ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

И. Н. БРОДСКИЙ

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В СИМВОЛИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

Второе переработанное издание

Издательство
Ленинградского Университета
1972

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

Впервые предлагаемая работа вышла в 1964 году. Она представляет собой учебно-методическое пособие для заочников по разделу «Символическая логика» из курса формальной логики, читаемого на философском факультете ЛГУ. В ней излагается круг вопросов, связанных с так называемым классическим исчислением высказываний, и даются краткие сведения о логике предикатов.

Пособие рассчитано на студентов философских факультетов университетов.

Научный редактор *О. Ф. Серебрянников*

$\dfrac{1-5-7}{14-72}$

ВВЕДЕНИЕ

Символическая логика возникла в результате применения к проблемам формальной логики строгих методов, сходных с теми, которые используются в математике. С помощью специально построенного искусственного языка достигается уточнение многих вопросов логики и осуществляется аксиоматическое построение широких логических теорий, в рамках которых можно ставить и решать логические проблемы такого уровня сложности, который был недоступен традиционной логике.

Искусственный логический язык не содержит омонимических выражений, в нем применяются наиболее экономные и хорошо обозримые способы записи. Главное же, что делает его необходимым инструментом анализа выводов и доказательств, состоит в том, что в нем обнажается и специально фиксируется логическая структура записанных с его помощью мыслей. Язык этот строится с таким расчетом, чтобы его синтаксические связи однозначно соответствовали логическим, а преобразования «предложений» (формул) данного языка соответствовали определенным логическим операциям. В результате искусственный язык становится оперативным, манипуляции с символами получают значение логических операций с мыслями.

Символическую логику называют также математической. Но не нужно думать, что в символической логике исследуются логические вопросы, имеющие значение для одной только математики.

В настоящее время символическая логика — это интенсивно развивающаяся наука, в пределах которой можно выделить ряд относительно самостоятельных разделов и независимых направлений. В последние годы символическая логика получила много разнообразных применений в математике и математической лингвистике, в кибернетике и биологии, в теории автоматов и нервных сетей, в теории релейно-контактных схем и др.

Настоящее учебное пособие не является ни систематическим изложением основ, ни кратким очерком основных идей современной символической логики. Оно адресовано студентам младших курсов заочного отделения философского факультета, впервые знакомящимся с формальной логикой, и имеет своей целью в добавление к курсу традиционной логики дать самые элементарные сведения о некоторых понятиях и методах символической логики.

Имея в виду именно эту цель, составитель настоящего пособия счел целесообразным ограничиться изложением основных понятий классической логики высказываний. Рассматриваемые здесь логические средства, несмотря на их элементарность, могут быть использованы для решения ряда логических задач.

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ И СЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Высказыванием называют предложение, выражающее суждение. Если суждение, составляющее содержание (смысл) некоторого высказывания, истинно, то о данном высказывании говорят, что оно истинно. Сходным образом ложным называют такое высказывание, которое является выражением ложного суждения. В том разделе логики, о котором будет идти речь, исходят из того, что всякое высказывание истинно или ложно и ни одно из высказываний не является сразу истинным и ложным.

Истинность и ложность называют *истинностными,* или *логическими,* значениями высказываний. Если высказывание истинно, то говорят, что оно имеет логическое значение «истина», а если высказывание ложно, то говорят, что оно имеет логическое значение «ложь».

Элементарным называют высказывание, правильные части которого сами не являются высказываниями.

В логике высказываний отвлекаются от внутренней структуры элементарных высказываний. Элементарное высказывание рассматривают здесь как далее не анализируемое предложение, характеризующееся только тем, что оно обладает одним из двух логических значений. При этом исходят из допущения, что относительно каждого элементарного высказывания известно, истинно оно или ложно.

Элементарными высказываниями являются, например, следующие предложения:

«Аристотель — воспитатель Александра Македонского»;

«Аристотель старше Александра Македонского»;

«$5<7$»;

«5 — четное число».

Все эти элементарные высказывания будут интересовать нас здесь только с той точки зрения, что первое, второе и третье имеют логическое значение «истина», а четвертое — «ложь».

Из элементарных высказываний можно строить сложные высказывания. *Сложным* называют высказывание, которое образуется из исходных высказываний с помощью так называемых *логических союзов* «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда, когда», «либо..., либо» и некоторых других.

Например, из первых двух приведенных выше элементарных высказываний с помощью логического союза «если..., то» можно образовать сложное высказывание: «Если Аристотель — воспитатель Александра Македонского, то Аристотель старше Александра Македонского», а из следующих двух — сложное высказывание «Если $5<7$, то 5 — четное число».

Сложные высказывания тоже или истинны, или ложны; так, первое из приведенных сложных высказываний истинно, а второе ложно.

Логическое значение сложного высказывания зависит от логического значения высказываний, входящих в его состав, и от смысла участвующих в построении сложного высказывания логических союзов.

Так, из первого и второго элементарных высказываний, которые оба истинны, мы с помощью союза «если..., то» получили истинное сложное высказывание, а из истинного третьего и ложного четвертого, с помощью того же логического союза,— ложное. Но если эти же элементарные высказывания связать логическим союзом «либо..., либо»,[1] то сложное высказывание «либо Аристотель воспитатель Александра, либо Аристотель старше Александра» будет ложным. Истинное третье и ложное четвертое высказывания, будучи связаны союзом «и», дадут ложное высказывание, но если затем перед этим сложным высказыванием поставить логический союз «неверно, что», то получим истинное высказывание «неверно, что $5<7$ и 5 — четное число».

Таким образом, в логике высказываний исходят из того, что:

1) всякое элементарное высказывание имеет одно из двух логических значений: «истина» или «ложь»;

2) ни одно элементарное высказывание не имеет сразу двух логических значений: «истина» и «ложь»;

3) логическое значение высказывания, содержащего логические союзы, определяется логическим значением составляющих его элементарных высказываний.

§ 2. ЯЗЫК ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Языком логики высказываний называют искусственный язык, предназначенный для анализа логической структуры сложных высказываний. С помощью этого языка можно в общем виде формулировать законы логики высказываний и правила оперирования со сложными высказываниями.

Язык логики высказываний характеризуется списком элементарных знаков и определением формулы. В определении формулы указаны правила построения формул, т. е. таких конечных конфигураций элементарных знаков, которые считаются законченными выражениями языка логики высказываний.

Список элементарных знаков языка логики высказываний содержит следующие три категории знаков:

1. Знаки переменных логики высказываний:

$$A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_2, \ldots$$

Каждая из этих букв есть переменная, принимающая значения на множестве истинных и ложных высказываний, представленных предложениями обычного языка. Логическую переменную удобно рассматривать как имя такой «пустой ячейки» («окошечка»), в которую может быть «вставлено» любое, истинное или ложное, высказывание. С помощью логических переменных

[1] Этот союз употребляется здесь в смысле «либо одно, либо другое, но не то и другое вместе».

можно вести речь не только о конкретных высказываниях данной формы и содержания, но можно говорить обо всех высказываниях определенной формы, отвлекаясь от их конкретного содержания, фактической истинности или ложности, принадлежности тому или другому национальному языку.

2. Знаки логических союзов (логические постоянные):

$-$ — знак отрицания (читается «не», «неверно, что»),
$\&$ — знак конъюнкции (читается «и»),
$\vee$ — знак дизъюнкции (читается «или»),
$\supset$ — знак импликации (читается «если..., то»),
$\equiv$ — знак эквивалентности (читается «тогда и только тогда, когда»),
$\not\equiv$ — знак строгой дизъюнкции (читается «либо..., либо»).

3. Технические знаки:

(— левая скобка,
) — правая скобка.

Никаких других знаков в языке логики высказываний нет.

Определение формулы логики высказываний:

1) переменная логики высказываний есть формула,

2) если $\mathfrak{A}$ произвольная формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ — читается «не $\mathfrak{A}$» (или «неверно, что $\mathfrak{A}$») — тоже формула,

3) если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ произвольные формулы, то
$(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ — читается «$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$»,
$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ — читается «$\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$»,
$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ — читается «если $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$»,
$(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$ — читается «$\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$»,
$(\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B})$ — читается «либо $\mathfrak{A}$, либо $\mathfrak{B}$» — тоже формулы.[1]

Никаких других формул, кроме указанных в пунктах 1)—3), в языке логики высказываний нет. Заглавные готические буквы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, которые употребляются в определении формулы, не принадлежат языку логики высказываний. Они принадлежат тому языку, на котором мы говорим о формулах логики высказываний. Содержащие эти буквы выражения $\overline{\mathfrak{A}}$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$ и $(\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B})$ сами формулами не являются, а есть схемы формул определенного вида.

Например, выражение $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ есть схема формул $(A \& B)$, $((A \supset B) \& (C \supset D))$, $(A \& (C \vee D))$ и т. п., а выражение $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A})$ — схема формул $(A \vee A)$, $((A \supset C) \vee (A \supset C))$ и т. п., но не формулы $(A \vee B)$. Когда говорят «формула $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$», то имеют в виду любую конкретную формулу логики высказываний соответствующего вида, а не самою эту запись.

Ясно, что не всякое выражение, составленное из знаков язы-

---

[1] Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в формуле $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ называются ее конъюнктивными членами (конъюнктами), а в формуле $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ — дизъюнктивными членами (дизъюнктами). В формуле $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ формула $\mathfrak{A}$ называется антецедентом, а формула $\mathfrak{B}$ — консеквентом.

ка логики высказываний, является формулой. Однако относительно любого выражения можно решить, является оно формулой или нет. Если это выражение может быть построено в соответствии с пунктами определения формулы, то оно — формула, если нет, то не формула.

Выражение

$$((((A \supset B) \vee \overline{C}) \& (C \equiv A)) \supset B)$$

является формулой, потому что оно может быть построено в соответствии с пунктами определения формулы. На основании пункта 1) переменные A и B являются формулами. Тогда, в силу пункта 3), где в качестве $\mathfrak{A}$ взята переменная A, а в качестве $\mathfrak{B}$ — переменная B, выражение $(A \supset B)$ является формулой. Но так как переменная C, в силу пункта 1) определения формулы, есть формула, то выражение $\overline{C}$ согласно пункту 2) и выражение $((A \supset B) \vee \overline{C})$ согласно пункту 3), где в качестве $\mathfrak{A}$ взята формула $(A \supset B)$, а в качестве $\mathfrak{B}$ формула $\overline{C}$, тоже есть формула. Поскольку, далее, согласно пункту 3) определения формулы, когда $\mathfrak{A}$ это C, а $\mathfrak{B}$ это A, выражение $(C \equiv A)$ есть формула, то выражение $(((A \supset B) \vee \overline{C}) \& (C \equiv A))$, в силу того же пункта 3), но при условии, что $\mathfrak{A}$ это $((A \supset B) \vee \overline{C})$, а $\mathfrak{B}$ это $(C \equiv A)$, тоже является формулой. И наконец, все анализируемое выражение согласно пункту 3), где в качестве $\mathfrak{A}$ взята формула $(((A \supset B) \vee \overline{C}) \& (C \equiv A))$, а в качестве $\mathfrak{B}$ переменная B, есть формула логики высказываний. Таким образом, анализируя шаг за шагом процесс построения сложного выражения из переменных, мы проверяем, является оно формулой или нет.

Выражения

$$\& A \supset), \quad)A \supset B), \quad ((A \& B)), \quad A \supset B, \quad A\overline{C}, \quad (\overline{C})$$

не являются формулами логики высказываний, так как ни одно из них не может быть получено в результате применения пунктов 1)—3) определения формулы. Четвертое выражение, например, не является формулой, так как соединение формул знаком $\supset$ всегда сопровождается заключением в скобки.

Любая часть формулы, которая сама есть формула, называется подформулой данной формулы. Например, подформулами рассмотренной выше формулы являются переменные

A, B, C,

формулы

$$(A \supset B), \quad ((A \supset B) \vee \overline{C}), \quad (C \equiv A), \quad (((A \supset B) \vee \overline{C}) \& (C \equiv A)),$$

а также сама формула

$$((((A \supset B) \vee \overline{C}) \& (C \equiv A)) \supset B),$$

так как каждая формула рассматривается как часть самой себя. Однако, например, часть формулы $(C \equiv A)) \supset B)$ не является подформулой рассматриваемой формулы, так как не является формулой.

Каждая формула логики высказываний превращается в высказывание, если всем входящим в нее переменным придать значение конкретных элементарных или сложных высказываний.

Так, если в формуле

$$(A \supset B)$$

переменной A придать значение «12 делится на 6», а переменной B придать значение «12 — четное число», то получим сложное высказывание «Если 12 делится на 6, то 12 — четное число», а если A придать то же самое значение, а B придать значение «12 делится на 2 и 12 делится на 3», то получим сложное высказывание «Если 12 делится на 6, то 12 делится на 2 и 12 делится на 3».

Если какая-нибудь переменная входит в формулу больше одного раза, то на всех местах, где она входит в формулу, ей нужно придавать одно и то же значение. Например, из формулы $((A \& B) \supset A)$ можно получить высказывание «Если 12 делится на 2 и 12 делится на 3, то 12 делится на 2», но нельзя получить высказывание «Если 12 делится на 2 и 12 делится на 3, то 12 делится на 6».

Формулы логики высказываний в результате того, что их переменные получают значение конкретных высказываний, превращаются в истинные или ложные высказывания, причем истинность и ложность получившегося сложного высказывания будет зависеть от истинности и ложности тех высказываний, которыми замещают переменные.

В дальнейшем вместо того, чтобы говорить, что формула, после того как ее переменным придали значение конкретных истинных или ложных высказываний, превратилась в истинное или ложное высказывание, мы часто будем просто говорить, что формула принимает (получает, имеет) логическое значение «истина» или «ложь». Способы выражения, при которых вместо того, чтобы говорить об истинных и ложных высказываниях, говорят о значениях «истина» и «ложь», т. е. отождествляют высказывания с их логическими значениями, оправданы тем, что в логике высказываний мы отвлекаемся от смыслового и предметного содержания конкретных элементарных и сложных высказываний и фиксируем только их логическое значение, т. е. свойство быть какой-то истиной или какой-то ложью.

Упражнение. Проверить, являются ли следующие выражения формулами логики высказываний

а) $((((A \supset C) \vee B) \& \overline{A}) \supset (A \& B))$,

б) $((A \not\equiv B) \supset ((A \equiv C) \& \overline{C}))$;

в) $((A \& B) \supset (B \vee C) \& (A \equiv C))$.

§ 3. СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СОЮЗОВ

Точный смысл (семантика) логических союзов может быть разъяснен с помощью так называемых таблиц истинности.

Истинность и ложность формул $\overline{\mathfrak{A}}$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B})$ зависит от того, истинны или ложны подформулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. В таблицах истинности зафиксировано, при каких логических значениях формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ формулы $\overline{\mathfrak{A}}$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$ и $(\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B})$ истинны, а при каких ложны.

Рассмотрим таблицы истинности формул, содержащих различные логические союзы.

Отрицание

$\mathfrak{A}$	$\overline{\mathfrak{A}}$
и	л
л	и

В первом, «входном», столбце таблицы отмечены оба возможные логические значения формулы $\mathfrak{A}$: «истина» (и) и «ложь» (л), а во втором, «выходном», столбце — соответствующее логическое значение формулы $\overline{\mathfrak{A}}$. Из таблицы видно, что, когда формула $\mathfrak{A}$ истинна, формула $\overline{\mathfrak{A}}$ ложна, а когда $\mathfrak{A}$ — ложна, формула $\overline{\mathfrak{A}}$ истинна.

Пусть формула $\mathfrak{A}$ принимает, например, значение истинного высказывания «6 — четное число», тогда высказывание «неверно, что 6 четное число», т. е. $\overline{\mathfrak{A}}$, ложно. Если же $\mathfrak{A}$ принимает значение ложного высказывания «6 — простое число», то высказывание «неверно, что 6 простое число» истинно.

Конъюнкция

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$
и	и	и
л	и	л
и	л	л
л	л	л

Так как каждая из формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ может быть истинной или ложной, то возможны четыре различных случая: $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обе истинны; $\mathfrak{A}$ ложна, а $\mathfrak{B}$ истинна; $\mathfrak{A}$ истинно, но $\mathfrak{B}$ ложна; наконец,

$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обе ложны. Таблица построена таким образом, что во «входных» столбцах каждая строка — это одно из возможных сочетаний логических значений формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Для каждого из них в соответствующей строке «выходного» столбца указано логическое значение формулы $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$.

Из таблицы видно, что высказывания вида «$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$» истинны только в случае, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ получают значение истинных высказываний и ложны в остальных.

Если формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ получают значение истинных высказываний, например «2 — простое число» и «2 — четное число», то и формула $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ получает значение истинного высказывания «2 — простое число и 2 — четное число»; если же $\mathfrak{A}$ получает значение ложного высказывания «4 — простое число», а $\mathfrak{B}$ — значение истинного высказывания «4 — четное число», то $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ будет ложным высказыванием «4 — простое число и 4 — четное число»; если $\mathfrak{A}$ — истинное высказывание «5 — простое число», а $\mathfrak{B}$ — ложное «5 — четное число», то $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ — ложное высказывание «5 — простое число и 5 — четное число», и наконец, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — ложные высказывания «9 — простое число» и «9 — четное число», то $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$ будет ложным высказыванием «9 — простое число и 9 — четное число».

