соответствует приведенной выше. Выражения типа «A есть (или не есть) B» появились в логике после Аристотеля и утвердились в ней после многочисленных работ схоластов. Сам Аристотель употреблял в своих трудах выражения типа «*B* присуще (не присуще) *A*». Все же иногда полезно обратиться к истокам современных взглядов — многое становится ясным.

В обычных суждениях предикат не подвергает оценке значимость субъекта или собственную значимость. Например, если задано суждение «Эти предметы — красные шарики», то ситуация, когда красные шарики заявляют, что они вовсе не красные шарики, а зеленые кубики, и в силу этого суждение должно быть другим (например, «эти предметы — не красные шарики»), здесь не предусматривается. Данное суждение может быть истинным или ложным (адекватным или неадекватным) независимо от того, какого мнения на этот счет придерживаются те, кто назван «красными шариками».

В парадоксе «Лжец», как и в ряде других парадоксов, ситуация иная: здесь возможны случаи, когда предикат является оценкой значимости субъекта. Если субъект является некоторым свойством *R*, а в предикате утверждается или отрицается именно это свойство *R*, то данная ситуация, которая называется «самоприменимостью», выводит такое суждение за рамки обычных суждений. При этом оказывается, что утверждение свойства *R* в таких суждениях и отрицание этого свойства в структурном отношении принципиально различны. Подчеркиваю, что речь в данном случае идет не об этической характеристике (мол, говорить правду — хорошо, а лгать — плохо), а о структурной (т. е. математической).

Рассмотрим ситуацию, которая описана известным специалистом по теории формальных систем Р. Смаллианом в одной из его книг по занимательной логике. На некоем острове живут только лжецы, которые говорят только ложь, и рыцари, которые говорят только правду. Оказывается, что из двух возможных предложений «Я лжец» и «Я рыцарь», последнее предложение может произнести любой обитатель этого острова, в то время как предложение «Я лжец» не может произнести ни один из них. Как только он произносит эту фразу, он подвергает сомнению значимость своей принадлежности определенному классу (лжецов или рыцарей). Лгать (или, в общем случае, отрицать самого себя) оказывается неприемлемо не только в этическом смысле, но и в математическом — предикат в этом случае «выходит из рамок» и начинает подвергать сомнению значимость субъекта. Если мы попробуем по-джентльменски согласиться с оценкой предиката и начнем отрицать субъект, то в следующий момент предикат начнет оценивать субъект как значимый, и такая «смена настроений» предиката может продолжаться бесконечно.

В начале века многие логики предлагали отказаться от использования в логическом выводе таких каверзных суждений. Но многие расценили такой запрет как ущемление свободы

слова. В качестве довода они утверждали, что самоприменимые конструкции используются и в естественном языке (например, в высказываниях «Приказ есть приказ!» и «Сидоров знает, что он не знает закона Бойля-Мариотта.»), и в математических рассуждениях (например, в определении наименьшего элемента множества). Но в «самоприменимости» подразумевается, что повторяющиеся в суждениях слова или символы тождественны по содержанию. А приведенные «подтверждающие» примеры при более квалифицированном лингвистическом анализе подтверждают как раз противоположный тезис: повторяющиеся слова используются здесь с разным содержанием. Кажущаяся «загадочность» таких конструкций свидетельствует лишь об отсутствии языковой культуры.

Обратимся еще раз к парадоксу Рассела. Известна более понятная его формулировка: «Деревенскому брадобрею дано строгое указание брить тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами». Вроде бы ничего парадоксального в этом указании нет, но если брадобрею понадобится решить вопрос о бритье собственной персоны, то окажется, что любой ответ («Брить себя надо» и «Брить себя не надо») оказывается противоречивым. В самом деле, если он начнет себя брить, то окажется, что он относится к разряду тех, кто бреется сам, и поэтому он, согласно указанию, брить себя не должен. Если же он предпочтет ходить небритым, то окажется, что он относится к разряду тех, кто не бреется сам, и поэтому он должен себя побрить. Деревенскому брадобрею можно не позавидовать, но точно так же можно не позавидовать и тем, кто не усмотрел в этом парадоксе обыкновенного паралогизма: термины «брить» и «бриться» (брить себя) имеют разный смысл: в первом случае подразумевается отношение между разными людьми (брадобрей — клиент), а во втором — отношение между одним и тем же человеком. Причем отношение для термина «брить» антирефлексивно (А бреет В, но не наоборот), в то время как отношение для «бриться» — рефлексивно. Эта разница значений в рассуждении не учитывается, что и приводит к противоречию.

Популярную формулировку парадокса Рассела можно рассматривать как своеобразный контекст, в котором обнажается противоположность значений терминов «брить» и «брить себя», но, в отличие от шутки Марка Твена, которую мы позволили себе проанализировать выше, этот контекст не воспринимается как юмор, к тому же понимание того, что в данном контексте ключевую роль играет паралогизм, приходит далеко не к каждому — во всех работах по логике, в которых приводится эта формулировка парадокса Рассела, тождественность терминов «брить» и «брить себя» не подвергается сомнению.

В «математической» формулировке парадокса Рассела (см. п. 2.1) появляется уже не паралогизм, а элементарная бессмыслица. Начнем с термина «множество, которое является элементом самого себя». Можно ли говорить о существовании такого множества? Все приводимые в литературе «подтверждающие» примеры (множество всех множеств, каталог каталогов, список списков) не выдерживают элементарной критики: множество, каталог или список являются уже элементами других совокупностей, а не тех, что заданы изначально. Множество всех множеств является не элементом самого себя, а содержится в системе множеств, содержащей все (или некоторые) подмножества этого множества. Эту несообразность видел и сам автор этого парадокса и поэтому разработал *теорию классов*, в которой такого рода несообразности исключались. Теперь, если мы приходим к выводу, что множество, являющееся элементом самого себя, является «фантомом», то есть ли смысл серьезно рассматривать вопрос, является ли множество всех нормальных множеств «самоприменимым» или «несамоприменимым»? Ну, а если все же нам захочется найти ответ на этот вопрос, то он однозначен: это тоже нормальное множество. Но если мы рассматриваем это множество как элемент (а в алгебре множеств это вполне допустимо), то это уже элемент совершенно другого множества.

По-видимому, немалую роль в живучести этого парадокса сыграл удачный подбор терминов «самоприменимый» (для ненормальных множеств) и «несамоприменимый» (для нормальных). Кажущаяся математическая строгость этих терминов способствует хаотичности представлений в сознании о логической строгости.

В парадоксе Рассела ключевую роль играет отношение «быть элементом множества». По сравнению с отношением включения множеств оно имеет более сложную структуру и при его использовании в рассуждении необходим более тонкий анализ. В современной математике с этим понятием связаны многие еще окончательно не решенные проблемы (некоторые из них рассматривались в предыдущей главе). Эти неясности в трактовке термина «быть элементом множества» приводят к тому, что рассуждения, не имеющие ясного смысла, кажутся правдоподобными. А что получится, если попытаться сформулировать парадокс Рассела, используя понятие включения множеств?

Оказывается, что данная попытка невозможна в принципе. Отношение включения сугубо «самоприменимо» ($S \subseteq S$), и его альтернатива (S не включено в S) просто бессмысленна, по крайней мере, в алгебре множеств она не предусмотрена. Другой вариант логической семантики суждения, когда предикат является необходимым условием существования субъекта, в случае самоприменимости также не имеет альтернативы, которую в общем случае можно сформулировать как суждение «Необходимым условием существования S является его несуществование» (!). Поэтому при замене ключевого термина парадокс Рассела «развалится» уже при формулировке исходных посылок — приводить их к противоречию с помощью дальнейшего анализа нет необходимости. В этом отношении парадокс «Лжец» оказывается более тонким, поскольку в его исходных посылках явного противоречия не содержится.

Далее, видимо, не стоит утомлять читателя анализом других многочисленных логических парадоксов, значительная часть которых появилась в конце XIX — начале XX столетий (парадоксы Кантора, Греллинга, Ришара, Бурали-Форти и т. д.). По структуре они сходны с парадоксом Рассела, однако наполнены другим содержанием. Но идея «самоприменимости», которая по предположению авторов этих парадоксов одновременно может быть и может не быть, используется в них обязательно. А то, что при этом сами термины меняют свой смысл от суждения к суждению, остается незамеченным. Остановимся на том, что высказанная Анри Пуанкаре гипотеза о том, что в формулировках всех парадоксов содержатся логические ошибки, подтверждается на основных примерах. А предложенный здесь метод их распознавания и анализа математически обоснован и к тому же сравнительно прост.

Для большей ясности рассмотрим формулировку теоремы, с помощью которой можно связать формальную модель рассуждения с *интерпретируемостью*, т. е. с возможностью представить соотношения между терминами в исходной модели рассуждения в виде соотношений включения в некоторой конечной системе множеств. Назовем *немодифицируемыми* системами рассуждений такие исходные системы, в которых не допускается корректировка коллизий, если они появляются в *СТ*-замыкании. Тогда справедливым будет следующее утверждение.

Теорема 3. Для немодифицируемых систем рассуждений отсутствие коллизий в *СТ*-замыкании является необходимым и достаточным условием интерпретируемости.

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

Следует сказать, что рассматриваемая модель рассуждений не является уникальной. Когда эта книга близилась к завершению и уже была отправлена в научный журнал статья на эту тему, мне посоветовали познакомиться со статьей А. Д. Закревского [28]. Оказалось, что модель рассуждений, предложенная А. Д. Закревским, также основана на алгебре множеств и в математическом смысле изоморфна рассматриваемой здесь модели рассуждений (обоснование этого изоморфизма сравнительно несложно, но все же более уместно его приводить не здесь, а в специальном научном издании). Но в структурном отношении эти модели различаются. У А. Д. Закревского в качестве базовых соотношений используются соотношения двух типов: первый тип устанавливает равенство пустому множеству пересечений некоторых множеств, а второй — наоборот, устанавливает неравенство пустому множеству пересечений некоторых множеств. Здесь же в качестве базового соотношения принято одно: соотношение включения множеств, которое по структуре ближе к структурам суждений в естественных рассуждениях. В то же время структуры предложений, которые используются в качестве базовых в статье А. Д. Закревского, в данной модели рассуждений можно использовать как проверяемые гипотезы и аргументы (подробнее об этом см. в пп. 2 и 6 Приложения). Должен отметить, что это существенное дополнение к рассматриваемой модели рассуждений появилось лишь после знакомства со статьей А. Д. Закревского. А что касается упоминавшейся выше моей статьи, то ее пришлось основательно переделать.

