Васюков
Владимир
Леонидович

*доктор философских наук,
ведущий научный сотрудник
Института философии
Российской Академии наук*

## Категорная логика

Возможно ли многоуровневое мышление?

В предлагаемой вниманию читателя книге положительный ответ на этот вопрос дается путем исследования категорных дедуктивных систем (логических исчислений, в которых наряду с формулами присутствуют коды доказательств, преобразуемые по определенным правилам вывода, и операции над ними). Эти дедуктивные системы превращаются в категории в том случае, если мы задаем систему определенных тождеств для доказательств.
Категория - это дедуктивная система с записями о выводимости и правилами их отождествления.

В книге категорная логика рассматривается с точки зрения неклассической логики и ее потребностей (в частности, теории доказательств). Значительное внимание уделяется систематическому построению исчислений категорной логики и теоретико-категорных семантик для систем неклассической логики, призванных заменить теоретико-множественные и алгебраические семантики этих систем.

В настоящее время монография подобной направленности в мировой литературе отсутствует.

ISBN 5-85593-145-5
9785855931457

В. Л. Васюков
Категорная логика

В. Л. Васюков

# Категорная логика

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ

**В. Л. Васюков**

# КАТЕГОРНАЯ ЛОГИКА

**АНО Институт логики**
**Москва – 2005**

**УДК 16**
**ББК 87.4**
**Л69**

**Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 05-06-87061**

**Васюков Владимир Леонидович**

Категорная логика. – М.: АНО Институт логики, 2005. – 208 с.

ISBN 5-85593-145-5

Монография посвящена исследованию категорных дедуктивных систем, представляющих собой логическое исчисление, в котором наряду с формулами присутствуют коды доказательств, преобразуемые по определенным правилам вывода, и операции над ними. Эти дедуктивные системы превращаются в категории в том случае, если мы задаем систему определенных тождеств для доказательств, т.е. категория – это дедуктивная система с записями о выводимости и правилами их отождествления. В монографии категорная логика рассматривается с точки зрения неклассической логики и ее потребностей (в частности, теории доказательств). Значительное внимание уделяется систематическому построению исчислений категорной логики и теоретико-категорных семантик для систем неклассической логики, призванных заменить теоретико-множественные и алгебраические семантики этих систем. В настоящее время монография подобной направленности в мировой литературе отсутствует.

Книга представляет интерес для логиков, философов и математиков и может быть использована в исследовании теоретических и метатеоретических вопросов современной логики.

**Vasyukov V.L.**

Categorical Logics. – Moscow: ANO Institute of Logics, 2005. – 208 c.

The book is concerned with categorical deductive systems which are logical calculi with the codes of proofs transforming with certain inference rules and operations. The deductive system turns into category if we define the system of equations between proofs, i.e. category is a deductive system with the notation for the inferences and the rules for their identifying. In the book a categorical logic is treating from the point of view of non-classical logics as well as her requirements (proof-theoretical, in particular). Attention is paid both to the systematic yielding of categorical logic calculi and categorical-theoretical semantics of non-classical systems (whose mission is to replace the set-theoretical and algebraic semantics of those). The book of such orientation is lacked in modern literature.

The book addresses logicians, philosophers and mathematicians and would be helpful in modern logical studies of theoretical and metatheoretical issues.

ISBN 5-85593-145-5
9785855931457

## ЧАСТЬ 1
## ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ КАТЕГОРНАЯ ЛОГИКА

## ГЛАВА ПЕРВАЯ. ИМПЛИКАТИВНЫЕ ДЕДУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ И ДЕДУКТИВНЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ КАТЕГОРИИ



## ГЛАВА ВТОРАЯ. ДЕДУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ И ДЕДУКТИВНЫЕ КАТЕГОРИИ



## ГЛАВА ТРЕТЬЯ. МНОГОУРОВНЕВЫЕ ДЕДУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ И ДЕДУКТИВНЫЕ *N*-КАТЕГОРИИ



## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. СОПРЯЖЕНИЕ И КОГЕРЕНТНОСТЬ

# ЧАСТЬ 2.
# ЛОГИКА В КАТЕГОРИЯХ

## ГЛАВА ПЯТАЯ. ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ В КАТЕГОРИЯХ ПРЕДПОРЯДКА С ФУНКТОРАМИ



## ГЛАВА ШЕСТАЯ. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СЕКВЕНЦИЙ В СИТУСАХ



## ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ В ТОПОСАХ



## ГЛАВА ВОСЬМАЯ. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КАТЕГОРИЙ

# Предисловие

В отличие от большинства научных дисциплин категорная логика развивалась в направлении сверху вниз – от категорной логики высшего порядка к пропозициональной категорной логике. Зародившись в недрах теории категорий, категорная логика долго представляла собой частное направление исследований специалистов по теории категорий. Ее можно было рассматривать как теоретико-категорную реконструкцию логики, полностью сконцентрированную на нуждах оснований математики. При этом, как пишут в своей книге "Введение в категорную логику высшего порядка" Дж. Ламбек и П.Дж. Скотт (1986), специалисты по теории категорий крайне неодобрительно встречали рассмотрение логиками категорий как разновидности дедуктивных систем, а логики с подозреним смотрели на утверждение первых, что дедуктивные системы не обязательно должны быть свободно порождаемы из аксиом и правил вывода.

Это скрытое противостояние способствовало замедленной кристаллизации теоретико-доказательного подхода к категорной логике как теории дедуктивных систем. Тем не менее, подводя некоторые итоги, сегодня можно говорить, что с точки зрения категорной логики дедуктивная система представляет собой логическое исчисление, в котором наряду с формулами присутствуют коды доказательств, причем преобразуемые по определенным правилам вывода, и операции над ними. Эти дедуктивные системы превращаются в категории в том случае, если мы задаем систему определенных тождеств для доказательств, т.е. категория – это дедуктивная система с записями о выводимости и правилами их отождествления.

Такое понимание категории заставляет обратить внимание на то, что, с одной стороны, выводы в логических системах всегда носят двухуровневый характер – мы должны учитывать не только формулы, но и истории их получения. С другой же стороны, это понимание одновременного учета металогических аспектов, заставляющих нас мыслить «двухуровнево», приводит к рассмотрению возможности многоуровневых дедуктивных систем, когда начинают рассматривать еще и правила преобразования историй получения формул и их отождествления (можно говорить в этом случае о «стратегиях» доказательства и правилах их отождествления) и т.д. Это приводит к понятиям многоуровневых дедуктивных исчислений и категорий как некоторых мета-мета-…-логических систем, формулируемых в рамках достаточно единообразного формализма.

Первая часть книги, собственно говоря, и посвящена выполнению этой программы построения категорной логики. Что же касается второй части, то здесь уделяется внимание построению чисто теоретико-категорных семантик для систем неклассической логики, призванных заменить теоретико-множественные и алгебраические семантики этих систем. Эту тенденцию можно было бы выразить в виде лозунга: «Дедуктивным системам и категориям – теоретико-категорную семантику!» Однако реализация подобной программы требует использования многих понятий аппарата теории категорий, описание которых заняло бы слишком много места. По этой причине в книге молчаливо предполагается, что теория категорий знакома читателю второй части в достаточном объеме (по крайней мере, он знаком с такими ее понятиями как «ситус» и «топос»). Последняя же глава посвящена анализу взаимоотношения теории категорий и категорной логики.

В современной зарубежной литературе к настоящему моменту имеется ряд монографий по категорной логики, например, "Первопорядковая категорная логика" М. Маккаи - Дж. Рейеса (1977), "Введение в категорную логику высшего порядка" Дж. Ламбека и П.Дж. Скотта (1986), "Категорная логика" А.М. Питтса (1995), "Категорная логика и теория типов" Б. Джейкобса (2000). Сюда же можно отнести и переведенные на русский язык книги "Теория топосов" П. Джонстона и "Топосы. Категорный анализ логики" Р. Гольдблатта. Однако, за исключением книги Р. Гольдблатта, они написаны математикам и для математиков и уделяют недостаточно внимания пропозициональной категорной логике и ее основаниям.

Что касается книги Гольдблатта, то, к сожалению, она сыграла негативную роль в пропаганде категорной логики. Встреченная первоначально с энтузиазмом, книга вскоре растеряла своих читателей: при попытке использования ее в качестве учебника по новому разделу современной логики отечественные логики столкнулись с тем обстоятельством, что сильная теоретико-множественная ориентация практически сводит на нет все усилия применить ее аппарат к насущным проблемам неклассической логики. Это вызвано еще и тем обстоятельством, что в поле зрения рассмотрения книги Гольдблатта, по существу, попали лишь классическая и интуиционистская логика. Именно по этой причине в предлагаемой читателю монографии категорная логика рассматривается с точки зрения неклассической логики и ее потребностей (в частности, теории доказательств), и поэтому же столь значительное внимание уделяется систематическому построению исчислений категорной логики и ее применению к семантике неклассической логики. В настоящее время монография подобной направленности в мировой литературе отсутствует.

Изложенные в книге результаты обсуждались на семинарах сектора логики Института философии РАН, кафедры логики философского факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и кафедр логики университетов г.Торуни и г.Лодзи (Польша). Автор выражает признательность участникам этих семинаров, чья критика и предложения способствовали уточнению принципиальных положений книги.

# Часть 1.

# Пропозициональная категорная логика

# Глава первая. Импликативные дедуктивные системы и дедуктивные экспоненциальные категории

## 1. Ламбековские дедуктивные системы и дедуктивные категории

Описывая возникновение понятия дедуктивной системы К.Дошен [Došen 1996] замечает (как и многие другие авторы), что в целом процедура построения гильбертовских формулировок систем обычно сводится к выбору из всех формул данного языка теорем системы. Генценовские формулировки логических систем, чьей разновидностью являются системы натурального вывода, основываются на формулировании отношении следования между формулами. В простейшей секвенциальной системе секвенции имеют вид $A \vdash B$, где посылка $A$ и заключение $B$ являются формулами. О подобных секвенциях говорится, что они являются единичными по обеим сторонам.

В более общем случае допускается множественность формул, по крайней мере, в посылках, по левую сторону от знака $\vdash$, что соответствует тому факту, что дедуктивный вывод может исходить более чем из одной посылки. Посылки обычно образуют множество, или секвенции, или мультимножества, либо что-нибудь другое. Тем не менее, допущение лишь единичных формул по обеим сторонам секвенции не должно быть существенным ограничением, если у нас имеются связки, позволяющие заменить совокупность посылок на синонимичную единичную посылку.

Секвенция $A \vdash B$ может пониматься как утверждение о том, что существует естественно-дедуктивное доказательство $B$, исходящее из гипотез, собранных в совокупность $A$, в то время как в гильбертовской формулировке системы мы доказываем секвенции вида $I \vdash B$, где пропозициональная константа $I$ замещает пустую совокупность посылок. (Конечно, обычно нет необходимости в снабжении каждой теоремы приставкой $I\vdash$, если подразумевается, что каждая теорема имеет такую приставку, но некоторые авторы обычно уделяют внимание снабжению теорем в гильбертовской формулировке системы хотя бы символом $\vdash$).

Заметим, что символ $\vdash$ не является символом языка, к которому принадлежат $A$ и $B$ в $A\vdash B$. Однако, если мы рассмотрим расширения языка, в котором $A\vdash B$ будет формулой, то секвенциальные формулировки будут подобны гильбертовским формулировкам в таком расширенном языке. В случае единичным по обеим сторонам секвенций мы можем даже заменить символ $\vdash$ на знак импликации и тогда наша система будет выглядеть как система в обычной гильбертовской формулировке. Тем не менее, система в подобной гильбертовской формулировке будет представлять собой систему более высокого порядка.

На практике, в случае секвенциальных формулировок логических систем, мы заинтересованы лишь в существовании доказательств секвенции, и мы не вводим специальной нотации для различения различных доказательств одной и той же секвенции. Это выглядит так, как будто все доказательства одной и той же секвенции эквивалентны. Тем не менее, если исходить из процедуры нормализации или устранения сечения, то хотелось бы иметь возможность приравнять одни доказательства и различить другие. В этом случае было бы удобно записывать рядом с секвенцией некоторый код, указывающий на историю получения ее доказательства. Подобное кодирование стало общепринятым в натуральной дедукции, где типовые лямбда термы выполняют роль кодов (а кодирование называется "изоморфизмом Карри-Ховарда" или "интерпретацией формул типами"). Если правила секвенциальной системы ссылаются на правила натуральной дедукции, то мы могли бы работать с типовым лямбда кодированием, но ниже мы увидим, что существуют иные (даже для натуральной дедукции) виды кодирования, исходящие из теории категорий.

Коды будут термами, такими, что аксиоматические секвенции кодируются атомными термами, а правила вывода секвенциальной системы отвечают операциям на термах. Это незначительно отличается от общепринятой практики, где правила вывода являются отношениями, не обязательно функционального типа. Например, правило перестановки

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$$

в обычной секвенциальной системе, с произвольными конечными Г и Δ, возможно пустыми, последовательностями формул, не соответствуют функции, которая, будучи приложена к верхней секвенции, порождает единичную нижнюю секвенцию: мы можем переставить первую и вторую формулу в секвенции по левую сторону от символа ⊢, или вторую и третью и т. д. Однако, мы можем заменить подобные нефункциональные правила на совокупность функциональных правил, осуществляющих по отдельности многие задания, приписываемые первоначальному правилу. (Перестановка может быть заменена на бесконечно много функциональных правил, переставляющих первую и вторую формулы, вторую и третью формулы и т.д., либо двумя функциональными правилами: первое из них переставляет первую и вторую формулу, а другое ставит первую формулу в конец секвенции по левой стороне.) Как бы там ни было, большинство правил, с которыми мы имеем дело на практике, являются функциональными. В общем случае, операции на термах, отвечающие правилам вывода, являются частичными операциями, поскольку правила могут быть применены к секвенциям одного типа, но не другого.

Когда доказательство секвенции может быть преобразовано в другое доказательство той же самой секвенции посредством процедуры, подобно тому, как мы действуем в случае нормализации натуральной дедукции или устранения сечения, мы приравниваем коды двух доказательств. Чтобы избежать тривиальности, не обязательно требовать, чтобы коды, отвечающие той же самой секвенции, были всегда одинаковы.

Введем понятие системы секвенций с кодами, называемых *дедуктивными системами* (и термин и понятие принадлежат Дж. Ламбеку).

Пусть у нас имеется множество вещей, которые мы назовем, нейтрально, объектами, но из которых мы намереваемся построить язык - если мы будем иметь в виду теоретико-доказательные вопросы логики, то под этими объектами лучше всего, конечно, понимать формулы. Будем использовать буквы $A$, $B$, ... (в случае необходимости - с индексами) как схемы букв для объектов. При этом у нас нет необходимости уточнять, что представляют собой объекты. В то же время, если наш язык имеет связки, то они лучше всего отвечают понятию *операций на объектах*. Предполагается, что эти операции носят тотальный характер. Под "операцией" мы будем понимать, как обычно это делается, любую функцию с областью определения D' и областью значения D, при этом необязательно одно-однозначную. Таким образом "операция на объектах" есть более общее понятие, чем "связка", которая включает в себя, как правило, лишь биективные функции. Алгебра формул полностью свободна, но при этом не исключается, что анализируемые объекты могут оказаться различным образом взаимно эквивалентны. Могут иметься также *специальные объекты*, которые представляют собой нульместные операции на объектах.

В качестве следующего шага мы устанавливаем, что у нас имеется множество предметов, отвечающих секвенциям с кодами, сингулярными по обеим сторонам, которые мы будем называть *стрелками*. Помимо этого имеются две функции, сопоставляющие каждой стрелке объект, являющийся ее *началом*, т.е. ее посылкой, и объект, являющийся *концом*, т.е. заключением. Может существовать более чем одна стрелка для одного и того же начала и конца. Выражение $f\colon A \vdash B$ означает, что $f$ есть стрелка с началом $A$ и концом $B$; будем говорить, что $A \vdash B$ является *типом* $f$. Для именования стрелок будем использовать просто $f$, $g$, ... без указания типа, если у нас нет в этом необходимости. Эти термы-стрелки отвечают кодам, о которых речь шла выше.

Множество объектов и множество стрелок совместно с функцией начала и конца стрелок образует граф (в теории графов, обычно, подобные вещи называются несколько сложнее - мультиграфами с циклами). В принципе мы можем допустить существование таких совокупностей объектов и стрелок, которые являются собственными классами, но вопросы мощности этих совокупностей для нас здесь не играют никакой роли. Использование множеств, а позднее малых категорий, делает наше изложение более определенным и ясным.

Итак, граф состоит из класса стрелок (в теории графов называемых "ориентированными ребрами") и класса объектов (обычно называемых "вершинами", но в различных разделах математики может использоваться и иная терминология) и двух отображений:

$$\textit{Начало}\colon \{\text{стрелки}\} \to \{\text{объекты}\}$$

$$\textit{Конец}\colon \{\text{стрелки}\} \to \{\text{объекты}\}$$

Вместо того, чтобы писать $\textit{начало}(f) = A$, $\textit{конец}(f) = B$, часто пишут $f\colon A \to B$ или $f\colon A \vdash B$. Для логики интерес представляют графы с дополнительной структурой.

*Дедуктивная система* представляет собой граф, который может иметь следующие операции на стрелках: для каждого объекта $A$

нульместную операцию (т.е. специальную стрелку), стрелку *тождества*

$$1_A\colon A \vdash A$$

и бинарную частичную операцию на стрелках (*композицию*), которая, будучи применена к стрелкам $f\colon A \vdash B$ и $g\colon B \vdash C$, порождает стрелку $gf\colon A \vdash C$. Наряду с этими операциями могут иметься и другие. Специальные стрелки соответствуют аксиоматическим секвенциям и $n$-местным операциям на стрелках с $n \geq 1$, отвечающим правилам вывода. Композиция представляет собой единичную форму правила сечения:

$$\frac{f\colon A \vdash B \quad g\colon B \vdash C}{gf\colon A \vdash C}$$

Вместо того, чтобы говорить, как это обычно принято в логике, что стрелка есть *теорема* дедуктивной системы или *доказуема* в ней, будем просто говорить, что стрелка *есть* стрелка дедуктивной системы, как это порой также делается в логике. Когда речь идет о стрелках дедуктивной системы, то имеются в виду стрелки дедуктивной системы, что не следует смешивать с логическим способом высказывания о формулах системы, истинных формулах языка логической системы, когда не подразумевается их доказуемость.

Отношение следования является обобщением отношения предпорядка на совокупности объектов и объект (или на две совокупности объектов, когда отношение следования множественно по обеим сторонам, как в случае генценовских систем классической логики. В случае дедуктивных систем мы имеем дело с иным обобщением отношения предпорядка. Отношение предпорядка представляет собой специальный вид дедуктивной системы, когда для каждой пары объектов $(A,B)$ имеется, по крайней мере, одна стрелка с началом $A$ и концом $B$. Предупорядоченные графы выполняют следующую эквивалентность, которая имеет место для каждой дедуктивной системы:

$$\forall A \forall B(\exists f\,(f\colon A \vdash B) \Leftrightarrow \forall C(\exists g(g\colon B \vdash C) \Rightarrow \exists h(h\colon A \vdash C))).$$

Справа налево это эквивалентно рефлексивности:

$$\forall A \exists f\,(f\colon A \vdash A)$$

а слева направо это дает нам транзитивность:

$$\forall A \forall B \forall C \forall f \forall g \exists h((f\colon A \vdash B)\ \&\ g\colon B \vdash C) \Rightarrow h\colon A \vdash C).$$

Отсюда по рефлексивности и транзитивности мы получаем стрелку тождества и композицию стрелок.

Дедуктивная категория есть дедуктивная система, в которой следующие уравнения между доказательствами имеют место:

$$f\,1_A = f,$$
$$1_B f = f,$$
$$(hg)\,f = h\,(gf)$$
для всех $f: A \vdash B,\ g: B \vdash C,\ h: C \vdash D$

Нетрудно видеть, что эти тождества имеют совершенно ясный смысл в теории доказательств. Первое из них утверждает, что композиции, т.е. сечения, с единичными стрелками являются устранимыми, в то время как второе говорит о том, что композиции могут меняться местами друг с другом. В свободной дедуктивной категории, порожденной произвольным графом без стрелок, т.е. множеством объектов, композиция устранима: в этой категории имеются только лишь стрелки тождества.

Существование подобных свободных дедуктивной категорий гарантируется эквациональной формой категорных аксиом. Свободные категории некоторого вида подобны чистым логическим системам: они выполняют лишь то, что допустимо для подобного вида категорий и ничего сверх этого.

Заметим, что с более абстрактной точки зрения можно рассматривать категорию (что обычно и делается в математике) просто как некую структуру, когда она представляет собой совокупность двух разновидностей сущностей: объектов (а не формул) и стрелок или морфизмов (а не выводов). Сами объекты тоже могут обладать структурой, а морфизмы представляют собой отображения, сохраняющие эту структуру.

Самый популярный пример подобной категории категория множеств Set. В этой категории объекты представляют собой произвольные множества, а морфизмы являются произвольными отображениями.

Другой популярный пример - категория предупорядоченных множеств. Ее объекты представляют собой предупорядоченные множества, т.е. множества с заданными на них транзитивным и рефлексивным отношением, в то время как морфизмы суть монотонные отображения, сохраняющие эти отношения.[1]

Связь между множествами и дедуктивными категориями можно описать следующим образом: свободная абстрактная категория, порожденная произвольным графом без стрелок (так называемая дискретная категория или дискрет), может рассматриваться как

[1] Многочисленные примеры категорий можно найти в [Гольдблатт 1983].

категорное понятие множества. В подобной категории имеются только стрелки тождества.

## 2. Переводы, функторы и естественные преобразования

Так же как в логике существуют переводы между логическими исчислениями, в категорной логике существуют соответствующие переводы между дедуктивными системами. Что касается логики, то здесь понятие перевода между исчислениями можно сформулировать следующим образом.