Дизъюнкция

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$
и	и	и
л	и	и
и	л	и
л	л	л

Высказывания вида «$\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$» истинны тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ истинно. Например, сложное высказывание «У него хорошие способности к математике или он раньше уже решал такие задачи» истинно как в том случае, когда истинно высказывание «У него хорошие способности к математике», но ложно высказывание «Он раньше уже решал такие задачи», так и в том, когда ложно высказывание «У него хорошие способности к математике», но истинно высказывание «Он раньше уже решал такие задачи». Кроме того, это сложное высказывание истинно, если истинны оба исходных высказывания: может быть верно как то, что у него хорошие способности к математике, так и то, что он уже решал такие задачи. И только когда ложны оба дизъюнкта, т. е. у него нет хороших способностей к математике и он никогда не решал таких задач, сложное высказывание окажется ложным.

Импликация

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$
и	и	и
л	и	и
и	л	л
л	л	и

Высказывания вида «Если $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$» ложны в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}$ истинно, а $\mathfrak{B}$ ложно, и они истинны, или если антецедент $\mathfrak{A}$ ложен, или если консеквент $\mathfrak{B}$ истинен.

Содержащееся в настоящей таблице истолкование связи «если..., то», в особенности вторая и четвертая ее строки, требуют пояснения.

Прежде всего следует учитывать, что в естественных языках союз «если..., то» употребляется в разных смыслах: для выражения причинной зависимости («если воду нагреть до 100°, то она превратится в пар»; «если река замерзла, то был мороз»), для выражения временной последовательности событий («если в воздухе парит, то будет гроза»), для выражения связи цели и средства («если не хочешь ошибится, то будь внимателен»), для выражения какой-нибудь условной договоренности («если ты решишь все задачи, то получишь зачет») и т. д., в каждом из которых связь «если..., то» имеет свою специфику. Однако мы отвлекаемся от того, какова природа зависимости $\mathfrak{B}$ от $\mathfrak{A}$, и придаем союзу «если..., то» только тот смысл, который выражен в таблице.

Данное уточнение смысла «если..., то» естественно. Ведь когда полагают истинным сложное высказывание «если $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$», обычно не хотят сказать, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обязательно истинны, а только стремятся указать, что если $\mathfrak{A}$ истинно, то истинным будет и $\mathfrak{B}$, т. е. что если $\mathfrak{A}$ истинно, то $\mathfrak{B}$ не может быть ложным. Если же $\mathfrak{A}$ ложно, то $\mathfrak{B}$ может быть как истинным, так и ложным. Точно так же $\mathfrak{B}$ может быть истинно как при истинном, так и при ложном $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим, например, сложное высказывание «Если данное слово стоит в начале предложения, то данное слово пишется с большой буквы». Слово может не стоять в начале предложения, но писаться с большой буквы (разумеется, уже по другому основанию). Слово может не стоять в начале предложения и не писаться с большой буквы, и тем не менее сложное высказывание о том, что если оно стоит в начале предложения, то пишется с большой буквы, остается истинным. Сложное высказывание окажется ложным, только если данное слово стоит в начале предложения, но не пишется с большой буквы, т. е. только если высказывание «Данное слово стоит в начале предложения» истинно, а высказывание «Данное слово пишется с большой буквы» при этом ложно.

В том, что таблица истинности для импликации выражает обычный, принятый и в традиционной логике смысл союза «если..., то», можно убедиться, если проанализировать употребление союза «если..., то» в традиционном условно-категорическом силлогизме.

От истинности суждений «А» и «Если А, то В» заключают к истинности суждения «В». Это, как известно, modus ponens условно-категорического силлогизма. В таблице этот логический факт представлен первой ее строкой, где при истинных $\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ формула $\mathfrak{B}$ истинна. Рассмотрим также случай, когда суждение «В» ложно, а суждение «Если А, то В» истинно. Эти посылки определяют modus tollens условно-категорического силлогизма, согласно которому суждение «А» ложно. Этому случаю в таблице отвечает ее четвертая строка.

Рассмотрим теперь случай, когда суждение «А» ложно, а суждение «Если А, то В» истинно. Известно, что из таких посылок не следует ни истинность, ни ложность «В». Этому логическому факту соответствует то, что в таблице условию удовлетворяют строки вторая и четвертая, причем во второй строке $\mathfrak{B}$ истинно, а в четвертой — ложно.

Наконец, случай, когда при истинном суждении «Если А, то В» суждение «В» тоже истинно. Хорошо известно, что из таких посылок также не следует ни истинность, ни ложность «А». В таблице этому случаю соответствуют строки первая и вторая: в первой строке $\mathfrak{A}$ истинно, во второй — ложно.

Наконец, целесообразность такого уточнения союза «если..., то», которое дается таблицей истинности для импликации, можно пояснить следующими соображениями.

Теорема «Если число делится на 6, то оно делится на 3» истинна не только потому, что существуют числа, для которых истинно как то, что они делятся на 6, так и то, что они делятся на 3. Истинность этой теоремы для всех чисел не подрывается ни существованием чисел, не делящихся на 6, но делящихся на 3, например числа 15, ни существованием чисел, не делящихся ни на 6, ни на 3, например числа 13. Единственное, что сделало бы эту теорему ложной, это если бы нашлось такое число, которое, делясь на 6, не делилось бы на 3. Известно, что такого числа нет, и поэтому наша теорема истинна для всех чисел.

Эквивалентность

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$
и	и	и
л	и	л
и	л	л
л	л	и

Высказывания вида «$\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$» истинны либо когда высказывания $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ оба истинны, либо когда они оба ложны, т. е. когда высказывания $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют одинаковые логические значения.

Исключающая дизъюнкция

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$(\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B})$
и	и	л
л	и	и
и	л	и
л	л	л

Высказывания вида «либо $\mathfrak{A}$, либо $\mathfrak{B}$» истинны, когда $\mathfrak{A}$ ложно, но $\mathfrak{B}$ истинно или когда $\mathfrak{A}$ истинно, но $\mathfrak{B}$ — ложно. В остальных случаях они ложны.

§ 4. ЛОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ИСТИННОСТИ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

С помощью таблиц истинности мы, зная логическое значение элементарных высказываний, можем установить истинностное значение построенного из них сложного высказывания.

Пусть

$$((A \vee B) \supset \overline{C})$$

формула, пусть переменные A, B и C получают значения «я устал», «я голоден» и «я могу заниматься» и пусть первое элементарное высказывание истинно, а второе и третье — ложны. Тогда логическое значение сложного высказывания «Если я устал или (я) голоден, то (я) не могу заниматься» можно «вычислить» с помощью таблиц истинности. Обратившись к высказыванию «Я устал или я голоден», имеющему вид $(A \vee B)$, находим в таблице для дизъюнкции строку, в которой A истинно, а B ложно, и узнаем, что высказывание «Я устал или я голоден» в этом случае истинно. Далее, обратившись к высказыванию «Я не могу заниматься», имеющему вид $\overline{C}$, находим в таблице для отрицания строку, в которой C ложно и узнаем, что высказывание «Я не могу заниматься» в этом случае истинно. Наконец, поскольку в целом сложное высказывание имеет вид импликации формул $(A \vee B)$ и $\overline{C}$, в которой антецедент и консеквент имеют логическое значение «истина», оно, согласно таблице для импликации, есть истинное высказывание.

Пусть

$$(((A \supset B) \vee C) \equiv ((A \,\&\, \overline{B}) \supset \overline{\overline{C}}))$$

формула и пусть переменные A, B и C получают соответственные логические значения «ложь», «истина» и «ложь». Тогда с помощью таблицы истинности вычисляем последовательно логические значения подформул данной формулы: $(A \supset B)$ — «истинно», $((A \supset B) \vee C)$ — «истинно», $\overline{B}$ — «ложно», $(A \,\&\, \overline{B})$ — «ложно», $\overline{C}$ — «истинно», $\overline{\overline{C}}$ — «ложно», $((A \,\&\, \overline{B}) \supset \overline{\overline{C}})$ — «истинно» и, наконец, находим, что в целом формула имеет логическое значение «истинно».

Придавая переменным высказываниям конкретные значения, мы от формул логики высказываний переходим к высказываниям на естественном языке. Более сложным является переход от конкретных высказываний к соответствующим формулам логики высказываний, «перевод» с естественного языка на искусственный язык логики высказываний. Объясняется это неоднозначностью предложений естественного языка и наличием нерегулярных грамматических форм. Особенно затрудняет такой «перевод» омонимичность, а также синонимичность выражений, которые принадлежат повседневному разговорному языку.

Например, для того чтобы высказывание «Он молчит, а Варенька поет ему „Виют витры", или глядит на него задумчиво своими темными глазами, или вдруг зальется: „Ха-ха-ха!"» (Чехов) можно было «перевести» на язык логики, требуется решить целый ряд вопросов. Прежде всего нужно выявить входящие в его состав элементарные высказывания. Пусть такими мы решим считать высказывания «Он молчит», «Варенька поет ему „Виют витры"», «(Варенька) глядит на него задумчиво своими темными глазами», «(Варенька) вдруг зальется: „Ха-ха-ха!"». Поставим им в соответствие переменные A, B, C и D. Союз «а» имеет здесь, очевидно, тот же смысл, что и союз «и», поэтому мы переведем его знаком конъюнкции. Первое «или» можно перевести знаком дизъюнкции, так как песня грустная и, по-видимому, можно одновременно петь ее и глядеть задумчиво. Второе «или» скорее всего имеет смысл строгой дизъюнкции, так как исключается возможность одновременно смеяться и петь или молчать. В результате такого, в какой-то мере произвольного, анализа текста мы получаем формулу

$$(A \,\&\, ((B \vee C) \not\equiv D)).$$

Осуществив «перевод», мы достигли того, что избавились от всей информации, которая не относится к логике, обнажили логическую структуру сложного высказывания, сделали ее недвусмысленной и доступной прямому наблюдению.

Каждой формуле логики высказываний можно сопоставить соответствующую ей таблицу истинности. В этой таблице будет зафиксировано, какое логическое значение имеет данная формула при различных логических значениях своих переменных. Процедуру построения таблицы истинности для произвольной формулы рассмотрим на примере.

Построим таблицу истинности для формулы

$$(A \,\&\, ((B \vee C) \not\equiv D)).$$

Так как в формуле четыре различные переменные, то таблица будет иметь четыре «входных» столбца. Число строк в таблице равно 2^n, где n — число различных переменных в данной формуле. В каждой строке входных столбцов вписаны все различные наборы логических значений переменных. Далее, последовательно согласно всем шагам построения данной формулы из подформул приписываются столбцы, соответствующие всем ее подформулам. Строки в этих столбцах заполняются на основании тех таблиц истинности для логических союзов, которые отвечают рассматриваемым подформулам. Последний столбец считается «выходным» столбцом таблицы истинности данной формулы.

A	B	C	D	$(B \vee C)$	$((B \vee C) \not\equiv D)$	$(A \& ((B \vee C) \not\equiv D))$
и	и	и	и	и	л	л
л	и	и	и	и	л	л
и	л	и	и	и	л	л
л	л	и	и	и	л	л
и	и	л	и	и	л	л
л	и	л	и	и	л	л
и	л	л	и	л	и	и
л	л	л	и	л	и	л
и	и	и	л	и	и	и
л	и	и	л	и	и	л
и	л	и	л	и	и	и
л	л	и	л	и	и	л
и	и	л	л	и	и	и
л	и	л	л	и	и	л
и	л	л	л	л	л	л
л	л	л	л	л	л	л

Из таблицы видно, что формула

$$(A \& ((B \vee C) \not\equiv D))$$

истинна лишь в четырех и ложна в двенадцати случаях. Она описывает множество истинных и ложных высказываний одинаковой логической формы, в частности высказывание «Он молчит, а Варенька поет ему „Виют витры", или глядит на него задумчиво своими темными глазами, или вдруг зальется: „Ха-ха-ха!"».

«Выходной» столбец таблицы характеризует логические условия истинности данной формулы, т. е. то, при каких значениях своих переменных она истинна, а при каких ложна. Из шестнадцати возможных предметных ситуаций, по-разному определяющих логическое значение четырех высказываний — A, B, C и D, лишь следующие удовлетворяют условиям, налагаемым на них данной формулой: 1) ситуация, при которой A и D истинны, а B и C ложны, т. е. он молчит, Варенька смеется, не поет и не глядит задумчиво; 2) ситуация, при которой A, B и C истинны, а D ложно, т. е. он молчит, Варенька поет, задумчиво глядит и не смеется; 3) ситуация, при которой A и C истинны, а B и D ложны, т. е. он молчит, Варенька глядит задумчиво, не поет и не смеется (повидимому тоже молчит) и, наконец, 4) ситуация, при которой A и B истинны, а C и D ложны, т. е. он опять-таки молчит, Варенька поет, но не глядит задумчиво и не смеется. Эта интерпретация условий истинности сложного высказывания хорошо согласуется с обычным пониманием его смысла.

Упражнения.

1. Вычислить логическое значение формул:

$$\text{а) } (((A \& B) \supset (B \vee C)) \& (A \equiv \overline{C})),$$
$$\text{б) } ((((A \equiv C) \vee B) \& \overline{A}) \supset (A \& B)),$$
$$\text{в) } (((A \equiv \overline{C}) \supset B) \supset ((A \equiv C) \& \overline{C})),$$

при условии, что переменные A и B получают значение «истина», а C — «ложь».

2. Перевести на язык логики высказываний следующие предложения:

а) «Если кто из товарищей опаздывал на молебен, или доходили слухи о какой-нибудь проказе гимназистов, или видели классную даму поздно вечером с офицером, то он очень волновался и все говорил, как бы чего не вышло» (Чехов. Человек в футляре);

б) «Если я долго не приезжал в город, то, значит, я был болен или что-нибудь случилось со мной, и они оба сильно беспокоились» (Чехов. О любви);

3. Построить таблицы истинности для следующих формул:

$$\text{а) } (((\overline{B} \supset A) \vee B) \equiv A),$$
$$\text{б) } (((A \vee B) \not\equiv C) \supset (\overline{B} \supset C)),$$
$$\text{в) } (C \supset ((B \vee D) \& \overline{C})).$$

§ 5. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Различные по своей логической структуре формулы могут получать в выходных столбцах таблиц истинности одинаковые логические значения для всех одинаковых наборов логических значений принадлежащих им переменных.

Построим, например, таблицы истинности для формул $(A \supset \overline{B})$ и $(\overline{A \& B})$.

A	B	$\overline{B}$	$(A \supset \overline{B})$
и	и	л	л
л	и	л	и
и	л	и	и
л	л	и	и

A	B	(A & B)	$(\overline{A \& B})$
и	и	и	л
л	и	л	и
и	л	л	и
л	л	л	и

Можно видеть, что одинаковым наборам логических значений переменных A и B соответствуют одинаковые логические значения формул

$$(A \supset \overline{B}) \text{ и } (\overline{A \& B}).$$

Если формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ при любых логических значениях переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — совокупность всех переменных, входящих по крайней мере в одну из рассматриваемых формул, принимают одинаковое логическое значение, то формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются равносильными. Например, формула $(A \supset \overline{B})$ равносильна формуле $(\overline{A \& B})$.

Отношение равносильности двух формул рефлексивно, т. е. $\mathfrak{A}$ равносильно $\mathfrak{A}$; симметрично, т. е. если $\mathfrak{A}$ равносильно $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$ равносильно $\mathfrak{A}$, и транзитивно, т. е. если $\mathfrak{A}$ равносильно $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ равносильно $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{A}$ равносильно $\mathfrak{C}$.

Два высказывания называются равнозначащими (равнозначными), если они могут быть получены из равносильных формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в результате замены переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — все переменные, входящие в $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$, конкретными высказываниями.

Например, высказывание «Если студент плохо знает предмет, то он не сдаст экзамен» равнозначно высказыванию «Неверно, что студент плохо знает предмет и он сдаст экзамен», так как их можно получить из формул $(A \supset \overline{B})$ и $(\overline{A \& B})$, придавая переменным A и B значения «Студент плохо знает предмет» и «Он сдаст экзамен».

Рассмотрим некоторые равносильности, условившись в дальнейшем во всех формулах для упрощения записи опускать внешние скобки.

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \text{ равносильно } \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Эта равносильность означает, что двойное отрицание любой формулы равносильно самой этой формуле: формула $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ истинна, когда истинна $\mathfrak{A}$, и ложна, когда $\mathfrak{A}$ ложна. В этом легко убедиться, построив таблицу и рассмотрев случаи, когда формула $\mathfrak{A}$ истинна, и случаи, когда она ложна.

$\mathfrak{A}$	$\overline{\mathfrak{A}}$	$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$
и	л	и
л	и	л

Равносильность следующих ниже формул также может быть обоснована построением соответствующих таблиц истинности. Фактическое построение этих таблиц предоставляется читателю.

$$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \text{ равносильно } \mathfrak{B} \& \mathfrak{A}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{A} \& (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}) \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \& \mathfrak{C}. \tag{3}$$

Равносильности (2) и (3) свидетельствуют о коммутативности и ассоциативности конъюнкции. Учитывая равносильность (3), мы в соответствующих случаях станем употреблять бесскобочную запись $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$.