3.7. СОПОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАССУЖДЕНИЙ С ДЕДУКТИВНЫМ ВЫВОДОМ НА ОСНОВЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Разработкой систем логического вывода на базе исчисления предикатов уже на протяжении нескольких десятилетий занимаются многочисленные группы исследователей в различных странах. Результаты этих исследований успешно реализуются в виде программ и находят широкое применение в системах искусственного интеллекта и, в частности, в экспертных системах, в базах знаний, в системах автоматизированного обучения и т. д. Однако в этой области имеется комплекс нерешенных проблем. Здесь мы кратко рассмотрим только две: проблему проверки непротиворечивости систем и проблему сложности вычислений.

Многие базы знаний, реализованные на ЭВМ, содержат большой объем разнообразной информации и комплекс логических правил типа «если ..., то ...», в которых за многоточиями скрываются некоторые, иногда весьма непростые, логические соотношения между событиями, признаками, терминами и т. д. Для формирования этих правил в системах управления базами знаний часто приглашаются высококвалифицированные специалисты (эксперты). Но даже высокая квалификация экспертов не может быть гарантией того, что в базе знаний не содержатся какие-то скрытые противоречия, которые до поры до времени могут и не проявляться, но в какой-то, может быть, самый неподходящий момент могут привести к тому, что система управления базой знаний даст сбой с разрушительными последствиями. Теоретически выявлять заранее противоречия в таких системах можно, но в системах с большим объемом данных и правил такая проверка, даже при использовании самых быстродействующих вычислительных машин, часто требует громадных затрат времени (лет, а может быть, и столетий). Причина заключается в том, что задача проверки непротиворечивости логической системы относится к большому классу задач, для которых к настоящему времени не найдено не требующего больших затрат времени вычислительного алгоритма. Здесь все упирается в проблему сложности вычислений, которую мы рассмотрим более подробно.

Эта проблема начала широко обсуждаться в середине 1960-х годов. Оказалось, что многие известные задачи решаются с помощью алгоритмов, у которых число операций *экспоненциально* зависит от числа объектов в исходных данных задачи. Объектами в этих задачах могут быть вершины графов, числа, символы, термины и т. д.

Одной из этих задач является *задача коммивояжера*. Пусть имеется какое-то множество городов и для каждой пары городов известно расстояние между ними. От коммивояжера, вышедшего из какого-то города, требуется обойти все эти города и вернуться в свой город, но при этом необходимо выбрать такой маршрут, чтобы общая длина пути не превышала бы заданного числа, или доказать, что такого маршрута не существует.

На первый взгляд, задача решается просто: надо перебрать все возможные маршруты и выбрать среди них тот, который удовлетворяет заданному условию. Только вот число таких маршрутов оказывается немалым — для системы из N городов это число равно

$$(N-1)!/2 = 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (N-2) \times (N-1).$$

С увеличением N число всевозможных маршрутов растет «экспоненциально». Для $N = 5$ оно равно 12, для $N = 10$ составляет 181440, а для того, чтобы перебрать все маршруты в системе из 50 городов даже с помощью сверхмощной супер-ЭВМ не хватит жизни нескольких поколений. Видимо, не зря ситуацию с такими задачами специалисты назвали «проклятием размерности».

Разумеется, далеко не все конкретные варианты этой задачи решаются так сложно. Если, например, величина, ограничивающая длину маршрута, меньше минимального расстояния между какими-нибудь двумя городами, то задача даже для очень большого числа городов решается быстро: ясно, что в системе не существует маршрута с таким ограничением. Но такие простые варианты подобных задач встречаются не так часто. И для многих задач неизвестно заранее, существует ли для нее быстрый алгоритм решения, или же, начав решать эту задачу, мы попадем в ситуацию «экспоненциального взрыва».

Алгоритмы решения таких задач постоянно совершенствуются. Например, в задаче коммивояжера можно не перебирать в произвольном порядке все маршруты, а избрать более эффективную стратегию решения, но и в этом случае нет никакой гарантии, что не встретится такая частная задача, которая даже при сравнительно небольшом числе городов потребует «астрономического» времени решения.

Оказалось, что такими неприятными свойствами характеризуются многие известные задачи, используемые в системах управления. На данный момент времени известно несколько тысяч типов задач [29]. В теории сложности вычислений они названы ***NP*-полными** задачами. Центральной и до сих пор нерешенной проблемой, связанной с ***NP***-полными задачами, является поиск доказательств того, что все задачи этого класса могут (или не могут) быть решены с помощью более простого (*полиномиального*) алгоритма. Для решения проблемы достаточно найти доказательство для любой из этих задач, поскольку все они могут быть эквивалентно преобразованы в одну задачу. Эта нерешенная проблема, которую с полным правом можно назвать проблемой века в информатике, называется *проблемой **NP**-полноты*. К ***NP***-полным задачам относится и задача *выполнимости КНФ*, в которую преобразуются многие задачи логического вывода и к которой могут быть сведены все остальные ***NP***-полные задачи.

Суть ее в следующем. Многие логические формулы с неизвестными значениями переменных выражаются или преобразуются в специальную форму (здесь мы ее подробно рассматривать не будем), которая называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ). Зачастую требуется определить значения переменных, входящих в КНФ, при которых эта формула является логически истинной. Если такие значения переменных существуют, множество этих значений называется *выполняющей подстановкой*, а КНФ, для которой существует хотя бы одна выполняющая подстановка, называется *выполнимой*. Задача, в которой требуется определить, является ли заданная произвольная КНФ выполнимой, и есть задача «выполнимость КНФ».

При решении задач логического вывода в исчислении предикатов множество посылок и заключение, выводимость которого из этих посылок надо проверить, преобразуется в логическую формулу, которая по структуре соответствует КНФ. Чтобы при решении этой задачи не попасть в неприятную ситуацию, в системе логических правил типа «если ..., то ...» принято ограничиваться только правилами определенной структуры, но даже в этом случае быстродействие системы, если в ней предусматривается большое число правил, оставляет желать лучшего. Рассмотрим пример [30].

Имеются две посылки: 1) «Некоторые студенты любят всех преподавателей»; 2) «Ни один из студентов не любит невежд». Требуется доказать (или опровергнуть), что предложение «Ни один из преподавателей не является невеждой» следует из (т. е. является заключением) этих посылок.

Чтобы сформулировать, а затем и решить эту задачу на языке исчисления предикатов, введем обозначения для имен предикатов: C — студенты, P — преподаватели, H — невежды, L — любят. Но предикаты в исчислении предикатов принято обозначать совместно с переменными, поэтому формально правильными обозначениями будут следующие: $C(x)$ — «x — студент», $P(x)$ — «x — преподаватель», $H(x)$ — «x — невежда», $L(x, y)$ — «x любит y». Здесь $C(x)$, $P(x)$, $H(x)$ — одноместные предикаты, а $L(x, y)$ — двуместный предикат. Тогда исходные посылки можно выразить в виде формул:

$$\exists x(C(x) \mathbin{\&} \forall y(P(y) \to L(x, y))); \ \forall x(C(x) \to \forall y(H(y) \to \neg L(x, y))).$$

Предполагаемое заключение можно выразить как формулу $\forall y(P(y) \to \neg H(y))$. Здесь & — символ, обозначающий конъюнкцию (и); $\neg$ — знак отрицания; $\to$ — импликация; $\exists$, $\forall$ — символы для обозначения кванторов «существует» и «все».

Нет необходимости детально разбираться в том, почему заданные предложения выражены на языке исчисления предикатов именно так, а не иначе — нам достаточно понять общую схему традиционного логического вывода в этой и в других, порой намного более сложных, задачах. А схема такова: сначала надо преобразовать предполагаемое заключение в его отрицание, после чего соединить исходные посылки и преобразованное заключение символом & (и) — получится *конъюнкция формул*, которая тоже является логической формулой. Затем эту сложную формулу нужно преобразовать в КНФ и уже после этого решать задачу «выполнимость КНФ», которая, как уже было сказано ранее, относится к классу весьма неприятных ***NP***-полных задач. Если окажется, что КНФ невыполнима, то заключение следует из исходных посылок, в противном случае — не следует.

А можно ли решить эту задачу более просто? Попробуем. Введем такие обозначения: P — множество всех преподавателей; H — множество всех невежд; $\overline{L}$ — множество всех людей, которых не любит ни один студент. Тогда естественно, что в множество L попадет каждый, которого любит хотя бы один студент. В это же множество могут быть включены и те, к которым ни один студент не испытывает ни любви, ни неприязни (может быть, потому, что эти люди студентам неизвестны). Множество студентов нам не понадобится, поскольку все представители этого множества в данной задаче никаких других функций, кроме любви или нелюбви к кому бы то ни было, не выполняют.

Первая посылка означает, что существует хотя бы один студент, который любит всех преподавателей. Ситуация в реальной жизни весьма редкая, но в данном случае это означает, что все преподаватели удостаиваются чести попасть в класс L: $P \to L$. Возможна и другая, более сложная интерпретация этой посылки: имеется некоторое множество студентов, каждый из которых любит некоторое множество преподавателей (не обязательно всех). Но если мы объединим эти множества преподавателей, любимых этими некоторыми студентами, то в соответствии с первой посылкой необходимым условием является то, что это объединенное множество преподавателей равно множеству всех преподавателей. Отсюда ясно, что каждый из них пользуется благим расположением хотя бы одного из студентов.

Вторая посылка на язык алгебры множеств переводится более просто: $H \to \overline{L}$. Воспользуемся уже известным нам методом решения такого рода задач: исходные посылки показаны на рис. 50, а все полученные следствия — на рис. 51.

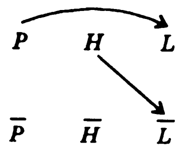

Рис. 50

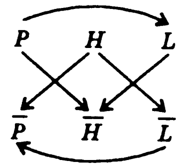

Рис. 51

Видно, что никаких коллизий не появилось, а среди всех полученных новых заключений мы найдем то, которое нам и нужно для решения данной задачи: $P \to \overline{H}$ (все преподаватели не являются невеждами). Но главное, что мы получили это заключение, так же как и другие, почти что «даром»: доказано, что все задачи такого рода независимо от их размерности относятся к классу полиномиально решаемых задач (доказательство приведено в Приложении).