Пусть $T_1$ и $T_2$ — исчисления, сформулированные, соответственно, в языках $L_1$ и $L_2$ с соответствующими логиками. Пусть φ — рекурсивная функция, сопоставляющая формуле языка $L_1$ формулу языка $L_2$. Функцию будем называть *переводом* исчисления $T_1$ в $T_2$, если и только если выполняется условие $A\in T_1 \models\Rightarrow \varphi(A)\in T_2$. Если выполняется дополнительное условие $\varphi(A)\in T_2 \models\Rightarrow A\in T_1$, то рекурсивную функцию φ будем называть *погружающей операцией* $T_1$ в $T_2$. Исчисление $T_1$ *погружаемо* в исчисление $T_2$, если и только если существует рекурсивная функция, погружающая $T_1$ в $T_2$. [Смирнов 2002, с. 120].

В случае дедуктивных систем нам уже недостаточно говорить только лишь о функции, переводящей формулы одной системы в формулы другой - нам требуется еще говорить о переводе кодов, т .е. еще об одной функции, сопоставляющей друг другу различные виды доказательств. Определим *морфизм графов* $\boldsymbol{M}$ из графа $\boldsymbol{G}$ в граф $\boldsymbol{H}$ как пару функций, записывая эту пару как $\boldsymbol{M}$, сопоставляющих каждому объекту $A$ из $\boldsymbol{G}$ объект $\boldsymbol{M}A$ из $\boldsymbol{H}$, а каждой стрелке $f$: $A\vdash B$ из $\boldsymbol{G}$ стрелку $\boldsymbol{M}(f)$: $\boldsymbol{M}(A)\vdash \boldsymbol{M}(B)$ из $\boldsymbol{H}$.

Обозначим для удобства дальнейшего изложения дедуктивную систему как тройку $\langle \mathbf{D},1,\circ\rangle$, где $\mathbf{D}$ будет представлять собой граф, 1 есть тождество в $\mathbf{D}$, а $\circ$ есть композиция в $\mathbf{D}$. Тождество и композиция в различных дедуктивных системах всегда будем обозначать одними и теми же символами 1 и $\circ$, предполагая, что из контекста ясно, какой дедуктивной системе они принадлежат.

*Функтор* $\boldsymbol{F}$ из дедуктивной системы $\langle \boldsymbol{D},1,\circ\rangle$ в дедуктивную систему $\langle \boldsymbol{E},1,\circ\rangle$ будет представлять собой морфизм графов из $\boldsymbol{D}$ в $\boldsymbol{E}$, такой, что следующие тождества справедливы для $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{F}(1_A) = 1_{\boldsymbol{F}(A)},\ \boldsymbol{F}(g\circ f) = \boldsymbol{F}(g)\circ\boldsymbol{F}(f).$$

Все же главный интерес будут представлять как раз не переводы из одной дедуктивной системы в другую, а переводы дедуктивных категорий, поскольку именно в дедуктивных категориях мы имеем дело с точно описанной структурой на доказательствах, обусловленной наличием тождеств между стрелками. Роль переводов между дедуктивными категориями также выполняют *функторы*, которые определяются совершенно аналогично функторам между дедуктивными системами:

*Функтор* $\boldsymbol{F}$ из дедуктивной категории $\boldsymbol{C}$ в дедуктивную категорию $\boldsymbol{D}$ представляет собой функцию, сопоставляющую каждому объекту $A$ категории $\boldsymbol{C}$ объект $\boldsymbol{F}(A)$ категории $\boldsymbol{D}$, а каждой стрелке $f\colon A \vdash B$ категории $\boldsymbol{C}$ стрелку $\boldsymbol{F}(f)\colon \boldsymbol{F}(A) \vdash \boldsymbol{F}(B)$, такую, что

$$\boldsymbol{F}(1_A) = 1_{\boldsymbol{F}(A)}, \boldsymbol{F}(gf) = \boldsymbol{F}(g)\,\boldsymbol{F}(f).$$

В будущем нам понадобится следующее определение:

***Определение***. Если $A$ и $B$ являются объектами дедуктивной категории $\boldsymbol{C}$, то обозначим как $\mathbf{Arr}_{\boldsymbol{C}}(A,B)$ *класс* всех стрелок (доказательств) $A \vdash B$ в $\boldsymbol{C}$. Если окажется, что $\mathbf{Arr}_{\boldsymbol{C}}(A,B)$ есть *множество* для любых объектов $A$ и $B$, то про дедуктивную категорию $\boldsymbol{C}$ говорят, что она является *локально малой* категорией.

Будем опускать нижний индекс в выражениях типа $\mathbf{Arr}_{\boldsymbol{C}}(A,B)$, если из контекста ясно, о какой категории идет речь. Полезность введения этого понятия видна из следующего определения:

***Определение***. Будем говорить, что $A$ является *инициальным* объектом категории $\boldsymbol{C}$, если $\mathbf{Arr}_{\boldsymbol{C}}(A,B)$ содержит не более чем один элемент. Дуально, будем говорить, что $B$ является *терминальным* объектом категории $\boldsymbol{C}$, если $\mathbf{Arr}_{\boldsymbol{C}}(A,B)$ содержит не более чем один элемент.

Следует учесть, что функторы могут обладать еще одной особенностью, связанной с ориентацией стрелок: нетрудно предвидеть случай, когда функтор заменяет все стрелки на противоположно направленные. В этом случае мы будем говорить, что функтор *ковариантен*, если он не меняет направление стрелок в результирующей категории, и что функтор *контравариантен*, если он меняет направление стрелок на противоположное.

В современной логике часто рассматривают не одну, а несколько логических систем, анализируя их и сравнивая между собой. И в этом случае речь неминуемо заходит и о сравнении переводов из одной системы в другую и их свойствах, тем более, что, как правило, между системами существует не один-единственный перевод, а несколько. Чтобы сделать подобный разговор точным и учесть это обстоятельство, вводится понятие «естественного преобразования» между функторами.

Пусть $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ будут функторами из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{D}$. *Естественное преобразование* из $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{G}$ есть семейство **p** стрелок $\mathbf{p}_A$: $\boldsymbol{F}(A) \vdash \boldsymbol{G}(A)$ категории $\boldsymbol{D}$, свое для каждого объекта $A$ категории $\boldsymbol{C}$, такое, что для каждой стрелки $f: A \vdash B$ категории $\boldsymbol{C}$ верно следующее тождество:

$$\mathbf{p}_B\, \boldsymbol{F}(f) = \boldsymbol{G}(f)\, \mathbf{p}_A.$$

В подобных тождествах нижний индекс обычно опускается и может быть восстановлен по контексту. Стрелки $\mathbf{p}_A$, принадлежащие семейству **p**, называются *компонентами* естественного преобразования .

Альтернативное определение естественного преобразования выглядит следующим образом:

> *Естественное преобразование* из $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{G}$ есть семейство операций $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}{}_A$, по одной для каждого объекта $A$ категории $\boldsymbol{C}$, применение которых к стрелке $g$: $\boldsymbol{G}(A) \vdash D$ категории $\boldsymbol{D}$ порождает стрелку $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}{}_A(g)$: $\boldsymbol{F}(A) \vdash D$, такую, что выполняются следующие тождества:
>
> $$\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}(h)\, \boldsymbol{F}(f) = \mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}(h\, \boldsymbol{G}(f)), \quad g\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}(h) = \mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}(gh).$$

Каждое естественное преобразование в этом новом смысле при использовании определения

(i) $$\mathbf{p}_A =_{def} \mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}{}_A\,(1_{\boldsymbol{G}(A)})$$

порождает естественное преобразование **p** в старом смысле, когда каждое естественное преобразование **p** в старом смысле при использовании определения

(ii) $$\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}{}_A\,(g) =_{def} \mathbf{p}_A\, g$$

порождает естественное преобразование $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}$ в новом смысле. Более того, если мы будем исходить из $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}$ и получим **p** с помощью определения (i), а затем определим $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}$ по определению (ii), мы опять вернемся к исходному $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}$. Сходным образом, если мы будем исходить из **p** и получим $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}$ с помощью (ii), а затем определим **p** по (i), мы опять вернемся к исходному **p**. Для этого следует проверить, что для исходного $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}$ тождество (ii) имеет место при замене $\mathbf{p}_A$ в правой части согласно (i), а затем, что для исходного **p** тождество (i) выполняется в случае, если мы заменяем $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}{}_A$ в правой части согласно (ii). Отсюда оба понятия естественного преобразования будут иметь тот же самый объем. В этом случае говорится, что два понятия естественного преобразования *экстенсионально эквивалентны относительно определений* (i) *и* (ii).

Еще одной экстенсионально эквивалентной альтернативой является определение естественного преобразования как семейства операций $\mathbf{P}^{\boldsymbol{F}}_{A}$, которые, будучи применены к стрелке $g\colon D \vdash \boldsymbol{F}(A)$ категории $\boldsymbol{D}$, порождают стрелку $\mathbf{P}^{\boldsymbol{F}}_{A}(g)\colon D \vdash \boldsymbol{G}(A)$ категории $\boldsymbol{D}$, такую, что выполняются следующие тождества:

$$\boldsymbol{G}(f)\,\mathbf{P}^{\boldsymbol{F}}(h) = \mathbf{P}^{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{F}(f)h), \quad \mathbf{P}^{\boldsymbol{F}}(h)g = \mathbf{P}^{\boldsymbol{F}}(hg).$$

Если $\boldsymbol{G}$ является одно-однозначной функцией на объектах, то можно заменить семейство операций $\mathbf{P}^{\boldsymbol{G}}_{A}$ на единственную операцию, а если $\boldsymbol{F}$ точно так же является одно-однозначной функцией на объектах, то можно сделать то же самое и для $\mathbf{P}^{\boldsymbol{F}}$.

### 3. Дедуктивные импликативные системы

Подразумевая под объектами дедуктивной системы формулы, под стрелками - доказательства, и под операциями на стрелках - правила вывода, мы получаем импликативное исчисление, если мы допускаем, что существует формула T (= истина) и бинарная операция $\supset$ (= “если,...,то”) для образования импликации $A \supset B$ из двух данных формул $A$ и $B$. Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

$$\frac{f\colon A \vdash B}{\ulcorner f \urcorner\colon \mathrm{T} \vdash A \supset B}$$

$$\frac{g\colon \mathrm{T} \vdash A \supset B}{g^{s}\colon A \vdash B}$$

Нетрудно видеть, что наше импликативное исчисление соответствует системе ***I*** [Карпенко 1993, с.225]**,** ибо:

а) мы имеем аксиому **I** в виде:

$$\ulcorner 1_A \urcorner\colon \mathrm{T} \vdash A \supset A$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{f\colon \mathrm{T} \vdash A \quad g\colon \mathrm{T} \vdash A \supset B}{g^{s}f\colon \mathrm{T} \vdash B}$$

Подобные формулировки дают нам дедуктивные системы, которые мы будем называть гильбертовскими системами (см. [Došen 1996]), а стрелки типа $\mathrm{T} \vdash A$ - гильбертовскими стрелками.

Наделяя экспоненциальные дедуктивные системы дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные импликативные исчисления, соответствующие логическим исчислениям.

Так, если мы добавим к нашей системе аксиом новую аксиому, выглядящую следующим образом:

$$\beta^{A}_{BC}\colon B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$$

то мы получаем импликативное исчисление, соответствующее системе минимальной импликативной логики ***IB*** [Карпенко 1993, с.230]. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f\colon B \vdash C}{1_A \supset f\colon A \supset B \vdash A \supset C}$$

Для этого достаточно положить

$$1_A \supset f = (\beta^{A}_{BC} \ulcorner f \urcorner)^{s}$$

Аксиому ***B*** гильбертовской системы мы теперь получаем в следующем виде:

$$\ulcorner \beta^{A}_{BC} \urcorner\colon \mathrm{T} \vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

Разрабатывая структуру импликативных систем, мы можем добавить к ***IB***-импликативному исчислению аксиомы, являющиеся дедуктивными аналогами импликативных логических аксиом ***C, W, K*** :

$$\gamma^{A}_{BC}\colon A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$$

$$w_{AB}\colon A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$$

$$\kappa^{B}_{A}\colon A \vdash B \supset A$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f\colon A \vdash B \supset C}{f^{\gamma}\colon B \vdash A \supset C}$$

(достаточно положить $f^{\gamma} = (\gamma^{A}_{BC} \ulcorner f \urcorner)^{s}$)

$$\frac{f\colon A \vdash A \supset B}{f^{w}\colon A \vdash B}$$

(достаточно положить $f^{w} = (w_{AB} \ulcorner f \urcorner)^{s}$)

$$\mathrm{O}_A\colon A \vdash \mathrm{T}$$

$$\frac{f\colon \mathrm{T} \vdash A}{f^{\kappa}\colon B \vdash A}$$

(где $\mathrm{O}_A = (\kappa^{A}_{T})^{s}$, $f^{\kappa} = \mathrm{O}_B f$).

Для импликативных систем с рассматриваемыми стрелками новый интересный аспект приобретает проблема дедукции. Обычная теорема дедукции для логических исчислений утверждает:

если $A \wedge B \vdash C$, то $A \vdash B \supset C$.

В случае чисто импликативных систем теорема дедукции приобретает несколько иную форму, поскольку в их языке отсутствует связка конъюнкции.

Пусть ***S*** будет представлять собой некоторую дедуктивную импликативную систему. Обозначим как ***S***[x] некоторое расширение ***S*** за счет добавления к ней новой аксиомы - стрелки $x$: Т⊢ $A$, которую мы (следуя терминологии Дж.Ламбека) назовем индетерминантом (неопределенной стрелкой). Очевидным образом стрелка $x$ не будет принадлежать системе ***S***, хотя и Т и $A$ принадлежат системе ***S*** в качестве ее объектов. Логиков обычно интересует случай, когда новая стрелка $x$: Т⊢ $A$ такова, что в ***S*** нет более стрелок подобного типа (т.е. отсутствуют допущения). Тем не менее, не следует исключать такой ситуации, когда в ***S*** уже есть такие стрелки, что может случиться тогда, когда вводится новое доказательство уже известной теоремы.

Рассмотрим полученную дедуктивную импликативную систему ***S***[x]. Ее объекты совпадают с объектами ***S***, в то время как стрелки отличаются от стрелок ***S*** за счет наличия новой стрелки $x$ и всех стрелок, полученных из нее с помощью операций на стрелках. Обычная теорема дедукции или теорема функциональной полноты в импликативной системе устанавливает, что

***Теорема дедукции***. *Для каждой стрелки типа* Т⊢ $B$ *в* ***S***[x], где $x$: Т⊢ *$A$, существует стрелка типа $A$⊢ $B$ из* ***S***.

Иначе это можно переформулировать следующим образом:

*С каждым доказательством* $\varphi(x)$: Т⊢ *$B$ из допущения* $x$:Т⊢ *$A$ может быть ассоциирована стрелка типа $A$⊢ $B$, не зависящая от $x$.*

В стиле натурального вывода эту теорему можно изобразить в виде дерева доказательства:

$$\frac{\begin{array}{c}[x\colon \mathrm{T}\vdash A]\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi(x)\colon \mathrm{T}\vdash B\end{array}}{\varphi\,(x)^{*}\colon A\vdash B}$$

Более общая (и тем самым более слабая) формулировка выглядит следующим образом:

*С каждым доказательством* $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$*:*$\mathrm{T}\vdash B$ *из допущений* $x_1$*:*$\mathrm{T}\vdash A_1$, ... , $x_m$*:*$\mathrm{T}\vdash A_m$ *может быть ассоциирована стрелка* $\mathrm{T}\vdash A_1 \supset(\ldots \supset(A_m \supset B)\ldots)$, *не зависящая от* $x_1, \ldots, x_m$.

(см. в этой связи [Curry 1954]).

Ее также условно можно изобразить в виде следующего дерева доказательства:

$$\frac{\begin{array}{c}[x_1{:}\mathrm{T}\vdash A_1]\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ [x_m{:}\mathrm{T}\vdash A_m]\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \varphi(x_1,\ldots,x_m){:}\mathrm{T}\vdash B\end{array}}{\varphi(x_1,\ldots,x_m)^*{:}\mathrm{T}\vdash A_1 \supset(\ldots \supset(A_m \supset B)\ldots)}$$

Для случая стрелки типа $B\vdash C$ теоремы дедукции выглядит следующим образом:

***Теорема дедукции***. *С каждым доказательством* $\varphi(x)$: $B\vdash C$ *из допущения* $x$:$\mathrm{T}\vdash A$ *может быть ассоциирована стрелка типа* $\mathrm{T}\vdash A \supset (B \supset C)$, *не зависящая от* $x$.

***Слабая теорема дедукции***. *С каждым доказательством* $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$: $B\vdash C$ *из допущений* $x_1$:$\mathrm{T}\vdash A_1$, ... , $x_m$:$\mathrm{T}\vdash A_m$ *может быть ассоциирована стрелка* $\mathrm{T}\vdash A_1 \supset(\ldots \supset(A_m \supset (B \supset C))\ldots)$, *зависящая от B и C, но не зависящая от* $x_1, \ldots, x_m$.

Теорему дедукции можно доказать для ***IBCWK***-импликативного исчисления (чего нельзя сделать, например, для ***IB***-импликативной системы).

***Теорема 1*** (теорема дедукции)**.** *В* ***IBCWK****-импликативном исчислении для каждого доказательства* $\varphi(x)$: $B\vdash C$ *из допущения* $x$:$\mathrm{T}\vdash A$ *существует стрелка* $f$: $\mathrm{T}\vdash A \supset (B \supset C)$, *не зависящая от* $x$.

***Доказательство***. Положим $f = k_{x\in A}\varphi(x)$[2]. Каждое доказательство $\varphi(x)$: $B\vdash C$ из допущения $x$: $\mathrm{T}\vdash A$ должно иметь одну из следующих форм:

---

[2] по меткому замечания К.Дошена [Došen 1996, p.271] $k_{x\in A}$ представляет собой аватару $\lambda x\in A$ (если сравнивать $k_{x\in A}\,\varphi(x)$ и $\lambda x\in A.\varphi(x)$).

(i) $k$: $B\vdash C$, доказательство ***IBCWK***-исчисления;
(ii) $x$: $\mathrm{T}\vdash A$ с $B = \mathrm{T}$ и $C = A$;
(iii) $\chi(x)\psi(x)$, где $\psi(x) = B\vdash D$, $\chi(x) = D\vdash C$;
(iv) $\ulcorner\psi(x)\urcorner$, где $\psi(x)$: $D\vdash E$; $B = \mathrm{T}$ и $C = D\supset E$;
(v) $\psi(x)^s$, где $\psi(x)$: $\mathrm{T}\vdash B\supset C$;
(vi) $1_A\supset\psi(x)$, где $\psi(x)$: $E\vdash N$,
(vii) $\psi(x)^\gamma$, где $\psi(x)$: $B\vdash D\supset C$;
(viii) $\psi(x)^w$, где $\psi(x)$: $B\vdash B\supset C$;
(ix) $\psi(x)^\kappa$, где $\psi(x)$: $\mathrm{T}\vdash C$.

Во всех случаях $\chi(x)$ и $\psi(x)$ являются более краткими доказательствами, чем $\varphi(x)$, и мы определяем индуктивно:

(i) $k_{x\in A}k = \ulcorner(\ulcorner k\urcorner \mathrm{O}_A)\urcorner$;
(ii) $k_{x\in A}x = \ulcorner\kappa^T{}_A\urcorner$;
(iii) $k_{x\in A}(\chi(x)\psi(x)) = \ulcorner(w_{AC}(1_A\supset(k_{x\in A}\chi(x))^{s\gamma})(k_{x\in A}\psi(x))^{s\gamma})^\gamma\urcorner$,
(iv) $k_{x\in A}\ulcorner\psi(x)\urcorner = (1_A\supset\kappa^T{}_{D\supset E})k_{x\in A}\psi(x)$,
(v) $k_{x\in A}\psi(x)^s = (k_{x\in A}\psi(x))^{s\gamma}$,
(vi) $k_{x\in A}1_A\supset\psi(x) = \ulcorner(1_A\supset(k_{x\in A}\psi(x))^{s\gamma})^\gamma\urcorner$,
(vii) $k_{x\in A}\psi(x)^\gamma = (1_A\supset\gamma^B{}_{DC})k_{x\in A}\psi(x)$,
(viii) $k_{x\in A}\psi(x)^w = (1_A\supset w_{BC})k_{x\in A}\psi(x)$,
(ix) $k_{x\in A}\psi(x)^\kappa = \ulcorner((k_{x\in A}\psi(x))^{s\gamma}\mathrm{O}_B)^\gamma\urcorner$.

Поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\varphi(x)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x)$ и $\psi(x)$ плюс один в случае (iii), и как длину $\psi(x)$ плюс один в случаях (iv) - (ix). ■

Здесь и далее ■ означает конец доказательства.

Для ***IB***-импликативной системы можно доказать следующую «обобщенную» слабую теорему дедукции:

***Теорема 2*** (обобщенная слабая теорема дедукции)**.** *В **IB**-импликативном исчислении с каждым доказательством* $\varphi(x_1,\dots,x_m)$: $B\vdash C$ *из допущений* $x_1$: $\mathrm{T}\vdash A_1$, ... , $x_m$: $\mathrm{T}\vdash A_m$ *может быть ассоциирована стрелка типа* $f$: $\mathrm{T}\vdash C_1\supset(\dots\supset(C_n\supset(B\supset C))\dots)$, *не зависящая от* $x_1$, ... ,$x_m$, *где* $C_i$ *есть либо одно из* $A_1$, ... , $A_m$, *либо **IB**-теорема.*

***Доказательство***. Будем писать $f = k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m}\varphi(x_1, \dots, x_m)$, где индекс $x \in A$ указывает, что $x$ имеет тип $A$. Заметим, что каждое доказательство $\varphi(x_1, \dots, x_m)$: $B \vdash C$ из допущений $x_1$: $\mathrm{T} \vdash A_1$, ... , $x_m$: $\mathrm{T} \vdash A_m$ должно иметь одну из следующих форм:

(i) $k$: $B \vdash C$, доказательство ***IB***-исчисления;

(ii) $x$: $\mathrm{T} \vdash A$ с $B = \mathrm{T}$ и $C = A$;

(iii) $\chi(x_1, \dots, x_m)\psi(x_1, \dots, x_m)$, где $\chi(x_1, \dots, x_m) = B \vdash D$, $\psi(x_1, \dots, x_m) = D \vdash C$;

(iv) $\ulcorner\psi(_1, \dots, x_m)\urcorner$, с $B = \mathrm{T}$ и $C = D \supset E$ и $\psi(x_1, \dots, x_m)$: $D \vdash E$;

(v) $\psi(x_1, \dots, x_m)^s$, где $\psi(x_1, \dots, x_m)$: $\mathrm{T} \vdash B \supset C$;

(vi) $1_A \supset \psi(x_1, \dots, x_m)$, где $B = A \supset D$, $C = A \supset E$, $\psi(x_1, \dots, x_m)$: $D \vdash E$.

