● КИБЕРНЕТИКА ●

С. И. ШАПИРО

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ И ИГРОВЫХ ЗАДАЧ

(ЛОГИКО-ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ)

МОСКВА «РАДИО И СВЯЗЬ» 1984

Настоящая серия печатается по рекомендации
IX Международного совещания представителей
научно-технических издательств социалистических стран
(июнь 1975 г.).

ББК 32.816
Ш23
УДК 519.7

Шапиро С. И.

Ш23 Решение логических и игровых задач (логико-психологические этюды). — М.: Радио и связь, 1984. — 152 с., ил. — (Кибернетика).

55 к.

Показана возможность построения алгоритмов решения широкого класса логических задач с использованием алгебры высказываний. Рассмотрены вопросы диагностики, анализа и синтеза релейно-контактных схем, задачи о расписании, задачи о счетчиках, автоматах и др.
Для интересующихся проблемами кибернетики и вычислительной техники.

Ш $\frac{1502000000-058}{046(01)-84}$ 61—84 **ББК 32.816**

6Ф0.1

Рецензенты — д-р техн. наук Д. А. Поспелов,
д-р филос. наук Б. В. Бирюков.

Редакция литературы по кибернетике и вычислительной технике

Шапиро Самуил Иосифович

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ И ИГРОВЫХ ЗАДАЧ
(ЛОГИКО-ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ)

Редактор *Н. Д. Иванушко*
Художественный редактор *Н. С. Шеин*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректор *Л. В. Алексеева*

ИБ № 639

Сдано в набор 28.07.83. Подписано в печать 05.06.84. Т-10296. Формат 60×84[1]/16. Бумага кн.-журн. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,84. Усл. кр.-отт. 9,365. Уч.-изд. л. 10,38. Тираж 15 000 экз. Изд. № 20389 Зак. № 1720 Цена 55 к.

Издательство «Радио и связь», 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46

К ЧИТАТЕЛЮ

Книга С. И. Шапиро по своему жанру не совсем обычна. Это не научная монография и не учебник. Она принадлежит к тем, к сожалению, редко встречающимся книгам, в которых их авторы приглашают читателя увидеть ту или иную область науки как бы «изнутри». И в этом путешествии они служат надежными путеводителями для тех читателей, которые готовы совершить это нелегкое, но увлекательное и поучительное путешествие. Недаром книги подобного типа исчезают с полок книжных магазинов практически мгновенно. Особенно это касается книг-путеводителей в области математики или физики. Для широкого читателя подобные книги — единственная возможность соприкоснуться с современными проблемами и результатами, полученными в последние годы в этих науках, или уловить основные «строительные конструкции» тех огромных научных теорий, которые являются разделами современной математики или физики.

Термин «широкий читатель», который был использован выше, чрезвычайно важен. Ибо книга-путеводитель должна быть рассчитана и на школьника старших классов, выбирающего для себя путь, и на специалиста, работающего в смежной научной области, помнящего, что новые идеи чаще всего возникают на стыке наук и научных областей, и на людей, которые не потеряли еще интереса к познанию новых для себя истин. Именно поэтому так трудно писать книги подобного рода.

Математическая логика и комбинаторика издавна служили поставщиком математических головоломок и задач для популярных и развлекательных книг по математике. Но эти задачи не составляли чего-то единого, не были нанизаны на стержень определенной идеи. Данная книга тем и интересна, что ее автор попытался изложить в доступной форме определенную область математической логики через последовательность примеров и задач, связанных в единое целое. Все задачи в книге это своеобразные логико-психологические этюды. Логическую часть составляют методы решения задач, заимствованные из арсенала математической логики, хотя форма этих методов зачастую носит оригинальный авторский характер. Но наряду с этим в книге большое внимание уделено неформализованным, а иногда и неформальным методам решений, опирающимся на ориентиры, которыми пользуется человек в своей эвристической деятельности. У автора книги эти ориентиры названы логико-психологическими координатами. Мне не слишком нравится это название, но в чем-то оно очень верно отражает суть этих ориентиров. С их помощью в процессе решения задачи нащупывается тот нечеткий рубеж, на котором сходятся содержательное человеческое мышление и рассуждения в рамках формальных систем.

Сказанное весьма важно именно сейчас, в эпоху быстрого развития работ в области систем искусственного интеллекта и активных исследований в когнитивной психологии, пытающейся вскрыть человеческие особенности решения задач. Здесь сейчас находятся горячие точки теории интеллектуальных систем. И книга С. И. Шапиро демонстрирует это положение.

Книга продолжает ту нестандартную линию выявления связей между продуктивным человеческим мышлением и рациональной алгоритмической деятельностью, имитируемой ЭВМ, которая нашла свое отражение в ранее изданных книгах того же автора: «От алгоритмов — к суждениям» (М.: Сов. радио, 1973); «Мышление человека и переработка информации ЭВМ» (М.: Сов. радио, 1980).

Необходимо отметить, что эта книга представляется особенно актуальной в настоящее время в связи с реформой общеобразовательной и профессиональной школы и все возрастающей ролью дисциплин, связанных с вычислительной техникой.

Талантливо написанная книга С. И. Шапиро найдет своего многочисленного благодарного читателя и послужит делу популяризации методов дискретной математики, развитию математического и комбинаторного мышления у учащихся средних и высших учебных заведений. Учителя средней школы и преподаватели математики вузов могут использовать материал книги для внеклассных и внеаудиторных занятий со школьниками и студентами. А кроме того, мне кажется, что чтение подобной книги принесет пользу и всем специалистам, которые по долгу своей службы должны сталкиваться с нестандартными ситуациями и нетиповыми решениями.

Не все, по-видимому, согласятся с манерой изложения автора безоговорочно. Кому-то не понравится подбор задач. Другим — предлагаемые автором способы решения. Но о вкусах не спорят. Нашу научно-популярную литературу, несомненно, можно поздравить с удачей.

Заместитель Председателя Научного Совета по проблеме «Искусственный интеллект» Комитета системного анализа при Президиуме АН СССР, д-р техн. наук проф. Д. А. ПОСПЕЛОВ

Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая сделать его занимательным.

Лаплас

ОТ АВТОРА

Вторая половина XX века знаменуется повышенным спросом на алгоритмы, стимулируемым развитием электронно-вычислительной техники. С другой стороны, алгоритмы играют все большую роль в производственной деятельности людей, во всех сферах жизни.

Считается, что алгоритмы существуют только для решения математических задач. Логические, а тем более игровые задачи не имеют регулярных методов решения, относятся к сфере догадки. Такая установка, в частности, отсекает пути к решению, возможно, наиболее интересных задач на ЭВМ.

Характерная черта века — необходимость, как никогда, умения человека самостоятельно работать с книгой. Здесь предпринята попытка, с применением аппарата математической логики, в доступной для читателя форме показать возможность разработки алгоритмов для решения широких классов логических задач. Мы считаем, что логическое мышление — не чистый дар природы или побочный продукт усвоения знаний, а результат и специально направленного обучения. Опыт показывает, что отстоять этот тезис не просто. Кто-то правильно заметил: изменить расстояние между рядами кукурузы не легче, чем ширину колеи железных дорог.

Книга состоит из двух частей, разбитых на параграфы. Каждый параграф содержит минимум теоретического материала с образцами решения задач и задания (упражнения) для самостоятельного решения. К ним даны указания, комментарии, ответы. Для каждого типа задач приводится алгоритм решения.

Первая часть содержит популярное изложение некоторых вопросов алгебры высказываний и предикатов, как правило, используемых во второй части. Мы не стремились к исчерпывающему охвату материала — это не учебник, задачник или учебное пособие. Изложение рассчитано на массового читателя, не требует специальной подготовки, обращения к литературе. Хотя первая часть в основном «работает» на вторую, она имеет и независимое значение. Задачи должны повысить интерес читателя, дать в популярной форме представление о различных проблемах на стыке логики, математики, кибернетики, психологии. Противников включения в книгу столь «обширного введения» мы адресуем к сказке Л. Толстого: «Напрасно я тратил деньги на калачи, — сказал мужик, — когда после них съел баранку и, наконец, насытился...»

Вторая часть книги посвящена описанию различных подходов к решению классов логических и игровых задач с применением и без применения элементов математической логики. Некоторые алгоритмы разработаны автором впервые (метод характеристических уравнений и др.). В популярной игровой форме рассмотрены задачи о взаимно-однозначном соответствии, имеющие выход к проблемам экономики, управления. В прикладном плане у читателя должны вызвать интерес задачи на сумматоры, автоматы, диагностическая задача и др., алгоритмы игр «Ним», «Бридж-ит», «Гранди» и их обобщения. Задачи на распознавание чисел, понятий, не имеющие единого метода решения, приглашают читателя к доступному эксперименту по выявлению ориентиров, которыми человек руководствуется в своей эвристической деятельности. Задачи-парадоксы знакомят его с трудностями обоснования математики. Большинство задач второй части решаются также «по соображению», часто — в переборе, с расчетом на его величество Случай. Читателю предоставлена возможность, сравнив способы решения, убедиться, как правило, в преимуществах формализованных и полуформализованных методов. Вторая часть книги адресована более широкому читателю — любителю, в том числе и старшекласснику, мечтающему посвятить себя прикладной математике и работе с ЭВМ и желающему с карандашом в руках решать занимательные логические и игровые задачи.

Автору часто приходит на ум замечание английского классика У. М. Теккерея: «Он превосходно лазит на деревья, прыгает, плавает... Он может разобрать на винтики и потом снова собрать ваши часы. Он все может — не может только выучить урок». В обучении, говорил Н. И. Лобачевский, важнее всего — способ преподавания. Мы попытались включить главный двигающий фактор обучения — интерес. Писать популярно — трудно. Автор считал бы свой труд не напрасным, если бы мог сказать подобно крестьянину из книги М. Шагинян «Семья Ульяновых»: «Наша работа — нам легкая, потому что... *земля отвечает*».

I. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ПРЕДИКАТОВ

1. ВЫСКАЗЫВАНИЕ, ПРЕДИКАТ

Пятачок говорил: «Понимаешь, Пух, что я хочу сказать?» А Пух говорил: «Я и сам, Пятачок, так думаю».

А. А. Милн. Винни-Пух

1. Высказывания. Под *высказыванием* в математической логике понимают предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, истинно оно (обозначается условно символом 1) или ложно (символ 0). Каждое высказывание принимает одно, и только одно из двух значений — истинно или ложно. Например, Земля вращается вокруг Солнца (1, истинное высказывание). Курск — столица СССР (0, ложное высказывание).

З а м е ч а н и е. Как видим, высказывания бывают в одном из двух четко различимых «состояний», для которых выбраны обозначения 1, 0. Обозначения в значительной степени продиктованы потребностями вычислительной математики, программирования ЭВМ, где широко используется аппарат математической логики, а представляемая в числовом виде информация записывается в двоичной системе счисления с помощью цифр 1, 0.

Высказывания обозначаются буквами X, Y, Z, A, B и т. д.

Значение высказывания ситуативно. Даже тривиальное $2 \times 2 = 4$ ложно, например, в троичной системе счисления: $2 \cdot 2 = 11_3$. Автор помнит нелепый случай, когда студент на экзамене утверждал, что высказывание «Сегодня холодно» истинно, хотя на дворе стояла июньская жара. Оказывается, материал читался зимой и «в конспекте так написано».

Логические связки служат для образования *сложных* высказываний исходя из более простых. Следующие логические связки будем считать основными.

Дизъюнкция — связка ИЛИ, обозначается $\vee$. *Конъюнкция* — связка И, обозначается $\wedge$. *Отрицание* — связка НЕ, обозначается $\neg$. Например, $\neg X$—читается «не X», «неверно, что X». Другой способ обозначения отрицания — черточка над высказыванием: $\overline{X}$. *Импликация*—связка ЕСЛИ ..., ТО... — обозначается $\Rightarrow$. Например, $X \Rightarrow Y$. Это означает: если X, то Y (см. § 3). *Эквиваленция* — обозначается $\sim$. Например, $X \sim Y$ читается: X эквивалентно Y; X — левая часть эквиваленции, Y — правая ее часть.

Дизъюнкция называется также *логическим сложением*, ее результат — *логической суммой*, члены — *слагаемыми*. Конъюнкция — *логическое умножение*, в соответствии с этим знак $\wedge$ часто заменяют точкой или вовсе опускают.

Условимся считать высказывание *элементарным*, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание. Наша первая задача — научиться находить (вычислять) значения истинности сложных высказываний, исходя из известных значений элементарных высказываний.

В следующей таблице даны определения логических связок (табл. 1). Она называется *таблицей истинности* — выражает значения истинности сложных

Таблица 1

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \vee Y$	$X \wedge Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \sim Y$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

высказываний, образованных с помощью логических связок, в зависимости от значений элементарных высказываний.

Табличное задание функций $\neg X$, $X \vee Y$ и др. с помощью таблицы истинности принципиально не отличается от табличного задания в школьной математике, если учесть, что аргументы X, Y независимо друг от друга принимают значения 1,0. Число возможных упорядоченных пар единиц и нулей — 4, поэтому в таблице 4 строки. Из 6 функций, заданных таблицей, две являются функциями одной переменной ($\neg X$, $\neg Y$), остальные — двух переменных.

Замечания.

1. Не смешивайте понятия «истинность» и «истинно». Истинно (1) — лишь одно из двух значений истинности (1 или 0).

2. Обратите внимание и запомните: если хотя бы одно слагаемое истинно, то дизъюнкция истинна; если хотя бы один сомножитель ложен, то конъюнкция ложна (см. табл. 1).

3. Как видно из таблицы, дизъюнкция имеет характер неразделительного ИЛИ: или X, или Y, или оба. Надо отличать от разделительного или (либо). Например, $x > 5$ либо $x < 3$ — но не вместе.

2. Формула алгебры высказываний.

1. Каждое элементарное высказывание есть формула.
2. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $\neg B$, $A \vee B$, $A \wedge B$ (можно: AB), $A \Rightarrow B$, $A \sim B$ — тоже формулы.
3. Других формул нет.

Формула алгебры высказываний принимает одно из двух значений (0 или 1) в соответствии со значениями образующих ее элементарных высказываний. Если рассматривать последние как независимые переменные, то с формулой в соответствии с вышесказанным сопоставляется некоторая функция. Такая функция называется *двоичной*: ее области определения и значений — $\{0; 1\}$.

3. Порядок действий при вычислениях по формуле (двоичной функции). Отрицание независимых переменных предшествует всем остальным действиям. Конъюнкция (умножение) предшествует дизъюнкции (сложению), которая, в свою очередь, предшествует импликации и эквиваленции. Последние два действия выполняются в порядке следования. При необходимости изменить эту — естественную — последовательность действий часть формулы, также являющаяся формулой (подформула), заключается в скобки, смысл которых такой же, как в арифметике.

Пример. Вычислить значение двоичной функции: $(\neg(X \vee \neg Y) \Rightarrow Z) \wedge \wedge X$ при $X = 1, Y = Z = 0$. 1. $\neg Y = 1$; 2. $X \vee \neg Y = 1$; 3. $\neg(X \vee \neg Y) = = 0$; 4. $\neg(X \vee \neg Y) \Rightarrow Z = 1$; 5. $(\neg (X \vee \neg Y) \Rightarrow Z) \cdot X = 1$.

4. Решение логических уравнений. До сих пор мы, зная значения истинности аргументов, определяли соответствующие значения двоичных функций. Теперь ставится обратная задача: по значениям истинности двоичных функций вычислить значения истинности аргументов. В этом случае решается логическое уравнение или система логических уравнений.

Таблица 2

X	Y	$X\vee\neg Y$	$(\neg X\Rightarrow Y)\wedge X$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Таблица 3

X	Y	$X\Rightarrow\neg Y$	$X\wedge Y$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Пример 1. $\begin{cases} X\vee\neg Y=1, \\ (\neg X\Rightarrow Y)\cdot X=0. \end{cases}$

Составим таблицу истинности для функций, стоящих в левых частях уравнений (табл. 2). Как видим, нашей системе уравнений удовлетворяет только первая строка таблицы. Следовательно, $X=0$, $Y=0$.

Пример 2. $\begin{cases} X\Rightarrow\neg Y=1, \\ X\cdot Y=1 \qquad \text{(табл. 3)}. \end{cases}$

Система, как видно из таблицы, не совместна: ни при одном наборе значений аргументов не удовлетворяются оба уравнения.

5. Предикаты. Выше уже говорилось, что высказывания, по определению, являются логическими формулами. Обратное, однако, неверно. Логические формулы, как и отдельные символы, например X, Y, A, вообще говоря, не являются высказываниями. Бессмысленно, например, утверждать, истинно X или ложно, если не указано, что обозначает X. В связи с этим обобщим понятие высказывания введением понятия *переменного высказывания*, или *предиката*.

Возьмем высказывание «число 4 четно», оно истинно. Заменим в нем «число 4» на x и рассмотрим предложение «x четно». Ясно, что оно не является высказыванием: значение истинности данного утверждения зависит от x. С другой стороны, каждому натуральному x соответствует значение некоторого высказывания. Например, $x=8$ соответствует истинное высказывание «8 — четное число»; при $x=7$ соответствующее высказывание ложно.

Предикатом называется функция, отображающая множество произвольной природы во множество $\{0; 1\}$, или $\{$ложно, истинно$\}$. Обозначается, как и любая функция, например $F(x)$, $F(x, y)$ и т. д. В первом случае, как известно, областью определения функции является некоторое множество значений x; во втором — множество упорядоченных пар $(x; y)\in X\times Y$, т. е. принадлежащих декартовому (прямому) произведению множеств X и Y* — предметных областей переменных X и Y. Предикат одной переменной будем называть *одноместным*, или *свойством*; двух и более переменных — соответственно *двуместным*, *трехместным* и т. д., или *отношением*. В частности, двуместный предикат называется *бинарным*, трехместный — *тернарным отношением*.

З а м е ч а н и е. Здесь использовано и несколько расширено на случай двух переменных известное школьное определение функции-соответствия, отображения, при котором с каждым элементом одного множества соотносится не более одного элемента другого множества. Отличие, и это подчеркнуто в определении

***Декартовым* (внешним) *произведением* n множеств $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ называется множество всех упорядоченных n-к (энок): $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, где $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$, ..., $x_n\in X_n$. Если $X=X_1=X_2=\ldots=X_n$, то говорят об n-й декартовой степени: X^n.

предиката, лишь в том, что в случае предиката отображение производится не обязательно из числового множества (сравни: множество произвольной природы), но в специальное двухэлементное множество $\{0; 1\}$. Предикат, таким образом лишь частный вид нечисловой функции.

Примеры. Одноместный предикат «жидкий» (Ж), заданный на множестве X всех веществ: Ж(x). Речь идет о свойстве вещества быть жидким. Пусть x=вода; Ж $(x) = 1$, что содержательно означает: вода есть жидкое вещество. Напротив, Ж (дерево) $= 0$: дерево не жидкое вещество; Ж (число 5) не принимает ни единичного, ни нулевого значения: утверждение «Число 5 — жидкое вещество», следовательно, не является высказыванием. Причина в том, что $x =$ число 5 не принадлежит области определения предиката Ж (x).

Одноместный предикат «простое число» (П). Задан на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел: П $(2) = 1$, П $(8) = 0$ и т. д. Однако П $(3, 7)$ — не высказывание.

З а м е ч а н и е. Надо различать единицу (нуль) как число и как знак для слова «истинно» («ложно»). Когда мы говорим П $(3) = 1$, то единица означает только то, что высказывание «3 — простое число» истинно.

Двуместный предикат $D\ (x_1; x_2)$ — число x_1 является делителем x_2, задан на $\mathbf{N}^2$. Так, $D\ (2; 6) = 1$: число 2 является делителем числа 6; $D\ (7; 10) = 0$.

Двуместный предикат $P\ (a; \alpha)$ — прямая a перпендикулярна плоскости α; a принадлежит множеству прямых, α — множеству плоскостей. Если a — боковое ребро куба и α — плоскость его основания, то $P\ (a; \alpha) = 1$. Если a — боковое ребро правильной пирамиды и α—плоскость ее основания, то $P\ (a, \alpha) = 0$.

Двуместный предикат «меньше» (М), определенный на декартовом квадрате действительных чисел $\mathbf{R}^2$: М (x, y). Пусть $x = 3$, $y = \pi$; М $(3; \pi) = 1$. Содержательно это означает: $3 < \pi$.

З а м е ч а н и е. Для некоторых бинарных отношений, как видим, в математике существуют специальные обозначения: меньше ($<$), больше ($>$), равно ($=$) и др. Так, $4 > 2$ является специальным обозначением Б $(4, 2) = 1$; $a \parallel b$ — специальным обозначением предиката параллельности, например, для прямых и т. д.

Трехместный предикат (тернарное отношение) «сумма» (С) задан на декартовом кубе множества действительных чисел $\mathbf{R}^3$: С (x, y, z) — означает, что x есть сумма чисел y и z; С $(5; 2;\ 3) = 1 : 5 = 2 + 3$; С $(1/2; 3; -1) = 0$.

З а м е ч а н и е. Трехместный предикат С $(x;\ y;\ z)$ — означает: $x = y + z$ — предикат истинен только для значений x, y, z, удовлетворяющих этому равенству. Следовательно, трехместный предикат, принимающий значение 1 (истинно), является другим способом (неявного) задания x как функции двух независимых переменных y и z, точнее, предикат определяет бинарную алгебраическую операцию сложения.

В заключение этого пункта еще раз подчеркнем: всякий предикат, кроме одноместного, описывает отношение между числами, предметами и т. д. Так, предикат $P\ (x_1; x_2)$ — «человек x_1 является отцом x_2» — выражает некоторое отношение родства между людьми; рассмотренный предикат $C_1\ (x_1; x_2; x_3)$ — отношение между тремя числами и т. д. Впрочем, одноместный предикат можно также рассматривать как отношение объекта с самим собой.

6. Обсуждение примеров. В примерах выявлена определенная связь между каждым предикатом и некоторым множеством высказываний: при замене в предикате переменной ее конкретным значением из предметной области местность предиката уменьшается на 1. Так, М $(x; 5)$ означает $x < 5$ и является уже не двуместным, а одноместным предикатом, выражающим свойство числа быть меньше 5. Обозначим М $(x; 5) = P\ (x)$. Тогда $P\ (1) = 1$, так как $1 < 5$; $P\ (5) = 0$ и т. д.

В соответствии с отмеченной закономерностью одноместный предикат вследствие подстановки значения переменной становится «нуль-местным», или высказыванием. Так, П (4) является предикатной формой высказывания «4 есть простое число», оно ложно; Ж (керосин) — «керосин жидкое вещество», высказывание истинно; М $(3; 5)$ — $3 < 5$, высказывание истинно и т. д.

Каждое высказывание, таким образом, «порождается» некоторым предикатом, каждый предикат является множеством высказываний. Так, истинное высказывание «после пятницы идет суббота» получено подстановкой в двуместный предикат «после дня x идет день y» значений x — пятница, y — суббота, взятых из множества дней недели. Истинное высказывание «диагонали ромба взаимно перпендикулярны» — результат подстановки в одноместный предикат «диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны», заданного на множестве четырехугольников, значения четырехугольник = ромб. Здесь четырехугольник — переменная, имя множества, которому принадлежит ромб.

Замечание. У читателя, вероятно, вызовет интерес обоснование *с позиций математической логики* истинности тривиального высказывания «после пятницы идет суббота», рассматриваемого как значение двуместного предиката «после дня x идет день y».

Пусть x означает «сегодня пятница», y — «завтра суббота». Если $x = 1$ (сегодня действительно пятница), то $y = 1$ (завтра суббота) и $(x \Rightarrow y) = (1 \Rightarrow 1) = 1$ — согласно таблице истинности импликации.

Если же $x = 0$ (сегодня не пятница), то и $y = 0$ (завтра — не суббота), но $x \Rightarrow y$ все же истинно: $(0 \Rightarrow 0) = 1$.

На первый взгляд, такие «тонкости» могут показаться «игрой в символы» — не более. Действительно, зачем доказывать то, что и так очевидно?!

В связи с этим важно проникнуться следующей мыслью. Мы строим математический аппарат, отражающий определенную сферу жизни. Необходимо, чтобы результаты, выведенные формальным путем, на основе определения логических связок, не противоречили реальным связям и отношениям, описываемым математической логикой. Это дает надежду, что полученные с помощью логико-математических вычислений новые знания найдут подтверждение в действительности. В этом главная сила математики как науки выводящей, предсказывающей, открывающей новое.

Теперь понятно, что предложения, не являющиеся высказываниями, могут образоваться подстановкой в некоторый предикат вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких значений, которые не принадлежат соответствующим предметным областям. Так, для нашего первого примера предложение Ж (7), т. е. «число 7 — жидкое тело», — не высказывание: бессмысленно обсуждать, является ли число 7 жидким телом. Аналогично в третьем примере утверждение D (1/2; 7) — также не высказывание: число 1/2 не принадлежит $\mathbf{N}$.

Обратим внимание на то, что двоичные функции алгебры высказываний $x \vee y$, $x \wedge y$, $x \Rightarrow y$, $x \sim y$ также являются двуместными предикатами, заданными на декартовом квадрате множества $\{0; 1\}$. Отрицание x ($\neg x$) — одноместный предикат на множестве $\{0; 1\}$. В последнем случае двоичная функция отображает множество $\{0; 1\}$ во множество $\{0; 1\}$, т. е. в себя.

К предикатам применимы все связки алгебры высказываний, однако здесь требуется известная осторожность; в каждом предикате переменные берутся только из своей предметной области. Например, пусть в сложном предикате, образованном с помощью логических связок из некоторых исходных предикатов $\neg(\text{М}(x; y) \vee \text{Ч}(x) \Rightarrow \Pi(y))$, М (x, y) означает: $x < y$; Ч (x) — x четно; Π (y) — y простое число. В первом случае $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, во втором и третьем $x, y \in \mathbf{N}$. В связи с этим, чтобы предикат не потерял смысла при некоторых значениях переменных, будем брать $x, y \in \mathbf{N}$, тогда они войдут в предметные области всех предикатов.

ЗАДАНИЕ

1. Составьте таблицы истинности следующих формул алгебры высказываний (двоичных функций).

1.1. $x \vee y \Rightarrow yx$.

1.2. $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

1.3. $(x \Rightarrow y \cdot y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

1.4. $(\neg x \vee \neg y) z \Rightarrow (x \sim y)$.

1.5. $(x \neg z \Rightarrow \neg y) \sim x$.

Образец решения. Возьмем, например, 1.5 (табл. 4). Здесь дана двоичная функция трех переменных: x, y, z. Таблица истинности функции содержит 8 строк и 4 столбца (3 для значений аргументов и 1 — для соответствующих значений функции).

Рассмотрим первую строку таблицы: $x = y = z = 0$. Из $y = 0$ следует $\neg y = 1$: таблица истинности отрицания; $x \neg z \Rightarrow \neg y = 1$: если заключение равно 1, то импликация истинна независимо от значения посылки (см. таблицу истинности импликации). Тогда 1.5 принимает значение $(1 \sim 0) = 0$ — таблица истинности эквиваленции. В итоге в первой строке столбца значений функции стоит 0.

Аналогично строится таблица и для других наборов значений переменных.

2. Прочитайте формулы.

2.1. Обозначение высказываний: «сегодня ясно» — c, «сегодня дождь» — r, «сегодня идет снег» — s, «вчера было пасмурно» — y. Прочитайте словесно следующие формулы: $c \Rightarrow \neg(r \vee s)$; $r \vee s \Rightarrow \neg c$; $y \Rightarrow r \vee c$; $(y \Rightarrow c)(c \Rightarrow y)$; $y(c \vee r)$; $(c \Rightarrow r)(r \Rightarrow c)(\neg s \vee y)$.

Образец. $c \Rightarrow \neg(r \vee s)$: если сегодня ясно, то неверно, что сегодня дождь или сегодня идет снег.

Замечание. Читателю важно усвоить следующее. Импликация вовсе не означает причинно-следственной связи, хотя, естественно, не противоречит ей. Это надо понимать так. Если событие x есть причина y, то $x \Rightarrow y$ истинно (при $x = 1$ согласно причинно-следственной связи $y = 1$, и в итоге $(x \Rightarrow y) = 1$). Если же событие x не имело места, т. е. $x = 0$, а y все же состоялось ($y = 1$), не будучи вызвано x, то $(x \Rightarrow y) = 1$ (см. таблицу истинности импликации), хотя x теперь не является причиной y.

С этих позиций надо рассматривать приведенные формулы и не удивляться, если они звучат непривычно, не отражают реальных причинно-следственных связей.

2.2. «Этот четырехугольник — параллелограмм» — x, «этот четырехугольник — ромб» — y. Прочитайте словесно: $\neg x$; $\neg\neg y$; $x \neg y$; $x \Rightarrow y$; $y \Rightarrow x$; $\neg x \Rightarrow \neg y$; $\neg y \Rightarrow \neg x$; $\neg x \vee y$; $\neg(x \neg x)$.

Какие формулы по содержанию истинны независимо от значений истинности x и y?

Какие формулы истинны независимо от содержания высказываний x и y?

2.3. Припишите буквам некоторые математические высказывания так, чтобы формулы оказались истинными: $x \Rightarrow y$; $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x)$; $\neg(\neg x \Rightarrow \neg y)$.

2.4. Ни 7, ни 13 не являются четными числами. С помощью высказываний «число 7 четно» — x, «число 13 нечетно» — y запишите это сложное высказывание.

2.5. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств являются примерами предикатов. Решением уравнения (неравенства, системы) является множество значений переменных, при которых предикат истинен — область истинности предиката.

$x \leqslant y$ определяется: $x < y$ или $x = y$. С помощью предикатов $x < y$, $x = y$ запишите $x \leqslant y$. Найдите его значение истинности при $x = 3$, $y = 5$; $x = 2$, $y = 2$; $x = 8$, $y = 6$.

Определите и запишите аналогично $x \geqslant y$. Найдите истинность для тех же значений переменных.

2.6. Неравенства $y \leqslant x \leqslant z$ читаются: $x \geqslant y$ и $x \leqslant z$. Запишите их с помощью предикатов: $x > y$, $x = y$, $x < z$, $x = z$ и логических связок.

3. Запишите решения одноместных предикатов с помощью логических связок.

3.1. $x + 1 > 0$, $x - 3 < 0$.

3.2. $x - 1 > 0$, $x + 3 < 0$.

3.3. $x^2 - 3x + 2 < 0$.

3.4. $x^2 + 2x - 3 = 0$.

3.5. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

3.6. $x^2 > 4$.

3.7. $x^2 < 9$.

3.8. $(x - 1)/(x + 2) > 0$.

Образцы решения. $x^2 + 9x + 14 > 0$. Ответ: $(x > -2) \vee (x < -7)$. $x^2 + 5x + 6 = 0$. Ответ: $(x = -2) \vee \vee (x = -3)$; $(x + 5)/(x - 3) < 0$. Ответ: $(x > -5) \wedge (x < 3)$.

4. Найдите и изобразите на плоскости решения двуместных предикатов.

4.1. $x - y = 5$.

4.2. $x + y > 4$, $x - y = 2$.

4.3. $(x + y)/(x - y) > 0$.

4.4. $y^2 - x < 0$, $x > 0$.

Образец решения. $x^2 - 2x + y^2 > 0$; $(x - 1)^2 + y^2 > 1$ (рис. 1).

5. Предикат, функция, алгебраическая операция.

5.1. Какова связь между двуместным предикатом $2x - y = 0$ и функцией одной переменной $y = 2x$? Как можно назвать задание функции в виде двуместного предиката?

5.2. Алгебраической n-арной операцией называется соответствие (функция), сопоставляющее каждой упорядоченной n-ке (энке) элементов некоторого множества элемент этого множества. Так, трехместным предикатом С (сумма — см. текст данного параграфа) задается бинарная операция сложения*.

---

* При сложении каждым двум элементам некоторого множества ставится в соответствие элемент этого множества, называемый их *суммой*.

Таблица 4

x	y	z	$(x \rceil z \Rightarrow \rceil y) \sim x$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

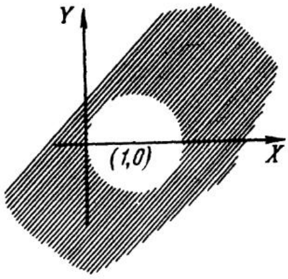

Рис. 1

Убедитесь в том, что всякая n-арная операция одновременно задает $(n+1)$-местный предикат.

6. Укажите местность следующих предикатов. Для каждого найдите один набор значений переменных, для которого соответствующее высказывание истинно, другой — для которого оно ложно.

6.1. Плоскости α и β параллельны.

6.2. Прямая a перпендикулярна данной прямой b.

6.3. Сегодня 23 февраля.

Указание. Рассмотрите множества: дней в месяце и месяцев в году.

6.4. Вчера был вторник.

Указание. Множество дней недели.

Образец решения. Плоскости α и β перпендикулярны. Двуместный предикат задан на множестве пар плоскостей. Если α и β — плоскости основания и боковой грани прямой призмы, то предикат истинен; если правильной пирамиды — ложен.

7. Каждое высказывание получите как значение некоторого предиката.

7.1. $\sqrt[3]{27} = 3$.

7.2. $\log_2 6 = 3$.

7.3. Москва — столица СССР.

7.4. Река Гудзон протекает в Африке.

7.5. Маяковский — великий советский поэт.

Образец решения 7.4. Река x протекает в y, где X — множество названий рек, Y — множество частей света: $x =$ Гудзон, $y =$ Африка. Высказывание ложно.

8. Записи $\{x \in M | P(x)\}$, $\{(x, y) \in M | P(x, y)\}$ читаются: множество всех x [всех (x, y)], для которых истинен предикат — свойство $P(x)$, предикат — отношение $P(x, y)$. Прочитайте словесно следующие записи и назовите, что представляют собой эти множества ($\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ — соответственно множества натуральных, целых, действительных чисел).

8.1. $\{x \in \mathbf{R} | x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

Таблица 5

x	y	0	xy	$x\neg y$	x	$\neg xy$	y	$\neg(x\sim y)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0

$x\vee y$	$\neg(x\vee y)$	$x\sim y$	$\neg y$	$x\vee\neg y$	$\neg x$	$\neg x\vee y$	$\neg x\vee\neg y$	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 6

x	y	$x\vee y\Rightarrow yx$ (1.1)	x	y	$x\vee y\Rightarrow yx$ (1.1)
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1

Таблица 7

x	y	z	1.2	1.3	1.4	x	y	z	1.2	1.3	1.4
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

8.2. $\{x|x$ — точка плоскости, равно отстоящая от сторон данного угла$\}$.

8.3. {параллелограммов| диагонали параллелограммов равны}.

8.4. $\{x \in \mathbf{Z}|x > 0 \wedge x \vdots 5\}$.

8.5. $\{x \in \mathbf{N}\ |x > 2 \wedge x < 3\}$.

9. Укажите множества, которые являются областями истинности данных предикатов, и запишите эти множества перечислением элементов или указанием формулы их построения.

9.1. Множество корней уравнения $x^2 + x - 2 = 0$.

9.2. Множество натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству: $x^2 + x - 2 \leqslant 0$.

9.3. Множество натуральных чисел, кратных трем.

9.4. Множество действительных корней уравнения $x^2 + 4 = 0$.

10. Число строк в таблице истинности и число двоичных функций.

10.1. Сколько строк содержит таблица истинности двоичных функций n переменных?

Указание. Число n-значных чисел в двоичной системе счисления. Можно сослаться и на формулу числа размещений с повторениями из двух по n.

Решите задачу также с помощью метода математической индукции.

10.2. Сколько существует различных двоичных функций n переменных?

Указание. Задача сводится к предыдущей, если в качестве переменных рассматривать строки таблицы истинности.

10.3. Составьте множества всех двоичных функций одной и двух переменных — заданием таблиц истинности. Выразите эти функции с помощью логических связок (для двух переменных см. табл. 5).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ § 1

1.1. См. табл. 6.

1.2, **1.3**, **1.4.** См. табл. 7.

Замечание. Формула 1.2 выражает закон транзитивности для отношения «следования»: если из x следует y и из y следует z, то из x следует z. Как видно из таблицы, этот закон в математической логике, записанный с помощью импликации, остается справедливым.

2.1. $r \vee s \Rightarrow \neg c$: если сегодня идет дождь или снег, то неверно, что сегодня ясно.

$y \Rightarrow r \vee c$: из того, что вчера было пасмурно, следует — сегодня идет дождь или сегодня ясно (см. замечание на с. 12).

$(y \Rightarrow c)\ (c \Rightarrow y)$: если вчера было пасмурно, то сегодня ясно, и (наоборот) если сегодня ясно, то вчера было пасмурно.

$y\ (c \vee r)$: вчера было пасмурно и сегодня ясно или идет дождь.

$(c \Rightarrow r)\ (r \Rightarrow c)\ (\neg s \vee y)$: если сегодня ясно, то идет дождь, и (наоборот) если сегодня идет дождь, то сегодня ясно, и, кроме того, сегодня не идет снег или вчера было пасмурно.

2.2. $\neg x$: этот четырехугольник — не параллелограмм,

$\neg\neg y$: неверно, что этот четырехугольник — не ромб, т. е. этот четырехугольник — ромб.

$x \neg y$: этот четырехугольник — параллелограмм и не ромб.

$x \Rightarrow y$: если четырехугольник — параллелограмм, то он ромб.

$y \Rightarrow x$: если четырехугольник — ромб, то он — параллелограмм. Формула, в отличие от предыдущих, истинна независимо от значений y и x: ромб есть параллелограмм. Можно убедиться в этом и формальным рассуждением, т. е. по правилам математической логики. Пусть $y = 1$ — четырехугольник есть ромб. Тогда, по определению ромба, $x = 1$: четырехугольник — параллелограмм и $(y \Rightarrow x) = (1 \Rightarrow 1) = 1$.

Если же $y = 0$ (четырехугольник — не ромб), то, независимо от значения x, теперь не существенно, будет четырехугольник параллелограммом, т. е. $x = 1$, или нет $(x = 0)$, — оказывается $(x \Rightarrow y) = (0 \Rightarrow y) = 1$.

$\neg x \Rightarrow \neg y$: если четырехугольник не параллелограмм, то он не ромб— истинно независимо от значений x и y: ромб есть параллелограмм.

$\neg y \Rightarrow \neg x$: если четырехугольник (любой)—не ромб, то он—не параллелограмм. Высказывание ложно: прямоугольник — ие ромб, но параллелограмм.

$\neg x \vee x$: четырехугольник (каждый) не является параллелограммом или он есть параллелограмм. Это, естественно, всегда истинно. Легко убедиться в этом и с помощью таблицы истинности формулы: независимо от значения x формула $\neg x \vee x = 1$.

$\neg(x \neg x)$: неверно, что истинны x и $\neg x$, или, лучше, неверно, что x одновременно истинно и ложно. Формула истинна для любого x, какое бы высказывание им ни было обозначено.

2.3. $x \Rightarrow y$: если (данный треугольник прямоугольный — x), то (квадрат его большей стороны равен сумме квадратов двух меньших сторон — y).

Обоснование. Если $x = 1$, т. е. треугольник действительно прямоугольный, то $y = 1$ (по теореме Пифагора) и $(x \Rightarrow y) = (1 \Rightarrow 1) = 1$. Если же $x = 0$, то $(x \Rightarrow y) = (0 \Rightarrow y) = 1$.

$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x)$: если (катет лежит против угла в 30° — x), то (он равен половине гипотенузы — y), и обратное: если (катет равен половине гипотенузы — y), то (он лежит против угла в 30° — x). Каждая импликация: $x \Rightarrow y$, $y \Rightarrow x$ — истинна, следовательно, истинна их конъюнкция.

2.4. $\neg xy$.

2.5. $(x < y) \vee (x = y)$; пусть $x = 3$, $y = 5$: $(3 < 5) \vee (3 = 5)$; первое высказывание истинно, второе — ложно, их дизъюнкция истинна.

При $x = 8$, $y = 6$: $(8 < 6) \vee (8 = 6)$; оба высказывания, а с ними и дизъюкция — ложны.

2.6. $((x > y) \vee (x = y))((x < z) \vee (x = z))$.

3.1. $(x > -1)(x < 3)$.

3.2. Решения нет.

3.3. $(x > 1)(x < 2)$.

3.6. $(x > 2) \vee (x < -2)$.

3.7. $(x > -3) \wedge (x < 3)$.

5.1. Двуместный предикат является неявным заданием функции одной переменной.

6.4. Если высказывание сделано в среду, то оно истинно, в остальные дни оно ложно. Задав день недели, узнаем значение истинности одноместного предиката.

8.1. Множество всех действительных чисел, являющихся корнями уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, т. е. $\{1; 2\}$.

8.2. Биссектриса угла.

8.3. Множество прямоугольников.

8.4. Множество натуральных чисел, кратных 5.

8.5. Пустое множество: $(\varnothing)$.

9.1. $\{-2; 1\}$.

9.2. Одноэлементное множество: $\{1\}$.

9.3. $\{x | x \in \mathbf{N} \wedge x \vdots 3\}$.

9.4. $\varnothing$.

10.1. 2^n.

10.2. 2^{2^n}.

10.3. Двоичные функции одной переменной: $0, 1, x, \neg x$. Двоичные функции двух переменных — в порядке следования столбцов в табл. 5: 0, xy, $x \neg y$, x, $\neg xy$, y, $\neg(x \sim y)$, $x \vee y$, $\neg(x \vee y)$, $x \sim y$, $\neg y$, $x \vee \neg y$, $\neg x$, $\neg x \vee y$, $\neg x \vee \neg y$, 1.

2. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Человек в другом кафтане кажется им другим человеком.

Н. В. Гоголь. Мертвые души

1. Две формулы алгебры высказываний A и B называются *равносильными*, если их таблицы истинности совпадают (соответствующие двоичные функции равны). Записывается $A \Longleftrightarrow B$.

Пример. $x \Rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y$. Таблицы истинности (табл. 8). Как видим, таблицы истинности обеих частей равносильности совпадают.

Таблица 8

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x \vee y$	x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x \vee y$
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1

ЗАДАНИЕ

1. Докажите равносильности (первая серия). Запомните равносильности.

1.1. $x \vee y \Longleftrightarrow y \vee x$. Переместительный закон дизъюнкции — логического сложения.

1.2. $xy \Longleftrightarrow yx$. Переместительный закон конъюнкции — логического умножения.

Внимание! При отсутствии в записи логической связки между переменными по договоренности подразумевается конъюнкция.

1.3. $(x \vee y) \vee z \Leftrightarrow x \vee (y \vee z)$. Сочетательный закон дизъюнкции.

1.4. $(xy)z \Leftrightarrow x\,(yz)$. Сочетательный закон конъюнкции.

1.5. $(x \vee y)z \Leftrightarrow xz \vee yz$. Распределительный закон конъюнкции относительно дизъюнкции — первый распределительный закон.

1.6. $xy \vee z \Leftrightarrow (x \vee z)\,(y \vee z)$. Распределительный закон дизъюнкции — второй распределительный закон.

1.7. $\neg\neg x \Leftrightarrow x$. Закон двойного отрицания. $\neg\neg x$ надо понимать: $\neg(\neg x)$.

1.8. $\neg\,(x \vee y) \Leftrightarrow \neg\,x \cdot \neg y$. 1-я равносильность де Моргана.

1.9. $\neg\,(xy) \Leftrightarrow \neg\,x \vee \neg\,y$. 2-я равносильность де Моргана.

Словесно: отрицание суммы (произведения) равносильно произведению (сумме) отрицаний.

С помощью равносильностей де Моргана отрицания дизъюнкции (конъюнкции) приводятся к отрицаниям отдельных переменных.

1.10. $x \vee x \Leftrightarrow x$;
1.11. $xx \Leftrightarrow x$. } Словесно: повторения логических слагаемых (сомножителей) можно исключить из суммы (произведения).

1.12. $x \vee 0 \Leftrightarrow x$;
1.13. $x \cdot 1 \Leftrightarrow x$. } Словесно: нулевое слагаемое (единичный сомножитель) из суммы (произведения) исключается.

Пояснение. 0 и 1 — логические константы: ложное, истинное высказывание.

Замечания к равносильностям серии 1. Равносильности серии симметричны относительно дизъюнкции и конъюнкции: если в них заменить дизъюнкции конъюнкциями, нуль — единицей и наоборот, то «нечетные» равносильности (1.1, 1.3 и т. д.) станут «четными», а «четные» — «нечетными». Исключение составляет равносильность 1.7, не содержащая связок дизъюнкции и конъюнкции (она как бы переходит сама в себя).

Обратите внимание на то, что равносильности 1.1—1.5, 1.12, 1.13 остаются справедливыми, если рассматривать их как арифметические равенства: дизъюнкция — сложение, конъюнкция — умножение. Однако в арифметике несправедлив второй распределительный закон!

2. Докажите равносильности (вторая серия).

2.1. $x \Rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y$. Равносильность позволяет исключить импликацию: выразить ее через дизъюнкцию и отрицание.

2.2. $x \sim y \Leftrightarrow (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)(\neg y \vee x)$. Равносильность, исключающая эквиваленцию.

2.3. $x \vee \neg x \Leftrightarrow 1$. Закон исключенного третьего. Его смысл: или x верно, или верно отрицание x — третья возможность исключена.

2.4. $x \cdot \neg x \Leftrightarrow 0$. Закон противоречия: x и «не x» одновременно не истинны.

Важно! Для выполнения равносильных преобразований в последующих упражнениях рекомендуем запомнить равносильности первых двух серий.

3. Докажите равносильности (третья серия).

3.1. $x(x \vee y) \Leftrightarrow x$;
3.2. $x \vee x \cdot y \Leftrightarrow x$. } Законы поглощения

С помощью 3.1 и 3.2 упростите решения неравенств: $x > 3$ или ($x > 3$ и $x < 5$); $x > 3$ и ($x > 3$ или $x < 5$). (Ответ: $x > 3$.)

3.3. $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \Leftrightarrow xy \Rightarrow z$. Закон объединения посылок.

3.4. $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \Leftrightarrow y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$. Закон перестановки посылок.

3.5. $x \vee y \Leftrightarrow \neg(\neg x \cdot \neg y)$. Закон исключения дизъюнкции.

3.6. $xy \Leftrightarrow \neg(\neg x \vee \neg y)$. Закон исключения конъюнкции.

3.7. $\neg(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow x \cdot \neg y$. Закон отрицания импликации.

3.8. $\neg x \sim \neg y \Leftrightarrow x \sim y$. Закон исключения отрицаний в эквиваленции.

3.9. $\neg x \sim y \Leftrightarrow x \sim \neg y$. Закон переноса отрицания в эквиваленции.

Таблица 9

x	y	$x \dot{\vee} y$	$x \mid y$	$x \uparrow y$	x	y	$x \dot{\vee} y$	$x \mid y$	$x \uparrow y$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0

3.10. $\neg x \Rightarrow \neg y \Leftrightarrow y \Rightarrow x$. Закон исключения отрицаний в импликации.

Дополнительные законы поглощения.

3.11. $x \vee \neg xy \Leftrightarrow x \vee y$.

3.12. $\neg x \vee x \cdot y \Leftrightarrow \neg x \vee y \Leftrightarrow x \Rightarrow y$.

3.13. $x(\neg x \vee y) \Leftrightarrow x \cdot y$.

3.14. $\neg x(x \vee y) \Leftrightarrow \neg x \cdot y$.

3.15. $(x \vee \neg x)y \Leftrightarrow y$.

3.16. $xz \vee \neg xy \vee yz \Leftrightarrow xz \vee \neg xy$.

Замечание. Из равносильностей 2.1, 2.2, 3.5, 3.6 следует, что с помощью равносильных преобразований можно выразить все основные логические связки через связки двух типов: конъюнкции и отрицания или дизъюнкции и отрицания — см. упражнение 10.

Указание к упражнениям серии 3. Равносильности этой серии следует доказывать как составлением таблиц истинности, так и с помощью равносильностей предыдущих серий.

Образец решения. **3.1.** $x(x \vee y) \Leftrightarrow xx \vee xy \Leftrightarrow x \vee xy \Leftrightarrow \Leftrightarrow x(1 \vee y) \Leftrightarrow x \cdot 1 \Leftrightarrow x$.

3.5. $\neg(\neg x \cdot \neg y) \Leftrightarrow \neg\neg x \vee \neg\neg y \Leftrightarrow x \vee y$.

4. Введем с помощью таблиц истинности три дополнительные логические связки: ЛИБО (разделительное ИЛИ), обозначим: $x \dot{\vee} y$; штрих Шеффера (НЕ И), обозначим $x|y$; стрелку Пирса (НЕ ИЛИ), обозначение: $x \uparrow y$ (табл. 9).

Проверьте равносильности четвертой серии.

4.1. $x \dot{\vee} y \Leftrightarrow \neg(x \sim y)$.

4.2. $x \mid y \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y \Leftrightarrow \neg(xy)$.

4.3. $x \uparrow y \Leftrightarrow \neg x \cdot \neg y \Leftrightarrow \neg(x \vee y)$.

Убедитесь в справедливости следующих законов разделительной дизъюнкции (ЛИБО).

4.4. $x \dot{\vee} y \Leftrightarrow \neg xy \vee x \neg y$.

4.5. $x \dot{\vee} y \Leftrightarrow y \dot{\vee} x$.

4.6. $(x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z \Leftrightarrow x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z)$.

4.7. $(x \dot{\vee} y)z \Leftrightarrow xz \dot{\vee} yz$.

4.8. $\neg x \dot{\vee} \neg y \Leftrightarrow x \dot{\vee} y$.

4.9. $x \dot{\bigvee} x \Leftrightarrow 0$.

4.10. $x \dot{\bigvee} 0 \Leftrightarrow x$.

4.11. $x \dot{\bigvee} 1 \Leftrightarrow \neg x$.

Дайте названия законам для ЛИБО.

5. Упростить формулы, используя равносильные преобразования.

5.1. $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (z \Rightarrow x)$.

Образец решения. $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (z \Rightarrow x) \Leftrightarrow \neg((\neg x \bigvee y)(\neg y \bigvee z)) \bigvee \neg z \bigvee x \Leftrightarrow (x \neg y \bigvee x) \bigvee (y \neg z \bigvee \neg z) \Leftrightarrow x(\neg y \bigvee 1) \bigvee \bigvee \neg z(y \bigvee 1) \Leftrightarrow x \bigvee \neg z \Leftrightarrow z \Rightarrow x$.

5.2. $(\neg x \sim \neg y)(x \dot{\bigvee} y)$.

5.3. $(y \Rightarrow x) y \bigvee \neg(\neg x \cdot \neg y)$.

5.4. $\neg x \bigvee xz \bigvee \neg xy \bigvee xy$.

6. Докажите равносильности двумя способами: составлением таблиц истинности обеих частей равносильности и равносильным преобразованием одной или обеих частей.

Образец решения: $xy \neg z \bigvee xy \bigvee \neg xy \Leftrightarrow y$.
$(xy \neg z \bigvee xy) \bigvee \neg xy \Leftrightarrow xy(\neg z \bigvee 1) \bigvee \neg xy \Leftrightarrow xy \bigvee \neg xy \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \cdot 1 \Leftrightarrow y$.

6.1. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow y \Leftrightarrow x \bigvee y$ (но $x \Rightarrow (y \Rightarrow y) \not\Leftrightarrow x \bigvee y$).

6.2. $\neg(\neg x \Rightarrow \neg y) \sim x \Leftrightarrow (x \sim y) \neg x$.

6.3. $\neg(\neg x \bigvee \neg y) \bigvee \neg(x \Rightarrow y) \bigvee y \Leftrightarrow \neg(x \cdot \neg y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow x)$.

6.4. $\neg(\neg x \bigvee \neg y) \bigvee \neg(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \bigvee y) x$.

6.5. $\neg(x \neg y \bigvee \neg z) \Leftrightarrow \cdot z(\neg y \Rightarrow \neg x)$.

6.6. $(x \Rightarrow y) z \Leftrightarrow \neg xyz \bigvee \neg x \neg yz \bigvee yz$.

6.7. $x \Rightarrow y \Leftrightarrow x \neg y \Rightarrow \neg x \Leftrightarrow x \neg y \Rightarrow y \Leftrightarrow x \neg y \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1 \Rightarrow \neg x \bigvee y$.

6.8. $\neg(x \neg y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow x) \Leftrightarrow \neg(x \Rightarrow y) \bigvee x \bigvee y$.

6.9. $(y \Rightarrow x \bigvee z) \cdot \neg(x \bigvee y) \bigvee (x \Rightarrow z) \Rightarrow xy \neg z \Leftrightarrow x \neg z$.

Внимание! Не забудьте о порядке действий в логической формуле.

6.10. $(\neg(\neg x \Rightarrow \neg y) \Rightarrow x)(x \Rightarrow \neg(\neg x \Rightarrow \neg y)) \Leftrightarrow (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) \neg x$.

7. Докажите, что следующие формулы не равносильны.

7.1. $\neg(x(\neg y \Rightarrow \neg z) \bigvee z \cdot \neg x) \not\Leftrightarrow \neg x \neg y \neg z \bigvee \neg xy \neg z \bigvee xy \neg z$.

Указание. Достаточно найти хотя бы один набор значений переменных, сообщающий формулам различные значения истинности. (Здесь $x=y=0$, $z=1$).

7.2. $x \Rightarrow y \Leftarrow\!/\!\Rightarrow \neg x \Rightarrow \neg y$.

7.3. $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \Leftarrow\!/\!\Rightarrow (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$. Неассоциативность импликации.

7.4. $x \Rightarrow y \Leftarrow\!/\!\Rightarrow y \Rightarrow x$. Некоммутативность импликации.