Возможно, кое-кто из читателей придет к выводу, что полиномиальное решение этой задачи означает и решение проблемы ***NP***-полноты. Должен их разочаровать: решение этой проблемы пока что не найдено. Установлено только, что многие задачи логического вывода (возможно, даже не все, которые можно выразить с помощью языка исчисления предикатов) можно решать, сводя их к простой полиномиально решаемой системе, а не к задаче «выполнимость КНФ».

Вот если бы удалось доказать (или опровергнуть), что произвольную КНФ, даже простейшего вида (т. е. КНФ, которая не содержит кванторов, а все «термины» являются даже не предикатами, а логическими переменными — высказываниями или их отрицаниями), можно с помощью алгоритма полиномиальной сложности преобразовать каким-то образом в модель рассуждения, в которой проверка некоторой гипотезы соответствовала бы решению задачи «выполнимость КНФ», то тогда эта проблема была бы решена.

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Одним из устойчивых мифов является представление о том, что логика и творчество имеют мало точек соприкосновения. Продуктивная творческая деятельность обычно связывается с частым применением таких средств, как метафоры, неясные ассоциации, разрушение привычных стереотипов и не всегда строго обоснованные сомнения в общепринятых истинах. Согласно этой точке зрения предполагается, что логика с ее жесткими законами только мешает проявлению творческого потенциала и нужна лишь для того, чтобы развивать и защищать «открытые без всякой логики» идеи. Причем в защиту этой точки зрения выступают не только люди, связанные с искусством, но и многие ученые, оставившие заметный след в истории науки. Одним из главных доводов в пользу этой точки зрения является «нелогичный» характер самого процесса открытия и особенно кульминационный момент этого процесса — период «озарения», когда в сознании творца новых истин вдруг неожиданно появляется новая идея.

В научной и философской литературе приведено немало такого рода фактов, связанных с деятельностью известных ученых, причем среди них немало тех, кто совершил свои открытия в точных науках, включая физику и математику. Читателям, желающим ознакомиться с такими фактами и гипотезами, объясняющими их, посоветуем обратиться к прекрасно написанной книге А. К. Сухотина [31].

Процесс «озарения» знаком (возможно, даже в большей степени, чем ученым) и людям искусства. Но в этой области деятельности задокументированных фактов сравнительно немного, и это, по-видимому, связано с тем, что процесс «озарения» у мастеров художественной литературы происходит так часто, что с их точки зрения не является чем-то неординарным. И им недосуг заниматься логическим анализом или выяснением психологических и тем более философских причин многочисленных «озарений». Впрочем, отдельные «свидетельства» в этой сфере все-таки есть. Приведем отрывок из воспоминаний писателя К. Паустовского.

«Самый творческий процесс, в данном случае я говорю только на основании своего опыта, я бы сравнил с таким явлением: в плотине сделано маленькое отверстие, начинает бить вода, размывает отверстие и идет все шире и шире. Когда родилась тема и когда начинаешь работать, это подобно процессу прорыва плотины.

В самом процессе работы появляется огромное количество дополнительных тем, сам собой организуется материал, и память подает вам все нужное для того, чтобы получился законченный рассказ, причем память извлекает такие вещи, о которых вы никогда в своей жизни не вспоминали. В нужный момент память вам поднесет то, о чем вы давным давно забыли и не могли предположить, что это когда-то вам понадобится» [32, с. 378–379].

Не об этих ли периодах «озарения» рассказал Пушкин в часто цитируемом отрывке из незаконченного стихотворения «Осень»?

«Душа стесняется лирическим волненьем,
Трепещет и звучит, и ищет, как во сне,
Излиться наконец свободным проявленьем —
И тут ко мне идет незримый рой гостей,
Знакомцы давние, плоды мечты моей.
И мысли в голове волнуются в отваге,
И рифмы легкие навстречу им бегут
И пальцы просятся к перу, перо к бумаге,
Минута — и стихи свободно потекут».

Прагматически настроенному читателю, наверное, уже не терпится задать вопрос: «Простите, а причем здесь логика?» Логика здесь есть, хотя, возможно, не вполне привычная. Возьмем за основу приведенный отрывок из стихотворения Пушкина и проведем с ним серию логических «экспериментов».

Сначала попробуем провести анализ этого отрывка с помощью «грубых» логических методов. Оказывается, это не так просто. Тут что ни слово, то метафора. Почему мысли и слова «потекут»? Что это, вода, что ли? Или почему перо «просится к бумаге»? «Проситься» может нечто одушевленное, а не перо! Дальше анализ можно не продолжать. И так ясно, что логика здесь только мешает.

Но попробуем заменить в этом отрывке некоторые слова, сохраняя при этом ритмику и, по возможности, содержание стихотворения. Например, душа не «стесняется», а «наполнена лирическим волненьем», она же стремится не «излиться», а «явиться свободным проявлением», рифмы не «бегут, а «идут», а стихи не «потекут», а «побегут».

Этот эксперимент здесь проведен отнюдь не для того, чтобы «подправить» творение гения, а для того, чтобы понять одну простую истину: весь этот комплекс метафор в стихотворении подчинен «внутренней логике», которая направлена на то, чтобы наряду с «протокольным» описанием процесса «озарения» создать образ *одушевленного и сдерживаемого чем-то потока*, который в какой-то момент времени прорывается на желанную волю. И тогда становится понятно, что бездарная замена некоторых слов приводит к искажению этого образа. И мне кажется, что этот образ и есть то основное свойство феномена «озарения», которое хотел до нас донести в своем стихотворении Пушкин. Не исключено, что именно этот образ, созданный

Пушкиным, вспомнился Паустовскому, когда он рассказывал о своем творчестве.

В многочисленных исследованиях феномена научного открытия выдвигаемые авторами гипотезы, как правило, не учитывают «внутренней логики» процесса внезапного озарения. В них пропадает образ стремящегося вырваться на волю потока. Но из какой «неволи» стремятся вырваться первопроходцы в науке? В существующих гипотезах нет ясного ответа на этот вопрос. Проблема мотивации продуктивного научного творчества пока что остается открытой.

Можно, разумеется, предложить немало, на первый взгляд, убедительных концепций этой «неволи». Это может быть и недовольство своим положением (хотелось бы, чтобы о тебе знал и считался с твоим мнением значительно больший контингент людей), и материальные трудности (вот, получить бы Нобелевскую премию!), и нереализованное желание переубедить оппонентов, точка зрения которых тебя не устраивает, и т. д. Но эту «неволю» испытывают многие, а открывают новые, становящиеся рано или поздно общепризнанными, истины далеко не все из них. Очевидно, основная «неволя» заключается в том, что *на любом этапе развития наших знаний в основах этих знаний содержатся паралогизмы и противоречия, которые многими не замечаются.* А тот, кто их замечает, стремится вырваться из них и порой открывает или изобретает то, что для других было недоступно.

В одной из своих ранних философских работ Лейбниц, ссылаясь на Томаса Гоббса, мимоходом замечает, что «восточные» языки (а к ним он относил и славянские языки) менее приспособлены для философствования, чем языки германской группы. На чем же был основан этот неутешительный для нас вывод? Дело, оказывается, в том, что в «восточных» языках допускается эллипс (пропуск) глагола-связки «есть» в предложениях [12, с. 73]. На первый взгляд, ничего страшного в этом нет: ну, допустим, в предложении пропущена эта злополучная связка, но она же все равно подразумевается! Например, мы говорим «Все вороны черные», а не «Все вороны есть черные» и ничего предосудительного в этом не видим.

На самом деле ситуация оказывается более серьезной. Пропуск такой связки делает в ряде случаев неразличимыми активный и пассивный залоги, и, следовательно, вполне допустима двоякая трактовка одного и того же предложения. В русском языке даже не спасает употребление связки «есть», которая не изменяется при изменении залога и часто употребляется в значении «равносильно». Положение усугубляется еще и тем, что порядок частей речи в русском языке не так жестко определен, как, например, в английском языке, и поэтому вполне возможна ситуация, когда одно и то же суждение разными людьми «расшифровывается» различно: один считает субъектом суждения то, что другой считает предикатом.

Кстати, родным языком Ибн-Сины, философские работы которого написаны на арабском языке, был язык фарси, в котором более четко, чем в арабском, различаются активный и пассивный залоги, и, возможно, именно этим обстоятельством объясняется то, что Ибн-Сина не только сумел правильно переложить логику Аристотеля на арабский язык, но совершить в ней великие открытия. Может быть, и нам, говорящим на русском языке, с учетом его грамматических особенностей следует вернуться в логике к логической семантике суждений, предложенной Аристотелем (см. п. 3.6)? Наверное, это проще, чем реформировать язык, у которого к тому же эта «нелогичность» оставляет больше свободы для фантазии и творчества. Довольно часто общепринятые суждения содержат в себе ошибку, которая может быть устранена при замене залога. И если эта ошибка закреплена не только по смыслу, но и оформлена грамматически, то заметить ее становится труднее. Возможно, в такой «логичности» языка, которая свойственна языкам германской группы, тоже есть свои минусы, и особенно горевать по этому поводу нам не следует. Хотя на особенностях национального характера разница в языках, видимо, сказывается. И проблема связи грамматических особенностей языков и национальных характеров еще ждет своего исследователя.

Но дело не только в связках и грамматических особенностях национальных языков. Для более ясного понимания связи логики и творчества не менее важны некоторые другие, более общие, особенности употребления человеческого языка. И в повседневной жизни, и в научной или литературной деятельности люди часто не замечают, что употребляют одни и те же слова в разных смыслах или, наоборот, не замечают смыслового сходства между разными словами. Примеры такого небрежного отношения к терминологии можно найти даже в математике. Например, термин «система множеств» во многих математических руководствах часто отождествляется с термином «множество множеств», хотя само собой разумеется, что в обычном множестве, будь это множество баранов или множество точек отрезка, пересечение любых двух разных элементов всегда равно пустому множеству. А вот в системах множеств такое соотношение необязательно и поэтому называть их множествами множеств не вполне корректно.