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \text{ равносильно } \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}. \tag{5}$$

Равносильности (4) и (5) говорят о коммутативности и ассоциативности дизъюнкции. В силу (5) можно употреблять бесскобочную запись $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$.

$$\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}) \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}), \tag{6}$$

$$\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C}). \tag{7}$$

Равносильности (6) и (7) свидетельствуют о дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции и дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.

Проиллюстрируем равносильность (7): высказывание о погоде за какой-то период — «Стояли морозные дни, и в то же время или был сильный снегопад, или дул резкий ветер» равнозначно высказыванию «Стояли морозные дни, и был сильный снегопад, или же стояли морозные дни, и дул резкий ветер». Очевидны следующие две равносильности:

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{A} \text{ равносильно } \mathfrak{A}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \text{ равносильно } \mathfrak{A}, \tag{9}$$

которые называются «законами идемпотентности».

Равносильности

$$\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}, \tag{10}$$

$$\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A}} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}} \tag{11}$$

называют «законами де Моргана».

Примером (10) является равнозначность высказывания «Неверно, что данный треугольник прямоугольный и что он в то же время равнобедренный» высказыванию «Или этот треугольник не прямоугольный, или он не равнобедренный». Заметим, что так как дизъюнкция здесь не исключающая, то может быть, что этот треугольник и не прямоугольный и не равнобедренный.

Примером (11) может служить равнозначность высказывания «Неверно, что или он изучал логику в школе, или он прослушал курс логики в вузе» высказыванию «Он не изучал логику в школе и он не слушал курса логики в вузе».

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}}. \tag{12}$$

Например, высказывание «Если какой-нибудь треугольник равнобедренный, то его углы при основании равны» равнозначно высказыванию «Неверно, что какой-то треугольник является равнобедренным и его углы при основании не равны».

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}. \tag{13}$$

Например, высказывание «Если взялся за дело, то доведи его до конца» равнозначно высказыванию «Или не берись за дело, или доведи его до конца».

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{B}. \tag{14}$$

Например, высказывание «Или он хотел меня обмануть, или он сам ошибался» равнозначно высказыванию «Если он не хотел меня обмануть, то он сам ошибался».

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}). \tag{15}$$

Например, высказывание «Треугольник является равносторонним, тогда и только тогда, когда он равноугольный» равнозначно высказыванию «Если треугольник равносторонний, то он равноугольный и если треугольник равноугольный, то он равносторонний».

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \text{ равносильно } (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \& (\overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{A}). \tag{16}$$

Высказывание «Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3» равнозначно высказыванию «Или число не делится на 3, или сумма его цифр делится на 3, а также или сумма цифр некоторого числа не делится на 3, или само это число делится на 3».

$$\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}}. \tag{17}$$

Высказывание «Либо данное число нечетное, либо оно делится на 2» равнозначно высказыванию «Неверно, что данное число нечетное тогда и только тогда, когда оно делится на 2».

$$\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B} \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \& (\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}), \tag{18}$$

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\overline{\mathfrak{A}} \& \overline{\mathfrak{B}}}. \tag{19}$$

Высказывание «Или в треугольнике *ABC* острым является угол *A*, или в этом треугольнике угол *B* острый» равнозначно высказыванию «Неверно, что в треугольнике *ABC* угол *A* не является острым, и в этом треугольнике угол *B* тоже не острый».

$$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}. \tag{20}$$

Например, высказывание «У квадрата стороны равны и углы прямые» равнозначно высказыванию «Неверно, что у квадрата стороны не равны или углы не прямые».

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{B}} \supset \overline{\mathfrak{A}}, \tag{21}$$

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A}} \equiv \overline{\mathfrak{B}}. \tag{22}$$

Большое значение имеют также равносильности, упрощающие формулы.

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \& (\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \text{ равносильно } \mathfrak{B}, \tag{23}$$

$$\mathfrak{A} \& (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \text{ равносильно } \mathfrak{A}, \tag{24}$$

$$\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \text{ равносильно } \mathfrak{A}. \tag{25}$$

Равносильность (23) называют «правилом исключения», а равносильности (24) и (25) «правилами поглощения».

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \& (\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{C}}) \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \& (\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{C}}) \& (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}), \quad (26)$$

$$(\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \& \overline{\mathfrak{C}}) \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \& \overline{\mathfrak{C}}) \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}), \quad (27)$$

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \& \overline{\mathfrak{C}} \text{ равносильно } (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \& \overline{\mathfrak{C}} \& \mathfrak{A}, \quad (28)$$

$$\mathfrak{C} \& (\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{C}}) \text{ равносильно } \mathfrak{C} \& (\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{C}}) \& \mathfrak{B}. \quad (29)$$

Равносильности (26) и (27) — это так называемые «правила выявления», а (28) и (29) — частные случаи (26).

Пусть $\mathfrak{A}$ некоторая формула и $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой хотя бы одного из вхождений подформулы $\mathfrak{B}$ в формулу $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}'$. Тогда, если $\mathfrak{B}'$ равносильна $\mathfrak{B}$, то формула $\mathfrak{A}'$ равносильна формуле $\mathfrak{A}$. Правило, по которому заменой $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}'$ осуществляется переход от $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{A}'$, называется ***«правилом замены по равносильности»***. Правило замены по равносильности дает возможность от одних формул переходить к другим, равносильным им формулам.

Равносильности (1) — (29) обоснованы с помощью таблиц истинности, но с их помощью уже без обращения к таблицам истинности, а по правилу замены можно устанавливать равносильность логических формул.

Пусть, например, дана формула

$$\overline{(A \& B)} \supset C.$$

Применяем к ней правило замены по равносильности (10), заменяя подформулу $\overline{(A \& B)}$ формулой $(\overline{A} \vee \overline{B})$. В результате замены получаем формулу

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \supset C,$$

которая равносильна исходной. Затем эту формулу, согласно равносильности (13), заменяем равносильной ей формулой

$$\overline{(\overline{A} \vee \overline{B})} \vee C.$$

Подформулу этой формулы $\overline{(\overline{A} \vee \overline{B})}$, согласно равносильности (11), заменяем формулой $(\overline{\overline{A}} \& \overline{\overline{B}})$ и получаем формулу

$$(\overline{\overline{A}} \& \overline{\overline{B}}) \vee C.$$

Применив теперь к подформулам $\overline{\overline{A}}$ и $\overline{\overline{B}}$ этой формулы правило замены по равносильности (1), получим равносильную ей формулу

$$(A \& B) \vee C.$$

В силу транзитивности отношения равносильности эта формула равносильна всем предыдущим, и мы без помощи таблиц обосновали равносильность формулы $\overline{(A \,\&\, B)} \supset C$ формуле $(A \,\&\, B) \vee C$.

Пользуясь правилом замены, формулу можно преобразовать в равносильную таким образом, чтобы она не содержала одних логических союзов, но содержала другие. С помощью равносильностей (18), (16) и (13) по правилу замены можно любую формулу, содержащую знаки $\not\equiv$, $\equiv$ и $\supset$, преобразовать в равносильную, но уже не содержащую больше этих знаков формулу. С помощью равносильностей (18), (16), (13) и (19) любую формулу можно преобразовать в равносильную и не содержащую знаков, отличных от знаков конъюнкции и отрицания, с помощью (18), (16), (13) и (20) любую формулу можно преобразовать в равносильную и содержащую только знаки дизъюнкции и отрицания, а с помощью (18), (16), (13), (20) и (14) любую формулу можно преобразовать в равносильную, но содержащую только знаки импликации и отрицания. Однако не любую формулу можно, например, преобразовать в равносильную и содержащую только знаки эквивалентности и отрицания.

В качестве примера рассмотрим процесс преобразования формулы

$$(A \equiv B) \vee (B \supset C)$$

в формулу, которая равносильна ей, но содержит только знаки конъюнкции и отрицания. Применяем к подформуле $(A \equiv B)$ правило замены по равносильности (15) и получаем формулу

$$((A \supset B) \,\&\, (B \supset A)) \vee (B \supset C).$$

Затем к подформулам $(A \supset B)$, $(B \supset A)$ и $(B \supset C)$ применяем правило замены по равносильности (12) и получаем формулу

$$(\overline{(A \,\&\, \overline{B})} \,\&\, \overline{(B \,\&\, \overline{A})}) \vee \overline{(B \,\&\, \overline{C})}.$$

Наконец, ко всей формуле применяем правило замены по равносильности (19) и получаем формулу

$$\overline{\overline{(\overline{(A \,\&\, \overline{B})} \,\&\, \overline{(B \,\&\, \overline{A})})} \,\&\, \overline{\overline{(B \,\&\, \overline{C})}}}.$$

Упражнения.

1. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли равносильными следующие формулы:

а) $A \,\&\, B$ и $\overline{A \supset \overline{B}}$,

б) $\overline{A} \vee B$ и $A \supset \overline{B}$,

в) $A \supset (B \supset C)$ и $(A \,\&\, B) \supset C$,

г) $\overline{(A \,\&\, B) \vee C}$ и $(A \supset \overline{B}) \,\&\, \overline{C}$.

2. Из формулы

$$(A \not\equiv B) \supset C$$

путем ряда равносильных замен получить формулу

а) содержащую только знаки & и —,
б) содержащую только знаки $\vee$ и —,
в) содержащую только знаки $\supset$ и —.

§ 6. ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННЫЕ И ТОЖДЕСТВЕННО ЛОЖНЫЕ ФОРМУЛЫ

До сих пор мы имели дело с формулами, которые при одних логических значениях своих переменных были истинными, а при других ложными.

Но существуют формулы, которые при любых логических значениях своих переменных получают логическое значение «истина». Такие логические формулы называют *тождественно истинными.*

Тождественно истинные логические формулы истинны в силу своей структуры и значения логических союзов. Подчеркивая это, говорят, что тождественно истинные формулы — *логически истинные формулы.*

Тождественно истинные формулы всегда истинны потому, что их структура (логическая форма) отражает такие объективные связи, которые носят общий и закономерный характер. Тождественно истинные формулы выражают законы логики.

Рассмотрим логическую формулу

$$A \vee \overline{A}.$$

Построим таблицу истинности

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
и	л	и
л	и	и

Независимо от того, принимает переменная А значения «истина» или «ложь», формула $A \vee \overline{A}$ всегда истинна.

Например, высказывания «Волга впадает в Каспийское море или Волга не впадает в Каспийское море», «12 делится на 5 без остатка, или неверно, что 12 делится на 5 без остатка» истинны независимо от того, впадает Волга в Каспийское море и делится ли 12 на 5 без остатка.

Формула $A \vee \overline{A}$ есть выражение принципа исключенного третьего в логике высказываний.

Рассмотрим формулу

$$\overline{A \& \overline{A}}$$

и построим для этой формулы таблицу истинности

A	$\overline{A}$	$A \& \overline{A}$	$\overline{A \& \overline{A}}$
и	л	л	и
л	и	л	и

Эта тождественно истинная формула выражает принцип запрещения противоречия («закон противоречия»).

Так, конкретное сложное высказывание «Неверно, будто данный угол прямой и в то же время он не прямой» истинно независимо от того, прямой или не прямой этот угол.

Еще два примера тождественно истинных формул: формула

$$A \supset (B \supset A)$$

с таблицей

A	B	$B \supset A$	$A \supset (B \supset A)$
и	и	и	и
л	и	л	и
и	л	и	и
л	л	и	и

и формула

$$((A \supset B) \& (B \supset C)) \supset (A \supset C)$$

с таблицей

A	B	C	$A \supset B$	$B \supset C$	$(A \supset B) \& (B \supset C)$	$A \supset C$	Окончательная формула
и	и	и	и	и	и	и	и
л	и	и	и	и	и	и	и
и	л	и	л	и	л	и	и
л	л	и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	л	л	л	и
л	и	л	и	л	л	и	и
и	л	л	л	и	л	л	и
л	л	л	и	и	и	и	и

Существуют формулы, которые при любом распределении логических значений своих переменных всегда ложны. Такова, например, формула

$$A \equiv \overline{A},$$

ее таблица

A	$\overline{A}$	$A \equiv \overline{A}$
и	л	л
л	и	л

или формула

$$\overline{A} \& \overline{(\overline{A} \vee B)}$$

с таблицей

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$\overline{\overline{A} \vee B}$	$\overline{A} \& (\overline{\overline{A} \vee B})$
и	и	л	и	л	л
л	и	и	и	л	л
и	л	л	л	и	л
л	л	и	и	л	л

Высказывания «Он умеет играть в шахматы, если и только если неверно, что он умеет играть в шахматы» и «Неверно, что это целое число четное и в то же время неверно, что или это число не является четным, или оно делится на 3» ложны независимо от того, умеет тот, о ком идет речь, играть в шахматы и делится ли данное число на 2 и на 3. Если ложность первого высказывания усматривается непосредственно, то ложность второго обнаружить без таблицы трудно.

Отрицание тождественно истинной формулы есть тождественно ложная формула, и наоборот. Так, например, если формулы $A \vee \overline{A}$ и $A \supset (B \supset A)$ тождественно истинны, то формулы $\overline{A \vee \overline{A}}$ и $\overline{A \supset (B \supset A)}$ тождественно ложны.

Если теперь мы обозначим буквой И тождественно истинную формулу, а буквой Л формулу, которая тождественно ложна, то будут иметь место следующие равносильности:

$$\overline{\text{И}} \text{ равносильно Л}, \tag{30}$$

$$\overline{\text{Л}} \text{ равносильно И}, \tag{31}$$

$$\mathfrak{A} \equiv \text{И} \text{ равносильно } \mathfrak{A}, \tag{32}$$

$$\mathfrak{A} \equiv \text{Л} \text{ равносильно } \overline{\mathfrak{A}}, \tag{33}$$

$$\mathfrak{A} \& \text{И} \text{ равносильно } \mathfrak{A}, \tag{34}$$

$$\mathfrak{A} \& \text{Л} \text{ равносильно Л}, \tag{35}$$

$$\mathfrak{A} \vee \text{И} \text{ равносильно И}, \tag{36}$$

$$\mathfrak{A} \vee \text{Л} \text{ равносильно } \mathfrak{A}. \tag{37}$$

Итак, всякая формула: 1) либо относится к формулам, которые истинны при любых значениях переменных, 2) либо относится к формулам, которые при любых значениях переменных ложны, 3) либо, наконец, она относится к формулам, которые при одних значениях переменных истинны, а при других ложны. В 1-м и 3-м случаях говорят о выполнимой формуле, во 2-м — о невыполнимой. Формула называется выполнимой тогда и только тогда, когда хотя бы при одном наборе логических значений своих переменных она принимает значение «истина».

Поскольку тождественно истинные формулы выражают логические законы, то одна из задач логики состоит в отыскании среди всех формул тождественно истинных.

Задача, состоящая в нахождении процедуры, позволяющей для любой формулы конечным числом простых действий выяснить, является она тождественно истинной или нет, носит название *проблемы разрешимости.* Для формул логики высказываний проблема разрешимости в принципе решается построением соответствующих этим формулам таблиц истинности.

Упражнение. Выяснить, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $A \supset (B \supset (A \& B))$,

2) $(A \& B) \not\equiv (\overline{A \supset \overline{B}})$,

3) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$,

4) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((B \supset A) \supset (C \supset A))$.

§ 7. КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Использовать таблицы истинности для решения проблемы разрешимости удобно практически лишь в тех случаях, когда в формулу входит небольшое число переменных и она не очень длинная. От числа переменных зависит число строк в таблице: для двух оно равно 4, для трех 8, для шести 64, а для десяти уже 1024.

Но существуют другие, во многих отношениях более удобные, разрешающие процедуры. Заметим, что достаточно найти способ, позволяющий отличать тождественно истинные формулы от не тождественно истинных, чтобы судить также о выполнимости или невыполнимости формулы.

В самом деле, если формула $\mathfrak{A}$ оказалась не тождественно истинной, то нужно проверить на тождественную истинность ее отрицание, т. е. формулу $\overline{\mathfrak{A}}$. Если $\overline{\mathfrak{A}}$ окажется тождественно истинной, то значит $\mathfrak{A}$ тождественно ложна, а если $\overline{\mathfrak{A}}$ не тождественно истинна,— значит, формула $\mathfrak{A}$ при одних значениях переменных истинна, а при других ложна.

Простой метод проверки того, является данная формула тождественно истинной или нет, основан на приведении ее путем равносильных замен к форме определенного вида.

Каждая формула логики высказываний в результате ряда равносильных замен может быть приведена к так называемой *конъюнктивной нормальной форме* (сокращенно КНФ). КНФ представляет собой конъюнкцию дизъюнкций переменных или их отрицаний, т. е. кратную конъюнкцию, конъюнктивные члены которой — это кратные дизъюнкции, в которых каждый из дизъюнктов есть какая-нибудь переменная или отрицание переменной.

Например, формулы

$$(A \vee B \vee \bar{C}) \& (\bar{B} \vee C) \& (\bar{A} \vee \bar{C}).$$

$$A \& (\bar{A} \vee \bar{B}) \& (\bar{B} \vee C) \& \bar{C} \& (\bar{A} \vee B \vee C)$$

находятся в КНФ.