8. В геометрии доказывается теорема о трех перпендикулярах: прямая a, проведенная на плоскости перпендикулярно к проекции наклонной, перпендикулярна к наклонной (обозначения: a проведена на плоскости — x, a перпендикулярна к проекции наклонной — y, a перпендикулярна к наклонной — z). Надо ли специально доказывать в геометрии следующие теоремы:

8.1. Прямая, проведенная на плоскости не перпендикулярно к наклонной, не перпендикулярна к ее проекции?

8.2. Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно к наклонной, перпендикулярна к ее проекции?

Указание. Проверьте: 8.1 равносильна исходной теореме, 8.2 — нет.

8.3. Если треугольник прямоугольный и угол в нем равен 30°, то катет, лежащий против угла, равен половине гипотенузы. Постройте теоремы по аналогии с задачей 8.1, 8.2 и ответьте на те же вопросы.

9. Докажите теоремы.

9.1. Теорема о фиктивных переменных. Если две логические формулы равносильны и одна из них содержит переменные, которых нет в другой, то формула от этих переменных не зависит (такие переменные назовем *фиктивными*).

Указание. Дав произвольные значения всем переменным, переменить затем значения фиктивных переменных, сохранив остальные значения. Что произойдет?

9.2. Если две формулы равносильны, то их отрицания также равносильны.

9.3. Если в двух равносильных формулах все вхождения какой-либо переменной заменить их отрицаниями (более того — любой формулой), то полученные формулы равносильны.

9.4. Пользуясь теоремами 9.2 и 9.3, доказать, что из допущения справедливости равносильностей задания 1 серии 1 : 1, 3, 5, 7—9, 11, 13 выводятся равносильности, стоящие в этом задании на четных местах: 2, 4, 6, 10, 12; и наоборот, из 2, 4, 6—9, 10, 12 выводятся 1, 3, 5, 11, 13.

Образец доказательства. Докажем 1.1 исходя из 1.2 и из 7—9. За исходное берем 1.2: $xy \Leftrightarrow yx$. Заменим в этой равносильности вхождения x и y соответственно на $\neg x$ и $\neg y$. Согласно 9.3 равносильность сохраняется: $\neg x \neg y \Leftrightarrow \neg y \neg x$. Возьмем отрицания обеих частей полученной равносильности — равносильность сохраняется: 9.2. $\neg(\neg x \neg y) \Leftrightarrow \neg(\neg y \neg x)$. Обе части равносильности преобразуем с помощью второй равносильности де Моргана (1.9): $\neg\neg x \vee \neg\neg y \Leftrightarrow \neg\neg y \vee \neg\neg x$.

Применив закон двойного отрицания, приводим к требуемому виду: $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$.

10. Преобразовать равносильно формулы так, чтобы они содержали только указанные связки.

10.1. $(x \Rightarrow \neg y) \Rightarrow (y \vee z)$; связки: конъюнкция и отрицание.

10.2. $(x \vee y)(\neg x \vee \neg y) \Rightarrow (x \sim y)(\neg x \sim \neg y)$; связки: дизъюнкция, отрицание.

10.3. $(x \dot{\vee} y) \vee x$; связки: импликация, отрицание.

Указания. $x \dot{\vee} y \Leftrightarrow \neg (x \sim y)$,

$$xy \Leftrightarrow \neg(\neg x \vee \neg y) \Leftrightarrow \neg(x \Rightarrow \neg y).$$

10.4. $\neg x$; связка: штрих Шеффера.

Указание. $X \mid Y \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЮ § 2

5.2. 0.
5.3. $x \vee y$.
5.4. $\neg x \vee y \vee z$.
8.1. Нет.
8.2. Да.
10.1. $\neg(\neg(xy) \neg y \neg z)$.
10.2. $\neg(x \vee y) \vee (\neg x \vee \neg y)$.
10.3. $\neg((x \Rightarrow y) \Rightarrow \neg(y \Rightarrow x)) \Rightarrow x$.
10.4. $x \mid x$.

3. ИМПЛИКАЦИЯ

Это, конечно, Сова. Или я не Винни-Пух. А я — он...

А. А. Милн. Винни-Пух

$A \Rightarrow B$ (другие обозначения: $\rightarrow$, $\supset$); A — посылка, антецедент, B — заключение, консеквент. Читается: если A, то B; из A следует B; A имплицирует B; A достаточно для B; B необходимо для A; A только тогда, когда B; B тогда, когда A. Во всех случаях A и B — высказывания.

Замечания. 1. Когда читают: $A \Rightarrow B$, то имеют в виду, что импликация истинна, т. е. $A \Rightarrow B = 1$. Напротив, высказывание «из A не следует B» означает: $A \Rightarrow B = 0$.

Очень важно! Вне математической логики в связь $A \Rightarrow B$ вкладывают более узкий смысл: если $A = 1$, то $B = 1$. В логике же рассматривается также случай $A = 0$ (см. табл. 1). И это оправдано. Например, предикат «если сегодня пятница, то завтра суббота» истинен даже в том случае, если «сегодня» не «пятница».

2. Обратите внимание: выражения «B необходимо для A» и «B тогда, когда A» — синонимы. Это же относится к выражениям «A достаточно для B» и «A только тогда, когда B». Соответственно «необходимо и достаточно» можно прочитать: «тогда, и только тогда (тт)».

Это случилось на экзамене: «Бывает наоборот...» — «Лучше?» — «Нет, тоже хуже, только иначе».

Шел вступительный конкурсный экзамен по математике устно. Абитуриент, мельком взглянув в билет, сказал: «Это неравенство мне знакомо с детства, можно, я без обдумывания?». Он вышел к доске и написал цепочку неравенств: $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$; $a, b \geqslant 0$. $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$.

Экзаменатор: «И это все?». Абитуриент: «Да, конечно, получилось очевидное неравенство — значит, исходное верно». Экзаменатор: «А если неверно?». Абитуриент: «Как неверно?! Получилось же очевидное!.. Квадрат не может быть отрицательным!?».

За первым столом сидел юноша, обдумывавший свои вопросы. «Вот доказательство», — сказал он и показал написанные на листке преобразования: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$; $a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0$; $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$. Экзаменатор: «Как вы догадались начать с неравенства $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$?». 2-й абитуриент: «Я просто записал неравенства товарища с конца». 1-й абитуриент: «Открыл Америку! Это я и сам знаю — анализ и доказательство... Но зачем лишнее: и так все ясно — результат же очевидный!».

«Я скажу!», — вмешался в непроизвольную беседу 3-й абитуриент. Он предложил следующее рассуждение: «Пусть требуемое ложно, т. е. $(a+b)/2 < \sqrt{ab}$. Тогда $a+b < 2\sqrt{ab}$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 < 0$. Но это невозможно. Допущение $(a+b)/2 < \sqrt{ab}$ неверно. Справедливо, следовательно, $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$.

«Это известный метод от противного, — сказал 1-й. — Можно еще иначе. Возьмем заведомо ложное неравенство $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 < 0$, из него выводится $(a+b)/2 < \sqrt{ab}$. Но исходное утверждение ложно, следовательно, ложен и результат — $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$ истинно».

Предоставляем читателю разобраться в том, какие из четырех ответов правильные. Заметим только, что обоснования извлекаются из таблицы истинности импликации.

Импликация — доказательство. Импликацию, точнее, цепочку последовательных импликаций: $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$ — можно истолковать как вывод (доказательство) B из A_1. Истинность импликаций является логико-математическим обоснованием последовательных умозаключений в доказательствах теорем. Если речь идет о теореме, то в импликации $A \Rightarrow B$: A — условие — то, что дано; B — заключение, требуется доказать; $A \Rightarrow B$ — само доказательство: *связь, логический переход* от A к B.

Внимание! Необходимо различать импликацию и заключение импликации, т. е. *процесс* вывода и его *результат*. Их отождествление чревато логическими ошибками в математических рассуждениях. Рассмотрим с этой точки зрения доказательства, предложенные абитуриентами. Во всех четырех случаях математические преобразования безупречны — импликация истинна.

1-й абитуриент. В его первом «доказательстве» из истинности заключения делается вывод об истинности посылки, во втором — из ложности посылки — о ложности заключения. В обоих случаях нет согласия со строкой 2 таблицы истинности импликации (табл. 1) — рассуждения содержат логические изъяны.

2-й и 3-й абитуриенты рассуждают в соответствии с таблицей истинности, т. е. логически грамотно: если посылка истинна, то истинно и заключение; если заключение ложно, то и посылка ложна — все это, разумеется, при истинной импликации.

Примеры.

1. Теоремы Пифагора. Если (треугольник прямоугольный), то (квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон). Обозначив высказывания, заключенные в скобки, соответственно A и B, запишем: $A \Rightarrow B$, точнее, $A \Rightarrow B = 1$. Теорема верна, импликация истинна, независимо от того, будет данный конкретный треугольник прямоугольный или нет. Напротив, заключение B истинно, если истинно A, т. е. треугольник прямоугольный.

Таблица 10

Значения истинности исходных высказываний A	B	Прямая теорема $A \Rightarrow B$	Обратная теорема $B \Rightarrow A$	Противоположная теорема: $\neg A \Rightarrow \neg B$	Теорема, обратная противоположной $\neg B \Rightarrow \neg A$	Значения истинности исходных высказываний A	B	Прямая теорема $A \Rightarrow B$	Обратная теорема $B \Rightarrow A$	Противоположная теорема: $\neg A \Rightarrow \neg B$	Теорема, обратная противоположной $\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

2. Если $(x < y)$ и $(y < z)$, то $(x < z)$. $A = (x < y) \wedge (y < z)$; $B = (x < z)$; $A \Rightarrow B = 1$. Импликация как логический переход истинна независимо от конкретных значений действительных чисел x, y, z. Истинность же заключения B требует определенных условий, имеет место не для всех x, y, z.

Рассмотрим несколько случаев.

а) $x = 2$, $y = 5$, $z = 12$. $x < y$, $y < z$, следовательно, $A = 1$, т. е. A истинно. С другой стороны, $x < z$ $(2 < 12)$ — $B = 1$. При истинной посылке и истинной импликации заключение истинно.

б) $x = 2$, $y = 1$, $z = 5$; $(x < y) = 0$, т. е. x не меньше y; $(y < z) = 1$: y действительно меньше z; $(x < z) = 1$: $2 < 5$. Итак, $A = 0$, $B = 1$: в истинной импликации $A \Rightarrow B$ посылка ложна, заключение истинно. Этот случай для нас особенно важен: он показывает, что в истинной импликации, т. е. при правильных преобразованиях и при истинном полученном результате-заключении, может оказаться, что посылка — исходное высказывание ложна.

в) $x = 2$, $y = 1$, $z = 1,2$. $(x < y) = 0$, $(y < z) = 1$, $(x < z) = 0$. $A = 0$, $B = 0$ — в истинной импликации посылка и заключение ложны.

Мы видим, что формально определенная своей таблицей истинности импликация согласована с реальным пониманием соотношения логического следования в математической практике.

Необходимо и достаточно. Пусть теорема имеет вид «A необходимо для B». В такой фомулировке не каждый сумеет сразу узнать условие и заключение теоремы. Этому поможет запись теоремы в виде импликации: $B \Rightarrow A$. Теперь ясно: дано высказывание B, требуется доказать A. «A достаточно для B»: $A \Rightarrow B$, дано A, требуется доказать B.

Замечание. Если теорема имеет вид «A необходимо и достаточно для B», то необходимость и достаточность рассматриваются порознь.

Прямая, обратная и противоположная теоремы. Доказательства методом от противного.

Прямая теорема: $A \Rightarrow B$. Обратная теорема: $B \Rightarrow A$. Противоположная (прямой теореме): $\neg A \Rightarrow \neg B$. Теорема, противоположная обратной: $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Таблица истинности теорем (табл. 10). Таблица позволяет высказать следующие утверждения.

1) Прямая и обратная теоремы не равносильны (их таблицы истинности не совпадают).

2) Теоремы, обратная и противоположная данной, равносильны: $B \Rightarrow A \Longleftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$. Понятие противоположной теоремы, следовательно, избыточно.

3) Теорема, обратная противоположной, равносильна данной, прямой: $\neg B \Rightarrow \neg A \Leftrightarrow A \Rightarrow B$.

Равносильность 3) называется *правилом контрпозиции* и лежит в основе доказательств методом от противного: из отрицания B (не B) выводится отрицание A (не A). Этим доказана теорема: $A \Rightarrow B$.

Суть доказательства методом от противного состоит в том, что вместо данной теоремы доказывается обратная к ее противоположной теореме.

ЗАДАНИЕ

1. По образцу примера 2 текста проанализируйте теоремы.

1.1. Если (x четно) и (y четно), то ($x + y$ четно). Приведите числовые примеры на все три случая: а), б), в) (см. текст).

1.2. Если (x кратно 5) и (x кратно 3), то (x кратно 15). Объясните, почему здесь невозможен случай б).

Указание: рассмотрите обратное утверждение — верно ли оно? Верно ли обратное утверждение в примере 1? Сделайте выводы.

1.3. Если про четырехугольник известно, что (он вписанный) или (он является параллелограммом) и (у этого параллелограмма равны диагонали), то (сумма противолежащих углов четырехугольника равна $2d$). Истинно ли здесь обратное утверждение? Придумайте и проанализируйте еще одно высказывание, удовлетворяющее полученной формуле.

2. Что можно сказать про истинность импликации, если:

2.1. Посылка равна 1?

2.2. Заключение равно 1?

2.3. Посылка равна 0?

2.4. Заключение равно 0?

2.5. Посылка — 1, заключение — 0?

Замечание. Ответы на вопросы 2 и 3 можно сформулировать так: «Истинное следует из чего угодно, из ложного следует что угодно». Как это понимать?

2.6. Если $8 < 5$, то попугаи говорят на Алголе.

Замечание. Напомним, что надо различать значения истинности заключения и самой импликации.

2.7. Если $5 < 8$, то попугаи говорят на Алголе.

2.8. Софист: «То, чего ты не потерял, ты имеешь. Рогов ты не потерял, значит, у тебя есть рога». В чем причина ошибочного заключения?

3. $A \Rightarrow B = 1$.

3.1. $A = 1$. Что известно про B?

3.2. $B = 1$. Что известно про A?

3.3. $A = 0$. Что известно про B?

3.4. $B = 0$. Что известно про A?

4. В каких рассуждениях допущены ошибки.

4.1. Учащийся привел следующее доказательство тождества $(1 + \cos\alpha)/\sin\alpha = \sin\alpha/(1 - \cos\alpha)$ $(\alpha \neq \pi n)$: $[(1 + \cos\alpha)/\sin\alpha = \sin\alpha/(1 - \cos\alpha)] \Rightarrow [(1 + \cos\alpha)\ (1 - \cos\alpha) = \sin^2\alpha] \Rightarrow$ $\Rightarrow (\sin^2\alpha = \sin^2\alpha)$. Получилось очевидное тождество, требуемое доказано.

4.2. Проверить неравенство: $x^3 + y^3 < x^2y + xy^2$ $(x, y > 0)$.

Решение. $(x^3 + y^3 < x^2y + xy^2) \Rightarrow (x^2(x - y) - y^2(x - y) <$ $< 0) \Rightarrow ((x - y)^2(x + y) < 0)$. Полученный результат ложный. Значит, исходное неравенство также неверно.

4.3. «Странно как-то получается, — обратился к учителю один учащийся, — из $a < 3$ следует $a < 5$ — для любого a. Пусть $a = 4$, тогда: из $4 < 3$ следует $4 < 5$?» Рассуждение как будто правильное, и ответ правильный ($4 < 5$), а оказывается, он выведен из неверного условия ($4 < 3$)?

4.4. Доказать неравенство: $(a + b)(1/a + 1/b) \geqslant 4$ $(a, b > 0)$.

Доказательство. $((a + b)(1/a + 1/b) \geqslant 4) \Rightarrow ((a + b)^2/ab - 4 \geqslant 0) \Rightarrow ((a - b)^2/ab \geqslant 0)$, что очевидно. Неравенство доказано.

4.5. В треугольнике с площадью 1 сторона a не больше стороны b. Доказать: $b \geqslant \sqrt{2}$.

Доказательство. Пусть $b < \sqrt{2}$, тогда $a < \sqrt{2}$ и $s_\Delta = (1/2)ab \sin C < \sin C \leqslant 1$, что противоречит условию. Значит, $b \geqslant \sqrt{2}$.

4.6. В письменной работе по математике учитель нашел два объяснения к решению неравенства $2^x > 4$, $2^x > 2^2$, $x > 2$.

1-е объяснение. 2^x — монотонно возрастающая (показательная) функция. Тогда, по определению, из $2^x > 2^2$ следует $x > 2$.

2-е объяснение. Если $x > 2$ неверно, то $x \leqslant 2$ и по свойству показательной функции $2^x \leqslant 2^2$, что противоречит условию.

4.7. Докажем «теорему»: четырехугольник, имеющий параллельные стороны, есть параллелограмм.

Доказательство. Допустим противное, т. е. четырехугольник — не параллелограмм, тогда у него нет параллельных сторон, а это противоречит условию. Допущение неверно.

4.8. Вернувшись из дальних странствий, поэт воскликнул: «Дома всегда хорошо! Мне хорошо, значит, я дома». Является ли в действительности второе высказывание логическим следствием первого? Будет ли высказывание «Мне нехорошо, значит, я не дома» следствием первого высказывания? Равносильно ли оно ему?

4.9. Известно, что комплексные числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты мнимых частей. Поэтому из $(x - y) + (x + y)i = 2 - 3i$ следует: $\{x - y = 2$ и $x + y = -3\}$. Так ли это?

4.10. Заметив, что в треугольнике стороны равны 3, 4, 5, учащийся со ссылкой на теорему Пифагора заключил, что треугольник прямоугольный. Будет ли треугольник действительно прямоугольным? Правомерно ли рассуждение учащегося?

4.11. Какие из следующих высказываний являются логическими следствиями истинного высказывания: «если животное — собака, то оно — млекопитающееся»; а) Шарик — млекопитающееся, значит, он собака; б) Трезор — собака, значит, млекопитающееся; в) лиса — не собака, следовательно, не млекопитающееся; г) курица — не млекопитающееся, поэтому — не собака.

4.12. Учащийся предложил следующее решение системы двух уравнений с одним неизвестным: $\{x^2 - 3x + 2 = 0,\ x^2 - 7x + 12 = 0\}$ (1).

Вычитаем: $4x - 10 = 0$ (2); $x = 2{,}5$. Но этот «корень» не удовлетворяет ни одному из данных уравнений. Объясните, как такое могло случиться.

Указание. Равенство (2), истинное при $x = 2{,}5$, является логическим следствием уравнений системы (1). Если каждое равенство (1) при некотором значении x истинно, то при этом значении истинно и (2) — корни системы (1) должны быть среди корней (2). Но там их не оказалось. О чем это говорит?

4.13. Чья логика правильная? Илюше 4 года.

— Бабушка, что ты делаешь?

— Крашу волосы, хочу быть молодой, всегда жить.

Через несколько дней бабушка с внуком встречают на улице похоронную процессию: Это дядю хоронят, он умер.

Илюша: Он не красил волосы...

Указание. Докажите, что высказывание Илюши противоположно обратному высказыванию бабушки и, следовательно, поверив бабушке, внук в точности следует правилам математической логики. Другое дело — истинность высказывания бабушки!

5. Найдите значения истинности следующих сложных высказываний.

5.1. Если (Петр — сын Алексея), то (они родственники).

Замечание. Убедитесь, что импликация истинна независимо от того, является данный человек Петр сыном данного человека Алексея или нет.

5.2. Если (сегодня понедельник), то (завтра вторник).

Замечание. Высказывание истинно, даже если в действительности сегодня не понедельник.

5.3. Если $3 = -3$, то $3^2 = (-3)^2$.

5.4. Если $3 = -3$, то $3^2 = 5^2$.

5.5. Если $\sin 90° = 0{,}4$, то $2 \cdot 2 = 4$.

5.6. Если $\sin 90° = 1$, то $2 \cdot 2 = 4$.

5.7. Из $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ следует: число 12 простое.

5.8. Из $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ следует: биссектриса угла делит его пополам.

5.9. Если число 5 четно, то 8 кратно 4.

5.10. Если 8 кратно 4, то число 5 четно.

6. Вставьте пропущенные связки в истинные высказывания.

Внимание! Будьте осторожны при выборе между «или» и «либо».

6.1. Если $xy = 0$, то $x = 0 \ldots y = 0$.

6.2. Если $x^2 - 5x + 6 > 0$, то $x > 3 \ldots x < 2$.

6.3. Если $x^2 - 5x + 6 < 0$, то $x > 2 \ldots x < 3$.

6.4. Если $x/y < 0$, то $x > 0 \ldots y < 0 \ldots x < 0 \ldots y > 0$.

6.5. Если $x^2 + y^2 = 0$ $(x, y \in \mathbf{R})$, то $x = 0 \ldots y = 0$.

6.6. Если $\sin x \cdot \cos x = 1$, то $\sin x = 1 \ldots \cos x = 1$.

6.7. Если $\sin x \cdot \cos x = 0$, то $\sin x = 0 \ldots \cos x = 0$.

6.8. Если $x + y \neq 0$, то $x \neq 0 \ldots y \neq 0$.

6.9. Если в треугольнике два угла по 45°, то он равнобедренный... прямоугольный.

6.10. Если четырехугольник — ромб ... прямоугольник ... прямоугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями, то он квадрат.

6.11. Если $x > 0$ ...$x < \pi/2$ ...$x > \pi$ ...$x < (3/2)\pi$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

6.12. Если $|x| > 3$, то $x > 3$ ...$x < -3$.

6.13. Если $|x| < 3$, то $x < 3$ ...$x > -3$.

6.14. Если неверно, что число кратно 2 и 3, то это число не кратно 2... не кратно 3.

6.15. Если сегодня вторник, то вчера был понедельник...завтра среда.

7. Вставьте слова «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно», «не необходимо и не достаточно», чтобы полученные высказывания были истинны. Переформулируйте высказывания, пользуясь словами «тогда», «только тогда».

7.1. Для того чтобы выполнялось $\sin \alpha = 1/2$, ...$\alpha = 150°$.

7.2. Для $x^2 + y^2 = 0$ $(x, y \in \mathbf{R})$ ...$x = 0$, $y = 0$.

7.3. Для $x^2 - y^2 = 0$ ...$x = 0$, $y = 0$.

7.4. Для делимости числа на 12 ..., чтобы оно делилось на 3.

7.5. Для существования логарифма числа ..., чтобы оно было положительно.

7.6. $x^2 = y^2$ ...для $x = y$.

7.7. $x = y$ ...для $x^2 = y^2$.

7.8. $x > y$ ...для $|x| > |y|$.

7.9. $x > 0$, $y > 0$ ...для $\lg (xy) = \lg x + \lg y$.

7.10. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ ...для $x > 0$, $y > 0$.

7.11. $x < 2$ ...для $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$.

7.12. $x \leqslant 2$ ...для $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$.

7.13. Чтобы точка лежала на биссектрисе угла, ..., чтобы она была равно удалена от сторон угла.

7.14. Чтобы точка была равно удалена от сторон угла, ..., чтобы она лежала на его биссектрисе.

7.15. Чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, ..., чтобы она была перпендикулярна какой-либо прямой на плоскости и... чтобы она была перпендикулярна к двум пересекающимся прямым на плоскости.

8. «Тогда», «только тогда».

8.1. Студент только тогда переводится на следующий курс, когда он успевает по всем дисциплинам. Перефразируйте высказывание, используя слово «необходимо».

8.2. Сумма чисел делится на 3: а) только тогда, когда каждое слагаемое делится на 3; б) тогда, когда каждое слагаемое делится на 3; в) тогда и только тогда, когда каждое слагаемое делится на 3. Какое из трех высказываний истинно? Перефразируйте высказывания, используя слова «необходимо», «достаточно».

8.3. Постройте формулы: а) x тогда, когда y, но не только тогда, когда z; б) x только тогда, когда y, но y не только тогда, когда x.

9. Сформулируйте высказывания с помощью слов «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно».

9.1. Если точка z лежит на отрезке между точками x и y, то $|xy| = |xz| + |yz|$.

Образец решения. Если (точка z лежит на отрезке между точками x и y — высказывание A), то ($|xy| = |xz| + |yz|$ — B). $A \Rightarrow B$. Но верно и обратное: $B \Rightarrow A$ — A достаточно для B и A необходимо для B. Для того чтобы точка z лежала на отрезке между точками x и y, необходимо и достаточно равенство: $|xy| = |xz| + |yz|$. Если это теорема, то при доказательстве необходимости: дано B, требуется доказать A; при доказательстве достаточности — наоборот.

9.2. Если треугольник прямоугольный, то квадрат одной его стороны равен сумме квадратов двух других сторон.

9.3. Гете: «Видишь только то, что знаешь». Введите слово «необходимо».

9.4. Если четырехугольник — ромб, то диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

9.5. Если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю. Обратное неверно.

9.6. Если функция дифференцируема в точке, то она в ней непрерывна. Обратное неверно.

9.7. Учащийся, решая уравнение $2x = 0$, ошибочно записал: $2 = 0$ и $x = 0$. Сформулируйте, используя слово «необходимо», «правило», которым он руководствовался. Как в действительности читается правило, на основании которого решается уравнение?

9.8. В квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ дано: $p, q > 0$. Достаточно ли этого для заключения, что $x_1, x_2 < 0$? Необходимо ли оно для этого заключения?

9.9. Учащийся провел «исследование» квадратного уравнения $x^2 + 3x + 7 = 0$. ($x_1x_2 = 7$; $x_1 + x_2 = -3$. Оба корня отрицательны.) В чем причина ошибки?

9.10. Докажите, что отрицание формулы «x необходимо и достаточно для y» равносильно формуле: «x необходимо и достаточно для отрицания y».

Указание. $\neg (x \sim y) \Longleftrightarrow x \sim \neg y$.

10. Для данных теорем сформулируйте обратные (противоположные) теоремы и определите, истинны ли они.

10.1. В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

10.2. В многогранном выпуклом угле сумма плоских углов при вершине меньше $4d$.

Указание к 1, 2. Подумайте, можно ли построить трехгранный угол из плоских углов: 120°, 130°, 140°? Из углов: 100°, 40°, 50°?

10.3. В теории чисел известна следующая теорема Ферма. Если (натуральное число имеет вид $4m+1$) и (это число простое), то (оно единственным образом представимо суммой двух квадратов с взаимно простыми основаниями). Обозначив высказывания в порядке следования A, B, C, запишем теорему логической формулой: $A \wedge B \Rightarrow C$. Эйлеру удалось доказать обратную теорему: $A \wedge C \Rightarrow B$. Сформулируйте теорему Эйлера.

10.4. Запишите теорему о трех перпендикулярах в виде: $A \wedge B \Rightarrow C$. Сформулируйте теорему: $A \wedge C \Rightarrow B$. Справедлива ли она?

10.5. Верна ли теорема, противоположная теореме о катете, лежащем против угла в $30°$?

10.6. В популярной песне поется: «В хоккей играют только смелые ребята, трус не играет в хоккей». Докажите, что второе высказывание следует из первого, а значит, в песне можно ограничиться лишь одной фразой.

Следует ли из песни, что человек, не играющий в хоккей, — трус?

10.7. «Это, конечно, Сова. Или я не Винни-Пух. А я — он...» (А. А. Милн. Винни-Пух). Рассмотрите высказывание: «если это не Сова, то я не Винни-Пух». Покажите, что рассуждение Винни-Пуха логически грамотно.

10.8. На собрании студентов, зачисленных в институт, староста первой группы сказал: «Все студенты нашей группы сдали экзамены на 4 и 5». — «Значит, ты утверждаешь, что ни один сдавший экзамен на 3, не попал в вашу группу?» — спросил староста второй группы. «Я этого не говорил», — сказал коллега. Кто из двух старост прав? Какой закон логики здесь используется?

10.9. В одном учебнике дано следующее определение конъюнкции. (Конъюнкция истинна — x) лишь тогда, когда (истинны оба высказывания — y) и (ложна в противном случае). Обозначив высказывания, заключенные в скобки, соответственно x, y, можно записать $(x \Rightarrow y) \wedge (\neg y \Rightarrow \neg x)$. Убедитесь, что второе утверждение равносильно первому, не добавляет новой информации. Можно, следовательно, ограничиться одним из них. Определение конъюнкции — неполное. Как нужно сформулировать второе утверждение, чтобы получить определение конъюнкции?

11. В тех случаях, когда это можно сделать, заполните пробелы так, чтобы каждый раз получилось следствие из первого высказывания.

11.1. Домашние птицы приносят пользу. Куры приносят пользу, значит... Курица домашняя птица, значит...

11.2. Первоклассники умеют правильно считать. Коля не первоклассник, значит... Сеня умеет правильно считать, значит... Вася первоклассник, значит...

11.3. Сосна не тонет в воде. Брусок утонул в воде, значит... Дерево не утонуло в воде, значит...

11.4. Нечетные числа не кратны 2. Число 30 кратно 2, значит,...

11.5. Каждую новую мысль начинают с красной строки. В тексте нет красных строк, значит... В тексте нет новых мыслей, значит...

12. Какие высказывания следуют из данного:

12.1. Селедка — рыба. Акула — не селедка, значит, не рыба. Собака — не рыба, значит, не селедка. Щука — рыба, значит, селедка.

12.2. Гете: «Не везде, где есть вода, есть лягушки; но если где-нибудь водятся лягушки, там, наверное, найдете воду».

12.3. Если студент учится на инженера, то он изучает математику. Постройте утверждения: обратное, противоположное, обратное противоположному. Что о них можно сказать?

12.4. Врач: «При склерозе у человека резко падает память. Больной жалуется на ухудшение памяти — у него склероз». Обоснованно ли поставлен диагноз?

12.5. Воскресенье не рабочий день. Сегодня не рабочий день, значит, сегодня воскресенье.

12.6. Во всех рабовледельческих государствах были рабы. Киевская Русь не была рабовладельческим государством, следовательно, там не было рабов.

12.7. Подлежащее подчеркивается одной чертой, сказуемое — двумя. На этом основании ученик дал такое «определение»: подлежащим называется слово, подчеркнутое одной чертой, сказуемое — двумя. Какая допущена логическая ошибка?

12.8. Пословица гласит: «В здоровом теле — здоровый дух». Известно, что железная воля Николая Островского остается образцом, на котором воспитываются мужеству многие поколения молодежи. С другой стороны, у автора книги «Как закалялась сталь» было надорванное здоровье, «слабое тело». Противоречит ли это пословице?

12.9. Золото блестит. Приведите известную пословицу, утверждающую, что обратное неверно.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ § 3

2.1. Ничего определенного: если заключение также равно 1, то импликация истинна; если оно равно 0, импликация ложна — см. таблицу истинности импликации.

2.2. Импликация истинна.

2.3. Импликация истинна.

2.4. Ничего определенного.

2.5. Импликация ложна.

2.6. Импликация истинна, так как ложна посылка.

2.7. Импликация ложна: посылка истинна, заключение ложно.

2.8. Исходная импликация ложна: «То, чего не потерял, ты имеешь». Ее посылка истинна: «Рогов ты не потерял». Заключение, следовательно, ложно — у тебя нет рогов.

3.1. $B = 1$.

3.2. Ничего определенного.

3.3. Ничего определенного.

3.4. $A = 0$.

4. Ошибочные рассуждения:

4.1: при истинном заключении импликация истинна независимо от посылки — требуемое тождество не доказано; **4.4** — по той же причине; **4.6** (первое объяснение): исходная опорная импликация относится к свойству монотонности прямой функции, т. е. показательной, вывод же делается на основе свойства монотонности обратной, т. е. логарифмической функции; **4.7**: если четырехугольник не параллелограмм, то у него все же могут быть параллельные стороны; **4.8**: второе высказывание не следует из первого — оно является обратным ему утверждением, тогда как высказывание «Мне нехорошо, значит, я не дома» равносильно первому; **4.9**: ссылка на прямую теорему, а фактическое применение обратной; **4.10** — по той же причине.

Правильные рассуждения:

4.2: при истинной импликации заключение ложно, ложна, следовательно, и посылка — в этом суть доказательства методом от противного; **4.3**: удивляться нечему — импликация и заключение истинны, это не противоречит тому, что посылка ложна; **4.5**: доказательство методом от противного; **4.6** (второе объяснение), **5.3**, **5.4**, **5.5**, **5.9**: импликации истинны вследствие ложности посылок; **5.6**, **5.8**: импликации истинны вследствие истинности заключений; **5.7**, **5.10**: импликации ложны, так как посылки истинны, заключения ложны.

6.1, **6.8**, **6.14**. «Или»; **6.2**, **6.7**, **6.12**. «Либо»; **6.3**, **6.5**, **6.6**, **6.9**, **6.13**, **6.15**. «И»; **6.10**. «И» затем «Или»; **6.11**. «И», «Или», «И».

7.4, **7.6**. Необходимо, но недостаточно; **7.1**, **7.3**, **7.7**, **7.11**. Достаточно, но не необходимо; **7.2**, **7.5**, **7.9**, **7.12**, **7.13**, **7.14**. Необходимо и достаточно; **7.8**. Не необходимо и не достаточно; **7.15**. Необходимо, затем — достаточно.

8.1. Для перевода студента на следующий курс необходимо, чтобы он успевал по всем дисциплинам.

8.2. Истинно б). Перефразируем его: для того чтобы сумма делилась на 3, достаточно (но не необходимо), чтобы каждое слагаемое делилось на 3; для делимости каждого слагаемого на 3 необходимо (но недостаточно), чтобы их сумма делилась на 3.

8.3. а) $(y \Rightarrow x) \wedge \neg (x \Rightarrow z)$; б) $(x \Rightarrow y) \wedge \neg (y \Rightarrow x)$.

9.4. Взаимная перпендикулярность диагоналей четырехугольника необходима (но не достаточна) для того, чтобы он был ромбом. Если четырехугольник — ромб, то этого достаточно (но не необходимо) для взаимной перпендикулярности его диагоналей.

9.5. Стремление общего члена ряда к нулю необходимо для сходимости ряда, но недостаточно.

9.6. Дифференцируемость функции в точке достаточна для ее непрерывности, но не необходима. Напротив, непрерывность функции необходима для ее дифференцируемости, но не достаточна.

З а м е ч а н и е. В задачах 9.5, 9.6 для правильного построения ответа не обязательно владеть понятиями сходимости ряда, непрерывности и дифференцируемости функции.

9.7. Учащийся руководствовался ошибочным правилом: чтобы произведение равнялось нулю, необходимо обращение в нуль каждого сомножителя. Правильно будет: необходимо и достаточно обратить в нуль хотя бы один сомножитель.

10.3. Если натуральное число имеет вид $4m + 1$ и оно единственным образом представимо суммой двух квадратов с взаимно простыми основаниями, то это число простое.

10.4. Обе теоремы справедливы.

10.5. Верна.

10.6. «Если человек играет в хоккей, то он смелый». Отсюда логически следует: «трус не играет в хоккей» — обратно и противоположно первому. Но утверждение, противоположное исходному, — «человек, не играющий в хоккей, трус», не следует из него.

10.7. «Если это не Сова, то я не Винни-Пух». «Я — Винни-Пух». В истинной импликации заключение ложно, ложна, следовательно, и посылка, т. е. «это, конечно, Сова».

11.2. Если ребенок первоклассник, то он считает правильно. «Коля не первоклассник», «Сеня умеет правильно считать». В первом случае посылка ложна (если вместо «ребенок» подставить «Коля»), во втором заключение истинно. Соответственно про заключение в первом и посылку во втором случае ничего определенного сказать нельзя.

З а м е ч а н и е. Исходное высказывание относится к каждому ребенку, значит, и к Коле, и к Сене — здесь применяется «выхваченный из жизни» один из законов логики предикатов.

12.8. Не противоречит. В пословице не утверждается, что верно и обратное. «Здоровый дух» (т. е. сильная воля), следовательно, возможен и в «слабом теле».

12.9. Не все, что блестит, золото.

4. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ФОРМУЛЫ. ЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Глазник — пациенту: «Вы не представляете интереса для медиков: у Вас нормальное зрение».

Б. Шоу

1. Формула алгебры высказываний задана в дизъюнктивно-конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной форме — ДНФ, если она представлена в виде дизъюнкции конъюнкций элементарных высказываний (т. е. переменных) и их отрицаний.

Формула задана в конъюнктивно-дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме — КНФ, если она представлена в виде конъюнкции дизъюнкций переменных и их отрицаний.

Примеры. ДНФ: $\neg xy \vee \neg z \vee xy \neg z$; КНФ: $(x \vee \neg z)(y \vee z) \cdot (\neg x \vee y \vee \neg z)$.

На основе равносильных преобразований любая формула приводится к ДНФ и КНФ с помощью следующего алгоритма.

1) избавляются от связок импликации и эквиваленции: $x \Rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y$; $x \sim y \Leftrightarrow (\neg x \vee y)(x \vee \neg y)$;

2) приводят отрицания к независимым переменным: $\neg (x \vee y) \Leftrightarrow \neg x \cdot \neg y$; $\neg (xy) \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y$;

3) раскрывают скобки — по первому распределительному закону для приведения к ДНФ; или, напротив, преобразуют суммы в произведения — по второму распределительному закону для приведения к КНФ: $(x \vee y) z \Leftrightarrow xz \vee yz$; $xy \vee z \Leftrightarrow (x \vee z)(y \vee z)$;

4) при наличии двойных отрицаний каждый раз от них избавляются.

Пример. $A = (z \Rightarrow t)(x \vee z) \vee \neg (x(y \vee z)) \cdot t$.

Выполнение указания 1) $A \Leftrightarrow (\neg z \vee t)(x \vee z) \vee \neg (x(y \vee z)) \cdot t \Leftrightarrow$ (указание 2) $(\neg z \vee t)(x \vee z) \vee (\neg x \vee \neg y \cdot \neg z) \cdot t$.

Далее приводим к ДНФ (указание 3): $\Leftrightarrow A \; x \neg z \vee xt \vee z \cdot \neg z \vee zt \vee \vee \neg x \cdot t \vee \neg y \cdot \neg z \cdot t$. Другую ДНФ данной формулы получим, заметив, что $z \cdot \neg z \Leftrightarrow 0$ (закон противоречия): $A \Leftrightarrow x \neg z \vee xt \vee zt \vee \neg xt \vee \neg y \neg zt$. Произведем равносильные преобразования, сохраняющие форму: $A \Leftrightarrow x \neg z \vee \vee zt \vee \neg y \neg z \cdot t \vee t(x \vee \neg x) \Leftrightarrow x \neg z \vee zt \vee \neg y \neg zt \vee$. Наиболее простая ДНФ получится: $A \Leftrightarrow x \neg z \vee t(z \vee \neg y \neg z \vee 1) \Leftrightarrow x \neg z \vee t$.

К последнему виду удобно применить второй распределительный закон для приведения к КНФ: $A \Leftrightarrow (x \vee t)(\neg z \vee t)$.

Ясно, что одна формула алгебры высказываний имеет множество различных ДНФ и КНФ. Отсюда, между прочим, следует, что у двух, верно решивших один и тот же пример, ответы могут не совпасть.

Таблица 11

x	y	A	B	C	x	y	A	B	C
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1

2. Формула алгебры высказываний называется *тождественно истинной* (тождественно ложной), если соответствующая двоичная функция равна 1 (0) при любых значениях независимых переменных.

Формула называется *выполнимой*, если она не тождественно ложна.

Примеры. Формула $A = xy \vee \neg x \cdot \neg y \vee \neg x \cdot y \vee x \cdot \neg y$ тождественно истинна; $B = xy\ (x \dot{\vee} y)$ — тождественно ложна; $C = x \Rightarrow y$ выполнима, но не тождественно истинна. Чтобы в этом убедиться, достаточно составить таблицы истинности данных функций (табл. 11). Как видим, A при всех наборах (кортежах) имеет значение И (1), B — Л (0), C при одних кортежах значений независимых переменных принимает значение И, при других — Л.

Законы исключенного третьего ($x \vee \neg x = 1$) и противоречия ($x \cdot \neg x = 0$) также являются примерами тождественно истинной и тождественно ложной формул. Этот факт будем обозначать: $x \vee \neg x \equiv 1$; $x \cdot \neg x \equiv 0$.

3. Формула A алгебры высказываний называется логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (посылок), если импликация $A_1 \cdot A_2 \ldots A_n \Rightarrow A$ тождественно истинная формула.

Условимся о записи:

$$\frac{A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n}{\therefore A} \text{— из } A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \text{ следует } A.$$

Алгоритм проверки, является ли данная формула логическим следствием формул A_1, A_2, ..., A_n:

1) Образуется конъюнкция посылок: $A_1 \cdot A_2 \ldots A_n$.

2) Составляется импликация $A_1 A_2 \ldots A_n \Rightarrow A$.

3) Полученная импликация исследуется на тождественную истинность. Если она тождественно истинна, то A является следствием формул A_1, A_2, ..., A_n; в противном случае — не является следствием.

Пример. Если два числа равны, то, как известно, их модули равны. Данные числа не равны. Можно ли из этого заключить, что модули не равны?

Замечание. Под *заключением* понимается логическое следствие из посылок. Сила метода заключается в том, что знания из области математики здесь не нужны. Обозначим высказывания: «два числа равны» — x, «модули этих чисел равны» — y. Тогда высказывание «два числа не равны» запишется: $\neg x$, высказывание «модули чисел не равны» — $\neg y$. Вопрос, следовательно, сводится к проверке, является ли $\neg y$ логическим следствием посылок: $x \Rightarrow y$ и $\neg x$: : $\dfrac{x \Rightarrow y,\ \neg x}{\therefore \neg y}$. Согласно алгоритму проверяем на тождественную истинность импликацию: $(x \Rightarrow y) \cdot \neg x \Rightarrow \neg y$. Составив ее таблицу истинности, убеждаемся в том, что формула не тождественно истинна. Следовательно, утверждение «модули чисел не равны» неверно.

Замечание. Существуют менее громоздкие аналитические способы проверки формулы на тождественную истинность — см. упражнение 2.1 к данному параграфу. При выполнении самостоятельных заданий старайтесь пользоваться теоремой, сформулированной в этом упражнении.

ЗАДАНИЕ

1. Приведите к нормальным формам.

1.1. $(\neg(x \Rightarrow \neg y) \sim z) \cdot x \vee \neg(yz)$.

1.2. $\neg((\neg x \sim y) \vee \neg z)$.

1.3. $x \vee \neg y \sim z$.

1.4. $x \vee \neg y \Rightarrow x \cdot \neg y$.

2. Докажите и запомните теоремы. Пользуйтесь ими для распознавания тождественных формул.

2.1. Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинна, необходимо и достаточно, чтобы в ее КНФ каждый сомножитель содержал слагаемыми хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

Указание. Достаточность очевидна: в каждом слагаемом КНФ содержится пара типа $x \vee \neg x$, т. е. единица, — закон исключенного третьего. Этого достаточно для обращения формулы в единицу независимо от значений переменных.

Необходимость доказывается методом от противного. Если существует слагаемое, не удовлетворяющее условию, то его можно обратить в нуль соответствующим подбором значений переменных. Для этого переменным, входящим в это слагаемое без отрицания, дадим значения 0, с отрицанием — 1. При этих значениях слагаемое, а следовательно, и КНФ обращаются в 0 — противоречие.

Замечания.

1) Если в рассматриваемом слагаемом какая-либо переменная содержится с отрицанием и без отрицания, то приведенное рассуждение неприемлемо. Объясните, почему.

2) Надо различать сомножитель и переменную: переменная в КНФ не имеет отрицаний. Сомножитель же может не иметь отрицаний — тогда он совпадает с соответствующей переменной, но может и войти с отрицанием.

2.2. Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно ложна, необходимо и достаточно, чтобы в ее ДНФ каждое слагаемое содержало сомножителями хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

Указание. Доказательство аналогично 2.1, только теперь рассматриваемое слагаемое надо обратить в единицу.

3. Отрицания тождественных формул.

3.1. Если формула A тождественно истинна, то будет ли формула $\neg A$ тождественно ложна?

3.2. Если через x обозначено высказывание «формула A тождественно истинна», то будет ли высказывание $\neg x$ означать «формула A тождественно ложна»?

4. Докажите тождественную истинность формул — аксиом Рассела—Уайтхеда исчисления высказываний. Для доказательства, наряду с таблицами истинности, используйте теорему, сформулированную в задаче 2.1.

4.1. $x \vee x \Rightarrow x$.

4.2. $x \Rightarrow x \vee y$.

4.3. $x \vee y \Rightarrow y \vee x$.

4.4. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee x \Rightarrow z \vee y)$.

5. Докажите тождественную истинность формул — аксиом Фреге исчисления высказываний.

5.1. $x \Rightarrow (\neg x \Rightarrow y)$.

5.2. $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$.

5.3. $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (y \Rightarrow (x \Rightarrow z))$.

5.4. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$.

5.5. $x \Rightarrow \neg\neg x$.

5.6. $\neg\neg x \Rightarrow x$.

6. Исследуйте формулы на тождественность, выполнимость (используйте теоремы 2.1 и 2.2).

6.1. $xy \vee \neg x \sim \neg x \vee y$.

6.2. $(\neg x \Rightarrow y) \neg x \neg y$.

6.3. $\neg (xy) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$.

6.4. $(x \Rightarrow \neg y) y \Rightarrow \neg x$.

6.5. $x \dot{\vee} y \sim x | y$.

6.6. $\neg (\neg x \cdot \neg y \Rightarrow \neg x)$.

7. Проверьте правильность умозаключений (логических следствий).

7.1. $\dfrac{x \Rightarrow y,\ x}{\therefore y}$ — условно-категорический силлогизм modus ponens.

7.2. $\dfrac{x \Rightarrow y,\ \neg y}{\therefore \neg x}$ — условно-категорический силлогизм modus tollens.

7.3. $\dfrac{x \Rightarrow y,\ y \Rightarrow z}{\therefore x \Rightarrow z}$ — гипотетический силлогизм (выражающий транзитивность импликации).

7.4. $\dfrac{x \dot{\vee} y,\ x}{\therefore \neg y}$

7.5. $\dfrac{x \dot{\vee} y,\ y}{\therefore \neg x}$

— разделительные силлогизмы.

8. Если Борис не пришел на собрание, то отсутствует и Алексей. Если Борис пришел на собрание, то присутствуют Алексей и Валерик.

8.1. Обязательно ли присутствует на собрании Алексей, если Валерик присутствует?

8.2. Присутствует ли на собрании Валерик, если Алексей присутствует.

Указание. $А, Б, В = \begin{cases} 1, \text{ если Алексей, Борис, Валерик присутствуют} \\ \quad \text{на собрании,} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$

Тогда посылка выглядит так: $(\neg Б \Rightarrow \neg А) \cdot (Б \Rightarrow АВ)$. Формализуйте аналогично заключения в ваших задачах и проверьте, являются ли они логическими следствиями посылки.

Решив задачу с применением аппарата алгебры высказываний, постарайтесь решить ее содержательно, на основании анализа связей, и убедитесь, что ответы совпадают.

9. Задача Шрёдера*. Химик выдвинул следующее утверждение: «Соли, которые не окрашены, суть соли, которые не являются органическими телами, или суть органические тела, которые не окрашены». Другой химик с этим не согласился. Кто прав?

Убедитесь в том, что задачу можно решить, совершенно не зная химии, только с помощью средств алгебры высказываний.

Указание. На множестве тел X рассмотрим предикаты $С(x)$, $О(x)$, $ОР(x)$, содержание которых соответственно: x — соль, x — окрашено, x — органическое тело. Тогда высказывание первого химика опишется формулой: для каждого x

$$С(x) \cdot \neg О(x) \Rightarrow С(x) \cdot \neg ОР(x) \vee ОР(x) \cdot \neg О(x).$$

Остается проверить на тождественную истинность формулу $С \cdot \neg О \Rightarrow С \cdot \neg ОР \vee ОР \cdot \neg О$. Докажите, что она тождественно истинна, и, следовательно, первый химик прав.

Теоретическим обоснованием рассуждения является понятие логического следствия $\dfrac{С, \neg О}{\therefore С \cdot \neg ОР \vee ОР \cdot \neg О}$.

10. Формула B называется *логическим следствием* формулы A, если импликация $A \Rightarrow B$ тождественно истинна — это частный случай общего понятия логического следствия для одночленной посылки.

Отсюда следует, что формулы A и B являются следствиями друг друга, если их эквиваленция тождественно истинна.

10.1. Какие формулы являются следствиями других формул? (То, что каждая формула является следствием самой себя, очевидно.)

xy (1); $x \Rightarrow \neg y$ (2); $\neg(xy)$ (3); $x \Rightarrow y$ (4); $\neg(x \Rightarrow y)$ (5).

10.2. Докажите теорему. Если в импликации посылка тождественно ложна или заключение тождественно истинно, то импликация тождественно истинна. Или иначе: из тождественно ложной следует какая угодно формула. Тождественно истинная формула следует из какой угодно формулы.

10.3. Расположите формулы так, чтобы из каждой следовали все стоящие после нее:

---

* Э. Шрёдер — известный немецкий логик и математик.

$x \vee y$ (1); $\neg(x \Rightarrow (y \Rightarrow x))$ (2); $\neg(\neg x \cdot \neg y)$ (3); $\neg x \sim y$ (4); $\neg x \cdot y$ (5).

Указание. Для облегчения решения задачи воспользуйтесь теоремой 10.2.

11. Связь между понятиями «равносильность» и «тождественная истинность» формул.

11.1. Докажите теорему. Для того чтобы две формулы были равносильны, необходимо и достаточно, чтобы их эквиваленция была тождественно истинна.

11.2. С помощью теоремы 11.1 докажите следующие равносильности:

$$\neg x \Rightarrow \neg y \Leftrightarrow y \Rightarrow x; \ \neg(xy \vee \neg z) \Leftrightarrow z \cdot (\neg y \vee \neg x); \ (x \Rightarrow y)\, z \Leftrightarrow \neg xyz \vee \neg x \neg yz \vee yz; \ xy \Rightarrow z \Leftrightarrow x \Rightarrow (y \Rightarrow z).$$

Образец решения. $\neg x \Rightarrow \neg y \Leftrightarrow y \Rightarrow x$. Докажем тождественную истинность эквиваленции:

$$(\neg x \Rightarrow \neg y) \sim (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (x \vee \neg y) \sim (\neg y \vee x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\neg(x \vee \neg y) \vee (x \vee \neg y))\,(\neg(x \vee \neg y) \vee (x \vee \neg y)) \equiv 1.$$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ § 4

1.1. $x \vee \neg y \vee \neg z$ — это одновременно ДНФ и КНФ.

Замечание. Мы знаем, что логические формулы имеют множество различных ДНФ и КНФ, поэтому, вообще говоря, наши ответы могут отличаться от тех, тоже правильных, которые получил читатель. Главное для контроля: таблицы истинности ответов должны совпасть с таблицами истинности формулы, данной в условии.

1.2. $xyz \vee \neg x \neg yz$; $(\neg x \vee y)(x \vee \neg y)\, z$.

1.3. $\neg xy \neg z \vee xz \vee \neg yz$; $(\neg x \vee z)(y \vee z)(x \vee \neg y \vee \neg z)$.

1.4. $x \neg y \vee \neg xy$; $(x \vee y)(\neg x \vee \neg y)$.

3.1. Да.
3.2. Нет.

4.4. Приведение к КНФ'. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee x \Rightarrow z \vee y) \Leftrightarrow \neg(\neg x \vee y) \vee \neg(z \vee x) \vee z \vee y \Leftrightarrow x \neg y \vee \neg x \neg z \vee z \vee y \Leftrightarrow (x \vee \neg z)(\neg x \vee \neg y)(\neg y \vee \neg z) \vee z \vee y \Leftrightarrow (x \vee y \vee z \vee \neg z)(\neg x \vee z \vee y \vee \neg y)(y \vee \neg y \vee z \vee \neg z)$ — каждый сомножитель содержит хотя бы одну пару слагаемых, из которых одно является отрицанием второго, формула тождественно истинна.

6.1. Тождественно истинна.
6.2. Тождественно ложна.
6.3. Разрешима, но не тождественно истинна.
6.4. Тождественно истинна.
6.5. Разрешима, но не тождественно истинна.
6.6. Тождественно ложна.

7.1. Решение. $(x \Rightarrow y)\, x \Rightarrow y \Leftrightarrow \neg((\neg x \vee y)\, x) \vee y \Leftrightarrow x \neg y \vee \neg x \vee y \Longleftrightarrow (x \vee \neg x \vee y)(\neg x \vee y \vee \neg y)$ — формула тождественно истинна.

8.1. Нет.

8.2. Да.

10.1. Из (1) следует (4), из (2) следует (3), из (3) — (2), из (5) — (2), из (5) — (3). Формулы (2) и (3) следуют друг из друга.

10.3. 2, 5, 4, 3, 1.

5. СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (СДНФ) называется ДНФ, в которой: 1) все слагаемые содержат сомножителем все переменные — без отрицания либо с отрицанием, но не вместе. (Напомним о разделительном характере связки «либо».) 2) Отсутствуют повторения слагаемых и сомножителей.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний (СКНФ) называется КНФ, в которой: 1) каждый сомножитель содержит слагаемым каждую переменную, без отрицания либо с отрицанием, но не вместе; 2) отсутствуют повторения сомножителей и слагаемых.

Замечание. Обратите внимание: одно определение получается из другого заменой друг другом слов «слагаемое» и «сомножитель».

Примеры. $x \urcorner y \vee \urcorner x \urcorner y$ — СДНФ некоторой формулы (двоичной функции) двух переменных; $(x \vee \urcorner y \vee \urcorner z)(\urcorner x \vee \urcorner y \vee z)(x \vee y \vee z)$ — СКНФ функции трех переменных.