Во всех случаях $\chi(x_1, \dots, x_m)$ и $\psi(x_1, \dots, x_m)$ являются более краткими доказательствами, чем $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, и мы определяем индуктивно:

(i) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m} k = \ulcorner 1_{A_1} \supset (\dots \supset (1_{A_m} \supset \ulcorner k \urcorner)\dots)\urcorner$: $\mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset \mathrm{T}) \dots) \supset A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (B \supset C)) \dots)$ (полагая $C_1 = A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset \mathrm{T})) \dots)$, $C_2 = A_1$, …, $C_n = A_m$);

(ii) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m} x = \ulcorner 1_{A_1} \supset (\dots \supset (1_{A_m} \supset (1_T \supset 1_A)) \dots))\dots)\urcorner$: $\mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset \mathrm{T}) \dots) \supset A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset A) \dots)$ (полагая $C_1 = A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset A)) \dots)$, $C_2 = A_1$, …, $C_n = A_m$);

(iii) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m}(\chi(x_1, \dots, x_m)\psi(x_1, \dots, x_m)) = \ulcorner 1_{A_1} \supset (\dots \supset (1_{A_m} \supset \beta^B{}_{DC}))\dots)\urcorner$: $\mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (D \supset C)) \dots) \supset (A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset ((B \supset D) \supset (B \supset C))\dots))$ (с учетом $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m}\chi(x_1, \dots, x_m)$: $\mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (D \supset C)) \dots)$ и $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m}\psi(x_1, \dots, x_m)$: $\mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (B \supset D)) \dots)$, и полагая $C_1 = A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (D \supset C)) \dots)$, $C_2 = A_1$, …, $C_n = B \supset D$),

(iv) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m}\ulcorner\psi(x_1, \dots, x_m)\urcorner = \ulcorner 1_{A_1} \supset (\dots \supset (1_{A_m} \supset (1_T \supset 1_{D \supset E})) \dots)\urcorner$: $\mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset (D \supset E))) \dots) \supset (A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset (D \supset E)))\dots))$ (где $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m}\psi(x_1, \dots, x_m)$: $\mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\dots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset$

$(D \supset E)))\ \ldots))$ и полагая $C_1 = A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset (D \supset E)))\ \ldots)$, $C_2 = A_1, \ldots, C_n = \mathrm{T})$;

(v) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}\psi(x_1, \ldots ,x_m)^s = \ulcorner 1_{A_1} \supset (\ldots \supset (1_{A_m} \supset (1_T \supset 1_{B \supset C}))\ \ldots)\urcorner : \mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset (B \supset C)))\ \ldots) \supset (A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset (B \supset C)))\ldots))$ (где $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}\psi(x_1, \ldots ,x_m): \mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset (B \supset C)))\ \ldots))$ и полагая $C_1 = A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset (\mathrm{T} \supset (D \supset E)))\ \ldots)$, $C_2 = A_1, \ldots, C_n = A_m)$;

(vi) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}1_A \supset \psi(x_1, \ldots ,x_m) = \ulcorner 1_{A_1} \supset (\ldots \supset (1_{A_m} \supset \ulcorner 1_A \supset \psi(x_1, \ldots ,x_m)\urcorner)\ \ldots)\urcorner : \mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset \mathrm{T})\ \ldots) \supset (A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset ((A \supset D) \supset (A \supset E)))\ldots))$ (где $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}\psi(x_1, \ldots ,x_m): \mathrm{T} \vdash A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset (D \supset E))\ \ldots))$ и полагая $C_1 = A_1 \supset (\ldots \supset (A_m \supset \mathrm{T})\ \ldots)$, $C_2 = A_1, \ldots, C_n = A_m)$.

Нетрудно заметить, что случаи (iv) и (v) отличаются только выбором $C_n$. Далее, поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\varphi(x_1, \ldots ,x_m)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x_1, \ldots ,x_m)$ и $\psi(x_1, \ldots ,x_m)$ плюс один в случае (iii) и как длину $\psi(x_1, \ldots ,x_m)$ плюс один в случаях (iv) - (vi). ■

Рассмотрим теперь следующий список гильбертовских стрелок, отвечающих известным аксиомам импликативных логических исчислений:

a1. $\mathrm{T} \vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$
a2. $\mathrm{T} \vdash ((A \supset A) \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$
a3. $\mathrm{T} \vdash A \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset C))$
a4. $\mathrm{T} \vdash A \supset ((A \supset B) \supset B)$
a5. $\mathrm{T} \vdash ((A \supset B) \supset C) \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset B) \supset C))$
a6. $\mathrm{T} \vdash (A \supset B) \supset (A \supset (A \supset B))$
a7. $\mathrm{T} \vdash (A \supset B) \supset ((C \supset D) \supset (A \supset B))$
a8. $\mathrm{T} \vdash (A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$
a9. $\mathrm{T} \vdash ((A \supset B) \supset A) \supset A$
a10. $\mathrm{T} \vdash (((A \supset B) \supset C) \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$

(см. [Salto Méndez 1999]). Стрелки a9 и a10 описывают логические аксиомы, известные под именем «классический закон Пирса» и «S5-закон Пирса».

С помощью стрелок из этого списка мы можем сформировать дедуктивные системы, отвечающие различным импликативным фрагментам известных логик.

Если добавить к дедуктивной импликативной ***IB***-системе стрелку

$$\beta' : A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$$

отвечающую гильбертовской стрелке a1, то полученная дедуктивная импликативная ***IBB′***-система будет соответствовать импликативной минимальной логике. Добавление стрелки $\beta'$ приводит также к добавлению нового правила

$$\frac{f : A \vdash B}{f \supset 1_C : B \supset C \vdash A \supset C}$$

(достаточно положить $f \supset 1_C = (\beta' \ulcorner f \urcorner)^s$).

Если добавить к дедуктивной импликативной ***IBB′***-системе стрелку

$$\alpha : (A \supset A) \supset (A \supset A) \vdash A \supset A$$

отвечающую стрелке a2, то полученная система $\mathrm{MLc}^{\rightarrow}$ соответствует системе расширенной минимальной логики. При этом добавляется правило

$$\frac{f : A \supset A \vdash A \supset A}{f^{\alpha} : A \vdash A}$$

(достаточно положить $f^{\alpha} = (\alpha \ulcorner f \urcorner)^s$).

Добавление к дедуктивной системе ***IBB′*** стрелки $w_{AB}$ превращает ее в дедуктивную релевантную импликативную систему, соответствующую импликативному фрагменту логической системы следования $\mathrm{T}^{\rightarrow}$.

Добавляя же к ***IBB′*** стрелку

$$\delta : A \vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset C)$$

отвечающей гильбертовской стрелке a3, получаем дедуктивную импликативную систему следования без сокращения $\mathrm{E\text{-}W}^{\rightarrow}$, которая соответствует импликативному фрагменту логики следования E без сокращения. В полученной системе имеет место правило

$$\frac{f : \mathrm{T} \vdash A}{f^{\delta} : A \supset (B \supset C) \vdash B \supset C}$$

(достаточно положить $f^{\delta} = (\delta f)^s$).

Добавление к ***IBB′*** вместо стрелки δ стрелки

$$\tau \colon A \vdash (A \supset B) \supset B$$

соответствующей гильбертовской стрелке a4, приводит к дедуктивной системе R-W$^{\rightarrow}$, отвечающей импликативному фрагменту релевантной логики R без сокращения. В R-W$^{\rightarrow}$ справедливо правило

$$\frac{f \colon \mathrm{T} \vdash A}{f^{\tau} \colon A \supset B \vdash B}$$

(достаточно положить $f^{\tau} = (\tau f)^{s}$).

Дедуктивную систему E$^{\rightarrow}$, отвечающую импликативному фрагменту логики следования E, получаем добавлением к T$^{\rightarrow}$ стрелки δ, а дедуктивную систему R$^{\rightarrow}$, отвечающую импликативному фрагменту релевантной логики R, получаем добавлением к T$^{\rightarrow}$ стрелки τ (получая и соответствующие дополнительные правила вывода).

Систему EMO$^{\rightarrow}$, отвечающую логике следования «смешения» EM, получаем теперь добавлением к E$^{\rightarrow}$ стрелки

$$\eta \colon (A \supset B) \supset C \vdash (A \supset B) \supset ((A \supset B) \supset C)$$

отвечающей гильбертовской стрелке a5. Это влечет за собой принятие следующего правила вывода

$$\frac{f \colon A \supset B \vdash C}{f^{\eta} \colon A \supset B \vdash (A \supset B) \supset C}$$

(достаточно положить $f^{\eta} = (\eta \ulcorner f \urcorner)^{s}$).

Дедуктивная система RM0$^{\rightarrow}$ (дедуктивный аналог релевантной логики R) получается при добавлении к R$^{\rightarrow}$ стрелки

$$\theta \colon A \supset B \vdash A \supset (A \supset B)$$

отвечающей гильбертовской стрелке a6 и приводящей к добавлению следующего правила вывода

$$\frac{f \colon A \vdash B}{f^{\theta} \colon A \vdash A \supset B}$$

(достаточно положить $f^{\theta} = (\theta \ulcorner f \urcorner)^{s}$).

Дедуктивную модальную систему S3$^{\rightarrow}$ (дедуктивный эквивалент импликативного фрагмента модальной логики S3) получаем добавлением к E$^{\rightarrow}$ стрелки

$$\zeta \colon A \supset B \vdash (C \supset D) \supset (A \supset B)$$

отвечающей гильбертовской стрелке a7 и дающей правило вывода

$$\frac{f \colon A \vdash B}{f^{\zeta} \colon C \supset D \vdash A \supset B}$$

(достаточно положить $f^{\zeta} = (\zeta \ulcorner f \urcorner)^s$).

Дедуктивную модальную систему $S4^{\rightarrow}$ (дедуктивный эквивалент импликативного фрагмента модальной логики S4) получаем добавлением к $E^{\rightarrow}$ стрелки

$$\lambda: A \supset B \vdash C \supset (A \supset B)$$

отвечающей гильбертовской стрелке a8 и дающей правило вывода

$$\frac{f: A \vdash B}{f^{\lambda}: C \vdash A \supset B}$$

(достаточно положить $f^{\lambda} = (\lambda \ulcorner f \urcorner)^s$).

Систему $J^{\rightarrow}$ (дедуктивный эквивалент импликативного фрагмента интуиционистской логики) мы получаем добавлением к $R^{\rightarrow}$ стрелки $\kappa^{B}{}_{A}$, а дедуктивная модальная система $S5^{\rightarrow}$ получается при добавлении к $E^{\rightarrow}$ стрелки

$$\mu: ((A \supset B) \supset C) \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$$

отвечающей гильбертовской стрелке a10 (S5-закон Пирса) и порождающей правило вывода

$$\frac{f: (A \supset B) \supset C \vdash A \supset B}{f^{\mu}: A \vdash B}$$

(достаточно положить $f^{\mu} = (\mu \ulcorner f \urcorner)^s$).

Наконец, дедуктивная классическая импликативная система $C^{\rightarrow}$ получается путем добавления к $J^{\rightarrow}$ стрелки Пирса

$$@: (A \supset B) \supset A \vdash A$$

отвечающей гильбертовской стрелке a9, и правила вывода

$$\frac{f: A \supset B \vdash A}{f^{@}: \mathrm{T} \vdash A}$$

(достаточно положить $f^{@!} = @f$).

## 4. Экспоненциальные дедуктивные категории

Мы определяем *экспоненциальную дедуктивную категорию,* наделяя дедуктивную категорию $A$ введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\ulcorner f \urcorner^s = f$$

$$\ulcorner g^s \urcorner = g$$

для всех $f: A \vdash B$ и $g: \mathrm{T} \vdash C \supset D$

Таким образом, для данного графа $\boldsymbol{X}$ мы можем сконструировать импликативные исчисления $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ и свободную экспоненциальную категорию $\boldsymbol{Fr}(\boldsymbol{X})$, порожденную $X$.

Пусть ***Grph*** будет категорией графов, чьими объектами являются графы и каждая стрелка $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ есть пара отображений $\boldsymbol{F}$:*Objects*($\boldsymbol{X}$) $\to$ *Objects*($\boldsymbol{Y}$) и $\boldsymbol{F}$:*Arrows*($\boldsymbol{X}$) $\to$ *Arrows*($\boldsymbol{Y}$), такая, что $f$: $X \to X'$ влечет $\boldsymbol{F}(f)$: $\boldsymbol{F}(X) \to \boldsymbol{F}(X')$.

Пусть ***Exp*** будет категория экспоненциальных дедуктивных категорий, чьими объектами являются экспоненциальные дедуктивные категории, а стрелками - функторы $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$, сохраняющие экспоненциальную структуру, т.е.

$$\boldsymbol{F}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},\ \boldsymbol{F}(A \supset B) = \boldsymbol{F}(A) \supset \boldsymbol{F}(B),\ \boldsymbol{F}(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner \boldsymbol{F}(f) \urcorner,$$
$$\boldsymbol{F}(f^s) = \boldsymbol{F}(f)^s.$$

Пусть $\boldsymbol{U}$ будет обычным "стирающим" функтором ***Exp***$\to$***Grph***. С каждым графом $\boldsymbol{X}$ мы можем ассоциировать морфизм графов $\boldsymbol{H_X}$: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{UF}(\boldsymbol{X})$ следующим образом: $\boldsymbol{H_X}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$ и, если $f$: $X \to Y$ есть стрелка в $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{H_X}(f) = f$ (классы эквивалентности $f$ рассматриваются как доказательства в $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$). Мы имеем следующее универсальное свойство:

***Предложение 1***. *Для любой экспоненциальной дедуктивной категории* $\boldsymbol{A}$ *и любого морфизма* $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{U}(\boldsymbol{A})$ *графов существует единственная стрелка* $\boldsymbol{F'}$: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{A}$ *в* ***Exp****, такая, что* $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{F'})\boldsymbol{H_X} = \boldsymbol{F}$.

***Доказательство***. Конструкция $\boldsymbol{F'}$ требует от нас выполнения следующих условий:

$$\boldsymbol{F'}(X) =: \boldsymbol{F}(X),\ :\boldsymbol{F'}(\mathrm{T}) =: \boldsymbol{F}(\mathrm{T}),$$
$$\boldsymbol{F'}(A \supset B) = \boldsymbol{F'}(A) \supset \boldsymbol{F'}(B),$$
$$\boldsymbol{F'}(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner \boldsymbol{F'}(f) \urcorner,\ \boldsymbol{F'}(f^s) = \boldsymbol{F'}(f)^s.$$

Требуется проверить, что $\boldsymbol{F'}$ определен правильно, т.е. что для всех $f,g{:}A \vdash B$ в $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{X})$ $f = g$ влечет $\boldsymbol{F'}(f) = \boldsymbol{F'}(g)$. Последнее очевидно, поскольку никаких других, кроме требуемых нам, тождеств в $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{X})$ не выполняется. ■

Подобное универсальное свойство в математике обычно расценивают как наличие сопряженности, т .е. что $\boldsymbol{F}$ есть функтор ***Grph***$\to$***Exp***, левосопряженный к $\boldsymbol{U}$ с сопряжением $\boldsymbol{H_X}$: $\boldsymbol{Id} \to \boldsymbol{UF}$ (см. четвертую главу).

Для экспоненциальных дедуктивных категорий можно определить понятие подстановки доказательств, что можно описать следующим образом.

Для данных объектов $A_0$ и $A$ категории $\mathbf{A}$ можно добавить индетерминант (= неопределенную стрелку) $x$: $A_0 \vdash A$ различными способами. Одним из способов, например, было бы присоединение стрелки $x$: $A_0 \vdash A$ к лежащему в основании $\mathbf{A}$ графу и затем формирование категории, свободно порожденной новым графом. Согласно другому способу можно вначале сформировать дедуктивную систему $\mathbf{A}[x]$, основанную на "допущении" $x$. Формулы $\mathbf{A}[x]$ являются объектами $\mathbf{A}$, а доказательства $\mathbf{A}[x]$ формируются из стрелок $\mathbf{A}$ и новой стрелки $x$: $A_0 \vdash A$ путем соответствующего использования правил вывода.

Чтобы убедиться в том, что $\mathbf{A}[x]$ является категорией и что включение $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}[x]$ будет функтором, следует проверить выполнение специальных тождеств между доказательствами. Если тождество доказательств обозначить как $=_x$, то можно рассматривать $=_x$ как наименьшее отношение эквивалентности $\equiv$ между доказательствами, такое, что:

$gf = h$ в $\mathbf{A}$ влечет $gf \equiv h$,

$\psi(x) \equiv \psi'(x)$ и $\chi(x) \equiv \chi'(x)$ влечет $\chi(x)\psi(x) \equiv \chi'(x)\psi'(x)$,

$\varphi(x)1_B \equiv \varphi(x) \equiv 1_C\,\varphi(x)$,

$(\chi(x)\psi(x))\varphi(x) \equiv \chi(x)(\psi(x)\varphi(x))$,

для всех $\varphi(x)$: $B \vdash C$, $\psi(x)\psi'(x)$: $C \vdash D$, $\chi(x)\chi'(x)$: $D \vdash E$.

Заметим, что в виду закона рефлексивности $\equiv$ и $=_x$ расширяют тождество в $\mathbf{A}$. Стрелки в категории $\mathbf{A}[x]$ являются доказательствами при допущении $x$ по модулю $=_x$, их можно рассматривать как *полиномы* по $x$.

В случае экспоненциальных дедуктивных категорий отношение эквивалентности $\equiv$ между доказательствами должно также выполнять следующие условия:

$\ulcorner f \urcorner = h$ в $\mathbf{A}$ влечет $\ulcorner f \urcorner \equiv h$,

$f^s = h$ влечет $f^s \equiv h$,

$\ulcorner f \urcorner^s \equiv f$,

$\ulcorner g^s \urcorner \equiv g$.

***Предложение 2*** (подстановка доказательств)**.** *Для данной экспоненциальной дедуктивной категории* $\mathbf{A}$*, индетерминанта* $x$:

*$A_0 \vdash A$ над $\boldsymbol{A}$ и стрелки $a$: $A_0 \vdash A$, существует единственный функтор $\boldsymbol{S}_x^a$: $\boldsymbol{A}[x] \to \boldsymbol{A}$, такой, что $\boldsymbol{S}_x^a(x) = a$ и $\boldsymbol{S}_x^a \boldsymbol{H}_X = \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$.*

***Доказательство***. Вначале докажем, что:

Для данной категории $\boldsymbol{A}$, и индетерминанта $x$: $A_0 \vdash A$ над $\boldsymbol{A}$, функтора $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ и любой стрелки $b$: $\boldsymbol{F}(A_0) \vdash \boldsymbol{F}(A)$ в $\boldsymbol{B}$ имеется единственный функтор $\boldsymbol{F}'$: $\boldsymbol{A}[x] \to \boldsymbol{B}$, такой, что $\boldsymbol{F}(x) = b$ и $\boldsymbol{F}'\boldsymbol{H}_X = \boldsymbol{F}$.

Каждое доказательство $\varphi(x)$ при допущении $x$ может иметь следующую форму:

$k, x, \chi(x)\psi(x), \ulcorner \psi(x) \urcorner, \psi(x)^s$

где $k$ есть стрелка в $\boldsymbol{A}$, т.е. постоянный полином. Решающим шагом является определение $\boldsymbol{F}'(\varphi(x))$. Определим индуктивно:

$\boldsymbol{F}'(k) = \boldsymbol{F}(k)$,
$\boldsymbol{F}'(x) = b$,
$\boldsymbol{F}'(\chi(x)\psi(x)) = \boldsymbol{F}'(\chi(x))\, \boldsymbol{F}'(\psi(x))$.
$\boldsymbol{F}'(\ulcorner \psi(x) \urcorner) = \ulcorner \boldsymbol{F}'(\psi(x)) \urcorner$,
$\boldsymbol{F}'(\psi(x)^s) = (\boldsymbol{F}'(\psi(x)))^s$.

Остается лишь показать, что $\boldsymbol{F}'$ определен на полиномах, а не на доказательствах, то есть, что $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$ влечет $\boldsymbol{F}'(\varphi(x)) = \boldsymbol{F}'(\varphi'(x))$. Если в последнем случае писать $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$, то достаточно проверить, что $\equiv$ имеет все свойства подстановки и отвечает всем тождествам экспоненциальной категории. Например, чтобы проверить, что $\ulcorner \varphi(x) \urcorner^s \equiv \varphi(x)$, мы вычисляем $\boldsymbol{F}'(\ulcorner \varphi(x) \urcorner^s) = (\boldsymbol{F}'(\ulcorner \varphi(x) \urcorner)^s = (\ulcorner \boldsymbol{F}'(\varphi(x)) \urcorner)^s$ и т. д.

Теперь, чтобы получить доказательство нашего предложения, достаточно положить $\boldsymbol{F} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$. ■

***IBCWK***-экспоненциальную дедуктивную категорию мы получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$(1_A \supset g)(1_A \supset f) = 1_A \supset gf$,
для всех $f$: $B \vdash C$, $g$: $C \vdash D$;
$f^{\gamma\gamma} = f$;
$(\ulcorner f \urcorner)^w = f$, где $f$: $\mathrm{T} \vdash C$;
$f = \mathrm{O}_A$, для всех $f$: $A \vdash \mathrm{T}$.