Но среди многих читающих и пишущих находятся и те, кто более остро чувствует эту «живую жизнь» языка. И даже если их деятельность направлена не на то, чтобы находить и преодолевать в общепризнанных истинах нарушение законов логики, а на то, чтобы создавать и дарить людям новые прекрасные метафоры, они в своем обостренном ощущении законов

жизни языка намного более логичны, чем те, для которых эта жизнь языка остается незамеченной.

Но какой толк от этого безрадостного вывода? Одним «дано» видеть жизнь языка, а другим «не дано» — гениями рождаются, и научиться гениальности нельзя. Да и нужно ли, если хочешь жить спокойно без всяких «томлений» и «озарений»?

Не берусь утверждать, что научиться гениальности можно. Хотя есть оптимисты, которые защищают эту точку зрения. К ним, например, относятся энтузиасты школы «Теории Решения Изобретательских Задач» (ТРИЗ), возникновение и развитие которой в нашей стране инициировано произведениями и деятельностью Г. С. Альтшуллера [33, 34]. Мне, прошедшему эту школу, довелось и на собственном опыте, и на опыте многих моих знакомых убедиться в том, что люди, даже не мечтавшие ранее стать изобретателями, после соответствующего обучения начинали придумывать такое, что потом становилось официально признанным, а в некоторых случаях и успешно внедренным изобретением.

Школа ТРИЗ позволяет многим значительно поднять свой творческий потенциал в определенной области деятельности — при поиске решений технических и технологических проблем. Но некоторые элементы ТРИЗ могут использоваться и в других областях интеллектуальной деятельности (например, одним из таких приложений является (!) разработка сюжетов для произведений жанра научной фантастики). В методологии ТРИЗ учтены многие особенности творческого мышления, но недостаточно проработаны вопросы, связанные со взаимодействием языка и логики в периоды творческой активности. Но при внимательном изучении методов и приемов ТРИЗ можно заметить одну интересную особенность, которая приоткрывает завесу над тайнами творчества вообще: *некоторые из этих методов и приемов направлены на то, чтобы «расшатать» устойчивый языковый стереотип, сложившийся у специалистов при постановке и формулировке технической проблемы.* Часто этот стереотип и является главным тормозящим фактором при поиске простого и эффективного решения проблемы. Эту закономерность подтверждает удивительный факт: человек, хорошо владеющий методикой ТРИЗ, может решить сложную техническую проблему, даже если он не является специалистом в данной области техники.

Но и в «чистой» науке известно немало фактов, когда авторами научных открытий становились люди, которые ни по образованию, ни по роду основной деятельности не являлись специалистами в той области знаний, в которой и было совершено открытие. Немало примеров такого рода приведено в работе [31]. Причина такого «парадокса», видимо, заключается в том, что эти «дилетанты» в своих успешных поисках не были жестко связаны определенными языковыми стереотипами, которые в определенный исторический период развития науки довлеют над признанными специалистами.

Мне представляется, что поднять значительно потолок своих творческих возможностей может каждый, если более внимательно начнет изучать жизнь и многообразие родного языка и языка, с помощью которого мы осуществляем свою профессиональную деятельность. И в этом изучении математически обоснованная и в то же время общедоступная логика, основанная на законах алгебры множеств, играет далеко не последнюю роль. И это суждение является одним из главных защищаемых в данной работе принципов философии здравого смысла.

И в заключение еще раз попытаемся ответить на вопрос: «Что есть здравый смысл?». Если очень кратко, то *здравый смысл — это разумное сочетание знаний, логики и веры*. В этом определении самый непонятный термин — «разумное сочетание». И чтобы «расшифровать» его смысл, потребуется немало объединенных усилий и времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИНТЕРПРЕТИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной теории доказательств и в различных вариантах неклассческих логик понятие интерпретируемости не имеет однозначного определения, а иногда и вообще не используется. В исчислении предикатов (Predicate Calculus — *PC*) интерпретация теорий первого порядка является обязательной для подтверждения семантической значимости теории, но сама проверка интерпретируемости (или неинтерпретируемости) формальных теорий в *PC* является задачей, для решения которой в настоящее время не разработаны ни методика, ни алгоритмическая база. Решение этой проблемы предусматривается в данной работе.

Здесь под *интерпретируемостью системы* понимается доказанная возможность представить соотношения формальной теории как соотношения между множествами и элементами *конечной системы множеств*, в которой допускается бесконечность универсума и некоторых его подмножеств. Конечность системы множеств означает, что в формальной теории может содержаться конечное множество *нелогических символов* (т. е. обозначений констант, предикатов и функций) *PC*. Отрицание свойства конечности в этом смысле означает, что теория должна содержать различные символы *PC*, число которых превышает число элементарных частиц в наблюдаемой части Вселенной, что ставит под сомнение возможность какой-либо реализации таких теорий. Термин содержательная (система, модель, теория) в данном контексте понимается как точный синоним термина интерпретируемая.

В основу предлагаемой теории логического вывода [35–37] положены соотношения алгебры множеств (*SA*), которая здесь рассматривается не в традиционном для современной логики смысле как вариант *конечной булевой алгебры*, а в широком смысле — как изоморфный вариант *конечных алгебр колец и полуколец*. Для этих алгебр известен один замечательный результат, приведенный в работе [20] (здесь он сформулирован в обобщенном виде).

Теорема 1. *Если $S_1, S_2, \ldots, S_N$ — конечная система S множеств со свойствами кольца или полукольца, то существует и может быть построена конечная система E различных множеств $E_1, E_2, \ldots, E_M$ $(M \ge N)$ со следующими свойствами:*

(i) для любой пары (E_i, E_k) при $i \ne k$ $E_i \cap E_k = \varnothing$;

(ii) любое множество системы S в точности равно объединению некоторых множеств системы E.

Перечисленные свойства позволяют представить систему E как конечную совокупность «элементов» системы S. Это означает, что любая конечная система множеств со свойствами кольца или полукольца изоморфна некоторой *сугубо конечной* системе множеств, в которой конечно не только число множеств, но и общее число элементов. Этот результат, практически не используемый в современной математической логике, позволяет без потери точности существенно упростить многие сложные методы логического анализа. Одним из его применений является *алгебра кортежей* (АК), с помощью которой можно представить модели исчисления предикатов как конечные системы множеств и уменьшить трудоемкость алгоритмов решения задач в прикладных системах искусственного интеллекта [38–41]. Кроме того, установленное в SA на основе теоремы 1 соотношение между понятиями «множество» и «элемент», является достаточным основанием для того, чтобы считать некорректной формулировку парадокса Рассела.

В дальнейшем знаком «▯» обозначается конец доказательства.

2. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДАЧ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

В теории логического вывода на основе PC *нелогическими аксиомами* называются некоторое множество аксиом теории, которые устанавливают некоторые соотношения между нелогическими символами PC. В свою очередь, нелогическими символами PC являются имена (или обозначения) некоторых, в общем случае неконкретно определенных множеств, отношений или их элементов. Эти имена в дальнейшем мы будем называть *терминами*. Введем сначала общее определение логического вывода.

Определение 1. Для заданной системы аксиом (или посылок) *логический вывод в комплексе* состоит в решении следующих задач:

1) *вывод* (некоторых или всех возможных) *следствий*;

2) *проверка интерпретируемости* (проверка существования (или несуществования) конечной системы непустых множеств, в которой соблюдались бы все заданные в посылках и полученные в следствиях соотношения между терминами);

3) *проверка полноты* (проверка невозможности существования интерпретируемых в данной системе, но не предусмотренных в аксиомах и не содержащихся в следствиях соотношений между исходными терминами или их дополнениями);

4) *проверка независимости* (проверка невозможности вывести некоторые исходные посылки из множества остальных);

5) *проверка совместимости* новых аргументов с исходной системой или проверка гипотез (проверка интерпретируемости системы, в которой к исходным посылкам добавлены новые посылки, возможно, с новыми терминами).

Ограничим себя решением этих задач, в которых прямо или косвенно присутствуют некоторые «соотношения между терминами», которые могут выполнять роль аксиом (посылок), следствий, аргументов или гипотез. Выражения, с помощью которых формулируются эти соотношения, мы назовем *предложениями*. Для конкретизации общего определения логического вывода введем формальное определение допустимых типов предложений в данной математической модели. В табл. П1 приведены структура и интерпретация основных типов предложений. В ней символами X, Y, Z, W, x обозначаются термины или их отрицания (для SA — дополнения).

Таблица П1

Соответствия (графы)	Интерпретация	
	Логическая	SA
$X \to Y$	«Все X есть Y»; Y — необходимое условие (или обязательный признак) X; X — достаточное условие Y	$X \subseteq Y$
$X \to \{Y, Z\}$	«Все X есть Y и Z»; Y и Z — необходимое условие (сочетание признаков) X	$X \subseteq (Y \cap Z)$
$x \to \{X, Y\}$	«Некоторые (конкретные) X есть Y»	$x \subseteq (X \cap Y)$
$\{X, Y\} \to Z$	«Все X или все Y есть Z»	$(X \cup Y) \subseteq Z$
$\{X, \ldots, Y\} \to \{Z, \ldots, W\}$	Декартово произведение множеств, каждый элемент которого есть связь типа $t \to s$ (например, $X \to W$, $Y \to Z$, ...)	$(X \cup \ldots \cup Y) \subseteq (Z \cap \ldots \cap W)$

Предложения, в которых в левой и правой части содержится по одному термину, назовем *элементарными предложениями*.

Из интерпретации предложений табл. П1 видно, что в них содержатся основные логические средства, используемые при *определении терминов*: родо-видовые отношения, наличие или обязательное отсутствие (если используется отрицание) определяющих признаков, необходимые или достаточные условия существования и т. д. Отметим основные отличия между этими предложениями и выражениями предложений в PC.

1. Связка «→» не тождественна импликации. В SA она интерпретируется как соотношение включения, а в логике — как модальное соотношение необходимости, свойства которого определяются с помощью табл. П2, в которой X и Y обозначают некоторые события или признаки, а $P(X|Y)$ — условную вероятность:

Таблица П2

X	Y	$X \to Y$	$P(X\|Y)$
Нет	Нет	Безусловно истинно	1
Нет	Да	Возможно	$P(0\|1)$
Да	Нет	Невозможно	0
Да	Да	Возможно	$P(1\|1)$

Здесь $P(0|1)$ обозначает вероятность события (признака) не X ($\overline{X}$) при условии Y, а $P(1|1)$ — вероятность X при условии Y.