При написании этих формул мы пользуемся соглашением о бесскобочной записи кратных конъюнкций и дизъюнкций. Конъюнктивные члены A и $\bar{C}$ во второй формуле следует рассматривать как «вырожденные» дизъюнкции с одним дизъюнктом.

Рассмотрим строение формул, находящихся в КНФ, и условия их тождественной истинности. *Элементарной дизъюнкцией* мы будем называть формулу, которая есть либо переменная, либо отрицание переменной, либо кратная дизъюнкция, дизъюнктивные члены которой — только переменные или их отрицания. Например, формула

$$A \vee B \vee \bar{C} \vee A \vee \bar{B} \vee C$$

—элементарная дизъюнкция, формула же

$$(A \& B) \vee C \vee A$$

элементарной дизъюнкцией не является, так как ее первый дизъюнктивный член не является ни переменной, ни отрицанием переменной.

Элементарная дизъюнкция обладает следующим свойством: она тождественно истинна, если и только если в этой элементарной дизъюнкции содержится по крайней мере одна пара дизъюнктивных членов, из которых один есть некоторая переменная, а другой — ее отрицание.

В самом деле, если есть такая пара, например A и $\bar{A}$, то элементарная дизъюнкция имеет вид (или может быть приведена к нему применением правила замены по равносильности (4))

$$A \vee \bar{A} \vee B \vee \dots \vee D,$$

но дизъюнкция $A \vee \bar{A}$, как известно, тождественно истинна, поэтому и вся элементарная дизъюнкция, согласно равносильности (36), тождественно истинна, независимо от логического значения остальных переменных B, C и т. д.

Наличие такой пары не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной. Это можно показать следующим образом: допустим, что такой пары нет; тогда можно каждой переменной, не стоящей под знаком отрицания, придать значение «ложь», а стоящей под знаком отрицания — значение «истина»; в результате каждый из дизъюнктивных членов будет иметь значение «ложь», следовательно, вся элементарная дизъюнкция при данном наборе логических значений своих переменных имеет значение «ложь» и не тождественно истинна.

КНФ данной формулы называется формула, равносильная данной и представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций. Можно показать, что для всякой формулы $\mathfrak{A}$ существует равносильная ей формула $\mathfrak{A}'$ — такая, что $\mathfrak{A}'$ находится в конъюнктивной нормальной форме.

Для того чтобы любую формулу привести к КНФ, необходимо во всех ее подформулах произвести следующие равносильные замены везде, где только они могут быть осуществлены:

1) подформулы вида $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$ заменять, согласно (18), формулами $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \& (\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}})$;

2) подформулы вида $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ заменять, согласно (16), формулами $(\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}) \& (\overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{A})$;

3) подформулы вида $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ заменять, согласно (13), формулами $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$;

4) подформулы вида $\overline{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$ заменять, согласно (10), формулами $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$;

5) подформулы вида $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ заменять, согласно (11), формулами $\overline{\mathfrak{A}} \& \overline{\mathfrak{B}}$;

6) подформулы вида $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ заменять, согласно (1), формулами $\mathfrak{A}$;

7) подформулы вида $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C})$ заменять, согласно (6), формулами $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C})$;

8) кроме того, с подформулами, содержащими знаки & и $\vee$, разрешается оперировать в соответствии с равносильностями (4), (3) и (5), т. е. использовать свойство коммутативности дизъюнкции (для применения правила замены по равносильности (6)), а также свойство ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции (для уменьшения числа скобок).

Рассмотрим процесс приведения формулы к КНФ на следующем примере. Пусть дана формула

$$\overline{((A \vee B) \& \overline{C}) \vee (C \& B)}.$$

Рассматривая ее как отрицание дизъюнкции, т. е. как формулу вида $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$, применяем правило замены по равносильности (11) и получаем

$$\overline{((A \vee B) \& \overline{C})} \& \overline{(C \& B)}.$$

Применяем к каждому из конъюнктивных членов правило замены по равносильности (10) и получаем

$$(\overline{(A \vee B)} \vee \overline{\overline{C}}) \& (\overline{C} \vee \overline{B}).$$

Применяя к левому конъюнкту правило замены по равносильности (11), а к его подформуле C правило замены по равносильности (1), получаем

$$((\overline{A} \& \overline{B}) \vee C) \& (\overline{C} \vee \overline{B}).$$

Применив к левому конъюнктивному члену этой формулы правило замены по равносильности (6) и используя равносильность (3), получаем, наконец, формулу, равносильную исходной и находящуюся в КНФ:

$$(\overline{A} \vee C) \& (\overline{B} \vee C) \& (\overline{C} \vee \overline{B}).$$

Формула может иметь не одну КНФ. Например, формула

$$A \equiv B$$

может быть представлена в КНФ как

$$(\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee A),$$

но также и как

$$(A \vee \overline{B}) \& (B \vee \overline{B}) \& (B \vee \overline{A}).$$

Формула логики высказываний в КНФ тождественно истинна, если каждый из ее конъюнктивных членов, т. е. каждая элементарная дизъюнкция, содержит хотя бы одну переменную одновременно со знаком отрицания и без него. Поэтому о тождественной истинности формулы можно судить по ее виду в КНФ. Покажем это на примерах:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & (A \& (A \supset B)) \supset B,\\
& \overline{(A \& (\overline{A} \vee B))} \vee B,\\
& (\overline{A} \vee \overline{(\overline{A} \vee B)}) \vee B,\\
& (\overline{A} \vee (\overline{\overline{A}} \& \overline{B})) \vee B,\\
& ((\overline{A} \vee A) \& (\overline{A} \vee \overline{B})) \vee B,\\
& (\overline{A} \vee A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B} \vee B).
\end{aligned}
$$

Оба конъюнктивных члена содержат переменную со знаком отрицания и без него, следовательно, это тождественно истинная формула.

$$2)\quad (A \supset \overline{B}) \equiv (B \supset \overline{A}),$$
$$((\overline{A \supset \overline{B}}) \vee (B \supset \overline{A})) \& ((\overline{B \supset \overline{A}}) \vee (A \supset B)),$$
$$((\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}) \vee (\overline{B} \vee \overline{A})) \& ((\overline{\overline{B} \vee \overline{A}}) \vee (\overline{A} \vee B)),$$
$$((\overline{\overline{A}} \& \overline{\overline{B}}) \vee (\overline{B} \vee \overline{A})) \& ((\overline{\overline{B}} \& \overline{\overline{A}}) \vee (\overline{A} \vee B)),$$
$$(\overline{\overline{A}} \vee \overline{B} \vee \overline{A}) \& (\overline{\overline{B}} \vee \overline{B} \vee \overline{A}) \& (\overline{\overline{B}} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) \& (\overline{\overline{A}} \vee \overline{A} \vee \overline{B}),$$
$$(A \vee \overline{B} \vee \overline{A}) \& (B \vee \overline{B} \vee \overline{A}) \& (B \vee \overline{A} \vee \overline{B}) \& (A \vee \overline{A} \vee \overline{B}).$$

Эта формула тоже тождественно истинна.

Разрешающая процедура может быть использована для выяснения важного вопроса: является ли некоторая формула $\mathfrak{C}$ *логическим следствием* формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$?

Формула $\mathfrak{C}$ является логическим следствием формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, если при истинных $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ формула $\mathfrak{C}$ не может оказаться ложной. Чтобы проверить, выполняется ли это условие, нужно выяснить, может ли импликация $(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n) \supset \mathfrak{C}$, хотя бы при одном распределении истинностных значений переменных формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{C}$ быть ложной формулой, ведь импликация ложна только в случае, когда ее антецедент истинен, а консеквент ложен. Формула $\mathfrak{C}$ следует из $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots . \mathfrak{A}_n$, если импликация $(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n) \supset \mathfrak{C}$ — тождественно истинная формула.

Проверим, например, следует ли формула C из посылок $A \vee B$, $A \supset C$ и $B \supset C$? Строим конъюнкцию посылок

$$(A \vee B) \& (A \supset C) \& (B \supset C),$$

присоединяем к ней знаком импликации формулу C

$$((A \vee B) \& (A \supset C) \& (B \supset C)) \supset C$$

и, приведя эту импликацию к КНФ, проверяем, является ли она тождественно истинной формулой.

$$\overline{((A \vee B) \& (\overline{A} \vee C) \& (\overline{B} \vee C))} \vee C,$$
$$(\overline{(A \vee B)} \vee \overline{(\overline{A} \vee C)} \vee \overline{(\overline{B} \vee C)}) \vee C,$$
$$((\overline{A} \& \overline{B}) \vee (\overline{\overline{A}} \& \overline{C}) \vee (\overline{\overline{B}} \& \overline{C})) \vee C,$$
$$(((\overline{A} \vee \overline{\overline{A}}) \& (\overline{A} \vee \overline{C}) \& (\overline{B} \vee \overline{\overline{A}}) \& (\overline{B} \vee \overline{C})) \vee (\overline{\overline{B}} \& \overline{C})) \vee C,$$
$$((\overline{A} \vee \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}) \& (\overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{\overline{B}}) \& (\overline{B} \vee \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}) \& (\overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{\overline{B}}) \&$$
$$\& (\overline{A} \vee \overline{\overline{A}} \vee \overline{C}) \& (\overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{C}) \& (\overline{B} \vee \overline{\overline{A}} \vee \overline{C}) \& (\overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{C})) \vee C,$$
$$(\overline{A} \vee A \vee B \vee C) \& (\overline{A} \vee \overline{C} \vee B \vee C) \& (\overline{B} \vee A \vee B \vee C) \&$$
$$\& (\overline{B} \vee \overline{C} \vee B \vee C) \& (\overline{A} \vee A \vee \overline{C} \vee C) \& (\overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{C} \vee C) \&$$
$$\& (\overline{B} \vee A \vee \overline{C} \vee C) \& (\overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{C} \vee C).$$

Так как последняя формула тождественно истинна, то тем самым обосновано, что формула C следует из формул $A \vee B$, $A \supset C$ и $B \supset C$.

Упражнения.

1. Следующие формулы привести к КНФ и проверить, являются ли они тождественно истинными:

$$1)\ A \supset ((A \supset B) \supset B),$$
$$2)\ ((A \supset B) \& (C \supset D)) \supset ((A \& C) \supset (B \& D)),$$
$$3)\ (A \supset B) \supset ((A \& C) \supset (A \& C)),$$
$$4)\ (A \supset (B \& C)) \equiv ((A \supset B) \& (A \supset C)),$$
$$5)\ ((A \supset B) \vee (A \supset C)) \supset (A \supset (A \vee C)).$$

2. Покажите, что формула B следует из посылок $A \vee B$ и A, а формула $C \vee D$ следует из $A \supset C$, $B \supset D$ и $A \vee B$.

§ 8. СОВЕРШЕННАЯ КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Каждая не тождественно истинная формула имеет одну КНФ, которая называется *совершенной*. Совершенной конъюнктивной нормальной формой (сокращенно СКНФ) некоторой формулы называется ее КНФ, обладающая следующими свойствами:

а) в ней нет двух одинаковых конъюнктивных членов (одинаковыми считают такие конъюнктивные члены, которые получаются один из другого в результате замены по равносильности (4));

б) ни один конъюнктивный член не содержит двух одинаковых дизъюнктивных членов;

в) ни один конъюнктивный член не содержит переменной одновременно со знаком отрицания и без него;

г) в каждом конъюнктивном члене имеются все содержащиеся в данной формуле переменные.

Для того чтобы формулу представить в СКНФ, необходимо прежде всего известным уже способом привести ее к КНФ.

Требование, содержащееся в пункте «а», выполняется на основании равносильности (8) устранением всех повторений, — если какой-нибудь конъюнктивный член встречается в формуле более одного раза, то его оставляют только на одном месте и вычеркивают на всех остальных.

Требование, содержащееся в пункте «б», выполняется на основании равносильности (9) устранением всех повторений в каждом конъюнктивном члене, т. е. в каждой из элементарных дизъюнкций.

Требование пункта «в» выполняется на основании равносильности (34) устранением из формулы тех конъюнктивных членов, которые являются тождественно истинными элементарными дизъюнкциями. Для осуществления требования пункта «г» нужно ко всем тем конъюнктивным членам, в которых отсутствует какая-нибудь из содержащихся в данной формуле переменных X, приписать знак дизъюнкции и вслед за ним тождественно ложную конъюнкцию $(X \& \overline{X})$ (дизъюнктивное присоединение к любой формуле ложной формулы, согласно равносильности (37), не изменяет условий ее истинности) и применить правило замены по равносильности (6). Эту процедуру повторять до тех пор, пока не будет выполнено условие пункта «г». Если в получившейся КНФ снова появились одинаковые конъюнктивные члены, то устранить все повторения.

П р и м е р. Привести к СКНФ формулу

$$((A \supset B) \& (\overline{B} \supset C) \& (\overline{C} \supset A)) \vee A.$$

Вначале приведем данную формулу к КНФ:

$$((\overline{A} \vee B) \& (\overline{\overline{B}} \vee C) \& (\overline{\overline{C}} \vee A)) \vee A,$$

$$(\overline{A} \vee B \vee A) \& (B \vee C \vee A) \& (C \vee A \vee A).$$

Эту КНФ преобразуем в СКНФ. Согласно пункту «в», вычеркиваем первый конъюнктивный член, а в третьем, согласно пункту «б», устраняем повторения. Получаем формулу

$$(B \vee C \vee A) \& (C \vee A).$$

Так как во втором конъюнктивном члене не содержится переменная B, то присоединяем к нему знаком дизъюнкции конъюнкцию $B \& \overline{B}$:

$$(B \vee C \vee A) \& (C \vee A \vee (B \& \overline{B}))$$

и, воспользовавшись законом дистрибутивности (6), получаем

$$(B \vee C \vee A) \& (C \vee A \vee B) \& (C \vee A \vee \overline{B}).$$

Устраняем вновь появившиеся повторяющиеся конъюнктивные члены и получаем СКНФ:

$$(B \vee C \vee A) \& (C \vee A \vee \overline{B}).$$

Часто возникает задача: по данной формуле найти равносильную, но более простую формулу, например содержащую меньше логических союзов или даже меньше переменных. Мы можем использовать СКНФ для поиска более простой формулы, равносильной данной формуле.

Иногда, как в последнем примере, СКНФ формулы проще ее самой. СКНФ, в свою очередь, путем равносильных замен может быть подвергнута дальнейшим упрощениям, в частности за счет равносильностей (23) и (24).

На основании равносильности (23) (и равносильности (4)), взяв в качестве $\mathfrak{A}$ формулу B, а в качестве $\mathfrak{B}$ формулу $(A \vee C)$, можно СКНФ вышеприведенной формулы упростить до формулы

$$A \vee C.$$

Рассмотрим еще пример упрощения формулы с предварительным приведением ее к СКНФ.

$$((A \vee B) \& (B \supset C)) \vee ((B \supset A) \& (B \vee C)),$$
$$((A \vee B) \& (\overline{B} \vee C)) \vee ((\overline{B} \vee A) \& (B \vee C)),$$
$$(A \vee B \vee \overline{B} \vee A) \& (A \vee B \vee B \vee C) \& (\overline{B} \vee C \vee \overline{B} \vee A) \&$$
$$\& (\overline{B} \vee C \vee B \vee C),$$
$$(A \vee B \vee C) \& (\overline{B} \vee C \vee A),$$
$$A \vee C.$$

Упражнение. Указанным выше способом упростить следующие формулы:

1) $((A \& B) \supset (B \vee C)) \& ((B \& A) \supset (B \supset C))$,
2) $((A \vee B) \supset (A \vee C)) \& ((B \vee C) \supset (A \vee B))$.

Приведением формулы к СКНФ можно решать задачу *отыскания всех логических следствий из данных формул.* Можно указать следующий метод систематического обзора следствий данных формул в совершенной конъюнктивной нормальной форме.

Все данные формулы связываем знаком & и для возникшей таким образом формулы находим ее СКНФ. Каждый конъюнктивный член СКНФ, а также любая конъюнкция любого числа этих членов является следствием из данных формул. Затем, используя равносильность (23) и другие, можно получать более простую форму записи этих следствий. Приведем два примера.

1. Даны формулы A и $A \supset B$. Находим СКНФ конъюнкции этих формул.

$$A \& (A \supset B),$$
$$A \& (\overline{A} \vee B),$$
$$(A \vee (B \& \overline{B})) \& (\overline{A} \vee B),$$
$$(A \vee B) \& (A \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B).$$

СКНФ дает возможность обозреть все следствия данных формул в совершенной конъюнктивной нормальной форме. Эти следствия суть:

1) $A \vee B$, 3) $\overline{A} \vee B$,
2) $A \vee \overline{B}$, 4) $(A \vee B) \& (A \vee \overline{B})$,
5) $(A \vee B) \& (\overline{A} \vee B)$,
6) $(A \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$,
7) $(A \vee B) \& (A \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$.

Применяя «правило упрощения» (23) к следствию 4, получаем следствие A, которое есть одна из данных формул. В обзор всех следствий будут входить и сами данные формулы. Из следствия 5 с помощью (23) получаем следствие B; это самое интересное следствие. Из следствия 6, в силу (16), получаем $A \equiv B$. Естественно также, что следствие 7 дает следствие $A \& B$.