Последнее уравнение утверждает, что T является терминальным объектом

Для ***IBCWK***-экспоненциальных дедуктивных категорий можно теперь доказать следующую теорему, улучшающую теорему дедукции:

***Теорема 1*** (функциональная полнота)**.** Для *любого полинома* $\varphi(x){:}B\vdash C$ *по индетерминанту* $x$: $\mathrm{T}\vdash A$ *над* ***IBCWK***-*экспоненциальной дедуктивной категорией мы можем получить единственную стрелку* $f$: $\mathrm{T}\vdash A\supset(B\supset C)$, *такую, что* $((f)^s x)^s =_x \varphi(x)$.

**Доказательство**. Положим, как в доказательстве теоремы дедукции, $f = k_{x\in A}\varphi(x)$. Проверяем индукцией по длине доказательства $\varphi(x)$, что

$$((k_{x\in A}\varphi(x))^s x)^s =_x \varphi(x).$$

Действительно, учитывая все виды доказательств в ***IBCWK***-экспоненциальной категории (беря их из доказательства теоремы дедукции для ***IBCWK***-импликативного исчисления), получаем:

$((\ulcorner(\ulcorner k\urcorner \mathrm{O}_A)\urcorner)^s x)^s =_x k$ (где $k$: $B\vdash C$, доказательство ***IBCWK***-исчисления),

$((\ulcorner \kappa^T{}_A\urcorner)^s x)^s =_x x$ (где $B = \mathrm{T}$ и $C = A$),

$((\ulcorner(w_{AC}(1_A\supset k_{x\in A}\chi(x)^{s\gamma})k_{x\in A}\psi(x)^{s\gamma})^{\gamma}\urcorner)^s x)^s =_x \chi(x)\psi(x)$ (где $\chi(x)= D\vdash C$, $\psi(x) = B\vdash D$),

$(((1_A\supset\kappa^T{}_{D\supset E})k_{x\in A}\psi(x))^s x)^s =_x \ulcorner\psi(x)\urcorner$ (где $B = \mathrm{T}$ и $C = D\supset E$ и $\psi(x)$: $D\vdash E$),

$(((k_{x\in A}\psi(x))^{s\gamma})^s x)^s =_x \psi(x)^s$ (где $\psi(x)$: $\mathrm{T}\vdash B\supset C$),

$((\ulcorner(1_A\supset(k_{x\in}\psi(x))^{s\gamma})^{\gamma}\urcorner)^s x)^s =_x 1_A\supset\psi(x)$ (где $\psi(x)$: $E\vdash N$),

$(((1_A\supset\gamma^B{}_{DC})k_{x\in A}\psi(x))^s x)^s =_x \psi(x)^{\gamma}$, где $\psi(x)$: $B\vdash D\supset C$;

$((1_A\supset w_{BC})k_{x\in A}\psi(x))^s x)^s =_x \psi(x)^w$, где $\psi(x)$: $B\vdash B\supset C$;

$((\ulcorner((k_{x\in A}\psi(x))^{s\gamma}\mathrm{O}_B)^{\gamma}\urcorner)^s x)^s =_x \psi(x)^{\kappa}$, где $\psi(x)$: $\mathrm{T}\vdash C$.

Следующим шагом является проверка того, что $k_{x\in A_m}\varphi(x)$ зависит от полинома $\varphi(x)$, то есть, от класса эквивалентности доказательства $\varphi(x)$ по модулю $=_x$. Будем писать $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ вместо $k_{x\in A}\varphi(x) = k_{x\in A}\psi(x)$. Легко проверить, что $\equiv$ обладает всеми подстановочными свойствами и выполняет все условия, которые должно выполнять тождество в $\boldsymbol{A}[x]$. Поскольку $=_x$ было определено как наименьшее такое отношение эквивалентности, отсюда следует, что $=_x$ содержится в $\equiv$, т.е. что имеет место

$\varphi(x) =_x \psi(x)$ влечет $k_{x\in A}\varphi(x) = k_{x\in A}\psi(x)$,

как и утверждалось.

Проверим, например, что если $1_A \supset f = h$ в $\boldsymbol{A}$, то $1_A \supset f \equiv h$ (полагая $f\colon B \vdash C$). Действительно:

$$k_{x\in A}(1_A \supset f) = \ulcorner(1_A \supset (k_{x\in A} f)^{s\gamma})^{\gamma}\urcorner = \ulcorner(1_A \supset (\kappa^{A}{}_{C} f))^{\gamma}\urcorner = k_{x\in A}\, h.$$

Наконец, чтобы доказать единственность $f\colon \mathrm{T} \vdash A \supset (B \supset C)$ допустим что $((f)^s x)^s =_x \varphi(x)$. Тогда можно утверждать, что $f = k_{x\in A}\varphi(x)$. Действительно:

$k_{x\in A}\varphi(x) = k_{x\in A}((f)^s x)^s = (k_{x\in A}((f)^s x))^{s\gamma} =$

$(\ulcorner(w_{AC}(1_A \supset (k_{x\in A}(f)^s)^{s\gamma})(k_{x\in A} x)^{s\gamma})^{\gamma}\urcorner)^{s\gamma} =$

$w_{AC}(1_A \supset ((k_{x\in A} f)^{s\gamma})^{s\gamma})(\ulcorner \kappa^{T}{}_{A}\urcorner)^{s\gamma} = w_{AC}(1_A \supset ((k_{x\in A} f)^{s\gamma})^{s\gamma})(\kappa^{T}{}_{A})^{\gamma} =$

$w_{AC}(1_A \supset (\kappa^{A}{}_{A\supset(B\supset C)} f)^{s\gamma})(\kappa^{T}{}_{A})^{\gamma} = f.$ ■

Можно получить теорему функциональной полноты для ***IBCWK***-экспоненциальных дедуктивных категорий и по аналогии с комбинаторной полнотой для множества комбинаторов {***B,C,W,K***},. Достаточно адаптировать для нашего случая соответствующую версию алгоритма, позволяющего решить для любого комбинаторного терма, стратифицирован он или нет (см. [Curry 1969], [Hindley 1969]). Однако этот алгоритм несколько сложен, чтобы его можно было описать здесь чисто формальным образом.

Экспоненциальные дедуктивные категории, соответствующие дедуктивным импликативным системам, приведенным в предыдущем параграфе, могут быть получены путем добавления к (базисным) категориям тождеств, приведенных в следующей таблице:

| ***Категория*** | ***Базис*** | ***Тождества*** | ***Стрелки*** |
|---|---|---|---|
| ***IBB′*** | ***IB*** | $(f\supset 1_B)(g\supset 1_B) = fg\supset 1_B$ | $f\colon A \vdash B$,<br>$g\colon B \vdash C$ |
| ***MLc*** | ***IBB′*** | $1_{A\supset A}{}^{\alpha} = 1_A$ | |
| ***E-W*** | ***IBB′*** | $\ulcorner(f^{\delta}\ulcorner g\urcorner)\urcorner = \ulcorner gf\urcorner$ | $f\colon \mathrm{T} \vdash A$,<br>$g\colon A \vdash B \supset C$ |
| ***R-W*** | ***IBB′*** | $(f^{\tau}\ulcorner g\urcorner) = gf$ | $f\colon \mathrm{T} \vdash A$,<br>$g\colon A \vdash B$ |
| ***T*** | ***IBB′*** | $(\ulcorner f\urcorner)^{w} = f$ | $f\colon \mathrm{T} \vdash C$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***E*** | ***T*** | $\ulcorner(f^{\delta}\ulcorner g\urcorner)\urcorner = \ulcorner gf\urcorner$ | $f$: T$\vdash A$,<br>$g$: $A\vdash B\supset C$ |
| ***R*** | ***T*** | $f^{\tau}\ulcorner g\urcorner = gf$ | $f$: T$\vdash A$,<br>$g$: $A\vdash B$ |
| ***EM0*** | ***E*** | $(\ulcorner(f^{\eta}\ulcorner g\urcorner)\urcorner)\ulcorner g\urcorner =$<br>$= f\ulcorner g\urcorner$ | $f$: $A\supset B\vdash C$,<br>$g$: $A\vdash B$ |
| ***RM0*** | ***R*** | $(\ulcorner f^{\theta}g\urcorner)g = fg$ | $f$: $A\vdash B$,<br>$g$: T$\vdash A$ |
| ***S*3** | ***E*** | $\ulcorner(f^{\zeta}\ulcorner g\urcorner)\urcorner = f$ | $f$: $A\vdash B$,<br>$g$: $C\vdash D$ |
| ***S*4** | ***E*** | $f^{\lambda}g = f$ | $f$: $A\vdash B$,<br>$g$: T$\vdash C$ |
| ***J*** | ***R*** | $f = \mathrm{O}_A$ | $f$: $A\vdash$ T |
| ***S*5** | ***E*** | $\ulcorner gf^{\mu}\urcorner = \mathrm{g}f\ulcorner g\urcorner$ | $f$:$(A\supset B)\supset C\vdash$<br>$\vdash A\supset B$,<br>$g$: $C\vdash D$ |
| ***C*** | ***J*** | $gf^{@} = \mathrm{g}f\ulcorner g\urcorner$ | $f$: $A\supset B\vdash A$,<br>$g$: $A\vdash B$ |

**5. Секвенциальные импликативные дедуктивные системы**

Сформулируем понятие секвенциальной дедуктивной системы, следуя [Lambek 1988]. Секвенциальная дедуктивная система представляет собой мультиграф, состоящий из класса стрелок (называемых также "секвенциями") и класса объектов (иногда называемых "типами") и двух отображений

Начало: {стрелки} $\to$ {объекты}*

Конец: {стрелки} $\to$ {объекты}

где {объекты}* представляет собой свободный моноид, порожденный классом объектов, его элементами являются последовательности $\Gamma = A_1 \ldots A_{\mathrm{n}}$ объектов. Заметим, что $n$ может быть равно нулю и в этом случае $\Gamma$ представляет собой пустую последовательность. Стрелка $f$: $\vdash B$ также называется элементом $B$.

Чтобы получить минимальное секвенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле (но без структурных правил), введем специальную стрелку

$$1_A\colon A \vdash A$$

и бинарную операцию на стрелках:

$$\frac{f\colon \Theta \vdash A \quad g\colon \Gamma A \Delta \vdash B}{g\langle f \rangle\colon \Gamma\Theta\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Импликативное секвенциальное дедуктивное исчисление ***GI*** мы получаем при введении специальных стрелок

$$\varepsilon_{AB}\colon A\ (A \supset B) \vdash B$$
$$i_A\colon\ \vdash A$$

и правил

$$\frac{f\colon A\Delta \vdash B}{f^{\varepsilon}\colon \Delta \vdash A \supset B}$$

$$\frac{f\colon \Gamma\Delta \vdash C}{f^{i}\colon \Gamma \mathrm{T} \Delta \vdash C}$$

Как и в случае импликативного дедуктивного исчисления, легко видеть, что наше импликативное секвенциальное дедуктивное исчисление ***GI*** соответствует системе **I**. Действительно, мы получаем:

а) аксиому **I** в виде:

$$((1_A)^{i})^{\varepsilon}\colon \mathrm{T} \vdash A \supset A$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{f\colon \mathrm{T} \vdash A \qquad\qquad g\colon \mathrm{T} \vdash A \supset B}{f\langle \varepsilon \langle g \rangle\rangle\langle i \rangle\colon \mathrm{T} \vdash B}$$

Если мы теперь введем в нашей системе новую специальную стрелку, выглядящую следующим образом:

$$\beta^{A}{}_{BC}\colon B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$$

то мы получаем секвенциальное импликативное исчисление ***GIB***, соответствующее системе минимальной импликативной логики ***IB*** [Карпенко 1993, с.230]. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f\colon B\Delta \vdash C}{f^{\beta}\colon A\ (A \supset B)\ \Delta \vdash C} \text{ (слабая транзитивность)}$$

Для этого достаточно положить

$$f^{\beta} = \varepsilon\langle \varepsilon \langle \beta \langle f^{\varepsilon} \rangle\rangle\rangle.$$

Аксиому ***B*** получаем теперь в виде следующей стрелки:

$$(\beta^{A}{}_{BC})^{\varepsilon\, i}\colon \mathrm{T} \vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к секвенциальному импликативному исчислению ***GIB*** аксиомы, являющиеся аналогами импликативных аксиом ***C, W, K*** :

$$\gamma^{A}{}_{BC}\colon A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$$

$$w_{AB}: A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$$
$$\kappa^{B}_{A}: A \vdash B \supset A$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: BA\Delta \vdash C}{f^{\gamma}: AB\Delta \vdash C} \text{ (перестановка)}$$

(достаточно положить $f^{\gamma} = \varepsilon \langle \varepsilon \langle \gamma \langle f^{\varepsilon\,\varepsilon} \rangle\rangle\rangle$

$$\frac{f: AA\Delta \vdash B}{f^{w}: A\Delta \vdash B} \text{ (сокращение)}$$

(достаточно положить $f^{w} = \varepsilon \langle w \langle f^{\varepsilon\,\varepsilon} \rangle\rangle$)

$$\frac{f: \Delta \vdash A}{f^{\kappa}: B\Delta \vdash A} \text{ (ослабление)}$$

(где $f^{\kappa} = \varepsilon \langle \kappa \langle f \rangle\rangle$).

## 6. Экспоненциальные дедуктивные мультикатегории

Дедуктивная мультикатегория представляет собой дедуктивную систему, в которой следующие уравнения между доказательствами имеют место:

$1_A \langle f \rangle = f,$
$g \langle 1_A \rangle = g,$
$h \langle g \langle f \rangle \rangle = h \langle g \rangle \langle f \rangle,$
$g' \langle f \rangle \langle f' \rangle = g' \langle f'' \rangle \langle f \rangle$
для всех $f: \Lambda \vdash A$, $g: \Gamma A\Delta \vdash B$, $g \langle f \rangle: \Gamma\Lambda\Delta \vdash B$, $h: \Gamma' B\Delta' \vdash C$, $f': \Lambda' \vdash A'$, $g': \Gamma A\Delta A' \vdash C$.

Существует естественный способ описания категорных тождеств, связанный с формулированием так называемого *внутреннего* (*типового*) *языка* мультикатегорий (см., например, [Lambek 1989, p. 224]). С этой целью вводится счетное множество переменных каждого типа и секвенции интерпретируются как (мультилинейные) операции.

Определим индуктивно *термы* всех типов:

1) каждая переменная есть терм своего типа,
2) если $f: A_1 \ldots A_m \vdash A_{m+1}$ представляет собой секвенцию и $a_i$ есть терм типа $A_i$, для $i = 1, \ldots, m$, то $fa_1 \ldots a_m$ есть терм типа $A_{m+1}$.

Заметим, что вводятся переменные всех типов, но не переменные для типов.

*Тождество* (или скорее *доказуемое тождество*) термов одного и того же типа есть отношение конгруэнтности, удовлетворяющее обычной подстановке термов вместо свободных переменных. Таким образом, из $\varphi(x) = \varphi'(x)$ можно вывести $\varphi(a) = \varphi'(a)$, где $a$ есть любой терм того же самого типа, что и переменная $x$. В принципе, однако, можно декларировать переменные и записывать это как $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$. Помимо обычных правил для равенства также допускаются следующие правила для тождественной секвенции и сечения:

$1_A\, x = x,$

$g\langle f\rangle uwv = gufwv.$

Здесь $x$ есть переменная типа $A$, $u = x_1 \ldots x_m$ является последовательностью переменных типа $\Gamma = A_1 \ldots A_m$, $v$ есть последовательность переменных тип $\Delta$ и $w$ есть последовательность переменных типа $\Lambda$.

Описание внутреннего языка на этом практически заканчивается, Тождества между секвенциями теперь вполне определимы: про две секвенции $f,g$: $A_1 \ldots A_m \vdash\ \vdash A_{m+1}$ говорят, что они *тождественны*, если $f\, x_1 \ldots x_m = g\, x_1 \ldots x_m$ доказуемо во внутреннем языке. Существенно, что $x_{mi}$ все различны, даже если две $A_i$ могут совпадать. Отсюда можно легко вывести описанные ранее тождества в мультикатегориях. Например, для $f : \Delta \vdash A$, $g : \Gamma A \Delta \vdash B$ и $h$: $\Gamma' B \Delta' \vdash C$ вычисляем:

$$h\langle g\langle f\rangle\rangle u'uwvv' = hu'g\langle f\rangle uwvv' = hu'gufwvv' = h\langle g\rangle u'ufwvv' =$$
$$= h\langle g\rangle\langle f\rangle u'uwvv'.$$

Мы определяем ***экспоненциальную дедуктивную мультикатегорию,*** наделяя дедуктивную мультикатегорию $\boldsymbol{A}$ введенными правилами вывода и дополнительными тождествами: $\vdash$

$\varepsilon \langle f^{\varepsilon} \rangle = f,$

для всех $f$: $A\Gamma \vdash B$,

$f^{i} \langle\, i\, \rangle = f,$

для всех $f$: $\Gamma\Delta \vdash C$.

В частности, $(\varepsilon_{AB})^{\varepsilon} = 1_{A \supset B}$ , $(i_T)^{i} = 1_T$.

С помощью введенных правил нетрудно получить следующее правило:

$$\frac{f\colon \Lambda \vdash A \quad g\colon \Gamma B \Delta \vdash C}{g\{f\}\colon \Gamma\,(A \supset B)\,\Lambda\Delta \vdash C}\ \{\text{-}\}$$

Для этого достаточно положить:

$g\{f\} = g\langle \varepsilon \langle f \rangle\rangle.$

***GIBCWK***-экспоненциальную дедуктивную мультикатегорию получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$g\langle f^{\beta} \rangle = (g\langle f \rangle)^{\beta}$, для всех $f$: $A\Delta \vdash B$; $g$: $B\Gamma \vdash C$;

$g^{\beta} \langle f \rangle = (g\langle f \rangle)^{\beta}$, для всех $f$: $\Gamma \vdash A$; $g$: $B\Delta A\Theta \vdash C$;

$f^{\gamma\gamma} = f$, для всех $f$: $AB\Delta \vdash C$;

$g\langle f^{\gamma} \rangle = (g\langle f \rangle)^{\gamma}$, для всех $f$: $AB\Delta \vdash C$; $g$: $C\Gamma \vdash D$;

$g^{\gamma} \langle f \rangle = (g\langle f \rangle)^{\gamma}$, для всех $f$: $A\Delta \vdash B$; $g$: $CDB\Gamma \vdash E$;

$(f^{ii})^{w} \langle i \rangle = f$, для всех $f$: $\Delta \vdash C$;

$g\langle f^{w} \rangle = (g\langle f \rangle)^{w}$, для всех $f$: $AA\Delta \vdash B$; $g$: $B\Gamma \vdash C$;

$g^{w} \langle f \rangle = (g\langle f \rangle)^{w}$, для всех $f$: $\Delta \vdash B$; $g$: $CCB\Gamma \vdash D$;

$f = O_A$, где $O_A = i^{\kappa}$ и $f$: $A \vdash T$ (т.е. $T$ является терминальным объектом);

$g\langle f^{\kappa} \rangle = (g\langle f \rangle)^{\kappa}$, для всех $f$: $A\Delta \vdash B$; $g$: $B\Gamma \vdash C$;

$g^{\kappa} \langle f \rangle = (g\langle f \rangle)^{\kappa}$, для всех $f$: $\Delta \vdash B$; $g$: $B\Gamma \vdash C$.

Во внутреннем языке единственность секвенций может быть выражена также в виде правил вывода, отсюда тождества импликативной дедуктивной мультикатегории могут быть переписаны следующим образом:

$\varepsilon y f^{\varepsilon} u = fyu, \qquad \dfrac{\varepsilon y g_1 u = \varepsilon y g_2 u}{g_1 u = g_2 u}$

$f^{i} u\boldsymbol{i}v = fuv, \qquad \dfrac{g_1 u\boldsymbol{i}v = g_2 u\boldsymbol{i}v}{g_1 u s_0 v = g_2 u s_0 v}$

где $s_0$ есть переменная типа T;

$f^{\beta} u\boldsymbol{ii} = f u\boldsymbol{i}, \qquad \dfrac{g_1 u\boldsymbol{ii} = g_2 u\boldsymbol{ii}}{g_1 u s_0 s_0 = g_2 u s_0 s_0}$

где $s_0$ есть переменная типа T;

$f^{\gamma\gamma} uvw = fuvw, \qquad \dfrac{g_1 uvw = g_2 uvw}{g_1 = g_2}$

$(f^{ii})^{w} = fuv, \qquad \dfrac{g_1 u\boldsymbol{ii}v = g_2 u\boldsymbol{ii}v}{g_1 u s_0 s_0 v = g_2 u\, s_0 s_0 v}$

где $s_0$ есть переменная типа T.

## 7. Свободные экспоненциальные дедуктивные мультикатегории

Для данного мультиграфа ***G*** мы можем сконструировать импликативные исчисления ***D***(***G***) и свободную экспоненциальную дедуктивную мультикатегорию ***Fr***(***G***), порожденную ***G***. Объекты этой мультикатегории получаются индуктивно из объектов $\boldsymbol{G}$ с помощью операции $\supset$. Ее секвенции получаются из секвенций $\boldsymbol{G}$ путем присоединения базисных секвенций $1_A$, $\varepsilon_{AB}$, $i_A$ т. д., и формирования новых операций из старых с помощью правил $(\text{-})^{\varepsilon}$, $(\text{-})^{i}$ и т.д. Наконец, тождества между сравнимыми секвенциями в $\boldsymbol{Fr}(\boldsymbol{G})$ будут те и только те, которые следуют из тождеств в $\boldsymbol{G}$, и мультикатегорные тождества

$$h \langle g \langle f \rangle\rangle = h\langle g \rangle\langle f \rangle,$$
$$g' \langle f \rangle\langle f' \rangle = g' \langle f'' \rangle\langle f \rangle$$

Помимо этого, добавляются еще и тождества

$$\varepsilon \langle f^{\varepsilon} \rangle = f,$$
$$(\varepsilon \langle g \rangle)^{\varepsilon} = g,$$
$$(g \langle i \rangle)^{i} = g,$$
$$f^{i} \langle i \rangle = f,$$

и т. п., рассмотренные ранее.