Допустимыми для СДНФ (СКНФ) являются только некоторые полные конъюнкции (дизъюнкции): содержащие — без повторений — все переменные этой функции — с отрицаниями или без них.

Опишем два способа приведения к совершенным нормальным формам.

1-Й СПОСОБ — АНАЛИТИЧЕСКИЙ

Приведение к СДНФ. Алгоритм приведения. Сначала формулу с помощью равносильных преобразований приводят к ДНФ (§ 4). Затем те слагаемые, в которые сомножителями входят не все переменные, умножают на единицы, представленные в виде дизъюнкций каждой недостающей переменной, с ее отрицанием (закон исключенного третьего), и раскрывают скобки — по первому распределительному закону. Наконец, исключают повторения слагаемых.

Пример. $x \vee \urcorner yz \Leftrightarrow x(y \vee \urcorner y)(z \vee \urcorner z) \vee \urcorner yz(x \vee \urcorner x) \Leftrightarrow xyz \vee$
$\vee xy \urcorner z \vee x \urcorner yz \vee x \urcorner y \urcorner z \vee \urcorner x \urcorner yz.$

Таблица 12

x	y	z	$x \vee \urcorner yz$	x	y	z	$x \vee \urcorner yz$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1

Приведение к СКНФ. Алгоритм приведения. Формулу приводят к КНФ. К сомножителям, содержащим слагаемыми не все переменные, прибавляют нули, представленные в виде конъюнкций каждой недостающей переменной с ее отрицанием (закон противоречия), и с помощью второго распределительного закона приводят эти сомножители к суммам первой степени, т. е. не содержащим произведений. Наконец, исключают повторения сомножителей.

Пример. $(x \vee \neg y)(x \vee z) \Leftrightarrow (x \vee \neg y \vee z \cdot \neg z)(x \vee z \vee y \cdot \neg y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \vee \neg y \vee z)(x \vee \neg y \vee \neg z)(x \vee y \vee z)(x \vee \neg y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee \neg y \vee z) \wedge$

$\wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)(x \vee y \vee z)$.

2-й СПОСОБ — ТАБЛИЧНЫЙ

Составляем таблицу истинности данной функции (табл. 12).

П р и в е д е н и е к С Д Н Ф. А л г о р и т м п р и в е д е н и я. Рассматриваем только те строки таблицы, в которых функция принимает значение 1. Каждой такой строке соответствует конъюнкция всех аргументов (без повторений). Причем аргумент, принимающий значение 0, входит в нее с отрицанием, значение 1 — без отрицания. Наконец, образуем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций.

Пример. В нашей таблице первую строку опускаем: двоичная функция принимает значение 0. Второй строке соответствует конъюнкция $\neg x \neg yz$, третью строку опускаем и т. д.

СДНФ: $\neg x \neg yz \vee x \neg y \neg z \vee x \neg yz \vee xy \neg z \vee xyz$.

П р и в е д е н и е к С К Н Ф. А л г о р и т м п р и в е д е н и я. Рассматриваем только те строки таблицы, где функция принимает значение 0. Каждой такой строке соответствует дизъюнкция всех переменных (без повторений). Причем аргумент, принимающий значение 0, берется без отрицания, значение 1 — с отрицанием. Наконец, образуют конъюнкцию полученных дизъюнкций.

В нашем примере первой строке таблицы соответствует дизъюнкция $x \vee y \vee \vee z$, вторую строку опускаем и т. д.

СКНФ: $(x \vee y \vee z)(x \vee \neg y \vee z)(x \vee \neg y \vee \neg z)$.

З а м е ч а н и я.

1) Если условиться из двух совершенных форм, СДНФ и СКНФ, отдавать предпочтение той, которая содержит меньше букв, то СДНФ предпочтительнее, если в столбце значений функции таблицы истинности меньше единиц; СКНФ — если в этом столбце меньше нулей.

2) В обычной, школьной алгебре мы знаем, что нет общего метода перехода от табличного задания функции к аналитическому. В алгебре высказываний, как видим, такой метод существует.

ЗАДАНИЕ

1. Приведите к СДНФ и СКНФ аналитическим и табличным способами.

1.1. $xy \vee y$.

1.2. $(y \Rightarrow x \vee z) \cdot \neg (x \vee y) \vee (x \Rightarrow z) \Rightarrow xy \neg z$.

1.3. $\neg (x \sim \neg y) \cdot z \vee x \mid y \cdot \neg z$.

1.4. $\neg (x \cdot \neg (\neg y \Rightarrow \neg z) \vee z \cdot \neg x)$.

2. Докажите.

2.1. Для любой двоичной функции: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \neg x_1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n)$.

Указание. Проверьте левую и правую части равенства для $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$. Убедитесь в том, что обе части совпали.

2.2. $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n))\,(\neg x_1 \vee f(1, x_2, \ldots, x_n))$.

2.3. $f(x_1, x_2) = f(0, 0) \cdot \neg x_1 \neg x_2 \vee f(0, 1) \cdot \neg x_1 x_2 \vee f(1, 0) \wedge x_1 \cdot \neg x_2 \vee f(1, 1) \cdot x_1 x_2$.

Указание. Воспользуйтесь дважды результатом 2.1.

2.4. $f(x_1, x_2) = (f(0, 0) \vee x_1 \vee x_2)\,(f(0, 1) \vee x_1 \vee \neg x_2)\,(f(1, 0) \vee \neg x_1 \vee x_2)\,(f(1, 1) \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$.

2.5. Составьте аналогичные 2.3 и 2.4 равенства для $f(x_1, x_2, x_3)$. Сформулируйте закономерности построения правых частей. Сколько всего слагаемых (сомножителей) в правых частях равенств?

Указание. 2^n — количество всевозможных двузначных чисел в двоичной системе счисления.

3. Докажите два основных представления двоичных функций.

3.1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(0, 0, \ldots, 0, 0) \neg x_1 \neg x_2 \ldots \neg x_{n-1} \neg x_n \vee f(0, 0, \ldots, 0, 1) \neg x_1 \neg x_2 \ldots \neg x_{n-1} x_n \vee f(0, 0, \ldots, 1, 0) \neg x_1 \neg x_2 \ldots x_{n-1} \neg x_n \vee \ldots \vee f(1, 0, \ldots, 0, 0)\, x_1 \neg x_2 \ldots \neg x_{n-1} \neg x_n \vee f(0, 0, \ldots, 1, 1) \neg x_1 \neg x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n \vee \ldots \vee f(1, 1, \ldots, 1, 1)\, x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n$.

В сокращенном виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)\, x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n},$$

где $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 1, \\ \neg x_i, & \text{если } \sigma_i = 0; \end{cases}$

$i = 1, 2, \ldots, n$; суммирование выполняется по всевозможным кортежам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Указание. Возьмем произвольный кортеж значений переменных: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; $\alpha_i = 0, 1$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда левая часть 3.1 примет значение $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Остается доказать, что правая часть принимает то же значение. Действительно, в правой части найдется одно, и только одно слагаемое с коэффициентом, равным $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Зафиксируем это слагаемое. Легко заметить, что в фиксированной конъюнкции все сомножители типа α_i или $\neg \alpha_i$ обращаются в единицу и из конъюнкции исключаются. Фиксированное слагаемое, следовательно, равно $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Напротив, в каждой нефиксированной конъюнкции найдется множитель типа α_i или $\neg \alpha_i$, равный нулю и обращающий в нуль всю конъюнкцию.

Приведем строгое формальное доказательство равенства. Прежде всего покажем, что если $x = \sigma$, то $x^\sigma = 1$, если $x \neq \sigma$, то $x^\sigma = 0$. Пусть $x = \sigma = 1$, тогда $x^\sigma = 1^1 = 1$ — по определению x^σ; $x = \sigma = 0$, $x^\sigma = 0^0 = \neg 0 = 1$. Второй случай доказывается аналогично.

Введя по-прежнему кортеж $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, зафиксируем в правой части слагаемое с условием $\sigma_i = \alpha_i$

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)\, x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \cdot$$
$$\cdot\ \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_n^{\alpha_n} = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n):$$

все множители типа $\alpha_i^{\alpha_i} = 1$ (см. выше).

З а м е ч а н и е. $x_i = \alpha_i$ — по условию задания кортежа, $\sigma_i = \alpha_i$ вследствие способа фиксации слагаемого.

Больше слагаемых с коэффициентом $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в правой части равенства нет — любой другой коэффициент имеет вид $f(\ldots, \beta_i, \ldots)$, где $\beta_i \neq \alpha_i$. Соответственно слагаемые приобретают вид $f(\ldots, \beta_i, \ldots) \ldots \alpha_i^{\beta_i} \ldots \Longleftrightarrow 0$: $\alpha_i^{\beta_i} = 0$ $(\alpha_i \neq \beta_i)$.

П о я с н е н и е. Суть в том, что кортеж не изменился и по-прежнему $x_i = \alpha_i$. Все нефиксированные слагаемые правой части обращаются в нуль.

В а ж н о! Правая часть равенства 3.1 является СДНФ данной двоичной функции, причем коэффициенты $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ в соответствии с таблицей истинности $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ либо равны 1 и исключаются из конъюнкции, либо равны нулю и обращают в нуль всю конъюнкцию. Легко заметить, что это равенство является теоретическим обоснованием алгоритма табличного способа построения СДНФ (см. текст данного параграфа).

3.2. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(0, 0, \ldots, 0, 0) \vee x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1} \vee x_n) \ldots$
$\ldots (f(1, 0, \ldots, 0, 0) \vee \neg x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{n-1} \vee x_n) \ldots$
$\ldots (f(1, 1, \ldots, 1, 1) \vee \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_{n-1} \vee \neg x_n)$.

Сокращенная запись: $\Pi\,(f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \vee x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$,

где $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 0, \\ \neg x_i, & \text{если } \sigma_i = 1; \end{cases}$

произведение Π вычисляется по всевозможным кортежам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

З а м е ч а н и е. В отличие от прежнего теперь:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq \sigma, \\ 0, & \text{если } x = \sigma. \end{cases}$$

Доказательство равенства аналогично предыдущему — проведите его самостоятельно. Убедитесь, что оно является обоснованием табличного способа приведения к СКНФ.

4. Докажите.

4.1. Тождественно ложные формулы не имеют СДНФ.

У к а з а н и е. Сравните определение СДНФ (текст данного параграфа) с теоремой о необходимых и достаточных условиях тождественной ложности формулы (задача 2.2, § 4).

4.2. Тождественно истинные формулы не имеют СКНФ.

5. Докажите теоремы.

5.1. Единственность СДНФ. Если логическая формула имеет СДНФ, то она единственная.

Доказательство. Проведем его методом от противного. Пусть некоторая формула имеет две различные СДНФ: СДНФ$_1$ и СДНФ$_2$. Тогда, по крайней мере в одной из них (например, СДНФ$_1$), имеется слагаемое, которого нет в другой. Зафиксируем его: $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$. Обратим фиксированное слагаемое в единицу соответствующим подбором значений переменных, а именно $x_i = \sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Вспомним: $\sigma_i^{\sigma_i} = 1$. Словесно это означает, что если переменная входит в конъюнкцию без отрицания, то дадим ей значение 1, с отрицанием — 0. Этого достаточно, чтобы при выбранных значениях переменных СДНФ$_1$ обратилась в единицу.

Не изменяя значений переменных, переходим к СДНФ$_2$. Там фиксированного слагаемого нет, и, следовательно, в любом слагаемом найдется сомножитель вида $\sigma_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_i \neq \sigma_i$. Тогда $\sigma_i^{\alpha_i} = 0$. Все слагаемые СДНФ$_2$ равны нулю. В итоге при одних и тех же значениях переменных одна и та же логическая формула в СДНФ$_1$ приняла значение 1, в СДНФ$_2$ — значение 0. У формулы оказались две различные таблицы истинности. Противоречие доказывает теорему.

5.2. Единственность СКНФ. Если логическая формула имеет СКНФ, то она единственная.

Указание. Доказательство аналогично 5.1.

6. Применение совершенных форм для доказательства равносильностей. Мы видели, что логическая формула имеет множество ДНФ и КНФ. Следовательно, если две формулы имеют различные ДНФ или КНФ, то они все же могут оказаться равносильными. Но СДНФ (СКНФ) у каждой формулы не более одной. Значит, если у двух логических формул СДНФ (СКНФ) совпали, то они равносильны, если не совпали — не равносильны. Мы получили новый способ доказательства равносильностей приведением к совершенным формам.

Приведением к СДНФ и СКНФ докажите равносильности:

6.1. $\neg(x \neg y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow x) \Leftrightarrow \neg(x \Rightarrow y) \vee x \vee y$.

6.2. $x \dot{\vee} y \Leftrightarrow x \neg y \vee \neg x y$.

6.3. $(\neg(x \neg y) \Rightarrow z) \sim x \Leftrightarrow xy \vee \neg x \neg z \vee xz \Leftrightarrow (x \vee \neg z)(\neg x \vee \vee \neg y \vee z)$.

6.4. $(\neg x \sim y) \vee \neg(x \Rightarrow z) \Leftrightarrow \neg xy \vee x \neg y \vee x \neg z \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x \vee y)(\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$.

6.5. $(x \sim \neg z)(y \Rightarrow z) \Leftrightarrow \neg xz \vee x \neg y \neg z \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)(x \vee$

$\vee z)(\neg x \vee \neg z)$.

6.6. $(x \Rightarrow \neg z)(\neg y \sim z) \Leftrightarrow y \neg z \vee \neg x \neg yz \Leftrightarrow (\neg x \vee y)(\neg y \vee \neg z)$.

7. Определение. Конъюнкция K_1 называется подконъюнкцией конъюнкции K_2 ДНФ, если K_1 является сомножителем или группой сомножителей K_2.

Примеры. y, $\neg xy$, yz, $\neg xz$ и др. являются подконъюнкциями конъюнкции $\neg xyz$. Ясно, что конъюнкция является подконъюнкцией самой себя.

Напротив, $x \neg z$ не является подконъюнкцией $x \neg yz$.

Аналогично вводится понятие поддизъюнкции.

7. Докажите теоремы (о связи между членами нормальных и совершенных нормальных форм).

7.1. Если ДНФ двоичной функции содержит ненулевую конънкцию без повторений сомножителей, то СДНФ этой функции содержит слагаемыми всевозможные конъюнкции, в которые данная входит в качестве подконъюнкции.

Пример. Если ДНФ двоичной функции $f(x, y, z)$ имеет слагаемое $\neg x$, то СДНФ этой функции включает слагаемые: $\neg xyz$, $\neg x \neg yz$, $\neg xy \neg z$, $\neg x \neg y \neg z$ — в каждой из них $\neg x$ является подконъюнкцией.

Указание. Примените к данной конъюнкции аналитический способ приведения к СДНФ (см. текст данного параграфа).

7.2. Если СДНФ двоичной функции n переменных не содержит некоторой полной конъюнкции, то никакая подконъюнкция этой конъюнкции не входит в состав ДНФ данной функции.

Пример. $f(x, y) = \neg xy \vee x \neg y$. Следующие полные конъюнкции не являются допустимыми: xy, $\neg x \neg y$. Тогда никакая ДНФ $f(x, y)$ не содержит слагаемых: x, y, $\neg x$, $\neg y$, xy, $\neg x \neg y$.

Указание. Данная теорема обратна и противоположна теореме 7.1. Вспомните: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ (правило контрпозиции).

Замечание. Заданиями 7.1 и 7.2 мы воспользуемся в дальнейшем для построения минимальных дизъюнктивных форм в контактных схемах (см. § 6).

8. СКНФ и логические следствия. В предыдущем параграфе мы с помощью понятия тождественной истинности указали метод распознавания некоторой формулы логическим следствием данного набора формул-посылок. С помощью СКНФ можно решить более общую задачу построения всех логических следствий из данных посылок. Предыдущая задача является ее частным случаем.

Схема решения этой задачи такова. Образуем конъюнкцию всех данных посылок. Приводим конъюнкцию к СКНФ. Произведения сомножителей СКНФ, взятых по одному, по два и т. д., исчерпывают множество всех формул, равносильных следствиям из данных посылок [5, с. 44—45].

Пример. Найти все следствия из посылок $x|y$ и $x \dot{\vee} y$.

Решение. $x|y \cdot (x \dot{\vee} y) \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)(x \vee y)(\neg x \vee \neg y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)(x \vee y)$ — СКНФ. Следствия: $\neg x \vee \neg y \Leftrightarrow x \mid y$; $x \vee y$; $(\neg x \vee \neg y)(x \vee y) \Leftrightarrow x \dot{\vee} y$.

Для контроля убедитесь по методу тождественно истинных формул, что $x \vee y$ действительно является следствием данных посылок:

$$\frac{x \mid y,\ x \dot{\vee} y}{\therefore\ x \vee y}.$$

СКНФ позволяет решить и обратную задачу — для данной формулы алгебры высказываний найти все посылки, логическим следствием которых она является.

Алгоритм решения. Данная формула приводится к СКНФ, и составляются ее произведения с каждым из недостающих до соответствующей полной СКНФ множителей — по одному, по два и т. д. (Под полной понимается СКНФ тождественно ложной формулы с теми же переменными — у нее в таблице истинности в последнем столбце одни нули.)

Пример. Следствием каких посылок является импликация $x \Rightarrow y$?

Решение. $x \Rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y$ — СКНФ. Соответствующая полная СКНФ: $(x \vee y)(\neg x \vee y)(x \vee \neg y)(\neg x \vee \neg y)$. Образуем всевозможные произведения $(\neg x \vee y)$ с недостающими сомножителями: $(\neg x \vee y)(x \vee y) \Leftrightarrow y$; $(\neg x \vee y)(x \vee \neg y) \Leftrightarrow x \sim y$; $(\neg x \vee y)(\neg x \vee \neg y) \Leftrightarrow \neg x$; $(\neg x \vee y)(x \vee y)(x \vee \neg y) \Leftrightarrow xy$; $(\neg x \vee y)(x \vee y)(\neg x \vee \neg y) \Leftrightarrow \neg x y$; $(\neg x \vee y)(x \vee \neg y)(\neg x \vee \neg y) \Leftrightarrow \neg x \neg y$; $(\neg x \vee y)(x \vee y)(x \vee \neg y)(\neg x \vee \neg y) \Leftrightarrow 0$.

8.1. Получите все следствия из посылок: x, $x \Rightarrow y$. Убедитесь, что среди них есть y.

8.2. Покажите, что следующие формулы являются следствиями формул: $x \Rightarrow y$ и $y \Rightarrow z$ — $y \Rightarrow x \vee z$; $x \Rightarrow y \vee z$; $xz \Rightarrow y$; $xy \Rightarrow z$; $z \vee (x \sim y)$; $y \Rightarrow z$; $x \Rightarrow y$; $x \Rightarrow z$; $\neg x \vee (y \sim z)$; $y \sim xz$.

Указание. СКНФ: $(x \vee \neg y \vee z)(\neg x \vee y \vee z)(\neg x \vee y \vee \neg z)(\neg x \vee \neg y \vee z)$.

8.3. Следствием каких посылок является эквиваленция $x \sim y$?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ § 5

1.1. $xy \vee \neg xy$; $(x \vee y)y$.

1.2. $x \neg y \neg z \vee xy \neg z$; $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \neg z)(x \vee \neg y \vee z)(\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$. $(x \vee \neg y \vee \neg z)(\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$.

1.3. $\neg x \neg y \neg z \vee \neg x \neg yz \vee \neg xy \neg z \vee x \neg y \neg z \vee xyz$; $(x \vee \neg y \vee \neg z)(\neg x \vee y \vee \neg z)(\neg x \vee \neg y \vee z)$.

1.4. $\neg x \neg y \neg z \vee \neg xy \neg z \vee x \neg y \neg z \vee xy \neg z \vee xyz$;

$(x \vee y \vee \neg z)(x \vee \neg y \vee \neg z)(\neg x \vee y \vee \neg z)$.

2.5. 2^n.

6.1. Решение. Левая часть: а) $\neg(x \neg y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \neg y \vee y \vee x$ — ДНФ. $x \neg y \vee y(x \vee \neg x) \vee x(y \vee \neg y) \Leftrightarrow x \neg y \vee$ $\vee xy \vee \neg xy \vee x \neg y \Leftrightarrow x \neg y \vee xy \vee xy$ — СДНФ;

б) $x \neg y \vee y \vee x \Leftrightarrow (x \vee y \vee x)(\neg y \vee y \vee x) \Leftrightarrow x \vee y$ — КНФ, СКНФ.

Правая часть: а) $\neg(x \Rightarrow y) \vee x \vee y \Leftrightarrow x \neg y \vee x \vee y$ — ДНФ.

Замечание. Совпадение ДНФ левой и правой частей (вообще говоря, не обязательное), естественно, свидетельствует и о совпадении их СДНФ: $x \neg y \vee xy \vee \neg xy$ — СДНФ;

б) $x \vee y$ — СКНФ. Равносильность доказана.

8.1. $x \vee y$, $y \Rightarrow x$, $x \Rightarrow y$, x, y, $x \sim y$.

8.3. xy, $\neg x \neg y$, 0.

6. КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ (КС)

Винни-Пух... спросил Кристофера Робина, нет ли еще где полюсов. «Еще есть Южный Полюс... И, по-моему, где-то есть Восточный Полюс и Западный Полюс».

А. А. Милн. Винни-Пух

Рассмотрим применение алгебры высказываний к синтезу и анализу релейно-контактных схем. КС является устройством из контактов и проводов, связывающих несколько полюсов (входов, выходов). Рабочему состоянию контакта ставим в соответствие 1, не рабочему — 0, наличию тока в цепи — 1, отсутствию — 0.

Контакты бывают замыкающие и размыкающие. Контакт замыкающий, если в рабочем состоянии (кнопка нажата) контакт замыкает цепь; размыкающий, — если контакт замыкает цепь в нерабочем состоянии.

Обозначение на КС — нерабочее состояние (рис. 2). Возможные технические реализации контактов изображены на рис. 3. П — пружина, Р — обмотка реле, Я — якорь. При пропускании тока через обмотку реле (нажатие на кнопку) сердечник притягивает якорь и цепь соответственно замыкается или размыкается. При прекращении тока пружина приводит якорь в исходное положение.

Последовательно соединенные контакты реализуют конъюнкцию, параллельно соединенные — дизъюнкцию. Например, для замыкающих контактов (рис. 4), в первом случае ток в цепи есть ($x_1x_2 = 1$) тогда, и только тогда, когда оба контакта замкнуты ($x_1 = x_2 = 1$); во втором случае ($x_1 \vee x_2 = 1$) — когда хотя бы один из контактов замкнут ($x_1 = 1$, или $x_2 = 1$, или $x_1 = x_2 = 1$).

Состояние схемы (замкнуто — 1, разомкнуто — 0) будем обозначать y.

Пример. Составим КС формулы алгебры высказываний: $y = x_1x_2(\neg x_1x_2 \vee$ $\vee x_1 \neg x_2) \vee x_1 \neg x_2x_3$ (рис. 5). Хотя в схеме 9 контактов, ими управляют 3 реле (3 кнопки) — для x_1, x_2, x_3.

Заметим, что формула упрощается с помощью равносильных преобразований: $(\neg x_1x_2 \vee x_1 \neg x_2)x_1x_2 \vee x_1 \neg x_2x_3 \Leftrightarrow x_1 \neg x_2x_3$. Соответственно упрощается КС (рис. 6).

Эти две цепи равносильны: при одинаковых значениях на входах (ключах) значения y на выходах равны. В обеих цепях одновременно или будет ток, или не будет. В этом смысле цепи взаимозаменяемы.

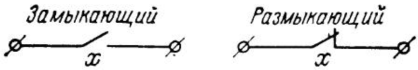

Рис. 2

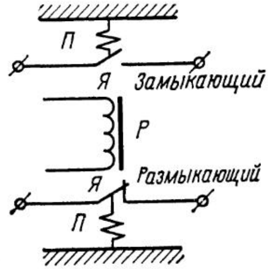

Рис. 3

Задача минимизации. Один из ее вариантов — получение результата ценой минимального количества контактов. Существуют регулярные способы (алгоритмы) минимизации формул алгебры высказываний для параллельно-последовательных контактных схем (π-схем). Один из них — приведение к минимальной дизъюнктивной форме (МДФ) с помощью минимизирующих карт — рассмотрен ниже.

Минимизирующая карта двоичной функции представляет собой квадратную матрицу (таблицу) $2^n \times 2^n$, где n — число переменных. Первые столбцы отводят для аргументов, дальнейшие — для их всевозможных конъюнкций по 2, по 3 и т. д., предпоследний — для конъюнкции всех аргументов, последний — для значений функции.

Алгоритм-1.

1) Столбцы для аргументов, как обычно в таблицах истинности, заполняются всевозможными наборами единиц и нулей.

2) В столбцах для конъюнкций проставляются десятичные значения двоичных чисел, соответствующих наборам значений аргументов. Например, в столбцах аргументов записано 101. Тогда в столбце для x_1x_2 пишут 2, т. е. десятичное значение числа 10_2; в столбце $x_1x_2x_3 — 5 = 101_2$ и т. д.

3) Вычеркиваются строки, в которых функция обращается в нуль.

4) В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркивают те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце в предыдущей операции.

5) В сохранившихся строках выбирают «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем — переменные) и обводят их кружками.

6) Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркивают все, кроме одного.

7) С помощью оставшихся обведенных чисел образуют конъюнкции. Для этого переводят каждое число в двоичную систему — декодируют его. Переменную, которой соответствует 1, берут сомножителем без отрицания, 0 — с отрицанием.

8) Составляют дизъюнкцию полученных конъюнкций.

Поясним алгоритм на задаче (задача голосования — счетчик большинства).

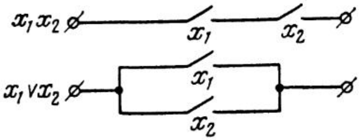

Рис. 4

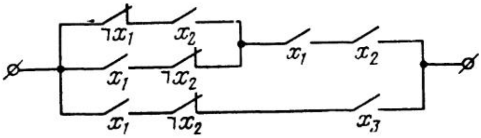

Рис. 5

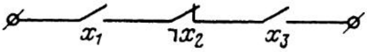

Рис. 6

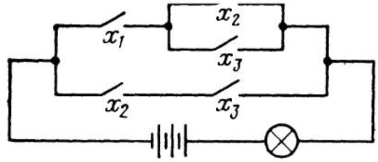

Рис. 7

Решение о зажигании лампочки принимается группой из трех человек — по большинству голосов. Голосование производится нажатием на кнопки x_1, x_2, x_3. Составить минимальную КС включения лампочки в сеть.

Минимизационная карта (табл. 13). $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \vee x_2x_3 \Leftrightarrow x_1 \ (x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$ — равносильное преобразование уменьшило число контактов еще на один. Схема сведена к 5 контактам вместо 12, необходимых для реализации СДНФ (рис. 7).

Проблема минимизации КС имеет практическую ценность: простая схема не только дешевле, экономичнее, но и устойчивее в работе. Имеется несколько фундаментальных результатов. Если $L(n)$ — наименьшее число контактов, достаточных для реализации двоичной функции n переменных, то $L \leqslant 4 \cdot 2^n/n$ (оценка Шеннона). Существуют и другие оценки.

В нашей задаче шенноновская оценка $L(3) \leqslant 4 \cdot 2^3/3 < 11$. В действительности нам удалось добиться $L(3) = 5$.

Рассмотренный алгоритм-1 имеет существенный недостаток: размеры матрицы катастрофически растут вместе с n. Уже при $n = 5$ матрица практически трудно обозрима — 32 столбца. Это при условии, что значительная часть элементов матрицы не используется, вычеркивается вслед за строками с нулевыми значениями функции.

В разработанном нами варианте этот недостаток в значительной степени устранен.

Алгоритм-2.

1) Образуется последовательность всех конъюнкций переменных — по одной, по две, по три и т. д.: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_1x_2, \ldots, x_1x_2 \ldots x_n$.

2) Составляется таблица истинности данной функции на 2^n строк и $(n + 1)$ столбцов. Для удобства столбец значений функции расположен слева. Справа оставлено место для дополнительных столбцов.

Таблица 13

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y	Исключаемые строки (+)
0	0	0	0	0	0	0	0	+
0	0	1	0	1	1	1	0	+
0	1	0	1	0	2	2	0	+
0	**1**	**1**	**1**	**1**	$\boxed{3}$	3	1	
1	0	0	2	2	0	4	0	+
1	**0**	**1**	**2**	$\boxed{3}$	**1**	5	1	
1	**1**	**0**	$\boxed{3}$	**2**	**2**	6	1	
1	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	7	1	

Таблица 14

y	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	y	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2
0	0	0	1	0	1	·1	1	0	1	2	3
·1	0	1	0	1		0	1	1	0	3	2
·1	0	1	1	1		·1	1	1	1	3	3

3) Если в столбце функции вычеркнуты (помечены) все единицы — то переход к следующему указанию. При невыполнении условия — к указанию 5.

4) Если просмотрены все столбцы конъюнкций данного числа переменных, то задача решена — МДФ построена. В противном случае — указание 5.

5) Рассматривается (или пристраивается) столбец следующей за рассмотренной ранее в последовательности конъюнкции. Значениями являются двоичные коды кортежей в соответствующих непомеченных строках.

6) Если это столбец полных конъюнкций, т. е. конъюнкций из СДНФ, то каждой из непомеченных единиц функции в МДФ отвечает слагаемое, которое строится так же, как обычно для СДНФ. Задача решена. В противном случае — переход к указанию 7.

7) Если некоторой группе всех одинаковых кодов столбца (нулей, или единиц, или двоек и т. д.) соответствуют единичные значения функции — группа образует покрытие подмножества единиц функции, — то в МДФ включается слагаемым конъюнкция переменных, взятых без отрицания, если им в столбцах переменных соответствуют единицы, и с отрицанием — если нули. Строки с использованными единицами функции вычеркиваются или метятся точками.

Замечание к указанию 7. Это указание, главное в алгоритме, обосновывается теоремами задания 7 § 5.

8) Если данное покрытие единиц функции включает какое-либо предыдущее покрытие и еще хотя бы одну единицу (это возможно только в конъюнкциях одинакового числа переменных), то соответствующая предыдущему покрытию конъюнкция из МДФ исключается.

В любом случае — возврат к указанию 3.

Пример. Пусть двоичная функция задана следующей таблицей истинности (табл. 14). Для трех переменных полная минимизирующая карта содержит 8 столбцов. Как видим, для построения МДФ с помощью алгоритма-2 их достаточно 6. (Ответ: $\neg\, x_1x_2 \vee x_1x_3$.)

Пример. Таблица истинности функции (табл. 15). Для решения вместо 9 оказалось достаточно 4 столбцов — таблица истинности не достраивалась. (Ответ: $x_1 \vee x_3$.)

Таблица 15

y	x_1	x_2	x_3	y	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0	·1	1	0	0
·1	0	0	1	·1	1	0	1
0	0	1	0	·1	1	1	0
·1	0	1	1	·1	1	1	1

Таблица 16

y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4
·1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
·1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	2
·1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	3
0	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0
0	0	1	0	1	1	0	1	2	3	1
0	0	1	1	0	1	1	0	3	2	2
·1	0	1	1	1	1	1	1	3	3	3
·1	1	0	0	0	2	2	2	0	0	0
·1	1	0	0	1	2	2	3	0	1	1
·1	1	0	1	0	2	3	2	1	0	2
·1	1	0	1	1	2	3	3	1	1	3
·1	1	1	0	0	3	2	2	2	2	0
0	1	1	0	1	3	2	3	2	3	1
·1	1	1	1	0	3	3	2	3	2	2
·1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3

Чем больше переменных у функции, тем ощутимее преимущества алгоритма-2. Так, для функции 4 переменных, заданной табл. 16, удается исключить 5 наиболее трудоемких столбцов с конъюнкциями на 3 и 4 множителя. (О т в е т: $x_1 \neg x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1 \neg x_4 \vee \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_2x_4 \vee x_3x_4$.)

А л г о р и т м-3 построения МДФ. Минимизация выполняется с помощью процедур склеивания и поглощения в СДНФ данной функции.

С к л е и в а н и е. *Склеиванием* по переменной x в СДНФ называется равносильное преобразование типа: $Ax \vee A \neg x \Leftrightarrow A$. Сравнивая все слагаемые СНДФ между собой, находят слагаемые, различающиеся только «знаком» одного сомножителя, и для них выполняют склеивания.

П о г л о щ е н и е. *Поглощением* в СДНФ называется равносильное преобразование типа: $A \vee AB \Longleftrightarrow A$, где A и AB — слагаемые СДНФ.

А л г о р и т м.

1) Двоичная функция приводится к СДНФ.

2) В СДНФ производятся всевозможные склеивания.

3) Производятся операции поглощения. Полученная ДНФ называется сокращенной. Она состоит из минимальных по числу множителей конъюнкций, но среди конъюнкций могут оказаться избыточные.

4) Строится импликативная матрица: ее верхняя строка — слагаемые СДНФ, левая колонка — слагаемые сокращенной ДНФ. Если элемент строки принадлежит члену колонки, то на их пересечении ставится крестик «$\times$». В сокращенной форме сохраняем те слагаемые, относительно которых в каждом столбце имеется хотя бы один крестик. Наименьшее число элементов сокращенной формы, удовлетворяющее этому требованию, сохраненное в сокращенной форме, образует МДФ.

Пример. 1. СДНФ: $\neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 \neg x_2 x_3 \vee$
$\vee x_1 x_2 x_3 \Leftrightarrow (\neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 x_3) \vee (\neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3) \vee$
$\vee (\neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3) \vee (x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_1 \neg x_2 x_3)$.

Слагаемые СДНФ сгруппированы, подготовлены к выполнению склеиваний. Для этого некоторые слагаемые пришлось повторить.

	$\neg x_1 \neg x_2 x_3$	$\neg x_1 x_2 x_3$	$x_1 \neg x_2 \neg x_3$	$x_1 \neg x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
x_3	+	+		+	+
$x_1 \neg x_2$			+	+	

2. Склеивание. $\neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \Leftrightarrow (x_3 \vee \neg x_1 x_3) \vee x_1 \neg x_2$.

3. Поглощение. $x_3 \vee x_1 \neg x_2$.

4. Импликативная матрица (табл. 17).

Как видим, ни одно из слагаемых сокращенной формы исключить нельзя — в противном случае какой-либо член СДНФ останется «незамещенным».

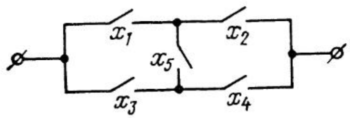

Рис. 8

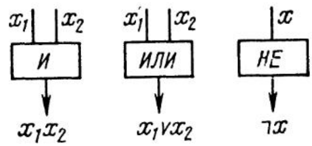

Рис. 9

π-схемы и мостиковые схемы. Параллельно-последовательные контактные схемы, рассмотренные выше, называются π-схемами. Наряду с ними существуют мостиковые: Н-схемы. Они образуются соединением некоторых параллельных цепочек в промежуточных точках при помощи «мостиковых связей» — цепочек, в которых также могут содержаться контакты.

Пример простейшей Н-схемы (рис. 8). Для любой Н-схемы существует равносильная π-схема. Например, для данной: $x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee x_1x_5x_4 \vee x_3x_5x_2$. Однако π-схема имеет больше контактов, чем равносильная Н-схема.

Логические элементы. Схемы для выполнения операций алгебры высказываний называются логическими элементами. Их условные обозначения на КС даны на рис. 9. Естественно стремление к синтезу схем из готовых «логических блоков». Решенной выше задаче «Счетчик голосования» соответствуют следующие КС на логических элементах: для представления $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, т. е. МДФ функции (рис. 10, *а*), для представления $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$ (рис. 10, *б*).

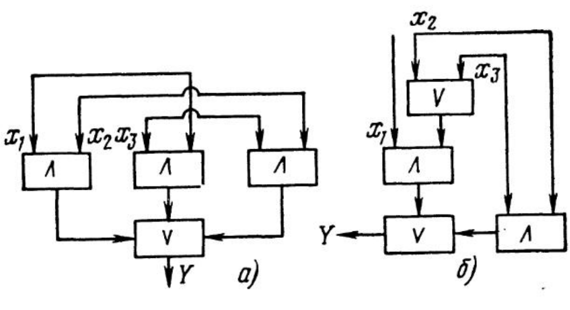

Рис. 10

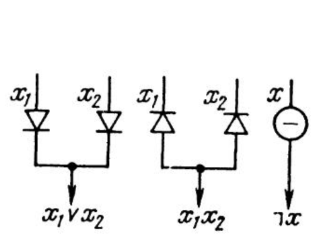

Рис. 11

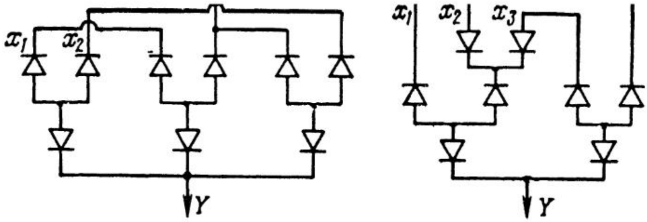

Рис. 12

В основу принципа минимизации могут также быть положены условия: наименьшего числа логических элементов — в этом смысле приведенные схемы равнозначны; наименьшего количества элементов определенного типа и т. д.

Бесконтактные логические элементы. Логические элементы реализуются не только с помощью КС. Чаще для этой цели используются диоды, ферриты и т. д. Бесконтактные логические элементы по сравнению с электромеханическим реле надежнее, обладают быстродействием и практически не имеют износа.

Будем пользоваться следующими обозначениями для диодных схем (рис. 11).

Приведем диодные схемы рассмотренной задачи (рис. 12).

ЗАДАНИЕ

1. По аналогии с МДФ введите понятие МКФ — минимальной конъюнктивной формы. Сформулируйте алгоритмы:

1.1. Алгоритм-1 для построения МКФ.

1.2. Алгоритм-2 для построения МКФ.

2. Приведите к МДФ и МКФ — с помощью каждого из трех алгоритмов — следующие двоичные функции:

2.1. $(\urcorner(x_1 \urcorner x_2) \Rightarrow x_3) \sim x_1$.

2.2. $(\urcorner x_1 \sim x_2) \vee \urcorner (x_1 \Rightarrow x_3)$.

2.3. $\urcorner (x_1 \Rightarrow \urcorner x_2) \vee (x_1 \sim x_3)$.

2.4. $(x_1 \Rightarrow \urcorner x_3)(\urcorner x_2 \sim x_3)$.

2.5. $(x_1 \sim \urcorner x_3)(x_2 \Rightarrow x_3)$.

2.6. $(\urcorner x_1 \Rightarrow x_3) \cdot \urcorner (x_2 \sim \urcorner x_3)$.

2.7. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\urcorner x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\urcorner x_1 \vee x_2 \vee \urcorner x_3)$.

3. Для МДФ и МКФ, полученных в задании 2, постройте:

3.1. КС на ключах;

3.2. КС на логических элементах;

3.3. Диодные схемы.

4. Построить КС из контактов x_1, x_2, x_3, x_4, замыкающуюся ($y = 1$) тогда, и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:

а) замкнуты x_1 и один, и только один из контактов x_2 и x_3;

б) разомкнуты x_4 и два, и только два из остальных контактов;

в) замкнуты два, и только два контакта, но контакты x_2 и x_4 вместе не замкнуты.

Минимизируйте функцию и изобразите диодную схему на логических элементах и КС на ключах.

Указание. Условие запишется: $x_1 (x_2 \dot{\vee} x_3) \vee \neg x_4 (\neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 \neg x_3 x_2 \vee \neg x_2 \neg x_3 x_1) \vee x_1 x_2 \neg x_3 \neg x_4 \vee x_1 x_3 \neg x_2 \neg x_4 \vee x_1 x_4 \neg x_2 \neg x_3 \vee x_2 x_3 \neg x_1 \neg x_4 \vee x_3 x_4 \neg x_1 \neg x_2$.

5. Используя контакты x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, построить КС, замыкающуюся тогда, и только тогда, когда замкнута тройка последовательных контактов.

Указание. Следующим четырем кортежам, и только им, отвечают единицы в столбце функции: 0, 0, 0, 1, 1, 1; 0, 0, 1, 1, 1, 0; 0, 1, 1, 1, 0, 0; 1,1, 1, 0, 0,0. В остальных 60 случаях функция равна нулю. Воспользуйтесь для минимизации алгоритмом-3. Сравните результат с оценками по Шеннону.

6. Минимизируйте КС, изображенную на рис. 13.

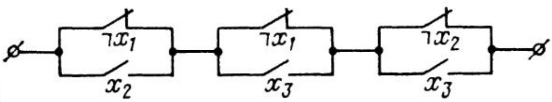

Рис. 13

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЮ § 6

2.1. $x_1 x_2 \vee \neg x_1 \neg x_3 \vee x_1 x_3$; $(x_1 \vee \neg x_3)(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$.

2.2. $\neg x_1 x_2 \vee x_1 \neg x_2 \vee x_1 \neg x_3$; $(x_1 \vee x_2)(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$.

2.3. $x_1 x_2 \vee \neg x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1 \neg x_3 \vee x_1 x_3$; $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

2.4. $x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3$; $(\neg x_1 \vee x_2)(\neg x_2 \vee \neg x_3)$.

2.5. $\neg x_1 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3$; $(\neg x_1 \vee \neg x_2)(x_1 \vee x_3)(\neg x_1 \vee \neg x_3)$.

2.6. $x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3$; $(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee \neg x_3)(\neg x_2 \vee x_3)$.

2.7. $x_2 \vee \neg x_1 x_3$; $(\neg x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)$.

4. $x_1 \neg x_2 \vee x_1 \neg x_3 \vee \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_4$;
$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4)$.

6. МДФ: $\neg x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1 x_3 \vee x_2 x_3$; МКФ: $(\neg x_1 \vee x_2)(\neg x_2 \vee x_3)$.

7. КВАНТОРНЫЕ ПРЕДИКАТЫ

У некоторых дам, — я говорю у некоторых, это не то, что у всех.

Н. В. Гоголь. Мертвые души

1. Рассмотрим два утверждения: «прямые a и b параллельны» и «если $a \parallel b$, то $b \parallel a$». Первое из них не является высказыванием: для одних прямых отношение $a \parallel b$ истинно, для других — ложно. Второе утверждение — истинное высказывание. Суть в том, что во втором случае, хотя это явно и не сказано, имеется в виду «для каждой пары прямых a и b, — если $a \parallel b$, то $b \parallel a$». В первом же случае возможны различные неравносильные варианты: «любые прямые a и b параллельны» — тогда это ложное высказывание; «существуют прямые a и b, которые параллельны» — истинное высказывание и т. д. Именно вследствие этой неопределенности наше утверждение не является высказыванием.

Чтобы каждый раз не гадать, к чему относится свойство (отношение) — ко всем объектам множества, на котором оно задано, или только к некоторым, вводятся специальные знаки $\forall$, $\exists$. Они называются соответственно *квантором всеобщности* и *квантором существования*.

Пусть $P(x)$ — одноместный предикат «x — простое число», тогда $\forall x \in \mathbf{N} P(x)$ означает: для каждого (любого) натурального x истинно $P(x)$, т. е. каждое натуральное число является простым числом. Ясно, что получилось ложное высказывание. $\exists x \in \mathbf{N} P(x)$ означает: существует натуральное число x, для которого $P(x)$ — истинно, или, короче, существуют простые натуральные числа. Это истинное высказывание.

Обратим внимание на то, что с помощью кванторов исходный одноместный предикат преобразуется в высказывание.

Возьмем теперь в качестве исходного двуместный предикат $Q(x, y)$ на $\mathbf{N}^2$, означающий $x \geqslant y$. Рассмотрим утверждение: $\forall x Q(x, y)$ — каждое натуральное число x больше или равно y. Значение истинности этого утверждения не является раз и навсегда данным, оно зависит от значения y. Так, $\forall x Q(x, 1) = 1$, т. е. каждое натуральное число больше или равно 1. Напротив, при $y = 3$ получаем: $\forall x Q(x, 3) = 0$ — неверно, что каждое натуральное число больше или равно 3 (например, число 2).

Таким образом, присоединение двуместному предикату $Q(x, y)$ квантора всеобщности (говорят: навешивание на предикат квантора всеобщности) привело к образованию нового предиката, зависящего от y и не зависящего от x. Обозначим его $P(y)$: $\forall x Q(x, y) = P(y)$. То же самое имеет место при навешивании на предикат квантора существования. Однако теперь образовавшейся предикат уже другой: $\exists x Q(x, 1) = 1$; $\exists x Q(x, 3) = 1$. Этот предикат, оказывается, всегда равен 1: какое бы мы ни взяли натуральное число y, существует $x \geqslant y$.

Итак, навешивание квантора на предикат приводит к уменьшению местности предиката (т. е. числа его переменных) на 1. В итоге навешивания квантора на двуместный предикат получается одноместный кванторный предикат, а навешивания квантора на трехместный предикат — двухместный, на одноместный предикат, мы видели, — высказывание. Это дает основание считать высказывание нуль-местным предикатом.

Переменную, которая стоит под знаком квантора, будем называть *связанной* (у нас — x); от нее кванторный предикат не зависит. Остальные переменные — свободные.

Если в кванторном предикате остались свободные переменные, т. е. он не является нуль-местным предикатом (высказыванием), то на него можно навешивать дополнительные кванторы по свободным переменным — каждый квантор связывает одну переменную — до тех пор, пока все переменные не окажутся связанными. Так, в рассмотренном примере возможны случаи: $\exists y \forall x Q(x, y)$; $\forall y \exists x Q(x, y)$ и др. Мы получаем двухкванторные предикаты. Так как все переменные связаны, то образовались высказывания. $\exists\, y\, \forall\, xQ\,(x,\ y)$ — существует y, что для любого x справедливо $x \geqslant y$. Высказывание истинно, этим значением y, как известно, является 1. $\forall\, y\, \exists\, xQ\,(x,\ y)$ — для каждого y существует x, что справедливо $x \geqslant y$ — это высказывание также истинно. Но высказывание $\forall\, y\, \forall\, xQ\,(x,\ y)$ — ложно: неверно, что для любых двух натуральных x и y $x \geqslant y$ (например, $x = 5$, $y = 7$).

Замечание. Мы теперь знаем два способа образования высказываний на основе предикатов: замещение в предикате всех переменных значениями из их предметных областей и навешивание на предикаты кванторов.

2. Кванторы как обобщение логических связок. Пусть предметная область (область изменения) переменной x предиката $P\,(x,\ y)$ конечна: $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k\}$. Тогда $\forall\, xP\,(x,\ y)$ означает: $P\,(x_1,\ y)$ — истинно, $P\,(x_2,\ y)$ — истинно и т. д., т. е. $P\,(x_1,\ y)\cdot P\,(x_2,\ y)\cdot\ \ldots\ \cdot P\,(x_k,\ y) = 1$. Аналогично $\exists\, xP\,(x,\ y)$ является сокращением дизъюнкции: $P\,(x_1,\ y) \vee P\,(x_2,\ y) \vee \ldots \vee P\,(x_k,\ y)$. Мы видим, что кванторы — суть другая форма записи дизъюнкции и конъюнкции, — пригодная, однако, и в том случае, когда предметная область содержит бесконечное множество элементов.

Пример. В танковом экипаже Т, состоящем из трех человек — А, Б, В, все отличники боевой службы. Введем предикат $P\,(x)$: «человек x — отличник боевой службы». Тогда высказывание запишется: $\forall\, x \in \mathrm{T}P\,(x) = P\,(\text{А})\cdot P\,(\text{Б})\cdot P\,(\text{В})$.

Высказывание $\exists\, x \in \mathrm{T}P\,(x) = P\,(\text{А}) \vee P\,(\text{Б}) \vee P\,(\text{В})$; читается: в экипаже Т имеются (существуют) отличники боевой службы, т. е. или А отличник, или Б, или В.

3. Отрицание кванторных предикатов. Два предиката будем считать равносильными, если их значения истинности совпадают при всех значениях входящих в них свободных переменных. При этом имеется в виду, что свободные переменные в одном предикате не являются связанными в другом.

Справедливы следующие равносильности, относящиеся к отрицаниям кванторных предикатов: $\neg\,(\forall\, xP) \Leftrightarrow \exists\, x \neg\, P$; $\neg\,(\exists\, xP) \Leftrightarrow \forall\, x \neg\, P$.

Действительно, в первой из них левая часть читается: неверно, что для каждого x предикат P истинен; правая — существует x, для которого P ложно. Ясно, что эти два утверждения имеют один и тот же смысл. Аналогичным рассуждением убеждаемся в справедливости второй равносильности.

Закономерности словесно прочитываются так. При отрицании кванторного предиката знак отрицания переносится к внутреннему предикату, а квантор изменяется на двойственный: существование на всеобщность и наоборот. Правило справедливо и для многокванторных предикатов: $\neg\,(\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, zP) \Leftrightarrow \exists\, x\, \forall\, y\, \exists\, z \neg\, P$.

Пример. $\forall\, x \neg\,(\exists\, y\,(P\,(x) \Rightarrow \neg\, R\,(y))) \Leftrightarrow \forall\, x\, \forall\, y \neg\,(P\,(x) \Rightarrow \neg\, R\,(y))$. После преобразований подкванторного предиката с помощью равносильностей алгебры высказываний получаем: $\forall\, x\, \forall\, y\,(P\,(x)\cdot R\,(y))$.

Пусть требуется записать следующее истинное высказывание: «неверно, что для каждого рационального числа найдется рациональное число, квадратом которого оно является», т. е. $\neg\,(\forall\, x \in \mathbf{Q}\, \exists\, y \in \mathbf{Q}\,(x = y^2))$. Оказывается, эту мысль можно сформулировать иначе: $\exists\, x \in \mathbf{Q}\, \forall\, y \in \mathbf{Q}\,(\neg\,(x = y^2))$. Словесно: существует рациональный x, что для любого рационального y справедливо $x \neq y^2$.

Правило, как видим, удобно для построения «отрицательных» математических предложений.

Примеры. а) Ответим на вопрос: какой четырехугольник не является параллелограммом. Или, иначе, дадим определение «не параллелограмма». Для этого запишем сначала одно из возможных определений параллелограмма: $\exists\, a\, \exists\, b\,(a \parallel b\cdot a = b)$ (a, b — стороны четырехугольника). Тогда «не параллелограммом» называется четырехугольник, у которого $\neg\,(\exists\, a\, \exists\, b\,(a \parallel b\cdot a = b)) \Leftrightarrow \forall\, a\, \forall\, b\,(\neg\,(a \parallel b\cdot a = b))$. После применения равносильностей алгебры высказываний получим: $\forall a \forall b (\neg (a \parallel b) \vee (a \neq b))$ — четырехугольник не является параллелограммом, если каждые две его стороны или не параллельны, или не равны.

б) Мальчик обещал родителям: учиться на 4 и 5, каждый день убирать квартиру и ходить в магазин за продуктами. Как записать, что он не сдержал своего обещания?

Введем предикаты: $P(x)$ — мальчик в день x убирал квартиру, $R(x)$ — мальчик в день x ходил в магазин и высказывание A — мальчик учится на 4 и 5. Тогда его обещание запишется: $A \cdot \forall x (P(x) \cdot R(x))$.

Обещание не выполнено: $\neg (A \cdot \forall x (P(x) \cdot R(x))) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg (\forall x (P(x) \cdot R(x))) \Leftrightarrow \neg A \vee \exists x (\neg (P(x) \cdot R(x))) \Leftrightarrow \neg A \vee \exists x (\neg P(x) \vee \neg R(x))$.

Таким образом, обещание не выполнено, если: мальчик не учится на 4 и 5 ($\neg A$) или был (существовал) такой день, когда он не убрал квартиру ($\neg P(x)$) или не ходил в магазин ($\neg R(x)$).

ЗАДАНИЕ

1. Отнесите отрицания к внутренним предикатам

1.1. $\neg \exists x (\forall y P \Rightarrow \exists y R))$.

1.2. $\exists x \neg (\forall y (P \cdot Q))$.

1.3. $\neg (\exists x \forall y (P \vee \neg Q))$.

2. Дайте следующие определения (сначала попытайтесь ответить на каждый вопрос содержательно, затем проверьте себя, используя правила построения отрицаний):

2.1. «Не параллелограмма» — на основе следующих определений параллелограмма — а) $\forall x \forall y (\neg (x \times y) \Rightarrow x \| y)$; x, y — стороны четырехугольника, «$\times$» — знак пересечения сторон; б) $\forall x \forall y (\neg (x \times y) \Rightarrow x = y)$.

2.2. «Не трапеции», исходя из следующего определения трапеции: $\exists x \exists y (x \| y) \cdot \exists z \exists t (\neg (z \nparallel t))$, где x, y, z, t — стороны четырехугольника.

3. Докажите.

3.1. Высказывание $\forall n \in \mathbf{N} (\neg ((3n + 5) \cdot /. 3))$ ложно ($\cdot/.$ — не кратно).

3.2. Решив квадратное неравенство $ax^2 + bx + c < 0$, учащийся получил: $x > 5$ или $x < 2$. При проверке оказалось, что он ошибся, хотя корни найдены верно. Тогда он взял прежнее высказывание с отрицанием: $\neg (\forall x (x > 5 \vee x < 2))$. Это утверждение истинно, но оно не является решением неравенства.

3.3. При решении квадратного неравенства один учащийся получил: $2 \leqslant x \leqslant 5$. Другой получил: $x < 2 \vee x > 5$. Полученные ответы не являются отрицаниями друг друга.