2. Если теорема о сложении скоростей верна и в системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, то на Земле скорость распространения света не по всем направлениям одинакова. Известно, что свет в системе неподвижных звезд распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, а опыт показал, что на Земле скорость распространения света по всем направлениям одинакова. Что отсюда следует?

Пусть переменная A соответствует высказыванию «Теорема о сложении скоростей верна», B — высказыванию «В системе неподвижных звезд свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью», C — высказыванию «На Земле свет распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью».

Тогда посылки, выражающие условия нашей задачи, можно записать следующими формулами:

$$1)\ (A \& B) \supset \overline{C};\ \ 2)\ B \text{ и } 3)\ C.$$

Находим СКНФ конъюнкции этих посылок:

$$((A \& B) \supset \overline{C}) \& B \& C,$$
$$(\overline{(A \& B)} \vee \overline{C}) \& B \& C,$$
$$(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& B \& C,$$
$$(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& (B \vee (A \& \overline{A})) \& (C \vee (A \& \overline{A})),$$
$$(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& (B \vee A) \& (B \vee \overline{A}) \& (C \vee A) \& (C \vee \overline{A}),$$
$$(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& (B \vee A \vee (C \& \overline{C})) \& (B \vee \overline{A} \vee (C \& \overline{C})) \&$$
$$\& (C \vee A \vee (B \& \overline{B})) \& (C \vee \overline{A} \vee (B \& \overline{B})),$$
$$(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& (B \vee A \vee C) \& (B \vee A \vee \overline{C}) \& (B \vee \overline{A} \vee C) \&$$
$$\& (B \vee \overline{A} \vee \overline{C}) \& (C \vee A \vee B) \& (C \vee A \vee \overline{B}) \& (C \vee \overline{A} \vee B) \&$$
$$\& (C \vee \overline{A} \vee \overline{B}),$$
$$(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& (B \vee A \vee C) \& (B \vee A \vee \overline{C}) \& (B \vee \overline{A} \vee C) \&$$
$$\& (B \vee \overline{A} \vee \overline{C}) \& (C \vee A \vee \overline{B}) \& (C \vee \overline{A} \vee \overline{B}).$$

Объединяя первый, пятый, четвертый и седьмой конъюнктивные члены СКНФ и несколько раз применяя к ним правило исключения, получаем наиболее интересное по содержанию следствие:

$$(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \& (B \vee \overline{A} \vee \overline{C}) \& (B \vee \overline{A} \vee C) \& (C \vee \overline{A} \vee \overline{B}),$$
$$(\overline{A} \vee \overline{C}) \& (\overline{A} \vee C),$$
$$\overline{A},$$

т. е. что «Теорема о сложении скоростей неверна».

Упражнение. Найти все следствия из посылок $B \vee C$, $B \supset \overline{A}$ и $B \supset C$ и из посылок $\overline{A} \supset B$, $B \supset C$ и $\overline{C} \supset A$.

§ 9. СОКРАЩЕННАЯ КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

С помощью СКНФ, как мы видели, можно получить обзор всех следствий из данных формул. Однако нас обычно не интересуют все следствия, поскольку часть из них может поглощаться другими, более сильными следствиями.[1]

Поэтому большой интерес представляет так называемая сокращенная конъюнктивная нормальная форма, которая дает возможность найти все *простые следствия* из конъюнкции данных формул. Следствие называется простым, если оно есть такая не содержащая повторений и не тождественно истинная элементарная дизъюнкция, которая, будучи логическим следствием из конъюнкции данных формул, не поглощается никаким более сильным следствием такого же вида, т. е. после отбрасывания какого-нибудь из ее членов перестает быть следствием из данных формул. Сокращенная КНФ некоторой формулы $\mathfrak{A}$ есть конъюнкция всех ее простых следствий.

Сокращенной КНФ данной формулы называется такая ее КНФ, которая обладает следующими свойствами:

а) ни в одном конъюнктивном члене ни одна переменная не повторяется;

б) нет таких пар конъюнктивных членов, что всякий дизъюнкт из одного имеется и в другом;

в) для всяких двух конъюнктивных членов, из которых один содержит некоторую переменную, а другой — ее отрицание (при условии, что другой переменной, для которой это же имеет место, в данной паре членов нет), имеется в этой же КНФ конъюнктивный член, равный дизъюнкции остальных дизъюнктов этих двух членов.

Для того чтобы получить обзор всех простых следствий из данных посылок, необходимо произвести следующие преобразования:

---

[1] Говорят, что формула $\mathfrak{A}$ сильнее формулы $\mathfrak{B}$, если тождественно истинно, что $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

1) привести конъюнкцию посылок к КНФ;

2) из всех одинаковых конъюнктивных членов оставить только один и в элементарных дизъюнкциях устранить все повторения;

3) на основании равносильностей (36) и (34) устранить все те конъюнктивные члены, которые содержат хотя бы одну переменную одновременно со знаком отрицания и без него;

4) если из двух конъюнктивных членов один содержит некоторую переменную, а другой — ее отрицание, то на основании равносильности (26) добавить к формуле новый конъюнктивный член, равный дизъюнкции остальных дизъюнктов этих двух конъюнктивных членов. Например, если два конъюнктивных члена имеют вид $A \vee C$ и $\overline{B} \vee \overline{C}$, то нужно добавить к ним новый конъюнктивный член $A \vee \overline{B}$. А на основании равносильностей (28) и (29), которые являются частными случаями равносильности (26), при наличии конъюнктивных членов вида C и $\overline{B} \vee \overline{C}$ или же вида $A \vee C$ и $\overline{C}$ мы в первом случае приписываем новый конъюнктивный член $\overline{B}$, а во втором — A;

5) если имеется возможность, применяем правило замены по равносильности (24), т. е. если, например, встречаются конъюнктивные члены вида A и $A \vee B$, то дизъюнкция $A \vee B$ вычеркивается;

6) снова, если нужно, по равносильности (8) устраняем вновь возникшие повторяющиеся конъюнктивные члены.

Формула, получившаяся в результате применения пунктов 1)—6), есть сокращенная конъюнктивная нормальная форма («силлогистический многочлен») и содержит все простые следствия данных посылок.

Приведем примеры:

1. Даны посылки $A \supset \overline{B}$, $A \vee C$ и $\overline{B \& C}$. Найти все их простые следствия:

$$(A \supset \overline{B}) \& (A \vee C) \& (\overline{B \& C}),$$

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \& (A \vee C) \& (\overline{B} \vee \overline{C}),$$

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \& (A \vee C) \& (\overline{B} \vee \overline{C}) \& (\overline{B} \vee C) \& (A \vee \overline{B}) \& \overline{B},$$

$$(A \vee C) \& \overline{B}.$$

Значит, при данных посылках формула $A \vee C$ истинна, а B ложна.

2. В совершении некоторого поступка подозревается только одно из четырех лиц: К, Л, М, Н; К утверждает, что поступок совершил Л; Л утверждает, что поступок совершил Н; М говорит, что он не совершал этого поступка, и Н тоже говорит, что он этого поступка не совершал. Кто же совершил поступок, если известно, что только одно из этих утверждений истинно?

Переведем условия задачи на язык логики высказываний. Сопоставим высказыванию «Поступок совершил К» — переменную A, высказыванию «Поступок совершил Л» — переменную B, высказыванию «Поступок совершил М» — переменную C, высказыванию «Поступок совершил Н» — переменную D.

Тогда то условие, что поступок мог совершить только один из четырех, можно записать в виде формулы, в которой говорится, что никакие два из четырех высказываний не могут быть оба истинными:

$$\overline{(A \& B)} \& \overline{(A \& C)} \& \overline{(A \& D)} \& \overline{(B \& C)} \& \overline{(B \& D)} \& \overline{(C \& D)}.$$[1]

Заявления каждого из четырех означают (последовательно): B, D, $\overline{C}$ и $\overline{D}$. Но так как истинно только одно из них, то, значит, никакие два из этих заявлений не являются одновременно истинными.

Это условие можно записать в виде формулы

$$\overline{(B \& D)} \& \overline{(B \& \overline{C})} \& \overline{(B \& \overline{D})} \& \overline{(D \& \overline{C})} \& \overline{(D \& \overline{D})} \& \overline{(\overline{C} \& \overline{D})}.$$

Берем конъюнкцию этих формул:

$$\overline{(A \& B)} \& \overline{(A \& C)} \& \overline{(A \& D)} \& \overline{(B \& C)} \& \overline{(B \& D)} \& \overline{(C \& D)} \&$$
$$\& \overline{(B \& D)} \& \overline{(B \& \overline{C})} \& \overline{(B \& \overline{D})} \& \overline{(D \& \overline{C})} \& \overline{(D \& \overline{D})} \& \overline{(\overline{C} \& \overline{D})},$$

приводим ее к КНФ и применяем правило замены по равносильности (8) и (34):

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee \overline{C}) \& (\overline{A} \vee \overline{D}) \& (\overline{B} \vee \overline{C}) \& (\overline{B} \vee \overline{D}) \& (\overline{C} \vee \overline{D}) \&$$
$$\& (\overline{B} \vee C) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{D} \vee C) \& (C \vee D).$$

Применяем «правило выявления» сначала к 5-му и 8-му конъюнктивным членам, потом к 6-му и 9-му, потом к 9-му и 10-му и, наконец, к 2-му и вновь выявленному конъюнктивному члену — 13-му. Получаем формулу

$$(\overline{A} \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee \overline{C}) \& (\overline{A} \vee \overline{D}) \& (\overline{B} \vee \overline{C}) \& (\overline{B} \vee \overline{D}) \& (\overline{C} \vee \overline{D}) \&$$
$$\& (\overline{B} \vee C) \& (\overline{B} \vee D) \& (\overline{D} \vee C) \&$$
$$\& (C \vee D) \& \overline{B} \& \overline{D} \& C \& \overline{A}.$$

Теперь, применяя несколько раз «правило поглощения», получаем выражение в сокращенной КНФ:

$$\overline{B} \& \overline{D} \& C \& \overline{A},$$

которое означает, что высказывания A, B и D ложны, а высказывание C «Поступок совершил М» истинно, что и требовалось установить.

[1] Добавление относительно того, что этот поступок не могли совершить сразу трое и сразу все четверо, т. е. что ложно, будто истинны любые три и сразу все четыре высказывания, излишне.

3. Семья, состоящая из отца, матери, сына, а также старшей и младшей дочерей, купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке: 1) когда отец смотрит передачу, мать тоже смотрит передачу; 2) дочери, обе или одна из них, смотрят передачу; 3) из двух членов семьи — мать и сын — смотрит передачу один и только один; 4) сын и старшая дочь оба смотрят или оба не смотрят передачу; 5) если младшая дочь смотрит передачу, то отец и старшая дочь делают то же. Кто из членов семьи смотрел в этот вечер передачу?

Переведем условия задачи на язык логики высказываний. Сопоставим переменной A высказывание «Отец смотрит передачу», переменной B — высказывание «Мать смотрит передачу», переменной C — высказывание «Сын смотрит передачу», переменной D — высказывание «Старшая дочь смотрит передачу», переменной E — «Младшая дочь смотрит передачу». Тогда условие 1) выражает формула $(A \supset B)$, условие 2) — формула $(D \vee E)$, условие 3) — формула $(B \not\equiv C)$, условие 4) — формула $(C \equiv D)$, условие 5) — формула

$$(E \supset (A \,\&\, D)).$$

Образуем конъюнкцию этих формул

$$(A \supset B) \,\&\, (D \vee E) \,\&\, (B \not\equiv C) \,\&\, (C \equiv D) \,\&\, (E \supset (A \,\&\, D))$$

и приводим ее к КНФ:

$$(\overline{A} \vee B) \,\&\, (D \vee E) \,\&\, (B \vee C) \,\&\, (\overline{B} \vee \overline{C}) \,\&\, (\overline{C} \vee D) \,\&\, (\overline{D} \vee C) \,\&\, \\ \&\, (\overline{E} \vee A) \,\&\, (\overline{E} \vee D).$$

Применяя «правило выявления» ко второму и последнему конъюнктам, получаем конъюнкцию

$$(\overline{A} \vee B) \,\&\, (D \vee E) \,\&\, (B \vee C) \,\&\, (\overline{B} \vee \overline{C}) \,\&\, (\overline{C} \vee D) \,\&\, (\overline{D} \vee C) \,\&\, \\ \&\, (\overline{E} \vee A) \,\&\, (\overline{E} \vee D) \,\&\, D.$$

Затем производим «поглощения» — последний конъюнктивный член D «поглощает» второй, пятый и восьмой конъюнктивные члены, а к шестому и последнему конъюнктам вновь применяем «правило выявления». Получаем формулу

$$(\overline{A} \vee B) \,\&\, (B \vee C) \,\&\, (\overline{B} \vee \overline{C}) \,\&\, (\overline{D} \vee C) \,\&\, (\overline{E} \vee A) \,\&\, D \,\&\, C.$$

Производим «поглощения» — последний конъюнктивный член «поглощает» второй и четвертый, а к последнему и третьему применяем правило «выявления». Получаем формулу

$$(\overline{A} \vee B) \,\&\, (\overline{B} \vee \overline{C}) \,\&\, (\overline{E} \vee A) \,\&\, D \,\&\, C \,\&\, \overline{B}.$$

Производим «поглощения» — последний конъюнкт «поглощает» второй, а к последнему и первому конъюнктам применяем «правило выявления». Получаем формулу

$$(\overline{A} \vee B) \& (\overline{E} \vee A) \& D \& C \& \overline{B} \& \overline{A}.$$

Производим «поглощения» — последний конъюнкт «поглощает» первый, а к последнему и второму применяем «правило выявления». Получаем формулу

$$(\overline{E} \vee A) \& D \& C \& \overline{B} \& \overline{A} \& \overline{E}.$$

Производим «поглощения» — последний конъюнкт «поглощает» первый, и мы получаем сокращенную конъюнктивную нормальную форму конъюнкции условий задачи

$$D \& C \& \overline{B} \& \overline{A} \& \overline{E}.$$

Каждый из конъюнктов есть простое следствие, и, осуществляя, согласно составленному словарю, обратный «перевод» с логического языка на русский, получаем ответ: старшая дочь смотрит передачу, сын смотрит передачу, мать не смотрит передачу, отец не смотрит передачу, младшая дочь тоже не смотрит передачу.

Упражнения.

а) Найти все простые следствия из посылок $A \vee B$, $B \vee C$, $\overline{A} \& C$ и из посылок $A \supset B$, $A \supset C$ и $\overline{B} \vee \overline{C}$.

б) Используя условия из примера 2, узнать, кто совершил поступок, если известно, что только одно из этих утверждений ложно.

§ 10. ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Наряду с КНФ существует *дизъюнктивная нормальная форма* формул логики высказываний — сокращенно ДНФ. Каждая формула логики высказываний в результате ряда равносильных замен может быть приведена к ДНФ.

Назовем *элементарной конъюнкцией* конъюнкцию переменных и их отрицаний. Например, формула

$$A \& \overline{B} \& C \& \overline{A} \& \overline{B}$$

— элементарная конъюнкция.

Элементарная конъюнкция тождественно ложна, если и только если в ней содержится по крайней мере одна пара конъюнктивных членов, из которых один есть переменная, а другой — ее отрицание.

ДНФ данной формулы будет называться формула, равносильная данной и представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций. Например, формула

$$(A \& B \& \overline{C}) \vee (B \& C) \vee (\overline{A} \& C) \vee \overline{B}$$

находится в ДНФ. Дизъюнктивный член $\overline{B}$ следует рассматривать как конъюнкцию с одним конъюнктом.

Для того чтобы любую формулу привести к ДНФ, необходимо над всеми ее подформулами произвести те же равносильные замены, которые производят для приведения формулы к КНФ, с той лишь разницей, что вместо применения в пункте 7) равносильности, говорящей о дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции, нужно применять равносильность, говорящую о дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции, т. е. подформулы вида $\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C})$ заменять, согласно (7), формулами $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \lor (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C})$.

П р и м е р. Формулу

$$(A \supset \overline{B}) \equiv (\overline{A} \lor C)$$

привести к ДНФ.

Исключаем знаки $\equiv$ и $\supset$

$$((\overline{\overline{A} \lor \overline{B}}) \lor (\overline{A} \lor C)) \,\&\, ((\overline{\overline{A} \lor C}) \lor (\overline{A} \lor \overline{B})).$$

Применяем правило де Моргана (11) и снимаем двойные отрицания

$$((A \,\&\, B) \lor \overline{A} \lor C) \,\&\, ((A \,\&\, \overline{C}) \lor \overline{A} \lor \overline{B}).$$

Применяем правило замены по равносильности (7), говорящей о дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$(A \,\&\, B \,\&\, A \,\&\, \overline{C}) \lor (A \,\&\, B \,\&\, \overline{A}) \lor (A \,\&\, B \,\&\, \overline{B}) \lor (\overline{A} \,\&\, A \,\&\, \overline{C}) \lor$$
$$\lor (\overline{A} \,\&\, \overline{A}) \lor (\overline{A} \,\&\, \overline{B}) \lor (C \,\&\, A \,\&\, \overline{C}) \lor (C \,\&\, \overline{A}) \lor (C \,\&\, \overline{B}).$$

Формула может иметь не одну ДНФ.