Введем теперь понятие мультифунктора, используя следующие определения:

***Определение 1.*** Мультифунктор $\boldsymbol{F}$ из дедуктивной мультикатегории $\boldsymbol{M}$ в дедуктивную мультикатегорию $\boldsymbol{M}'$ представляет собой отображение класса объектов $\boldsymbol{M}$ в класс объектов $\boldsymbol{M}'$ вместе с отображением из класса стрелок $\boldsymbol{M}$ в класс стрелок $\boldsymbol{M}'$, такие, что если $f$: $A_1 \ldots A_n \vdash B$ есть стрелка в $\boldsymbol{M}$, то $\boldsymbol{F}(f)$: $\boldsymbol{F}(A_1) \ldots \boldsymbol{F}(A_n) \vdash \mathbf{F}(B)$ есть стрелка в $\boldsymbol{M}'$ и $\boldsymbol{F}(1_A) = 1_{\boldsymbol{F}(A)}$, $\boldsymbol{F}(g \langle f \rangle) = \boldsymbol{F}(g) \langle \boldsymbol{F}(f) \rangle$.

***Определение 2.*** Экспоненциальный мультифунктор $\boldsymbol{F}$ из экспоненциальной дедуктивной мультикатегории $\boldsymbol{M}$ в экспоненциальную дедуктивную мультикатегорию $\boldsymbol{M}'$ представляет собой мультифунктор, сохраняющий экспоненциальную структуру, т.е.

$$\boldsymbol{F}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},$$
$$\boldsymbol{F}(A \supset B) = \boldsymbol{F}(A) \supset \boldsymbol{F}(B),$$
$$\boldsymbol{F}(\varepsilon_{AB}) = \varepsilon_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},$$
$$\boldsymbol{F}(i_A) = i_{\boldsymbol{F}(A)}.$$

Пусть $\boldsymbol{U}$ будет стирающим мультифунктором, тогда мультифунктор $\boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{UF}(\boldsymbol{G})$ будет, как известно, полным и точным [Lambek 1993] (полнота свидетельствует о том, что мультифунктор не порождает никаких новых секвенций по сравнению со старыми, а точность свидетельствует об отсутствии новых тождеств между секвенциями).

Пусть $\boldsymbol{G}$ будет ***GIBCWK***-мультикатегорией. Для экспоненциального ***GIBCWK***-мультифунктора $\boldsymbol{F}$ (т.е. сохраняющего ***BCWK***-структуру $\boldsymbol{G}$) имеет место следующая теорема:

***Теорема 1.*** (устранение сечения). *Если стрелки* $\varepsilon$, $i$, $\beta$, $\gamma$, $w$, $\kappa$ *заменить на правила* $\{\text{-}\}$, $(\text{-})^i$, $(\text{-})^\beta$, $(\text{-})^\gamma$, $(\text{-})^w$, $(\text{-})^\kappa$, *то любая секвенция в* $\boldsymbol{UF}(\boldsymbol{G})$, *сконструированная с помощью правил сечения, будет эквивалентна секвенции, сконструированной без применения правила сечения.*

***Доказательство***. Для доказательства, прежде всего, без потери общности допускаем, что стрелки $f\colon \Lambda\vdash A$ и $g\colon \Gamma A\Delta\vdash B$ уже были получены без применения правила сечения. Позднее покажем, что $g\langle f\rangle$эквивалентна секвенции, в конструировании которой были вовлечены сечения меньшей "степени", причем *степень* сечения $g\langle f\rangle$определяется как

$$d(\Lambda) + d(\Gamma) + d(\Delta) + d(A) + d(B)$$

где $d(A)$ есть число вхождений всех импликаций в $A$ и $d(\Gamma) = d(A_1) + \ldots + d(A_m)$. Возможны следующие случаи:

0. И $f$ и $g$ содержатся в $\boldsymbol{G}$.
1. На последнем шаге конструирования $f$ вводится импликация по левую сторону стрелки.
2. На последнем шаге конструирования $g$ вводится импликация по левую сторону стрелки, но не в $A$.
3. На последнем шаге конструирования $g$ вводится импликация по правую сторону стрелки.
4. На последнем шаге конструирования и $f$ и $g$ вводится импликация по правую сторону.

В случае 0 стрелка $g\langle f\rangle$ уже содержится в $\boldsymbol{G}$, замкнутой относительно сечения. Рассмотрим теперь по очереди остальные случаи. Начнем со стрелок с импликацией.

(1) Пусть $\Lambda = \Gamma'(A' \supset B')\Lambda'\Delta'$ и $f = g'\{f'\}$. В этом случае мы имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon \Lambda'\vdash A' \quad g'\colon \Gamma'B'\Delta'\vdash A}{g'\{f'\}\colon \Gamma'\,(A'\supset B')\,\Lambda'\Delta'\vdash A} \qquad g\colon \Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle g'\{f'\}\rangle\colon \Gamma\,\Gamma'\,(A'\supset B')\,\Lambda'\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{f'\colon \Lambda'\vdash A' \qquad \dfrac{g'\colon \Gamma'B'\Delta'\vdash A \quad g'\colon \Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle g'\rangle\colon \Gamma\,\Gamma'B'\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})}{g\langle g'\{f'\}\rangle\colon \Gamma\,\Gamma'\,(A'\supset B')\,\Lambda'\Delta'\Delta\vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g\langle g'\{f'\}\rangle = g\langle g'\langle \varepsilon\langle\{f'\}\rangle\rangle\rangle = g\langle g'\rangle\langle \varepsilon\langle\{f'\}\rangle\rangle = g\langle g'\rangle\{f'\}$$

что означает, что обе стороны сводятся к одной и той же секвенции в силу определения $\langle - \rangle$и $\{ - \}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = \Gamma'(A' \supset B')\Lambda'\Delta'$, $g = g'\{f'\}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда мы имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad \dfrac{f'\colon \Lambda'\vdash A' \quad g'\colon \Gamma'B'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\{f'\}\colon \Gamma'(A'\supset B')\Lambda'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'\{f'\}\langle f\rangle\colon \Gamma'(A'\supset B')\Lambda'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{f'\colon \Lambda'\vdash A' \qquad \dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad g'\colon \Gamma'B'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f\rangle\colon \Gamma'B'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}}{g'\langle f\rangle\{f'\}\colon \Gamma\,\Gamma'(A'\supset B')\Lambda'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'\langle f\rangle\{f'\} = g'\langle f\rangle\langle \varepsilon\langle\{f'\}\rangle\rangle = g'\langle \varepsilon\langle f\rangle\rangle\langle f\rangle =$$
$$= g'\{f'\}\langle f\rangle$$

что означает, что обе стороны сводятся к одной и той же секвенции в силу определения $\langle - \rangle$и $\{ - \}$.

Случай, когда $A$ содержится в $\Gamma'$, аналогичен, и его можно опустить. Однако, остается случай, когда $A$ содержится в $\Lambda' = \Lambda_1 A\Lambda_2$. Тогда мы получаем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad \dfrac{f'\colon \Lambda_1 A\Lambda_2\vdash A' \quad g'\colon \Gamma'B'\Delta'\vdash B}{g'\{f'\}\colon \Gamma'(A'\supset B')\Lambda_1 A\Lambda_2\Delta'\vdash B}}{g'\{f'\}\langle f\rangle\colon \Gamma'(A'\supset B')\Lambda_1 A\Lambda_2'\Delta'\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad f'\colon \Lambda_1 A\Lambda_2\vdash B'}{f'\langle f\rangle\colon \Lambda_1 A\Lambda_2\vdash B'}\ \text{(сечение)} \qquad g\colon \Gamma B'\Delta'\vdash B}{g\{f'\langle f\rangle\}\colon \Gamma(A'\supset B')\Lambda_1 A\Lambda_2\Delta'\vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'\{f'\}\langle f\rangle = g'\langle f'\rangle\langle \varepsilon\langle f\rangle\rangle = g'\langle \varepsilon\langle f\rangle\rangle\langle f'\rangle =$$
$$= g'\langle \varepsilon\rangle\langle f\rangle\langle f'\rangle = g'\langle \varepsilon\rangle\langle f'\rangle\langle f\rangle = g'\langle \varepsilon\rangle\langle f'\langle f\rangle\rangle =$$
$$= g'\langle \varepsilon\langle f'\langle f\rangle\rangle\rangle = g\{f'\langle f\rangle\}$$

что означает, что обе стороны сводятся к одной и той же секвенции в силу определения $\langle - \rangle$и $\{ - \}$.

(3) $A = A' \supset B'$, $g = (f')^{\varepsilon}$. Тогда мы имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad \dfrac{f'\colon A'\Gamma A\Delta\vdash B'}{(f')^{\varepsilon}\colon \Gamma A\Delta\vdash A'\supset B'}}{(f')^{\varepsilon}\langle f\rangle\colon \Gamma\Lambda\Delta\vdash A'\supset B'}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad f'\colon A'\Gamma A\Delta\vdash B'}{f'\langle f\rangle\colon A'\Gamma\Lambda\Delta\vdash B'}\ \text{(сечение)}}{(f'\langle f\rangle)^{\varepsilon}\colon \Gamma\Lambda\Delta\vdash A'\supset B'}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Помимо этого,

$$\varepsilon\langle f'^{\,\varepsilon}\langle f\rangle\rangle = \varepsilon\langle f'^{\,\varepsilon}\rangle\langle f\rangle = f'\langle f\rangle$$
$$\varepsilon\langle (f'\langle f\rangle)^{\varepsilon}\rangle = f'\langle f\rangle$$

согласно определению $(\text{-})^{\varepsilon}$.

Отсюда в силу единственности стрелки ε получаем тождество

$$f'^{\,\varepsilon}\langle f\rangle = (f'\langle f\rangle)^{\varepsilon}$$

означающее, что обе стороны сводятся к одной и той же секвенции.

(4) $A = A' \supset B'$, $f = f'^{\,\varepsilon}$ и $g = g'\{h\}$. Мы имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon \Lambda' A'\vdash B}{f'^{\,\varepsilon}\colon \Lambda\vdash A'\supset B'} \qquad \dfrac{h'\colon \Lambda'\vdash B' \quad g'\colon \Gamma' A'\Delta'\vdash B}{g'\{h'\}\colon \Gamma'(A'\supset B')\Lambda' A\Delta'\vdash B}}{g'\{h\}\langle f'^{\,\varepsilon}\rangle\colon \Gamma'\Lambda\Lambda'\Delta'\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{h\colon \Lambda'\vdash B \quad f'\colon \Lambda B'\vdash B'}{f'\langle h\rangle\colon \Lambda\Lambda'\vdash A'}\ \text{(сечение)} \qquad g\colon \Gamma A'\Delta'\vdash B}{g\langle f'\langle h\rangle\rangle\colon \Gamma\Lambda\Lambda'\Delta'\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'\{h\}\langle f'^{\,\varepsilon}\rangle = g'\langle\varepsilon\langle h\rangle\rangle\langle f'^{\,\varepsilon}\rangle = g'\langle\varepsilon\rangle\langle h\rangle\langle f'^{\,\varepsilon}\rangle =$$
$$= g'\langle\varepsilon\rangle\langle f'^{\,\varepsilon}\rangle\langle h\rangle = g'\langle\varepsilon\langle f'^{\,\varepsilon}\rangle\rangle\langle h\rangle = g'\langle f'\rangle\langle h\rangle =$$
$$= g'\langle f'\langle\langle h\rangle\rangle$$

в силу определений и свойств $\langle\text{-}\rangle$, $\{\text{-}\}$ и $(\text{-})^{\varepsilon}$.

Для константы T случай 3 невозможен. Рассмотрим оставшиеся случаи.

(1) $\Lambda = \Gamma' T\Delta$ и $f = f'$. У нас имеется:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon \Gamma'\Lambda'\vdash A}{f'^{\,i}\colon \Gamma' T\Delta'\vdash A} \qquad g\colon \Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle f'^{\,i}\rangle\colon \Gamma\,\Gamma' T\Delta'\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\cfrac{\cfrac{f' : \Gamma'\Delta' \vdash A \quad g' : \Gamma A \Delta \vdash B}{g\langle f' \rangle : \Gamma\,\Gamma'\Delta'\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g\langle f' \rangle)^{i} : \Gamma\,\Gamma' T \Delta'\Delta \vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g\langle f'^{\,i} \rangle\langle i \rangle = g\langle f'^{\,i} \langle i \rangle\rangle =$$
$$= g\langle f' \rangle (g\langle f' \rangle)^{i} \langle i \rangle = g\langle f' \rangle$$

откуда обе стороны сводятся к одной и той же секвенции.

(2) Допустим, что $\Gamma = \Gamma' T \Delta'$ и $g = g'^{\,i}$. Мы имеем:

$$\cfrac{f : \Lambda \vdash A \quad \cfrac{g' : \Gamma'\Delta' A \Delta \vdash B}{(g')^{i} : \Gamma' T \Delta' A \Delta \vdash B}}{g'^{\,i}\langle f \rangle : \Gamma' T \Delta' \Lambda \Delta \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\cfrac{\cfrac{f : \Lambda \vdash A \quad g' : \Gamma'\Delta' A \Delta \vdash B}{g'\langle f \rangle : \Gamma'\Delta'\Lambda\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f \rangle)^{i} : \Gamma' T \Delta' \Lambda \Delta \vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'^{\,i}\langle f \rangle\langle i \rangle = g'^{\,i}\langle i \rangle\langle f \rangle = g'\langle f \rangle = (g'\langle f \rangle)^{i}\langle i \rangle$$

откуда $g'^{\,i}\langle f \rangle = (g'\langle f \rangle)^{i}$ в силу единственности $i$.

(4) $A = T$, $f = i$ и $g = g'^{\,i}$. Мы имеем:

$$\cfrac{i : \ \vdash A \qquad \cfrac{g' : \Gamma\Delta \vdash B}{(g')^{i} : \Gamma T \Delta \vdash B}}{g'^{\,i}\langle i \rangle : \Gamma\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Но $g'^{\,i}\langle i \rangle = g'$ была сконструирована и без сечения.

Перейдем теперь к правилам слабой транзитивности, перестановки, сокращения и ослабления. Для доказательства, прежде всего, вновь без потери общности допускаем, что стрелки $f$: $\Lambda \vdash A$ и $g$: $\Gamma A \Delta \vdash B$ уже были получены без применения правила сечения. Возможны случаи:

1. На последнем шаге конструирования $f$ используется дополнительное правило.
2. На последнем шаге конструирования $g$ используется дополнительное правило.
3. На последнем шаге конструирования и $f$ и $g$ используется дополнительное правило.

В случае *слабой транзитивности* получаем:

(1) Пусть $\Lambda = (A'\supset B')\Delta'$ и $f = f'^{\beta}$. Если мы имеем дело с $g{:}\Gamma A\Delta\vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g$: $A\Delta\vdash B$. Затем мы получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon B'\Delta'\vdash A}{f'^{\beta}\colon A'\,(A'\supset B')\,\Delta'\vdash A} \qquad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'^{\beta}\rangle\colon A'\,(A'\supset B')\,\Delta'\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon B'\Delta'\vdash A \quad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'\rangle\colon B'\Delta'\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g\langle f'\rangle)^{\beta}\colon A'\,(A'\supset B')\,\Delta'\Delta\vdash B}\ ,$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того, легко видеть, что $g\langle f'^{\beta}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{\beta}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'\,(A'\supset B')\,\Delta'$, $g = g'^{\beta}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad \dfrac{g'\colon B'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{\beta}\colon A'\,(A'\supset B')\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{\beta}\langle f\rangle\colon A'\,(A'\supset B')\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad g'\colon B'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f\rangle\colon B'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f\rangle)^{\beta}\colon A'\,(A'\supset B')\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}$$

Более того, легко видеть, что $g'^{\beta}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{\beta}$ в силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории.

(3) Пусть $\Lambda = (A'\supset B')\Delta'$, $f = f'^{\beta}$, $\Gamma A\Delta = D'\,(D'\supset C')\,\Delta'$, $g = g'^{\beta}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon B'\Delta'\vdash A}{f'^{\beta}\colon A'\,(A'\supset B')\,\Delta'\vdash A} \quad \dfrac{g'\colon C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{\beta}\colon D'\,(D'\supset C')\,\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{\beta}\langle f'^{\beta}\rangle\colon D'\,(D'\supset C')\Delta_1 A'(A'\supset B')\,\Delta'\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f'\colon B'\Delta'\vdash A}{f'^{\beta}\colon A'(A'\supset B')\,\Delta'\vdash A} \qquad g'\colon C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f'^{\beta}\rangle\colon C'\Delta_1 A'(A'\supset B')\,\Delta'\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f'^{\beta}\rangle)^{\beta}\colon D'\,(D'\supset C')\Delta_1 A'(A'\supset B')\,\Delta'\Delta_2\vdash B}$$

При этом $g'^{\beta}\langle f'^{\beta}\rangle = (g'\langle f'^{\beta}\rangle)^{\beta}$ (следует в силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории).

Для *перестановки* возможны следующие случаи:

(1) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$ и $f = f'^{\,\gamma}$. Если мы имеем дело с $g$: $\Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g$: $A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\,\gamma}\colon A'B'\Delta' \vdash A} \qquad g\colon A\Delta \vdash B}{g\langle f'^{\,\gamma}\rangle\colon A'B'\Delta'\Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon B'A'\Delta' \vdash A \quad g\colon A\Delta \vdash B}{g\langle f'\rangle\colon B'A'\Delta'\Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g\langle f'\rangle)^{\gamma}\colon A'B'\Delta'\Delta \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g\langle f'^{\,\gamma}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{\gamma}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'B'\Delta'$, $g = g'^{\,\gamma}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda \vdash A \quad \dfrac{g'\colon A'B'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{\,\gamma}\colon B'A'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{\,\gamma}\langle f\rangle\colon B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda \vdash A \quad g'\colon A'B'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f\rangle\colon A'B'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f\rangle)^{\gamma}\colon B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\,\gamma}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{\gamma}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$, $f = f'^{\gamma}$, $A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g'^{\gamma}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\,\gamma}\colon A'B'\Delta' \vdash A} \quad \dfrac{g'\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{\,\gamma}\colon C'D'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{\,\gamma}\langle f'^{\,\gamma}\rangle\colon C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f'\colon B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\,\gamma}\colon A'B'\Delta' \vdash A} \quad g'\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f'^{\,\gamma}\rangle\colon D'C'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f'^{\,\gamma}\rangle)^{\gamma}\colon C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\gamma}\langle f'^{\gamma}\rangle = (g'\langle f'^{\gamma}\rangle)^{\gamma}$.

Для *сокращения* получаем:

(1) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$ и $f = f'^{w}$. Если мы имеем дело с $g$: $\Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g$: $A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta' \vdash A}{f'^{w}\colon A'\Delta' \vdash A} \qquad g\colon A\Delta \vdash B}{g\langle f'^{w}\rangle\colon A'\Delta'\Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta' \vdash A \qquad g\colon A\Delta \vdash B}{g\langle f'\rangle\colon AA'\Delta'\Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g\langle f'\rangle)^{w}\colon A'B'\Delta'\Delta \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g\langle f'^{w}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{w}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'A'\Delta'$, $g = g'^{w}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda \vdash A \qquad \dfrac{g'\colon A'A'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{w}\colon A'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{w}\langle f\rangle\colon A'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda \vdash A \qquad g'\colon A'A'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f\rangle\colon A'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f\rangle)^{w}\colon A'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{w}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{w}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$, $f = f'^{w}$, $\Gamma A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g'^{w}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta' \vdash A}{f'^{w}\colon A'\Delta' \vdash A} \qquad \dfrac{g'\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{w}\colon C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{w}\langle f'^{w}\rangle\colon C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta' \vdash A}{f'^{w}\colon A'\Delta' \vdash A} \qquad g'\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f'^{w}\rangle\colon D'C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f'^{w}\rangle)^{w}\colon C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{w}\langle f'^{w}\rangle = (g'\langle f'^{w}\rangle)^{w}$.

Для *ослабления* получаем:

(1) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$ и $f = f'^{\,\kappa}$. Если мы имеем дело с $g\colon \Gamma A\Delta\vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g\colon A\Delta\vdash B$. Затем получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A}{f'^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\vdash A} \qquad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'^{\kappa}\rangle\colon B'A'\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A \quad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'\rangle\colon A'\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g\langle f'\rangle)^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\Delta\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g\langle f'^{\kappa}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{\kappa}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'\Delta'$, $g = g'^{\,\kappa}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad \dfrac{g'\colon A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{\kappa}\colon B'A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{\kappa}\langle f\rangle\colon B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad g'\colon A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f\rangle\colon A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f\rangle)^{\kappa}\colon B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\kappa}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{\kappa}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$, $f = f'^{\kappa}$, $\Gamma A\Delta = C'\Delta'$, $g = g'^{\kappa}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A}{f'^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\vdash A} \qquad \dfrac{g'\colon C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{\kappa}\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{\kappa}\langle f'^{\kappa}\rangle\colon D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A}{f'^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\vdash A} \qquad g'\colon C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f'^{\kappa}\rangle\colon C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f'^{\kappa}\rangle)^{\kappa}\colon D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\kappa}\langle f'^{\kappa}\rangle = (g'\langle f'^{\kappa}\rangle)^{\kappa}$, что и заканчивает доказательство. ■

(3) Пусть $\Lambda = (A'\supset B')\Delta'$ и $f = f'^{\beta}$. Если мы имеем дело с $g{:}\Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g{:}\ A\Delta \vdash B$. Затем мы получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f'{:}\ B'\Delta' \vdash A}{f'^{\beta}{:}\ A'\,(A'\supset B')\,\Delta' \vdash A} \qquad g{:}\ A\Delta \vdash B}{g\langle f'^{\beta}\rangle{:}\ A'\,(A'\supset B')\,\Delta'\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'{:}\ B'\Delta' \vdash A \quad g{:}\ A\Delta \vdash B}{g\langle f'\rangle{:}\ B'\Delta'\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g\langle f'\rangle)^{\beta}{:}\ A'\,(A'\supset B')\,\Delta'\Delta \vdash B}\ ,$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того, легко видеть, что $g\langle f'^{\beta}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{\beta}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'\,(A'\supset B')\,\Delta'$, $g = g'^{\beta}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f{:}\ \Lambda \vdash A \qquad \dfrac{g'{:}\ B'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{\beta}{:}\ A'\,(A'\supset B')\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{\beta}\langle f\rangle{:}\ A'\,(A'\supset B')\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f{:}\ \Lambda \vdash A \quad g'{:}\ B'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f\rangle{:}\ B'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f\rangle)^{\beta}{:}\ A'\,(A'\supset B')\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}$$

Более того, легко видеть, что $g'^{\beta}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{\beta}$ в силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории.