Видно, что эта таблица сопоставима с таблицей истинности импликации, но не тождественна ей. Чтобы понять, почему категории необходимости соответствует именно эта таблица, а не какая-либо другая, рассмотрим конкретный пример. Известно, что в множестве целых чисел делимость на 3 является необходимым, но недостаточным условием делимости на 6. В соответствии с нашей интерпретацией обозначим делимость на 3 как Y, а делимость на 6 — как X. Теперь, если рассматривать множество чисел натурального ряда, то окажется, что из того, что число не делится на 3, безусловно следует, что оно не делится на 6 (строки 1 и 3 таблицы), а для чисел, делящихся на 3, допустимы как делимость на 6, так и отсутствие такого признака (строки 2 и 4). Для множества натуральных чисел или для достаточно большой их конечной последовательности $P(0|1) = P(1|1) = 0,5$. Для других соотношений необходимости эти вероятности могут отличаться, но их сумма всегда равна 1. Ясно также, что множество чисел, кратных 6, строго включено в множество чисел, кратных 3.

2. Квантор существования в данной интерпретации понимается не совсем так, как в PC. При элиминации квантора существования в PC все свободные вхождения в подкванторное выражение одной и той же переменной заменяются некоторой (одной и той же) константой, в то время как в данной интерпретации разные выражения «некоторые X» для одного и того же термина X обозначаются разными символами (обычно для этой цели здесь используются строчные буквы или буквы с индексами), т. е. предполагается, что этими символами обозначаются разные подмножества X. При этом в данной математической модели возможна проверка гипотезы об эквивалентности этих подмножеств (об этом ниже). Это означает, что

в данной системе вывода выражение «некоторые X» имеет более широкий смысл, чем квантор $\exists$ в PC, но при необходимости можно проверить допустимость введения вместо него выражения $\exists x$, где x — некоторый элемент множества X или некоторое его непустое подмножество.

Среди типов предложений, приведенных в табл. П1, нет типов, которые в SA могут быть записаны как соотношения $(X \cap Y) \subseteq Z$; $X \subseteq (Y \cup Z)$; $(X \cap \ldots \cap Y) \subseteq (Z \cup \ldots \cup W)$. Эти типы предложений по структуре соответствуют правилам в продукционных системах и редко используются как начальные определения или аксиомы. Чтобы ввести эти типы предложений в модель, необходимо использовать представление в виде И/ИЛИ-графа (для представления в модели всех типов предложений, приведенных в табл. П1, достаточно представить их в виде ИЛИ-графа). Здесь принимается другой вариант использования этих не включенных в табл. П1 типов предложений: будем вводить их в модель не как посылки, а как проверяемые гипотезы (об этом ниже).

Указанные и некоторые другие различия вынуждают применить другой, отличающийся от того, что используется в PC, подход к формулировке правил вывода.

3. ПРАВИЛА ВЫВОДА

Указанная выше интерпретация предложений соответствует системе, в которой соблюдаются соотношения SA. Правила вывода выбираются с учетом этих соотношений. Для решения всех предусмотренных задач логического вывода при данной интерпретации достаточно использования трех соотношений SA:

инволюция — для любого термина X справедливо $\overline{\overline{X}} = X$;
транзитивность — из $X \to Y$ и $Y \to Z$ следует $X \to Z$;
контрапозиция — $X \to Y$ равносильно $\overline{Y} \to \overline{X}$.

Разумеется, при другой интерпретации предложений эти соотношения могут оказаться неадекватными. Например, если знак «→» интерпретировать как «≤» (меньше или равно), то нам пришлось бы воспользоваться другими законами. Однако даже для отношения «≤» (как и для многих других «неправильных» соотношений) вполне возможна интерпретация, которая соответствует используемой здесь. Для этого соотношение $L \le M$ можно представить как интервальное соотношение $(-\infty, L) \subseteq (-\infty, M)$. Интерпретация необычная, но вполне допустимая, если рассматривать в качестве терминов не только отдельные интервалы, но и объединения, возможно, даже несмежных интервалов (в АК за счет этого обобщения производится переход от структур, изоморфных полукольцам, к структурам, изоморфным SA).

Определение 2. *Правилами вывода* логической системы, в которой интерпретация предложений соответствует табл. П1, являются: правило T (транзитивности) и правило C (контрапозиция с элиминацией двойных отрицаний).

Рассмотрим пример. Даны посылки: $P \to M$ и $S \to \overline{M}$. Требуется построить все возможные следствия из этих посылок Для этого, применяя к каждой посылке правило C, получим предложения $\overline{M} \to \overline{P}$ и $M \to \overline{S}$; из посылок $P \to M$ и $M \to \overline{S}$ следует $P \to \overline{S}$ (правило T); последнее предложение можно преобразовать в $S \to \overline{P}$ (правило C). Дальнейшее применение этих правил ни к чему не приведет — новых предложений мы не получим. По сути, мы нашли решение для модуса AEE второй фигуры категорического силлогизма, но помимо предписываемого этим модусом единственного решения ($S \to \overline{P}$) получили еще три дополнительных ($\overline{M} \to \overline{P}$, $M \to \overline{S}$ и $P \to \overline{S}$), которые при обосновании этого модуса являются промежуточными.

Таким образом, вполне очевидным является решение первой задачи логического вывода: из множества исходных посылок строится некоторый *исходный граф*, в котором термины являются вершинами, после чего этот граф с помощью правил C и T дополняется до полного насыщения новыми связями и вершинами (этими новыми вершинами являются инверсии некоторых терминов, не включенные в исходные посылки).

Определение 3. ***CT-замыканием*** исходного графа называется граф, достроенный из исходного графа с помощью применения правил вывода C и T до предела.

Примером ***CT***-замыкания является соответствие

$$P \to \{M,\ \overline{S}\};\ \ M \to \{\overline{S}\};\ S \to \{\overline{P},\ \overline{M}\};\ \ \overline{M} \to \{\overline{P}\}$$

для исходных данных рассмотренного ранее примера. Стоит обратить внимание на то, что в исходных посылках содержатся лишь частичные определения исходных терминов. Они как бы «доопределяются» в процессе построения ***CT***-замыкания. Например, для термина P мы получили еще один признак $\overline{S}$ (обязательное отсутствие свойства S). Кроме того, в ***CT***-замыкании появились определения для терминов M и $\overline{M}$, отсутствовавшие в посылках.

Теорема 2. *Вычислительная сложность алгоритма построения **CT**-замыкания полиномиальна.*

Доказательство. Пусть M — число исходных терминов системы. При построении ***CT***-замыкания общее число терминов не превышает числа $N = 2M$. Общее число включений для системы из N множеств не превышает N^2-N (число ориентированных дуг в полном графе без учета петель). Поскольку поиск новых включений с помощью правил C и T и проверка невозможности получения новых связей с помощью этих правил выполняются с помощью алгоритмов полиномиальной сложности, то сложность всего алгоритма также полиномиальна. □

4. ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТЬ

При формировании исходных посылок далеко не всегда есть уверенность в том, что все они в комплексе соответствуют интерпретации предложений в табл. П1. Формируя их, мы порой лишь предполагаем это соответствие, но это предположение требует проверки. Напрашивается простое, на первый взгляд, решение: необходимо либо найти систему P всех подмножеств некоторого конечного множества, такую что ***CT***-замыкание нашего исходного графа является подграфом графа всех включений системы P, либо убедиться, что такую систему найти невозможно. Но даже если наша исходная система интерпретируема, то вычислительная сложность такого поиска весьма велика, если учесть, что граф всех включений системы всех подмножеств множества из N элементов содержит 3^N-2^N связей, а задача проверки того, что заданный граф является подграфом другого графа, также не относится к разряду легко решаемых. Если же наша система окажется неинтерпретируемой, то мы рискуем не закончить процесс такого поиска за любое мыслимое время.

Другой, более простой подход к решению этой задачи заключается в том, чтобы определить такие особенности ***CT***-замыкания, которые являются критерием неинтерпретируемости исходной системы. Рассмотрим систему $P(S)$ всех подмножеств множества S, состоящего из N элементов. Число всех подмножеств $P(S)$ равно 2^N. Для каждого множества A_i в $P(S)$ существует его дополнение $\overline{A_i} = S \setminus A_i$. С учетом этого можно представить $P(S)$ как систему

$$P(S) = \{\varnothing,\ A_1, A_2, \ldots, A_R,\ S, \overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_R}\},\ \text{ где } R = 2^{N-1}-1.$$

Заметим, что такое представление для одной и той же системы $P(S)$ неоднозначно (можно любое A_i, не равное S или $\varnothing$, обозначить как $\overline{A_i}$, а $\overline{A_i}$ в свою очередь — как A_i), но эта неоднозначность для дальнейших выкладок роли не играет. Теперь, если с использованием этой системы обозначений построить граф G всех включений $P(S)$, то на основе аксиом SA (или аксиом кольца множеств с единицей) легко доказываются следующие свойства этого графа:

PG0 — граф G является насыщенным графом транзитивного отношения;

PG1 — в G для каждой парной связи существует ее контрапозиция;

PG2 — все дуги графа G являются ориентированными и в нем отсутствуют циклы;

PG3 — в G не существует связей типа $A_k \to \overline{A_k}$, за исключением случая, когда $A_k = \varnothing$ и $\overline{A_k} = S$.

Свойства **PG0** и **PG1** графа G мы используем при выводе (т. е. при построении *CT*-замыкания), поэтому нам они при поиске критериев неинтерпретируемости системы не понадобятся.

Определение 4. *Коллизией* назовем нарушение хотя бы одного из свойств **PG2** и **PG3** в *CT*-замыкании исходной системы.

Теорема 3 (теорема неинтерпретируемости). *Из предположения, что все термины, соответствующие вершинам CT-замыкания, являются обозначениями непустых попарно различных множеств, следует, что CT-замыкание с коллизиями не может быть вложено в граф включений любой конечной системы множеств.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что произвольная конечная система множеств может быть разложена на конечное число попарно непересекающихся множеств, которые для любого множества исходной системы выполняют роль «элементов». Эта система изоморфна системе множеств $P(S)$, в котором S конечно. Тогда утверждение теоремы является непосредственным следствием свойств графа всех включений $P(S)$ и Определения 4. □

Наличие коллизий в *CT*-замыкании еще не является свидетельством того, что исходные посылки абсолютно ложны. Во многих случаях можно избавиться от коллизий, внося соответствующие коррективы в исходную модель.