Формула логики высказываний в ДНФ тождественно ложна, если каждый из ее дизъюнктивных членов содержит хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

П р и м е р. Дана формула

$$\overline{(A \supset B) \supset ((A \lor C) \supset (B \lor C))}.$$

Привести ее к ДНФ:

$$\overline{\overline{(\overline{A} \lor B)} \lor ((\overline{A \lor C}) \lor (B \lor C))},$$
$$\overline{\overline{(\overline{A} \lor B)}} \,\&\, (\overline{(\overline{A \lor C}) \lor (B \lor C)}),$$
$$(\overline{A} \lor B) \,\&\, (A \lor C) \,\&\, (\overline{B} \,\&\, \overline{C}),$$
$$(\overline{A} \,\&\, A \,\&\, \overline{B} \,\&\, \overline{C}) \lor (\overline{A} \,\&\, C \,\&\, \overline{B} \,\&\, \overline{C}) \lor$$
$$\lor (B \,\&\, A \,\&\, \overline{B} \,\&\, \overline{C}) \lor (B \,\&\, C \,\&\, \overline{B} \,\&\, \overline{C}).$$

Последнее выражение есть ДНФ данной формулы. Поскольку все ее дизъюнктивные члены содержат переменную и ее отрицание, то данная формула тождественно ложна.

Каждая не являющаяся тождественно ложной формула имеет одну ДНФ, которая называется *совершенной* (сокращенно СДНФ). СДНФ некоторой формулы называется ее ДНФ, обладающая следующими свойствами:

а) в ней нет двух одинаковых дизъюнктивных членов (одинаковыми считают такие дизъюнктивные члены, которые получаются один из другого в результате замены по равносильности (2));

б) ни один дизъюнктивный член не содержит двух одинаковых конъюнктивных членов;

в) ни один дизъюнктивный член не содержит переменной одновременно со знаком отрицания и без него;

г) в каждом дизъюнктивном члене содержатся все переменные данной формулы либо со знаком отрицания, либо без этого знака.

Для того чтобы формулу представить в СДНФ, необходимо прежде привести ее к ДНФ. Далее, требование, содержащееся в пункте «а», выполняется на основании равносильности (9), а требование пункта «б» — на основании равносильности (8). Требование пункта «в» выполняется на основании равносильности (35) устранением из формулы тех дизъюнктивных членов, которые являются тождественно ложными элементарными конъюнкциями. Для осуществления требований пункта «г» нужно ко всем тем дизъюнктивным членам, в которых отсутствует какая-нибудь из содержащихся в данной формуле переменных X, приписать знак конъюнкции, вслед за ним тождественно истинную дизъюнкцию $(X \vee \overline{X})$ и применить правило замены по равносильности (7). Эту процедуру повторять до тех пор, пока не будет выполнено условие пункта «г». Если в получившейся ДНФ снова появились одинаковые дизъюнктивные члены, то устранить все повторения.

П р и м е р. Привести к СДНФ формулу

$$(A \supset B) \& (\overline{B} \supset A).$$

Вначале приведем ее к ДНФ:

$$(\overline{A} \vee B) \& (B \vee A),$$

$$(\overline{A} \& B) \vee (\overline{A} \& A) \vee (B \& B) \vee (B \& A).$$

Эту ДНФ приводим к СДНФ:

$$(\overline{A} \& B) \vee B \vee (B \& A),$$

$$(\overline{A} \& B) \vee (B \& (A \vee \overline{A})) \vee (B \& A),$$

$$(\overline{A} \& B) \vee (B \& A) \vee (B \& \overline{A}) \vee (B \& A).$$

$$(\overline{A} \& B) \vee (B \& A).$$

Отдельные дизъюнктивные члены СДНФ выражают различные возможности, при наличии которых данная формула является истинной.

Аналогично сокращенной КНФ строится и сокращенная ДНФ, которая содержит все простые гипотезы данной формулы.

Гипотезой формулы $\mathfrak{B}$ называется такая формула $\mathfrak{A}$, что формула

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$$

тождественно истинна. Если $\mathfrak{A}$ — гипотеза формулы $\mathfrak{B}$, то

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C}$$

тоже гипотеза формулы $\mathfrak{B}$; если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — гипотезы формулы $\mathfrak{A}$, то

$$\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$$

тоже является гипотезой $\mathfrak{A}$.

Гипотеза формулы $\mathfrak{A}$ называется простой, если она есть такая не содержащая повторений и не тождественно ложная элементарная конъюнкция, которая не «поглощается» никакой более слабой гипотезой формулы $\mathfrak{A}$ того же вида. Сокращенная ДНФ данной формулы есть дизъюнкция всех ее простых гипотез.

Сокращенной ДНФ данной формулы называется такая ее ДНФ, которая обладает следующими свойствами:

а) ни в одном дизъюнктивном члене ни одна переменная не повторяется;

б) нет таких пар дизъюнктивных членов, что всякий конъюнкт из одного имеется и в другом;

в) для всяких двух дизъюнктивных членов, из которых один содержит некоторую переменную, а другой — ее отрицание (при условии, что другой переменной, для которой это же имеет место, в данной паре членов нет), имеется в этой же ДНФ дизъюнктивный член, равный конъюнкции остальных конъюнктов этих двух членов.

Для того чтобы получить обзор всех простых гипотез (самых слабых гипотез) некоторой формулы, необходимо произвести следующие операции:

1) привести формулу к ДНФ;

2) на основании равносильностей (9) и (8) из всех одинаковых дизъюнктивных членов оставить только один и в элементарных конъюнкциях тоже устранить все повторения;

3) на основании равносильностей (35) и (37) вычеркнуть те дизъюнктивные члены, которые содержат хотя бы одну переменную одновременно со знаком отрицания и без него;

4) если из двух дизъюнктивных членов один содержит некоторую переменную, а другой ее отрицание, то на основании равносильности (27) добавить к ним новый дизъюнктивный член, равный конъюнкции остальных конъюнктов обоих этих дизъюнктивных членов.

5) применить, если имеется возможность, равносильность

(25), т. е. если встречаются, например, дизъюнктивные члены вида A и $A \& B$, то конъюнкция $A \& B$ вычеркивается;

6) снова, если можно, применить равносильность (9), и из всех повторяющихся дизъюнктивных членов оставить только один.

Формула, получившаяся в результате применения равносильных замен из пунктов 1—6, есть сокращенная ДНФ и содержит все свои простые гипотезы.

Приведением формулы к сокращенной ДНФ мы устанавливаем, какие именно гипотезы должны быть истинными, чтобы данная формула была истинной, каковы те самые слабые допущения, минимальные предположения, которые нужно сделать, чтобы данная формула оказалась их следствием.

Пример. Какие простые гипотезы должны быть истинными, чтобы была истинна формула

$$((A \& B) \vee C) \supset C.$$

Приводим формулу к ДНФ:

$$\overline{((A \& B) \vee C)} \vee C,$$
$$(\overline{(A \& B)} \& \overline{C}) \vee C,$$
$$((\overline{A} \vee \overline{B}) \& \overline{C}) \vee C,$$
$$(\overline{A} \& \overline{C}) \vee (\overline{B} \& \overline{C}) \vee C.$$

Теперь эту ДНФ приводим к сокращенной ДНФ:

$$(\overline{A} \& \overline{C}) \vee (\overline{B} \& \overline{C}) \vee C \vee \overline{A} \vee \overline{B},$$
$$C \vee \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Последняя формула есть сокращенная ДНФ данной формулы и содержит все ее простые гипотезы. Данная формула, таким образом, истинна, или если истинна формула C, или если ложна формула A (истинна $\overline{A}$), или, наконец, если ложна формула B (истинна $\overline{B}$).[1]

Упражнения.

1. Привести к ДНФ формулу

$$((A \not\equiv B) \supset (\overline{B} \& C)) \equiv \overline{C}.$$

---

[1] Частным случаем задачи нахождения простой гипотезы является традиционная задача восстановления энтимемы, т. е. нахождения той недостающей посылки, при допущении которой одно суждение могло бы следовать из других. Для того чтобы найти недостающую посылку, нужно привести к сокращенной ДНФ импликацию, антецедентом которой является известная нам посылка, а консеквентом заключение. Например, если из посылки $A \supset B$ получено заключение B, то, приведя к сокращенной ДНФ формулу $(A \supset B) \supset B$ и получив в результате формулу $B \vee A$, мы узнаем, что B может следовать из посылки $A \supset B$, или если допустить B (тривиальный случай), или если допустить A.

2. Привести к СДНФ формулу

$$((A \supset B) \not\equiv (C \equiv D)) \supset (\overline{A} \& D).$$

3. С помощью сокращенной ДНФ найти все простые гипотезы формул

$$(A \not\equiv B) \vee (A \& B)$$

и

$$((A \& \overline{B}) \supset C) \supset (C \vee B).$$

§ 11. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

При аксиоматическом построении логики высказываний в качестве аксиом выбирают такие тождественно истинные формулы, из которых по определенным правилам можно получить все остальные тождественно истинные формулы логики высказываний. Аксиоматическая система, соответствующая логике высказываний, называется исчислением высказывании. Аксиоматический подход дает возможность развивать логическую систему формально, не обращаясь ни к какой содержательной интерпретации, а только оперируя по определенным правилам со знаками логических формул. При таком подходе содержательное понятие о тождественно истинной формуле заменяется понятием о формуле, выводимой в исчислении. Мы ничего теперь уже не обосновываем семантически, не апеллируем больше к смыслу логических связок.

Аксиоматически построенная теория предполагает *точное описание* всех употребляемых символов, *правил образования* формул, а также *правил преобразования,* применение которых к аксиомам и выводимым из них формулам дает возможность получать новые выводимые формулы. В рамках данного учебного пособия придется ограничиться лишь кратким описанием принципов построения исчисления высказываний.

В качестве аксиом можно выбрать, например, следующую систему формул логического языка:

1. $A \supset (B \supset A)$.
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.
3. $(A \& B) \supset A$.
4. $(A \& B) \supset B$.
5. $A \supset (B \supset (A \& B))$.
6. $A \supset (A \vee B)$.
7. $B \supset (A \vee B)$.
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$.
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \overline{B}) \supset \overline{A})$.
10. $(\overline{B} \supset \overline{A}) \supset (A \supset B)$.

Тождественная истинность каждой из этих аксиом может быть продемонстрирована построением соответствующих таблиц истинности.

Затем нужно сформулировать правила вывода, которые позволяли бы из одних формул получать другие, в частности от одних тождественно истинных формул переходить к другим тождественно истинным формулам.

Правило первое:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\end{array}}{\mathfrak{B}}. \qquad \text{(Пр. I)}$$

Смысл этой схемы в том, что формула, написанная под чертой, может быть получена из формул, написанных над чертой. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ — истинные формулы, то $\mathfrak{B}$ — также истинная формула. Это правило вывода есть обобщенный modus ponens условно-категорического силлогизма.

Правило второе:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\left|\begin{array}{l}X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{B}_n\end{array}\right|}, \qquad \text{(Пр. II)}$$

где X_1, X_2, ..., X_n — это любые различные переменные, а $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ..., $\mathfrak{B}_n$ — любые (не обязательно различные) формулы.

Смысл этой схемы вывода в следующем: формула, написанная под чертой, получается из формулы $\mathfrak{A}$ в результате одновременной замены переменной X_1 всюду, где она входит в формулу $\mathfrak{A}$, формулой $\mathfrak{B}_1$, переменной X_2 всюду, где она входит в формулу $\mathfrak{A}$, формулой $\mathfrak{B}_2$ и т. д.; наконец, переменной X_n всюду, где она входит в формулу $\mathfrak{A}$, формулой $\mathfrak{B}_n$. Формула, написанная под чертой, называется результатом подстановки в формулу, написанную над чертой, а правило называется *правилом подстановки*. Если $\mathfrak{A}$ тождественно истинная формула, то и результат подстановки — тождественно истинная формула.

Список формул $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..., $\mathfrak{A}_n$ называется *выводом в исчислении высказываний*, если выполнено следующее условие: каждая формула $\mathfrak{A}_i$ этого списка ($i \leqslant n$) или является логической аксиомой, или получена из формул $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$, расположенных раньше в этом списке ($p, q<i$) по (Пр. I), или, наконец, получена из формулы $\mathfrak{A}_j$, расположенной ранее в этом списке ($j<i$) по (Пр. II).

Формула $\mathfrak{A}$ называется *выводимой формулой*, если можно построить вывод в исчислении, последняя формула которого $\mathfrak{A}$. Тот факт, что формула $\mathfrak{A}$ выводима в исчислении, мы будем отмечать знаком $\vdash$. Аксиомы рассматриваются как исходные выводимые формулы исчисления высказываний. Так как всякая выводимая формула «по наследству» тождественно истинна, то, получая новые выводимые формулы, мы получаем только тождественно истинные формулы логики высказываний.

Рассмотрим, например, процесс построения вывода следующей формулы.

Теорема 1. $\vdash A \supset A$. Она читается: «Выводима формула $A \supset A$». Доказательство этой теоремы будет состоять в фактическом построении вывода в исчислении.

Доказательство. Берем аксиому 1

$$A \supset (B \supset A) \tag{а}$$

и применяем к ней (Пр. II), подставляя вместо переменной B формулу $A \supset A$. Получаем формулу

$$A \supset ((A \supset A) \supset A). \tag{б}$$

Берем аксиому 2

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) \tag{в}$$

и применяем (Пр. II), подставляя вместо переменной B формулу $A \supset A$, а вместо переменной C — формулу (переменную) A. Получаем формулу

$$(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)). \tag{г}$$

К формулам (б) и (г) применяем (Пр. I), где в качестве $\mathfrak{A}$ взята формула (б), а в качестве $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ — формула (г), и получаем формулу

$$(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A). \tag{д}$$

Снова используем аксиому 1 и вместо переменной B подставляем формулу A. Получаем формулу

$$A \supset (A \supset A). \tag{е}$$

К формулам (е) и (д) применяем (Пр. I), где роль $\mathfrak{A}$ играет (е), а роль $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ — формула (д), и получаем формулу

$$A \supset A. \tag{ж}$$

Список формул (а), (б), (в), (г), (д), (е) и (ж) является выводом в исчислении, а формула (ж) — выводимой формулой. Таким образом, в исчислении высказываний $\vdash A \supset A$, что и требовалось доказать.

Формула $A \supset A$ выражает так называемый «закон тождества».

Определим понятие *вывода из данных формул,* или, иначе, *вывода из посылок.*

Пусть $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$ — любые формулы. Список формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ называется выводом из данных формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, если формула $\mathfrak{A}_i$ (где $i \leqslant k$) или является аксиомой, или одной из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, или получается из двух формул $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$ (где p и $q < i$) по (Пр. I), или, наконец, получается из формулы $\mathfrak{A}_j$ (где $j < i$) по (Пр. II) при условии, что список $\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_f}$ ($f \leqslant j$), полученный из $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_j$ вычеркиванием всех вхождений данных формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, есть вывод формулы $\mathfrak{A}_j$.[1]

[1] Иначе говоря, подстановки нельзя производить ни в посылках, ни в формулах, зависящих от них.

Формула $\mathfrak{A}$ называется *выводимой из данных формул (из посылок)* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, если существует вывод из данных формул, последняя формула которого совпадает с $\mathfrak{A}$. То обстоятельство, что формула $\mathfrak{A}$ выводима из формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, обозначается $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l \vdash \mathfrak{A}$.

Если посылки истинны, то истинна и выводимая формула.

Обосновав выводимость одной формулы из других, мы получаем возможность обосновать производные правила вывода.

Рассмотрим процесс обоснования нового правила вывода на следующем примере.

Теорема 2. $A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C$. Она читается: «Из формул $A \supset B$ и $B \supset C$ выводима формула $A \supset C$».

Доказательство этой теоремы состоит в фактическом построении вывода из двух данных формул.

Доказательство. В аксиому 1

$$A \supset (B \supset A) \qquad \text{(а)}$$

вместо A подставляем формулу $B \supset C$, а вместо B — формулу A и получаем формулу

$$(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)). \qquad \text{(б)}$$

Берем посылку

$$B \supset C. \qquad \text{(в)}$$

К (в) и (б) применяем правило вывода (Пр. I) и получаем формулу

$$A \supset (B \supset C). \qquad \text{(г)}$$

Берем аксиому 2

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) \qquad \text{(д)}$$

и, применив к формулам (г) и (д) (Пр. I), получаем формулу

$$(A \supset B) \supset (A \supset C). \qquad \text{(е)}$$

Наконец, берем посылку

$$A \supset B. \qquad \text{(ж)}$$

К формулам (ж) и (е) применяем (Пр. I) и получаем формулу

$$A \supset C. \qquad \text{(з)}$$

Список формул (а), (б), (в), (г), (д), (е), (ж) и (з) есть вывод из посылок $A \supset B$ и $B \supset C$, а $A \supset C$ — формула, выводимая из посылок $A \supset B$ и $B \supset C$. Итак, теорема доказана.

Эта теорема обосновывает некоторое правило вывода. Имея в виду бесконечное множество всех частных случаев подстановки по (Пр. II) вместо переменной X_i любой формулы $\mathfrak{B}_i$, мы осуществляем обобщенную подстановку заменяя в формулах $A \supset B$, $B \supset C$ и $A \supset C$ переменные A, B и C любыми формулами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, и получаем новое правило вывода

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}\end{array}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}, \qquad \text{(Пр. III)}$$

которым можно пользоваться при построении вывода так же, как исходным правилом вывода.