(3) Пусть $\Lambda = (A'\supset B')\Delta'$, $f = f'^{\beta}$, $\Gamma A\Delta = D'\,(D'\supset C')\,\Delta'$, $g = g'^{\beta}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'{:}\ B'\Delta' \vdash A}{f'^{\beta}{:}\ A'\,(A'\supset B')\,\Delta' \vdash A} \qquad \dfrac{g'{:}\ C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{\beta}{:}\ D'\,(D'\supset C')\,\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{\beta}\langle f'^{\beta}\rangle{:}\ D'\,(D'\supset C')\Delta_1 A'(A'\supset B')\,\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f'{:}\ B'\Delta' \vdash A}{f'^{\beta}{:}\ A'(A'\supset B')\,\Delta' \vdash A} \qquad g'{:}\ C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f'^{\beta}\rangle{:}\ C'\Delta_1 A'(A'\supset B')\,\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f'^{\beta}\rangle)^{\beta}{:}\ D'\,(D'\supset C')\Delta_1 A'(A'\supset B')\,\Delta'\Delta_2 \vdash B}$$

При этом $g'^{\beta}\langle f'^{\beta}\rangle = (g'\langle f'^{\beta}\rangle)^{\beta}$ (следует в силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории).

Для *перестановки* возможны следующие случаи:

(1) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$ и $f = f'^{\gamma}$. Если мы имеем дело с $g$: $\Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g$: $A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\gamma}: A'B'\Delta' \vdash A} \qquad g: A\Delta \vdash B}{g\langle f'^{\gamma}\rangle: A'B'\Delta'\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f': B'A'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g\langle f'\rangle: B'A'\Delta'\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g\langle f'\rangle)^{\gamma}: A'B'\Delta'\Delta \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g\langle f'^{\gamma}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{\gamma}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'B'\Delta'$, $g = g'^{\gamma}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f: \Lambda \vdash A \quad \dfrac{g': A'B'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{\gamma}: B'A'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{\gamma}\langle f\rangle: B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f: \Lambda \vdash A \quad g': A'B'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f\rangle: A'B'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f\rangle)^{\gamma}: B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\gamma}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{\gamma}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$, $f = f'^{\gamma}$, $A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g'^{\gamma}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\gamma}: A'B'\Delta' \vdash A} \qquad \dfrac{g': D'C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'^{\gamma}: C'D'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}}{g'^{\gamma}\langle f'^{\gamma}\rangle: C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\gamma}: A'B'\Delta' \vdash A} \quad g': D'C'\Delta_1 A\Delta_2 \vdash B}{g'\langle f'^{\gamma}\rangle: D'C'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f'^{\gamma}\rangle)^{\gamma}: C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\gamma}\langle f'^{\gamma}\rangle = (g'\langle f'^{\gamma}\rangle)^{\gamma}$.

Для *сокращения* получаем:

(2) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$ и $f = f'^{w}$. Если мы имеем дело с $g\colon \Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g\colon A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta'\vdash A}{f'^{w}\colon A'\Delta'\vdash A}\qquad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'^{w}\rangle\colon A'\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta'\vdash A\qquad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'\rangle\colon AA'\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g\langle f'\rangle)^{w}\colon A'B'\Delta'\Delta\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g\langle f'^{w}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{w}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'A'\Delta'$, $g = g'^{w}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A\qquad \dfrac{g'\colon A'A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{w}\colon A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{w}\langle f\rangle\colon A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A\qquad g'\colon A'A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f\rangle\colon A'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f\rangle)^{w}\colon A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{w}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{w}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$, $f = f'^{w}$, $\Gamma A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g'^{w}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta'\vdash A}{f'^{w}\colon A'\Delta'\vdash A}\qquad \dfrac{g'\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{w}\colon C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{w}\langle f'^{w}\rangle\colon C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f'\colon A'A'\Delta'\vdash A}{f'^{w}\colon A'\Delta'\vdash A}\qquad g'\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f'^{w}\rangle\colon D'C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f'^{w}\rangle)^{w}\colon C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{w}\langle f'^{w}\rangle = (g'\langle f'^{w}\rangle)^{w}$.

Для *ослабления* получаем:

(4) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$ и $f = f'^{\,\kappa}$. Если мы имеем дело с $g\colon \Gamma A\Delta\vdash B$, то вначале с помощью $i$-стрелок приводим $g$ к виду $g\colon A\Delta\vdash B$. Затем получаем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A}{f'^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\vdash A}\qquad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'^{\kappa}\rangle\colon B'A'\Delta'\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A\quad g\colon A\Delta\vdash B}{g\langle f'\rangle\colon A'\Delta'\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g\langle f'\rangle)^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\Delta\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g\langle f'^{\kappa}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{\kappa}$.

(5) Пусть $\Gamma A\Delta = A'\Delta'$, $g = g'^{\,\kappa}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A\quad \dfrac{g'\colon A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{\kappa}\colon B'A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{\kappa}\langle f\rangle\colon B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A\qquad g'\colon A'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f\rangle\colon A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f\rangle)^{\kappa}\colon B'A'\Delta_1\Lambda\Delta_2\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\kappa}\langle f\rangle = (g'\langle f\rangle)^{\kappa}$.

(6) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$, $f = f'^{\kappa}$, $\Gamma A\Delta = C'\Delta'$, $g = g'^{\kappa}$. Допустим, что $A$ содержится в $\Delta' = \Delta_1 A\Delta_2$. Тогда имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A}{f'^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\vdash A}\qquad \dfrac{g'\colon C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'^{\kappa}\colon D'C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}}{g'^{\kappa}\langle f'^{\kappa}\rangle\colon D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f'\colon A'\Delta'\vdash A}{f'^{\kappa}\colon B'A'\Delta'\vdash A}\qquad g'\colon C'\Delta_1 A\Delta_2\vdash B}{g'\langle f'^{\kappa}\rangle\colon C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2\vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g'\langle f'^{\kappa}\rangle)^{\kappa}\colon D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2\vdash B}$$

В силу тождеств ***GIBCWK***-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\kappa}\langle f'^{\kappa}\rangle = (g'\langle f'^{\kappa}\rangle)^{\kappa}$, что и заканчивает доказательство. ■

## 8. Дуальные импликативные дедуктивные системы и коэкспоненциальные дедуктивные категории

Среди различных стилей представления логических систем, основывающихся на различии в форме вывода, можно выделить так называемые представления в стиле Шютте. В этом случае выводы имеют форму $f\colon \vdash A_1 \ldots A_m$, что означает, что $f$ есть доказательство альтернатив $A_1 \ldots A_m$ без каких-либо гипотез. Дж. Ламбек [Lambek 1994, p.153] предпочитает дуальное представление, основывающееся на использовании выводов $f\colon \Gamma\vdash$ , поскольку в этом случае мы можем рассматривать $f$ как мультилинейный оператор $\Gamma\vdash O$ (можно рассматривать $O$ как тип истинностных значений и выводы $A_1 \ldots A_m\vdash O$ как $m$-сортные отношения).

Формулировки в стиле Шютте наводят на мысль о логических системах, дуальных к интуиционистским системам в смысле дуального ограничения: если в первом случае требуется, чтобы сукцедент секвенции состоял не более чем из одной формулы, то дуальное ограничение сводится к тому, что антецедент секвенции может состоять не более чем из одной формулы (см. [Czermak 1971]). Подобную систему с правилами введения и удаления, дуальную интуиционистской логике, строит, например, Н. Гудмен [Goodman 1981]. Ее переформулировка в виде исчисления секвенций, осуществленная В. А. Смирновым [Смирнов 1987, с. 223], выглядит следующим образом:

основные секвенции: $A \to A$ и $A \to \mathrm{T}$;

структурные правила: сечение, перестановка справа,

добавление справа $\dfrac{C \to \Delta}{C \to \Delta A}$;

$$\frac{A \to \Delta}{A\wedge B \to \Delta} \qquad \frac{B \to \Delta}{A\wedge B \to \Delta} \qquad \frac{C \to \Delta A \quad C \to \theta B}{C \to \Delta\theta A\wedge B}$$

$$\frac{A \to \Delta \quad B \to \theta}{A\vee B \to \Delta\theta} \qquad \frac{C \to \Delta A}{C \to \Delta\, A\vee B} \qquad \frac{C \to \Delta B}{C \to \Delta\, A\vee B}$$

$$\frac{A \to \Delta B}{A\Leftarrow B \to \Delta} \qquad \frac{C \to \Delta\, A \quad B \to \theta}{C \to \Delta\, A\Leftarrow B\ \theta}$$

где $A\Leftarrow B$ означает коимпликацию (импликацию Брауэра), которой в алгебре соответствует псевдоразность.

Если вместо выводов в стиле Шютте $f\colon \vdash A_1 \ldots A_m$, означающих, что $f$ есть доказательство альтернатив $A_1 \dots A_m$ без каких-либо гипотез, рассматривать однопосылочные выводы $f\colon B \vdash A_1 \dots \mathrm{A_m}$ (что можно тогда понимать как доказательство альтернатив $A_1 \dots A_m$ исходя из гипотезы $B$), то можно сформулировать соответствующие косеквенциальные дедуктивные системы, в которых принимается дуальная концепция секвенции. Более того, можно сформулировать и дуальные импликативные дедуктивные системы и соответствующие им категории, рассматривая язык с дуальной связкой импликации.

Мы получаем коимпликативное исчисление, если мы допускаем, что существует формула $\perp$ (= ложь) и бинарная операция $\Leftarrow$ для образования коимпликации $A \Leftarrow B$ из двух данных формул $A$ и $B$. Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

$$\frac{f\colon A \vdash B}{\llcorner f \lrcorner : A \Leftarrow B \vdash \perp}$$

$$\frac{g\colon A \Leftarrow B \vdash \perp}{g_s\colon A \vdash B}$$

Нетрудно видеть, что наше коимпликативное исчисление будет соответствует некоторой простейшей коимпликативной системе **I°,** ибо:

а) мы имеем аксиому **I°** в виде:

$$\llcorner 1_A \lrcorner : A \Leftarrow A \vdash \perp$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{g\colon B \Leftarrow A \vdash \perp \quad f\colon A \vdash \perp}{fg_s\colon B \vdash \perp}$$

Дедуктивная категория, соответствующая рассматриваемой дедуктивной системе, есть дедуктивная система, в которой следующие уравнения между доказательствами имеют место:

$$f\,1_A = f,$$

$$1_B f = f,$$

$$(hg)\,f = h\,(gf)$$

для всех $f\colon A \vdash B$, $g\colon B \vdash C$, $h\colon C \vdash D$.

Мы определяем ***коэкспоненциальную дедуктивную категорию,*** наделяя дедуктивную категорию $\boldsymbol{A}$, подобную вышеприведенной, введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\lfloor f \rfloor_s = f$$

$$\lfloor g_s \rfloor = g$$

для всех $f: A \vdash B$ и $g: D \Leftarrow C \vdash \bot$

Таким образом, для данного графа $\boldsymbol{X}$ мы можем сконструировать коимпликативные исчисления $\boldsymbol{D}°(\boldsymbol{X})$ и свободную коэкспоненциальную категорию $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})°$, порожденную $\boldsymbol{X}$.

Пусть ***GRPH*** будет категорией графов, чьими объектами являются графы и каждый морфизм $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ есть пара отображений $\boldsymbol{F}$: $Objects(\boldsymbol{X}) \to \to Objects(\boldsymbol{Y})$ и $\boldsymbol{F}$: $Arrows(\boldsymbol{X}) \to Arrows(\boldsymbol{Y})$, такая, что $f: X \to X'$ влечет $\boldsymbol{F}(f): \boldsymbol{F}(X) \to \boldsymbol{F}(X')$.

Пусть ***EXP***° будет категория коэкспоненциальных дедуктивных категорий, чьими объектами являются коэкспоненциальные дедуктивные категории, а стрелками функторы $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, сохраняющие коэкспоненциальную структуру, т.е.

$$\boldsymbol{F}(\bot) = \bot, \boldsymbol{F}(A \Leftarrow B) = \boldsymbol{F}(A) \Leftarrow \boldsymbol{F}(B), \boldsymbol{F}(\lfloor f \rfloor) = \lfloor \boldsymbol{F}(f) \rfloor,$$

$$\boldsymbol{F}(f_s) = \boldsymbol{F}(f)_s.$$

Пусть $\boldsymbol{U}$ будет обычным стирающим функтором ***EXP***° $\to$ ***GRPH***. С каждым графом $\boldsymbol{X}$ мы можем ассоциировать морфизм графов $\boldsymbol{H_X}$: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{UF}(\boldsymbol{X})$ следующим образом: $\boldsymbol{H_X}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$ и, если $f: X \to Y$ есть стрелка в $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{H_X}(f) = f$ (классы эквивалентности $f$ рассматриваются как доказательства в $\boldsymbol{D}°(\boldsymbol{X})$). Мы имеем следующее универсальное свойство:

***Предложение 1***. *Для любой коэкспоненциальной дедуктивной категории* $\boldsymbol{A}$ *и любого морфизма* $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{U}(\boldsymbol{A})$ *графов существует единственная стрелка* $\boldsymbol{F}'$: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})° \to \boldsymbol{A}$ *в* ***EXP***°*, такая, что* $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{F}')\boldsymbol{H_X} = \boldsymbol{F}$.

***Доказательство***. Конструкция $\boldsymbol{F}'$ требует от нас выполнения следующих условий:

$$\boldsymbol{F}'(X) = : \boldsymbol{F}(X), : \boldsymbol{F}'(\bot) = : \boldsymbol{F}(\bot),$$

$$\boldsymbol{F}'(A \Leftarrow B) = \boldsymbol{F}'(A) \Leftarrow \boldsymbol{F}'(B),$$

$$\boldsymbol{F}'(\lfloor f \rfloor) = \lfloor \boldsymbol{F}'(f) \rfloor, \boldsymbol{F}'(f_s) = \boldsymbol{F}'(f)_s.$$

Требуется проверить, что $\boldsymbol{F}'$ определен правильно, т.е. что для всех $f,g: A \vdash B$ в $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X})$, $f = g$ влечет $\boldsymbol{F}'(f) = : \boldsymbol{F}'(g)$. Последнее очевидно, поскольку никаких других, кроме требуемых нам, тождеств в $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X})$ не выполняется. ■

Подобное универсальное свойство означает, что $\boldsymbol{F}$ есть функтор $\boldsymbol{GRPH} \to \boldsymbol{EXP}^{\circ}$, левосопряженный к $\boldsymbol{U}$ с сопряжением $\boldsymbol{H_X}$: $\boldsymbol{Id} \to \boldsymbol{UF}$ (см. четвертую главу). Для коэкспоненциальных дедуктивных категорий можно определить также понятие подстановки доказательств, что определяется следующим предложением:

***Предложение 2.*** *Для данной коэкспоненциальной дедуктивной категории* $\boldsymbol{A}$, *индетерминанта* $x$: $A_0 \vdash A$ *над* $\boldsymbol{A}$ *и стрелки* $a$: $A_0 \vdash A$, *существует единственный функтор* $\boldsymbol{S_x}^a$: $\boldsymbol{A}[x] \to \boldsymbol{A}$, *такой, что* $\boldsymbol{S}_x{}^a(x) = a$ *и* $\boldsymbol{S}_x{}^a\boldsymbol{H_X} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$.

***Доказательство*** Вначале докажем, что:

Для данной дедуктивной категории $\boldsymbol{A}$, и индетерминанта $x$: $A_0 \vdash A$ над $\boldsymbol{A}$, функтора $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ и любой стрелки $b$: $\boldsymbol{F}(A_0) \vdash \boldsymbol{F}(A)$ в $\boldsymbol{B}$ имеется единственный функтор $\boldsymbol{F}'$: $\boldsymbol{A}[x] \to \boldsymbol{B}$, такой, что $\boldsymbol{F}(x) = b$ *и* $\boldsymbol{F}'\boldsymbol{H_X} = \boldsymbol{F}$.

Каждое доказательство $\varphi(x)$ при допущении $x$ может иметь следующую форму:

$k, x, \chi(x)\,\psi(x)$,

где $k$ есть стрелка в $\boldsymbol{A}$, т.е. постоянный полином. Решающим шагом является определение $\boldsymbol{F}'(\varphi(x))$. Определим индуктивно:

$$\boldsymbol{F}'(k) = \boldsymbol{F}(k),$$
$$\boldsymbol{F}'(x) = b,$$
$$\boldsymbol{F}'(\chi(x)\,\psi(x)) = \boldsymbol{F}'(\chi(x))\ \boldsymbol{F}'(\psi(x)).$$
$$\boldsymbol{F}'(\lfloor\psi(x)\rfloor) = \lfloor\boldsymbol{F}'(\psi(x))\rfloor,$$
$$\boldsymbol{F}'(\psi(x)_s) = (\boldsymbol{F}'(\psi(x))_s.$$

Остается лишь показать, что $\boldsymbol{F}'$ определен на полиномах, а не на доказательствах, то есть, что $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$ влечет $\boldsymbol{F}'(\varphi(x)) = \boldsymbol{F}'(\varphi'(x))$. Если в последнем случае писать $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$, то достаточно проверить, что $\equiv$ имеет все свойства подстановки и отвечает всем тождествам экспоненциальной категории. Например, чтобы проверить, что $\lfloor\varphi(x)\rfloor_s \equiv \varphi(x)$, мы вычисляем $\boldsymbol{F}'(\lfloor\varphi(x)\rfloor_s) = (\boldsymbol{F}'(\lfloor\varphi(x)\rfloor)_s = (\lfloor\boldsymbol{F}'(\varphi(x))\rfloor)_s$ и т. д.

Теперь, чтобы получить доказательство нашего предложения, достаточно положить $\boldsymbol{F} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$. ■

Наделяя коэкспоненциальные дедуктивные категории дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные категорные коимпликативные исчисления, соответствующие логическим исчислениям. Так, если мы добавим к нашей системе аксиом новую аксиому, выглядящую следующим образом:

$$\beta^{\circ A}{}_{BC}\colon (B \Leftarrow A) \Leftarrow (C \Leftarrow A) \vdash B \Leftarrow C$$

то мы получаем импликативное исчисление, соответствующее системе минимальной импликативной логики ***IB°***. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f\colon B \vdash C}{f{\Leftarrow}1_A\colon B \Leftarrow A \vdash C \Leftarrow A}$$

Для этого достаточно положить

$$f{\Leftarrow}1_A = (\llcorner f \lrcorner\ \beta^{\circ A}{}_{BC})_s.$$

Аксиому ***B°*** соответствующей логической системы мы теперь получаем в следующем виде:

$$\llcorner \beta^{\circ A}{}_{BC} \lrcorner : ((B \Leftarrow A) \Leftarrow (C \Leftarrow A)) \Leftarrow (B \Leftarrow C) \vdash \bot$$

Теорема дедукции в коимпликативной системе устанавливает, что

***Теорема дедукции***. *С каждым доказательством* $\varphi(x)\colon B\vdash C$ *из допущения* $x\colon A\vdash\bot$ *может быть ассоциирована стрелка типа* $(B \Leftarrow C) \Leftarrow A\vdash\bot$, *не зависящая от* $x$.

***Слабая теорема дедукции***. *С каждым доказательством* $\varphi(x_1,\dots,x_m)\colon B\vdash C$ *из допущений* $x_1\colon A_1\vdash\bot, \dots, x_m\colon A_m\vdash\bot$ *может быть ассоциирована стрелка* $(\dots((B \Leftarrow C) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \dots) \Leftarrow A_1\vdash\bot$, *зависящая от B и C, но не зависящая от* $x_1, \dots, x_m$.

Для ***IB°***-импликативного дедуктивного исчисления можно показать, действуя дуально к ***IB***-импликативному дедуктивному исчислению, что имеет место следующая обобщенная слабая теорема дедукции:

***Теорема 1*** (обобщенная слабая теорема дедукции)***.*** *В* ***IB°****-импликативном исчислении с каждым доказательством* $\varphi(x_1,\dots,x_m)$: $B\vdash C$ *из допущений* $x_1\colon A_1\vdash\bot, \dots, x_m\colon A_m\vdash\bot$ *может быть ассоциирована стрелка типа* $f\colon(\dots((B\Leftarrow C) \Leftarrow C_n) \Leftarrow \dots) \Leftarrow C_1\vdash\bot$, *не зависящая от* $x_1, \dots, x_m$, *где* $C_i$ *есть либо одно из* $A_1, \dots, A_m$, *либо* ***IB°****-теорема.*

***Доказательство***. Как и раньше, будем писать $f = k_{x_1\in A_1, x_2\in A_2,\dots, x_m\in A_m}\varphi(x_1, \dots, x_m)$, где индекс $x\in A$ указывает, что $x$ имеет тип $A$. Заметим, что каждое доказательство $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$: $B \vdash C$ из допущений $x_1{:}A_1 \vdash \bot, \ldots, x_m{:}\ A_m \vdash \bot$ должно иметь одну из следующих форм:

(i) $k$: $B \vdash C$, доказательство $\boldsymbol{IB}^\circ$-исчисления;

(ii) $x$: $A \vdash \bot$ с $B = A$ и $C = \bot$;

(iii) $\chi(x_1, \ldots, x_m)\psi(x_1, \ldots, x_m)$, где $\chi(x_1, \ldots, x_m) = B \vdash D$, $\psi(x_1, \ldots, x_m) = D \vdash C$;

(iv) $\llcorner\psi(_1, \ldots, x_m)\lrcorner$, с $C = \bot$ и $B = D \Leftarrow E$ и $\psi(x_1, \ldots, x_m)$: $D \vdash E$;

(v) $\psi(x_1, \ldots, x_m)_s$, где $\psi(x_1, \ldots, x_m)$: $B \Leftarrow C \vdash \bot$;

(vi) $\psi(x_1, \ldots, x_m) \Leftarrow 1_A$, где $B = D \Leftarrow A$, $C = E \Leftarrow A$, $\psi(x_1, \ldots, x_m)$: $D \vdash E$.