Рассмотрим коллизию, связанную с нарушением свойства **PG2** в *CT*-замыкании. Наличие в графе включений неориентированной связи означает эквивалентность соответствующих множеств ($X \subset Y$ и $Y \subset X$). Если же при построении *CT*-замыкания на какой-либо промежуточной стадии появляется цикл, то дальнейшее построение приводит к тому, что все вершины, связанные циклом, образуют полный неориентированный подграф (доказательство этого ввиду его тривиальности мы здесь не приводим), что дает основание считать все термины, содержащиеся в любом цикле *CT*-замыкания, эквивалентными.

Определение 5. *Коллизией эквивалентности* называется нарушение свойства **PG2** в *CT*-замыкании.

Правило элиминации коллизии эквивалентности: при появлении в *CT*-замыкании неориентированных ребер, пары вершин, связанные этими ребрами, стягиваются в одну вершину, а термины, соответствующие этим вершинам, определяются как эквивалентные.

Рассмотрим пример. Даны посылки: $S \to \overline{W}$, $\overline{P} \to W$, $P \to S$. Нетрудно убедиться, что при построении *CT*-замыкания окажется, что классы терминов $\{S, \overline{W}, P\}$ и $\{\overline{S}, W, \overline{P}\}$ являются классами эквивалентности и между этими классами нет никакой связи.

Разумеется, для систем, в которых циклы имеют другой смысл, данное правило неверно. Но это лишь означает, что в основе таких систем лежит другая, не совпадающая с принятой здесь, интерпретация. Перейдем к другой коллизии.

Определение 6. *Коллизией противоречия* (или *противоречием*) называется нарушение свойства **PG3** в *CT*-замыкании.

Название этой коллизии можно считать условным, так как в ряде случаев откорректировать эту коллизию можно путем присвоения некоторым терминам статуса пустого множества без нарушения адекватности исходной системы. Но бывают случаи, когда требуются другие, более сложные приемы для элиминации этой коллизии.

Рассмотрим пример, немного отличающийся от предыдущего. Даны посылки: $S \to \overline{W}$, $\overline{P} \to W$, $P \to \overline{S}$. Начнем последовательно строить *CT*-замыкание: из $P \to \overline{S}$ получим $S \to \overline{P}$ (правило *C*), из $S \to \overline{P}$ и $\overline{P} \to W$ получим $S \to W$ (правило *T*), из него — $\overline{W} \to \overline{S}$ (правило *C*), а из $S \to \overline{W}$ и $\overline{W} \to \overline{S}$ получим $S \to \overline{S}$ (правило *T*). Если теперь продолжать дальше строить *CT*-замыкание, то получится система, в которой нет других коллизий, кроме $S \to \overline{S}$. Одним из способов элиминации такой коллизии является присвоение $S = \varnothing$. Тогда множество $\overline{S}$ становится равным универсуму (U). В данном примере теперь можно исключить из рассмотрения термины S и $\overline{S}$ и соответственно все связи с этими терминами, тогда исходные посылки преобразуются в одну: $\overline{P} \to W$. Тогда результатом логического вывода будут соотношения $S = \varnothing$, $\overline{S} = U$ и $\overline{W} \to P$.

Правило элиминации противоречия: при возникновении коллизии типа $X \to \overline{X}$ (или $\overline{X} \to X$) необходимо в промежуточном графе *CT*-замыкания проверить существование связей, входящих в предполагаемое пустое множество, и связей, выходящих из предполагаемого универсума. При наличии таких связей присвоить значение $\varnothing$ вершинам, из которых исходят дуги в пустое множество, и значение U вершинам, в которые исходят дуги из предполагаемого универсума, затем присвоить контрарные значения вершинам, являющимся инверсией переозначенным. Процесс переозначивания продолжать до тех пор, пока в графе не останется связей типа $Y\to\varnothing$ и $U\to Y$. При появлении связи типа $U\to\varnothing$ универсуму присваивается значение $\varnothing$.

Подоплека правила очевидна: в интерпретируемых системах в пустое множество может быть включено только пустое множество, а универсум может быть включен только в универсум.

Теорема 4. *Алгоритмы распознавания и элиминации коллизий являются алгоритмами полиномиальной вычислительной сложности.*

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы 2 и очевидной полиномиальности распознавания неориентированных ребер графа и распознавания связей между некоторыми выделенными парами вершин графа. Процедуры стягивания вершин графа и элиминации вершин также полиномиальны. □

Но не всякий анализ в данной модели оказывается таким простым. Рассмотрим случай, когда у нас нет оснований для того, чтобы при появлении коллизии типа $X\to\overline{X}$ считать множество X пустым.

В качестве примера рассмотрим один из «популярных» вариантов парадокса Рассела. Даны посылки: 1) «Некоторые жители деревни бреются сами» ($X\to Y$); 2) «Некоторые жители деревни бреются у брадобрея» ($X\to Z$) и 3) «Все, которые бреются у брадобрея, сами не бреются» ($Z\to\overline{Y}$). Тогда из $Z\to\overline{Y}$ получаем $Y\to\overline{Z}$, из $X\to Z$ получаем $\overline{Z}\to\overline{X}$, а из пути $X\to Y\to$ $\to\overline{Z}\to\overline{X}$ получаем $X\to\overline{X}$. Получено противоречие («Некоторые жители деревни не являются некоторыми жителями деревни»).

Допустим, что достоверно известно, что $X\neq\varnothing$, но его можно разделить на два множества X_1 и X_2 причем $X_1\to Y$, а $X_2\to Z$. Тогда из исходных посылок этой модифицированной системы мы получим ***СТ***-замыкание, граф которого можно представить в виде следующего соответствия:

$$X_1\to\{Y,\ \overline{X_2},\ \overline{Z}\};\ X_2\to\{Z,\ \overline{X_1},\overline{Y}\};\ Y\to\{\overline{X_2},\ \overline{Z}\};\ Z\to\{\overline{X_1},\ \overline{Y}\};$$
$$\overline{Y}\to\{\overline{X_1}\};\ \overline{Z}\to\{\overline{X_2}\}.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае никаких коллизий не возникает. К тому же X_1 и X_2 не только различны, но и не пересекаются — это следует из соотношений $X_1\to\overline{X_2}$ и $X_2\to\overline{X_1}$, полученных в ***СТ***-замыкании.

В таких случаях ошибку, которая допущена в исходных посылках при формализации условий задачи, можно определить как *подмену тезиса*.

Рассмотрим известный вариант парадокса брадобрея: деревенскому брадобрею дали указание брить тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами. Парадокс возникает, когда брадобрею приходится решать вопрос о бритье собственной персоны. Здесь ошибка не так заметна, но ее также можно распознать — она заключается в том, что отождествляются разные термины «брить клиента» (антирефлексивное отношение) и «бриться» (рефлексивное отношение). При формальном обосновании парадокса это отличие игнорируется.

В основном парадоксе Рассела противоречие обусловлено нечеткостью определения понятий «множество» и «элемент» (точнее, отказом от их точного определения в «наивной» теории множеств Г. Кантора). Если же взять в качестве примера «самоприменимых» множеств абстрактное «множество всех множеств», то и здесь с точки зрения законов алгебры множеств тоже получается неувязка. «Множество всех множеств» в контексте парадокса не является математическим множеством. Оно является системой множеств, но вовсе не множеством. То обстоятельство, что в некоторых работах по математике системы множеств иногда называют «множествами», не может служить оправданием этой ошибки: математики тоже иногда позволяют себе использовать в рассуждениях паралогизмы.

Если же в основу парадокса Рассела взять не соотношение принадлежности, а соотношение включения, то и в этом случае невозможно сопоставление «самоприменимости» и «несамоприменимости». Соотношение включения сугубо «самоприменимо» (каждое множество включено в самого себя) и свойство «несамоприменимости» для этого соотношения не имеет смысла. По крайней мере, в алгебре множеств оно не предусмотрено.

В завершение этого раздела остается только добавить, что отсутствие коллизий в ***СТ***-замыкании не дает нам уверенности в том, что исходная система интерпретируема. Чтобы такая уверенность появилась, необходимо доказать следующее утверждение:

Теорема 5 (теорема интерпретируемости). *Любое конечное СТ-замыкание, не содержащее коллизий, может быть вложено в граф всех включений всех подмножеств некоторого конечного множества.*

Доказательство. Пусть граф G — ***СТ***-замыкание, не содержащее коллизий. Ясно, что G — сугубо ориентированный граф и состоит из конечного числа конечных цепей, имеющих начало и конец и не содержащих самопересечений (появление циклов в G означает, что ***СТ***-замыкание не достроено). Следовательно, G может быть вложено в некоторую конечную решетку. В то же время согласно теореме Стона любая конечная решетка может быть вложена в граф всех включений всех подмножеств некоторого конечного множества. □

Из теорем 3 и 5 можно получить важное следствие. Назовем *немодифицируемыми* системы, у которых не допускается элиминация коллизий при построении ***CT***-замыкания.

Следствие. *Для немодифицируемых систем логического вывода отсутствие коллизий в **CT**-замыкании является необходимым и достаточным условием интерпретируемости.*

Интерпретируемость конкретной системы логического вывода отнюдь не означает, что данная система является истинной. Для заданного набора терминов она может быть либо адекватной, если все соотношения ***CT***-замыкания этой системы не противоречат описываемой этими терминами реальности или нашим представлениям о ней, либо неадекватной в противном случае. Что касается неинтерпретируемых систем, то, по-видимому, они могут быть адекватными лишь в том случае, если представляют систему рассуждений, предназначенную лишь для того, чтобы ввести кого-либо в заблуждение.