Теорема 3. $\vdash (A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$.

Доказательство. Берем аксиому 1

$$A \supset (B \supset A) \tag{а}$$

и вместо A подставляем $A \supset B$, а вместо B формулу C, получаем

$$(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B)). \tag{б}$$

Берем аксиому 2

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) \tag{в}$$

и вместо переменной A подставляем формулу C, вместо C формулу B, а вместо B формулу A, получаем

$$(C \supset (A \supset B)) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B)). \tag{г}$$

Из формул (б) и (г) с помощью только что обоснованного производного правила (Пр. III) получаем

$$(A \supset B) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B)), \tag{д}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. $\vdash \overline{A} \supset (A \supset B)$.

Доказательство. Берем аксиому 1

$$A \supset (B \supset A) \tag{а}$$

и вместо переменной A подставляем формулу $\overline{A}$, а вместо переменной B — формулу $\overline{B}$. Получаем формулу

$$\overline{A} \supset (\overline{B} \supset \overline{A}). \tag{б}$$

Берем аксиому 10

$$(\overline{B} \supset \overline{A}) \supset (A \supset B). \tag{в}$$

Из формул (б) и (в) по (Пр. III) получаем формулу

$$\overline{A} \supset (A \supset B), \tag{г}$$

что и требовалось доказать.

В список формул, образующий вывод в исчислении или вывод из данных формул, наряду с аксиомами и данными формулами можно включать выводимые формулы исчисления высказываний, выводимость которых доказана независимо от данного вывода. Включение в вывод независимо доказанной формулы не противоречит определению вывода, так как такая формула всегда может быть заменена списком формул, образующих ее вывод из аксиом.

Теорема 5. $\vdash (A \supset B) \supset ((A \vee B) \supset B)$.

Берем аксиому 8

$$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)). \qquad (а)$$

Применяем (Пр. II)

$$(A \supset B) \supset ((B \supset B) \supset ((A \vee B) \supset B)). \qquad (б)$$

Берем аксиому 2

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)). \qquad (в)$$

Применяем (Пр. II)

$$((A \supset B) \supset ((B \supset B) \supset ((A \vee B) \supset B)) \supset (((A \supset B) \supset$$
$$\supset (B \supset B)) \supset ((A \supset B) \supset ((A \vee B) \supset B))). \qquad (г)$$

Из формул (б) и (г) по (Пр. I) получаем

$$((A \supset B) \supset (B \supset B)) \supset ((A \supset B) \supset ((A \vee B) \supset B)). \qquad (д)$$

Берем теорему 1

$$A \supset A. \qquad (е)$$

Применяем (Пр. II) и получаем

$$B \supset B. \qquad (ж)$$

Берем аксиому 1

$$A \supset (B \supset A). \qquad (з)$$

Применяем (Пр. II) и получаем

$$(B \supset B) \supset ((A \supset B) \supset (B \supset B)). \qquad (и)$$

Из формул (ж) и (и) по (Пр. I) получаем

$$(A \supset B) \supset (B \supset B). \qquad (к)$$

Из формул (к) и (д) по (Пр. I) получаем

$$(A \supset B) \supset ((A \vee B) \supset B), \qquad (л)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. $A, \bar{A} \vdash B$. Эта теорема иногда читается: «Из противоречия выводима любая формула».

Доказательство. Берем теорему 4

$$\bar{A} \supset (A \supset B). \qquad (а)$$

Берем посылку

$$\bar{A}. \qquad (б)$$

Из формул (б) и (а) по (Пр. I) получаем

$$A \supset B. \qquad (в)$$

Берем посылку

$$A. \qquad (г)$$

Из (г) и (в) по (Пр. I) получаем

$$B, \qquad (д)$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы в результате обобщенной подстановки вместо переменных A и B формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ получаем правило вывода

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \overline{\mathfrak{A}}\end{array}}{\mathfrak{B}} \qquad \text{(Пр. IV)}$$

В связи с представлением логики в виде формализованной аксиоматической системы (исчисления) возникает вопрос об адекватности этой системы содержательно (например, с помощью таблиц истинности) построенной логике высказываний.

Могло бы случиться, что не все формулы, выводимые в некотором исчислении из аксиом, являются тождественно истинными и не всякое производное правило вывода из посылок является схемой, обеспечивающей получение заключений, которые были бы логическими следствиями посылок. Это означало бы неадекватность нашего исчисления содержательно определенной логике, означало бы, что в исчислении имеются ошибочные средства вывода.

Доказательство теоремы о том, что всякая выводимая в исчислении высказываний формула является тождественно истинной, называется доказательством **корректности** исчисления высказываний. Действительно, все аксиомы исчисления — это тождественно истинные формулы, а оба правила вывода позволяют переходить от истинных формул снова к истинным, и значит, от тождественно истинных формул к тождественно истинным. Поэтому всякая выводимая в исчислении формула тождественно истинна.

Из этой теоремы прямо следует **непротиворечивость** исчисления высказываний. Исчисление непротиворечиво, если в нем невозможно одновременно с формулой $\mathfrak{A}$ вывести формулу $\overline{\mathfrak{A}}$. Выводимость в исчислении двух противоречащих друг другу формул обесценила бы все исчисление, ибо, согласно (Пр. IV), если в исчислении выводимы формулы $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}}$, то в нем выводима любая формула $\mathfrak{B}$, и теряется различие между истиной и ложью. Ясно, что такая система не может служить средством познания. Непротиворечивость означает, таким образом, что не всякая формула выводима, что существует невыводимая формула.

В силу свойства корректности, если в исчислении выводима формула $\mathfrak{A}$, то она тождественно истинна, а значит, $\overline{\mathfrak{A}}$ тождественно ложна и поэтому невыводима в исчислении. Все не тождественно истинные формулы не выводимы в исчислении, а значит, существуют невыводимые формулы, и исчисление непротиворечиво.

Другим вопросом, возникающим относительно логического исчисления, является вопрос о том, сколько логических истин содержится в исчислении; всякая ли тождественно истинная формула логики высказываний выводима в исчислении.

Доказательство теоремы в том, что всякая тождественно истинная формула выводима в исчислении, называется доказательством семантической п о л н о т ы исчисления. Относительно приведенной выше системы аксиом исчисления высказываний можно доказать, что она полна в этом смысле слова.

Доказательство корректности и полноты исчисления высказываний свидетельствует, что содержательная логика высказываний адекватна исчислению высказываний, так как понятие выводимой формулы совпадает по объему с понятием тождественно истинной формулы, а понятие вывода из посылок — с понятием логического следования, определенного с помощью таблиц истинности.

§ 12. НАТУРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Кроме табличного и аксиоматического построения, возможно построение логики высказываний в форме так называемого натурального исчисления.

В натуральном исчислении отсутствуют аксиомы, а имеются только правила вывода. Вывод осуществляется в форме вывода из допущений.

Натуральным это исчисление называют потому, что вывод в нем строится способом, близким к тому, которым мы обычно пользуемся в неформальных доказательствах.

Правила вывода делятся на две группы: а) правила введения логических знаков и б) правила их удаления. Правила введения и удаления логических знаков можно рассматривать как определения этих знаков.

Вывод в натуральном исчислении строится как упорядоченная последовательность формул, каждая из которых либо допущение, либо получена из предшествующих формул этой последовательности по какому-нибудь из правил вывода.

Любая формула $\mathfrak{A}$ может быть введена в качестве допущения на любом шаге построения вывода.

	Правила введения	Правила удаления
&:	$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$	$\dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$
$\supset$:	$\begin{array}{c}[\mathfrak{A}] \\ \vdots \\ \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\end{array}$	$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$

$$\vee:\quad \dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\qquad \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\qquad\qquad\qquad \dfrac{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\quad \begin{array}{c}[\mathfrak{A}]\\ \vdots\\ \mathfrak{C}\end{array}\qquad \begin{array}{c}[\mathfrak{B}]\\ \vdots\\ \mathfrak{C}\end{array}}{\mathfrak{C}}$$

$$-:\quad \dfrac{\begin{array}{c}[\mathfrak{A}]\\ \vdots\\ \mathfrak{B}\end{array}\quad \begin{array}{c}[\mathfrak{A}]\\ \vdots\\ \overline{\mathfrak{B}}\end{array}}{\overline{\mathfrak{A}}}\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\overline{\overline{\mathfrak{A}}}}{\mathfrak{A}}$$

Выражение вида

$$\begin{array}{c}[\mathfrak{A}]\\ \vdots\\ \mathfrak{B}\end{array}$$

применяется для обозначения построенного по правилам данного исчисления вывода формулы $\mathfrak{B}$, содержащего в качестве одного из допущений формулу $\mathfrak{A}$. Многоточие обозначает эту зависимость $\mathfrak{B}$ от $\mathfrak{A}$. Правила вывода, содержащие выражения такого вида, служат для «отбрасывания» допущений. Формула $\mathfrak{A}$ в правиле введения знака $\supset$ (сокр. $\supset_{\text{в}}$) и правиле введения знака — (сокр. $-_{\text{в}}$) и две формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в правиле удаления знака $\vee$ (сокр. $\vee_{\text{у}}$) в результате применения этих правил «отбрасываются». Формула, написанная под чертой такого правила, уже не зависит от формулы, заключенной в квадратные скобки. Применяя эти правила, мы избавляемся от ранее введенных в вывод допущений.

Вывод в натуральном исчислении удобно строить в форме «дерева».

Например:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{+3}{A\vee B}\qquad \dfrac{\overset{+1}{A}}{B\vee A}\,\vee_{\text{в}_2}\qquad \dfrac{\overset{+2}{B}}{B\vee A}\,\vee_{\text{в}_1}}{B\vee A}\,\vee_{\text{у}},\ -1,\ -2}{(A\vee B)\supset(B\vee A)}\,\supset_{\text{в}},\ -3.$$

Построение данного вывода начинается с двух допущений A и B. Тот факт, что A и B введены как допущения, отмечается $+1$ и $+2$. Из первого допущения A по второму правилу $\vee$-введения ($\vee_{\text{в}_2}$) выводится $B\vee A$ и из второго допущения B по первому правилу $\vee$-введения ($\vee_{\text{в}_1}$) выводится $B\vee A$.

Вводим третье допущение $A\vee B$ и отмечаем его $+3$. Затем, применяя правило $\vee$ -удаления ($\vee_{\text{у}}$), получаем $B\vee A$. При этом, согласно правилу $\vee$-удаления, освобождаемся от допущений 1 и 2, что и отмечается как -1 и -2. Наконец, по правилу $\supset$-введения получаем формулу $(A \vee B) \supset (B \vee A)$; при этом освобождаемся от третьего допущения $A \vee B$, что отмечается как -3.

Вывод называется *совершенным*, если в нем отброшены все допущения. Приведенный выше вывод является совершенным, так как все три введенные в него допущения отброшены применением правил удаления дизъюнкции и введения импликации.

Формула $\mathfrak{A}$ называется *выводимой в натуральном исчислении*, если она есть формула под последней чертой совершенного вывода, что отмечается $\vdash \mathfrak{A}$. Выводимая в исчислении формула уже не зависит ни от каких допущений.

Если вывод не является совершенным, то формула $\mathfrak{A}$ зависит от всех неотброшенных допущений $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n > 0)$, что отмечается: $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n \vdash \mathfrak{A}$.

Теорема I. $\vdash \overline{A \& \overline{A}}$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{A \& \overline{A}}}{A}\,\&_{\text{у}_1} \qquad \dfrac{\overset{+1}{A \& \overline{A}}}{\overline{A}}\,\&_{\text{у}_2}}{\overline{A \& \overline{A}}}\ -_{\text{в}},\ -1.$$

Теорема II. $\vdash A \supset (B \supset (A \& B))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{A} \qquad \overset{+2}{B}}{A \& B}\,\&_{\text{в}}}{B \supset (A \& B)}\,\supset_{\text{в}},\ -2}{A \supset (B \supset (A \& B))}\,\supset_{\text{в}},\ -1.$$

Теорема III. $\vdash (A \supset B) \supset ((A \supset \overline{B}) \supset \overline{A})$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{A} \quad \overset{+2}{A \supset B}}{B}\,\supset_{\text{у}} \qquad \dfrac{\overset{+1}{A} \quad \overset{+3}{A \supset \overline{B}}}{\overline{B}}\,\supset_{\text{у}}}{\overline{A}}\ -_{\text{в}},\ -1}{(A \supset \overline{B}) \supset \overline{A}}\,\supset_{\text{в}},\ -3}{(A \supset B) \supset ((A \supset \overline{B}) \supset \overline{A})}\,\supset_{\text{в}},\ -2.$$

Теорема IV. $\vdash (A \supset B) \supset ((C \supset D) \supset ((A \vee C) \supset (B \vee D)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+5}{A \vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{+1}{A \supset B} \quad \overset{+2}{A}}{B}\,\supset_{\text{у}}}{B \vee D}\,\vee_{\text{в}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{+3}{C \supset D} \quad \overset{+4}{C}}{D}\,\supset_{\text{у}}}{B \vee D}\,\vee_{\text{в}_2}}{B \vee D}\,\vee_{\text{у}},\ -2,\ -4}{(A \vee C) \supset (B \vee D)}\,\supset_{\text{в}},\ -5}{(C \supset D) \supset ((A \vee C) \supset (B \vee D))}\,\supset_{\text{в}},\ -3}{(A \supset B) \supset ((C \supset D) \supset ((A \vee C) \supset (B \vee D)))}\,\supset_{\text{в}},\ -1.$$

Теорема V. $A \supset B,\ A \supset C \vdash A \supset (B \& C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{A} \quad \overset{+2}{A \supset B}}{B}\supset_{у} \qquad \dfrac{\overset{+1}{A} \quad \overset{+3}{A \supset C}}{C}\supset_{у}}{B \& C}\&_{в}.}{A \supset (B \& C)}\supset_{в},\ -1$$

Теорема VI. $A \supset B \vdash (A \& C) \supset (B \& C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+2}{A \supset B} \quad \dfrac{\overset{+1}{A \& C}}{A}\&_{у}}{B}\supset_{у} \qquad \dfrac{\overset{+1}{A \& C}}{C}\&_{у}}{B \& C}\&_{в}.}{(A \& C) \supset (B \& C)}\supset_{в},\ -1$$

Натуральное исчисление высказываний равнообъемно аксиоматическому. Два исчисления равнообъемны, если они определяют один и тот же класс выводимых формул. Для доказательства равнообъемности нужно средствами натурального исчисления вывести все аксиомы и правила вывода аксиоматического, а средствами аксиоматического обосновать все правила натурального как некоторые производные правила вывода.

Упражнения.

1. Доказать, что 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10 аксиомы из § 10 выводимы в натуральном исчислении.
2. Доказать выводимость следующих формул:

1) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.
2) $\bar{A} \supset (A \supset B)$,
3) $(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$,
4) $(A \vee (B \& C)) \supset ((A \vee B) \& (A \vee C))$.

Приложение. О ЛОГИКЕ ПРЕДИКАТОВ

Мы видели, что в логике высказываний ограничиваются рассмотрением связей между высказываниями и не проникают во внутреннее строение элементарных высказываний. Средствами логики высказываний нельзя поэтому описать умозаключений, в которых существенную роль играет субъектно-предикатная структура элементарных высказываний. Логика предикатов [1] является таким развитием логики высказываний, которое, сохраняя все содержание последней, идет дальше, проникая в более глубокие логические связи.

---

[1] Термин «предикат» имеет здесь более широкий смысл, чем в традиционной логике.

Предикаты бывают: одноместные, двухместные, трехместные и т. д.; двух- и более местные предикаты называют многоместными.

Одноместными предикатами являются, например, понятия «человек», «белый», «четное число», «треугольник» и т. п. Одноместными их называют потому, что содержание каждого из них характеризует *отдельный* предмет. Совокупность (множество) отдельных предметов (объектов), обладающих свойствами, мыслимыми в содержании одноместного предиката, образует соответствующий этому предикату класс предметов.

Предикату «человек» можно сопоставить неполное высказывание «...есть человек» или «x есть человек», предикату «четное число» — неполное высказывание «...является четным числом» или «x является четным числом». Неполное высказывание такого рода называют *высказывательной формой*. Любому одноместному предикату P можно сопоставить высказывательную форму «...есть P» или «x есть P», в которой многоточие или x — это предметная переменная, т. е. такая «пустая ячейка», которую можно замещать названиями или описаниями отдельных предметов (объектов).

Если в первой высказывательной форме заместить x обозначением единичного объекта «Сократ», то неопределенное высказывание превратится в истинное элементарное высказывание «Сократ есть человек». Если же вместо x во вторую высказывательную форму подставить «13», то возникшее в результате такой подстановки элементарное высказывание ложно.

Высказывательная форма «x есть P» при одних замещениях предметной переменной получает логическое значение «истина», при других — «ложь». Высказывательная форма, соответствующая одноместному предикату, как бы выделяет из множества всех предметов те, для которых она принимает логическое значение «истина».