3.4. Правила отрицания квантовых предикатов являются обобщением равносильностей де Моргана алгебры высказывания.

4. Задачи.

4.1. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» от противного большой теоремы Ферма. **Теорема**. Для $x, y, z, n \in \mathbf{N}$ $(n > 2)$: $x^n + y^n \neq z^n$.

Пусть, напротив, $x^n + y^n = z^n$. Возьмем следующие значения: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $n = 3$ и подставим в наше равенство: $1^3 + 2^3 = 3^3$; $9 = 27$. Получилось противоречие. Теорема доказана.

Указание. Теорема Ферма запишется: $\forall\, x, y, z, n > 2\ (x^n + y^n \neq z^n)$. Постройте отрицание теоремы, т. е. допущение, сделанное в нашем «доказательстве».

4.2. Студент решил каждую прослушанную лекцию повторять дома. В конце семестра оказалось, что он не выполнил своего решения. Запишите этот факт.

Указание. Введите предикат $P(x)$ — «студент повторил лекцию x».

4.3. Случай в магазине. Юноша решил купить туфли в подарок своему брату. Уже стоя у прилавка, он обнаружил, что не помнит размера ноги брата. Заметив растерянность покупателя, продавец сказал: «В нашем магазине для любой ноги найдутся туфли подходящего размера». «Тогда дайте мне туфли, подходящие для любой ноги», — сказал юноша. Правильно ли юноша понял продавца?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАНИЮ § 7

1.1. $\forall x \forall y\, (P \wedge \neg R)$.

1.2. $\exists x \exists y\, (\neg P \vee \neg Q)$.

1.3. $\forall x \exists y\, (\neg P \wedge Q)$.

2.1. а) $\exists x \exists y\, (\neg (x \times y) \wedge \neg (x \parallel y))$; б) $\exists x \exists y\, (\neg (x \times y) \wedge \neg (x = y))$, или иначе: $\exists x \exists y\, (\neg (x \times y) \wedge (x \neq y))$.

2.2. $\forall x \forall y\, (x \nparallel y) \vee \forall z \forall t\, (z \parallel t)$.

3.1. Для этого достаточно доказать, что $\neg\, (\forall\, n \in \mathbf{N}\, (\neg\, ((3n + 5) \not\vdots\, 3)))$ истинно. Отнесем «внешнее» отрицание к внутреннему предикату: $\exists\, n \in \mathbf{N}\, ((3n + 5) \not\vdots\, 3)$. Мы видим, что формула $(3n + 5) \not\vdots\, 3$ истинна для любого натурального n.

Замечание. Условие можно ослабить: $\exists\, n \in \mathbf{N}\, (\neg\, ((3n + 5) \not\vdots\, 3))$ — ложно. Докажите самостоятельно.

3.2. Отрицание преобразуется так: $\exists\, x\, (x \leqslant 5 \wedge x \geqslant 2)$, или $\exists\, x\, (2 \leqslant x \leqslant 5)$. Действительным же решением неравенства будет: $\forall\, x\, (2 < x < 5)$.

4.1. Допущение, т. е. отрицание теоремы $\exists\ x, y, z, n > 2\ (x^n + y^n = z^n)$ не опровергнуто. Тот факт, что при некоторых значениях переменных соотношение $x^n + y^n = z^n$ не имеет места, ничего не доказывает.

Ошибка в том, что в допущении квантор существования подменен квантором всеобщности.

4.2. $\exists\, x\, (\neg\, P(x))$.

4.3. Неправильно. В утверждении продавца первым стоит квантор всеобщности, вторым — существования. Юноша переставил кванторы местами и исказил смысл утверждения.

Нам предстоит перейти к решению различных классов логических и игровых задач. Все преобразования, которые потребуются, введены в первой части.

Перед нелегкой, но увлекательной дорогой в Дальнейшее присядем, уважаемый Читатель. Я расскажу тебе об одном случае из моей педагогической практики. Если он окажется поучительным, то возьми его с собой в путь.

В шестом классе вводилось понятие высоты треугольника: перпендикуляр, опущенный из вершины и т. д. (в Δ ABC сторона AC — горизонтальная). Предложение учителя самостоятельно провести высоту из вершины A учащиеся восприняли как шутку, утверждая, что это невозможно. Педагог демонстрирует картонную модель, на которой эта высота показана, и происходит следующий диалог.

Учитель: «Смотрите, отрезок из вершины?... Перпендикуляр?... Значит, высота?». Учащиеся: «Не высота: она идет вбок!». Модель поворачивается так, чтобы отрезок A шел «сверху вниз».

«Теперь?» — «Теперь — высота». Снова поворот в прежнее положение.

«Теперь — не высота!»..

Как в обучении преодолеть эту (и подобную) «искривленную логику»: высота — это когда «сверху вниз»? Эффективным оказывается формирование у учащихся специальной с и с т е м ы умственных действий по распознаванию понятия: проверка прохождения отрезка через вершину, перпендикулярности противолежащей стороне и т. д. Но это не что иное, как алгоритм р а с п о з н а в а н и я — упорядоченная последовательность умственных действий для решения массовой задачи [12].

Результатом обучения с помощью алгоритмических предписаний является конструирование в мышлении обучающихся специальных ориентиров распознавания, характеризующих понятия частично, но — в главном. Для высоты треугольника — перпендикуляр, для медианы — делящая сторону пополам и т. д. Это неполные формы понятий: не всякий перпендикуляр — высота; отрезок, делящий сторону пополам, может не пройти через вершину и т. д. Ориентиры имеют не алгоритмический, а наводящий, эвристический характер: чувствительны к изменениям ситуации, проявляются многопланово. При возникновении в процессе решения конкретной задачи ситуации «прямоугольный треугольник» высота может «развернуться» в катет; «равнобедренный треугольник» — одновременно в медиану и биссектрису и т. д.

Формула-ориентир $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ содержит потенциально следующие свойства, направления развития: в условиях, когда кажется полезным использование ограниченности функций, $|\sin\alpha|$,

$|\cos\alpha| \leqslant 1$; нахождение $\cos\alpha$ по значению $\sin\alpha$ и наоборот; в случае равенства суммы квадратов двух чисел 1, возможность принятия одного из чисел за синус аргумента, другого — за косинус и др. Так, в задаче «$a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$; доказать $|ac + bd| \leqslant 1$» последний вариант развертки приводит к изящному решению $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \cos\beta$, $d = \sin\beta$; $|ac + bd| = |\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta| = |\cos(\alpha - \beta)| \leqslant 1$.

Ориентиры, служащие «вызову» соответствующих понятий, направляющие поиск решения задачи, как бы указывают место понятия в системе ее связей. Мы называем их логико-психологическими координатами (ЛПК) понятий.

Будучи сплавом логического с психологическим, ЛПК не гарантируют решения каждой задачи даже рассматриваемого типа, могут «увести в сторону». Более того, для любого набора ЛПК можно указать задачу, в которой они «подводят». Но чаще всего ЛПК оказываются полезными.

При традиционном обучении ЛПК образуются в мышлении человека стихийно, в процессе решения задач или жизненной практики и не всегда наилучшим образом. Свидетельством служит «искривленная» ЛПК высоты «сверху—вниз».

Некоторые ЛПК человека являются едиными для широких классов задач, достаточно далеких по своей логике и математике. Например: построй более простую задачу, из решения которой следует решение данной (встречная ЛПК); постарайся преобразовать ситуацию так, чтобы она содержала по возможности больше элементов целевой ситуации (ЛПК уменьшения «расстояния до цели») и др. Подобные ЛПК, наряду с алгоритмическими предписаниями, использованы нами при обучении решению математических, производственных, логических, игровых задач. Этому в значительной степени посвящена вторая часть нанной книги (см. также [13]).

Переходя ко второй части книги, помни, Читатель, что мост строят с двух сторон. Прочитав условие задачи, попытайся сначала решить ее «по соображению» — часто это удается. Подобно поиску философского камня это завершится множеством непредвиденных «маленьких, но своих открытий», даже если задача не будет решена. Затем изучи рекомендуемый к данному типу задач алгоритм, сравни затраченное время и усилия на последующие решения. Помни мудрые слова: метод уравнивает способности.

Пройдет время, забудутся алгоритмы, но умения и навыки, приращение в развитии, приобретенные с их помощью, останутся; ЛПК «уйдут в подсознание» и в значительной степени будут определять эффективность мыслительного процесса.* Причем у каждого по-иному,

* Как считал (психолог) У. Джемс, добрые две трети духовной жизни состоят именно из этих предварительных схем мыслей, не облеченных в слова.

потому что «у всякого чувствительнее не та нерва, чем у другого» (Н. В. Гоголь. Из письма С. Т. Аксакову). Поистине прав Гете: «Звуки отмирают, но гармония остается». И последнее. Задачи § 1 второй части еще не требуют изложенного в первой части аппарата математической логики. Это — «разминка». Итак, — в путь!

ЗАДАЧИ ВТОРОЙ ЧАСТИ

		Наименование задачи	Страницы	
			условия	решения, комментариев, указаний, ответов
§ 1.	Задача 1	У кого какая специальность?	64	64
	Задача 2	Математическая олимпиада	64	64—66
	Задача 3	О расписании	67	67—69
	Задача 4	Маша, Лида, Женя и Катя	69—70	71
	Задача 5	Кто есть кто?	70	
	Задача 6	Иван, Дмитрий и Степан	»	»
	Задача 7	Офицеры	»	»
	Задача 8	Кто с кем и где?	»	»
	Задача 9	Фамилии и профессии	»	»
	Задача 10	Цвет платья	70—71	»
	Задача 11	Кто в каком кружке?	71	»
	Задача 12	Имя, профессия, маршрут.	»	»
		Ответы к задачам § 1	»	
§ 2.	Задача	Логик и кибернетик	72—73	73—74
	Задача 1	Пятеро друзей	74	74, 84—85
	Задача 2	Обед с логикой	74—75	85
	Задача 3	Кто смотрит телевизор?	75	»
	Задача 4	Диагностическая	»	85—86
	Задача 5	Сигнальная установка	»	86
	Задача 6	На собрании	»	»
	Задача 7	Об управлении	75—76	86—87
	Задача 8	Аварийный станок	76	87
	Задача 9	Автоматизированный участок	»	87—88
	Задача 10	Контактная схема	»	88
	Задача 11	Автомат	76—77	88—89
	Задача 12	Переключатели на стенах	77	89—90
	Задача 13	Кто преступник?	»	90—91
	Задача 14	Кто разбил окно?	77—78	91—92
	Задача 15	Еще о расписании	78	92
	Задача 16	Соревнования по бегу	»	92—93
	Задача 17	Кто где живет?	»	93
	Задача 18	Шахматный турнир	78—79	94
	Задача 19	Кубок	79	»
	Задача 20	Комитет четырех	»	94—95
	Задача 21	Председатель и его заместитель	»	95
	Задача 22	Полярная экспедиция	79—80	»
	Задача 23	Переключатели электрической цепи	80	
	Задача 24	Еще переключатели	»	

Продолжение табл.

	Наименование задачи		Страницы условия	решения, комментариев, указаний
	Задача **25**	Краны водопровода	»	
	Задачи **26**—37	Рыцари и лжецы	80—81	95—96
	Задачи **38**—45	Раскрытие преступления	81—83	96—98
	Задача 46	Те же, а также оборотни и другая «нечистая сила»	83	98
	Задача 47	Дом с привидениями	83—84	98—99
		Решения задач § 2	84—99	
§ 3.	Кто какое место занял?		101—102	
	Математический кружок		104	
	Химическая олимпиада		»	
	Участок цеха		»	
	Люди и языки		»	
	Еще предметные кружки		»	
§4.	Задача **1**	Одноразрядный сумматор (двоичный)	104—105	
	Задача **2**	Наклейки на лбу	105	129—130
	Задачи 3, 4	Два города	105—106	
	Задача **5**	Логик в темнице	106—107	
	Задача **6**	Турист	107	
	Задача **7**	О переодетом Гекльберри Финне	»	
	Задача **8**	Парикмахер	108—109	
	Задача 9	Швейцарские кантоны	109	
	Задача **10**	Крокодил	109—110	
	Задача **11**	Лгун	110	
	Задача **12**	Парадокс Рассела — Цермело	110—111	
	Задача **13**	Парадокс Кантора	111	
	Задача **14**	Парадокс Ришара	111—112	130
	Задача **15**	Парадокс Греллинга	112	»
	Задача **16**	Парадокс Берри	»	130—131
	Задача **17**	Судья	112—113	131
	Задача **18**	Куча песка	113	
		Вариация на тему парадокс «Лгун»	113—115 115—116	
	Задача **19**	Шерлок Холмс среди ПКМЛ		
	Задача **20**	Бедный Мунк и чародей	115—116	
	Задача **21**	Мужик и барин	117	
	Задача **22**	Первое апреля	118	
	Задача **23**	Принцесса — человек или автомат?	118—119	
	Задача **24**	Отчего кошку назвали кошкой?	120	
	Задача **25**	Два соседа	»	
	Задача **26**	Рассказы о животных	120—121	
	Задача **27**	Волк Лобо	121	
	Задача **28**	Казнить или помиловать?	121—122	
	Задача **29**	Король и Министр	122	
	Задача **30**	Не верь первому встречному	»	
	Задача **31**	Экзамен по математической логике	122—123	

Продолжение табл.

Наименование задачи			Страницы условия	Страницы решения, комментариев, указаний
	Задача 32	Программированный контроль	123	
	Задача 33	Шерлок Холмс в стране логики, электроники, психологии и ... гангстеров	123—124	
	Задача 34	Я, ОН и парадокс	124—125	
	Задача 35	Глупый Ганс	125—126	
		Как возникают парадоксы	126	
		Послесловие к задачам на парадоксы	127—129	
	Задача 36	Испачканные лица	129	131
	Задача 37	Ханойская башня	129	131
	Задача 38	Шляпы	»	»
	Задача 39	Опять шляпы	»	131—132
		Решения и указания к задачам § 4	129—132	
§ 5.	Задача 1	Фальшивая монета	132—133	140—141
	Задача 2	Игра на дорожке	133	141—143
	Задача 3	Кто первый назовет данное число?	»	144
	Задача 4	Кто наберет четное число предметов?	»	144—145
	Задача 5	Игра «Гранди»	134	145
	Задача 6	Игра «Ним»	»	»
	Задача 7	Обобщенная игра «Ним» и частный вариант игры «Ним»	134	146
	Задача 8	Вращающийся бочонок	135	146—148
	Задача 9	Людоеды и миссионеры	136	148—150
	Задача 10	13-й подвиг Геракла	136—137	150—151
	Задача 11	Переливание жидкости	137	151—153
	Задача 12	Задуманное число	»	153
	Задача 13	Классификация чисел	137—138	
	Задача 14	Игра «Бридж-ит»	138—140	
		Анализ и решения задач § 5	140—143	

II. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ В СООТВЕТСТВИЕ

Арифметические знаки — это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры — это нарисованные формулы

Д. Гильберт

Ниже рассмотрен один алгоритмический метод решения широкого класса логических задач, в которых требуется установить отношение соответствия — в частности, взаимно-однозначного — между несколькими конечными множествами, если известны некоторые свойства этого отношения. Метод нагляден, легко реализуем, позволяет автоматизировать значительную часть умственной работы.

Поясним его сначала на конкретном примере для простейшего случая двух множеств.

Задача 1. На заводе работают три друга: слесарь (с), токарь (т), шлифовщик (ш). Их фамилии: Борисов (Б), Иванов (И), Семенов (С). У слесаря нет ни братьев, ни сестер (1), он самый младший из друзей (2). Семенов женат на сестре Борисова (3) и старше токаря (4). У кого какая специальность?

Построим систему координат XY, на оси X в выбранном масштабе «отложим» элементы множества специалистов, на оси Y — множества фамилий. Решить задачу — значит соотнести каждому элементу одного множества один, и только один элемент другого и наоборот, т. е. привести множества во взаимно-однозначное соответствие (биекцию).

Для удобства проведем через точки деления прямые, параллельные координатным осям (рис. 14). Читаем условие. Если два элемента находятся в соответствии—человек Y имеет специальность x, то точка (x, y) фиксируется затемненным кружком, в противном случае — светлым кружком.

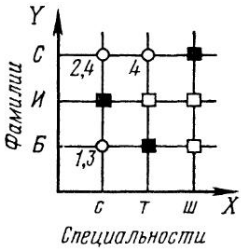

Рис. 14

Из сравнения условий (1) и (3) следует: Борисов не слесарь — светлый кружок в точке (с, Б)*. Из (4)—Семенов не токарь. Рассмотрев совместно (2) и (4), заключаем, что Семенов не слесарь. Это отражено светлыми кружками в точках (т, С) и (с, С). Не использованным осталось одно неявно заданное условие: между множествами специальностей и фамилий взаимно-однозначное соответствие. Геометрически это означает, что на каждой горизонтали или вертикали имеется по одной, и только одной затемненной фигуре. Отсюда вытекают два правила продолжения (экстраполяции), позволяющие автоматически завершить решение задачи.

1. Если на горизонтали (вертикали) все фигуры, кроме одной, светлые, то свободная позиция фиксируется затемненной фигурой («темная экстраполяция»).

2. Если на горизонтали (вертикали) имеется затемненная фигура, то все остальные фигуры на ней — светлые («светлая экстраполяция»).

З а м е ч а н и е. Для отличия: фигуры, полученные экстраполяцией, изображены квадратами.

О т в е т ы. Борисов — токарь, Иванов — слесарь, Семенов — шлифовщик. Как видим, из 9 фигур 6 (квадраты) получены методом экстраполяции.

Задача 2. Десяти незнакомым друг с другом мальчикам, съехавшимся в Дом пионеров областного центра на математическую олимпиаду, руководитель завязал глаза и рассадил их по двое за парты. Затем он вывел мальчиков в коридор и снял повязки. Когда ребята вернулись в зал и снова сели по двое за парты, в недоумении ожидая, что будет дальше, им была предложена задача. «Обратите внимание! Парты, за которыми вы сидите, пронумерованы разными красками: белой (б), черной (ч), красной (к), синей (с), зеленой (з). Среди вас по два участника пяти районов: Беловского (Б), Черемисиновского (Ч), Краснополянского (К),

* При кружках выставлены номера условий, определяющих их цвет.

Синегорского (С), Зеленоградского (З). Определите, как в первый раз за партами сидели посланцы районов, если известно следующее.

Цвета парт не совпадали с первой буквой названия районов сидящих за ними ребят (1). Синегорцы были не за красной партой (2). За белой или черной партой находились краснополянец и зеленоградец (3). За черной партой — представители только Зеленограда или Синегорска (4). За одной из парт были беловец и синегорец (5). За синей партой сидел мальчик из Черемисиновского района».

Р е ш е н и е. Заметим, что, как и ранее, каждому элементу множества X соответствует один, и только один элемент множества Y, однако обратное уже неверно: каждому элементу из Y соответствуют ровно два элемента множества X. Взаимно-однозначного соответствия, следовательно, нет. (В математике говорят: на множестве X задана функция, не имеющая обратной функции.) Геометрически это означает, что на каждой вертикали имеется один затемненный кружок, на каждой горизонтали — два. В связи с этим по горизонталям несколько изменятся правила экстраполирования.

1. Если на горизонтали все фигуры, кроме двух, светлые, то свободные две позиции фиксируются затемненными фигурами.

2. Если на горизонтали — две затемненные фигуры, то остальные — светлые (рис. 15, *а*).

Эта конфигурация непосредственно считывается из условия (1). Далее возникают трудности, связанные с необходимостью одновременного рассмотрения нескольких условий. Продолжение на рис. 15, *б*.

Из сравнения (3), (4), (5) следует, что за черной партой сидят З и С, (С, ч) и (З, ч) — затемненные кружки. Действительно, из (4): за черной партой — два З или два С или З и С. Первый вариант исключен условием (3), второй — (5).

Далее — «светлая» экстраполяция по горизонтали ч и двум вертикалям С и З. Продолжение решения см. на рис. 15, *в*. Дополнительные фигуры на рисунке для отличия — пятиугольные.

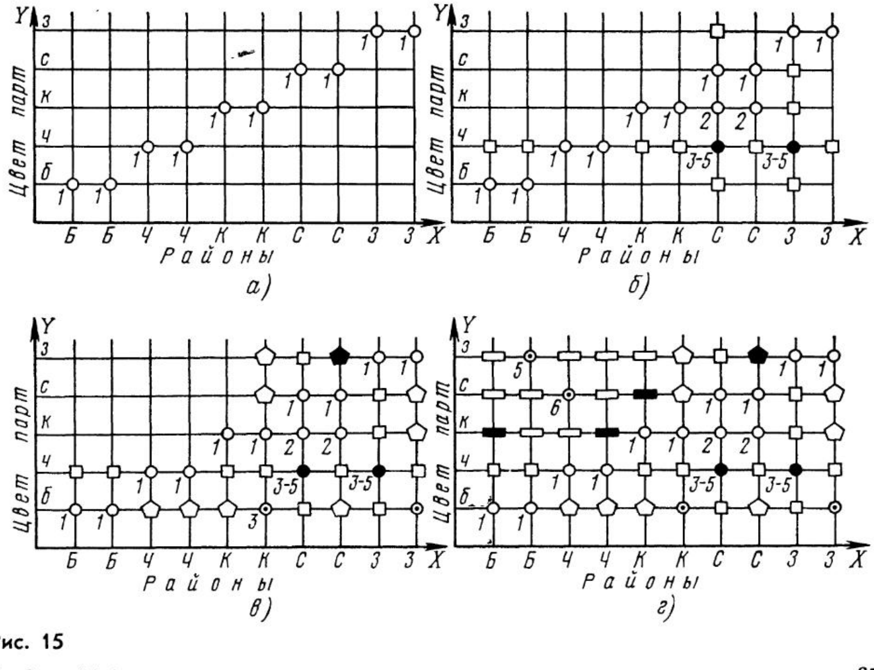

Рис. 15

Из (3): за белой партой сидят К и З, темные кружки (К, б) и (З, б). Затем выполняется «светлая» экстраполяция по вертикалям К и З, по горизонтали б, и открылась «темная» экстраполяция по третьей с краю вертикали С в точке (С, з).

Далее см. рис. 15, *г*, дополнительные фигуры — прямоугольники.

Из (5): за партой з сидят Б и С, и по вертикали Б и горизонтали з выполнена экстраполяция «светлого типа». На основании (6) затемняется позиция (Ч, с); «светлая» экстраполяция по третьей вертикали Ч; «темная» экстраполяция — по горизонтали к; «светлая» — по вертикалям Б и Ч; «темная» — по К. Задача решена. Из 50 фигур 32 проставлены автоматически по методу экстраполяции. Ответы считываются с рис. 15, *г*.

С о о т в е т с т в и е   м е ж д у   т р е м я   м н о ж е с т в а м и. Трехмерный случай в пространственной системе координат XYZ, вообще говоря, сводим к трем плоским случаям — по числу сочетаний из трех по два. Однако отношения между элементами в плоскостях независимы: в некоторых случаях по двум значениям отношения, т. е. цвету фигур в двух плоскостях, удается автоматически определить значение в третьей плоскости; это, естественно, облегчает решение. Ниже сформулированы и обоснованы два правила поэлементного «переноса», или проектирования значений отношения (цвета фигур) с двух плоскостей на третью.

Пусть имеются три множества: X, Y, Z, между элементами которых существует взаимно-однозначное соответствие. Для удобства будем считать, что соответствующие элементы лежат на одной вертикальной прямой, и условимся обозначать соответствие $\Longleftrightarrow$ (рис. 16):

$X_1 \Longleftrightarrow Y_1$, $Y_1 \Longleftrightarrow Z_1$, $X_3 \not\Longleftrightarrow Z_2$ (не соответствует) и т. д. Тогда, если два элемента порознь соответствуют третьему, то они соответствуют и друг другу: все трое лежат на одной вертикали. Если же $X_i \not\Longleftrightarrow Y_j$, $Y_j \Longleftrightarrow Z_j$, то $X_i \not\Longleftrightarrow Z_j$ (i, $j = 1, 2, 3$; $i \neq j$). Например, $X_1 \not\Longleftrightarrow Y_3$, они лежат на разных вертикалях, $Y_3 \Longleftrightarrow Z_3$, общая вертикаль. С другой стороны, X_1 и Z_3 не лежат на одной вертикали — $X_1 \not\Longleftrightarrow Z_3$.

В случае $X_i \not\Longleftrightarrow Y_j$, $Y_j \not\Longleftrightarrow Z_k$ исход не определен. Например, $X_2 \not\Longleftrightarrow Y_1$, $Y_1 \not\Longleftrightarrow Z_3$ и $X_2 \not\Longleftrightarrow Z_3$. С другой стороны, $X_2 \not\Longleftrightarrow Y_1$, $Y_1 \not\Longleftrightarrow Z_2$ и $X_2 \Longleftrightarrow Z_2$.

П р а в и л а   п о э л е м е н т н о г о   п р о е к т и р о в а н и я.

1. Два элемента, порознь соответствующие третьему, соответствуют друг другу.

2. Если из трех элементов один соответствует второму, а второй не соответствует третьему, то первый не соответствует третьему.

З а м е ч а н и е. Второе правило выводится из первого: если бы первый элемент соответствовал третьему, то по правилу 1 и второй соответствовал бы третьему.

Образно выражаясь, «темная фигура на темную» дает темную, «темная на светлую» — светлую. Это несколько напоминает правила знаков при умножении:

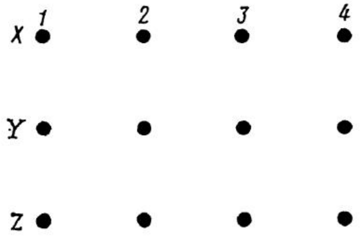

Рис. 16

«темное» — плюс, «светлое» — минус. Однако в данном случае при «умножении минуса на минус» знак не определен.

Задача 3 (о расписании). В девятом классе в понедельник шесть уроков: иностранный язык (И), физика (Ф), химия (Х), биология (Б), литература (Л), математика (М). Каждый из шести преподавателей — A, B, C, D, E, F — должен провести один урок. Известно следующее.

Если C не преподает химию, то уж точно биологию; он же занят на третьем уроке в восьмом классе. F не литератор, на втором уроке присутствовать не может. A и B преподают иностранный язык или физику. На четвертом уроке — химия, физика или иностранный язык, но преподаватели не A и не B. Пятый урок проводит если не B, то D. На шестом уроке иностранный язык, химия или литература: преподаватели — B или C. Математик, считая (согласно учению Пифагора!) четные числа «счастливыми», просил дать ему «четный» урок. Биологический кабинет освобождается не ранее второго урока.

Составить расписание на понедельник для 9-го класса, удовлетворяющее всем требованиям, и узнать, какой предмет преподает каждый учитель.

Решение. На рис. 17, *а* изображено условие данной задачи.

Решение выполнено на рис. 17, *б*. Поясним его.

Прежде всего обратим внимание на то, что в плоскости XY прямые A и B, параллельные оси Y, одинаково светло раскрашены и имеют две свободные вершины. В таком случае можно на двух прямых И и Ф, проходящих параллельно оси X через свободные вершины, вне данных прямых выставить светлые фигуры: (D; И), (D; Ф), (E; И), (E; Ф), (F; И), (F; Ф). По-видимому, аналогично обстоит дело при трех «светлых» параллелях с тремя свободными вершинами и т. д. Это позволяет сформулировать третье правило — множественной экстраполяции в плоскости, которое для случая двух параллелей выглядит так.

Правило множественной экстраполяции. Если две параллели в плоскости одинаково светло раскрашены везде, за исключением двух неокрашенных вершин, то на двух других параллелях, проходящих через эти вершины, вне данных прямых выставляются светлые фигуры.

Возвращаясь к задаче, обнаруживаем, что прежде всего необходимо выполнить множественную экстраполяцию в плоскости XY; «затемнение» позиции (М; 2) и «светлая» экстраполяция в этой же плоскости YZ по горизонтали 2.

Больше экстраполяций пока нет. Займемся проектированием с помощью «затемненной» фигуры (М; 2). Элемент М множества Y соответствует элементу 2 множества Z и не соответствует элементу A множества X, тогда по второму правилу проектирования элемент 2 множества Z не соответствует элементу A множества X — в плоскости XZ точка (A; 2) фиксируется «светлой» фигурой. Если в рассуждении заменить точку A точкой B, то придем к выводу, что в позиции (B; 2) — светлая фигура и т. д. Таким образом, мы приходим к правилу множественного проектирования, позволяющему одновременно спроектировать несколько фигур.

Правило множественного проектирования. Затемненная фигура в своей плоскости проектируется на координатные оси. Прямые, проведенные через проекции в двух других плоскостях, раскрашиваются одинаково (т. е. фигуры, как они есть, переносятся с одной прямой на другую, происходит «выравнивание»).

Замечание. Для отличия фигуры, полученные проектированием, мы изображаем треугольниками.

Продолжим решение. После проектирования открылась возможность еще одной множественной экстраполяции в плоскости XY вдоль прямых D и E: (D; Х), (D; Б), (E; Х), (E; Б). Теперь все возможности автоматического решения с помощью правил экстраполяции и проектирования пока исчерпаны. В создавшейся ситуации воспользуемся методом допущений и отсечения непригодных вариантов: высказывается гипотеза, и решение продолжается с помощью известных правил. В итоге — либо задача решается, либо возникает противоречие, свидетельствующее о ложности гипотезы. В последнем случае принимается противоположная гипотеза, и решение продолжается.

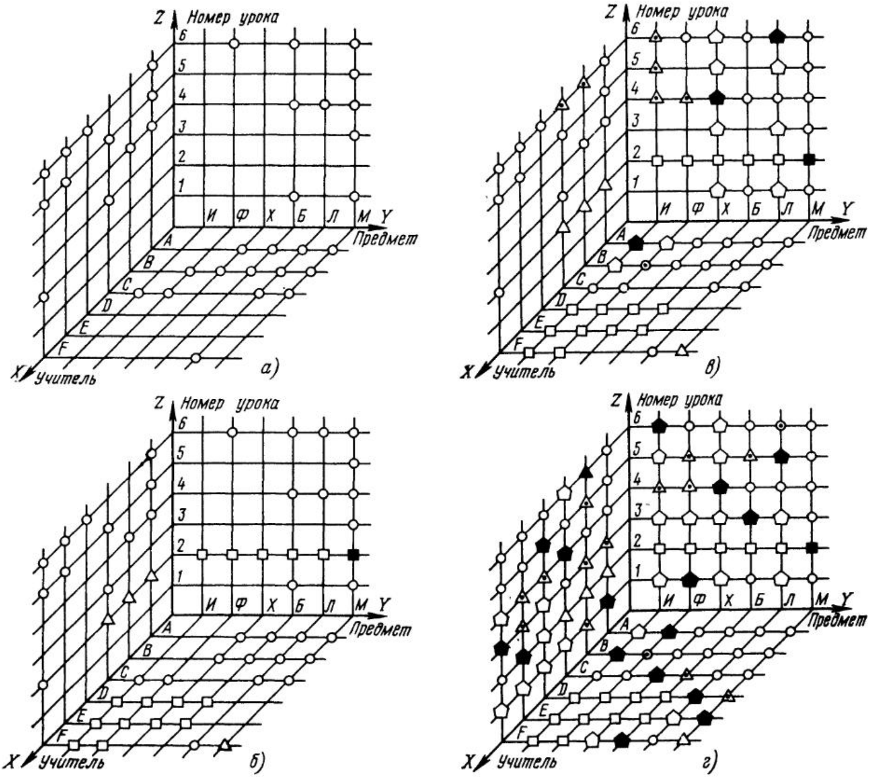

Рис. 17

В данной ситуации, вообще говоря произвольно, «затемним» кружок (В; Ф)

Продолжение на рис. 17, *в*, дополнительные фигуры — пятиугольники. «Светлая» экстраполяция в плоскости XY — точки (A; Ф) и (B; И). «Темная» экстраполяция в этой же плоскости: (A; И). Множественное проектирование с помощью «затемненных» фигур (A; И), (B; Ф). «Темная» экстраполяция в (X; 4) плоскости YZ. «Светлая» экстраполяция в этой же плоскости по вертикали X, «темная» — по горизонтали 6, «светлая» — по вертикали Л.

Множественное проектирование с помощью (Л; 6), и на верхней горизонтали плоскости XZ, а также на прямой Л в плоскости XY нет ни одной «затемненной» фигуры. Допущение о «затемненном» (B; Ф) — неверно, (B; Ф) — центр светлого круга.

Продолжение на рис. 17, *г*. Экстраполяция в плоскости XY. Проектирование с помощью (B; И) и (A; Ф). В плоскости YZ «темная» экстраполяция по горизонтали 4, «светлая» — по вертикали X. Проектирование с помощью (X; 4).

В этой ситуации действие наших правил как будто исчерпано. Однако почти очевидно, что точка (Л; 6) не является центром «затемненной» фигуры, в противном случае при последующем проектировании с помощью этой фигуры мы получили бы на верхней горизонтали 6 плоскости XZ одни светлые фигуры. Таким образом, (Л; 6) — центр светлого круга. Далее — в плоскости YZ «темная» экстраполяция по горизонтали 6, «светлая» — по вертикали И. Проектирование с помощью (B; И), экстраполяции в плоскости XZ, проектирование с помощью (D; 5). Экстраполяции в YZ и XY. Проектирование с помощью (Б; 3). Экстраполяции в XY и XZ.

Ответы: AФ1, BИ6, CХ4, DЛ5, EМ2, FБ3.

Из 108 фигур автоматически получены: 53 — экстраполяцией, 18 — проектированием. И только 37 — из условия и методом допущений.

В завершение приведем в порядок наш инструментарий: сформулируем окончательно все правила экстраполяции в плоскости, правило множественного проектирования из одних плоскостей в другие и, наконец, алгоритм решения задач рассматриваемого типа.

Правила экстраполяции в плоскости. 1. «Темная» экстраполяция. Если на горизонтали (вертикали) все фигуры, кроме одной, светлые, то свободная позиция занимается затемненной фигурой.

2. «Светлая» экстраполяция. Если на горизонтали (вертикали) имеется «затемненная» фигура, то все остальные фигуры на ней — светлые.

3. Множественная экстраполяция. Если две (n) параллели в плоскости одинаково светло раскрашены везде, за исключением двух (n) не окрашенных вершин, то на двух (n) параллелях другого направления, проходящих через эти вершины, вне данных прямых выставляются светлые фигуры.

Правило множественного проектирования (с помощью «затемненной» фигуры). «Затемненная» фигура в своей плоскости проектируется на координатные оси. Прямые, проведенные через проекции в двух других плоскостях, раскрашиваются одинаково.

Алгоритм решения задач на приведение множеств во взаимно-однозначное соответствие. 1. Строится пространственная система координат XYZ, на осях проставляются наименования множеств и — в выбранном масштабе — элементы этих множеств. Через точки деления в плоскостях проводятся прямые, параллельные координаты осям, — строятся сетки.

2. Читается условие задачи. Если пара элементов в двух множествах находится в соответствии (отношение истинно), то точка, лежащая на пересечении соответствующих прямых в плоскостях, становится центром затемненного кружка, в противном случае — светлого кружка.

3. В каждой плоскости применяются правила экстраполяции. Полученные фигуры —квадраты.

4. Применяются правила проектирования, полученные фигуры — треугольники. Возврат к указанию 3.

Если в сложившейся ситуации возможности экстраполяции и проектирования исчерпаны, а задача еще не решена, то делается допущение о цвете фигуры в какой-либо свободной вершине сетки. Возврат к указанию 3.

В случае противоречия (на какой-либо линии все фигуры — светлые или больше одной темной фигуры) допущение отклоняется. Цвет фигуры в данной точке изменяется на противоположный. Возврат к указанию 3.

Если противоположное допущение также приводит к противоречию, то задача не имеет решения.

ЗАДАНИЕ (ЗАДАЧИ ТИПА «КТО ЕСТЬ КТО?») (ЗАДАЧИ 5, 7, 8, 12 ВЗЯТЫ ИЗ [1])

Задача 4. Маша, Лида, Женя и Катя играют на разных инструментах — виолончели, рояле, гитаре, скрипке, но каждая только на одном. Они же владеют иностранными языками — английским, французским, немецким, испанским, но каждая одним. Девушка, играющая на гитаре, говорит по-испански. Ни Лида, ни Маша не играют на скрипке и на виолончели, не знают английского языка. Девушка, которая говорит по-немецки, не играет на виолончели. Женя знает французский язык, но не играет на скрипке. Кто играет на каком инструменте и каким иностранным языком владеет?

Задача 5. Алдар, Бела и Балаш имеют специальности аптекаря, бухгалтера, агронома — каждый по одной специальности. Они живут в Будапеште, Бекешчабе, Асоде. У двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что их имена. Жена аптекаря доводится Балашу младшей сестрой. Кто где живет и у кого какая профессия?

Задача 6. Три товарища — Иван, Дмитрий и Степан преподают различные предметы в школах Москвы, Ленинграда и Киева: химию, биологию, физику. Иван работает не в Москве, Дмитрий — не в Ленинграде. Москвич преподает не физику. Работающий в Ленинграде преподает химию. Дмитрий не преподает биологию. Какой предмет и в каком городе преподает каждый?

Задача 7. На одном вечере среди гостей оказались пять офицеров: пехотинец, артиллерист, летчик, связист и сапер, среди них — три майора и по одному в звании капитана и подполковника.

У Яноша такое же звание, как у его друга сапера. Офицер-связист и Ференц — друзья. Офицер — летчик вместе с Белой и Лайошем недавно побывали в гостях у Ференца. Незадолго до вечера у артиллериста и сапера почти одновременно вышли из строя радиоприемники. Оба в один день обратились к Лайошу с просьбой зайти к ним и помочь связисту устранить неисправность и не ошиблись: с тех пор приемники у обоих работают отлично.

Ференц чуть было не стал летчиком, но потом по совету своего друга, сапера, избрал иной род войск, Янош по званию старше Лайоша, а Бела старше Ференца. Андраш накануне вечером был в гостях у Лайоша. Определите звание каждого офицера и род войск, в котором он служит.

Задача 8. Андраш отправился на концерт. Бела провел все время с Ольгой, Чаба так и не увиделся с Рози. Панни побывала в кино. Рози посмотрела спектакль в театре. Постоянными членами компании были также Дьердь и Шари. Вместе с каждым юношей на том же виде культурных развлечений присутствовала и одна девушка. Кто с кем и где был?

Задача 9. Сапожников (С), Токарев (Т), Музыкантов (М), Кузнецов (К) по профессии сапожник (с), токарь (т), музыкант (м), кузнец (к). Однако ни у одного из них профессия не соответствует фамилии (1). Фамилия сапожника не соответствует профессии Музыкантова (2). Фамилия токаря не Кузнецов (3), и она не соответствует профессии Токарева (4). У кого какая профессия?

Задача 10. Три подруги — Аня (А), Валя (В), Наташа (Н) вышли в белом (б), зеленом (з), синем (с) платьях. Их туфли были одного и того же цвета. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадал. Платье Вали не белое. Наташа была в зеленых туфлях. Определите цвет платья каждой из подруг.

Задача 11. В лагере встретились пионеры: Алеша (А), Боря (Б), Валерий (В), Гриша (Г). При знакомстве оказалось, что каждый из них занимается в одном из кружков: шахматном (ш), юннатском (ю), конструкторском (к), фото (ф). Известно: 1) Боря и фотограф приехали в лагерь позже других; 2) вечером Боря с пионервожатым выиграли в городки у Алеши и конструктора; 3) Алеша старше Валерия и фотографа, шахматист старше Алеши; 4) Борис сказал: «Если уж Гриша не фотограф, то Валерий точно конструктор». Когда товарищи закричали, что он ошибается, то, ничуть не смутившись, он заявил: «Во всяком случае, Гриша и Валерий конструкторами одновременно быть не могут». Против этого никто не возражал. Кто в каком кружке?

Задача 12. Я встретил каждого из четырех незнакомцев — Алдара (А), Петера (П), Вилмоша (В), Лайоша (Л) в трамваях четырех маршрутов: 55, 15, 25, 33. Помню, что среди них были представители четырех профессий: слесарь (с), электромонтер (э), маляр (м) и фрезеровщик (ф), по одному от каждой профессии. Еще запомнилось следующее. Номер трамвайного маршрута, которым следовал Вилмош, начинается не с единицы. В 33-м трамвае ехал кто-то из рабочих-металлиатов. Номер трамвайного маршрута, которым следовал фрезеровщик, составлен из таких цифр, что их сумма равна числу букв в имени фрезеровщика. Маршрут Лайоша состоит из двух одинаковых цифр. Имя электромонтера начинается не с буквы В. Петер спросил у пассажира, где лучше сойти, чтобы пересесть на 25-й маршрут. Лайош сказал одному из пассажиров: «Вы сели не на тот трамвай, вам нужно пересесть на 55-й».

Помогите по этим данным определить имя и профессию каждого, а также номер маршрута, которым он ехал.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ § 1

Задача 4. Решение 1: Мрн, Жвф, Кса, Лги.
Решение 2: Мги, Жвф, Кса, Лрн.
Задача 6. ИхЛ, ДфК, СбМ.
Задача 7. Я — майор, летчик; Ф — майор, артиллерист; Б — полковник, связист; Л — капитан, пехотинец; А — майор, сапер.
Задача 8. Андраш — Шари, концерт; Бела — Ольга; Чаба — Панни, кино; Дьердь — Рози, театр.
Задача 9. См, Тк, Мт, Кс.
Задача 10. Аз, Вс, Нб.
Задача 11. Аю, Бш, Вф; Гк.
Задача 12. Л — с, 33; А — ф, 15; П — э, 55; В — м, 25.

2. РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

То, что в первый раз уловка, на третий становится методом.

Ж. Дьедонне. Дело Никола Бурбаки

Алгоритм решения.

1. Кодирование: обозначение искомых с помощью булевых переменных (принимающих значения 0, 1) и описание содержания этих переменных.

2. Запись условия в виде системы логических уравнений, в правых частях которых — единицы.

Замечание. Если правая часть уравнения — нуль, то отрицанием левой части она приводится к единице.

3. Образование конъюнкции левых частей системы и приравнивание ее единице. Полученное уравнение называется *характеристическим*. Оно равносильно исходной системе уравнений: каждое решение системы является решением характеристического уравнения, и наоборот.

Обоснование. Пусть некоторый кортеж значений переменных является решением системы уравнений. При подстановке в характеристическое уравнение он обращает каждый сомножитель конъюнкции в единицу, следовательно, и конъюнкция равна единице.

Верно и обратное — каждое решение характеристического уравнения (обращающее конъюнкцию в единицу) обращает в единицу все сомножители конъюнкции, следовательно, удовлетворяет системе уравнений.

4. Приведение левой части характеристического уравнения к ДНФ (в частности, к СДНФ).

Замечание. При раскрытии скобок в левой части характеристического уравнения по второму распределительному закону значительные упрощения получаются за счет использования законов противоречия, исключенного третьего, исключения повторений (сомножителей, слагаемых), а также поглощения: $A \vee AB \Leftrightarrow A$ $(A \vee AB \Leftrightarrow A\,(1 \vee B) \Leftrightarrow A)$. Последнее словесно читается так: в ДНФ слагаемое, входящее в состав другого слагаемого, уничтожает (поглощает) последнее. Например, $\neg X_1 X_2 \neg X_3 \vee \neg X_1 \neg X_3 \Leftrightarrow \neg X_1 \neg X_3$.

5. Приравнивание каждого слагаемого ДНФ, независимо от других, единице и извлечение из уравнений (левые части которых — конъюнкции переменных или их отрицаний) значений переменных. Каждый их набор является решением задачи.

Обоснование. Каждый набор найденных значений переменных обращает в единицу хотя бы одно слагаемое дизъюнкции и одновременно дизъюнкцию, т. е. является решением характеристического уравнения.

Замечание. Если после упрощений в ДНФ осталось одно слагаемое, задача имеет единственное решение, если более одного — несколько решений. В случае, когда в левой части характеристического уравнения все слагаемые уничтожаются, задача не имеет решения, противоречива (данные не совместны).

Задание. Постройте алгоритм решения логических задач методом характеристических уравнений второго типа — образованием дизъюнкций левых частей уравнений системы, правые части которых — нули, и приведением ее к КНФ.

Применим алгоритм к решению задачи.

Задача (Логик и кибернетик).

Логик попал в плен к кибернетикам и был заключен на вычислительном центре (ВЦ). Через некоторое время к нему явился Главный Кибернетик и сообщил, что покой Логика будут охранять феи Нетика (Н), Ева (Е) и Эмма (Э), возможно, вдвоем или даже втроем. Однако не исключено, что ввиду производственной загруженности фей охраны вообще не будет.

Логику предложены следующие условия освобождения из плена. «Вам предоставлено право высказывать предположения относительно имен охранниц, — сказал Главный.— Я же обязуюсь отвечать, истинны эти высказывания или ложны. Заключение продлится столько дней, сколько потребуется высказываний, чтобы вычислить имена охраняющих Вас фей. Количество дней Вашего пребывания у нас должно быть четным, и если для решения задачи Вам потребуется нечетное число высказываний, то заключение будет продлено на один день. Таково наше правило».

«Что ж, начнем, — сказал Логик. — Первое мое высказывание: если в охране не Н, то уж точно Е или Э, но не обе вместе».

«Вы ошиблись», — сказал Главный.

«Отлично, этого мне и надо! — воскликнул Логик, — более двух высказываний не потребуется. Итак: если в охране не Е или Э, то в ней или Н или, если не Н и не Е, то Э».

«Мудрено, но правильно», — сказал Главный. Но Логика уже этот ответ не беспокоил.

Докажите, что Логик получит свободу через два дня, независимо от характера ответа Главного на его второе высказывание. Кого назвал Логик в охране в случае ответа «да» и кого — в случае «нет»?

Р е ш е н и е.

У к а з а н и е 1 (алгоритма). $X=\begin{cases}1, \text{ если фея } X \text{ входит в охрану,}\\ 0 \text{— в противном случае } (X=\text{Н, Е, Э}).\end{cases}$

Далее — решение для случая ответа «да» на второе высказывание.

У к а з а н и е 2. $\begin{cases}\neg\text{Н}\Rightarrow(\text{Е}\sim\neg\text{Э})=0,\\ \neg\text{Е}\vee\text{Э}\Rightarrow\text{Н}\vee(\neg\text{Н}\neg\text{Е}\Rightarrow\text{Э})=1;\end{cases}$

$\begin{cases}\neg(\neg\text{Н}\Rightarrow(\text{Е}\sim\neg\text{Э}))=1,\\ \neg\text{Е}\vee\text{Э}\Rightarrow\text{Н}\vee(\neg\text{Н}\neg\text{Е}\Rightarrow\text{Э})=1.\end{cases}$

У к а з а н и е 3. $\neg(\neg\text{Н}\Rightarrow(\text{Е}\sim\neg\text{Э}))(\neg\text{Е}\vee\text{Э}\Rightarrow\text{Н}\vee(\neg\text{Н}\neg\text{Е}\Rightarrow\text{Э}))=1.$

У к а з а н и е 4. $\neg\text{Н}(\text{ЕЭ}\vee\neg\text{Е}\neg\text{Э})(\text{Е}\neg\text{Э}\vee\text{Н}\vee\text{Н}\vee\text{Е}\vee\text{Э})=1.$

П о я с н е н и е. Использованы равносильности для отрицания импликации и эквиваленции: $\neg(X\Rightarrow Y)\Leftrightarrow X\neg Y$, $\neg(X\sim Y)\Leftrightarrow X\neg Y\vee\neg XY$; для исключения импликации: $X\Rightarrow Y\Leftrightarrow\neg X\vee Y$; де Моргана: $\neg(X\vee Y)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\neg X\neg Y$, $\neg(XY)\Leftrightarrow\neg X\vee\neg Y$.

$(\neg\text{НЕЭ}\vee\neg\text{Н}\neg\text{Е}\neg\text{Э})(\text{Н}\vee\text{Е}\vee\text{Е}\neg\text{Э}\vee\text{Э})=1.$ Во вторых скобках — поглощение: $\text{Е}\vee\text{Е}\neg\text{Э}\Leftrightarrow\text{Е}$.

$(\text{Н}\neg\text{Н})\text{ЕЭ}\vee\neg\text{НЕЭ}\vee\neg\text{НЕЭ}\vee(\text{Н}\neg\text{Н})\neg\text{Е}\neg\text{Э}\vee(\text{Е}\neg\text{Е})\neg\text{Н}\wedge$ $\neg\text{Е}\vee(\text{Э}\neg\text{Э})\neg\text{Н}\neg\text{Е}=1.$ В скобках — нули: закон противоречия. $\neg\text{НЕЭ}=1$; $\text{Н}=0$, $\text{Е}=\text{Э}=1$. (О т в е т. В охране Ева и Эмма.)

Решение для случая ответа «нет» на второе высказывание Логика.

$$\neg(\neg\text{Н}\Rightarrow(\text{Е}\sim\neg\text{Э}))(\neg(\neg\text{Е}\vee\text{Э}\Rightarrow\text{Н}\vee(\neg\text{Н}\neg\text{Е}\Rightarrow\text{Э})))=1,$$

$$\neg\text{Н}(\text{ЕЭ}\vee\neg\text{Е}\neg\text{Э})(\neg\text{Е}\vee\text{Э})\neg\text{Н}\neg\text{Н}\neg\text{Е}\neg\text{Э}=1,$$

$$(\neg\text{НЕЭ}\vee\neg\text{Н}\neg\text{Е}\neg\text{Э})(\neg\text{Е}\vee\text{Э})\neg\text{Н}\neg\text{Е}\neg\text{Э}=1,$$

$$(\neg\text{НЕЭ}\vee\neg\text{Н}\neg\text{Е}\neg\text{Э})\neg\text{Н}\neg\text{Е}\neg\text{Э}=1;\quad\neg\text{Н}\neg\text{Е}\neg\text{Э}=1,$$

$\text{Н}=\text{Е}=\text{Э}=0$. (О т в е т. Охраны нет.)

Решение задачи с помощью характеристического уравнения второго типа.

Разберем случай ответа «да» на второй вопрос Логика.

$$(\neg Н \Rightarrow (Е \sim \neg Э)) \vee \neg(\neg Е \vee Э \Rightarrow Н \vee (\neg Н \neg Е \Rightarrow Э)) = 0,$$
$$Н \vee (\neg Е \vee \neg Э)(Е \vee Э) \vee (\neg Е \vee Э) \neg Н \neg Н \neg Е \neg Э = 0,$$
$$(Н \vee \neg Е \vee \neg Э)(Н \vee Е \vee Э) \vee \neg Н \neg Е \neg Э = 0,$$
$$Н \vee \neg Е \vee \neg Э = 0,$$

$Н = 0$, $Е = Э = 1$.

Задание. В последующих задачах решения приводятся только на основе характеристического уравнения первого типа.

Выполните решение этих задач с помощью уравнений второго типа.

Решите методом характеристических уравнений следующие системы логических уравнений:

1) $\begin{cases} X \neg Y = 0, \\ \neg X \vee \neg Y = 1, \\ \neg X \Rightarrow Y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (X \Rightarrow \neg Y)(\neg Y \Rightarrow X) = 1, \\ \neg X \cdot \neg Y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} X_1 \Rightarrow X_2 \cdot X_3 = 0, \\ (\neg X_2 \vee X_3)(\neg X_3 \vee X_2) = 0, \\ X_2 \Rightarrow X_3 = 1. \end{cases}$

Задача 1 (Пятеро друзей). Пятеро друзей решили записаться в кружок любителей логических задач: Андрей (А), Борис (Б), Виктор (В), Григорий (Г), Дмитрий (Д). Но староста кружка предложил им выдержать вступительный экзамен. «Вы должны приходить к нам по возможности больше вечеров, однако в разных сочетаниях, соблюдая следующие условия:

1) Если А приходит вместе с Д, то Б должен присутствовать.

2) Если Д отсутствует, то Б должен быть, а В пусть не приходит.

3) А и В не могут одновременно ни присутствовать, ни отсутствовать.

4) Если придет Д, то Г пусть не приходит.

5) Если Б отсутствует, то Д должен присутствовать, но это в том случае, если не присутствует В. Если же В присутствует при отсутствии Б, то Д приходить не должен, а Г должен прийти».

Сколько вечеров и в каком составе друзья могли прийти?

Ответы: 1) Присутствуют Б, В, Д: 01101; 2) присутствуют А, Б, Г: 11010; 3) присутствуют А, Б: 11000; 4) присутствуют А, Б, Д: 11001. Друзья могли приходить четыре вечера.

Задание. Решите задачу при измененном указании 5: «Если Б отсутствует, то Д должен присутствовать, но только в том случае, если не присутствует В. Если же В присутствует (независимо от присутствия или отсутствия Б), то Д приходить не должен, а Г должен прийти».

Ответы: 1) А, Б, Г; 2) А, Б; 3) А, Д — три вечера.

Задача 2 (Обед с логикой). N хотел пригласить на обед по возможности больше соседей: A, B, C, D, E, F, G, H. При этом он столкнулся со следующими трудностями:

1) A никогда не придет, если пригласить B или C или если одновременно пригласить D и E. 2) D придет только в том случае, если будет приглашен и E. 3) E не примет приглашения, если придет B. 4) F наносит визиты только в сопровождении G. 5) H не будет возражать

против присутствия F только в том случае, если будет приглашен и A. 6) Если не будет приглашен F, то H будет против приглашения E. 7) Чтобы пришел G, необходимо пригласить D или H. 8) G откажется от приглашения, если пригласят E без A, а также в случае приглашения B или C.

Какое минимальное число гостей и кого именно мог пригласить N?

Ответ. На обеде присутствуют A, E, F, G, H : 10001111.