5. НЕПОЛНОТА И НЕЗАВИСИМОСТЬ

Перейдем к решению следующих двух задач логического вывода. Сначала рассмотрим пример. Даны исходные посылки: $M \to \{P, S\}$; $S_1 \to S$. Нетрудно убедиться, что этот пример соответствует исходным данным модуса **AAI** (Darapti) третьей фигуры категорического силлогизма (здесь заранее введен термин S_1 (некоторые S) и соответствующая ему подразумеваемая исходная посылка). ***CT***-замыкание этой системы представим как соответствие:

$$M \to \{P, S\};\quad S_1 \to \{S\};\quad \overline{P} \to \{\overline{M}\};\quad \overline{S} \to \{\overline{M}\};\quad \overline{S} \to \{\overline{S_1}\}.$$

Оказывается, что среди всех предложений ***CT***-замыкания нет предписываемого этим модусом заключения $S_1 \to P$ (некоторые S есть P). Традиционно в таких случаях предполагается [42,43], что суждение $S_1 \to P$ справедливо, поскольку пересечение классов P и S непусто. Это можно понимать как еще одно правило вывода. Однако, если мы рассмотрим новую модель, в которой к существующим посылкам прежней модели добавим посылку $S_1 \to \overline{P}$ (некоторые S не есть P), то убедимся, что при построении ***CT***-замыкания в этой модели никаких коллизий не появляется. В то же время, если мы в соответствии с упомянутым «правилом вывода» добавим в новую модель еще и предложение $S_1 \to P$, то при построении ***CT***-замыкания, придем к противоречию $S_1 \to \overline{S_1}$. Разумеется, можно использовать это «правило вывода» с какими-то ограничениями, но система логического вывода в этом случае окажется намного сложнее. Другим обстоятельством, не позволяющим нам использовать это «правило вывода», является то, что связка «→» здесь по смыслу отличается от импликации.

Поступим иначе. Правила вывода оставим неизменными, но просто введем предложение $S_1 \to P$ в состав исходных посылок модуса Darapti и построим новое ***CT***-замыкание. Нетрудно убедиться, что никаких коллизий в этом случае не возникнет. Оказывается, что предложение $S_1 \to P$ не выводится из данной модели, но и не противоречит ей (в нашей интерпретации — не вызывает коллизий). В этом смысле наша исходная система является «неполной». Мало того, оказывается, что мы можем в этом смысле «дополнить» нашу исходную систему более сильным предложением $S \to P$ и получим тот же результат — никаких коллизий не появится.

Если теперь проверить тем же способом все правильные модусы категорического силлогизма, то окажется, что из 19 правильных модусов 10 окажутся «неполными» в этом смысле (все модусы третьей и четвертой фигуры, за исключением модуса АЕЕ четвертой фигуры). В этих модусах ожидаемое заключение не выводится с помощью правил вывода ***C*** и ***T***, но это заключение оказывается предложением, не вызывающим коллизий в системе. Понятие неполноты в этом смысле можно распространить и на более широкий класс систем логического вывода.

Определение 7. *Неполной системой* называется система исходных посылок, не содержащая коллизий в ***CT***-замыкании, для которой существуют не содержащиеся в ***CT***-замыкании предложения с множеством исходных или добавленных в ***CT***-замыкании терминов, такие что добавление этих предложений в исходные посылки не приводит к появлению коллизий во вновь построенном ***CT***-замыкании.

В принципе требования к неполноте системы могут быть и менее жесткими. Одним из вариантов неполных систем может быть класс систем, у которых при проверке неполноты в ***CT***-замыкании допускается коллизия эквивалентности для некоторых пар терминов.

Теорема 6. *Алгоритм проверки неполноты системы является алгоритмом полиномиальной вычислительной сложности.*

Доказательство. Пусть граф G_{CT} — ***CT***-замыкание исходной системы G, не содержащее коллизий. Чтобы проверить неполноту системы, достаточно последовательно проверить на отсутствие или наличие коллизий все вводимые в качестве новых посылок дуги графа, являющегося дополнением графа G_{CT} до полного неориентированного графа с тем же множеством вершин. Из полиномиальности числа таких дуг и теоремы 4 следует справедливость утверждения. □

В неполных системах среди множества невыводимых, но в то же время не вызывающих коллизий предложений могут встречаться *контрарные* пары предложений, каждое из которых при независимом их вводе в состав исходных посылок не вызывает коллизий в системе. Например, если в рассмотренном ранее модусе Darapti мы вместо предложения $S_1 \to P$ введем контрарное ему предложение $S_1 \to \overline{P}$, то при построении ***СТ***-замыкания коллизий не появится. Однако это свойство соблюдается не для всех предложений в неполных системах.

Теорема 7. *Свойство взаимозаменяемости контрарных предложений не является универсальным свойством неполных систем.*

Доказательство. Чтобы в этом убедиться, достаточно в том же примере проверить пару $S \to P$ и $S \to \overline{P}$. Первое из этих предложений не вызывает коллизий в системе, а второе — приводит систему к противоречию $M \to \overline{M}$. □

Чтобы убедиться, что неравнозначность контрарных предложений при вводе их в неполную систему не так очевидна, как это следует из примера, приведенного при доказательстве теоремы 7, рассмотрим более сложный случай. Пусть дана система исходных посылок: $B \to \{A, C\}$; $D \to \overline{C}$; $E \to C$. Расчеты показывают, что эта система является неполной и ее можно дополнить по отдельности следующими предложениями: $E \to A$; $D \to A$ и $D \to \overline{B}$. Однако, если такую же проверку произвести для контрарных предложений $E \to \overline{A}$; $D \to \overline{A}$ и $D \to B$, то окажется, что первые два предложения не вызывают коллизий, а третье приводит систему к противоречию.

С учетом полученных результатов в данной системе логического вывода оказывается тривиальной *задача проверки независимости некоторого множества аксиом*. Пусть A — множество посылок системы, а A_k — некоторое подмножество этого множества. Для проверки независимости A_k достаточно:

1) построить ***СТ***-замыкание для системы A и проверить его интерпретируемость;

2) если система A интерпретируема, то построить ***СТ***-замыкание для системы $A \setminus A_k$ посылок;

3) проверить эквивалентность полученных графов.

Очевидно, что алгоритм такой проверки, если учесть, что сравниваемые графы являются помеченными графами, относится к классу алгоритмов полиномиальной вычислительной сложности.

6. ПРОВЕРКА АРГУМЕНТОВ И ГИПОТЕЗ

В рассматриваемых здесь системах логического вывода аргументы и гипотезы являются предложениями и формально не различаются. Разница между ними скорее эпистемологическая: если при вводе аргументов нарушается интерпретируемость исходной системы, то в этом случае возникает сомнение в обоснованности исходной системы (новое предложение в этом случае является опровергающим аргументом). В то же время, если нарушилась интерпретируемость системы при вводе гипотез, то в этом случае сомнения вызывают именно они, а не исходные посылки системы.

Определение 8. *Аргументами или гипотезами* называются предложения, в которых помимо исходных терминов системы могут содержаться некоторые новые термины и которые предназначены для проверки неизменности (или изменяемости) некоторых общих структурных свойств исходной системы.

Здесь мы ограничимся в основном лишь проверкой непротиворечивости исходной системы при введении в нее аргументов или гипотез. Далее такого рода предложения независимо от их эпистемологического статуса, будем называть гипотезами.

В некоторой степени условно будем подразделять гипотезы на простые и сложные.

Определение 9. *Простыми гипотезами* назовем предложения, регламентированные табл. П1, у которых перед связкой «→» в предложениях допускаются термины, не задействованные в исходных посылках или в ***СТ***-замыкании исходной системы.

Содержательно к простым гипотезам можно отнести два типа: 1) гипотезы о возможной эквивалентности некоторого множества использованных в системе терминов; 2) гипотезы о возможной непустоте пересечения некоторых множеств, обозначенных соответствующими исходными терминами.

Проверка простых гипотез первого типа сводится к тому, что проверяемые на эквивалентность термины при формировании исходной, не содержащей коллизий системы стягиваются в одну вершину, после чего эта новая система проверяется на непротиворечивость и на невозможность появления запрещенных в данной системе эквивалентностей. Ясно, что проверка гипотез этого типа сводится к решению ранее рассмотренных задач.

Для проверки гипотез второго типа в систему, не содержащую коллизий, вводятся предложения типа $\delta \to \{X, \ldots, Y\}$, где $X, \ldots, Y$ — термины, используемые в исходной системе, а δ — термин, не содержащийся в ***СТ***-замыкании исходной системы. Гипотеза считается допустимой, если при построении ***СТ***-замыкания новой системы не появляется противоречий и запрещенных эквивалентностей.

В качестве примера поверки простых гипотез второго типа рассмотрим приводимую ранее систему $X_1 \to Y$; $X_2 \to Z$; $Y \to \overline{Z}$ исходных посылок, с помощью которой моделировалась без подмены тезиса ситуация с брадобреем. Если эту систему дополнить гипотезой $\delta \to \{X_1, X_2\}$ (множества X_1 и X_2 имеют непустое пересечение), то при построении *CT*-замыкания этой системы появится противоречие $\delta \to \overline{\delta}$.

Оценим вычислительную сложность алгоритмов проверки простых гипотез. Эта оценка непосредственно следует из предыдущих оценок.

Теорема 8. *Алгоритмы проверки простых гипотез относятся к классу алгоритмов полиномиальной вычислительной сложности.*

Перейдем к сложным гипотезам. Этот структурный класс содержит довольно большое множество разнообразных типов. Здесь мы рассмотрим лишь предложения типов:

H1: $(X \cap \ldots \cap Y) \subseteq Z$,

H2: $X \subseteq (Y \cup \ldots \cup Z)$,

H3: $(X \cap \ldots \cap Y) \subseteq (Z \cup \ldots \cup W)$,

не предусмотренных в табл. П1 и не содержащих новых терминов. Структура этих предложений соответствует некоторым продукциям (или правилам) в базах знаний, и они обычно являются результатом индуктивных заключений специалистов (экспертов) в определенной области знаний. Назовем этот тип сложных гипотез *И-ИЛИ-гипотезами*.

Чтобы найти методы проверки И-ИЛИ-гипотез, проще воспользоваться их интерпретацией в *SA*. Рассмотрим методы их проверки по порядку.