Во всех случаях $\chi(x_1, \ldots, x_m)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ являются более краткими доказательствами, чем $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$, и мы определяем индуктивно:

(i) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m} k = \llcorner(\ldots(\llcorner k \lrcorner \Leftarrow 1_{A_m}) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow 1_{A_1}\lrcorner$ : $(\ldots((B \Leftarrow C) \Leftarrow A_m)) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \Leftarrow (\ldots(\bot \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$ (полагая $C_1 = (\ldots(\bot \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1$, $C_2 = A_1, \ldots, C_n = A_m$);

(ii) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m} x = \llcorner(\ldots((1_A \Leftarrow 1_\bot) \Leftarrow 1_{A_m}) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow 1_{A_1}\lrcorner$ : $((\ldots((A \Leftarrow \bot) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1) \Leftarrow (\ldots((A \Leftarrow \bot) \Leftarrow A_m \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$ (полагая $C_1 = (\ldots((A \Leftarrow \bot) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1) \ldots)$, $C_2 = A_1, \ldots, C_n = A_m$);

(iii) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}(\chi(x_1, \ldots, x_m)\psi(x_1, \ldots, x_m)) = \llcorner(\ldots(\beta^{\circ C}{}_{BD} \Leftarrow 1_{A_m}) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow 1_{A_1}\lrcorner$ : $((\ldots(((B \Leftarrow C) \Leftarrow (D \Leftarrow C)) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1) \Leftarrow ((B \Leftarrow D) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$ (с учетом $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}\chi(x_1, \ldots, x_m)$: $(\ldots((D \Leftarrow C)) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$ и $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}\psi(x_1, \ldots, x_m)$: $((B \Leftarrow D) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$, и полагая $C_1 = (\ldots((B \Leftarrow D) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$, $C_2 = A_1, \ldots, C_n = D \supset C$),

(iv) $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m} \llcorner\psi(x_1, \ldots, x_m)\lrcorner = \llcorner(\ldots(1_{D \Leftarrow E} \Leftarrow 1_\bot) \Leftarrow 1_{A_m}) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow 1_{A_1}\lrcorner$ : $(\ldots(((D \Leftarrow E) \Leftarrow \bot) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \Leftarrow ((\ldots(((D \Leftarrow E) \Leftarrow \bot) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1) \vdash \bot$ (где $k_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m}\psi(x_1, \ldots, x_m)$: $(\ldots(((D \Leftarrow E) \Leftarrow \bot) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$ и полагая $C_1 = (\ldots((D \Leftarrow E) \Leftarrow A_m) \Leftarrow \ldots) \Leftarrow A_1 \vdash \bot$, $C_2 = A_1, \ldots, C_n = \bot$);

(v) $k_{x_1\in A_1, x_2\in A_2,\dots,x_m\in A_m}\psi(x_1, \dots, x_m)^s = \llcorner(\dots(1_{B\Leftarrow C}\Leftarrow 1_\perp)\Leftarrow 1_{A_m})\Leftarrow \dots)\Leftarrow 1_{A_1}\lrcorner : (\dots(((D \Leftarrow E)\Leftarrow \perp)\Leftarrow A_m)\Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1\Leftarrow ((\dots(((B\Leftarrow C)\Leftarrow \perp)\Leftarrow A_m)\Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1)\vdash\perp$ (где $k_{x_1\in A_1, x_2\in A_2,\dots,x_m\in A_m}\psi(x_1, \dots, x_m)$: $(\dots(((B\Leftarrow C)\Leftarrow \perp)\Leftarrow A_m)\Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1\vdash\perp$ и полагая $C_1 = (\dots((B\Leftarrow C)\Leftarrow A_m) \Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1\vdash\perp$, $C_2 = A_1, \dots, C_n = A_m$);

(vi) $k_{x_1\in A_1, x_2\in A_2,\dots,x_m\in A_m}\psi(x_1, \dots, x_m)\Leftarrow 1_A = \llcorner(\dots(\llcorner\psi(x_1, \dots, x_m)\Leftarrow 1_A\lrcorner \Leftarrow 1_{A_m})\Leftarrow \dots)\Leftarrow 1_{A_1}\lrcorner : (\dots(((D \Leftarrow A) \Leftarrow (D \Leftarrow E))\Leftarrow A_m) \Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1\Leftarrow ((\dots(\perp\Leftarrow A_m) \Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1)\vdash\perp$ (где $k_{x_1\in A_1, x_2\in A_2,\dots,x_m\in A_m}\psi(x_1, \dots, x_m)$: $(\dots((D\Leftarrow E)\Leftarrow A_m)\Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1\vdash\perp$ и полагая $C_1 = (\dots(\perp\Leftarrow A_m) \Leftarrow \dots)\Leftarrow A_1$, $C_2 = A_1, \dots, C_n = A_m$).

Нетрудно заметить, что случаи (iv) и (v) отличаются только выбором $C_n$. Далее, поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x_1, \dots, x_m)$ и $\psi(x_1, \dots, x_m)$ плюс один в случае (iii) и как длину $\psi(x_1, \dots, x_m)$ плюс один в случаях (iv) - (vi). ■

Действуя дуальным образом, мы можем добавить к ***IB***°-импликативному исчислению аксиомы, являющиеся категорными аналогами дуальных аксиом ***C***°***, W***°***, K***° :

$$\gamma^{\circ A}{}_{BC}: (B \Leftarrow C) \Leftarrow A \vdash (B \Leftarrow A) \Leftarrow C$$
$$w^{\circ}{}_{AB}: A \Leftarrow B \vdash (A \Leftarrow B) \Leftarrow B$$
$$\kappa^{\circ B}{}_{A}: A \Leftarrow B \vdash A$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: B \Leftarrow A \vdash C}{f_\gamma: B \Leftarrow C \vdash A}$$

(достаточно положить $f_\gamma = (\llcorner f\lrcorner\, \gamma^{\circ A}{}_{BC})_s$)

$$\frac{f: A \Leftarrow B \vdash B}{f_w: A \vdash B}$$

(достаточно положить $f_w = (\llcorner f\lrcorner\, w^{\circ}{}_{AB})_s$)

$$\square_A : \perp\vdash A$$

$$\frac{f\colon A \vdash \bot}{f_{\kappa}\colon A \vdash B}$$

(где $\square_A = (\kappa \circ {}^{A}{}_{\bot})_s$, $f_{\kappa} = \square_B f$).

***IBCWK***°-коэкспоненциальную дедуктивную категорию мы получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$(f \Leftarrow 1_A)\ (g \Leftarrow 1_A) = gf \Leftarrow 1_A,$

$f_{\gamma\gamma} = f\,,$

$(\llcorner f \lrcorner)_w = f$, где $f\colon C \vdash \bot$.

$f = \square_A$ , для всех $f\colon \bot \vdash A$.

Последнее уравнение утверждает, что $\bot$ является инициальным объектом

Аналогично функциональной полноте для ***IBCWK***-экспоненциальных категорий, мы получаем следующую теорему для ***IBCWK***°-коэкспоненциальных дедуктивных категорий:

***Теорема 2*** (функциональная полнота)**.** Для *любого полинома* $\varphi(x)$: $B \vdash C$ *по индетерминантам* $x\colon A \vdash \bot$ *над* ***IBCWK***°-*коэкспоненциальной дедуктивной категорией мы можем получить единственную стрелку* $f$: $(B \Leftarrow C) \Leftarrow A \vdash \bot$, *такую, что* $((f)_s x)_s =_x \varphi(x)$.

Дуальная секвенциальная дедуктивная система представляет собой мультиграф, состоящий из класса стрелок (называемых также "секвенциями") и класса объектов (иногда называемых "типами") и двух отображений

Начало: {стрелки} $\to$ {объекты}

Конец: {стрелки} $\to$ {объекты}*

где {объекты}* представляет собой свободный моноид, порожденный классом объектов, его элементами являются последовательности $\Gamma = A_1 \ldots A_n$ объектов. Заметим, что $n$ может быть равно нулю и в этом случае $\Gamma$ представляет собой пустую последовательность. Стрелка $f$: $B \vdash$ также называется элементом $B$.

Чтобы получить минимальное дуальное секвенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле (но без структурных правил), введем специальную стрелку

$$1_A\colon A \vdash A$$

и бинарную операцию на стрелках:

$$\frac{g\colon B \vdash \Gamma A \Delta \quad f\colon A \vdash \Theta}{g[f]\colon B \vdash \Gamma\Theta\Delta}\text{(сечение)}$$

Дедуктивная комультикатегория есть дедуктивная система, в которой следующие уравнения между доказательствами имеют место:

$f\,[1_A] = f,$

$1_A\,[g] = g,$

$h\,[\,g[f\,]\,] = h[\,g\,][f\,],$

$g'\,[f\,]\,[f'\,] = g'\,[f''\,]\,[f\,]$

для всех $f$: $A\vdash C\Lambda$, $g$: $B\vdash \Gamma A\Delta$, $g[\,f\,]$: $B\vdash \Gamma C\Lambda\Delta$, $h$: $C\vdash \Gamma' B\Delta'$, $f'$: $A'\vdash \Lambda'$, $g'$: $B\vdash \Gamma A\Delta A'$.

Коимпликативное косеквенциальное дедуктивное исчисление ***GI°*** мы получаем при введении специальных стрелок

$$\varepsilon^\circ{}_{AB}\colon B\vdash (B \Leftarrow A)\,A$$

$$i^\circ{}_A\colon A\vdash$$

и правил

$$\frac{f\colon A\vdash \Delta B}{f_\varepsilon\colon A \Leftarrow B\vdash \Delta}$$

$$\frac{f\colon C\vdash \Gamma\Delta}{f_i\colon C\vdash \Gamma \perp \Delta}$$

Как и в случае импликативного дедуктивного исчисления, легко видеть, что наше коимпликативное косеквенциальное дедуктивное исчисление ***GI°*** соответствует некоторой системе **I°**. Действительно, мы получаем:

а) аксиому **I°** в виде:

$$(1_A)_{i\varepsilon}\colon A \Leftarrow A \vdash \perp$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{g\colon A \Leftarrow B\vdash \perp \qquad f\colon B \vdash \perp}{\varepsilon^\circ\,[\,g\,][\,f\,[i^\circ]]\colon A\vdash \perp}$$

Мы определяем ***коэкспоненциальную дедуктивную комультикатегорию,*** наделяя мультикатегорию ***A*** введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$\varepsilon^\circ[\,f_\varepsilon\,] = f,$

для всех $f$: $B \vdash \Gamma A$,

$f_i\,[i^\circ] = f,$

для всех $f$: $C \vdash \Gamma\Delta$.

В частности, $(\varepsilon^\circ{}_{BA})_\varepsilon = 1_{A \Leftarrow B}$, $(i^\circ{}_\perp)_i = 1_\perp$.

С помощью введенных правил нетрудно получить следующее правило:

$$\frac{f\colon A\vdash \Lambda \qquad g\colon C\vdash \Gamma B\Delta}{f\{g\}\colon C\vdash \Gamma\,(B\Leftarrow A)\,\Lambda\Delta}\ \{\text{-}\}$$

Для этого достаточно положить:

$$f\{g\} = g\,[\varepsilon^{\circ}[f]\,].$$

Если мы теперь введем в нашей системе новую специальную стрелку, выглядящую следующим образом:

$$\beta^{\circ A}{}_{BC}\colon (B\Leftarrow A)\Leftarrow (C\Leftarrow A)\vdash B\Leftarrow C$$

то мы получаем косеквенциальное коимпликативное исчисление ***GIB°***, соответствующее системе минимальной коимпликативной логики ***IB°***. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f\colon B\vdash \Delta C}{f_{\beta}\colon B\vdash \Delta(C\Leftarrow A)A}\ \text{(слабая транзитивность)}$$

Для этого достаточно положить

$$f_{\beta} = \varepsilon^{\circ}\ [\varepsilon^{\circ}\ [\beta^{\circ}\ [\,f_{\varepsilon}\,]]].$$

Аксиому ***B°*** получаем теперь в виде следующей стрелки:

$$(\beta^{\circ A}{}_{BC})_{\varepsilon\, i}\colon ((C\Leftarrow A)\Leftarrow (B\Leftarrow A))\Leftarrow (C\Leftarrow B)\vdash \bot$$

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к косеквенциальному коимпликативному исчислению ***GIB°*** аксиомы, являющиеся категорными аналогами дуальных аксиом ***C°, W°, K°*** :

$$\gamma^{\circ A}{}_{BC}\colon (B\Leftarrow C)\Leftarrow A\vdash (B\Leftarrow A)\Leftarrow C$$

$$w^{\circ}{}_{AB}\colon A\Leftarrow B\vdash (A\Leftarrow B)\Leftarrow B$$

$$\kappa^{\circ B}{}_{A}\colon B\Leftarrow A\vdash A$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f\colon C\vdash \Delta BA}{f_{\gamma}\colon C\vdash \Delta AB}\ \text{(перестановка)}$$

(достаточно положить $f_{\gamma} = \varepsilon^{\circ}[\varepsilon^{\circ}[\gamma^{\circ}[\,f_{\varepsilon\,\varepsilon}\,]]]$)

$$\frac{f\colon B\vdash \Delta AA}{f_{w}\colon B\vdash \Delta A}\ \text{(сокращение)}$$

(достаточно положить $f_{w} = \varepsilon^{\circ}[w^{\circ}[\,f_{\varepsilon\,\varepsilon}\,]]$)

$$\frac{f\colon A \vdash \Delta}{f_{к}\colon B \vdash \Delta A}\ \text{(ослабление)}$$

(где $f_{к} = \varepsilon^{\circ}[к^{\circ}[f]]$).

***GIBCWK°***-коэкспоненциальную дедуктивную комульти-категорию получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$f_{\beta}[g] = (f[g])_{\beta}$, для всех $f\colon A \vdash \Delta B\Theta C$; $g\colon B \vdash \Gamma C$;
$f[g_{\beta}] = (f[g])_{\beta}$, для всех $f\colon A \vdash \Gamma B$; $g\colon B \vdash \Delta A\Theta C$;
$f_{\gamma\gamma} = f$, для всех $f\colon C \vdash \Delta AB$;
$f_{\gamma}[g] = (f[g])_{\gamma}$, для всех $f\colon A \vdash \Delta BC$; $g\colon C \vdash D\Gamma$;
$f[g_{\gamma}] = (f[g])_{\gamma}$, для всех $f\colon A \vdash \Delta B$; $g\colon B \vdash \Gamma CD$;
$f_{i\,i\,w}[i^{\circ}_{\perp}] = f$, для всех $f\colon C \vdash \Delta A$;

$f_{w}[g] = (f[g])_{w}$, для всех $f\colon B \vdash \Delta AAC$; $g\colon C \vdash \Gamma D$;
$f[g_{w}] = (f[g])_{w}$, для всех $f\colon B \vdash \Delta D$; $g\colon D \vdash \Gamma CCA$;
$f = \Box_{A}$, где $\Box_{A} = (i^{\circ}_{A})_{к}$ и $f\colon \perp \vdash A$. (т.е. $\perp$ является инициальным объектом);
$f_{к}[g] = (f[g])_{к}$, для всех $f\colon B \vdash \Delta A$; $g\colon A \vdash \Gamma C$;
$f[g_{к}] = (f[g])_{к}$, для всех $f\colon B \vdash \Delta B$; $g\colon B \vdash \Gamma$.

Для данного мультиграфа ***G*** мы можем сконструировать коимпликативные исчисления ***D***°(***G***) и свободную коэкспоненциальную дедуктивную комультикатегорию ***F***°(***G***), порожденную ***G***. Объекты этой комультикатегории получаются индуктивно из объектов ***G*** с помощью операции $\Leftarrow$. Ее косеквенции получаются из косеквенций ***G*** путем присоединения базисных косеквенций $1_{A}$, $\varepsilon^{\circ}_{AB}$, $i^{\circ}_{A}$ т. д., и формирования новых операций из старых с помощью правил $(\text{-})_{\varepsilon}$, $(\text{-})_{i}$ и т.д. Наконец, тождества между сравнимыми косеквенциями в ***F***(***G***) будут те и только те, которые следуют из тождеств в ***G***, и комультикатегорные тождества

$$h[g[f]] = h[g][f],$$
$$g'[f][f'] = g'[f''][f]$$

Помимо этого, добавляются еще и тождества

$$\varepsilon^{\circ}[f_{\varepsilon}] = f,$$

$$f_{i}[i^{\circ}] = f,$$

и т. п., рассмотренные ранее.

Введем теперь понятие комультифунктора, используя следующие определения:

***Определение 1.*** Комультифунктор $\mathbf{F}$ из дедуктивной комультикатегории $\mathbf{M}$ в дедуктивную комультикатегорию $\mathbf{M'}$ представляет собой отображение класса объектов $\mathbf{M}$ в класс объектов $\mathbf{M'}$ вместе с отображением из класса стрелок $\mathbf{M}$ в класс стрелок $\mathbf{M'}$, такие, что если $f$: $B \vdash A_1 \ldots A_n$ есть стрелка в $\mathbf{M}$, то $\mathbf{F}(f)$: $\mathbf{F}(B) \vdash \mathbf{F}(A_1) \ldots \mathbf{F}(A_n)$ есть стрелка в $\mathbf{M'}$ и $\mathbf{F}(1_A) = 1_{\mathbf{F}(A)}$, $\mathbf{F}(g[f]) = \mathbf{F}(g)\,[\mathbf{F}(f)]$.

***Определение 2.*** Коэкспоненциальный комультифунктор $\mathbf{F}$ из коэкспоненциальной дедуктивной комультикатегории $\mathbf{M}$ в коэкспоненциальную дедуктивную комультикатегорию $\mathbf{M'}$ представляет собой комультифунктор, сохраняющий коэкспоненциальную структуру, т.е.

$$\mathbf{F}(\perp) = \perp,$$
$$\mathbf{F}(A \Leftarrow B) = \mathbf{F}(A) \Leftarrow \mathbf{F}(B),$$
$$\mathbf{F}(\varepsilon^{\circ}_{AB}) = \varepsilon^{\circ}_{\mathbf{F}(A)\mathbf{F}(B)},$$
$$\mathbf{F}(i^{\circ}_{A}) = i^{\circ}_{\mathbf{F}(A)}.$$

Пусть $\mathbf{U}$ будет стирающим комультифунктором, тогда можно доказать, что комультифунктор $\mathbf{G} \to \mathbf{UF}(\mathbf{G})$ будет полным и точным (полнота свидетельствует о том, что комультифунктор не порождает никаких новых косеквенций по сравнению со старыми, а точность свидетельствует об отсутствии новых тождеств между косеквенциями).

Пусть $\mathbf{G}$ будет ***GIBCWK°***-мультикатегорией. Для коэкспоненциального ***GIBCWK°***-мультифунктора $\mathbf{F}$ (т.е. сохраняющего ***BCWK°***-структуру $\mathbf{G}$) имеет место следующая теорема:

***Теорема 6.*** (устранение сечения). *Если стрелки* ε, *i*, β, γ, *w*, κ *заменить на правила* $\{-\}$, $(-)_i$, $(-)_\beta$, $(-)_\gamma$, $(-)_w$, $(-)_\kappa$, *то любая косеквенция в* $\mathbf{UF}(\mathbf{G})$, *сконструированная с помощью правил сечения, будет эквивалентна косеквенции, сконструированной без применения правила сечения.*

Доказательство проводится дуально соответствующему доказательству для случая мультикатегорий.

## 9. Экспоненциальные дедуктивные поликатегории

Сформулируем вначале понятие полисеквенциальной дедуктивной системы, основываясь на [Szabo 1975] с учетом некоторых позднейших модификаций этого понятия Дж.Ламбеком. ***Полисек-***

***венциальная дедуктивная система*** представляет собой полиграф, состоящий из класса стрелок и класса объектов, и двух отображений:

$$\text{Начало: } \{\text{стрелки}\} \to \{\text{объекты}\}^*$$
$$\text{Конец: } \{\text{стрелки}\} \to \{\text{объекты}\}^*$$

где $\{\text{объекты}\}^*$ представляет собой свободный моноид, порожденный классом объектов, его элементами являются последовательности $\Gamma = A_1 \ldots A_{\mathrm{n}}$ объектов. Заметим, что $n$ может быть равно нулю и в этом случае $\Gamma$ представляет собой пустую последовательность.

Чтобы получить минимальное полисеквенциальное дедуктивное исчисление, введем специальную стрелку

$$1_A \colon A \vdash A$$

и бинарную операцию на стрелках:

$$\frac{f\colon \Theta \vdash \Phi A \Psi \quad g\colon \Gamma A \Delta \vdash \Xi}{g\#f\colon \Gamma\Theta\Delta \vdash \Phi\Xi\Psi}\ \text{(сечение)}$$

при условии, что $\Phi$ или $\Gamma$ - пустые последовательности и $\Psi$ или $\Delta$ - пустые последовательности. Отсюда возникают четыре возможности:

Случай 1. $\Gamma$ и $\Delta$ пусты, заключением является $g\#f\colon \Theta \vdash \Phi\Xi\Psi$.