Задача 3 (Кто смотрит телевизор?). Семья состоит из пяти человек: Алексей (А), Вера (В), Глеб (Г), Даша (Д), Евгений (Е).

1) Если телевизор смотрит А, то смотрит и В;

2) смотрят либо Д, либо Е, либо оба вместе;

3) смотрят либо В, либо Г, но не вместе;

4) Д и Г либо смотрят вместе, либо вовсе не смотрят;

5) если смотрит Е, то смотрят А и Д.

Кто смотрит телевизор?

Ответ. Телевизор смотрят Г и Д : 000110.

Задача 4 (Диагностическая). Имеются два симптома S_1 и S_2 двух болезней x_1 и x_2. Известно:

1) При x_2 есть S_1. 2) При x_1 и отсутствии x_2 есть S_2. 3) При x_2 и отсутствии x_1 нет S_2. 4) При S_1 или S_2 есть, по крайней мере, x_1 или x_2.

Составьте логическое уравнение, позволяющее по «значениям» признаков («есть», «нет») определить «значения» болезней.

Ответ: $\neg S_1 \neg S_2 \neg x_1 \neg x_2 \vee S_1 x_1 x_2 \vee S_1 S_2 x_1 \vee S_1 \neg S_2 x_2 \vee S_2 x_1 \neg x_2$.

Задача 5 (Сигнальная установка). Сигнальная установка имеет лампы: красную (к), зеленую (з), желтую (ж). Не зная закономерностей связи между световыми сигналами, мы наблюдаем на экране вспышки и гашения отдельных ламп. Замечены следующие вспышки: к с ж и з, к с ж, з, ж.

Выяснить, как ведут себя две другие лампы при включении (выключении) любой из ламп.

Ответ. Характеристическое уравнение: кжз $\vee$ кж $\neg$з $\vee$ $\neg$к$\neg$жз $\vee$ $\neg$кж$\neg$з.

Задача 6 (На собрании). Если Борис (Б) не пришел на собрание, то отсутствует и Алексей (А). Если Борис пришел на собрание, то присутствуют Алексей и Валерий (В). 1. Обязательно ли присутствует на собрании Алексей, если Валерий отсутствует? 2. Присутствует ли на собрании Валерий, если Алексей присутствует?

Ответ 1. Не обязательно. 2. Да.

Задача 7 (Об управлении). В ответ на зажигание сигнальных ламп (красной — К, желтой — Ж, зеленой — З) оператор производит определенные сочетания действий: D_1, D_2

1) если выполнено хотя бы одно действие, то загорается по крайней мере одна из двух ламп: Ж или К;

2) если Ж зажглась, а З нет, то производятся оба действия;

3) если К зажглась, а Ж нет, то не производится второе действие;

4) если производится первое или не производится второе действие, то не зажигается хотя бы одна из двух ламп: Ж или З;

5) если первое действие не производится, то справедливо, по крайней мере, одно из двух: К не зажглась или З зажглась;

6) если одновременно зажглись К и З, то первое действие не производится.

Составьте логическое уравнение, позволяющее вычислить действия оператора в зависимости от сигнальных ламп («горит», «не горит»).

Задача 8 (Аварийный станок). На участке цеха стоят три станка — два рабочих, третий аварийный. Требуется соединить станки автоматической линией так, чтобы третий станок включался тогда, и только тогда, когда останавливается хотя бы один из первых двух станков. Для этой цели надо прежде всего построить логическое уравнение, связывающее состояния станков или выражающее состояние аварийного станка как неявную функцию состояний рабочих станков.

Задача 9 (Автоматизированный участок). На автоматизированном участке цеха стоят 5 станков, действия которых скоординированы следующим образом. Если работают первый и третий станки, то четвертый не работает при условии, если подключен пятый станок. Если же первый станок подключен без третьего или выключен пятый станок, то четвертый обязательно подключен. Если пятый станок работает вместе со вторым при выключенном первом станке, то включен третий станок. Если выключены второй или пятый станки, то одновременно выключен и четвертый.

1. Мы наблюдаем работу первого и четвертого станков. Что можно сказать о состоянии остальных станков, скрытых за перегородкой?

2. Можно ли в данной системе остановить для ремонта одновременно третий и четвертый станки, оставив хотя бы один из других станков включенным?

Ответы. 1. Второй и пятый станки включены, третий — выключен. 2. Нельзя.

Задача 10 (Контактная схема). Для схемы, состоящей из четырех контактов, построить логическое уравнение, позволяющее в замкнутой цепи по значению любых трех контактов (замыкает, размыкает) определить значение четвертого контакта, если схема замыкается при выполнении хотя бы одного из следующих условий.

Замкнуты первый контакт и одновременно второй или третий — но не оба вместе.

Разомкнут четвертый контакт и два, и только два из остальных контактов. Замкнуты два, и только два контакта, но второй и четвертый вместе не замкнуты.

Задача 11 (Автомат). Имеется автомат (торговый) с шестью щелями для монет достоинством в 5 коп. (одна щель), 20 коп. (одна щель), 10 и 15 коп. (по две щели). Когда на входы в любом сочетании поступает 25 коп., автомат выдает товар (в каждую щель опускается не более одной монеты).

Рассматривая автомат как переключательную схему с 6 контактами (см. предыдущую задачу) — «щель замыкает или размыкает» в зависимости от того, опущена в нее монета или нет, — составить логическое уравнение, позволяющее при выдаче товара определить «значение» щели (опущена в нее монета или нет) по известным «значениям» остальных щелей.

Задания к задачам 10, 11. К задаче 10. Решите задачу «Контактная схема» на 6 контактах, если схема замкнута тогда, и только тогда, когда замкнута тройка последовательных контактов.

К задаче 11. При тех же входах рассмотреть контактную схему автомата, который выдает товар и 5 коп. сдачи, когда сумма опущенных монет 30 коп.

Задача 12 (Переключатели на стенах). На противоположных стенах комнаты имеется по одному переключателю (значения: включен, выключен). Переключатели соединены так, что с помощью любого из них можно включить и выключить свет в комнате.

Построить логическое уравнение, позволяющее в замкнутой цепи (свет горит) по значениям трех переключателей определить значение четвертого.

Указание. Возьмите следующее начальное условие: цепь замкнута, если все переключатели выключены — такая схема называется *счетчиком четности*: схема замыкает тогда, и только тогда, когда четное число переключателей включено (имеют значение 1).

Задание. Решите эту же задачу при другом начальном условии: цепь замыкается тогда, и только тогда, когда включено нечетное число переключателей (счетчик нечетности).

ЗАДАЧИ С ЧАСТИЧНО ФОРМАЛИЗОВАННЫМ РЕШЕНИЕМ: ЧАСТЬ УСЛОВИЙ НЕ ВКЛЮЧЕНА В СИСТЕМУ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Задача 13 (Кто преступник?). Шестеро подозреваемых в преступлении давали показания.

А: «Е виновен». Б: «А лжет, и я не виновен». В: «Виновны А или Е, а возможно, и оба». Г: «В говорит правду». Д: «В и Е — оба лгут». Е: «Я не виновен». Если правду сказал один, и только один из подозреваемых, то кто совершил преступление?

Замечание. Не формализуется последнее условие.

Ответ. Б преступник, Е сказал правду.

Задача 14 (Кто разбил окно?). В перерыве в классе оставались 9 учеников: Яша — Я, Борис — Б, Мария — М, Ваня — В, Володя — Вл, Степан — С, Леня — Л, Аня — А, Роза — Р, и один из них разбил окно. На вопрос учителя получены следующие ответы.

Я: «это сделал Вл». Б: «это неправда». М.: «я разбила». В: «разбила или М, или А». Вл: «Б лжет». С: «Разбила М». Л: «М не разбивала». А: «ни М, ни я не разбивали». Р: «А права, но Вл также не виновен». Из 9 показаний истинными оказались 3. Кто разбил окно?

Замечание. Последнее условие не формализуется.

Ответ. А разбила окно. Б, В, Л сказали правду. Остальные солгали.

Задача 15 (Расписание). Завучу школы надо составить расписание для восьмого класса «А» на первые четыре урока с соблюдением следующих условий.

Уроки должны быть математика — М, физика — Ф, химия — Х, русский язык — Р. Если 1-й урок математика, то 3-й урок не физика, а химия 2-й либо 4-й урок. Если физика не 1-й урок, то математика 1-й урок, а химия — 2-й. На 2-м уроке физик занят в восьмом классе «Б». Химик не согласен на 2-й урок, если физика — на 1-м, и, кроме того, химик отказывается от 4-го урока.

В каком порядке следует расположить предметы?

Замечание. Неформализуемая часть условия: между множествами предметов и уроков существует взаимно-однозначное соответствие.

Ответ. МХРФ, ФМХР, ФРХМ — три варианта.

Задача 16 (Соревнования по бегу). Четверо ребят — Алеша — А, Боря — Б, Ваня — В, Гриша — Г соревновались в беге. После этого на вопрос о распределении мест они ответили так. Алеша: «я не был ни первым, ни последним». Боря: «я не был последним». Ваня: «я был первым». Гриша: «я был последним».

Трое из этих ответов правильные, а один неверный. Как распределились места?

Замечание. Не формализуется последнее условие.

Ответы: 1-е решение: А, Б, Г сказали правду, В солгал. Места: Б — 1-е, А — 2-е, В — 3-е, Г — 4-е; 2-е решение: при тех же прочих условиях А занял 3-е место, В — 2-е.

Задача 17 (Кто где живет?). Четыре приятеля — А, Б, В, Г живут в разных комнатах общежития. На вопрос, где они живут, трое дали по два ответа, из которых один истинный, другой ложный.

А: «я живу в первой комнате, Г живет во второй»;

Б: «я живу в третьей комнате, А — во второй»;

В: «я живу во второй комнате, Б — в четвертой».

Кто в какой комнате живет?

Ответ: А — первая комната, В — вторая, Б — третья, Г — четвертая.

Задача 18 (Шахматный турнир). В финал шахматного турнира вышли Аркадий (А), Володя (В), Сеня (С). Перед финалом один болельщик сказал, что первое место займет Аркадий, второй — что Сеня не будет последним, а третий — что Володя не будет на первом месте. После игр оказалось, что один болельщик ошибся, а два других угадали. Как закончился финал, если никакие два участника не заняли одно и то же место?

Замечание. Неформализованные условия. 1) Один болельщик ошибся, два угадали. 2) Между множествами участников финала и мест существует взаимно-однозначное соответствие.

Ответы. 1-е решение. А — первое место, В — второе, С — третье. 2-е решение: С — первое место, А — второе место, В — третье. 3-е решение: С — первое место, В — второе, А — третье.

Задание. Решите задачу при условии, что угадал только один болельщик, а два других ошиблись.

Ответ. В — первое место, С — второе место, А — третье место.

Задача 19. Кубок оспаривали четыре команды: «Авангард» (А), «Богатырь» (Б), «Горизонт» (Г), «Победа» (П). Болельщики Сеня (С), Коля (К), Дима (Д) обсуждали их шансы на завоевание кубка. Сеня сказал, что победу одержат либо А, либо Б. Коля был уверен, что А кубка не видать. А Дима сказал, что ни П, ни Б не выиграют кубка. Правым оказался лишь один из них. Кому достался кубок?

Ответ. Кубок достался П («Победе»). Коля сказал правду.

Задача 20 (Комитет четырех). В согласен работать с кем угодно. Б не будет работать, если не изберут К. К не захочет работать с О. О согласен работать с кем угодно. Д не будет работать вместе с Х. Ф не будет без Г работать с Д, а без Д не будет работать с К. Г не будет работать, если в комитет войдут Б и К вместе, а кроме того, он не желает работать ни с В, ни с О. Чтобы Х дал согласие работать, должны быть избраны Б или Ф. Кроме того, он не будет работать с К, если не изберут Г, и не желает сотрудничать ни с В, ни с О. Сформируйте «комитет четырех» из восьми кандидатов.

Ответы. 1-е решение. В комитет входят Г, Д, К, Ф.
2-е решение. В комитет входят Б, В, Д, К.

Задание. Решите задачу с одним измененным условием: Д не будет работать без Х.

Ответ. Комитет: Г, Д, Х, Ф.

Задача 21 (Председатель и его заместитель). Из четырех членов комитета комсомола Абрамова (А), Булатниковой (Б), Воронцова (В), Гавриловой (Г) выберите председателя и его заместителя, соблюдая следующие условия:

$$\neg А \Rightarrow В \vee (\neg В \Rightarrow Б) = 1, \qquad \neg А \vee \neg Б = 1,$$

$$\neg В \Rightarrow (Б \neg Г \vee \neg Б Г) = 1, \qquad \neg Г \Rightarrow \neg А = 1.$$

$$БВ \vee \neg Б \neg В = 1,$$

Составьте текст к данной задаче. Ответы: А, Г или Б, В.

Задача 22 (Полярная экспедиция). Для полярной экспедиции из восьми претендентов — A, B, C, D, E, F, G, H требуется отобрать шесть специалистов.

Обязанности биолога могут выполнять E и G, гидролога — B и F, синоптика — F и G, врача — A и D, радиста — C и D, механика — C и H. Оказалось, F не поедет без B, D — без H и без C. C не хочет ехать вместе с G, а A — с B. Кого следует взять в экспедицию?

Ответ. В экспедицию следует взять B, C, D, E, F, H.

Задача 23 (Переключатели электрической цепи). x_1, x_2, x_3, x_4 — переключатели электрической цепи, которые могут находиться в состоянии «включено», «выключено». Хотя бы одно из следующих сочетаний «значений» переключателей (и никакие другие) замыкает цепь:

1) включены x_1 и один, и только один из переключателей x_2 и x_3;

2) выключены x_4 и два, и только два из остальных переключателей;

3) включены два, и только два переключателя, но x_2 и x_4 вместе не включены.

Составить логическое уравнение, удовлетворяющееся только теми значениями переменных (состояниями переключателей), при которых цепь замкнута.

Задача 24. Построить логическую формулу (и на ее основе — уравнение) соединения переключателей x_1, x_2, x_3, при котором цепь замкнута тогда, и только тогда, когда хотя бы один из переключателей выключен.

Задача 25. Ниже изображена система кранов водопровода (рис. 18). Запишите логическим уравнением, при каких комбинациях открытых кранов (переменные входят без отрицаний) на выходе будет вода?

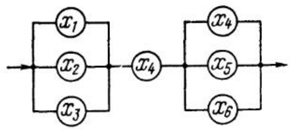

Рис. 18

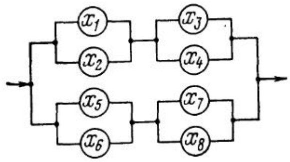

Рис. 19

Задание. Решите аналогичную задачу в соответствии с рис. 19.

Следующие задачи взяты в основном из [11]. Однако в отличие от приводимых там словесных решений здесь используется единый метод характеристического уравнения.

РЫЦАРИ И ЛЖЕЦЫ

На острове «Двоичном» живут Рыцари и Лжецы. Рыцари говорят только правду, Лжецы — только ложь.

Задача 26. Прохожий незнакомец встретил трех жителей острова, разговаривающих между собой: A, B, C. Он спросил у A: «Вы Рыцарь или Лжец?» Тот ответил, но неразборчиво, ничего нельзя было понять. Тогда незнакомец спросил у B: «Что сказал A?» «A сказал, что он Лжец», — ответил B. «Не верьте B! Он лжет!», — вмешался в разговор C.

Кто из островитян B и C Рыцарь и кто Лжец?

Указание. $X = \begin{cases} 1, & \text{если житель острова } X \text{ — Рыцарь,} \\ 0 & \text{— в противном случае } (X = A,\ B,\ C). \end{cases}$

В преобразовании характеристического уравнения используется равносильность: $X \sim Y \Leftrightarrow XY \vee \neg X \neg Y$.

Задача 27. В предыдущей задаче незнакомец задал A другой вопрос: «сколько Рыцарей среди вас?». И на этот вопрос A ответил неразборчиво. Поэтому пришлось спросить у B: «что сказал A?» B ответил: «A сказал, что среди нас один Рыцарь». И тогда C закричал: «не верьте B! Он лжет!».

Кто из двух персонажей B и C Рыцарь и кто Лжец?

Задача 28. В задаче два персонажа: A и B. A сказал: «По крайней мере один из нас — Лжец». Кто из A и B Рыцарь и кто Лжец?

Задача 29. A говорит: «Или я Лжец, или B — Рыцарь». Кто из двух персонажей A и B Рыцарь и кто Лжец?

Задача 30. A говорит: «или я Лжец, или два плюс два — пять». К какому заключению можно прийти?

Задача 31. Снова три островитянина: A, B, C. A и B высказывают следующие утверждения. A: «мы все Лжецы»; B: «один из нас Рыцарь». Кто из трех Рыцарь и кто Лжец?

Задача 32. A: «Мы все Лжецы». B: «ровно один из нас Лжец». Можно ли определить, кто такой B, Рыцарь или Лжец? Можно ли определить, кто такой C?

Задача 33. A: «Мы все Лжецы». B: «ровно один из нас Рыцарь». Кто такие A, B и C?

Задача 34. A: «я Лжец, а B — не Лжец». Кто из островитян A и B Рыцарь и кто Лжец?»

Задача 35. Снова трое. A: «B — Лжец». B: «A и C — оба одновременно Лжецы или одновременно Рыцари». Кто такой C— Рыцарь или Лжец?

Задача 36. Двое островитян A и B. Незнакомец спросил у одного из них: «кто-нибудь из вас Рыцарь?» — и по ответу узнал то, что хотел.

Кем был островитянин, к которому он обратился с вопросом: Рыцарем или Лжецом? Кем был другой островитянин?

Задача 37. Вы спрашиваете у одного из островитян, Рыцарь ли его приятель, стоящий рядом, и получаете ответ («да» или «нет»). Затем вы задаете такой же вопрос второму и также получаете ответ («да» или «нет»). Будут ли оба ответа одинаковыми?

Задача 38. На складе было совершено хищение. Преступник (или преступники) вывез награбленное на автомашине. Подозрение пало на трех преступников-рецидивистов A, B и C, которые были допрошены. Установлено следующее:

1) Никто, кроме A, B, C, не был замешан в хищении; 2) C никогда не ходит «на дело» без A (и, возможно, других соучастников); 3) B не умеет водить машину.

Виновен или не виновен A?

Задача 39. Подозреваемые в хищении A, B, C были вызваны на допрос. Установлено следующее: 1) никто, кроме A, B и C, в хищении не замешан; 2) A никогда не идет «на дело», по крайней мере без одного соучастника; 3) C не виновен. Виновен или не виновен B?

Задача 40. Трое подозреваемых в ограблении вызваны на допрос: A, B, C. Подозреваемые A и C близнецы и похожи друг на друга настолько, что мало кто их различает. В картотеке Скотланд-Ярда имеются подробные сведения о всех троих, в том числе об их характере, наклонностях, привычках. В частности, известно, что оба близнеца по характеру робки и ни один из них не отважится «идти на дело» без соучастника. Подозреваемый B отличается большой дерзостью и терпеть не может «ходить на дело» с соучастником. Кроме того, несколько свидетелей показали, что во время ограбления одного из близнецов видели в баре в Дувре, но установить, о ком из двух близнецов шла речь, не удалось.

Предположим, что в ограблении не был замешан никто, кроме A, B и C. Кто из них виновен и кто не виновен?

Указание.

$$A\ \ B,\ C=\begin{cases} 1, \text{ если соответствующий подозреваемый виновен,} \\ 0\text{—в противном случае.} \end{cases}$$

Задача 41. «Какие выводы вы сделали бы из следующих фактов?»— спросил инспектор Крэг у сержанта Макферсона:

1) если A виновен и B невиновен, то C виновен;

2) C никогда не действует в одиночку;

3) A никогда «не ходит на дело» вместе с C;

4) никто, кроме A, B и C, в преступлении не замешан, и по крайней мере один из этой тройки виновен.

Сержант поскреб в затылке и сказал: «Боюсь, что я смогу извлечь из этих фактов не слишком много, сэр. А вы можете, опираясь на них, доказать, кто из трех подозреваемых виновен и кто не виновен?»

«Не могу, — признался Крэг, — но, чтобы выдвинуть неопровержимое обвинение против одного из них, материала вполне достаточно».

Чья виновность не вызывает сомнений?

Задача 42. Три преступника-рецидивиста, подозреваемые в ограблении лавки, вызваны на допрос. Установлено следующее:

1) каждый из тройки подозреваемых A, B и C в день ограбления побывал в лавке, и никто больше в тот день в лавку не заходил;

2) если A виновен, то у него был ровно один сообщник;

3) если B не виновен, то C также не виновен;

4) если виновны ровно двое подозреваемых, то A — один из них;

5) если C не виновен, то B также не виновен.

Против кого выдвинуто обвинение?

Задача 43. На этот раз на допрос вызваны четверо подозреваемых в ограблении: A, B, C, D. Неопровержимыми уликами доказано, что по крайней мере один из них виновен и что никто, кроме A, B, C, D, в ограблении не участвовал. Кроме того, удалось установить следующее:

1) A безусловно не виновен;

2) если B виновен, то у него был ровно один сообщник;

3) если C виновен, то у него было ровно два сообщника. Инспектору Крэгу было особенно важно узнать, виновен или не виновен D, так как D был опасным преступником. К счастью, приведенных выше фактов достаточно, чтобы установить виновность или невиновность подозреваемого. Виновен или не виновен D?

Задача 44. По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B и C. Установлено следующее:

1) если A не виновен или B виновен, то C виновен;

2) если A не виновен, то C виновен.

Можно ли установить виновность каждого из трех подсудимых?

Задача 45. Подсудимых четверо: A, B, C, D. Установлено следующее.

1) Если A и B оба виновны, то C был соучастником.

2) Если A виновен, то по крайней мере один из обвиняемых B, C был соучастником.

3) Если C виновен, то D был соучастником.

4) Если A не виновен, то D виновен.

Кто из четырех подсудимых виновен вне всякого сомнения и чья вина остается под сомнением?

Те же, а также Оборотни и другая «нечистая сила».

Задача 46. В лесу живут Рыцари, Лжецы и Оборотни. Рыцари всегда говорят правду, Лжецы — всегда лгут. Оборотень может быть либо Рыцарем, либо Лжецом. Вы берете интервью у трех обитателей леса A, B, C. Известно, что ровно один из них — оборотень. В беседе с вами они заявляют. A: «C — Оборотень», B: «Я не Оборотень». C: «По крайней мере двое из нас — Лжецы». Кто Оборотень — Рыцарь или Лжец?

Задача 47 (Дом с привидениями). ([14], с. 92—93.) Старый дом посещался двумя «призрачными звуками»: Пением (П) и Смехом (С). Практически обнаружено, что на них можно воздействовать, играя на Органе (О) или сжигая Ладан (Л).

В течение каждой минуты любой из этих звуков либо звучит, либо молчит. Их поведение в последующую минуту зависит только от событий предыдущей минуты и описывается следующим образом.

1) Пение в последующую минуту ведет себя так же, как в предыдущую (звучит или не звучит), если только в эту предыдущую минуту не было игры на Органе при молчащем Смехе. В противном слу-

чае оно меняет свое поведение на противоположное (звучание на молчание, и наоборот).

2) Если в предыдущую минуту горел Ладан, Смех будет звучать или молчать в зависимости от того, звучало или молчало Пение (так что Смех копирует Пение минутой позже). Если, однако, Ладан не горел, Смех будет делать противоположное тому, что делало Пение.

В данную минуту звучат оба — Смех и Пение. Какие действия нужно совершить с Ладаном и Органом, чтобы установить и удержать тишину в доме?

Обозначения. $П_1$, $С_1$, $О_1$, $Л_1$ — значения соответственно Пения, Смеха, Органа, Ладана в какую-либо текущую минуту. $П_2$, $С_2$, $О_2$, $Л_2$ — соответствующие «значения» в последующую минуту

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если } X \text{ звучит (играет, горит)}, \\ 0 & \text{— в противном случае } (X = П, С, О, Л). \end{cases}$$

Указание. Начальные «значения» С и П заданы: $С_1 = П_1 = 1$. Первая задача — воздействием Органа и Ладана «подавить» звуки к концу первой минуты. Последующая задача — «удержать» Звуки в этом состоянии — решается уже при другом начальном условии: $С_1 = П_1 = 0$: конечное их состояние после первой минуты становится начальным для каждой последующей минуты. Это достигается уже другим регулированием — другим способом воздействия Органа и Ладана.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ § 2

Задача 1.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{еслу человек } X \text{ присутствует на вечере}, \\ 0 & \text{— в противном случае } (X = А, Б, В, Г, Д.) \end{cases}$$

Система логических уравнений:

$$\begin{cases} АД \Rightarrow Б = 1, & (1) \quad Д \Rightarrow \neg Г = 1, \qquad (4) \\ \neg Д \Rightarrow Б \neg В = 1, & (2) \quad \neg Б \Rightarrow (\neg В \Rightarrow Д)\,(В \Rightarrow \neg ДГ) = 1. \qquad (5) \\ А \sim В = 0, & (3) \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$(\neg А \vee \neg Д \vee Б)\,(Д \vee Б \neg В)\,(А \neg В \vee \neg АВ)\,(\neg Д \vee \neg Г)\,(Б \vee (В \vee \vee Д)\,(\neg В \vee \neg ДГ)) = 1.$$

Приведение левой части характеристического уравнения к ДНФ:

$$(\neg АД \vee \neg АБ \neg В \vee БД \vee Б \neg В)\,(А \neg В \neg Д \vee А \neg В \neg Г \vee \neg АВ \neg Д \vee \vee \neg АВ \neg Г) \cdot (Б \vee ВГ \neg Д \vee \neg ВД) = 1.$$

$$(\neg АВ \neg ГД \vee \neg АБВ \neg ГД \vee АБ \neg В \neg Д \vee АБ \neg В \neg Г) \cdot (Б \vee ВГ \neg Д \vee \vee \neg ВД) = 1.$$

$$\neg АБВ \neg ГД \vee АБ \neg В \neg Д \vee АБ \neg В \neg Г = 1.$$

СДНФ характеристического уравнения:

$$\neg АБВ \neg ГД \vee АБ \neg ВГ \neg Д \vee АБ \neg В \neg Г \neg Д \vee АБ \neg В \neg ГД = 1.$$

Задача 2.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если человек } X \text{ присутствует на обеде,} \\ 0 - & \text{в противном случае } (X = A, B, C, D, E, F, G, H.) \end{cases}$$

$$B \vee C \vee DE \Rightarrow \neg A = 1, \quad (1) \qquad H \Rightarrow (F \Rightarrow A) = 1, \quad (5)$$

$$D \Rightarrow E = 1, \quad (2) \qquad H \Rightarrow (\neg F \Rightarrow \neg E) = 1, \quad (6)$$

$$B \Rightarrow \neg E = 1, \quad (3) \qquad G \Rightarrow D \vee H = 1, \quad (7)$$

$$F \Rightarrow G = 1, \quad (4) \qquad E \neg A \vee B \vee C \Rightarrow \neg G = 1. \quad (8)$$

$$(\neg B \neg C \neg D \vee \neg B \neg C \neg E \vee \neg A)(\neg D \vee E)(\neg B \vee \neg E)(\neg F \vee G)(\neg H \vee \neg F \vee A)(\neg H \vee F \vee \neg E)(\neg G \vee D \vee H)(\neg B \neg C \neg E \vee \neg B \neg C A \vee \neg G) = 1.$$

$$(\neg B \neg C \neg D \vee \neg A \neg D \vee \neg A E)(\neg B \neg F \vee \neg B G \vee \neg E \neg F \vee \neg E G) \cdot (\neg H \vee \neg E \neg F \vee AF \vee A \neg E)(\neg G \vee D \neg B \neg C \neg E \vee D \neg B \neg C A \vee D \neg G \vee \neg B \neg C \cdot \neg E H \vee A \neg B \neg C H \vee \neg G H) = 1.$$

$$(\neg B \neg C \neg D \neg F \neg G \neg H \vee \neg B \neg C \neg D \neg E \neg F \neg G \vee \neg B \neg C \neg D \neg E \neg F H \vee \neg B \neg C \neg D A F G H \vee \neg A \neg B \neg D \neg F \neg G \neg H \vee \neg A \neg B \neg D \neg E \neg F \neg G \vee \neg A \neg B \neg C \neg D \neg E \neg F H \vee \neg A \neg D \neg E \neg F \neg G \vee \neg A \neg B \neg F \neg G \neg H E = 1.$$

Наибольшее число множителей без отрицаний в слагаемом:

$$\neg B \neg C \neg D A F G H.$$

Задача 3.

$$А \Rightarrow В = 1, \quad (1) \qquad ДГ \vee \neg Д \neg Г = 1, \quad (4)$$

$$Д \vee Е = 1, \quad (2) \qquad Е \Rightarrow АД = 1. \quad (5)$$

$$В \neg Г \vee \neg ВГ = 1, \quad (3)$$

$$(\neg А \vee В)(Д \vee Е)(В \neg Г \vee \neg ВГ)(ДГ \vee \neg Д \neg Г)(\neg Е \vee АД) = 1.$$

$$\neg А \neg ВГД \neg Е = 1.$$

Задача 4.

$$X_2 \Rightarrow S_1 = 1, \quad (1) \qquad X_2 \neg X_1 \Rightarrow \neg S_2 = 1, \quad (3)$$

$$X_1 \neg X_2 \Rightarrow S_2 = 1, \quad (2) \qquad S_1 \vee S_2 \Rightarrow X_1 \vee X_2 = 1. \quad (4)$$

$$(\neg X_2 \vee S_1)(\neg X_1 \vee X_2 \vee S_2)(\neg X_2 \vee X_1 \vee \neg S_2)(\neg S_1 \neg S_2 \vee X_1 \vee X_2) = 1.$$

$$\neg S_1 \neg S_2 \neg X_1 \neg X_2 \vee S_2 X_1 \neg X_2 \vee S_1 X_1 X_2 \vee S_1 \neg S_2 X_2 \vee S_1 S_2 X_1 = 1.$$

Это и есть диагностическое уравнение, позволяющее по данным значениям признаков судить о наличии той или иной болезни.

а) Пусть $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Подстановкой значений в характеристическое уравнение получаем: $\urcorner X_1 \urcorner X_2 = 1$; $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ — при отсутствии симптомов нет ни одной болезни.

б) $S_1 = 0$, $S_2 = 1$; $X_1 \urcorner X_2 = 1$; $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ — при наличии второго и отсутствии первого симптома первая болезнь есть, второй — нет.

в) $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $X_1 X_2 \vee X_2 = 1$, $X_2 = 1$, X_1 — не определено — при наличии первого и отсутствии второго симптома есть вторая болезнь, а про первую ничего определенного сказать нельзя.

г) $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $X_1 \urcorner X_2 \vee X_1 X_2 \vee X_1 = 1$, $X_1(X_2 \vee \urcorner X_2) \vee X_1 = 1$, $X_1 = 1$. При наличии обоих симптомов первая болезнь есть, вторая не определена.

Задача 5.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если лампа горит,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (X = \text{К, З, Ж.}) \end{cases}$$

Характеристическое уравнение считывается непосредственно с условия: $\text{КЖЗ} \vee \text{КЖ}\urcorner\text{З} \vee \text{ЗЖ}\urcorner\text{К} \vee \text{З}\urcorner\text{Ж}\urcorner\text{К} \vee \text{Ж}\urcorner\text{З}\urcorner\text{К}$.

Пусть $\text{К} = 1$ — горит красная лампа, тогда $\text{ЖЗ} \vee \text{Ж}\urcorner\text{З} = 1$, $\text{Ж} = 1$. Если на экране горит красная лампа, то горит и желтая, про зеленую ничего определенного сказать нельзя: она может гореть, а может и не гореть.

Другие случаи рассматриваются аналогично.

Задача 6.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если } X \text{ присутствует на собрании,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (X = \text{А, Б, В.}) \end{cases}$$

$\urcorner \text{Б} \Rightarrow \urcorner \text{А} = 1$, (1)

$\text{Б} \Rightarrow \text{АВ} = 1$, (2)

$(\text{Б} \vee \urcorner \text{А})(\urcorner \text{Б} \vee \text{АВ}) = 1$. $\text{АБВ} \vee \urcorner \text{А} \urcorner \text{Б} = 1$.

$\text{АБВ} = 1$, $\text{А} = \text{Б} = \text{В} = 1$. $\urcorner \text{А} \urcorner \text{Б} = 1$, $\text{А} = \text{Б} = 0$.

Возможны три решения: $\text{А} = \text{Б} = \text{В} = 1$; $\text{А} = \text{Б} = 0$, $\text{В} = 1$; $\text{А} = \text{Б} = 0$, $\text{В} = 0$.

Задача 7.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если лампа зажглась (действие выполняется),} \\ 0 \text{ — в противном случае } (X = \text{К, Ж, З, } D_1, D_2.) \end{cases}$$

$D_1 \vee D_2 \Rightarrow \text{К} \vee \text{Ж} = 1$, (1) $D_1 \vee \urcorner D_2 \Rightarrow \urcorner \text{Ж} \vee \urcorner \text{З} = 1$, (4)

$\text{Ж} \urcorner \text{З} \Rightarrow D_1 D_2 = 1$, (2) $\urcorner D_1 \Rightarrow \urcorner \text{К} \vee \text{З} = 1$, (5)

$\text{К} \urcorner \text{Ж} \Rightarrow \urcorner D_2 = 1$, (3) $\text{КЗ} \Rightarrow \urcorner D_1 = 1$. (6)

Таблица 18

К	Ж	З	1	2	К	Ж	З	1	2
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1

$$(\neg D_1 \neg D_2 \vee К \vee Ж)(\neg Ж \vee З \vee D_1 D_2)(\neg К \vee Ж \vee \neg D_2)(\neg D_1 D_2 \vee \vee \neg Ж \vee \neg З)\cdot(D_1 \vee \neg К \vee З)(\neg К \vee \neg З \vee \neg D_1) = 1.$$

$$\neg Ж(\neg К \vee З)\neg D_1 \neg D_2 \vee К \neg Ж \neg З D_1 \neg D_2 \vee Ж З \neg D_1 D_2 \vee \vee Ж \neg З D_1 D_2 = 1.$$

Результаты изображены в таблице истинности, извлеченной из характеристического уравнения (табл. 18). Таблицу можно получить из исходной системы, минуя характеристическое уравнение. Однако при большом числе уравнений со сложными переплетениями логических связей, как это имеет место в реальных сигнально-управляющих системах, вычисление по системе уравнений представляет значительные трудности.

Замечание. Из таблицы, пользуясь алгоритмом приведения к СДНФ, можно получить явные аналитические выражения для функций D_1 и D_2 от переменных К, Ж, З:

$D_1 = \neg К Ж \neg З \vee К \neg Ж \neg З \vee К Ж \neg З;\quad D_2 = \neg К Ж \neg З \vee \neg К Ж З \vee К Ж \neg З \vee К Ж З.$

Задача 8.

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й станок работает,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (i = 1, 2, 3.) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 X_2 \Rightarrow \neg X_3 = 1, \\ \neg X_1 \vee \neg X_2 \Rightarrow X_3 = 1, \end{cases}$$

$$X_3 \neg X_1 \vee X_3 \neg X_2 \vee X_1 X_2 \neg X_3 = 1.$$

Задача 9.

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й станок включен,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (i = 1, 2, 3, 4, 5.) \end{cases}$$

$$X_1 X_3 \Rightarrow (X_5 \Rightarrow \neg X_4) = 1, \ (1) \quad X_5 X_2 \neg X_1 \Rightarrow X_3 = 1, \quad (3)$$

$$X_1 \neg X_3 \vee \neg X_5 \Rightarrow X_4 = 1, \ (2) \quad \neg X_2 \vee \neg X_5 \Rightarrow \neg X_4 = 1, \quad (4)$$

$$(\neg X_1 \vee \neg X_3 \vee \neg X_5 \vee \neg X_4)((\neg X_1 \vee X_3) X_5 \vee X_4)(\neg X_5 \vee \neg X_2 \vee X_1 \vee \vee X_3)(X_2 X_5 \vee \neg X_4) = 1.$$

$$\neg X_1 \neg X_2 \neg X_5 \vee \neg X_1 X_3 X_5 \vee \neg X_1 X_4 \neg X_5 \vee \neg X_1 \neg X_2 X_4 \vee \neg X_1 X_3 X_4 \vee$$
$$\vee X_1 X_2 \neg X_3 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 \neg X_4 X_5 = 1.$$

1. По условию $X_1 = X_4 = 1$, тогда $X_1 X_2 \neg X_3 X_4 X_5 = 1$.
2. $X_3 = X_4 = 0$, следовательно, $\neg X_1 \neg X_2 \neg X_5 = 1$.

Задача 10.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если цепь замкнута,} \\ 0, \text{ если разомкнута.} \end{cases}$$

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й контакт замыкает,} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Из условия: $X = X_1 (X_2 \neg X_3 \vee \neg X_2 X_3) \vee \neg X_4 (\neg X_1 \neg X_2 X_3 \vee \vee \neg X_1 \neg X_3 X_2 \vee \neg X_2 \neg X_3 X_1) \vee X_1 X_2 \neg X_3 \neg X_4 \vee X_1 X_3 \neg X_2 \neg X_4 \vee \vee X_1 X_4 \neg X_2 \neg X_3 \vee X_2 X_3 \neg X_1 \neg X_4 \vee X_3 X_4 \neg X_1 \neg X_2$.

Но цепь должна быть замкнутой, и $X = 1$, итогом является характеристическое уравнение: $X_1 X_2 \neg X_3 \vee X_1 \neg X_2 X_3 \vee \neg X_1 \neg X_2 X_3 \wedge \neg X_4 \vee \neg X_1 X_2 \neg X_3 \neg X_4 \vee X_1 \neg X_2 \neg X_3 \neg X_4 \vee X_1 X_2 \neg X_3 \neg X_4 \vee X_1 \wedge \neg X_2 X_3 \neg X_4 \vee X_1 \neg X_2 \neg X_3 X_4 \vee \neg X_1 X_2 X_3 \neg X_4 \vee \neg X_1 X_2 X_3 X_4 = 1$.

Пусть, например, $X_1 = 0$, $X_3 = 1$, $X_4 = 1$; первый контакт размыкает, третий и четвертый — замыкают. При подстановке данных в характеристическое уравнение получается $X_2 = 0$ — чтобы цепь была замкнута, второй контакт должен размыкать.

Если $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, то уравнение решения не имеет: $0 \neq 1$. Это означает, что при размыкающих первых трех контактах цепь разомкнута.

Задача 11.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если схема замыкает (автомат выдает товар),} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й ключ (}i\text{-я щель) замыкает: есть монета,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{cases}$$

Замыкание схемы происходит, когда количество денег в щелях равно 25 коп. ($X = 1$). Этому отвечает следующая таблица истинности (табл. 19).

$X = X_1 X_2 \neg X_3 \neg X_4 \neg X_5 \neg X_6 \vee X_1 \neg X_2 X_3 X_4 \neg X_5 \neg X_6 \vee \neg X_1 \neg X_2 X_3 \wedge \neg X_4 X_5 \neg X_6 \vee \neg X_1 \neg X_2 X_3 \neg X_4 \neg X_5 X_6 \vee \neg X_1 \neg X_2 \neg X_3 X_4 X_5 \neg X_6 \vee \vee \neg X_1 \neg X_2 \neg X_3 X_4 \neg X_5 X_6 = 1$.

Пусть, например, $X_3 = X_4 = 1$, $X_2 = X_5 = X_6 = 0$. После подстановки в характеристическое уравнение $X_1 = 1$.

Если $X_1 = X_5 = 1$, $X_2 = X_3 = X_4 = X_6 = 0$, то уравнение решения не имеет: $0 \neq 1$. Значит, при загрузке щелей 1 и 5 схема не за-

Таблица 19

5 X_1	20 X_2	10 X_3	10 X_4	15 X_5	15 X_6	25 X
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1

мыкает. Так фиксируется автоматом нарушение условия — неправильный платеж, независимо от того, идет ли речь о недоплате или переплате.

Задача 12.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если цепь замкнута (лампа горит),} \\ 0 \text{ — в противном случае;} \end{cases}$$

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й переключатель в состоянии «включен»,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{cases}$$

Зададимся, для определенности, начальным условием: цепь замкнута ($X = 1$) при $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$ — все переключатели выключены. Тогда, по условию, изменение значения одного из них (любого) размыкает цепь, двух — замыкает и т. д. Изменение значений четного числа переключателей по сравнению с данной ситуацией (свет горит, не горит) не изменяет ситуации, нечетного числа — изменяет ее на противоположную. Этому отвечает таблица (табл. 20). Здесь замечается такая закономерность: цепь замкнута ($X = 1$, или лампа горит) тогда, и только тогда, когда число единиц в значениях переключателей четно, т. е. четно число включенных переключателей. В этом случае функция X булевых переменных X_1, X_2, X_3, X_4 называется *счетчиком четности*. Ее аналитическим выражением является, как это видно из таблицы, следующая дизъюнкция — для случая, разумеется, четырех переменных:

$$X = \neg X_1 \neg X_2 \neg X_3 \neg X_4 \vee \neg X_1 \neg X_2 X_3 X_4 \vee \neg X_1 X_2 \neg X_3 X_4 \vee$$
$$\vee \neg X_1 X_2 X_3 \neg X_4 \vee X_1 \neg X_2 \neg X_3 X_4 \vee X_1 \neg X_2 X_3 \neg X_4 \vee$$
$$\vee X_1 X_2 \neg X_3 \neg X_4 \vee X_1 X_2 X_3 X_4 = 1.$$

Мы получили характеристическое уравнение. Пусть первый и четвертый переключатели включены, третий — выключен. Подстановкой данных в характеристическое уравнение получаем: $X_2 = 0$, что соответствует таблице.

Таблица 20

X_1	X_2	X_3	X_4	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Задача 13.

$$X_1 = \begin{cases} 1, \text{ если человек } X \text{ говорит правду,} \\ 0, \text{ если он лжет;} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, \text{ если человек } X \text{ виновен,} \\ 0 - \text{в противном случае } (X = \text{А, Б, В, Г, Д, Е.}) \end{cases}$$

$А_1 \sim Е_2 = 1,$ (1) $Г_1 \sim В_1 = 1,$ (4)

$Б_1 \sim \neg А_1 \neg Б_2 = 1,$ (2) $Д_1 \sim \neg В_1 \neg Е_1 = 1,$ (5)

$В_1 \sim А_2 \vee Е_2 = 1,$ (3) $Е_1 \sim \neg Е_2 = 1.$ (6)

Кроме того, одно условие выражено словесно: конъюнкции, содержащие более одной буквы с индексами 1 или 2 без отрицания, ложны (7). (Обоснование: правду сказал один, и только один, преступник — один.) По ходу преобразований соответствующие конъюнкции исключаются

$$(А_1 Е_2 \vee \neg А_1 \neg Е_2)(Б_1 \neg А_1 \neg Б_2 \vee \neg Б_1 А_1 \vee \neg Б_1 Б_2)(В_1 А_2 \vee В_1 Е_2 \vee$$
$$\vee \neg В_1 \neg А_2 \neg Е_2)(Г_1 В_1 \vee \neg Г_1 \neg В_1)(Д_1 \neg В_1 \neg Е_1 \vee \neg Д_1 В_1 \vee$$
$$\vee \neg Д_1 Е_1)(Е_1 \neg Е_2 \vee \neg Е_1 Е_2) = 1.$$

$$Е_1 Б_2 \neg А_1 \neg Б_1 \neg В_1 \neg Г_1 \neg Д_1 \neg А_2 \neg Е_2 = 1.$$

Несколько слов о роли символической записи связей. Оказывается, уже одних уравнений (1)—(6) без применения метода характеристических уравнений достаточно для эффективного решения задачи. Однако в этом случае прибегают к методу проб и отсечению непригодных вариантов приведением к противоречию. Покажем, как это делается в данной задаче.

1) Пусть, вообще говоря, $А_1 = 1$, т. е. А сказал правду. Из (1): $Е_2 = 1$. Все другие переменные — нули. Убеждаемся, что не удовлетворено уравнение (3). Следовательно, $А_1 = 0$.

2) Пусть $Б_1 = 1$. Тогда $В_1 = Г_1 = Д_1 = Е_1 = 0$ (условие 7). Из (1) с учетом предыдущего результата следует: $Е_2 = 0$, а из (6) — $Е_2 = 1$, получилось противоречие. Таким образом, $Б_1 = 0$.

3) Пусть $В_1 = 1$. Из (7): $Г_1 = Д_1 = Е_1 = 0$. Из (1): $Е_2 = 0$, из (6): $Е_2 = 1$ — снова противоречие и т. д.

Осмысливая свои неудачные попытки, мы замечаем, что уравнения (1) и (6) совместны только при условии противоположных значений $А_1$ и $Е_1$. Это наблюдение позволяет избавиться от полного перебора. Действительно, $А_1 = 0$, следовательно, $Е_1 = 1$, т. е. Е сказал правду. Тогда $А_1 = Б_1 = В_1 = Г_1 = Д_1 = 0$ и из (2): $Б_2 = 1$ — преступник Б.

Опыт показывает, что одни обучающиеся приходят к этому интересному наблюдению (противоположность $А_1$ и $Е_1$) путем меньшего числа испытаний, другие — большего, и очень немногие решают задачу в полном переборе.

Теперь легко построить и чисто словесное решение задачи, вовсе без логической формализации — достаточно «ухватиться» за условия (1) и (6): А и Е утверждают противоположное — один из них сказал правду. Это не может быть А, в противном случае окно разбил Е (условие 1) и В также прав (условие 3). Правду, следовательно, сказал Е, и поскольку Б лжет, то из условия (2) следует, что он преступник.

Однако именно формализация задачи с помощью логических уравнений делает ее обозримой и помогает обратить внимание на наиболее существенные для решения условия (1) и (6). Преимущества символического решения перед словесным те же, что и достоинства алгебраической символики по сравнению со словесным решением математических задач.

Задача 14.

$$X_1 = \begin{cases} 1, \text{ если ученик } X \text{ сказал правду,} \\ 0 \text{ — в противном случае;} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1, \text{ если ученик } X \text{ разбил окно,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (X = \text{Я, Б, М, В, Вл, С, Л, А, Р.}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} Я_1 \sim Вл_2 = 1, & (1) & С_1 \sim М_2 = 1, & (6) \\ Б_1 \sim \neg\, Вл_2 = 1, & (2) & Л_1 \sim \neg\, М_2 = 1, & (7) \\ М_1 \sim М_2 = 1, & (3) & А_1 \sim \neg\, М_2 \neg\, А_2 = 1, & (8) \\ В_1 \sim М_2 \vee А_2 = 1, & (4) & Р_1 \sim \neg\, М_2 \neg\, А_2 \neg\, Р_2 = 1. & (9) \\ Вл_1 \sim Вл_2 = 1, & (5) & & \end{array}$$

Словесно запишем условие (10): конъюнкции, содержащие более трех множителей с индексом 1 без отрицания или более одного множителя с индексом 2 без отрицания, — ложны (и, следовательно, из дизъюнкции исключаются)

$$(Я_1 Вл_2 \vee \neg Я_1 \neg Вл_2)(Б_1 \neg Вл_2 \vee \neg Б_1 Вл_2)(М_1 М_2 \vee \neg М_1 \neg М_2)(В_1 М_2 \vee \vee В_1 А_2 \vee \neg В_1 \neg М_2 \neg А_2)(Вл_1 Вл_2 \vee \neg Вл_1 \neg Вл_2)(С_1 М_2 \vee \vee \neg С_1 \neg М_2)(Л_1 \neg М_2 \vee \neg Л_1 М_2)(А_1 \neg М_2 \neg А_2 \vee \neg А_1 М_2 \vee \neg А_1 А_2)(Р_1 \neg М_2 \neg А_2 \neg Р_2 \vee \neg Р_1 М_2 \vee \neg Р_1 А_2 \vee \neg Р_1 Р_2) = 1.$$

$$\neg А_1 Б_1 В_1 \neg Вл_1 Л_1 \neg М_1 \neg Р_1 \neg С_1 \neg Я_1 А_2 \neg Вл_2 \neg М_2 = 1.$$

$$Б_1 = В_1 = Л_1 = А_2 = 1.$$

Задача 15.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-м уроке поставлен предмет } Y, \\ 0 & \text{— в противном случае } (Y = М, Ф, Х, Р; \quad i = 1, 2, 3, 4.) \end{cases}$$

$$М_1 \Rightarrow \neg Ф_3 (Х_2 \vee Х_4) = 1, \quad (1) \qquad Ф_2 = 0, \quad (3)$$

$$\neg Ф_1 \Rightarrow М_1 Х_2 = 1, \quad (2) \qquad (Ф_1 \Rightarrow \neg Х_2) \neg Х_4 = 1. \quad (4)$$

Неформализуемая часть условия (5): одна буква не может входить в конъюнкцию с двумя различными индексами (один предмет не ставится на два урока, но на одном обязательно), равно как каждый индекс стоит при одном, и только одном предмете.

$$(\neg М_1 \vee \neg Ф_3 Х_2 \vee \neg Ф_3 Х_4)(Ф_1 \vee М_1 Х_2) \neg Ф_2 (\neg Ф_1 \vee \neg Х_2) \neg Х_4 = 1.$$

$$Ф_1 \neg М_1 \neg Ф_2 \neg Х_2 \neg Х_4 \vee М_1 Х_2 \neg Ф_1 \neg Ф_2 \neg Ф_3 \neg Х_4 = 1.$$

а) $Ф_1 \neg М_1 \neg Ф_2 \neg Х_2 \neg Х_4 = 1.$

б) $М_1 Х_2 \neg Ф_1 \neg Ф_2 \neg Ф_3 \neg Х_4 = 1.$

Замечание. Данная задача относится к типу задач на взаимно-однозначное соответствие (между множествами предметов и уроков). Однако непосредственное применение известного алгоритма здесь затруднительно: соотношения между предметами и уроками заданы опосредованно. Но к концу связи стали явными, и «доводка» выполнена в уме. Например, в ответе а): физика — первый урок; химия — не второй и не четвертый, значит, третий. Остается либо математика — второй, русский язык — четвертый, либо наоборот. Речь идет об экстраполяции, которую можно автоматически выполнить с помощью алгоритма взаимно-однозначного соответствия. Покажем, как это делается для случая б) (рис. 20).

Задача 16.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если } X \text{ сказал правду}, \\ 0 & \text{— если солгал;} \end{cases}$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } X \text{ занял } i\text{-е место}, \\ 0 & \text{— в противном случае } (X = А, Б, В, Г; \quad i = 1, 2, 3, 4.) \end{cases}$$

$$А \sim \neg А_1 \neg А_4 = 1, \quad (1) \qquad В \sim В_1 = 1, \quad (3)$$

$$Б \sim \neg Б_4 = 1, \quad (2) \qquad Г \sim Г_4 = 1. \quad (4)$$

Неформализованные условия (5): конъюнкция ложна, если а) в ней больше одного сомножителя типа X с отрицанием (т. е. более одного солгали) или более трех — без отрицания; б) существует взаимно-однозначное соответствие между множествами людей и мест.

$$(\text{А}\neg\text{А}_1\neg\text{А}_4 \vee \neg\text{А}\text{А}_1 \vee \neg\text{А}\text{А}_4)(\text{Б}\neg\text{Б}_4 \vee \neg\text{Б}\text{Б}_4)(\text{В}\text{В}_1 \vee \neg\text{В}\neg\text{В}_1)(\text{Г}\text{Г}_4 \vee \neg\text{Г}\neg\text{Г}_4) = 1.$$

$$\text{АБВ}\neg\text{Г}\neg\text{А}_1\neg\text{А}_4\neg\text{Б}_4\text{В}_1\neg\text{Г}_4 \vee \text{АБГ}\neg\text{В}\neg\text{А}_1\neg\text{А}_4\neg\text{Б}_4\neg\text{В}_1\text{Г}_4 = 1$$

Характеристическое уравнение выводит к двум решениям: 1) $\text{А} = \text{Б} = \text{В} = 1, \text{Г} = 0, \text{В}_1 = 1, \text{А}_1 = \text{А}_4 = \text{Б}_4 = \text{Г}_4 = 0$; 2) $\text{А} = \text{Б} = \text{Г} = 1$, $\text{В} = 0$, $\text{Г}_4 = 1$, $\text{А}_1 = \text{А}_4 = \text{Б}_4 = \text{В}_1 = 0$.

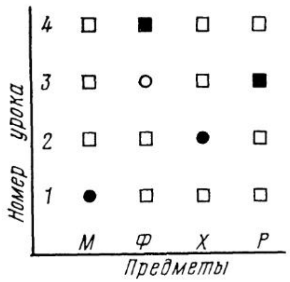

Рис. 20

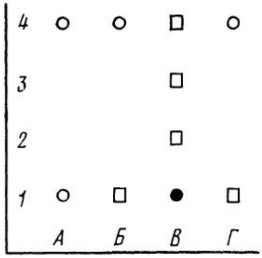

Рис. 21

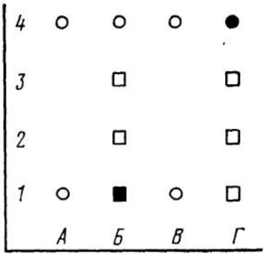

Рис. 22

У нас, однако, нет уверенности, что в обоих случаях выполнено условие 5, б). Так как соотношения между людьми и занятыми местами теперь задано явно, то для решения вопроса применим алгоритм взаимно-однозначного соответствия множеств.

1-е решение (рис. 21). Как видим, на четвертой горизонтали нет зачерненных фигур, взаимно-однозначное соответствие отсутствует, решение неприемлемо.