H1. В предложении $(X \cap \ldots \cap Y) \subseteq Z$ целесообразно (но необязательно) проверить непустоту левой части с помощью простой гипотезы $\delta \to \{X, \ldots, Y\}$. Затем можно воспользоваться соотношением $(X \cap \ldots \cap Y) \subseteq Z \leftrightarrow (X \cap \ldots \cap Y) \backslash Z = \varnothing$. Простое преобразование дает $(X \cap \ldots \cap Y \cap \overline{Z}) = \varnothing$. Теперь, чтобы проверить гипотезу H1, достаточно проверить простую гипотезу $\eta \to \{X, \ldots, Y, \overline{Z}\}$, но при этом гипотеза H1 подтверждается, если при построении *CT*-замыкания появится коллизия $\eta \to \overline{\eta}$, и не подтверждается в противном случае.

H2. Эту гипотезу можно свести к типу H1, если взять контрапозицию предложения $X \subseteq (Y \cup \ldots \cup Z)$. Тогда проверка гипотезы H2 сводится к проверке простой гипотезы $\eta \to \{\overline{Y}, \ldots \ldots \overline{Z}, X\}$. Гипотеза H2 подтверждается, если при построении *CT*-замыкания появится коллизия $\eta \to \overline{\eta}$, и не подтверждается в противном случае.

H3. $(X \cap \ldots \cap Y) \subseteq (Z \cup \ldots \cup W)$ — то же самое, что и $(X \cap \ldots \cap Y \cap \overline{Z} \cap \ldots \cap \overline{W}) = \varnothing$.

Поэтому для проверки гипотезы **H3** достаточно проверить две простые гипотезы $\delta \to \{X, \ldots, Y\}$ и $\eta \to \{X, \ldots, Y, \overline{Z}, \ldots, \overline{W}\}$. Вторая гипотеза подтверждается при появлении коллизии $\eta \to \overline{\eta}$.

Из приведенных выкладок непосредственно следует следующее утверждение

Теорема 9. *Алгоритмы проверки И-ИЛИ-гипотез относятся к классу алгоритмов полиномиальной вычислительной сложности.*

При обосновании полиномиальной вычислительной сложности алгоритмов решения всех рассмотренных ранее задач логического вывода использовался далеко не самый быстрый метод их решения. При соответствующем кодировании условий задачи (с помощью (0,1)-векторов) и применении некоторых приемов естественного параллелизма можно добиться того, что время решения этих задач, за исключением задачи проверки неполноты системы, будет оцениваться полиномом не выше второй степени от числа исходных терминов. Для решения задачи проверки неполноты системы сложность алгоритма оценивается полиномом четвертой степени. Это соотношение подтвердилось и при составлении и тестировании программы для компьютера, в которой предусматривается решение всех перечисленных выше задач для произвольных исходных систем. В данной статье описание этих методов отсутствует: здесь важна лишь качественная оценка.

Ввод новых терминов в данной математической модели возможен не только при проверке гипотез. Используя новые термины и связи в сочетании с проверкой коллизий и гипотез, можно неограниченно расширять и модифицировать любую не содержащую коллизий исходную систему.

7. НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Проблема 1. Из того, что все рассмотренные в предыдущих разделах алгоритмы являются полиномиальными, вовсе не следует, что вычислительная сложность многих формулируемых в рамках этой математической модели задач должна быть полиномиальной. Например, неизвестно, относится ли к полиномиальным следующая задача: для исходной системы логического вывода найти минимальное множество элементарных предложений, которые при построении CT-замыкания порождали бы систему, эквивалентную исходной.

Проблема 2. Рассмотренная математическая модель более или менее приемлема для моделирования систем логического вывода, в которых все термины можно представить как одноместные предикаты или их отрицания. Однако задачи, в которых содержатся термины, соответствующие многоместным предикатам, не всегда достаточно легко могут быть переформулированы на языке SA. Язык PC, особенно при использовании многоместных предикатов и функций, во многом более соответствует естественному языку ($ЕЯ$), чем язык SA, но менее приспособлен для разработки эффективных алгоритмов решения многих задач логического вывода. Проблема заключается в том, чтобы найти промежуточный между $ЕЯ$ и SA язык, с помощью которого преобразование предложений $ЕЯ$ в предложения SA и обратно было бы более формализованным. На первый взгляд, для этой цели мог бы подойти язык алгебры кортежей [38–41], но он предназначен для строго определенных отношений, в то время как в логическом выводе не все исходные термины заданы как четко определенные. Язык AK в его современном состоянии не позволяет полностью формализовать эту неопределенность.

Проблема 3. В настоящее время имеется немало теорий логического вывода, для которых нет четкой классификации. Традиционное деление этих теорий на «классические» и «неклассические» весьма условно и к тому же зависит от времени (в логике к «классическим» иногда относят теоретические результаты, отделенные от текущего момента лишь несколькими десятилетиями). Можно предложить классификацию теорий по признаку интерпретируемости, но это отнюдь не означает, что все «классические» теории попадут в разряд интерпретируемых и наоборот: все «неклассические» — в разряд неинтерпретируемых. Отнюдь не простые исследования в этом направлении как раз и являются сутью данной проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лосев А. Ф.** Миф. Число. Сущность. — М.: Мысль, 1994. — 919 с.
2. **Поспелов Д. А.** Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. — М.: Радио и связь, 1989. — 184 с.
3. **Одоевский В. Ф.** Русские ночи. — Л.: Наука, 1975. — 317 с.
4. **Юрьев А. И.** Введение в политическую психологию. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. — 232 с.
5. **Свасьян К. А.** Философское мировоззрение Гете. — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984. — 183 с.
6. **Пуанкаре А.** О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.
7. **Шенфилд Дж.** Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — 528 с.
8. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
9. **Гетманова А. Д.** Учебник по логике. — М.: «Владос», 1994. — 303 с.
10. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
11. **Математическая** логика и ее применения/Сб. статей под ред. Э. Нагела, П. Саппса, А. Тарского. — М.: Мир, 1965. — 341 с.
12. **Лейбниц Г. В.** Сочинения в 4-х томах. Т.3. — М.: Мысль, 1984. — С. 572–658.
13. **Стяжкин Н. И.** Формирование математической логики. — М.: Наука, 1967. — 508 с.
14. **Кузичев А. С.** Диаграммы Венна. — М.: Наука, 1968. — 252 с.
15. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. — М.—Л.: ОГИЗ, 1937. — 304 с.
16. **Бурбаки Н.** Теория множеств. — М.: Мир, 1963. — 455 с.
17. **Френкель А., Бар-Хиллел И.** Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966. — 555 с.
18. **Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.** Алгебра. Языки. Программирование. — Киев: Наук. думка, 1989. — 376 с.
19. **Курант Р., Роббинс Г.** Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов. — М. — Л.: ОГИЗ, 1947. — 664 с.
20. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
21. **Колмогоров А. Н.** Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974. — 120 с.
22. **Переверзев В. Н.** Логистика: Справочная книга по логике. — М.: Мысль, 1995. — 221 с.
23. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. — 432 с.
24. **Кондаков Н. И.** Логический словарь. — М.: Наука, 1971. — 656 с.
25. **Градштейн И. С.** Прямая и обратная теоремы. — М.: Наука, 1972. — 128 с.
26. **Кэрролл Л.** Логическая игра. — М.: Наука, 1991. — 192 с.
27. **Клини С.** Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.
28. **Закревский А. Д.** К формализации полисиллогистики//Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 300–309.
29. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
30. **Вагин В. Н.** Дедуктивный вывод на знаниях//Искусственный интеллект. В 3-х кн. Кн. 2. Модели и методы: Справочник/Под ред. Д. А. Поспелова. — М.: Радио и связь, 1990. — С. 89–105.
31. **Сухотин А. К.** Парадоксы науки. — М.: Молодая гвардия, 1980. — 240 с.
32. **Паустовский К. Г.** Рассказы. Очерки и публицистика. Статьи и выступления по вопросам литературы и искусства. — М.: Худож. литература, 1972. — 526 с.
33. **Альтшуллер Г. С.** Алгоритм изобретения. — М.: Московский рабочий, 1973. — 296 с.

34. **Альтшуллер Г. С.** Творчество как точная наука. — М.: Сов. радио, 1979. — 175 с.
35. **Кулик Б. А.** Моделирование рассуждений на основе законов алгебры множеств//Труды Пятой национальной конференции по искусственному интеллекту, Казань, 7—11 октября 1996 г. Т. 1, с. 58–61.
36. **Кулик Б. А.** Основные принципы философии здравого смысла (познавательный аспект)// Новости искусственного интеллекта.— 1996. — № 3. С. 7–92.
37. **Кулик Б. А.** Интерпретируемые системы логического вывода//Международная конференция «Смирновские чтения» (тезисы докладов). М.: Институт философии РАН. 1997. С. 54–55.
38. **Кулик Б. А.** Система логического программирования на основе алгебры кортежей//Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1993. — № 3. — С. 226–239.
39. **Кулик Б. А.** Новые классы КНФ с полиномиально распознаваемым свойством выполнимости//Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 2. — С. 111–124.
40. **Кулик Б. А.** Представление логических систем в вероятностном пространстве на основе алгебры кортежей. 1. Основы алгебры кортежей//Автоматика и телемеханика. — 1997 — № 1. — С. 126–136.
41. **Кулик Б. А., Наумов М. В.** Представление логических систем в вероятностном пространстве на основе алгебры кортежей. 2. Измеримые логические системы//Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 2. — С. 169–179.
42. **Лукасевич Я.** Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 311 с.
43. **Калужнин Л. А.** Что такое математическая логика? — М.: Наука, 1964. — 151 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Кулик Борис Александрович

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЗДРАВОГО СМЫСЛА

Редактор *Л. М. Манучарян*
Обложка художника *М. Л. Черненко*
Художественный редактор *М. Л. Черненко*
Технический редактор *Т. М. Жилич*
Корректоры *З. С. Романова, Н. В. Соловьева*

ИБ № 338
ЛР № 010292 от 04.03.93

Сдано в набор 12.02.97. Подписано в печать 07.07.97. Формат издания 16×90 [illegible] Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,75. Усл. кр.-отт. 8,75. Уч.-изд. л. 9,04. Тираж 1000 экз.

Государственное предприятие «Издательство "Политехника"». 191011, Санкт-Петербург, ул. Инженерная, 6.

Отпечатано с оригинала-макета, изготовленного в ГП «Издательство "Политехника"» в ООО «Политехника-сервис», 191011, Санкт-Петербург, Инженерная ул., 6.