Двухместными предикатами являются, например, понятия «старше», «причина» и т. п. Содержание каждого из них отражает уже не свойство одного какого-нибудь объекта, а некоторое отношение между двумя объектами, например: «Сократ старше Платона», «$2<3$». Пары предметов, которые действительно обладают отношениями «старше», «$<$», образуют классы упорядоченных пар объектов.

Двухместному предикату «старше» можно сопоставить высказывательную форму «x старше y», предикату «$<$» — «$x<y$».

Эти высказывательные формы принимают логические значения «истина» или «ложь» в зависимости от того, какое конкретное предметное значение будут принимать x и y. Если в первом примере вместо x и y подставить термины «Маяковский» и «Есенин», то возникнет истинное высказывание «Маяковский старше Есенина». А если во втором примере x и y заместить терминами «13» и «7», то возникшее высказывание окажется ложным. Если же x и y соответственно в первом случае придать значения «Есенин» и «Маяковский» (т. е. в обратном порядке), а во втором «7» и «13», то ложным окажется первое высказывание, а истинным — второе.

При замещении лишь одной из предметных переменных двухместная высказывательная форма превращается в одноместную. Например, «x старше Есенина», «$3<y$» Это уже одноместные высказывательные формы.

Существуют трехместные, четырехместные и т. д. предикаты и трехместные, четырехместные и т. д. высказывательные формы Например, подстановка вместо x, y и z единичных терминов «Бологое», «Ленинград» и «Москва» в высказывательную форму «x находится между y и z», соответствующую предикату «находиться между», и подстановка вместо x, y и z соответственно терминов «1», «2» и «3» в высказывательную форму «z является суммой двух чисел x и y» дают истинные элементарные высказывания.

Введем теперь следующие обозначения: $s_1, s_2, s_3, \ldots$ — так называемые *предметные постоянные*; эти буквы являются собственными именами, обозначениями единичных объектов; $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ — так называемые *предметные переменные*; $P_1^1, P_2^1, P_3^1, \ldots$ — знаки конкретных одноместных предикатов (верхний индекс — показатель «местности» предиката, а нижний — его индивидуальный номер); $P_1^2, P_2^2, P_3^2, \ldots$ — знаки конкретных двухместных предикатов; $P_1^3, P_2^3, P_3^3, \ldots$ — знаки конкретных трехместных предикатов и т. д.

Предметные постоянные и предметные переменные называют *термами*. Термы обозначаются буквами $t_1, t_2, t_3, \ldots$

Определение элементарной формулы логики редикатов: если P_i^n — какой-то n-местный предикат, а t_1, t_2, $t_3, \ldots, t_n$ некоторые (не обязательно различные) термы, то выражение $P_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ есть *элементарная формула*.

Если в элементарной формуле все термы суть предметные постоянные, то она — выражение элементарного высказывания; если же хотя бы один из термов — предметная переменная, то элементарная формула выражает высказывательную форму.

Элементарные формулы

$$P_k^1(s_i), \quad P_l^2(s_i, s_j), \quad P_n^3(s_i, s_j, s_m)$$

являются записью каких-то элементарных высказываний, а элементарные формулы

$$P_k^1(x), \quad P_l^2(x_i, x_j), \quad P_k^2(s_i, x_j)$$

являются записью каких-то высказывательных форм.

Если в элементарную формулу, выражающую высказывательную форму, вместо всех предметных переменных подставить предметные постоянные, то элементарная формула в результате такой подстановки превращается в запись некоторого истинного или ложного элементарного высказывания.

Элементарные формулы логики предикатов можно соединять логическими союзами &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ и $\not\equiv$, их можно также отрицать с помощью знака отрицания —. В логике предикатов кроме логических союзов логики высказываний рассматриваются еще две логические постоянные: квантор общности $\forall$ и квантор существования $\exists$.

Если дана, например, элементарная формула $P_i^1(x)$, то выражение

$$\forall x P_i^1(x)$$

истинно тогда и только тогда, когда элементарная формула $P_i^1(x)$ при всех подстановках вместо переменной x предметных постоянных s_1, s_2, s_3, ... принимает логическое значение «истина». Иначе говоря, выражение $\forall x P_i^1(x)$ есть истинное высказывание, если и только если высказывательная форма $P_i^1(x)$ в результате подстановки вместо x всех без исключения предметных постоянных каждый раз будет давать истинное элементарное высказывание $P_i^1(s_j)$. Выражение $\forall x P_i^1(x)$ ложно, если и только если имеется хотя бы один объект s_n, для которого элементарная формула $P_i^1(s_n)$ ложна; выражение $\forall x P_i^1(x)$ читается: «для всякого $x P_i^1(x)$», «для всякого x имеет место P_i^1 от x», «все x суть P_i^1» и т. п.

Выражение

$$\exists x P_i^1(x)$$

истинно тогда и только тогда, когда элементарная формула $P_i^1(x)$ принимает логическое значение «истина» хотя бы при одной подстановке вместо переменной x предметной постоянной, т. е. выражение $\exists x P_i^1(x)$ есть истинное высказывание, если и только если существует хотя бы один такой объект s_n, который в результате подстановки вместо x в $P_i^1(x)$ даст истинное элементарное высказывание $P_i^1(s_n)$. Выражение $\exists x P_i^1(x)$ читается «существует x такое, что $P_i^1(x)$», «существует x такое, что имеет место P_i^1 от x» или даже «некоторые x суть P_i^1».

Определение формулы логики предикатов:

1) элементарная формула есть формула;

2) если $\mathfrak{A}$ формула, то $\overline{\mathfrak{A}}$ тоже формула;

3) если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ формулы, то выражения $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B})$ являются формулами;

4) если $\mathfrak{A}$ формула и α переменная, то выражения $\forall\alpha\mathfrak{A}$ и $\exists\alpha\mathfrak{A}$ являются формулами.

Вхождение некоторой предметной переменной α в формулу $\mathfrak{A}$ называется *связанным*, если оно есть вхождение в такую подформулу формулы $\mathfrak{A}$, которая имеет вид $\forall \alpha \mathfrak{B}$ или $\exists \alpha \mathfrak{B}$, в противном случае оно называется *свободным*. Таким образом, переменная α может иметь в формуле одновременно свободные и связанные вхождения.

Например, в формуле

$$\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2) \& \exists x_2 (P_2^2(x_1, x_2) \supset \forall x_1 P_3^2(x_1, x_2))$$

первое, второе, четвертое и пятое вхождения переменной x_1 связанные, а третье свободное, первое вхождение переменной x_2 свободное, а второе, третье и четвертое связанные.

Формула логики предикатов — это, как мы видим, уже не обязательно запись какого-то высказывания, т. е. выражения, которое или истинно, или ложно. Формулы могут быть выражениями, в состав которых входят высказывательные формы. Формулы логики предикатов выражают высказывания только в том случае, если они не содержат свободных вхождений переменных. Такие формулы называют постоянными формулами логики предикатов.

Предметную переменную на всех местах, где она свободно входит в формулу $\mathfrak{A}$, можно заменить другой переменной. Если последняя отлична от всех переменных, входящих в данную формулу, тогда все свободные вхождения переменных перейдут в свободные. После такой подстановки данная формула изменит свой вид, но будет выражать ту же самую высказывательную форму, что и до подстановки, которая в этом случае сводится к переименованию переменной.

Но если предметная переменная, которую подставляют в формулу $\mathfrak{A}$, такая, что в $\mathfrak{A}$ уже имеются ее связанные вхождения, то может возникнуть нежелательная ситуация, которую называют коллизией переменных при подстановке. Коллизия переменных при подстановке будет иметь место тогда, когда в результате подстановки одной предметной переменной вместо другой, свободные вхождения переменной переходят в связанные.

Например, при подстановке переменной x_2 вместо свободного вхождения переменной x_1 в формуле

$$\exists x_2 P_1^2(x_1, x_2)$$

возникает коллизия переменных, так как свободное вхождение переменной x_1 переходит в связанное вхождение переменной x_2 и мы получаем формулу

$$\exists x_2 P_1^2(x_2, x_2).$$

Если P_1^2 — это, например, двухместный предикат $<$, а x_1 и x_2 переменные для чисел, то высказывательная форма «Существует число, которое больше произвольного числа x_1» в результате этой подстановки превратится в утверждение (ложное) «Существует число, которое больше самого себя».

Производя подстановку одной предметной переменной вместо другой необходимо избегать коллизии переменных. Для этого на подстановку накладываются такие ограничения, благодаря которым обеспечивается переход свободных вхождений переменных только в свободные.

Каждую из переменных на всех местах, где она свободно входит в формулу $\mathfrak{A}$, можно также заменять предметной постоянной. Полученная в результате такой замены формула будет содержать меньше свободных вхождений переменных. Если в формуле $\mathfrak{A}$ вместо всех свободных вхождений переменных подставить предметные постоянные, то формула $\mathfrak{A}$ из записи некоторой высказывательной формы превратится в запись высказывания.

Определим понятие *подстановки.*

Пусть дана формула $\mathfrak{A}$, список переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (без повторений) и список термов $t_1, t_2, \ldots, t_k$ (число термов равно числу переменных). Одновременно вместо каждого свободного вхождения α_1 в формулу $\mathfrak{A}$ подставляем t_1, вместо каждого свободного вхождения α_2 — терм t_2 и т. д.; в результате получаем формулу, которая называется *результатом подстановки* в формулу $\mathfrak{A}$ и обозначается

$$\mathfrak{A}\left|\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_k \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_k\end{matrix}\right|$$

Осуществляя подстановку, нужно следить за тем, чтобы никакое свободное вхождение α_i в формулу $\mathfrak{A}$ не входило в подформулу этой формулы вида $\forall \beta \mathfrak{B}$ или $\exists \beta \mathfrak{B}$, где β — это терм t_i.

Среди постоянных формул логики предикатов имеются такие, которые истинны при любых входящих в их состав предикатах и термах. Например, любая постоянная формула логики предикатов, имеющая вид

$$\forall \alpha (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset (\forall \alpha \mathfrak{A} \supset \forall \alpha \mathfrak{B})$$
$$\forall \alpha \mathfrak{A} \supset \exists \alpha \mathfrak{A}$$

истинна, независимо от того, из каких конкретных предикатов и термов построены формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Формулы, истинность которых не зависит от того, какие конкретные предикаты и термы входят в их состав, называются *общезначимыми* формулами логики предикатов.

Логика предикатов тоже получает аксиоматическое представление в виде исчисления предикатов. Исчисление предикатов, так же как исчисление высказываний, строится чисто формально, без ссылок на какую-нибудь содержательную интерпретацию. Однако это формальное построение рассчитано на то, чтобы при интерпретации все аксиомы оказались общезначимыми формулами, а правила вывода позволяли от общезначимых формул переходить к общезначимым.

В качестве аксиом исчисления предикатов берем формулы вида:

1) $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$,

2) $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$,

3) $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$,

4) $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$,

5) $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}))$,

6) $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$,

7) $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$,

8) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}))$,

9) $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \overline{\mathfrak{B}}) \supset \overline{\mathfrak{A}})$,

10) $(\overline{\mathfrak{B}} \supset \overline{\mathfrak{A}}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$,

11) $\forall \alpha (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{A} \supset \forall \alpha \mathfrak{B})$, где α не входит свободно в $\mathfrak{A}$,

12) $\forall \alpha \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A} \left| \begin{matrix} \alpha \\ t \end{matrix} \right|$[1],

13) $\forall \alpha (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset (\exists \alpha \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$, где α не входит свободно в $\mathfrak{B}$,

14) $\mathfrak{A} \left| \begin{matrix} \alpha \\ t \end{matrix} \right| \supset \exists \alpha \mathfrak{A}$, [1]

а в качестве правил вывода следующие правила:

$$\frac{\begin{matrix} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \end{matrix}}{\mathfrak{B}} \qquad \text{(Пр. I)}$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\forall \alpha \mathfrak{A}} \qquad \text{(Пр. II)}$$

Список формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ называется выводом в исчислении предикатов, если и только если каждая формула $\mathfrak{A}_i$ этого списка $(i \leqslant n)$ или одна из аксиом вида 1)—14), или получена из формул $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$, расположенных раньше в этом списке $(p, q < i)$, по (Пр. I), или, наконец, получена из формулы $\mathfrak{A}_j$, расположенной раньше в этом списке $(j < i)$ по (Пр. II). Формула $\mathfrak{B}$ называется *выводимой формулой исчисления предикатов*, если можно построить вывод в исчислении предикатов, последняя формула которого есть $\mathfrak{B}$.

---

[1] При указанном выше ограничении на подстановку.

Определим понятие вывода из данных формул. Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_l$ — любые формулы. Список формул $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_k$ называется выводом из данных формул $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_l$, если каждая формула $\mathfrak{A}_i$, где $i \leqslant k$, или одна из аксиом 1) — 14), или одна из данных формул $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_l$, или получена из формул $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$, где p и $q < i$, по (Пр. I), или получена из формулы $\mathfrak{A}_j$, где $j < i$, по (Пр. II), при условии, что переменная α из (Пр. II) не входит свободно в $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_l$. Формула $\mathfrak{A}$ называется выводимой из данных формул $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_l$, если можно построить вывод из данных формул, последняя формула, которого совпадает с $\mathfrak{A}$.

Натуральное исчисление предикатов получают добавлением к правилам вывода из § 12 правил введения и удаления знаков $\forall$ и $\exists$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{Правила введения} & \text{Правила удаления} \\[2ex]
\forall & \dfrac{\mathfrak{A}}{\forall\alpha\mathfrak{A}} & \dfrac{\forall\alpha\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} \\[4ex]
\exists & \dfrac{\mathfrak{A}'}{\exists\alpha\mathfrak{A}} & \dfrac{\exists\alpha\mathfrak{A} \qquad \begin{matrix}[\mathfrak{A}'] \\ \vdots \\ \mathfrak{B}\end{matrix}}{\mathfrak{B}}
\end{array}
$$

В результате применения правила $\exists$-удаления мы освобождаемся от формулы $\mathfrak{A}'$ как от допущения.

Формула $\mathfrak{A}'$ в правиле $\exists$-введения и $\forall$-удаления отличается от формулы $\mathfrak{A}$ только тем, что содержит свободные вхождения предметной переменной α' или постоянную на всех тех местах, где $\mathfrak{A}$ содержит свободные вхождения переменной α.

Формула $\mathfrak{A}'$ в правиле $\exists$-удаления отличается от формулы $\mathfrak{A}$ только тем, что содержит свободные вхождения предметной переменной α', не принадлежащей формулам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, на всех тех местах, где $\mathfrak{A}$ содержит свободные вхождения переменной α.

Предметная переменная α при применении правил $\forall$-введения и $\exists$-удаления не должна входить свободно в неотброшенное допущение.

Теорема 1. $\vdash \forall x_1 (P^1_i(x_1) \supset P^1_j(x_1)) \supset (\forall x_1 P^1_i(x_1) \supset \forall x_1 P^1_j(x_1))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{+1}{\forall x_1 (P^1_j(x_1) \supset P^1_j(x_1))}}{P^1_i(x_1) \supset P^1_j(x_1)}\,\forall_{\text{у}} \qquad \dfrac{\overset{+2}{\forall x_1 P^1_i(x_1)}}{P^1_i(x_1)}\,\forall_{\text{у}}}{P^1_j(x_1)}\,\supset_{\text{у}}}{\forall x_1 P^1_j(x_1)}\,\forall_{\text{в}}}{\forall x_1 P^1_i(x_1) \supset \forall x_1 P^1_j(x_1)}\,\supset_{\text{в}},\ -2}{\forall x_1 (P^1_i(x_1) \supset P^1_j(x_1)) \supset (\forall x_1 P^1_i(x_1) \supset \forall x_1 P^1_j(x_1))}\,\supset_{\text{в}},\ -1
$$

Теорема 2. $\vdash \forall x_1 P_i^1(x_1) \supset \exists x_1 P_i^1(x_1)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{+1}{\forall x_1 P_i^1(x_1)}}{P_i^1(x_2)}\,\forall_{\text{у}}}{\exists x_1 P_i^1(x_1)}\,\exists_{\text{в}}}{\forall x_1 P_i^1(x_1) \supset \exists x_1 P_i^1(x_1)}\,\supset_{\text{в}},\ -1.$$

Для исчисления предикатов существуют также доказательства непротиворечивости полноты.

Упражнения.

Доказать, что

1) $\vdash \forall x_1 \forall x_2 P_i^2(x_1, x_2) \supset \forall x_1 P_i^2(x_1, x_1)$,

2) $\forall x P_i^1(x),\ \forall x P_j^1(x) \vdash \forall x\left(P_i^1(x) \mathbin{\&} P_j^1(x)\right)$,

3) $\exists x_1 \forall x_2 P_i^2(x_1, x_2) \supset \forall x_2 \exists x_1 P_i^2(x_1, x_2)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Иосиф Нусимович Бродский

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В СИМВОЛИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

Редактор А. И. Кузьмина

Техн. редакторы И. Г. Сидорова, Г. С. Орлова

Корректоры С. И. Сорина, С. К. Школьникова

М-54336. Сдано в набор 3 IV 1972 г. Подписано к печати 27 IX 1972 г. Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Печ. л. 4. Уч.-изд. л. 3,53. Бум. л. 2. Тираж 11500 экз. Заказ 187. Цена 14 коп. Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова

Типография ЛГУ. 199164. Ленинград, Университетская наб., 7/9.