2-е решение (рис. 22). Теперь открываются два варианта решения.

Задача 17.

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если человек } X \text{ живет в } i\text{-й комнате,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (X = \text{А, Б, В, Г};\ i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

$$\text{А} \sim \neg\text{Г}_2 = 1, \ (1) \quad \text{Б}_3 \sim \neg\text{А}_2 = 1, \ (2) \quad \text{В}_2 \sim \neg\text{Б}_4 = 1, \qquad (3)$$

Неформализованное условие (4): между множествами людей и комнат — взаимно-однозначное соответствие

$$(\text{А}_1\neg\text{Г}_2 \vee \neg\text{А}_1\text{Г}_2)(\text{Б}_3\neg\text{А}_2 \vee \neg\text{Б}_3\text{А}_2)(\text{В}_2\neg\text{Б}_4 \vee \neg\text{В}_2\text{Б}_4) = 1,$$
$$\text{А}_1\text{В}_2\text{Б}_3\neg\text{Г}_2\neg\text{А}_2\neg\text{Б}_4 = 1.$$

Задача 18.

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если человек } X \text{ занял } i\text{-е место,} \\ 0 \text{ — в противном случае;} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, \text{ если болельщик } j \text{ угадал результат игры,} \\ 0 \text{ — в противном случае } (X = A,\ B,\ C;\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3.) \end{cases}$$

$$Y_1 \sim A_1 = 1, \quad (1) \qquad Y_2 \sim \neg C_3 = 1, \quad (2) \qquad Y_3 \sim \neg B_1 = 1. \quad (3)$$

Неформализованные условия (4): а) ложны конъюнкции, содержащие более двух игреков без отрицания или более одного — с отрицанием: два высказывания истинны, одно — ложно; б) между множествами участников финала и мест существует взаимно-однозначное соответствие

$$(Y_1A_1 \vee \neg Y_1 \neg A_1)(Y_2 \neg C_3 \vee \neg Y_2C_3)(Y_3 \neg B_1 \vee \neg Y_3B_1) = 1.$$

$$Y_1Y_3 \neg Y_2A_1 \neg B_1C_3 \vee Y_2Y_3 \neg Y_1 \neg A_1 \neg B_1 \neg C_3 = 1.$$

1) $Y_1Y_3 \neg Y_2A_1 \neg B_1C_3 = 1$; 2) $Y_2Y_3 \neg Y_1 \neg A_1 \neg B_1 \neg C_3 = 1$.

Задача 19.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если команда } X \text{ завоевала кубок,} \\ 0 \text{ — в противном случае; } (X = \text{А, Б, Г, П.}) \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, \text{ если болельщик угадал результат,} \\ 0 \text{ — в противном случае. } (Y = \text{С, К, Д.}) \end{cases}$$

Задача 20.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если человек } X \text{ входит в комитет,} \\ 0 \text{ — в противном случае. } (X = \text{В, Б, К, О, Д, Х, Ф, Г.}) \end{cases}$$

$\text{Б} \Rightarrow \text{К} = 1$, (1) $\quad \text{Г} \Rightarrow \neg(\text{БК}) \neg \text{В} \neg \text{О} = 1$, (5)

$\text{К} \Rightarrow \neg \text{О} = 1$, (2) $\quad \text{Х} \Rightarrow (\text{Б} \vee \text{Ф})(\text{К} \Rightarrow \text{Г}) \neg \text{В} \neg \text{О} = 1$, (6)

$\text{Д} \Rightarrow \neg \text{Х} = 1$, (3) $\quad \text{В} \Rightarrow \text{Б} \vee \text{К} \vee \text{О} \vee \text{Д} \vee \text{Х} \vee \text{Ф} \vee \text{Г} = 1$, (7)

$\text{Ф} \Rightarrow (\text{Д} \Rightarrow \text{Г})(\text{К} \Rightarrow \text{Д}) = 1$, (4) $\quad \text{О} \Rightarrow \text{В} \vee \text{Б} \vee \text{К} \vee \text{Д} \vee \text{Х} \vee \text{Ф} \vee \text{Г} = 1$. (8)

Неформализованное условие (9): конъюнкции, содержащие более четырех сомножителей одного знака (четыре с отрицанием или четыре без отрицания), ложны и исключаются из дизъюнкции.

$$(\neg \text{Б} \vee \text{К})(\neg \text{К} \vee \neg \text{О})(\neg \text{Д} \vee \neg \text{Х})(\neg \text{Ф} \vee \neg \text{Д} \neg \text{К} \vee \text{Г} \neg \text{К} \vee \text{ГД})(\neg \text{Г} \vee$$
$$\vee \neg \text{Б} \neg \text{В} \neg \text{О} \vee \neg \text{К} \neg \text{В} \neg \text{О}) \wedge$$
$$(\neg \text{Х} \vee \text{Б} \neg \text{К} \neg \text{В} \neg \text{О} \vee \text{БГ} \neg \text{В} \neg \text{О} \vee \text{Ф} \neg \text{К} \neg \text{В} \neg \text{О} \vee \text{ФГ} \neg \text{В} \neg \text{О})(\neg \text{В} \vee$$
$$\vee \text{Б} \vee \text{К} \vee \text{О} \vee \text{Д} \vee \text{Х} \vee \text{Ф} \vee \text{Г}) \wedge$$
$$(\neg \text{О} \vee \text{В} \vee \text{Б} \vee \text{К} \vee \text{Д} \vee \text{Х} \vee \text{Ф} \vee \text{Г}) = 1.$$

$Г Д \neg Б \neg О \neg В \neg Х \vee К \neg О \neg Х \neg Ф \neg Г = 1.$

1) $ГД \neg Б \neg О \neg В \neg Х = 1$; 2) $К \neg О \neg Х \neg Ф \neg Г = 1.$

Задача 21.

$$А \neg Б \neg ВГ \vee \neg АБВ = 1.$$

Задача 22.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если человек } X \text{ участвует в экспедиции,} \\ 0 \text{ — в противном случае. } (X = A, B, C, D, E, F, G, H.) \end{cases}$$

$E \vee G = 1,$	(1)	$C \vee H = 1,$	(6)
$B \vee F = 1,$	(2)	$F \Rightarrow B = 1,$	(7)
$F \vee G = 1,$	(3)	$D \Rightarrow HC = 1,$	(8)
$A \vee D = 1,$	(4)	$C \Rightarrow \neg G = 1,$	(9)
$C \vee D = 1,$	(5)	$A \Rightarrow \neg B = 1.$	(10)

Неформализуемое условие (11): в конъюнкциях не более шести множителей без отрицания и двух — с отрицанием.

$(E \vee G)(B \vee F)(F \vee G)(A \vee D)(C \vee D)(C \vee H)(\neg F \vee B)(\neg D \vee HC) \wedge$
$\wedge (\neg C \vee \neg G)(\neg A \vee \neg B) = 1.$

$$\neg ABCDEF \neg GH = 1.$$

Задача 26. $B \sim (A \sim \neg A) = 1$; $C \sim \neg B = 1.$

а) Полуформализованное решение: $A \sim \neg A = 0$; $В = 0$; $C = 1.$

б) $B \sim (A \sim \neg A) \Leftrightarrow B \sim (A \neg A \vee \neg AA) \Leftrightarrow B \sim 0 = 1$; $B = 0$; $C = 1.$

Задача 27. $\begin{cases} B \sim (A \sim A \neg B \neg C \vee \neg AB \neg C \vee \neg A \neg BC) = 1; \\ C \sim \neg B = 1. \end{cases}$

а) Метод перебора: пусть $B = 1$, тогда $C = 0$ и $1 \sim (A \sim \neg A) = 1$, $1 \sim 0 = 1$ — противоречие. Пусть $B = 0$, тогда $C = 1$ и $0 \sim (A \vee \neg A) = 1$, $A \sim \neg A = 0$. Системе удовлетворяют: $B = 0, C = 1.$

б) Метод характеристического уравнения: $(\neg A \neg B \vee \neg BC)$. $(C \neg B \vee \neg CB) = 1$; $C \neg A \neg B \vee C \neg B \Leftrightarrow C \neg B = 1$. Ответ: $B = 0$, $C = 1$.

Задача 28. $A \sim \neg A \vee \neg B = 1$; $A \neg B \vee 0 = 1$; $A = 1$, $B = 0.$

Задача 29. $A \sim (\neg A \vee B) = 1$; $AB \vee 0 = 1$; $A = B = 1.$

Задача 30. $A \sim (\neg A \vee 0) = 1$; $A \sim \neg A = 1$ — нет решения.

Задача 31. $\begin{cases} A \sim (\neg A \neg B \neg C) = 1, \\ B \sim (A \neg B \neg C \vee B \neg A \neg C \vee C \neg A \neg B) = 1. \end{cases}$

$(\neg AB \vee \neg AC)(B \neg A \neg C \vee (AC \vee \neg A \neg C)(A \vee \neg B \vee C)) = 1;$

$(\neg AB \vee \neg AC)\ (B\neg A \neg C \vee AC \vee \neg A\neg B\neg C) = 1;\ \neg AB\neg C = 1;$ $B = 1;\ A = C = 0.$

Задача 32. $\begin{cases} A\sim\neg A \neg B \neg C = 1, \\ B\sim\neg ABC \vee \neg BAC \vee \neg CAB = 1. \end{cases}$

После преобразований система принимает вид:

$$\begin{cases} \neg A(B \vee C) = 1, \\ B\sim \neg ABC \vee \neg BAC \vee \neg CAB = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения: $A = 0$. Система: $\begin{cases} B \vee C = 1; \\ C = 1. \end{cases}$ Ответ: $A = 0,\ C = 1,\ B$ — неизвестно

Задача 33. $\begin{cases} A \sim \neg A \neg B \neg C = 1; \\ B \sim A \neg B \neg C \vee B \neg A \neg C \vee C \neg A \neg B = 1. \end{cases}$

Ответ: $B = 1,\ A = C = 0.$

Задача 34. $A \sim \neg AB = 1;\quad \neg A\ (A \vee \neg B) = 1;\quad \neg A\neg B = 1;$ $A = B = 0.$

Задача 35. $\begin{cases} A\sim \neg B = 1; \\ B\sim(A\sim C) = 1. \end{cases}$

$(A\neg B \vee \neg AB)\,(B\sim(AC \vee \neg A\neg C)) \Leftrightarrow \neg C\,(A\neg B \vee B\neg A) = 1;\ \ C = 0.$

Задача 36. Спрашивают у A, другой — B.

Допущение 1. A сказал: «да». Характеристическое уравнение: $A \sim A \vee B = 1;\ A \vee \neg B = 1.$ Ответы: $A = 0, B = 0$ или $A = 1$, B — произвольно. Ответ «да» неопределенный.

Допущение 2. A сказал: «нет». $A \sim \neg A \neg B = 1;\ \neg AB = 1;$ $A = 0,\ \ B = 1.$

Итак, A ответил: «нет», и тогда A — Лгун, B — Рыцарь.

Задача 37. Оба ответа A и B «да» или оба «нет» приводят к непротиворечивым уравнениям соответственно: $A \sim B = 1$ и $A \sim \neg B = 1$. Ответы: A — «да», B — «нет» или A — «нет», B — «да» — приводят к противоречивым системам:

$$\begin{cases} A\sim B = 1, \\ B\sim \neg A = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} A\sim \neg B = 1, \\ B\sim A = 1. \end{cases}$$

Итак, A и B ответили одинаково: оба «да» или оба «нет».

Задача 38. $\begin{cases} A \vee B \vee C = 1; \\ C \Rightarrow A = 1; \\ B \Rightarrow A \vee C = 1. \end{cases}$

$(A \vee B \vee C)(\neg C \vee A)(\neg B \vee A \vee C)=1$; $A=1$. Ответ: A — виновен.

Задача 39. $\begin{cases} A \vee B \vee C = 1, \\ A \Rightarrow B \vee C = 1, \\ \neg C = 1, \quad B = 1. \end{cases}$ Ответ: B — виновен.

Задача 40. $\begin{cases} A \vee B \vee C = 1, & B \Rightarrow \neg A \neg C = 1, \\ A \Rightarrow B \vee C = 1, & \neg A \vee \neg C = 1. \\ C \Rightarrow A \vee B = 1, \end{cases}$

$$(A \vee B \vee C)(\neg A \vee B \vee C)(\neg C \vee A \vee B)(\neg B \vee \neg A \neg C)(\neg A \vee \neg C)=1;$$

$\neg AB \neg C = 1$. Ответ: $A=C=0$, $B=1$.

Задача 41. $\begin{cases} A \vee B \vee C = 1, & C \Rightarrow A \vee B = 1, \\ A \neg B \Rightarrow C = 1, & A \Rightarrow \neg C = 1. \end{cases}$

$$(A \vee B \vee C)(\neg A \vee B \vee C)(\neg C \vee A \vee B)(\neg A \vee \neg C) \Leftrightarrow B(\neg A \vee \neg C) = $$
$$= 1 \cdot B = 1.$$ Ответ: B виновен.

Задача 42. $\begin{cases} A \vee B \vee C = 1, & AB \neg C \vee AC \neg B \vee BC \neg A \Rightarrow A = 1, \\ A \Rightarrow (B \sim \neg C) = 1, & \neg C \Rightarrow \neg B = 1. \\ \neg B \Rightarrow \neg C = 1, \end{cases}$

$(A \vee B \vee C)(\neg A \vee B \neg C \vee \neg BC)(B \vee \neg C)((\neg A \vee \neg B \vee C)(\neg A \vee \neg C \vee B)$
$(\neg B \vee \neg C \vee A) \vee A)(C \vee \neg B) \Leftrightarrow (ABC \vee A \neg B \neg C)(\neg A \neg C \vee$
$\vee \neg AB \vee B \neg C) \Leftrightarrow 0 = 1$. Задача противоречива.

Задача 43. $\begin{cases} A \vee B \vee C \vee D = 1, & B \Rightarrow A \neg C \neg D \vee C \neg A \neg D \vee \\ & \vee D \neg A \neg C = 1, \\ A = 0, & C \Rightarrow AB \neg D \vee AD \neg B \vee BD \neg A = 1, \end{cases}$

$\begin{cases} B \vee C \vee D = 1, \\ B \Rightarrow C \neg D \vee D \neg C = 1, \\ C \Rightarrow BD = 1. \end{cases}$

После умножения: $\neg CD = 1$. Ответ: $C=0$, $D=1$.

Задача 44. $\begin{cases} \neg A \vee B \Rightarrow C = 1, \\ \neg A \Rightarrow \neg C = 1. \end{cases}$

$(A \neg B \vee C)(A \vee \neg C) \Leftrightarrow A \neg B \vee AC \Leftrightarrow A(\neg B \vee C) = 1$. Ответ: $A=1$.

Задача 45. $\begin{cases} AB \Rightarrow C = 1, & C \Rightarrow D = 1, \\ A \Rightarrow B \vee C = 1, & \neg A \Rightarrow D = 1. \end{cases}$

$$(\neg A \vee \neg B \vee C)(\neg A \vee B \vee C)(\neg C \vee D)(A \vee D) \Leftrightarrow \neg AD \vee CD \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow D(\neg A \vee C) = 1$. Ответ: $D = 1$.

Задача 46. $\begin{cases} A_1 \sim C_2 = 1, \\ B_1 \sim \neg B_2 = 1, \\ C_1 \Rightarrow \neg A_1 \neg B_1 = 1. \end{cases}$ $X_1 = \begin{cases} 1, \text{ если } X \text{ — Рыцарь}, \\ 0, \text{ если } X \text{ — Лгун}; \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 1, \text{ если } X \text{ — Оборотень}; \\ 0 \text{ — в противном случае}. \end{cases}$ $(X = A,\ B,\ C.)$

Ограничение. Необходимо вхождение в каждую конъюнкцию одной, и только одной буквы с индексом 2 — без отрицания

$A_1 C_2 \vee \neg A_1 \neg C_2)(B_1 \neg B_2 \vee \neg B_1 B_2)(\neg C_1 \vee \neg A_1 \neg B_1) \Leftrightarrow A_1 B_1 \neg C_1 C_2 \vee$
$\vee \neg A_1 B_1 \neg C_1 A_2 \vee \neg A_1 \neg B_1 B_2 = 1.$

В каждом из трех слагаемых Оборотень является Лгуном: $C_2 \neg C_1$, $A_2 \neg A_1$, $B_2 \neg B_1$. Ответ: Оборотень в любом случае является Лгуном.

Задача 47. $\begin{cases} \neg О_1 \neg С_1 \sim (П_1 \sim П_2) = 1, \\ Л_1 \sim (С_2 \sim П_1) = 1, \\ С_2 - П_2 = 0. \end{cases}$

Или после подстановки третьего условия в предыдущие:

$$\begin{cases} \neg О_1 \neg С_1 \sim (П_1 \sim 0) = 1; \\ Л_1 \sim (О \sim П_1) = 1. \end{cases}$$

Ограничения: а) в начале первой минуты $С_1 = П_1 = 1$;
б) в начале второй и последующих минут $С_1 = П_1 = 0$.

Случай а): $\begin{cases} 0 \sim (1 \sim 0) = 1; \\ Л_1 \sim (0 \sim 1) = 1. \end{cases}$

Первое уравнение автоматически справедливо, из второго: $Л_1 = 0$. Чтобы установить тишину в минуту, следующую за первой, в которой звучат Смех и Пение, в первую минуту не должен гореть Ладан, независимо от звучания Органа.

Случай б): $\begin{cases} \neg О_1 \sim (0 \sim 0) = 1; \quad О_1 = 0,\ Л_1 = 1. \\ Л_1 \sim (0 \sim 0) = 1, \end{cases}$

Чтобы поддержать установившуюся после первой минуты тишину, в последующие минуты достаточно сжигать Ладан и не играть на Органе.

Мы привели частично формализованное решение. Теперь решим задачу методом характеристического уравнения

$$\begin{cases} \neg O_1 \neg C_1 \sim \neg \Pi_1 = 1, \\ Л_1 \sim \neg \Pi_1 = 1, \end{cases}$$

$$(\neg O_1 \neg C_1 \neg \Pi_1 \vee \Pi_1 O_1 \vee \Pi_1 C_1)(Л_1 \neg \Pi_1 \vee \neg Л_1 \Pi_1) = 1.$$

После умножения $\neg O_1 Л_1 \neg \Pi_1 \neg C_1 \vee O_1 \neg Л_1 \Pi_1 \vee \neg Л_1 \Pi_1 C_1 = 1$.

а) $C_1 = \Pi_1 = 1$; $O_1 \neg Л_1 \vee \neg Л_1 = 1$; $Л_1 = 0$;

б) $C_1 = \Pi_1 = 0$. После подстановки в характеристическое уравнение: $\neg O_1 Л_1 = 1$; $O_1 = 0$, $Л_1 = 1$.

3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Отчего это, мама, все догадываются сразу, а я после?

М. М. Пришвин. Незабудки

До сих пор мы, как правило, избегали формализации количественных соотношений между переменными в логических задачах и учитывали их содержательно в процессе преобразования логических уравнений. Предлагаемый ниже метод арифметизации логических функций позволяет включить в систему уравнений наряду с логическими связями и количественные характеристики переменных.

С другой стороны, метод арифметизации имеет и самостоятельное значение для приведения логических уравнений к алгебраическим в булевых переменных (0, 1) и использования известных в алгебре методов решения—с учетом особенностей, позволяющих произвести некоторые упрощения.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Логические функции	Соответствующие арифметические модели
$X \wedge Y$,	$X \cdot Y$,
$X \vee Y$,	$X + Y - XY$,
$X \Rightarrow Y$,	$1 - X + XY$,
$X \sim Y$,	$1 - (X - Y)^2$,
$X \dot{\vee} Y$,	$(X - Y)^2$.

Пример построения модели. $X \Rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \vee Y$. Используя логические модели дизъюнкции и отрицания (моделью $\neg X$ является арифметическое выражение: $1 - X$), получаем для импликации:

$$1 - X + Y - (1 - X)Y = 1 - X + Y - Y + XY = 1 - X + XY.$$

Справедливость арифметических моделей проверяется непосредственной подстановкой значений переменных. Нелишне напомнить, что речь идет о булевых переменных. Последнее обстоятельство позволяет для упрощений использовать некоторые специфичные преобразования; любая степень переменной равна этой переменной (поглощение первой степенью высших степеней); если произведение равно единице, то каждый сомножитель равен единице; если разность двух переменных равна единице, то уменьшаемое — единица, вычитаемое — нуль; если сумма равна нулю, то каждое слагаемое есть нуль; если сумма булевых переменных равна единице, то произведение любого числа этих переменных равно нулю и др.

АЛГОРИТМ АРИФМЕТИЗАЦИИ

1. В системе логических уравнений каждая связка заменяется соответствующей арифметической моделью. В итоге получается равносильная исходной система алгебраических уравнений в булевых переменных.

2. Известными методами, с учетом допустимых для булевых переменных упрощений, решается полученная система алгебраических уравнений.

Пример.
$$\begin{cases} X \vee Y = 1, & (1) \\ X \Rightarrow \neg Y = 1, & (2) \\ \neg XY = 0, & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y - XY = 1, & (1') \\ 1 - X + X(1 - Y) = 1, & (2') \\ (1 - X)Y = 0. & (3') \end{cases}$$

Вычитанием (3′) из (1′) получаем: $X = 1$, и из (2): $Y = 0$.

Особенно эффективен метод арифметизации, когда задача приводится к системе, содержащей одновременно как логические, так и алгебраические уравнения и неравенства.

Пример.

$$\begin{cases} X_1 \Rightarrow X_2 \neg X_3 = 1, & (1) \\ \neg X_1 \Rightarrow X_2 \vee X_3 = 1, & (2) \\ \neg X_2 X_3 \Rightarrow X_1 = 1, & (3) \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1, & (4) \end{cases} \qquad \begin{cases} -X_1 + X_1 X_2 (1 - X_3) = 0, & (1') \\ X_1 + (1 - X_1)(X_2 + X_3 - X_2 X_3) = 1, & (2') \\ -(1 - X_2) X_3 + X_1 (1 - X_2) X_3 = 0, & (3') \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1. & (4') \end{cases}$$

Из (4′): $X_3 = 1 - X_1 - X_2$. После подстановки в (1′): $-X_1 + X_1 \cdot X_2 (X_1 + X_2) = -X_1 + X_1X_2 + X_1X_2 = 0$; $X_1 (1 - 2X_2) = 0$. Отсюда $X_1 = 0$, в противном случае $1 - 2X_2 = 0$, и не существует булевого значения X_2, удовлетворяющего (1′).

Система принимает вид:

$$\begin{cases} X_2 + X_3 - X_2 X_3 = 1, & (2'') \\ X_2 X_3 - X_3 = 0, & (3'') \\ X_2 + X_3 = 1. & (4'') \end{cases}$$

Складываем (2″) с (3″): $X_2 = 1$, и из (4″): $X_3 = 0$. Ответ: $X_1 = X_3 = 0$; $X_2 = 1$.

Применим метод арифметизации к решению задачи 16 § 2.

$$\left.\begin{aligned} &А \sim \neg А_1 \neg А_4 = 1, &(1)\\ &Б \sim \neg Б_4 = 1, &(2)\\ &В \sim В_1 = 1, &(3)\\ &Г \sim Г_4 = 1. &(4)\end{aligned}\right\} \text{(Логические уравнения)}$$

$$А + Б + В + Г = 3. \quad \text{(Трое сказали правду, один солгал)} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &А_1 + А_2 + А_3 + А_4 = 1, &(6)\\ &Б_1 + Б_2 + Б_3 + Б_4 = 1, &(7)\\ &В_1 + В_2 + В_3 + В_4 = 1, &(8)\\ &Г_1 + Г_2 + Г_3 + Г_4 = 1. &(9)\end{aligned}\right\} \text{(Каждый участник занял одно, и только одно место)}$$

$$\left.\begin{aligned} &А_1 + Б_1 + В_1 + Г_1 = 1, &(10)\\ &А_2 + Б_2 + В_2 + Г_2 = 1, &(11)\\ &А_3 + Б_3 + В_3 + Г_3 = 1, &(12)\\ &А_4 + Б_4 + В_4 + Г_4 = 1. &(13)\end{aligned}\right\} \text{(На каждое место приходится один, и только один участник)}$$

Обратим внимание на то, что всеобъемлющая формализация условия задачи связана с большим числом уравнений и, вообще говоря, неестественна для человека. Однако метод исключительно эффективен, когда решение логических задач поручается ЭВМ (см. в связи с этим [13]).

Арифметическая модель логических уравнений после упрощений:

$$А + А_1 + А_4 = 1, \quad (1') \qquad В - В_1 = 0, \quad (3')$$
$$Б + Б_4 = 1, \quad (2') \qquad Г - Г_4 = 0. \quad (4')$$

Далее решается система алгебраических уравнений в булевых переменных (1′)—(4′) и (5)—(13).

Задание. Решите методом арифметизации системы логических уравнений (1)—(3) на с. 74 § 2.

Следующую задачу — для сравнения — решим тремя способами: словесно— с помощью характеристического уравнения и арифметически — в булевых переменных.

Задача. Витя (В), Петя (П), Юра (Ю), Сергей (С) заняли на математической олимпиаде первые четыре места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы: а) Петя — второе, Витя — третье; б) Сергей — второе, Петя — первое; в) Юра — второе, Витя — четвертое.

В каждом ответе правильна лишь одна часть. Кто какое место занял?

С л о в е с н о е р е ш е н и е. $П_2 = 0$, т. е. П — не на втором месте, иначе в б) оба высказывания ложны. Из а): $В_3 = 1$; из в): $Ю_2 = 1$; из б): $П_1 = 1$. Остается $С_4 = 1$.

О т в е т: Распределение мест: Петя — 1, Юра — 2, Витя — 3, Сергей — 4.

Метод характеристических уравнений (полуформализованное решение).

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если } X \text{ занял } i\text{-е место}, \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4;\ X = В, П, Ю, С.)$$

Неформализованная часть условия: взаимно-однозначное соответствие между множествами людей и мест — конъюнкция двух символов с общим индексом и одного символа с различными индексами обращается в нуль и из дизъюнкции исключается.

$$(П_2 \neg В_3 \vee \neg П_2 В_3)(С_2 \neg П_1 \vee \neg С_2 П_1)(Ю_2 \neg В_4 \vee \neg Ю_2 В_4) = 1;$$

$$(С_2 В_3 \neg П_1 \neg П_2 \vee П_1 В_3 \neg С_2 \neg П_2)(Ю_2 \neg В_4 \vee \neg Ю_2 В_4) = 1;$$

$$П_1 Ю_2 В_3 \neg С_2 \neg П_2 \neg В_4 = 1; \quad П_1 = Ю_2 = В_3 = С_4 = 1.$$

Арифметическое решение в булевых переменных (полностью формализовано).

$$\begin{cases} П_2 + В_3 = 1, & (1) \quad С_1 + С_2 + С_3 + С_4 = 1, & (5) \\ С_2 + П_1 = 1, & (2) \quad В_1 + В_2 + В_3 + В_4 = 1, & (6) \\ Ю_2 + В_4 = 1, & (3) \quad Ю_1 + Ю_2 + Ю_3 + Ю_4 = 1, & (7) \\ П_1 + П_2 + П_3 + П_4 = 1, & (4) \quad П_1 + С_1 + В_1 + Ю_1 = 1, & (8) \\ & П_2 + С_2 + В_2 + Ю_2 = 1, \quad (9) \\ & П_3 + С_3 + В_3 + Ю_3 = 1, \quad (10) \\ & П_4 + С_4 + В_4 + Ю_4 = 1. \quad (11) \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{array}{ll} \text{Из (9):} & П_2 + С_2 \leqslant 1 \\ \text{из (4):} & + \ П_1 + П_2 \leqslant 1 \\ \hline & 2П_2 + П_1 + С_2 \leqslant 2. \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Из (2):} & - \ П_1 + С_2 = 1. \\ \hline & 2П_2 \leqslant 1 \\ & П_2 = 0. \end{array}$$

Из (1): $В_3 = 1$, из (9): $С_2 = 0$, из (9): $С_2 = 0$,
из (6): $В_4 = 0$, из (2): $П_1 = 1$, из (10): $С_3 = 0$,
из (3): $Ю_2 = 1$, из (8): $С_1 = 0$, из (5): $С_4 = 1$.

З а д а н и е. Решите методом арифметизации задачи 17 и 19 § 2.

У к а з а н и е к задаче 19.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если } X \text{ завоевал кубок}, \\ 0 \text{ — в противном случае } (X = А, Б, Г, П), \end{cases}$$

$(А - В)^2 + ПБ - А - П - Б + 1 = 0$. Но $ПБ = 0$, $А + П + Б \leqslant 1$, следовательно, $(А - В)^2 \leqslant 0$ и т. д.

Задача. Если A отличник, то и B отличник. Если C не отличник, то и A не отличник. Неверно, что если D отличник, то C отличник. Кто отличник? Решите арифметически, методом характеристического уравнения и неформализованным рассуждением.

Указание. Система арифметических уравнений: $\begin{cases} 1-A+AB=1, \\ 1-B+BC=1, \\ 1-D+CD=0. \end{cases}$

АРИФМЕТИЗАЦИЯ В ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ

Чтобы подсчитать число овец в отаре, надо подсчитать число ног и разделить полученное на четыре.

Пастухи шутят

Вернемся к арифметической модели дизъюнкции и условимся, для удобства о следующей записи: $X \vee Y = X + Y - XY$. Здесь X и Y — булевы переменные, левая часть — логическая формула, правая — арифметическое (алгебраическое) выражение; знак равенства, естественно, означает, что при подстановке в обе части вместо X и Y нуля или единицы значения логической формулы и арифметического выражения совпадают.

Для случая трех переменных получаем: $X \vee Y \vee Z = (X \vee Y) \vee Z = X + Y - XY + Z - (X + Y - XY)\, Z = X + Y + Z - XY - XZ - YZ + XYZ$.

Методом математической индукции доказывается:

$$X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - (X_1 X_2 + X_1 X_3 + \ldots + X_{n-1} X_n) + (X_1 X_2 X_3 + \ldots + X_{n-2} X_{n-1} X_n) + \ldots + (-1)^{n+1} X_1 X_2 \ldots X_n. \qquad (1)$$

Попытаемся истолковать равенство в терминах теоретико-множественной булевой алгебры: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — множества; дизъюнкция в левой части «перекодируется» в объединение множеств, конъюнкции (произведения) — в соответствующие пересечения. Однако знаки сложения и вместе с ними равенства теперь теряют смысл.

Введем в связи с этим «арифметику» (количественные характеристики) в теоретико-множественный подход. Будем понимать под левой частью число элементов в объединении данных множеств, а под правой — сумму числа элементов (во всевозможных пересечениях множеств: по одному ($X_1, X_2, \ldots, X_n$), по два ($X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_3, \ldots, X_{n-1} \cap X_n$) и т. д. Тогда, оказывается, равенство (1) сохраняет свою силу и служит выражению числа элементов в объединении множеств через число элементов в их всевозможных пересечениях.

Словесно алгоритм читается так. Число элементов в объединении нескольких множеств равно сумме числа элементов в их пересечениях по одному, без суммы числа элементов в пересечениях по два, сложенной с суммой числа элементов в пересечениях по три и т. д.

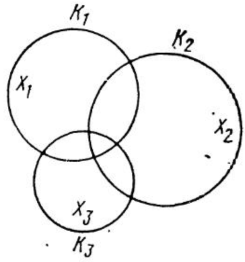

Рис. 23

Для случая трех множеств правило «считывается» непосредственно с чертежа — круги Эйлера—Венна (рис. 23). Если $К_1$, $К_2$, $К_3$ — соответственно числа элементов множеств X_1, X_2, X_3; $К_{12}$, $К_{13}$, $К_{23}$ — парных пересечений; $К_{123}$ — пересечения всех трех множеств, то число элементов в объединении равно $К_1 + К_2 + К_3 - К_{12} - К_{13} - К_{23} + К_{123}$.

ЗАДАЧИ

В математическом кружке участвуют 25 учеников, в литературном — 17, 5 учеников являются членами обоих кружков. Сколько человек участвуют хотя бы в одном из кружков? (О т в е т: 37).

На школьной химической олимпиаде присутствовали 21 человек, физической — 26, математической — 29. 14 школьников участвовали и в химической, и в математической олимпиадах, 15 — в физической и математической, 12 — в химической и физической и, наконец, 8 — во всех трех олимпиадах. Сколько человек участвовали хотя бы в одной из трех олимпиад? (О т в е т: 43).

В механическом цехе завода работают 200 человек. На участке цеха имеются 16 токарей, 13 слесарей, 11 фрезеровщиков. 6 из них являются одновременно токарями и слесарями, 5 — токарями и фрезеровщиками; 3 — слесари и фрезеровщики. Один человек владеет всеми тремя специальностями. Сколько рабочих цеха не работают на данном участке? (О т в е т: 173).

Из 37 человек, изучающих языки, немецким владеют 15 человек, английским — 13, французским — 16. 4 человека владеют английским и французским, 2 — немецким и французским, 2 — немецким и английским. Сколько человек владеют всеми тремя языками? Сколько владеют одним, и только одним языком? (О т в е т: 1; 31).

На втором курсе физмата в трех предметных кружках — математическом, физическом и педагогическом — участвуют 90 студентов. Из них 40 являются членами математического кружка, 45 — физического, 17 человек участвуют одновременно в математическом и физическом кружках и 8 — в физическом и педагогическом; 6 человек являются членами всех трех кружков. Сколько человек участвуют в педагогическом кружке, если в математическом и педагогическом кружках одновременно участвуют 10 человек? (О т в е т: 34).

4. ЗАДАЧИ РАЗНЫХ ТИПОВ

Задача 1 (Одноразрядный двоичный сумматор). При сложении многоразрядных чисел в двоичной системе счисления в каждом разряде складываются три однозначных числа: первого слагаемого (X_1), второго слагаемого (X_2), переноса из предыдущего разряда (X_3). Образуются: соответствующий разряд суммы (С) и цифра переноса (П), которая является X_3 для следующего разряда. Построить характеристические уравнения для формирования цифр суммы и переноса: $П = 1$, $С = 1$.

Указание. С = 1 тогда, и только тогда, когда нечетное число слагаемых (X_1, X_2, X_3) равно 1, т. е. С является счетчиком нечетности этих переменных.

П = 1 тогда, и только тогда, когда большинство слагаемых (два или три) принимают значение 1 — счетчик большинства.

Ответ для П: $П = X_1X_2 \vee X_1X_3 \vee X_2X_3 = 1$.
$С = X_1X_2X_3 \vee X_1 \neg X_2 \neg X_3 \vee \neg X_1X_2 \neg X_3 \vee \neg X_1 \neg X_2X_3$.

Задача 2. (Наклейки на лбу.) У каждого из 5 ребят (А, Б, В, Г, Д) на лбу наклеен либо белый, либо черный кружок; каждый видит, каков кружок на лбу любого из остальных, но не знает цвета своего кружка. Известно, что ребята, отмеченные белым кружком, всегда говорят правду, черным — всегда лгут. Говорят они следующее:

А: «я вижу 3 белых кружка и 1 черный»,
Б: «я вижу 4 черных кружка»,
В: «я вижу 1 белый кружок и 3 черных»,
Д: «я вижу 4 белых кружка».

Какого цвета кружок у каждого?

ЗАДАЧИ ТИПА «ДВА ГОРОДА»

Задача 3. Моряк, спасшийся при кораблекрушении, доплыл до острова. Он знал, что на острове два города — П и Л. Жители П всегда говорят правду, Л — всегда лгут. Какой вопрос моряк должен задать встречному, который мог быть из любого города, чтобы по ответу («да», «нет») узнать, в каком городе он находится: П или Л?

Дадим постановку задачи в общем виде. Требуется получить ответ на некоторый вопрос при условии, что отвечающий говорит только «да» или «нет» и спрашивающему неизвестно, истинно это «да» («нет») или ложно. Какой единственный вопрос надо задать для решения задачи?

Замечание. Ясно, что задавать вопрос, который нас интересует, бесполезно: каков бы ни был ответ («да», «нет»), потребуется дополнительный вопрос для выяснения, истинен ответ или ложен. Нужен такой вопрос, ответ на который — независимо от значения истинности этого ответа — в случае «да» означал бы один из двух возможных ответов на вопрос задачи, в случае «нет» — другой.

Пусть A — высказывание, полученное переформулировкой в повествовательную форму вопроса задачи (подчеркнем — не вопроса, который задается, — он еще не известен, а вопроса, сформулированного в условии задачи).

Переконструируем в форму вопроса высказывание $A \sim B$, где B — высказывание: «вы говорите правду». Задаваемый вопрос выглядит так: верно ли, что $A \sim B$? Или словесно: будет ли утверждение A эквивалентно тому, что вы говорите правду?

Ответ «да», независимо от значения истинности ответа, означает, что высказывание A истинно, ответ «нет» — ложно. В любом случае получен ответ на требуемый вопрос. Докажем это.

Пусть на вопрос: $A \sim B$? последовал ответ «да». Если «да» истинно, то одновременно $A \sim B = 1$, $B = 1$ (1, 0 — значения истинности: «истинно», «ложно». Вспомним, B = «Вы говорите правду»). На основе таблицы истинности импликации заключаем: $A = 1$.

Если «да» ложно, то опять же одновременно $A \sim B = 0$, $B = 0$, и по-прежнему $A = 1$. (Если бы $A = 0$, то $A \sim B = 0 \sim 0 = 1$.)

Ответ: «нет».

Если «нет» истинно, то $A \sim B = 0$ и $B = 1$, откуда $A = 0$. В случае ложного «нет»: $A \sim B = 1$ и $B = 0$, тогда и $A = 0$.

Теперь построим алгоритм решения задач рассматриваемого типа.

1. Сформулировать вопрос, поставленный в задаче (поставленный, а не тот, который нужно задать!), в утвердительной форме. Обозначить высказывание — A.

В данной задаче: A = «Это город П».

2. Образовать высказывание B = «Вы говорите правду» (независимо от конкретного условия задачи и ее вопроса).

3. Составить эквивалентность: $A \sim B$.

В данной задаче: «То, что это город П, равносильно тому, что вы говорите правду». Или развернуто: «Если это город П (правдивых), то вы говорите правду, и, наоборот, если вы говорите правду, то это город П».

4. Если можно, упростить полученную формулировку (не изменив, естественно, содержания).

В данной задаче: «Вы живете в этом городе».

5. Сформулировать утверждение, полученное в предыдущем указании, в вопросительной форме.

В данной задаче: «Живете ли вы в этом городе?»

Этот вопрос моряк задает встречному жителю. Ответ «да» означает: $A = 1$, т. е. это город, где говорят правду; «нет» — $A = 0$ — город Л.

Проведем доказательство на данной конкретной задаче.

Ответ: «да». Если он истинный, то встречный из данного города, который, таким образом, есть П. Если же ответ ложен, то встречный из другого города. Но там лгут, значит в этом городе говорят правду — это все же П.

Ответ: «нет». Если ответ истинный, то встречный из другого города, в котором, оказывается, говорят правду. Тогда в данном городе лгут — это Л. Если ответ ложный, то встречный из этого города и в нем лгут, это, следовательно, Л.

Задача 4. В условии задачи 3 — какой вопрос моряк должен задать, чтобы по ответу узнать, из какого города встречный?

Ответ к задаче. «Говорят ли в этом городе правду?» Если встречный скажет «да», то он живет в этом городе, «нет» — в другом.

Задача 5 (Логик в темнице). Логик попал в плен и был заключен в темницу, имеющую два выхода. Пленнику предложен следующий шанс на освобождение. «Один выход ведет на верную смерть, другой —

на свободу. Ты можешь избрать любой. Сделать выбор тебе помогут два воина. Они останутся здесь, чтобы ответить на один твой вопрос — любой, какой ты пожелаешь им задать («да», «нет»). Имей в виду: один из воинов всегда говорит правду, другой — всегда лжет». И победители ушли, полагая, что дали своему пленнику лишь надежду на случайное спасение.

Однако сообразительный логик придумал вопрос, ответ на который ему безошибочно указал выход на свободу. Что это был за вопрос?

Задача 6 (Турист). От перекрестка вели две дороги, из них только одна — к озеру. На перекрестке турист встретил двух парней, про которых он знал, что один всегда лжет, второй — всегда говорит правду. Однако он не знал, кто из них лжет и кто говорит правду. Какой вопрос турист должен задать любому из парней, чтобы по ответу («да», «нет») узнать дорогу к озеру?

Задача 7 (О переодетом Гекльберри Финне). Поучителен забавный случай из известного произведения Марка Твена. Неунывающий Гек Финн, переодетый в женское платье, является к миссис Джудит Лофтес для разведки ситуации, сложившейся в городке после его бегства. Однако женщина быстро раскрывает обман, подвергнув пришельца немудреным житейским испытаниям. Так, девочка обычно вдевает нитку в иголку. Гек же насаживал иголку на неподвижную нитку и т. д. Согласитесь, что «житейский способ» решения задачи (вспомним Карлсона: «Дело житейское») не надежен: при большей опытности Гек мог сохранить свою тайну.

Достаточно, однако, миссис Лофтес задать Геку один-единственный вопрос, чтобы по ответу («да», «нет») «логически вычислить», кто скрывается под платьем — юноша или девушка. Сформулируйте этот вопрос.

З а м е ч а н и е. Чтобы прийти к мысли об испытании Гека, его надо было сначала «заподозрить», а это уже «дело интуиции», «психологическая чувствительность» миссис Лофтес не поддается формальному логическому описанию.

ЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ * (АНТИНОМИИ)

Во-первых, я вам вернула целый горшок, во-вторых, я брала у вас битый, а в-третьих, я у вас никаких горшков брать не брала.

Шолом Алейхем. Горшок

Под парадоксом (антиномией) понимают рассуждение, в котором сформулирован вопрос, требующий ответа «да» или «нет», причем ни один из них неприемлем. Точнее, если «да», то «нет», и наоборот. Вопрос об исключении парадоксов в XX в. оказался связанным с и поныне далекой от своего решения проблемой обоснования математики

* Парадокс — от греч. parádoxos — неожиданный, странный.

и логики, совокупности концепций, на которых строятся эти дисциплины.

Задача 8 (Парикмахер). Деревенскому парикмахеру (П) предложено брить тех, и только тех жителей, которые не бреются сами. Как должен П поступить в отношении себя — брить или не брить?

Рассмотрим обе возможные альтернативы.

а) Брить. В этом случае П бреется сам, а всякого мужчину, который бреется сам, он, по условию, брить не должен. — Если «брить», то «не брить».

б) Не брить. Следовательно, П сам не бреется и как «несамобреющегося» должен себя брить.— Если «не брить», то «брить». Утверждение «парикмахер бреет себя» («парикмахер не бреет себя»), одновременно истинно и ложно, — противоречиво, парадоксально. Оно не является высказыванием.

Может возникнуть недоуменный вопрос: почему в такой, казалось бы «нормальной», жизненной ситуации возникло противоречие — парадокс, антиномия?

Оказывается, свойства П как жителя деревни — элемента множества людей и П как «особого элемента», статус которого определен отношением к множеству (одних бреет, других не бреет), противоречат друг другу. Действительно, действие человека относительно себя (бреется, не бреется), по условию, противоположно действию П относительно этого человека (не бреет, бреет). Это не вызывает сомнений, до тех пор пока объектом действия является «не П». Если же этим человеком становится сам П, то при подстановке получаем: действие П относительно себя противоположно действию П относительно себя — противоречие. (П опосредовано через множество, элементом которого сам является, участвует в собственном определении.)

Мы, следовательно, не имеем права на произведенную подстановку—экстраполяцию на П свойств всех других элементов рассматриваемого множества людей: бриться у П, если человек не бреется сам, и, наоборот, П должен быть исключен из множества.

Б. Рассел (1906, 1910) выразил эту мысль так (в своем принципе порочного круга): множество не может содержать элементов, определяемых только через это множество. Остановимся на этой мысли подробнее.

Имеется разбиение множества людей M на два непересекающихся класса: M_1 — бреются сами, M_2 — бреются у П. Ясно, что П не принадлежит M ($\text{П} \notin M$): для утверждения «бреется сам» в применении к П ($\text{П} \in M_1$) одновременно верно «бреется у П» ($\text{П} \in M_2$) — в случае $\text{П} \in M$. $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$ (классы пересекаются). Если, например, П— женщина или житель другой деревни ($\text{П} \notin M$), то парадокса нет.

Возможно, более убедительно такое истолкование. Рассмотрим на некотором множестве радиоактивных элементов (M) разбиение на два непересекающихся класса: M_1 и M_2. Классу M_1 отнесем все элементы из M, имеющие самопроизвольную (внутреннюю) радиоактивность,

M_2 — элементы, которые становятся радиоактивными под «действием» элемента П. Для П понятия «внутренняя активность» и «активность под действием П» совпадают. Следовательно, П одновременно принадлежит M_1 и M_2 — классы имеют непустое пересечение. Чтобы избежать противоречия, приходится заключить, что $П \notin M$.

История науки учит, что парадоксы возникали в таких ситуациях, которые традиционно находились вне подозрений. Так, разбиение множества на непересекающиеся классы с помощью бинарного отношения эквивалентности непротиворечиво. Естественно было рассчитывать, что построенное в задаче «Парикмахер» разбиение с помощью одноместного предиката «бреется сам» также непротиворечиво. Парадокс свидетельствует о неблагополучии. Необходимость ограничения «свободного пользования» теоретико-множественными понятиями привела к аксиоматической теории множеств (Цермело, Френкель, Сколем, Нейман, Бернайс и др.), в которой черпают свои интерпретации арифметика, геометрия, математический анализ. Проблема исключения парадоксов стала частью более широкой проблемы обоснования математической логики (Д. Гильберт), которая и поныне далека от своего решения.

Задача 9 (Швейцарские кантоны). Швейцария разбита на кантоны, и в каждом кантоне избирается мэр. Некоторые мэры не проживают в кантонах, где они служат. Эти мэры образовали новый кантон и избрали своего мэра П. Где должен проживать П — в новом кантоне или вне его?

Убедитесь рассмотрением каждой из возможных альтернатив (П проживает в новом кантоне, П проживает вне нового кантона), что задача является парадоксом: если П живет в новом кантоне, то он должен жить вне его, и наоборот.

З а м е ч а н и е. Природа парадокса здесь та же, что и в задаче 8. Действительно, для любого мэра, по условию, свойство «принадлежать своему множеству» (т. е. быть жителем своего кантона) одновременно означает «не принадлежать новому множеству», не жить в новом кантоне. Для П — все наоборот. «Новый кантон» есть «свой кантон» и утверждение «принадлежать (не принадлежать) своему множеству» равносильно утверждению «принадлежать (не принадлежать) новому множеству». «Подставить» вместо «любого мэра» П, таким образом, неправомерно. Но именно это мы делаем, включая П в исходное множество мэров и автоматически распространяя на него их свойства. Элемент П, определенный с помощью начального множества мэров, не является элементом этого множества. Несоблюдение запрета Рассела и является причиной парадокса.

Задача 10 (Крокодил). Крокодил поймал ребенка. На мольбу матери о его возвращении Крокодил ответил: «Я верну тебе дитя, если ты угадаешь, что я с ним сделаю—съем или отдам». Мать в отчаянии закричала: «Ты съешь его!» — и это спасло ребенка.

Покажите, что любая из двух возможных альтернатив, из которых предстоит выбрать Крокодилу: «съесть», «не съесть» — приводит к противоречию («если съесть», то — «не съесть», и наоборот).

Замечание. Рассмотрим задачу с позиции значения истинности высказывания матери (М). Если утверждение «ты съешь» истинно, то М угадала действия Крокодила (К), ребенок, по условию, возвращается М, утверждение М ложно. Если же оно ложно, то М не угадала, К расправляется с ребенком, утверждение истинно. М как бы опосредовано через действия и обещания К, говорит: «Я лгу».

Задача 11 (Лгун). Человек сказал: «Я лгу». Правду он сказал или солгал?

Докажите, что утверждение является парадоксом: если оно истинно, то ложно, и наоборот.

Рассмотрите утверждение «Я лгу, что лгу» и убедитесь, что оно не является парадоксом.

Общие замечания к задачам 8—11.

Совмещение в задаче 8, 9 двух функций П : П как объекта действия (П — бреют, П — управляемый мэр, т. е. мэр, подчиненный другому мэру) и П как субъекта действия (П бреет, П — выше других в иерархии управления) равносильно утверждению: «я делаю то, чего не делаю», или «я лгу». Мы видели далее, что противоречие в задаче «Крокодил» той же природы. Парадокс «Лгун» оказывается в некотором смысле универсальной формой, к которой приводятся другие парадоксы.

П—часть среды (житель деревни, мэр кантона) и вместе с тем «нерастворим» в ней, имеет и другое существование — вне среды, над ней. Сознание же человека — вследствие определенной линейности (одноканальности [13]) структуры мышления на этом уровне — не в состоянии отразить оба аспекта П сразу, параллельно. Оно последовательно, независимо рассматривает П то как объект, на который направлено действие, то как субъект, творящий, генерирующий действие. Результаты одного анализа противоречат результатам другого. Кажущаяся естественность условия является следствием замаскированного игнорирования особого положения П как субъекта действия. (См. в связи с этим принцип «двух я» в следующей серии задач на парадоксы.)

Задача 12 (Парадокс Рассела—Цермело). Множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя, противоречиво.

Пояснение. Существуют два типа множеств: множества, принадлежащие себе в качестве элементов, и множества, не обладающие этим свойством. Например, множество всех множеств, содержащих более пяти элементов, относится к первому типу: существует более пяти множеств, каждое из которых содержит более пяти элементов. Напротив, множество учеников класса, множество натуральных чисел относятся ко второму типу: они не являются соответственно учеником, натуральным числом.

В задаче утверждается, что множество всех множеств второго типа противоречиво. Обозначим это множество П. Существуют две альтернативы: П является множеством первого типа, П является множеством второго типа. Рассмотрим каждую из них.

Пусть П относится к первому типу, тогда это множество войдет элементом в состав П, но все элементы П, по условию, — множества второго типа, П, следовательно, относится ко второму типу.

Пусть П — множество второго типа. Всякое множество второго типа, по условию, является элементом П. П содержит себя в качестве элемента, т. е. является множеством первого типа.

Если П — множество первого типа, то оно второго типа, и наоборот — парадокс.

Обсуждение. Решая задачу, мы сознаем, что трудности проистекают из необходимости переключения «мысленного взора» с П, рассматриваемого как множество, объемлющее П, на П, объемлемое П, и наоборот. Свойства П в этих двух ролях различны. Так, для любого множества, кроме П объемлющего, принадлежать второму типу — значит входить в П (принцип построения П). Для П принадлежность второму типу означает не входить элементом в П (определение множества второго типа).

Сравните: для любого жителя деревни, кроме П, бриться самому — значит не бриться у П; для П бриться самому, — значит бриться у П (парадокс «Парикмахер»). Причина парадоксов «множество всех множеств» и «Парикмахер» — общая. Но если задача «Парикмахер» развлекательного характера, то парадокс Рассела вскрывает неблагополучие в святая святых математики — теории множеств.

Задача 13 (Парадокс Кантора). Множество всех множеств противоречиво.

Этот факт автоматически следует из парадокса Рассела, утверждающего противоречивость подмножества этого множества. Впрочем, его можно доказать независимо. Рассматриваемое множество имеет высшую мощность: всякое множество включено в него. С другой стороны, по теореме Кантора—Бернштейна, множество всех его подмножеств должно иметь более высокую мощность. Вывод: множества всех множеств не существует.

Задача 14 (Парадокс Ришара). (Ришар — французский математик, парадокс описан им в 1905 г.) Рассмотрим множество всех понятий арифметики, оно конечно. Напишем определения понятий, скажем, на русском языке, выбирая каждый раз минимальное по количеству входящих в него букв определение. Расположим понятия в порядке возрастания числа букв, с помощью которых они описываются. Если разные понятия описываются одинаковым числом букв, то расположим их в словарно-алфавитном порядке.

Теперь каждому понятию соответствует единственное натуральное число (число букв), которое назовем *кодом* этого понятия. Каждому понятию арифметики соответствует один, и только один код, и наоборот. Возможно одно из двух: либо код удовлетворяет своему понятию (пусть, например, код понятия «четное слово» — 158, это число само четно), либо он ему не удовлетворяет. В последнем случае числовой код назовем *ришаровым числом.*

Определение. *Ришаровым* называется число, не удовлетворяющее понятию, кодом которого оно является.

Понятие ришарова числа, как и всякое понятие арифметики, имеет свой кодовый номер — П.

Вопрос: каким является число П — ришаровым или не ришаровым?

Докажите, что если П ришарово число, то оно — не ришарово и наоборот.

Замечание. Рассмотрим множество всех ришаровых чисел (рч). Для любого кода понятия, кроме П, справедливо: если этот код есть рч, то он является элементом нашего множества, в противном случае — не является. Для П— наоборот: если П есть рч, то он не принадлежит своему понятию (ришарового числа) и не входит, следовательно, элементом в рассматриваемое множество; если П — не рч, то оно входит в это множество.

Распространять на код П свойства кодов других понятий, как это здесь было сделано, неправомерно (как неправомерно приписывать П — парикмахеру — свойства «рядовых» жителей деревни, П — «мэру мэров» — свойства «рядовых» мэров, П — множеству всех множеств второго типа — свойства рядового множества — См. задачи 8, 9, 12).

Вывод. Для устранения парадокса необходимо исключить понятие ришарового числа из понятий арифметики, подобно тому как это сделано в теории множеств с «незаконным» множеством всех множеств, противоречивость которого вскрыта в парадоксах Рассела и Кантора.

Во всех рассмотренных случаях причина парадоксов — общая: нарушение запрета Рассела. Элемент, определенный только с помощью некоторого множества, не принадлежит этому множеству.

Задача 15 (Парадокс Греллинга). Введем необходимые понятия. Прилагательное, не обладающее свойством, для которого оно является именем, называется *гетерологическим*, обладающее называемым им свойством — *негетерологическим*.

Примеры. Прилагательные «многосложное», «русское» сами содержат много слогов, обладают свойством «русское», они, следовательно, не гетерологические. Напротив, прилагательные «односложное», «желтое», «горячее» — не обладают свойствами, которые ими описываются, они гетерологические.

Вопрос: каким является прилагательное «гетерологический» — гетерологическим или не гетерологическим?

Докажите, что если оно первого типа, то оно одновременно и второго типа, и наоборот.

Задача 16 (Парадокс Берри). Парадокс описан в 1906 г.

Введем следующее понятие: «наименьшее натуральное число, в словесном определении которого на русском языке содержится не менее 20 слов». Докажите, что понятие противоречиво.

ДВА ПАРАДОКСА, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ-ЗА НЕЧЕТКОЙ ФОРМУЛИРОВКИ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ

Задача 17 (Судья). Учитель готовил ученика в судьи. Так как ученик был беден, то договорились, что ученик заплатит за учебу после первого выигранного им процесса. Однако по окончании учебы ученик отказался от договоренности, и учитель подал на него в суд. Как должен решить судья, ведущий процесс: платить или не платить? Убедитесь, что: если «платить», то «не платить», и наоборот.

Замечание. Парадокс возникает из-за нечеткости формулировки договора: надо бы «платить с первого выигранного процесса, в котором ученик, окончивший учебу, выступит в качестве судьи» — в этом случае парадокса нет. (Достаточно несколько подправить ситуацию в задаче 17, и парадокс уже неизбежен.)

Учитель обучал ученика искусству побеждать в споре. Условились: ученик оплачивает учебу после первого выигранного им спора. Случилось так, что первый спор возник по вопросу платы за обучение — ученик отказывался платить, учитель отстаивал свое право на вознаграждение.

Будьте судьей в споре — платить ученику или не платить? (Если платить, то ученик спор проиграл и т. д.)

Задача 18 (Куча песка). «Докажем», что кучи песка не существует, для этого воспользуемся методом математической индукции. Одна песчинка, естественно, не куча.

Если k песчинок не куча, то добавление к ним одной песчинки не сделает множество кучей — $(k+1)$ песчинки не являются кучей. Тогда при любом числе песчинок n множество не является кучей. Куч, следовательно, не существует, что противоречит действительности.

Причина парадокса в том, что не определено понятие «куча». Если определить кучу как множество p песчинок, то индукционный шаг от p к $(p+1)$ окажется неверным. При уточнении задачи оказывается, что принцип математической индукции к ней не применим.

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАДОКСОВ ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ПАРАДОКСА «ЛГУН» (см. с. 62, 131)

1. (Я—Я).

1.1. Я: «Я лгу» (1). Утверждение, мы знаем, является парадоксом.

1.2. Я: «Я лгу, что Я лгу» (2). Если (2) истинно (Я лжет о том, что лжет), то в действительности Я говорит правду — противоречия нет. Нет его и при допущении ложности (2). (2) не есть парадокс.

1.3. Легко проверкой убедиться в том, что цепочка из трех «вложенных друг в друга» утверждений «Я лгу», напротив, есть парадокс, из четырех — не парадокс и т. д. Докажем следующую теорему. «Навешивание» на цепочку дополнительного утверждения «Я лгу» преобразует парадокс в «не парадокс» — и наоборот.

Доказательство проводится методом математической индукции. Для цепочки из одного или двух утверждений «Я лгу» (длины 1, 2) закономерность, мы видели, справедлива.

Пусть при $n = k$ получается парадокс: А = «Я лгу, что Я лгу, что ..., что Я лгу» — k раз (3). Построим «навешиванием» дополнительного «Я лгу» цепочку такого же типа длины $(k+1)$: В «Я лгу, что А» (4). Если В = 1, т. е. (4) истинно, то первое «Я лгу» в А = 0 (1, 0 — истинно, ложно), тогда (вспомним, по допущению А парадокс) «Я лгу» = 1, и В = 1. Таким образом, из В = 1 следует тривиальное В = 1 — противоречия, во всяком случае, не возникает. Аналогично из допущения В = 0 следует В = 0 — парадокса нет.

Пусть теперь (3) не антиномично (А — не парадокс), тогда утверждение В = «Я лгу, что А» является парадоксом. Действительно, если В = 1, то первое «Я лгу» в А, как и ранее, равно 0. Но в этом случае А, по условию, не парадокс, и «Я лгу», а следовательно, В = 0 — противоречие. Точно так же из допущения В = 0 следует В = 1. Утверждение (4) антиномично.

Итак, если (3) — антиномия, то (4) — не антиномия, и наоборот. Оказывается, между парадоксами и высказываниями нет проходимой грани: они переходят друг в друга вследствие «навешивания» оператора «Я лгу». Если позволено прибегать к аналогиям, то мы сравнили бы это с умножением чисел, начиная с 1, на мнимую единицу (i): $1 \cdot i = i$ — мнимо; $i \cdot i = -1$ — действительно: $-1 \cdot i = -i$ — мнимо и т. д.

Далее, учитывая, что (1) — парадокс, (2) — не парадокс, приходим к такому следствию из теоремы: цепочка с системой «навешиваний» утверждений «Я лгу» является парадоксом, если число таких утверждений нечетно, и не является таковым, если это число четно.

2. (Я—ОН).

2.1. Я: «Он лжет», ОН: «Я лжет». Если Я = 1, то ОН = 0 и из утверждения ОН следует: Я = 1; если Я = 0, то ОН = 1, Я = 0 — парадокса, как видим, нет.

2.2. Я: «ОН лжет», ОН: «Я прав». Если Я = 1, то ОН = 0, Я = 0; если же Я = 0, то ОН = 1, Я = 1 — парадокс.

Убедитесь аналогичным рассуждением, что структура Я: «ОН прав», ОН: «Я лжет» (2.3) — парадокс, а структура Я: «ОН прав», ОН: «Я прав» — не парадокс (2.4).

Назовем две структуры рассматриваемого типа одноименными, если обе содержат слово «прав» или обе — слово «лжет». Тогда можно сформулировать следующую закономерность: разноименные высказывания Я и ОН образуют парадокс, одноименные — парадокса не образуют.

Для связи с предыдущим заметим, что одноименные структуры содержат четное число значений предиката «лгать» на множестве {Я, ОН}, точнее, 0 или 2, разноименные — нечетное число (1).

В Я—ОН-ситуации ОН как бы является зеркалом для Я прямого (непарадоксального) или перевернутого (парадоксального) изображения. Однако опосредующую роль Я можно исключить, сведя два утверждения в одно, и тогда рассматриваемый случай приводится к предыдущему: 2.1 и 2.4 — к Я: «Я прав»; 2.2 и 2.3 — к Я: «Я лгу». Опосредование мышления психологическими орудиями — в данном случае высказыванием ОН о Я, — по мнению выдающегося советского психолога Л. С. Выготского, является фундаментальным свойством психики. Здесь описано одно из вырожденных (приводящих к логическому парадоксу) проявлений этого механизма.

3. (Я—ТЫ—ОН).

3.1. Я: «Ты лжешь», ТЫ: «ОН лжет»; ОН: «Я лжет». Пусть Я = = 1, тогда ТЫ = 0, ОН = 1, Я = 0. Если же Я = 0, то ТЫ = 1, ОН = 0, Я = 1 — парадокс.

3.2. Я: «ТЫ лжешь», ТЫ: «ОН лжет», ОН: «Я прав». Из Я = 1 следует: ТЫ = 0, ОН = 1, Я = 1. Напротив, из Я = 0 следует: ТЫ = 1, ОН = 0, Я = 0 — парадокса нет.

Рассмотрим предикат «говорить правду» на множестве Я, ТЫ, ОН. Если в высказывании Я (ТЫ, ОН) содержится слово «прав», то присвоим высказыванию значение 1, если слово «лжет» — 0. Тогда справедлива следующая таблица парадоксов (табл. 21). (Пояснение: первые две строки отвечают случаям 3.1 и 3.2, рассмотренным выше. Третья строка означает: Я: «ТЫ лжешь», ТЫ: «ОН прав», ОН: «Я лжет» и т. д. В последнем столбце таблицы указано, какая структура является парадоксом (да) и какая им не является (нет)).

Проверьте таблицу, взяв за образец рассуждения, приведенные для 3.1 и 3.2.

Подводя итог, можно сказать, что теорема, сформулированная для случая 1, сохраняет силу и для других цепочек — с участием ТЫ, ОН.

Задача 19 (Шерлок Холмс среди ПКМЛ). На допросе в Историуме каждый из четырех «обвиняемых»: Психолог (П), Кибернетик (К), Математик (М), Логик (Л) — высказывался об истинности показаний одного из трех других. П: «К неправ», К: «М не прав», М: «Л прав».

В это время в соседней комнате зазвонил телефон, и Холмс вышел. Через несколько минут он вернулся и, пряча улыбку, сказал: «Что, Ватсон, перейдем к следующему вопросу?» — «Но Вы не слышали ответа Логика», — в недоумении сказал Ватсон. — «Ну, знаете, Холмс, можете улыбаться сколько угодно, но на этот раз у Вас не выйдет. Хотите, приведу ход Ваших мыслей? Пожалуйста. Логика с психологией никогда не были в особой дружбе: то психо— не логика, то логика — не психо... А тут еще нелестное высказывание Психолога о Кибернетике — ближайшем родственнике Логика. Таким образом ...»

«Холмс считает, — перебил его Шерлок Холмс, — что Логик заявил: «П не прав»?

Ватсон, Вы слишком живете чувствами, дружище ...»

Что сказал Л? Как Холмс «вычислил» высказывание Л?

О т в е т: Л: «П прав», иначе — парадокс: нечетное число нулей, чего Л никак допустить не мог.

Таблица 21

Я	ТЫ	ОН	Наличие парадокса	Я	ТЫ	ОН	Наличие парадокса
0	0	0	Да	1	0	0	Нет
0	0	1	Нет	1	0	1	Да
0	1	0	Нет	1	1	0	Да
0	1	1	Да	1	1	1	Нет

Покажите рассуждением, что в случае Л: «П не прав» действительно получается парадокс. Придумайте сами несколько задач типа «Я—ТЫ—ОН» из вашей практики или близкой сферы деятельности.

ПАРАДОКСЫ ВОКРУГ НАС И В НАС (ЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ В ХУДОЖЕСТВЕННОМ И НАРОДНОМ ТВОРЧЕСТВЕ)

У художественной литературы, у жизненной правды — своя логика. В начале романа Пушкина логика на стороне Онегина, а наши чувства с Татьяной — парадокс!

«А сердце ни одной твоей вины
не видит и с глазами не согласно» — это Шекспир.

«Честь говорит ей: «нет», а сердце: «да!»

Алишер Навои

Каренин прав, и Анна — тоже, хотя их «правды» несовместны. Одна из них гибнет. «Святая грешница», «слабоумный мудрец», наконец, «парадоксалист» у Ф. М. Достоевского — это же «ходячие парадоксы»! Недаром А. Эйнштейн, зачарованный необычностью обыденного, писал, что Достоевский дал ему больше, чем Гаусс.

Ниже в задачах проанализирован ряд парадоксов, которые построены автором в основном по мотивам художественной литературы и народного творчества. Предпринята попытка их анализа в едином ключе, из общих принципов.

Каждая задача является небольшим логико-психологическим этюдом, в котором сводятся, сопоставляются и дифференцируются логический и психологический подходы к проблеме. Все вместе задачи служат разведке обозначенного принципом «двух Я» рубежа между содержательным мышлением и его воспроизведением (описанием, моделированием) в ЭВМ, системах «искусственного интеллекта». Доказывается, что диалектические противоречия отдельных признаков ситуаций могут оказаться антагонистичными в прокрустовом ложе формально-логического анализа.

Задача 20 (Бедный Мунк и чародей). В известной сказке В. Гауфа «Холодное сердце» чародей исполнил желание бедняка Мунка: иметь в кармане всегда столько денег, сколько их у первого богача деревни (чародей знает свое дело: взмах палочки — и готово!). Как должен вести себя Мунк, садясь за игорный стол с богачом, — выигрывать или проигрывать?

Обсуждение. Вначале, по условию, у обоих денег поровну. Выиграв партию, Мунк проиграет в деньгах, и наоборот. Суть в том, что понятие выигрыша здесь имеет два противоположных смысла: партию, деньги. Если их четко различать и считать главным выгрыш в деньгах, то парадокса нет: Мунк должен проиграть партию. Если же говорить о выигрыше безотносительно, исключив слова «партия», «деньги», то получим парадокс: выиграв, Мунк проиграет, и наоборот.

Задача 21 (Мужик и барин). В одной старой русской сказке барин предложил бедному мужику большие деньги, если он скажет, чего на свете не бывает. Мужик сказал: «Не бывает, чтобы у меня водились большие деньги». Должен ли барин платить?

Решение. Если барин не заплатит, то мужик сказал правду, следовательно, надо заплатить. Если же барин заплатит, то мужик соврал — платить не надо.

Обсуждение. Оказывается, «бедный мужик» (теперь) и разбогатевший (получивший деньги, потом) в «денежном вопросе», по существу, — два разных человека («два Я», соответственно $Я_1 \neq Я_2$). Утверждение «не бывает, чтобы у меня водились большие деньги», относится к бедняку $Я_1$, оно верно, ему барин заплатит. После этого ничего не изменится: $Я_1$ все же сказал правду. «Незаметное», как бы само собой разумеющееся распространение высказывания на разбогатевшего $Я_2$, отождествление двух разных Я ($Я_1 = Я_2 = Я$) — причина парадокса.

С позиций формальной логики объект в процессе рассуждения инвариантен, равен самому себе — парадокс, следовательно, неизбежен. Психологический же анализ указывает на недопустимость идентификации «двух Я» в разных способах синтеза — системах связей и отношений. Назовем психологический подход условно «принципом двух Я».

На уровне логического анализа мы, нарушая принцип «двух Я», вынуждены ограничиться констанцией, что парадокс *есть*. Напротив, психологический анализ объясняет, *что* парадокс есть.

В задаче 20 причина парадокса та же: игнорирование в логическом анализе принципа «двух Я». Мунк, выигрывающий партию, и Мунк, выигрывающий деньги, — это те же выступающие в разных связях $Я_1 \neq Я_2$.

Завершим анализ задачи очень точным психологическим наблюдением М. Ю. Лермонтова. «Во мне два человека: один живет в полном смысле этого слова, другой мыслит и судит его... со строгим любопытством, но без участия» («Герой нашего времени»).

Задача 22 (Первое апреля). В книге известного американского логика Рэймонда М. Смаллиана «Как же называется эта книга?» («Мир», 1981) автор приводит одно воспоминание своего детства. Утром первого апреля старший брат говорит младшему: «Я тебя сегодня обману». Если это правда, то младший будет о б м а н у т, если ложь, то он у ж е обманут. В любом случае обещание выполнено, парадокса нет, хотя интуитивно чувствуется ситуация, близкая к парадоксу. Как же его удалось избежать? Здесь ситуация как бы разведена во времени: «сейчас», «потом». Если сейчас не обманывает, то обманет потом, и наоборот. При игнорировании временного различия (исключите в предыдущей фразе или «приравняйте» слова «сейчас», «потом») парадокс неизбежен. Обманывает сейчас с п о м о щ ь ю самого заявления ($Я_1$) и обманывает впоследствии с о г л а с н о заявлению ($Я_2$) — это ситуативно неравные действия, выступающие в разных системах отсчета и имеющие соответственно разные (логико-психологические) координаты: $Я_1 \neq Я_2$. Не существует единого, не зависимого от системы связей Я. Пока принцип «двух Я» соблюден, парадокса нет.

В приведенном розыгрыше достаточно горькой правды. Суть в том, что в математике задание объекта, события, ситуации есть однозначное определение его настоящего и выводимого будущего. Это проходит безболезненно, когда «настоящее» логически связано с «будущим» однонаправленной восходящей временно́й цепочкой: «настоящее» определяет «будущее», но само от него не зависит. Если же они закольцованы, то «будущее», результат, возникнув, может изменить свойства «настоящего», которое уже с о с т о я л о с ь. Необходимо, следовательно, различать в анализе реальное «теперь» и то, каким оно станет при мысленном обращении временно́го процесса.

Задача 23 (Принцесса: человек или автомат?). В сказке замечательного французского сказочника Шарля Перро «Рике с хохолком» добрая Фея наделила младенца Рике, родившегося с физическими недостатками, недюжинным умом и способностью сделать умной полюбившуюся девушку, которая согласится выйти за него замуж, а также — позволим себе несколько усилить способность — лишать ее этого дара, если она изменит своему решению.

Пришло время, и юноша полюбил. Принцесса была удивительно красива, но, увы, столь же глупа. Та же Фея наделила принцессу при рождении способностью сделать красивым юношу, которого она полюбит, но принцесса об этом своем даре не подозревает. Вопрос: выйдет ли принцесса замуж за Рике?

Если принцесса согласится на брак с Рике (от глупышки отказались другие женихи), то она одновременно наделяется умом. Рике же лишается своего преимущества: он не стал красивым, принцесса приняла решение не по любви. Красивой и умной принцессе теперь предоставляется более выгодная партия, она отказывается от обещания (если бы она знала, что, полюбив, наделит Рике своей красотой!). В итоге принцесса лишается дара Рике, начальные условия восстанавливаются, и она вновь, по необходимости, согласна на брак с Рике и т. д. Возникает парадокс: если «да», то «нет», и наоборот.

В сказке порочный круг разорван: Рике сообщает возлюбленной о ее чудесном даре. Незапрограммированное решение принцессы приходит не «изнутри», а под внешним воздействием, как это обычно имеет место у автоматов. Для нас же значительно интереснее реальный механизм самоуправляемого решения человека.

Обсуждение.

> — *Куда бежишь?*
> — *К доктору, что-то мне сегодня не нравится моя жена...*
> — *Тогда бежим вместе: моя мне уже давно не нравится*
>
> **Подслушанный разговор**

Действия Рике, мы видели, однозначно запрограммированы. Если бы принцесса была «искусственным интеллектом» — красивым автоматом «с претензиями» на разумное поведение и жила в окружении себе подобных, то ее поведение так и описывалось бы «незатухающими колебаниями постоянной амплитуды» между согласием («да») и отказом («нет»), пока внешнее воздействие не вывело бы ее из этого состояния. Их логическое сосуществование выражается парадоксом.

Решение в сказке в свете этого предположения верно, единственно.

Допустим теперь, что принцесса обыкновенная женщина — пусть не очень далекая. Ее реакции, основанные на здравом смысле, в известной мере нечетки; убежденность в правоте действий имеет вероятностный характер, по-человечески размывающий абсолютную грань между «да» и «нет». Поведение, отражая горький опыт предыдущих «отказов», все менее уверенно, колебания затухают, становятся неотчетливыми. В «нет-решениях» все меньше категоричности, крепнут противодействующие мотивы в пользу «да». С учетом «спроса на невест» определенного качества и горячего чувства Рике постепенно изменяется показатель эффективности выбора: выйти замуж с выгодой только для себя. Итогом является «да» — незапрограммированный компромисс, продукт взаимодействия Я со средой. Награда — удовлетворение всех желаний принцессы. Парадокс для нее разрешается естественно, психологически, без постороннего вмешательства, как это происходит в логическом варианте «искусственного интеллекта». Принцесса вначале, которой Рике «не нравится», и принцесса в конце, выстрадавшая ценой ошибок свое счастье, — это $Я_1 \neq Я_2$. Такая «мелочь» логическим анализом не схватывается. («А в груди его (ее — С. Ш.) была дума крепкая» — М. Ю. Лермонтов «Песня про купца Калашникова»).

Задача 24 (Отчего кошку назвали кошкой?). В монгольской народной сказке в обработке большого мастера парадоксов С. Маршака старик предлагает назвать черноухого «Тучей»: «Пусть он будет большой и могучий». Старуха возражает: Ветер гонит тучу — он сильнее... Далее: Стена не боится Ветра, Мышка точит Стену, Кошка съедает Мышку — сильнее всех, следовательно, Кошка. Если отношение «слабее» обозначить математическим знаком «меньше» ($<$), то Туча $<$ Ветра $<$ Стены $<$ Мышки $<$ Кошки. Добавим, уж от себя, что Кошке не повалить Стены: Кошка $<$ Стены. Воспользовавшись известным свойством транзитности (если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$), заключаем: Стена $<$ Стены — парадокс.

Обсуждение. «Стена» в отношениях «Стена $<$ Мышки» и «Кошка $<$ Стены» проходит по разным признакам. За «Стеной» с позиций принципа «двух Я» прячутся два ее приближения, односторонние и независимые $Я_1 \neq Я_2$. Применение математического закона транзитивности, следовательно, неправомерно. Более — незаконно само отношение «$<$»: множество, как говорят в математике, не упорядочено.

Задача 25 (Два соседа). В вариациях С. Маршака на тему кавказской народной сказки «Про двух соседей» бедный сосед пришел к богатому просить осла, чтобы съездить на рынок. Богатый отказал ему, сославшись на то, что осла нет дома, хотя из сарая раздавался крик животного. Упрек соседа он отвел вопросом: «Ослу ты веришь моему, а мне не хочешь верить?». Против этого возражать было трудно.

В другой раз бедный загнал в свой хлев барана богатого соседа. На требование последнего о возврате барана бедный сказал, что барана нет, хотя из сарая несся бараний крик: «Ты соседу больше верь, чем глупому барану».

Добавим от себя: один из двух соседей всегда говорит правду, другой — лжет. Вопрос: прав богатый сосед или нет?

Если «да» (всегда «да»), то в случае с бараном бедняк не прав и надо «верить» скотине. Если «нет», то уже в случае с ослом надо «верить» скотине. В любом предположении получаем противоречие с одобренным обоими условием: верь человеку и не верь скотине. Получился парадокс.

Замечание. Аналогичным рассуждением относительно бедного соседа показывается, что и в этом случае парадокс неизбежен.

Обсуждение. На основе постулата «приоритета человека перед животным», принятого обоими, богатый прав в отношении осла и неправ в отношении барана. Если в первом случае $Я = Я_1$, во втором — $Я = Я_2$, то $Я_1 \neq Я_2$. Выставленное в условии вопреки принципу «двух Я» требование $Я_1 = Я_2$ (если прав, то всегда) порождает парадокс.

Задача 26 (Рассказы о животных). В рассказах о животных канадского писателя Э. Сентон-Томпсона дворняга Вулли — лучший сторож овец в округе. Но послушный «зову предков», Вулли сам загрызает овец, искусно пряча следы. Все кончается ударом топора хозяина. Кто прав — Вулли, хозяин?

Хозяин, сердобольный, добрый человек, уничтоживший убийцу, конечно, прав. Но прав и Вулли, выполняющий «генетически заложенную программу». Логическое требование «сосуществования» двух «правд» порождает парадокс, который третьей, жизненной правдой разрешается гибелью Вулли.

Задача 27 (О волке). Волку Лобо, отважному и благородному, справляющемуся с любой опасностью, в сложившейся ситуации инстинкт безошибочно подсказывает: если он бросится к своей плененной подруге, то погибнет — надо убегать немедленно. Но если он сохранит жизнь ценой предательства, то зачем ему такая жизнь?! В этой «сшибке» двух запрограммированных ситуативно несовместных инстинктов: жить и любить, из которых каждый — «правильный», побеждает последний. Лобо погибает в капканах ловчих. Действительность диктует: двойной правды нет, как нет единой логики для всех: для Каренина и Анны, для Богатого соседа и Бедного, для Хозяина и Вулли и т. д. В трагических ситуациях парадокс разрешается в жизни ценой самой жизни героев, независимо от того, идет ли речь об Анне Карениной, Ромео и Джульете, Лобо или Вулли.

Задача 28 (Казнить или помиловать?).

В сказке С. Маршака «Двенадцать месяцев» малограмотная взбалмошная четырнадцатилетняя Королева подписывает своему подданному несправедливый приговор: «Казнить» — и только потому, что это слово короче слова «Помиловать». Кроме того, она знает написание первого слова и слаба в написании второго. Правильно ли написала Королева приговор?

Слово «казнить» она написала правильно, приговор — неправильно. Если бы (об этом в сказке умалчивается) Королева все же начертала «памиловать», то слово написано неправильно, приговор — правильный.

Суть кажущегося противоречия в том, что в задаче есть два несовпадающих типа «правильно»: правильное написание слова, означающего приговор («казнить», «помиловать»), и правильность, справедливость самого приговора (казни, помилования) — их значения противоположны.

Казнить (без кавычек) — это содержание действия, или, как говорят, его семантика. «Казнить» (в кавычках) совсем другое — слово, предписывающее соответствующее действие, оформление, синтаксис предписания (на другом языке — не русском слово пишется иначе); в терминах кибернетики — канал, по которому передается информация от королевы: казнь, помилование. Если не проводить различия, то парадокс неизбежен: правильно написано по форме — неправильно по содержанию, и наоборот. В действительности парадокса нет: значения истинности относятся к разным характеристикам объекта.

Королева, выносящая приговор (его можно сформулировать письменно, устно и т. д.), и королева, которая выводит на бумаге соответствующее слово, — это $Я_1$ и $Я_2$, отнесенные к разным свойствам единого Я: справедливость, грамотность; математически — к разным системам координат. Подлинный, неустранимый парадокс возникает, если потребовать равенства $Я_1 = Я_2$.

Чтобы этого «добиться», подправим несколько условие. Пусть перед казнью обвиняемому дано право высказать последнее пожелание, которое непременно будет выполнено, и он сказал: «Ваше величество! Я хочу, чтобы правильность написания вами приговора совпала с правильностью самого приговора».

Убедимся, что задача неразрешима. Если, как это случилось, приговор «Казнить», то написано правильно, приговор — неправильный. Тогда, выполняя просьбу обвиняемого, приговор переписывается королевой «Памиловать». Теперь уже написано неправильно (с ошибкой), сам приговор — правильный. Итак, во исполнение последней воли обвиняемого казнить его нельзя, помиловать — тоже. Парадокс.

Задача 29 (Король и Министр). В королевстве Дурумии об умных жителях принято говорить только правду, о глупых — только лгать. Однажды Король назвал своего Министра глупцом. Действительно ли Министр глуп?

Убедитесь, что здесь — парадокс.

Задача 30 (Не верь первому встречному). Про этот город турист знал только то, что одни его жители всегда говорят правду, другие — всегда лгут.

Встретив двух человек, идущих рядом, он спросил одного, как пройти в гостиницу, и, не расслышав ответа, обратился к другому: «Что сказал ваш товарищ?». Тот ответил: «Товарищ говорит, что он лжет» — и добавил: «Что касается гостиницы, то вам следует идти прямо». Вопрос: должен ли турист идти в указанном направлении?

Ответ. Не должен: второй — лгун, первый не мог сказать: «Я лгу» (см. задачу 11).

II. Задачи типа «Он думал, что я думала...» (из английской народной поэзии)

Задача 31 (Экзамен по математической логике).

— Право, не знаю, как оценить ваши знания, — сказал преподаватель, выслушав ответ студента. — Где-то между «отлично» и «хорошо». Знаете что — я выставлю вам отличную оценку, если вы угадаете, какую оценку получите, отличную или хорошую.

— Тут двух мнений быть не может, — сказал «умудренный» опытом сдачи экзаменов студент — из двух равновероятных возможностей преподаватель обычно выбирает худшую.

Теперь пришло время задуматься преподавателю.

О б с у ж д е н и е. Если выставлено «отлично», то студент не угадал и, значит, получает оценку «хорошо». Другая альтернатива также неприемлема — парадокс.

Задача 32 (Программированный контроль). $\sqrt{x^2} = |x|$. В следующих четырех утверждениях выберите ложные: 1) Равенство справедливо при $x \geqslant 0$. 2) Равенство справедливо при $x < 0$. 3) Равенство справедливо только при $x > 0$. 4) Среди названных высказываний — два ложных.

Р е ш е н и е. Если 4) истинно, то, учитывая истинность 1) и 2), заключаем: 4) ложно. Если же 4) ложно, то ложных утверждений ровно два и 4) истинно. Парадокс.

Задача 33 (Шерлок Холмс в стране логики, электроники, психологии и гангстеров). Долго охотилась банда гангстеров за своей грозой Шерлоком Холмсом, и, наконец, он попал-таки в их руки. Гангстеров интересовало, что известно на воле об их торговле наркотиками; где хранится дело нашумевшего процесса Аль-Капонини. Сыщик на вопросы не отвечал. Тогда Главный гангстер решил покончить с ним с помощью его же оружия — логико-аналитического метода. В присутствии всей банды Главный огласил следующее заявление. «Ваша судьба закодирована на специальной перфоленте, которая хранится в бронированном сейфе. Вам предоставлена возможность получить свободу в том случае, если узнаете, что там записано: свобода или смерть. Либо — докажете нелогичность моего приговора. Приговор обжалованию не подлежит», — издевательски закончил гангстер. Он хорошо знал психологию преступного мира и считал ее универсальной для всего человечества. «Холмс, скорее всего, решит, что вынесен смертный приговор, — тут мы его и поймаем: напишем «Свобода». Пусть теперь угадывает! В крайнем случае используем безотказный запасной ход: незаметно подменим решение. Конец тебе, Холмс!»

Сыщик понимал, с кем имеет дело. Необходимо было придумать решение, которое гарантировало бы от произвола бандита, в любом случае давало бы освобождение. Холмс попросил бумагу и карандаш. «Наконец, образумился! — обрадовался гангстер. — Давно пора давать показания».

Сыщик написал логическую формулу: $z = x \vee (x \sim y)$*. Сын страны Джорджа Буля и Бертрана Рассела**, Холмс на досуге иногда шлифовал свой ум изучением законов математической логики и неплохо в ней разбирался.

Гангстер в недоумении смотрел на непонятные символы. Вдруг его озарило: «Сэр, не трудитесь, можете расшифровать свои каракули,

---

* $\vee$ — логическая связка «или» (дизъюнкции). Дизъюнкция двух высказываний $a \vee b$ истинна тогда, и только тогда, когда хотя бы одно высказывание a или b истинно. $\sim$ — связка логической эквиваленции: $a \sim b$ истинно, когда a и b оба истинны или оба ложны. (См. ч. I этой книги.)

** Известные английские специалисты по математической логике.

вряд ли вы отсюда выйдете!...» Это был испытанный прием психологического прессинга. Но Холмс, казалось, не слышал его. Наконец, он решительно сказал: «Готово, вы вынесли мне смертный приговор». Гангстер от радости даже подпрыгнул: «Вот она истинная психология против паршивой логики ищеек!...»

Между тем Холмс хладнокровно продолжал: «Можете не открывать сейф. Верните, пожалуйста, трубку и трость, я спешу на деловую встречу». Докажите, что Холмс свободен.

Решение. Если Холмсу действительно присуждена смертная казнь, то он разгадал приговор и должен быть помилован. Если же ему выпала свобода, то он приговора не узнал и подлежит казни. Как видим, первая часть условия гангстера парадоксальна. Тогда по второй части — нелогичность приговора — Холмс получает свободу.

Обсуждение. Холмс не просто угадал единственный надежный путь к свободе — он «вычислил» его. Восстановим ход его мысли. Пусть

$$x = \begin{cases} 1, \text{ если гангстер задумал свободу,} \\ 0 \text{ — в противном случае;} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1, \text{ если Холмс сказал «Свобода»,} \\ 0 \text{ — в противном случае;} \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} 1, \text{ если Холмс получает свободу,} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда ситуация, построенная гангстером, опишется логической формулой: $z = x \bigvee (x \sim y)$ (1). Это значит, что Холмс получает свободу ($z = 1$), если решение приводит к парадоксу: приговор гангстера — «свобода» ($x = 1$), а Холмс «не угадал» ($x \sim y = 0$) или, наоборот, $x = 0$, $x \sim y = 1$. Холмсу предстояло найти такое значение y (0 или 1), при котором в формуле (1) z истинно независимо от значения x. Этому удовлетворяет $y = 0$. Действительно, $z = x \bigvee (x \sim 0)$ тождественно истинно, т. е. истинно независимо от значения x — приговора гангстера.

Задача 34 (Я, ОН и парадокс). Играют двое: Я и ОН. Я задумывает один из двух предметов — А или В для передачи ОН, записывает свое решение и передает арбитру. Партия считается выигранной ОН, если ОН отгадает содержание записи, т. е. решение Я. В противном случае выиграл Я.

Выигравший получает предмет А — цель игры.

Докажите, что игра противоречива. Точнее, какое высказывание должен сделать ОН, чтобы возник парадокс?

Решение. ОН: «Мне передадут предмет В». Если это верно (Я действительно решил передать В), то ОН угадал и, по условию, выигрывает, получает предмет А. Но когда это случится, окажется, что ОН не угадал, ему, следовательно, достанется В и т. д. Рассуждение, как говорят в кибернетике, зациклилось — парадокс. В более общем виде оно выглядит так. Я (судья) присуждает ОН победу или поражение, в зависимости от того, догадался ОН или нет о том, что присудил Я: победу или поражение.

ОН утверждает: «Я присудил мне поражение». Если ОН прав, то, с одной стороны, ему засчитано поражение, с другой — ОН догадался о решении Я — присуждается победа. Если же ОН ошибся, то, судя по содержанию высказывания, ему присуждена победа и одновременно — как не решившему задачу — поражение.

Задача 35 (Глупый Ганс).

Что ни делает дурак,
Все он делает не так.

С. Маршак. Не так (Из серии «Сказки разных народов»).

Многим читателям, вероятно, с детства запомнилась мудрая сказка братьев Гримм «Глупый Ганс». То Ганс иголку, которую подарила ему Гретель, спрячет в сено на возу, то ножик ткнет в рукав, козочку в сумку засунет. Кончилось тем, что он привязал к забору саму Гретель. И все потому, что, отправляясь в гости к Гретель, Ганс, по научению матушки и во исправление допущенной в прошлый раз ошибки, заранее знал, что будет делать сегодня с подарком Гретель. Не знал он только, что она ему подарит (образно: на тебе ответ, дай мне под него вопрос).

Теперь представим себе, что дураку надоело все время попадать впросак и он потребовал от Гретель такого подарка, с которым можно поступать в соответствии с заготовленным действием.

— Я дам тебе то, что ты просишь, — сказала хитрая Гретель, — если угадаешь, что я тебе дам...

Наученный горьким опытом Ганс закричал: «Знаю, ты опять дашь не то, что надо!» — Это было самое разумное, что он мог придумать, чтобы наказать строптивую Гретель.

Покажите, что теперь Гретель сама попала в глупое положение.

Р е ш е н и е. Назовем подарок, который устраивает Ганса, адекватным. Если подарок Гретель адекватный, то Ганс не угадал, и подарок должен быть неадекватный. Но если Гретель это сделает, то окажется, что Ганс угадал, подарок, следовательно, должен быть адекватный. Возникает парадокс.

Оказывается, и дурак может быть умным, достаточно ему только немного... поумнеть. Или рассердиться: что я — глупее всех?!

Теперь вернемся к стихотворению Маршака, названному в эпиграфе. Все у дурака не так. С потолка строит дом, воду носит решетом; на свадьбе поет за упокой, а на похоронах пляшет — и все из добрых намерений: из сочувствия к невесте, из желания потешить скорбящих.

Нечто подобное мы находим у Михалкова («Про Янека» — из Юлиана Тувима, пер. с польского). Дурачок Янек «комара увидев, брался за топор»; в лес носил дрова, а в квартиру сор...

Придумайте для этих случаев ситуации, в которых «дурак» оказался бы «умным».

Обсуждение. **Принцип «двух Я»**. В рассматриваемых задачах Я, по существу, принимает решение дважды. Сначала — независимо ($Я = Я_1$), затем — опосредованно, через решение ОН, которому дано право вмешиваться, регулировать, изменять в свою пользу замысел Я: $Я = Я_2$.

Став на позицию другой стороны, замечаем, что ОН должен, пользуясь предоставленным ему правом управляющего воздействия на ситуацию, нейтрализовать, точнее, предугадать отрицательное для него решение Я. Положительное решение Я его, естественно, не беспокоит. Соответственно ОН должен назвать вариант, при котором решение Я не в пользу ОН. Этому удовлетворяет высказывание «Я выбрал В», приводящее к парадоксу. Так выглядит выход к решению ОН на содержательном логическом уровне. Отраженное в «кривом ОН-зеркале» собственное решение Я оказывается перевернутым и искаженным. Индуцированное ОН — новое значение Я противоположно первому. Ситуация естественно вписывается в принцип «двух Я».

Приведенное рассуждение можно формализовать. Воспользовавшись обозначениями в задаче 33 (Я — гангстер, ОН — Холмс; А — свобода, В — казнь), удается требование парадокса записать символически: $x \neq x \sim y$. Соотношение, легко видеть, справедливо при $y = 0$ для любого x: $x \neq x \sim 0$. И все же формальное решение принципиально отлично от содержательного. В первом случае для ОН построение парадокса является методом решения задачи. Во втором ОН не искал парадокса, парадокс сформировался как побочный продукт решения.

Однако наиболее важный вопрос — о причинах возникновения парадокса в, казалось бы, ординарной ситуации в обоих случаях решающим не сознается. Суть в том, что Я, диктующий установившуюся систему связей (Я — системообразующий фактор), сам подвержен действию этой системы. Его положение двойственно. С одной стороны, Я, казалось бы, стоит над системой «Я—ОН», вне ее. С другой, — как элемент системы — Я изменяется под ее, т. е. в значительной степени под собственным воздействием. Я, творящий суд над ОН, и Я, вынужденный согласовать решение с действием ОН, — это функционально различные Я, выступающие в разных способах синтеза. Отождествление в анализе «двух Я», по-разному вписывающихся в систему, — подлинная причина парадокса. Этот методологический вывод важен в условиях, когда системный подход завоевывает позиции не только в естественных, но и в гуманитарных науках.

ПОСЛЕСЛОВИЕ К ЗАДАЧАМ НА ПАРАДОКСЫ. ПАРАДОКСЫ И НАРОДНАЯ МУДРОСТЬ

В своих сказках, поговорках, в устной и письменной мудрости народ метко вскрыл противоречивый характер отражения жизненных ситуаций методами формального анализа. «Оборотни», «нелепицы», «перевертыши» в пословицах и сказаниях всех народов, что это — вызов разуму, выворачивание его наизнанку? Или — самоутверждение не сводимого к логическому Я человеческого ума, функционирующего в психологических рамках «двух Я»; разведка границ принятого способа мышления; протест против «примитивной определенности» (М. М. Бахтин)?

Вот они — некоторые «внезапные и опасные» для традиционной логики «скачки-мысли».

«Ей щенка, вишь, да чтоб не сукин сын» (В. Даль. Пословицы русского языка). В импликативной форме здесь, по требованию, посылка истинна, заключение содержательно ложно, ложна соответственно и импликация. Логическая несовместность требований вызывает ироническую усмешку: знаем, мол, в жизни так не бывает.

«Коли найдешь у коровы гриву, так и у кобылы будут рога» (там же). Вследствие ложности посылки импликация истинна — так гласит закон логики. Его вовсе не беспокоит бессмысленность заключения. Это упрек науке, бессильной «увидеть очевидное», ее ограниченности, выражение превосходства содержательного над формальным.

Убийствен народный юмор к безынформационным утверждениям. В одной английской детской сказке поется:

Жила-была старушка,
Вязала кружева,
И если не скончалась —
Она еще жива...

Читатель легко поймет, что здесь высмеивается «оперирование» тождественно истинной формулой $x \Rightarrow x$.

Смех народа — не ироническое подтрунивание над собственными нелепицами. Это смех сильного, сознающего величие своей мысли и отражающего ее слова.

Причудлива народная фантазия. Ковер-самолет и «подводник» Садко, всевидящий алмаз и огненная колесница — уже состоявшиеся легенды. Но есть еще Атлантида и невидимый град Китеж, приземление инопланетян и зеркало Искандера, в котором читается будущее (Алишер Навои).

Познание — всегда борьба с невежеством, горький пот и горячая радость. Помните, у Фирдоуси в «Шах-наме»: наследник царя побеждает бесовское полчище, и бесы, чтобы спасти свою жизнь, открывают ему великую тайну письма.

А сколько разочарований, жизненных драм! По свидетельству современников, Бертран Рассел, открывший в начале века свой парадокс (см. парадокс Рассела), надолго потерял способность думать о чем-либо другом и месяцами просиживал над пустым листом бумаги.

Выдающийся немецкий логик Готтлиб Фреге (1858—1924) после обнаружения парадокса в его логической системе больше не публикует ни одной значительной работы по математической логике, хотя прожил еще более 20 лет. Таковы «невидимые миру слезы».

В 1925 г. английский логик Рамсей классифицировал парадоксы на группы А и В. Парадоксы первой группы содержат только понятия, которые *естественно* (курсив наш — С. Ш.) считать принадлежащими логике или математике, их обычно называют просто логическими. Например, парадоксы Рассела, Кантора и др. Парадоксы группы В содержат понятия, не являющиеся строго математическими, относятся скорее к лингвистике (говорят еще — эпистемологии), их называют семантическими. Например, «Лжец». Рамсей в своей несколько расплывчатой классификации полагал, что математиков парадоксы группы В не должны интересовать. Однако в последние годы выяснилось, что именно глубокое изучение семантических парадоксов завершилось значительными результатами в математической логике [7, с. 26].

Оказывается, «не так уж уютно в мире знаний и знаков» (Рильке). Мысль рождается в глубинных лабораториях слов и понятий, в общении людей посредством языка. Семантические, как и теоретико-множественные парадоксы, показывают, что мышление и язык, в том числе математический, противоречивы и требуется известная осторожность в их использовании.

Завершим этот раздел парадоксом из серии «Математики смеются».

В «математической столице» Геттингене говорили, что есть два типа математиков: первые делают то, что им нравится, а не то, что нравится Клейну*, вторые делают то, что хочет Клейн, а не то, что они хотят. Клейн не относится ни к тем, ни к другим. Значит, Клейн не математик (Констанса Рид. Гильберт. — Пер. с англ. М.: Наука, 1977. с. 119). Это великий-то Клейн!

Если Клейн — «брадобрей», математика — «большая деревня», а математики — ее жители, то приходим к парадоксу «Парикмахер». Над кем смеетесь, уважаемые ученые? — Над собой смеетесь.

Три столетия назад один из великих создателей математического анализа Г. Лейбниц высказал надежду, что придет время, когда все научные споры будут решаться путем вычислений. Имелось в виду, что будут открыты «последние основы» (Г. Вейль) математики, и тогда любое рассуждение станет вычислением. Достижения кибернетики и машинной математики наших дней показывают, что чем быстрее и лучше мы вычисляем, тем больше понимаем, насколько далеки от решения этой задачи.

---

* Ф. Клейн — выдающийся немецкий математик, директор Математического института в Геттингене.

ДВЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Задача 36 (Испачканные лица). Группа людей с испачканными лицами смеются друг над другом: каждый думает, что его лицо чисто, а испачканы только соседи (зеркала в комнате нет). Вдруг один из них — наиболее сообразительный — догадался, что его лицо также испачкано и прекратил смеяться. Докажите, что задача имеет решение независимо от n — числа людей в группе, если в любой группе найдется хотя бы один человек, который умеет логически рассуждать.

Задача 37 (Ханойская башня). Требуется перенести n колец со стержня A на стержень B, используя в качестве вспомогательного стержень C. Все кольца разных диаметров, и нигде нельзя класть большее кольцо поверх меньшего.

Покажите, что существует общий метод решения задачи независимо от значения n.

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫМИ СПОСОБАМИ (РЕШЕНИЕ НЕ ФОРМАЛИЗОВАНО)

Задача 38 (Шляпы). В темной комнате на столе лежит пять шляп: три черные и две белые. Три человека, предупрежденные об этом, надели шляпы в темноте и друг за другом вышли в светлую комнату (таким образом, каждый видел шляпы только впереди стоящих). Первый, не оборачиваясь, спросил третьего: «Какая на вас шляпа?» Третий ответил: «Не знаю». Тогда первый задал тот же вопрос второму и получил такой же ответ. После этого он догадался, какого цвета шляпа на нем. Какого цвета шляпа была на первом и с помощью каких умозаключений он пришел к догадке?

Задача 39 (Опять шляпы). Трем человекам мудрец завязал глаза и надел на них шляпы. Когда сняли повязки, мудрец сказал: «У меня было пять шляп — три черные и две светлые. Пусть поднимет руку тот, на ком черная шляпа». Приведите рассуждения догадавшегося.

Обобщение задач 38 и 39

Для задач, несмотря на «уникальность», — обычно они используются для проверки творческих возможностей человека, — существуют обобщение и единый алгоритм решения.

Обобщенная задача. Число людей n, белых шляп $(n - 1)$, темных — не более n. Остальные условия сохраняются.

У к а з а н и е. При решении воспользоваться методом математической индукции.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ § 4

Задача 2. С л о в е с н о е   р е ш е н и е. Двое с кружками одного цвета видят одно и то же количество белых и черных кружков. Если они к тому же и говорят правду, т. е. у них самих на лбу белые кружки, то высказывания должны совпадать. Таким образом, среди высказавшихся А, Б, В, Д никакие двое не говорят правду. Белых кружков среди них не более одного, а с учетом Г — не более двух. Высказывания А и Д заведомо ложны. Но если Б сказал правду, то и В прав (В действительно видит один белый кружок у Б и три черных), что противоречит предыдущему. Б, следовательно, также лжет. Напротив, В говорит правду, в противном случае был бы прав и Б.

О т в е т. Белые кружки — у В и Г, у остальных — черные.

Решение методом характеристического уравнения.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если у } X \text{ на лбу белый кружок (его высказывание истинно),} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} А \sim \neg БВГД \vee Б \neg ВГД \vee БВ \neg ГД \vee БВГ \neg Д = 1, \\ Б \sim \neg А \neg В \neg Г \neg Д = 1, \\ В \sim А \neg Б \neg Г \neg Д \vee Б \neg А \neg Г \neg Д \vee Г \neg А \neg Б \neg Д \vee \\ \vee Д \neg А \neg Б \neg Г = 1, \\ Д \sim АБВГ = 1. \end{cases}$$

После некоторых элементарных преобразований соответствующего характеристического уравнения получаем:

$$\neg А \neg БВ \neg Г \vee \neg А \neg Б \neg ГД \vee \neg А \neg БГ \neg Д \vee \neg А \neg Б \neg ВГ \vee$$
$$\vee \neg А \neg Б \neg ВД \vee А \neg БВГД \vee \neg АБ \neg В \neg Г \neg Д \vee$$
$$\vee \neg А \neg БВ \neg Д)(А \neg ВГ \neg Д \vee Б \neg ВГ \neg Д \vee \neg А \neg Б \neg В \neg Г \neg Д \vee$$
$$\vee А \neg БВ \neg Г \neg Д \vee \neg АБВ \neg Г \neg Д \vee \neg А \neg БВГ \neg Д) = 1.$$

$$\neg А \neg БВГ \neg Д = 1.$$

О т в е т: В = Г = 1; А = Б = Д = 0.

Решение, как видим, полностью формализовано.

Задача 14. Пусть код понятия рч является рч, тогда он не принадлежит своему понятию (рч) — этот код не есть рч. Если «является», то «не является». Напротив, если код понятия рч — не рч, то он, по определению, принадлежит своему понятию (рч). — Если «нет», то «да».

Задача 15. Прилагательное «гетерологический», по определению, не обладает называемым им свойством — свойством «гетерологический». Оно, следовательно, не гетерологическое. С другой стороны, если оно не гетерологическое, то обладает содержащимся в его названии свойством — «гетерологическое».

Задача 16. Приведенная в кавычках фраза является определением понятия, о котором идет речь, но она содержит менее 20 слов. — Парадокс.

З а м е ч а н и я к з а д а ч а м 15, 16. То, о чем говорится в задачах (информация, заключенная в тексте, содержание понятия), и то, что написано (форма: слово, фраза — канал, по которому передается информация), не согласованы. Это, по Козьме Пруткову, «произведения», на которых нарисовано подобие слона, а подписано «буйвол»: канал «слон» должен передать информацию о понятии «буйвол». Если отвлечься от конкретного текста, то соотношение между формой и содержанием во всех случаях отражено фразой: «я лгу». Парадокс

«Лгун» оказывается эталоном, по которому «равняются» другие семантические парадоксы.

Суть в том, что определяемое принимает участие в собственном определении. А. Пуанкаре называл такие определения *непредикативными*, считал их причиной парадоксов (1905, 1906, 1908). Как оказалось, значительная часть математики, в том числе анализа, содержит непредикативные определения (Вейль, 1918). Однако тот факт, что все известные парадоксы используют непредикативные определения (объект П в рассмотренных выше задачах также определяется свойствами множества, которому П принадлежит), не гарантирует от возникновения в будущем парадоксов иной природы.

Задача 17. Если решение судьи будет: «платить», то подсудимый процесс проиграл и, соблюдая условия, платить не должен. В случае решения: «не платить» подсудимый выиграл процесс и должен заплатить. Если судья скажет: «да», то вслед за этим он вынужден сказать: «нет», и наоборот. Мы снова пришли к парадоксу «Лгун».

Задача 36. Для группы, состоящей из двух человек, решение тривиально. Пусть задача решена для $n = K$, т. е. для группы из K человек. $(K + 1)$-й рассуждает: «Если я чистый, то остается группа из K человек с испачканными лицами. По допущению (задача решена для K человек), по крайней мере один из них, догадается, что его лицо испачкано и перестанет смеяться. Но все продолжают смеяться. Мое лицо, следовательно, испачкано».

Задача 37. Для одного-двух колец решение просто. Пусть известно решение для K колец. Рассмотрим задачу для $(K + 1)$ колец. K колец переносим с A на C, используя вспомогательный стержень B, затем $(K + 1)$-е кольцо переносим на B и, наконец, K колец переносим с C на B с помощью вспомогательного стержня A.

З а м е ч а н и е к з а д а ч а м 36, 37. Без применения метода математической индукции решение задач, хотя и возможно, вызывает трудности уже для случая трех (человек, колец). Так, в задаче 36 решение для трех выглядит так. Рассуждает третий (наиболее сообразительный): «Если я чист, то второй, видя это, сообразит, что первый смеется над ним (больше ведь не над кем!), и, естественно, прекратит смеяться. Но второй продолжает смеяться — мое предположение неверно, я грязный».

Задача 38. Рассуждения ведутся от имени первого: «Третий не может определить цвета своей шляпы, хотя видит шляпы первых двух — на первых двух не две светлые шляпы. Если бы моя шляпа была светлая, то второй из этих соображений заключил бы, что на нем черная шляпа. Но второй не догадывается, какая на нем шляпа. Следовательно, моя (первого) шляпа черная».

Задача 39. По крайней мере, на одном черная шляпа: светлых шляп две. Пусть это будет первый, проведем рассуждение от его имени. «Передо мной — не две светлые шляпы (иначе задача была бы решена — С. Ш.). Тогда, например, второй, видя мою светлую шляпу, сообразит, что на нем светлой шляпы быть не может — в противном случае третий сразу догадался бы, что его шляпа — черная и поднял бы руку. Но третий руки не поднимает — мое допущение неверно, на мне черная шляпа».

Замечание. В задаче складывается интересная психологическая ситуация: первый думает, что второй думает ... Такое «проникновение в мысль другого» характерно для многих логических задач. В шутливой форме это отражено в стихотворении С. Маршака (из «Ковентри Патмора»):

Он думал, что уснула я ...,
Иль думал, что я думала,
Что думал он: я сплю!

Или у Л. Н. Толстого в «Детстве»: «Глаза наши встретились, и я понял, что он понимает меня и то, что я понимаю, что он понимает меня».

Обобщение задач 38, 39 (и 36). Для $n = 2$ (два человека, белых шляп одна, черных — не менее двух) решение тривиально. Я (в зад. 38 — первый, в зад. 39 — любой, назовем его также «первый») рассуждает так: «Если моя шляпа белая, то ОН, видя это, сделает вывод: его шляпа — черная. Но он «не догадывается» — ответил: «Не знаю», не поднял руки, — допущение неверно, моя шляпа — черная».

Пусть $n = k$ (k человек, белых шляп $(k - 1)$, черных — не менее k), задача, по допущению, решена: «первый» определяет цвет своей шляпы. Рассмотрим случай $n = (k + 1)$: людей $(k + 1)$, светлых шляп k.

Я («новый первый»): «Если моя шляпа белая — все это видят, — то меня можно исключить из условия, приходим к задаче $n = k$, и задача должна быть решена, что противоречит действительности. Моя шляпа, следовательно, черная».

Интересно, что обобщенная задача, благодаря методу математической индукции, решается проще каждой из частных задач уже для рассмотренного $n = 3$, не говоря уже об $n = 4$ и более.

Замечание. Легко заметить, что приведенные рассуждения дословно переносятся на задачу 36, только вместо реакции: ответил «не знаю», не поднял руки — будет: продолжает смеяться. Все три случая являются модификациями одной задачи, решаемой с помощью единого алгоритма.

5. ЛОГИЧЕСКИЕ И ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ, АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

— Папа, почему чужой дядя ремонтирует нашу машину, он же ее не знает?
— Дядя знает машину.

Homo ludens — человек играющий

Задача 1 (Фальшивая монета). Имеются n монет одинакового достоинства, среди них — одна фальшивая. Фальшивая монета весит несколько больше других, однако по внешнему виду ее отличить невозможно. С помощью точных рычажных весов, без разновесок, требуется минимальным числом взвешиваний определить фальшивую монету (под взвешиванием понимаем действие, выражающееся в одноактном помещении монет на чашки весов — без снятия, добавления, перекладывания).

Рассмотрите сначала несколько частных случаев ($n = 5, 8, 9, 10, 14, 26, 27$). Затем сформулируйте алгоритм решения задачи для любого n.

Составьте формулу вычисления числа шагов N, выполненных при решении задачи.

ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ АЛГОРИТМЫ ОСНОВАНЫ НА ИНВАРИАНТАХ — ВЕЛИЧИНАХ, СОХРАНЯЮЩИХ ЗНАЧЕНИЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СИТУАЦИИ

Задача 2 (Игра на дорожке). На концах дорожки, разбитой на M клеток, находятся две разноцветные фишки: Я и ОН. Противники делают ходы поочередно. Сделать ход — значит продвинуть свою фишку не более чем на K клеток вперед или назад, не перескакивая через фишку противника и не выходя за пределы дорожки. Проигрывает тот, у кого не окажется ходов. Составить алгоритм, в соответствии с которым Я выигрывает, если ему предоставлено право решать вопрос о том, кто делает первый ход (рис. 24).

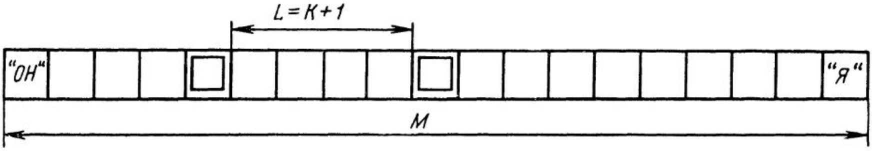

Рис. 24

Указание. Я своим очередным ходом добивается, чтобы расстояние между противниками было кратно $(K + 1)$.

Задача 3 (Кто первым назовет данное число?). Играют двое, делая ходы поочередно. Сделать ход — значит назвать натуральное число от 1 до K и прибавить его к уже имеющейся сумме всех чисел, названных в предыдущих ходах обоими противниками. Выигрывает тот, кто первым назовет число M.

Задача 4 (Кто наберет четное число предметов?). В игре участвуют двое: Я и ОН. Ходят поочередно. В каждый свой ход играющий может взять из общей кучки в M предметов не более K предметов. Победителем считается тот, кто по окончании игры (когда в куче предметов не останется) наберет четное число предметов.

Составьте алгоритм игры.

Указание. Обозначим СЯ и СОН соответственно число предметов, набранных Я и ОН во всех ходах до данного. Тогда инвариантом игры на выигрыш является принадлежность после каждого хода Я (перед очередным ходом ОН) числа невыбранных предметов в куче классу вычетов 1 по модулю 6 (K_1), если СОН четна, и классам вычетов 5 или 0 по модулю 6, если СОН нечетна.

Образно выражаясь, — «так держать»!

Задача 5 (Игра Гранди). Играют двое, поочередно. *Ходом* называется разбиение любой (одной) из лежащих на столе кучек предметов на две неравные части. Начинают с одной кучки. Выигрывает тот, кто сделал последний ход.

Замечание. Ясно, что кучки в один или два предмета в дальнейшей игре не участвуют.

Инвариант игры. В позиции, складывающейся после хода Я, количество кучек, принадлежащих (по числу элементов) классам X_0 или X_2 вычетов 0 и 2 по модулю 3, четно.

Задача 6 (Игра «Ним»). Предметы (например, спички) раскладываются на произвольное число кучек. Играют двое, делая ходы поочередно. Сделать ход — значит взять любое число спичек (можно все) только из одной кучки. Выигрывает тот, кто забирает последние предметы.

Инвариант игры. Инвариантом игры Я на выигрыш является четность сумм всех цифр каждого разряда в двоичном представлении числа спичек в кучках после хода Я (Кобринский Н., Пекелис В., Быстрее мысли. — М.: Молодая гвардия, 1959).

Пример. После текущего хода Я остались кучки: 7, 5, 2, или, в двоичной системе, 111, 101, 010. Во всех трех разрядах сумма цифр равна двум — ситуация для Я выигрышная. Если Я дальше будет «держать так», то игра закончится в его пользу, когда после очередного хода Я возникнет ситуация 000, 000, 000. Весь вопрос в том, как «удержать» инвариант.

Задача 7 (Обобщенная игра «Ним»). В описанном варианте игры «Ним» (задача 6) победа достается тому, кто берет последние предметы. Можно предложить и другой вариант игры — победитель заставляет противника сделать последнюю взятку. Желательно приспособить предыдущий способ решения к новому варианту. Однако теперь алгоритм игры на выигрыш для Я отказывает каждый раз, когда в позиции, сложившейся к очередному ходу Я, имеется ровно одна кучка, содержащая более одного предмета. Пользуясь известным алгоритмом, Я вынужден «срезать» ее, оставив четное число единичных кучек. Но тогда в условиях второго варианта Я проигрывает. Таким образом, для обобщения алгоритма требуется организовать в нем развилку, предусматривающую для второго варианта в рассматриваемой ситуации такой ход Я, после которого противник поставлен перед нечетным числом единичных кучек.

Задача 7_1 (Частный вариант игры «Ним»). Рассмотрим частный случай игры, для которого можно сформулировать более простой алгоритм.

По-прежнему играют двое — Я и ОН, только теперь имеется лишь одна кучка, состоящая из M предметов, зато вводится дополнительное ограничение на длину хода. Сделать ход — значит, взять из кучки не менее одного и не более N предметов. Я начинает и выигрывает, если ему предоставлена возможность решить вопрос о том, кто делает первый ход.

1-я модификация игры. Выигрывает тот, кто сделал последний ход, т. е. взял последние предметы из кучки.

2-я модификация игры. Выигрывает тот, кто заставил противника сделать последний ход.

Сформулируйте алгоритмы игры на выигрыш для Я в каждой из модификаций.

Указание. Первая модификация является частным случаем «Игры на дорожке» (задаче 2) — без ходов в обратном направлении (т. е. назад). Остается переформулировать соответствующий алгоритм.

Во второй модификации в отличие от первой перед последним ходом ОН в кучке должен остаться один предмет, который ОН вынужден взять и, следовательно, проиграть партию. Перед предшествующим ходом ОН должно оставаться на $(N+1)$ предмет больше, т. е. $(N+2)$, далее — еще на $(N+1)$ больше: $(2N+3)$ и т. д.

Инварианты игры. 1-я модификация. Перед каждым очередным ходом «ОН» количество предметов, оставшихся в кучке, кратно $(N+1)$.

2-я модификация. Перед каждым очередным ходом ОН количество предметов в кучке на один больше числа, кратного $(N+1)$.

Короче: задача «Я» — «взять и удержать» нулевой (единичный) остаток от деления числа предметов в кучке на $(N+1)$.

ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ОСНОВАНО НА МЕТОДАХ: ИСКЛЮЧЕНИЯ ПОВТОРЕНИЙ, ПРИБЛИЖЕНИЯ К ЦЕЛИ В МЕТРИКЕ ХЕММИНГА, ВЫСТАВЛЕНИЯ ВСТРЕЧНЫХ ОРИЕНТИРОВ

Методы, о которых идет речь, почерпнуты из репертуара, с которым человек, часто сам не сознавая, успешно «выходит на решение задачи». «Выведенные» во вне, они положены в основу алгоритмов решения широких классов задач, приобретают независимое существование. В этих человеческих ориентирах (эвристиках) содержатся субъективная и объективная — формально-логическая составляющие. Мы называем их логико-психологическими координатами (ЛПК) (см. с. 60).

Ниже приводятся задачи внешне несходные. Они, однако, решаются с помощью одних и тех же ЛПК, различаясь лишь определением понятия ситуации.

Задача 8 (Вращающийся бочонок). В верхней крышке бочонка имеются четыре симметрично расположенных отверстия для продевания рук, и под каждым стоит бутылка — горлышком вверх либо вниз. Сделать ход — значит продеть руки в два отверстия и поставить стоящие под ними бутылки в любое положение (из четырех возможных вариантов). Если после хода все бутылки окажутся в одинаковом положении (все — вверх или все — вниз), то задача решена, бочонок неподвижен. В противном случае бочонок быстро поворачивается вокруг вертикальной оси и решающий задачу теряет ориентацию: под отверстиями окажутся уже другие бутылки. Требуется решить задачу не более чем в пять ходов, независимо от исходного положения бутылок.

Обозначения. Занумеровав отверстия 1—4, условимся положение бутылок под i-м отверстием описывать:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я бутылка стоит горлышком вверх,} \\ 0 & \text{— в противном случае } (i = 1, 2, 3, 4, \text{ рис. } 25). \end{cases}$$

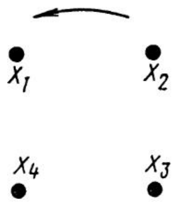

Рис. 25

Инварианты. 1. Инвариантность позиции относительно поворота. Например, позиции 1, 1, 0, 0 и 0, 1, 1, 0 «равны»: вторая получена из первой поворотом на $3\pi/2$ (хотя пространственные координаты изменились, соотношение между сосудами — прежнее). В частности, смежные отверстия остаются смежными, противолежащие — противолежащими.

2. Инвариантность позиции относительно изменения «значений» всех четырех сосудов. Например, ситуации 1000 и 0111, а также 0000 и 1111 «равны».

Алгоритм решения. Исключаются повторения ранее встречавшихся позиций, а также текущей позиции. Установка в результате хода по возможности большего числа сосудов в одинаковое положение.

Задача 9 (Людоеды и миссионеры). В лодке, в которую могут сесть только два человека, требуется перевезти с левого берега реки на правый шесть человек: трех миссионеров (М) и трех людоедов (каннибалов — К). Любой из шести может быть гребцом. Трудность состоит в том, что ни на одном из берегов не должно быть К больше, чем М; в противном случае К предаются своим кровожадным инстинктам. (Замечание: если лодка пристала к берегу, то люди, сидящие в ней, считаются на том берегу, к которому пристала лодка.)

Задача 10 (13-й подвиг Геракла). В условиях задачи 9 в лодке третьим, не выходя, сидит Геракл. Геракл сам не гребет, но теперь на том берегу, к которому пристала лодка, эксцессы исключены — пока лодка не отчалила.

Требуется решить задачу перевозки n каннибалов и n миссионеров. Составьте алгоритм перевозки.

Задача 11 (Переливание жидкости). Требуется с помощью двух сосудов данного объема набрать определенное количество жидкости при наличии источника (например, водопроводного крана) и емкости, куда можно сливать жидкость.

Задание. Решите несколько конкретных примеров, пользуясь перебором, ограниченным ЛПК-1. Составьте алгоритм решения задач данного типа, полностью исключающий перебор.

Задача 12 (Задуманное число). Задумайте целое число от 1 до 15 включительно и назовите, в какие из четырех групп оно попало. Я отгадывает задуманное число (рис. 26).

1-я группа	2-я группа	3-я группа	4-я группа
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11	0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14

Рис. 26

Задание. Поупражняйтесь в отгадывании задуманного числа путем перебора элементов заданных групп чисел. Составьте эффективный алгоритм решения задачи, исключающий перебор.

Задача 13 (Классификация чисел). Имеются два произвольных массива A_1 и A_2 n-значных чисел и классифицируемое число A, также n-значное. Исходя из позиционно-цифрового состава массивов и числа A, определить, какому массиву вероятнее всего принадлежит A. Построить алгоритм распознавания принадлежности A тому или иному массиву.

Это задача с нечетко определенным условием: при произвольных A_1, A_2 и A, как правило, не существует однозначных признаков классификации. Тем не менее человек в каждом случае как-то решает задачу.

В эксперименте выявлены две особенности: у подавляющего большинства испытуемых результаты классификации совпадают; как правило, испытуемые не сознают ориентиров, с помощью которых выполняют классификацию, не в состоянии дать о них отчет.

Методом «мышления вслух» (решения испытуемыми задачами «с проговариванием») извлечены некоторые ЛПК человека и на их основе составлен алгоритм распознавания (классификации), результаты которого неплохо согласуются с результатами эксперимента.

Алгоритм классификации.

1. Если сумма вхождений всех цифр числа A в соответствующих позициях A_1 больше суммы их вхождений в позициях A_2, то $A \in A_1$; если меньше, $A \in A_2$.

При равенстве сумм переходим к следующему указанию.

2. Если максимальное число позиционных вхождений, приходящихся на одну цифру в A, в массиве A_1 больше, чем в массиве A_2, то $A \in A_1$; если меньше, $A \in A_2$.

Если числа равны, переходим к следующему указанию.

3. Если число вхождений цифры первого разряда A в позиции A_1 (первой позиции) больше числа ее вхождений в первой позиции A_2, то $A \in A_1$; если меньше, $A \in A_2$.

Если числа равны, переходим к следующему указанию.

4. Вопрос о классификации остается открытым.

Пример. $A = 5164$, $M = 5$, $n = 4$.

A_1	A_2
2110	3296
5271	2119
4108	7768
5986	4914
3233	6872

Выполнение указания 1. Первая цифра A (пять) имеет в первой позиции (первой колонке) A_1 два вхождения. Вторая цифра A (один) имеет во второй позиции A_1 два вхождения. Больше позиционных вхождений цифр A в A_1 нет. Сумма всех позиционных вхождений цифр A в A_1 равна 4. Аналогичная сумма для A_2 равна 3. В согласии с указанием $A \in A_1$.

Допустим, что эти суммы оказались равными, и поясним, как пользоваться указанием 2. Наибольшее число вхождений имеет цифра 5 числа A в первой позиции A_1 (два вхождения) и цифра 1 этого числа во второй позиции A_2 (одно вхождение). Первое число больше, следовательно, $A \in A_1$.

Задача 14 (Игра «Бридж-ит»). Игра придумана в конце 50-х годов нашего века американцем Гейлом. Полем для игры служат два «симметрично вложенных» друг в друга прямоугольника, например «точечного» и «крестового», размером $M \times (M + 1)$ (рис. 27).

Играют двое — Я и ОН, делая ходы поочередно. Элементы поля Я — точки, поля ОН — крестики. Сделать ход — значит соединить отрезком прямой по горизонтали или вертикали два смежных элемента своего поля, не пересекая ранее проведенных отрезков противника. Выигрывает тот, кто первый построит ломаную, соединяющую две противоположные вершины своего прямоугольника.

Я начинает и выигрывает. Сформулировать алгоритм игры для Я.

Замечание. Игра не может закончиться вничью (см. Е. Глушанков, П. Певзнер. «Переключательная игра Шеннона». — «Квант», 9, 1980, с. 14—21).

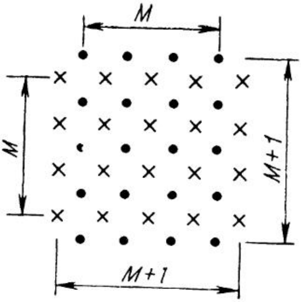

Рис. 27

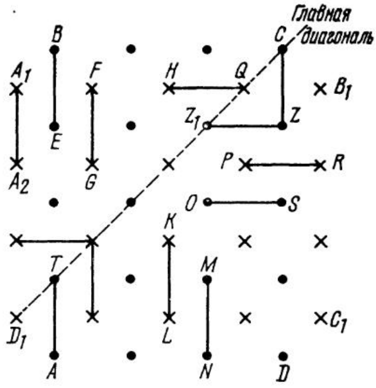

Рис. 28

Основные понятия. Прямоугольник Я: $ABCD$, ОН — $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 28).

Точка называется *изолированной*, если ее невозможно соединить ни с одной другой точкой. Например, точка T. Расстояние между смежными точками (крестиками) по горизонтали или вертикали равно единице. Отрезок D_1C назовем *гливной диагональю* фигуры. Она соединяет «напрямую» крайнюю слева точку второго ряда с противоположной вершиной прямоугольника Я. Главная диагональ делит фигуру на две части (плоскость — на две полуплоскости): левую — верхнюю (D_1A_1BC) и правую — нижнюю ($D_1ADC_1B_1C$).

Отрезок, проведенный Я, называется *параллельно смещенным* относительно отрезка, проведенного ОН в предыдущем ходе, если он параллелен ему и смещен относительно него либо влево — вверх, либо вправо — вниз на 1/2 единицы. Например, BE параллельно смещен влево — вверх относительно FG; MN — вправо — вниз относительно KL; OS — влево — вниз относительно PR и т. д.

Алгоритм игры	**Операторы, логические условия**
1. Ход Я: нижняя левая вершина прямоугольника Я вертикально соединяется с главной диагональю (AT)	A
2. Ход ОН	B
3. Если ход ОН относится к крайней левой (правой) вертикали его прямоугольника (например, A_1A_2), то Я отвечает произвольным ходом, приближающим к результативной вершине (вправо, вверх) из любой неизолированной точки*	$b = \begin{cases} 1, & \text{если «да»}, \\ 0, & \text{если «нет»} \end{cases}$
Переход к указанию 6.	C
4. Если ОН сделал горизонтальный ход и конец отрезка принадлежит главной диагонали, то Я ходит перпен-	$c = \begin{cases} 1, & \text{если «да»}, \\ 0, & \text{если «нет»} \end{cases}$

* Такое «продвижение по краю» для ОН явно невыгодно: Я, имея преимущество в один ход, беспрепятственно продвигается к своей противоположной вершине, имея возможность в любой момент пресечь продвижение ОН. Поэтому при «разумной» игре ходы ОН данного типа исключены.

дикулярно к отрезку, симметричному данному относительно рассматриваемого конца. Переход к указанию 6. Например, ОН: HQ, Q — принадлежит главной диагонали. Отрезку HQ относительно Q симметричен отрезок QB_1 — ответный ход Я: CZ, $CZ \perp QB_1$ — D

5. Во всех остальных случаях отрезок Я параллельно смещен относительно отрезка ОН. Причем в вертикальных ходах направление смещения совпадает с названием полуплоскости, в горизонтальных — противоположно ему. Например, на ход ОН: FG ответ Я: BE; на ход ОН: KL ответ Я: MN; на ход ОН: PR Я отвечает: Z_1Z — E

6. Проверка наличия выигрыша для Я. Если Я выиграл, то переход к указанию 7, в противном случае — возврат к указанию 2 — F, $f = \begin{cases} 1, & \text{если «да»}, \\ 0, & \text{если «нет»} \end{cases}$

7. Задача решена

Алгоритм в форме Ляпунова

$$A \overset{4}{\downarrow} Bb \overset{1}{\uparrow} C \overset{2}{\uparrow} \overset{1}{\downarrow} c \overset{3}{\uparrow} D \overset{2}{\uparrow} \overset{3}{\downarrow} E \overset{2}{\downarrow} Ff \overset{4}{\uparrow} G$$

(см. пояснения на стр. 141)

В любом деле самое трудное — это вовремя остановиться. Автор расстается с читателем с надеждой на новую встречу, полагая, что это в основном будут ответы на вопросы, возникшие при чтении этой книги.

Завершим логико-психологические этюды в задачах стихами советского поэта С. Маршака:

Он взрослых изводил вопросом: «Почему?»
Его прозвали «маленький философ».
Но только он подрос, как начали ему
Преподносить ответы без вопросов.
И с этих пор он больше никому
Не досаждал вопросом...Почему?

* * *

АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ § 5

Задача 1. I. Алгоритм решения.

1. Множество монет, которому принадлежит фальшивая, считать фиксированным. — Оператор A.

Если в фиксированном множестве одна монета, переходим к следующему указанию. В противном случае — к указанию 3. — Условный оператор, или логическое условие a. (Договоримся об обозначениях:

$$a = \begin{cases} 1 \text{ («да», истинно), если в фиксированном множестве одна монета,} \\ 0 \text{ («нет», ложно) — в противном случае.} \end{cases}$$

2. Заключение: монета фальшивая. — Конец, задача решена. — Оператор B.

3. Разобьем все фиксированное множество на три множества: два — с одинаковым количеством монет, третье — столько же либо на одну монету больше или меньше, в зависимости от значения n. Оператор C.

4. Положим на чашки весов множества с равным числом монет. — Оператор D. В случае равновесия—переход к указанию 5, в противном случае — к указанию 6. — Логическое условие d:

$$d = \begin{cases} 1, \text{ если весы уравновешены,} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

5. Фальшивая монета — во множестве, не лежащем на весах. — Оператор E. Переход к указанию 7.

6. Фальшивая монета в том множестве, которое перевешивает. — Оператор F.

7. Переход к указанию 1.

II. Рассмотрим в связи с этой задачей форму символической записи алгоритма Ляпунова—Шестопал (Ляпунов А. А. и Шестопал Г. А. Об алгоритмическом описании процессов управления. В сб. «Математическое просвещение, 1957, № 2), которой будем пользоваться и в дальнейшем

$$\overset{3}{\downarrow} Aa \overset{1}{\uparrow} B . \overset{1}{\downarrow} CDd \overset{2}{\uparrow} E \overset{3}{\uparrow} \overset{2}{\downarrow} F \overset{3}{\uparrow} .$$

Пояснение. Сначала выполняется крайний слева оператор A.

Если после оператора стоит восходящая нумерованная стрелка (безусловный оператор), то вслед за его выполнением обращаются к тому элементу строки, перед которым опускается стрелка с таким же номером (например, после F по $\overset{3}{\uparrow}$ $\overset{3}{\downarrow}$ переходят к A). При отсутствии стрелки, как в данном случае, обращаются к следующему элементу строки, здесь — к логическому условию a. После логического условия обязательна восходящая стрелка, у нас $\overset{1}{\uparrow}$. Если логическое условие выполняется ($a = 1$), то, не обращая внимания на стрелку, переходим к следующему элементу строки — оператору B, точка при нем означает, что процесс закончен, задача решена.

Если логическое условие не выполняется ($a = 0$), обращаются к тому элементу строки, перед которым опускается стрелка такого же номера $\overset{1}{\downarrow}$, указывающая на обращение к оператору C и т. д.

III. Другой, более наглядной формой алгоритма является блок-схема, которая обычно служит переходной ступенью от алгоритма к программе ЭВМ. В ней операторы обозначены прямоугольниками (прямоугольными блоками), логические условия — ромбами. Стрелка со словом «да», исходящая из логического условия, ведет к блоку, отвечающему в алгоритме Ляпунова значению 1, «нет» — значению 0 (рис. 29).

IV. Формула для вычисления числа ходов.

$$N = \begin{cases} \log_3 n, \text{ если это число целое } (n \text{ — целая степень тройки}), \\ \mathscr{E}(\log_3 n) + 1 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

($\mathscr{E}(x)$ — целая часть: наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Задача 2. Обсуждение. Условимся: Я, ОН — длина (в клетках) хода, выполненного соответственно Я, ОН.

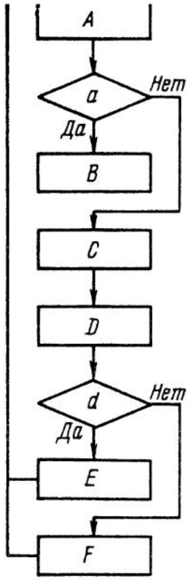

Рис. 29

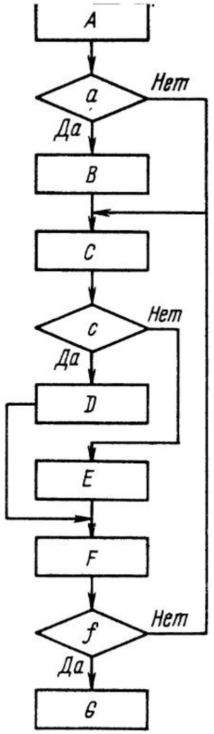

Рис. 30

Если перед очередным ходом ОН расстояние между противниками равно $(K+1)$, то Я выигрывает. Для этого на любой ход ОН вперед ответным является: Я $= (K+1) -$ ОН; на ход ОН назад отвечается ходом Я вперед на такую же длину.

Если перед очередным ходом ОН расстояние равно $2(K+1)$, $3(K+1)$ и т. д., то стратегия Я такая же, только выигрыш произойдет через два, три и более ходов. Мы называем такую стратегию игры методом *итерационного* (с повторениями) *приближения* к выигрышу с сохранением инварианта, в данном случае — кратности расстояния $(K+1)$.

Теперь уже ясно, что в начале игры Я (например, человек, ЭВМ) добивается выигрышной для себя позиции. Делается это так. Если $(M-2)$ кратно $(K+1)$, то начальная ситуация уже выигрышная и первый ход предоставляется ОН. В противном случае первый ход делает Я, срезая им остаток от деления $(M-2)$ на $(K+1)$ (на рис. 24 — см. условие задачи — первый ход: Я $= 1$).

Инвариант. Инвариантом игры Я на выигрыш является принадлежность после каждого хода Я расстояния между противниками классу вычетов нуль по модулю $(K+1)$. (Число A относится к классу вычетов n по модулю m, если n — остаток от деления A на m.)

Договоримся, для удобства описания, ходу ОН навстречу Я (вперед) присваивать знак плюс (+) — положительный ход; ходу в противоположную сторону — минус (—). Введем обозначения: $N = M - 2$, $L = K + 1$.

Теперь уже можно сформулировать алгоритм.

Алгоритм игры. 1 (Решение вопроса о первом ходе). Вычисляется остаток R от деления N на L. — Оператор A. Если $R = 0$, обращаемся к указанию 3, в противном случае — к указанию 2. — Логическое условие a:

$$a = \begin{cases} 0, \text{ если } R = 0, \\ 1 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

2. Ход Я: Я $= R$. — Оператор B.

3. Ход ОН. — Оператор C.

4. Если ОН > 0, то переход к указанию 5; если ОН < 0 — к указанию 6. — Логическое условие c:

$$c = \begin{cases} 1, \text{ если ОН} > 0, \\ 0 \text{ — в противном случае (точнее, ОН} < 0). \end{cases}$$

5. Ход Я: Я $= L -$ ОН. Переход к указанию 7. — Оператор D.

6. Ход Я: Я $= ABS$ (ОН). — Оператор E. ($ABS(x)$ — абсолютное значение x.)

7. Нахождение расстояния между противниками (Я и ОН). Оператор F.

Если расстояние больше нуля, то переход к указанию 3; если оно равно нулю — к следующему указанию. — Логическое условие f:

$$f = \begin{cases} 1, \text{ если расстояние равно нулю,} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

8. Конец. Я выиграл. — Оператор G.

Замечание. В свернутой форме, в общем понятной человеку, но для программирования непригодной, алгоритм сводится к двум «главным» указаниям.

1. Вычисляется остаток R от деления N на L. Если $R = 0$, то первый ход предоставляется ОН. В противном случае первый ход делает Я: Я $= R$.

2. Если ОН > 0, то ответный ход Я: Я $= L -$ ОН; если ОН < 0, то Я $= ABS$ (ОН).

Описание Ляпунова—Шестопал

$$Aa \overset{1}{\uparrow} B \overset{1}{\downarrow} Cc \overset{2}{\uparrow} D \overset{3}{\uparrow} \overset{2}{\downarrow} E \overset{3}{\downarrow} Ff \overset{1}{\uparrow} G.$$

Блок-схема (рис. 30).

Задача 3. Если рассматривать данное число как «длину дорожки», единицу назвать «клеткой», а наибольшее число, которое можно назвать, — «длиной максимального шага», то мы приходим к предыдущей задаче «игра на дорожке», только с «односторонним движением».

Задача 4. Для частного случая $M=25$, $K=4$ Б. А. Кордемский в книге «Математическая смекалка» приводит следующий алгоритм игры.

1. Если у противника четное число предметов, то надо оставить ему в куче такое их количество, которое на 1 больше кратного 6: 1, 7, 13, 19, т. е. количество оставшихся предметов относится к классу вычетов 1 по модулю 6.

2. Если у противника нечетное число предметов, то надо оставить ему такое их количество, которое на 1 меньше кратного 6: 5, 11, 17, 23 (число оставшихся предметов относится к классу K_5 вычетов 5 по модулю 6), а если это невозможно, то оставить ему количество предметов, кратное 6 : 0, 6, 12, 18, 24.

Остается добавить указание 3.

3. Если не удается выполнить условия, перечисленные в пп. 1, 2, то позиция для Я проигрышная: при правильной последующей игре ОН выигрывает.

О б о с н о в а н и е а л г о р и т м а. Пусть N — переменное число предметов в куче перед очередным ходом. В начале игры СОН = = СЯ = 0, СОН четна, и, пока она остается такой, Я своими ответными ходами поддерживает класс K_1 вычетов один по модулю 6. Через несколько шагов окажется $N = 1$ при четной СОН, и тогда ОН своим последним ходом вынужден сделать СОН нечетной. СЯ же на этом шаге четна: СЯ + СОН = начальному значению N, т. е. нечетна. Я выиграл.

Отметим, что такая стратегия игры для Я не всегда возможна. Действительно, если Я начинает, то, учитывая $N = 25$, для сохранения класса K_1 потребуется «ход» длиной в 6 предметов, что невозможно. (Это относится и к случаю $N = 24$ — «длина» требуемого хода равна 5.) Таким образом, в случае принадлежности начального значения N классам вычетов 0 или 1 по модулю 6 Я, начиная игру, проигрывает: ОН перехватывает инициативу.

Если же первый ход делает ОН, то описанную стратегию для Я реализовать можно: после четного значения ОН отмеченные два проигрышных случая исключаются.

Далее, если в результате очередного хода ОН СОН стала нечетной, то Я ответным действием приводит N к классам K_5 или K_0 вычетов 5 или 0 по модулю 6. Это действие выполнимо: если ОН = 1, то Я = 1; если ОН = 3, то Я = 4. Наконец, при нечетной СОН окажется $N = 5$. Если следующий ход ОН четный, то СОН нечетна, и Я побеждает приведением N к K_0. Если же следующий ход ОН нечетный (ОН = 1 или ОН = 3), то СОН четна, и Я приводит N к классу K_1. Через ход ОН проигрывает.

Можно доказать, что описанные рассуждения справедливы для любого нечетного M и четного K. В этом случае рассматриваются классы вычетов по модулю $(K + 2)$.

З а д а н и е. Введя соответствующие обозначения операторов и логических условий, опишите приведенный выше алгоритм в форме Ляпунова и составьте блок-схему.

Задача 5. О б с у ж д е н и е и н в а р и а н т а. Придерживаясь инварианта, Я приводит игру к позиции, когда указанные классы пусты (нуль — четная сумма), а все числа класса K_1 по модулю 3 — четверки. ОН, продолжающий в этой позиции, проигрывает.

Конструктивно это выглядит так. Выйдя на инвариант, Я на ход противника, нарушающий четность, отвечает ходом, «сбрасывающим» какую-либо кучку из K_0 или K_2 в «проигрышный» для противника класс K_1, восстановив инвариант. На ход ОН, сохраняющий четность, Я «перебрасывает» элемент из K_0 в K_2 или наоборот — придерживается инварианта. Если же это невозможно, например класс K_2 пуст или в K_0 нет элементов, больших трех, то проверяется возможность сохранения инварианта разбиением элемента класса K_1 на два элемента K_2: $3m + 1 = (3n + 2) + (3l + 2)$. Легко показать, что это возможно только для $\alpha \in K_1$, если $\alpha \geqslant 13$.

Если это условие не выполнено, позиция для Я проигрышная.

Алгоритм, как и инвариант, на котором он основан, таким образом, имеет свою «ахиллесову пяту». Придерживаясь его, Я не обязательно выигрывает. Однако экспериментальное решение большого числа задач показывает, что если ОН не пользуется тем же алгоритмом, то Я более чем в 90% случаев все же выигрывает. Такие алгоритмы, не гарантирующие решения, но чаще всего приводящие к нему, называются *эвристическими* (см. Ньюэлл А., Шоу Дж. и Саймон Г. Процессы творческого мышления. — В сб. «Психология мышления». — М. «Прогресс», 1965; Пойа Д. Как решать задачу. — М.: Учпедгиз, 1959). В последние годы эвристические алгоритмы играют все большую роль для программирования ЭВМ.

З а д а н и е. В соответствии с приведенным описанием сформулируйте алгоритм игры «Гранди», введите обозначения операторов и логических условий, составьте алгоритмическое описание Ляпунова и блок-схему.

Задача 6. О б о с н о в а н и е и н в а р и а н т а. Если Я удалось выйти на инвариант, то ОН своим ответом изменит четность хотя бы в одном разряде. Следующим ходом Я восстановит ее — вернет позицию к инварианту (это всегда возможно, если регулировать четность, например, с помощью двоичных знаков наибольшего числа) и т. д. Так как число спичек каждый раз уменьшается, то Я, раньше или позже, возьмет последние спички: в этой позиции сохраняется инвариант.

З а д а н и е. В соответствии с описанием составьте алгоритм игры «Ним», преобразуйте его к форме Ляпунова и постройте блок-схему.

Задача 7. Обобщенный инвариант. После хода Я сумма цифр по каждому разряду в двоичном представлении чисел массива кучек четна, пока число элементов массива, больших единицы, не меньше двух. При невыполнении последнего условия инвариант остается прежним, если выигравшим считается тот, после хода которого не осталось предметов. Если же взявший последние предметы проигрывает, то противник ставится перед нулевыми элементами и нечетным числом единичных.

Замечание. «Тонкая регулировка» начинается лишь на завершающем этапе решения.

Задание. Составьте алгоритм, форму Ляпунова и блок-схему для обобщенной игры «Ним».

Задача 7_1 (Частный вариант игры «Ним»).

Алгоритм игры. 1-я модификация. 1. Если M кратно $(N + 1)$, то первый ход делает ОН. Я каждым своим ответным ходом доводит «сумму длин» своего хода и предшествующего хода противника до $N + 1$: Я $= (N + 1) -$ ОН.

2. Если M не кратно $(N + 1)$, то первый ход делает Я, «срезая» остаток от деления M на $(N + 1)$: Я $= M - \mathscr{E}^* (M/ (N + 1))$.

Далее решение происходит в соответствии с указанием 1.

2-я модификация. Алгоритм формируется так же, как в первой модификации, только вместо M берется $(M - 1)$.

Примеры.

1-я модификация. $M = 25$, $N = 3$. M (25) не кратно $N + 1$ (4). Я первым ходом «срезает» остаток от деления 25 на 4: Я $=$ $= 1$. Далее на каждый ход ОН ответ Я таков, чтобы число выбранных в этих двух ходах предметов равнялось четырем. После шести пар ходов Я выиграл.

2-я модификация.

Пример 1. $M = 25$, $N = 3$; $(M - 1) : (N + 1) = 6$. Первый ход ОН. На любой ход ОН ответ Я таков, что эти два последовательных хода «в сумме» дают четыре, т. е. $(N + 1)$. После шести пар ходов — перед очередным ходом ОН в кучке будет один предмет — ОН проиграл.

Пример 2. $M = 32$, $N = 6$. $(M - 1)$ (31) не кратно $(N + 1)$ (7). Своим первым ходом Я «срезает» остаток от деления 31 на 7: Я $= 3$. Далее на каждый ход ОН : Я $= (N + 1) -$ ОН $= 7 -$ ОН. Через четыре пары ходов будет снято $3 + 4 \cdot 7 = 31$ предмет, и ОН окажется перед кучкой из одного предмета — ОН проиграл.

Задача 8. Введем необходимые понятия.

Ситуацией называется одно из 16 возможных способов расположения бутылок. Например, 1001: первая и четвертая бутылки стоят

* $\mathscr{E}(x)$ — функция «целая часть» — наибольшее целое число, не превосходящее x.

горлышком вверх, остальные — вниз. Конечная ситуация 0, 0, 0, 0 или 1, 1, 1, 1 (в дальнейшем — 1, 1, 1, 1).

Исключить повторения — значит не допустить возникновения после текущего хода ситуаций, встречавшихся ранее, включая текущую.

Расстояние в метрике Хемминга между двумя ситуациями ρ равно числу несовпадений в этих ситуациях. Например, A (0, 0, 1, 1); B (0, 1, 1, 0). $\rho(A, B) = 2$ — два несовпадения: во втором и четвертом элементах.

Замечание. Относительно ρ множество ситуаций образует метрическое пространство.

Минимизацией расстояния до цели называется выбор в данной ситуации такого хода из всех возможных, при котором расстояние от возникающей ситуации до целевой (1, 1, 1, 1) минимально.

Решение задачи. Ведущей, как это следует из алгоритма, является ЛПК исключения повторений (ЛПК-1), на нее в первую очередь ориентируются при выполнении ходов. Из двух равносильных в смысле ЛПК-1 альтернатив предпочтение отдается той, которая минимизирует расстояние до цели (ЛПК-2).

Условимся: ход, сделанный опусканием рук в противоположные отверстия, обозначать П, смежные — С.

1-й ход. Ситуация неясна — ЛПК-1 «не срабатывает». Ход, вообще говоря, произволен. Пусть это ход типа П.

Замечание. Будем чередовать ходы: П, С, П, С, П — это, по крайней мере, избавляет от «залипания» в одних и тех же отверстиях.

Возникшая в итоге ситуация — 1, ?, 1, ? — еще неопределенна (рис. 31).

2-й ход (С). ЛПК-1 неприменима, пока полностью не раскроется ситуация. В силу ЛПК-2 : 1, 0, 1, 1. $\rho \leqslant 1$.

Первые два хода, таким образом, психологически обоснованы желанием поставить по возможности большее число бутылок в одинаковое положение. Эксперимент показывает, что они не вызывают затруднений у человека.

К началу третьего хода ситуация прояснилась: три единицы, один нуль (рис. 32).

3-й ход (П). В худшем случае под руками окажутся отверстия, на которые указывают стрелки на рис. 32. Возможны три альтернативных хода: 1,1; 0,0; 0,1. Первый вариант сохраняет позицию — повторение; второй приводит к трем нулям и одной единице — повторение (инвариант 2). Третий вариант приемлем в смысле ЛПК-1 (рис. 33).

Замечание. ЛПК-2 нарушена: ρ — число несовпадений с целевой ситуацией увеличилось от единицы до двух. Мы видим, что в условиях несовместимости ЛПК предпочтение, как это следует из алгоритма, отдается ЛПК-1. Интересно, что в неуправляемом извне реальном решении задачи человеком такая психологическая «сшибка» двух подсознательно используемых ориентиров часто завершается отказом от дальнейшего решения — утверждается, что задача решения не имеет. Система приоритетов в человеческом мышлении, надо думать, не является жесткой.

4-й ход (см. рис. 33). Возможные альтернативы: 0, 0; 1, 1; 0, 1 (сверху вниз) являются повторениями и исключаются ЛПК-1. Приемлем ход 1, 0, не изменяющий расстояния до цели (рис. 34).

5-й ход (П). В любом случае задача решена — в согласии с обеими ЛПК.

Замечание. Если с самого начала заметить, что ситуация, изображенная на рис. 34, преобразуется к конечной, то задача фактически становится четырехходовкой.

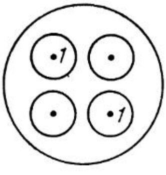

Рис. 31

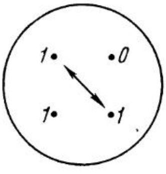

Рис. 32

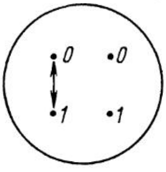

Рис. 33

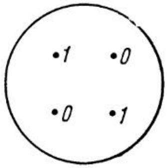

Рис. 34

Промежуточная ситуация 1, 0, 1, 0, легко приводимая к конечной, называется встречной ЛПК (ЛПК-3).

Задача 9. Ситуация определяется как заключенная в круглые скобки строка типа $(K_{i_1}M_{j_1}, K_{i_2}M_{j_2}, K_{i_3}M_{j_3})$, в которой зафиксированы число K и M соответственно на левом берегу, в лодке, и на правом берегу: $i_1 + i_2 + i_3 = j_1 + j_2 + j_3 = 3$; при $j_1, j_2, j_3 \neq 0$ $i_1 \leqslant j_1$, $i_2 \leqslant j_2$, $i_3 \leqslant j_3$.

Условимся: если индекс i_r или j_r равен 1, то его опускаем, если 0 — исключаем весь член (либо заменяем его нулем). Стрелкой указывается направление.

Например, $\leftarrow (K_2M_2, M, K)$ на левом берегу — два K и два M, в лодке один M, на правом берегу один K. Лодка идет от правого берега к левому.

Начальная ситуация $(K_3M_3, 0, 0)$, конечная $(0, 0, K_3M_3)$.

Управляющим решением задачи расстоянием в метрике Хемминга (ЛПК-2) естественно считать разность между суммами индексов K и M на правом берегу в конечной и текущей ситуациях: $\rho = 6 - (i_3 + j_3)$. В начальной ситуации $\rho = 6$, в конечной — $\rho = 0$.

Результативность действий в смысле ЛПК-2 определяется после каждой пары ходов $\rightleftarrows$.

1-й ход. $\rightarrow (KM_3, K_2, 0)$ или $\rightarrow (K_2M_2, KM, 0)$: другие варианты либо противоречат условию, либо ведут к повторению ситуации — нарушению ЛПК-1.

Здесь и далее ходы выполнены прежде всего с соблюдением ЛПК-1, которой алгоритм отдает предпочтение.

2-й ход. $\leftarrow (KM_3, K, K)$ или $\leftarrow (K_2M_2, M, K)$. $\rho = 6 - 1 = 5$.

3-й ход. $\rightarrow (M_3, K_2, K)$. Пояснение. $\rightarrow (K_2M, M_2, K)$ и $\rightarrow (KM_2, KM, K)$ являются либо непосредственными нарушениями условия, либо приводящими к нарушению. $\rightarrow (KM_3, K, K)$; $\rightarrow (K_2M_2, M, K)$ — повторения либо приводят к повторению. Выбранный ход — единственный.

4-й ход. (M_3, K, K_2). $\rho = 6 - 2 = 4$.

5-й ход. $\rightarrow (KM, M_2, K_2)$.

6-й ход. $\leftarrow (KM, KM, KM)$. $\rho = 6 - 2 = 4$.

Как видим, ходы 5, 6, вынужденные ЛПК-1, не завершились уменьшением ρ, которое согласно ЛПК-2 является мерой приближения к цели. Это обычно не сознаваемое рассогласование координат не проходит бесследно. Внешне оно проявляется в том, что на шестом ходу многие испытуемые отказываются от продолжения, заявляя о неразрешимости задачи.

С аналогичной психологической «сшибкой» ЛПК-1 и ЛПК-2 — в еще более резкой форме — мы столкнулись в решении задачи «Вращающийся бочонок», 3-й ход. Характерно, что психологические последствия там были такие же. Причина в обоих случаях в том, что в иерархической организации мышления вне ЛПК как бы над ними срабатывает неформализуемая инстанция «тонкой настройки» — более высокого уровня управления. Она «видит» дальше — необходимость перегруппировки элементов без явного продвижения (уменьшения ρ) для подготовки прорыва к цели в дальнейшем. В этом сказывается ограниченность метрики Хемминга как меры приближения к цели Д. Пойа остроумно сравнил подобную коллизию с неспособностью курицы обойти сетку, за которой находится пища (удалиться, чтобы приблизиться).

Эксперимент показывает, что после преодоления «внутреннего барьера» дальнейшее решение уже не вызывает труда: ЛПК-1 и ЛПК-2 действуют согласованно:

7-й ход. $\rightarrow (K_2, M_2, KM)$.

8-й ход. $\leftarrow (K_2, K, M_3)$. $\rho = 6 - 3 = 3$.

9-й ход. $\rightarrow (K, K_2, M_3)$.

10-й ход. $\leftarrow (K, K, KM_3)$. $\rho = 6 - 4 = 2$.

11-й ход. $\rightarrow (0, K_2, KM_3)$. Преобразуется к ситуации $(0, 0, K_3 M_3)$. $\rho = 6 - 6 = 0$.

Некоторые испытуемые в самом начале планируют построение ситуации $\leftarrow (KM, KM, KM)$, из которой просматривается путь к конечной ситуации. В этом случае задача фактически решена уже после пятого хода. Ориентир (KM, KM, KM) является встречной координатой (ЛПК-3) — см. решение задачи «Вращающийся бочонок». В других случаях встречной координатой оказывается ситуация, возникшая на восьмом ходу.

Из протокола эксперимента. Испытуемый (приступая к решению): «Хорошо бы сначала переправить всех миссионеров!.. Тогда и делать нечего ...». Как видим, ситуация $\leftarrow(K_2, K, M_3)$ является встречной координатой.

Задача 10. В основу решения положены координаты ЛПК-1 и ЛПК-2, действие которых по-прежнему упорядочено: от первой координаты — ко второй:

1-й ход. $\rightarrow(K_{n-1}M_{n-1}, KM, 0)$.
2-й ход. $\leftarrow(K_{n-1}M_{n-1}, K, M)$. $\rho = 2n - 1$.
3-й ход. $\rightarrow(K_{n-2}M_{n-1}, K_2, M)$.
4-й ход. $\leftarrow(K_{n-2}M_{n-1}, K, KM)$. $\rho = 2n - 2$.
5-й ход. $\rightarrow(K_{n-2}M_{n-2}, KM, KM)$.
6-й ход. $\leftarrow(K_{n-2}M_{n-2}, K, KM_2)$. $\rho = 2n - 3$.
7-й ход. $\rightarrow(K_{n-3}M_{n-2}, K_2, KM_2)$.
8-й ход. $\leftarrow(K_{n-3}M_{n-2}), K, K_2M_2)$. $\rho = 2n - 4$.
9-й ход. $\rightarrow(K_{n-3}M_{n-3}, KM, K_2M_2)$.
10-й ход. $\leftarrow(K_{n-3}M_{n-3}, K, K_2M_3)$. $\rho = 2n - 5$.
11-й ход. $\rightarrow(K_{n-4}M_{n-3}, K_2, K_2M_3)$.
12-й ход. $\leftarrow(K_{n-4}M_{n-3}, K, K_3M_3)$. $\rho = 2n - 6$.
. . . .

$(4n - 3)$-й ход. $\rightarrow(0, KM, K_{n-1}M_{n-1})$ преобразуется к $(0, 0, K_nM_n)$. $\rho = 0$. Значения ρ монотонно убывают, ЛПК-2 согласовано с ЛПК-1. Отсутствие «конфликтов» находит выражение в относительной легкости решения задачи.

Существенно следующее. Алгоритм упорядоченного перебора на основе ЛПК-1 и ЛПК-2, «обслуживающий» широкий класс задач, в данной задаче порождает другой, более эффективный алгоритм.

1. В лодке всегда сидит K.

2. Слева направо — два (два человека в лодке), справа налево — один.

3. Люди с левого берега вывозятся (на правый высаживаются) в чередующейся последовательности: M, K, M, K, M, K и т. д. (см. нечетные ходы).

Этот алгоритм позволяет вовсе отказаться от управляемого ЛПК перебора, «выйти на цель» без пробных ходов.

Задача 11.

Замечание. В задачах «Вращающийся бочонок» и «Людоеды и миссионеры» мы столкнулись с несогласованностью ЛПК-1 и ЛПК-2. Это потребовало введения приоритетов, «подчинения» ЛПК-2 координате-1. Сказанное относится и к данной задаче. Более того, теперь хеммингово ρ вовсе теряет смысл: уменьшение несовпадения по ρ, «приближение» количества воды в каком-либо сосуде к требуемому не имеет, вообще говоря, ничего общего с истинной близостью к решению. Может, например, оказаться, что разность в один литр труднее ликвидировать, чем большую разность.

Это, однако, не может служить препятствием к применению алгоритма ограниченного ЛПК-1 перебора в задачах, в которых эта координата однозначно высекает траекторию решения в пространстве всевозможных альтернатив (т. е. когда нет необходимости в «доводке» с помощью ЛПК-2). Такими являются задачи типа «Переливаине жидкости».

Решение задачи 11 (с. 137) предоставляем самому читателю.

Задача 12. Алгоритм распознавания.

Задуманное число равно разности между 15 и десятичным значением четырехзначного двоичного числа, цифры которого X_1, X_2, X_3, X_4, считая слева направо, равны 1 или 0 — в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит задуманное число соответственно первой, второй, третьей, четвертой группам.

Пример. Задуманное число содержится во второй и третьей группах: $X_1 = X_4 = 0$, $X_2 = X_3 = 1$. Десятичное значение используемого числа: $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 6$. Задуманное число: $15 - 6 = 9$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бизам Д., Герцег Я.** Игра и логика. — М.: Мир, 1975. — 358 с.
2. **Бизам Д., Герцег Я.** Многоцветная логика: 175 логических задач. — М.: Мир, 1978. — 435 с.
3. **Вильямс Дж.** Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр. — М.: Сов. радио, 1960. — 270 с.
4. **Гарднер М.** Математические новеллы. — М.: Мир, 1974.
5. **Гильберт Д. и Аккерман В.** Основы теоретической логики. — М.: ИЛ, 1947. — 306 с.
6. **Гиндикин С. Г.** Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972. — 288 с.
7. **Карри Х.** Основания математической логики. — М.: Мир, 1969. — 568 с.
8. **Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж.** Введение в конечную математику. — М.: ИЛ, 1963. — 486 с.
9. **Кэролл Л.** История с узелками. — М.: Мир, 1973. — 408 с.
0. **Новиков П. С.** Элементы математической логики. — М.: Физматгиз, 1959. — 400 с.
1. **Рэймонд М. Смаллиан.** Как же называется эта книга. — М.: Мир, 1981. — 239 с.
2. **Шапиро С. И.** От алгоритмов — к суждениям. — М.: Сов. радио, 1973. — 288 с.
3. **Шапиро С. И.** Мышление человека и переработка информации ЭВМ. — М.: Сов. радио, 1980. — 288 с.
4. **Эшби У. Росс.** Введение в кибернетику. — М.: ИЛ, 1959. — 432 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоматизация умственной работы 64
Алгебраическая n-арная операция 13
Алгебры высказываний формула 8
— — — тождественно истинная 35
Алгоритм 5
— эвристический 145
Арифметизация в теоретико-множественных задачах 103
Арифметическое решение в булевых переменных 102

Бесконтактные логические элементы 53

Высказывание 7, 9
— элементарное 7

Главная диагональ фигуры 139

Двоичная функция 8
Декартово (внешнее) произведение 9
Дизъюнкция (логическое сложение) 7, 123
ДНФ (дизъюнктивная нормальная форма) 34

Задачи о взаимно-однозначном соответствии 6, 92
— на инвариантах 133
— логические и игровые 5, 59, 132
— —, арифметические методы решения 99
— —, решаемые по индукции 129
— —, решение методом характеристических уравнений 72
—, наименование 61, 63
— парадоксы 6, 127
— на приведение множеств в соответствие 63, 69
— типа «кто есть кто» 69
— — «он думал, что я думала» 122
Заключение 35

Изолированная точка 139
Импликация 7, 23
— и заключение импликации (их различие) 24
Истинность правильного высказывания (обоснование с позиций математической логики) 11

Квантор всеобщности 55
— существования 55
Кванторные предикаты 55
— —, отрицание 56
Кванторы как обобщение логических связок 56
КНФ (конъюнктивная нормальная форма) 34
Код понятия 111
Конъюнкция (логическое умножение) 7
КС (контактные схемы) 47

Логическая сумма 7
Логические парадоксы (антиномии) 107
— связки 7
— следствия формулы 38
— элементы 52
Логических функций арифметические модели 99
Логическое умножение 7
ЛПК (логико-психологические координаты) понятий 60

МДФ (минимальная дизъюнктивная форма) 48
Метод итерационного приближения к выигрышу 142
— характеристических уравнений 6, 102
Минимизация расстояния по цели 147
Минимизационная карта КС 49
Множественного проектирования правило 67, 69
Множественной экстраполяции правило 67
Мостиковые схемы 52

Нормальные формы 34
— — совершенные 40

Определения непредикативные 131
Отрезок параллельно смещенный 139
Отрицание 7

Парадокс Берри 112
— Греллинга 112
—, закономерности построения 113
— Кантора 111
— Рассела—Цермело 110
Пифагора теорема 24
Поглощение в СДНФ 51
Подконъюнкция конъюнкции 45
Правило контропозиции 25
Предикаты (переменные высказывания) 9
— двуместные (бинарные) 9
— одноместные (свойства) 9
— трехместные (тернарные отношения) 9
Прилагательное гетерологическое (негетерологическое) 112
Принцип «двух Я» 117, 126
Проверка формулы на тождественную истинность 35
π-схемы 52

Равносильные формулы 18
Ришарово число 111

Связанная переменная 55
СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма) 40, 44
Ситуация 146
Склеивание по переменной 51
СКНФ (совершенная конъюнктивная нормальная форма) 40, 44
— и логические следствия 45
Сложные высказывания 7
Сумма 7, 13
Счетчик четности 89

Таблица истинности 7, 25

Ферма теорема 58
Формула алгебры высказываний 8, 35
— выполнимая 35
— тождественная истинная (ложная) 35

Эквиваленция 7, 123
Экстраполяция в плоскости 69

ОГЛАВЛЕНИЕ

К читателю 3
От автора 5

I. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ПРЕДИКАТОВ 7

1. Высказывание, предикат 7
2. Равносильные формулы алгебры высказываний 18
3. Импликация 23
4. Нормальные формы. Тождественные формулы. Логические следствия 34
5. Совершенные нормальные формы 40
6. Контактные схемы (КС). 47
7. Кванторные предикаты 55
Задачи второй части 61

I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ 63

1. Решение задач на приведение множеств в соответствие 63
2. Решение логических задач методом характеристических уравнений 72
3. Арифметические методы решения логических задач . . 99
4. Задачи разных типов 104
5. Логические и игровые задачи, алгоритмы, решения . . . 132
Список литературы 151
Предметный указатель 152

ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА

SHEBA.SPB.RU/ZA

Хочу всё знать (теория)

Юный техник (практика)

Домоводство (условия)