Случай 2. $\Gamma$ и $\Psi$ пусты, заключением является $g\#f\colon \Theta\Delta \vdash \Phi\Xi$.

Случай 3. $\Phi$ и $\Psi$ пусты, заключением является $g\#f\colon \Gamma\Theta\Delta \vdash \Xi$.

Случай 4. $\Delta$ и $\Phi$ пусты, заключением является $g\#f\colon \Gamma\Theta \vdash \Xi\Psi$.

Эти четыре случая можно изобразить в виде следующей плоскостной диаграммы:

$$\begin{array}{c}\underline{\;\Theta\;}\\ \Phi\underline{A}\Psi\\ \Xi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\underline{\;\Theta\;}\\ \Phi\underline{A}\Delta\\ \Xi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\underline{\Theta}\\ \Phi\underline{A}\Delta\\ \Xi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\underline{\;\Theta\;}\\ \Phi\underline{A}\Delta\\ \Xi\end{array}$$

Чтобы получить полисеквенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле, или просто генценовское полисеквенциальное дедуктивное исчисление, водятся следующие стандартные операции на стрелках:

*Перестановка*:

$$\frac{f\colon \Gamma A B \Delta \vdash \Psi}{f^{int}\colon \Gamma B A \Delta \vdash \Psi}\ \text{(слева)} \qquad\qquad \frac{f\colon \Gamma \vdash \Phi A B \Psi}{f_{int}\colon \Gamma \vdash \Phi B A \Psi}\ \text{(справа)}$$

*Сокращение*:

$$\frac{f\colon AA\Gamma\vdash \Psi}{f^{cont}\colon A\Gamma\vdash \Psi}\ \text{(слева)} \qquad \frac{f\colon \Gamma\vdash \Phi AA}{f_{cont}\colon \Gamma\vdash \Phi AA}\ \text{(справа)}$$

*Ослабление*:

$$\frac{f\colon \Gamma\vdash \Delta}{f^{thin}\colon A\Gamma\vdash \Delta}\ \text{(слева)} \qquad \frac{f\colon \Gamma\vdash \Delta}{f_{thin}\colon \Gamma\vdash \Delta A}\ \text{(справа)}$$

***Импликативное полисеквенциальное дедуктивное исчисление*** мы получаем при введении специальных стрелок

$$\varepsilon^{+}_{AB}\colon A(A \Leftarrow B)\vdash B \qquad \varepsilon^{-}_{BA}\colon (B \subset A)B\vdash A$$

$$i\colon \vdash \mathrm{T}$$

и правил

$$\frac{f\colon A\Delta\vdash B\Psi}{f_r^{\varepsilon+}\colon \Delta\vdash (A \supset B)\Psi} \qquad \frac{f\colon \Delta\vdash \Phi A \quad g\colon \Gamma B\Psi\vdash \Theta}{f_l^{\varepsilon+}\colon \Gamma\Delta(A \supset B)\Psi\vdash \Phi\Theta}$$

где Γ или Φ пусты,

$$\frac{f\colon \Delta A\vdash \Psi B}{f_r^{\varepsilon-}\colon \Delta\vdash \Psi(B \supset A)} \qquad \frac{f\colon \Delta\vdash \Phi A \quad g\colon \Gamma B\Psi\vdash \Theta}{f_l^{\varepsilon-}\colon \Gamma(B \subset A)\Delta\Psi\vdash \Phi\Theta}$$

где Ψ или Φ пусты,

$$\frac{f\colon \Gamma\Delta\vdash \Theta}{f^{i}\colon \Gamma\mathrm{T}\Delta\vdash \Theta}$$

Импликативное полисеквенциальное дедуктивное исчисление, полученное подобным образом, представляет собой, по сути дела, некоторую версию импликативного фрагмента так называемой *классической билинейной логики* из [Abrusci 1991].

Чтобы превратить полисеквенциальное дедуктивное исчисление в ***дедуктивную поликатегорию***, необходимо выполнение следующих стандартных уравнений между доказательствами:

$1_A \# f = f$,

для всех $f\colon \Lambda A\Delta\vdash \Theta$;

$g \# 1_A = g$,

для всех $g\colon \Gamma\vdash \Phi A\Psi$;

$h \# (g \# f) = (h \# g) \# f$,

для всех $f\colon \Gamma_1\vdash \Gamma_2 A\Gamma_3$, $g\colon \Delta_1 A\Delta_2\vdash \Delta_3 B\Delta_4$, $h\colon \Phi_1 B\Phi_2\vdash \Phi_3$;

$(h \# f) \# g = (h \# g) \# f$,

для всех $f$: $\Gamma_1 \vdash \Gamma_2 A \Gamma_3$, $g$: $\Delta_1 \vdash \Delta_2 B \Delta_3$, $h$: $\Phi_1 A \Phi_2 B \Phi_3 \vdash \Phi_4$, и при условии, что, по крайней мере, одна из $\Gamma_2$, $\Delta_2$ и одна из $\Gamma_3$, $\Delta_3$ пусты;

$g \# (f \# h) = f \# (g \# h)$,

для всех $h$: $\Gamma_1 \vdash \Gamma_2 A \Gamma_3 B \Gamma_4$, $f$: $\Delta_1 A \Delta_2 \vdash \Delta_3$, $g$: $\Phi_1 B \Phi_2 \vdash \Phi_3$, и при условии, что, по крайней мере, одна из $\Phi_1$, $\Delta_1$ и одна из $\Phi_2$, $\Delta_2$ пусты.

Идея поликатегории была выдвинута Дж. Ламбеком еще в 1969 г., однако он не выписал все уравнения между доказательствами. Это было сделано М. Сабо в 1975 г., хотя последний допустил слишком много случаев сечения. Позднее поликатегории были исследованы И. Велиновым [Velinov 1988], а полное множество уравнений можно найти в [Cockett Seely 1992].

***Экспоненциальная дедуктивная поликатегория*** представляет собой дедуктивную поликатегорию со стрелками $\varepsilon^+$, $\varepsilon^-$, $i$ и соответствующими операциями (правилами) импликативного экспоненциального дедуктивного исчисления, для которой справедливы следующие уравнения:

$\varepsilon^+{}_{AB} \# f_r^{\varepsilon+} = f$,

для всех $f$: $A\Gamma \vdash B\Delta$,

$\varepsilon^-{}_{AB} \# f_r^{\varepsilon-} = f$,

для всех $f$: $\Gamma B \vdash \Delta A$,

$f^i \# i = f$,

для всех $f$: $\Gamma\Delta \vdash \Theta$.

Точно так же можно ввести бинарную операцию $\Leftarrow$ для образования коимпликации и дуальную к ней операцию $\Rightarrow$ с соответствующими правилами, получая коимпликативную полисеквенциальную дедуктивную поликатегорию, в случае выполнения соответствующих уравнений между доказательствами.

# Глава вторая. Дедуктивные системы и дедуктивные категории

## 1. Конъюнктивные и дизъюнктивные дедуктивные системы

Путем добавления к языку новых связок и констант могут быть получены дедуктивные системы иного типа, чем чисто импликативные дедуктивные системы. Приведем примеры подобных систем, соответствующих существующим логическим системам.

Рассмотрим, например, (ко)импликативные дедуктивные системы, в языке которых наряду с импликацией и коимпликацией присутствует *произведение* - бинарная связка •. Система NL, являющаяся вариантом неассоциативного синтаксического исчисления Ламбека [Lambek 1961], имеет следующие *примитивные стрелки*, т.е. аксиомы, для каждого $A$ и $B$:

$1_A: A \vdash A$

$\delta_{AB}: A\bullet(A \supset B) \vdash B$ $\qquad$ $\eta_{AB}: B \vdash A \supset (A\bullet B)$

$\delta^\circ_{BA}: (B \Leftarrow A)\bullet A \vdash B$ $\qquad$ $\eta^\circ_{AB}: B \vdash (B\bullet A) \supset A$

$\mathbf{T}1_A: \mathrm{T}\bullet A \vdash A$ $\qquad$ $\mathbf{T'}1_A: A \vdash \mathrm{T}\bullet A$

$\mathbf{Tr}_A: A\bullet \mathrm{T} \vdash A$ $\qquad$ $\mathbf{Tr'}_A: A \vdash A\bullet \mathrm{T}$

а также следующие правила вывода:

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: C \vdash D}{f\bullet g: A\bullet C \vdash B\bullet D}$$

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: C \vdash D}{f\supset g: B \supset C \vdash A \supset D}$$

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: C \vdash D}{f\Leftarrow g: C \Leftarrow B \vdash D \Leftarrow A}$$

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: B \vdash C}{gf: A \vdash C}$$

Можно рассмотреть также расширения NL, получающиеся путем добавления следующих примитивных стрелок:

$\boldsymbol{B}_{A,B,C}$: $A\bullet(B\bullet C)\vdash (A\bullet B)\bullet C$  $\boldsymbol{B}°_{\mathrm{A},B,C}$: $(A\bullet B)\bullet C\vdash A\bullet(B\bullet C)$
$\boldsymbol{C}_{A,B}$: $A\bullet B\vdash B\bullet A$
$\boldsymbol{W}_{A,B}$: $A\vdash A\bullet A$  $\boldsymbol{W}°_{\mathrm{A},B}$: $A\bullet A\vdash A$
$\boldsymbol{K}_{A}$: $A\vdash$ T

Опуская нижние индексы, мы получаем следующий список систем, допустимых для всех $A$, $B$, $C$:

AL. = NL + $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}°$;
M = NL + $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}°$, $\boldsymbol{C}$;
R = NL + $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}°$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$;
RM = NL + $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}°$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}°$;
BCK = NL + $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}°$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K}$;
J = NL + $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}°$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}$.

Система AL является вариантом ассоциативного синтаксического исчисления Ламбека [Lambek 1958]. Что касается NL, то существенное отличие ее от оригинальной системы Ламбека заключается в том, что добавлены стрелки, использующие T. Система ML отвечает релевантной логике без сокращения [Meyer McRobbie 1982], или линейной логике Жирара [Girard 1987]. (M означает здесь "мультимножество"). В M и ее расширениях связки импликации и коимпликации становятся синонимичными, т.е. они могут быть без особых затруднений заменены на одну связку с сохранением доказуемости. Система R соответствует релевантной логике И. Е. Орлова [Орлов 1928], Чёрча и Андерсона-Белнапа, а RM соответствует "mingle"-расширению R (см. [Anderson Belnap 1975], [Dunn 1986]). Система BCK соответствует интуиционистской логике без сокращений [Ono Komori 1985] и J соответствует интуиционистской логике.

Следуя подобным путем, мы получаем *конъюнктивное* дедуктивное исчисление, вначале добавляя к нашему исходному языку дедуктивной системы бинарную операцию $\wedge$ (= и) для образования конъюнкции $A\wedge B$ из двух данных объектов-формул $A$ и $B$. Затем мы вводим следующие дополнительные стрелки и правила вывода:

$$\mathrm{O}_A : A\vdash \mathrm{T}$$
$$\pi_{AB}: A\wedge B\vdash A$$
$$\pi'_{AB}: A\wedge B\vdash B$$
$$\frac{f: C \vdash A \quad g: C \vdash B}{f\wedge g: C\vdash A\wedge B}$$

Вот как выглядит, например, простое доказательство так называемого коммутативного закона для конъюнкции:

$$\frac{\pi'_{AB}: A\wedge B\vdash B \quad \pi_{AB}: A\wedge B\vdash A}{\pi'_{AB}\wedge\pi_{AB}: A\wedge B\vdash B\wedge A}$$

Другим примером является доказательство ассоциативного закона $\alpha_{A,B,C}$: $(A \wedge B) \wedge C \to A \wedge (B \wedge C)$. Оно выглядит следующим образом:

$$\alpha_{A,B,C} = \pi_{AB}\pi_{A\wedge B,C} \wedge (\pi'_{AB}\pi_{A\wedge B,C} \wedge \pi'_{A\wedge B,C})$$

или просто как

$$\alpha_{A,B,C} = \pi\pi \wedge (\pi'\pi \wedge \pi')$$

*Позитивное интуиционистское* дедуктивное исчисление представляет собой конъюнктивное импликативное дедуктивное исчисление, т.е. конъюнктивное дедуктивное исчисление (а) к языку которого добавлена бинарная операция импликации $\supset$ и (б) следующая новая стрелка и правило вывода:

$$\xi_{AB}: A\wedge(A \supset B) \vdash B$$

$$\frac{h: C\wedge B\vdash A}{h^*: C\vdash B \supset A}$$

Заметим, что отсюда легко можно получить следующую стрелку и правило вывода :

$$\nu_{CB}: C\vdash B \supset C\wedge B$$

$$\frac{g: D\vdash A}{g \supset 1_B: B \supset D\vdash B \supset A}$$

Чтобы получить это, достаточно положить

$$\nu_{CB} = 1^*_{C\wedge B}$$

$$g \supset 1_B = (g\xi_{AD})^*$$

Нетрудно также получить известные нам уже правила вывода

$$\frac{f: A \vdash B}{\ulcorner f \urcorner: \mathrm{T} \vdash A \supset B}$$

$$\frac{g: \mathrm{T} \vdash A \supset B}{g^s: A \vdash B}$$

однако доказательство будет уже иным:

$$\ulcorner f \urcorner = (f\pi'_{1B})^*$$

$$g^s = \xi_{BA}(gO_A \wedge 1_A)$$

*Интуиционистское дедуктивное исчисление* требует помимо конъюнкции и импликации еще и наличие дизъюнкции и константы "ложь", т.е. формулы $\perp$ и операции $\vee$ (= или) на формулах, а также следующих дополнительных стрелок:

$$\Box_A : \perp\vdash A$$

$$\rho_{AB}: A\vdash A\vee B$$

$$\rho'_{AB}\colon B\vdash A\vee B$$

$$\xi^{C}_{AB}\colon f\vee g\colon (A\supset C)\wedge(B\supset C)\vdash A\vee B$$

Последнее правило может быть получено по правилу

$$\frac{f\colon A\vdash C\quad g\colon B\vdash C}{f\vee g\colon A\vee B\vdash C}$$

поскольку мы можем положить

$$f\vee g=(\xi^{C}_{AB}(\ulcorner f\urcorner\wedge\ulcorner g\urcorner))^{s}$$

Мы получаем полное классическое дедуктивное исчисление, если добавим к полному интуиционистскому дедуктивному исчислению следующую стрелку:

$$(A\supset\bot)\supset\bot\vdash A$$

или равносильную ей стрелку

$$\mathrm{T}\vdash A\vee(A\supset\bot)$$

Напомним, что обычная теорема дедукции для логических исчислений утверждает:

если $A\wedge B\vdash C$, то $A\vdash B\supset C$.

В полных дедуктивных системах этот результат описывается с помощью следующего правила:

$$\frac{h\colon A\wedge B\vdash C}{h^{*}\colon A\vdash B\supset C}$$

Горизонтальная черта функционирует здесь как символ дедукции, и мы получаем как бы новую форму теоремы дедукции. Она имеет дело с доказательствами из допущения $x\colon \mathrm{T}\vdash A$. Иными словами, мы формируем новую дедуктивную систему с присоединенной стрелкой $x\colon \mathrm{T}\vdash A$ и ведем речь о доказательствах $\varphi(x)\colon B\vdash C$ в этой новой системе. Точнее говоря, если мы исходим из дедуктивной системы $\boldsymbol{L}$, то новая система $\boldsymbol{L}(x)$ имеет те же самые формулы (= объекты), что и $\boldsymbol{L}$, и ее доказательства (= стрелки) $\varphi(x)$ свободно порождены доказательствами $L$ и новой стрелкой $x$ по соответствующим правилам вывода (= операциям). Ясно, что если $\boldsymbol{L}$ является конъюнктивно-дизъюнктивным дедуктивным исчислением (позитивным исчислением, интуиционистским исчислением, классическим исчислением), то и $\boldsymbol{L}(x)$ будет конъюнктивно-дизъюнктивным дедуктивным исчислением. Теорема дедукции в этом случае принимает следующий вид:

***Теорема 1*** (теорема дедукции)**.** *В позитивным, интуиционистском или классическом дедуктивном исчислении с каждым доказа-*

*тельством* $\varphi(x)$*:* $B\vdash C$ *из допущения* $x$*:* $\mathrm{T}\vdash A$ *может быть ассоциирована стрелка* $f$: $A \wedge B\vdash C$ *в* $\boldsymbol{L}$*, не зависящая от* $x$*.*

***Доказательство***. Приводим доказательство для позитивного исчисления. Это же доказательство имеет место и для конъюнктивного исчисления, если игнорировать *. Это доказательство пригодно и для дедуктивного интуиционистского или классического исчисления, когда дополнительная структура представлена преимущественно в виде стрелок, а не в виде правил вывода.

Будем писать $f = k_{x\in A}\ \varphi(x)$, где нижний индекс $x\in A$ указывает, что $x$ имеет тип $A$. Заметим, что для каждого доказательства $\varphi(x)$: $B\vdash C$ допущение $x$: $\mathrm{T}\vdash A$ должно иметь одну из следующих форм:

(i) $k$: $B\vdash C$, доказательство в $\boldsymbol{L}$;

(ii) $x$: $\mathrm{T}\vdash A$ с $B = \mathrm{T}$ и $C = A$;

(iii) $\psi(x) \wedge \chi(x)$, где $\psi(x) = B\vdash C'$, $\chi(x) = B\vdash C''$, $C = C' \wedge C''$.

(iv) $\chi(x)\psi(x)$, где $\chi(x) = B\vdash D$, $\psi(x) = D\vdash C$.

(v) $\psi(x)^*$, где $\psi(x)$: $B\wedge C'\vdash C''$, $C = C' \supset C''$.

Во всех случаях $\psi(x)$ и $\chi(x)$ являются более краткими доказательствами, чем $\varphi(x)$, и мы определяем индуктивно:

(i) $k_{x\in A}k = k\pi'_{AB}$;

(ii) $k_{x\in A}x = \pi_{A\mathrm{T}}$;

(iii) $k_{x\in A}(\psi(x) \wedge \chi(x)) = k_{x\in A}\psi(x) \wedge k_{x\in A}\chi(x))$;

(iv) $k_{x\in A}(\chi(x)\psi(x)) = k_{x\in A}\chi(x)(\pi_{AB} \wedge k_{x\in A}\psi(x))$;

(v) $k_{x\in A}(\psi(x)^*) = (k_{x\in A}\psi(x)\alpha_{A,B,C})^*$,

где $\alpha_{A,B,C}$: $(A\wedge B) \wedge C'\vdash A\wedge(B \wedge C')$ есть доказательство ассоциативности.

Поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\varphi(x)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x)$ и $\psi(x)$ плюс один в случаях (iii) и (iv), и как длину $\psi(x)$ плюс один в случае (v). ■

Теорему дедукции можно сформулировать для позитивного интуиционистского дедуктивного исчисления в более общем виде следующим образом:

***Теорема 2*** (теорема дедукции)**.** *В позитивным интуиционистском дедуктивном исчислении с каждым доказательством* $\varphi(x)$*:* $B\vdash C$ *из допущения* $x$*:* $\mathrm{T}\vdash A$ *может быть ассоциирована стрелка* $f$: $(D \supset A) \wedge B\vdash C$*, не зависящая от* $x$*.*

***Доказательство***. Записывая $f = \rho_x\, \varphi(x)$, положим:

(i) $\rho_x k = k\pi'_{(D \supset A)\, B}$;

(ii) $\rho_x x = \xi_{AB}$;

(iii) $\rho_x(\psi\,(x) \wedge \chi(x)) = \rho_x\psi\,(x) \wedge \rho_x\chi(x))$;

(iv) $\rho_x(\chi(x)\psi(x)) = \rho_x\chi(x)(\pi_{(D \supset A)\, B} \wedge \rho_x\psi(x))$;

(v) $\rho_x(\psi(x)^*) = (\rho_x\psi(x)\alpha_{(D \supset A)\, B'B''})^*$,

где $\psi(x)$: $B' \wedge B'' \vdash C$. ■

## 2. Декартовы и декартово замкнутые дедуктивные категории

Мы получаем *декартову* дедуктивную категорию, если добавляем к обычным категорным тождествам следующие дополнительные уравнения между доказательствами:

$$f = \mathrm{O}_A \text{, для всех } f: A \vdash \mathrm{T},$$
$$\pi_{AB}\,(f \wedge g) = f,$$
$$\pi'_{AB}\,(f \wedge g) = g,$$
$$\pi_{AB}h \wedge \pi'_{AB}h = h,$$

для всех $f: C \vdash A$, $g: C \vdash B$, $h: C \vdash A \wedge B$.

Первое тождество очевидным образом утверждает, что T есть терминальный объект. Эквивалентная формулировка имеет вид:

$$1_1 = \mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_B f = \mathrm{O}_A \text{ для всех } f: A \vdash B.$$

Второе из вышеприведенных тождеств утверждает, что $A \wedge B$ есть произведение $A$ и $B$ с проекциями $\pi_{AB}$ и $\pi'_{AB}$. Часто это записывается как $A \wedge B = A \times B$.

Следствием этого тождества является так называемый *закон дистрибутивности*:

$$(f \wedge g)\, h = f\, h \wedge g\, h$$

для всех $f: C \vdash A$, $g: C \vdash B$, $h: D \vdash C$. Действительно, опуская нижние индексы, получаем:

$$(f \wedge g)\, h = (\pi\,((f \wedge g) \wedge h\,)) \wedge (\pi'\,(f \wedge g) \wedge h\,)) =$$
$$((\pi\,(f \wedge g))\, h) \wedge ((\pi'\,(f \wedge g))\, h\,) = f\, h \wedge g\, h$$

Часто также пишется

$$f \times g = f \wedge g = f\pi_{AC} \wedge g\pi'_{AC}$$

всякий раз, когда имеются стрелки $f$: $A \vdash B$ и $g: C \vdash D$ , а кроме того заметим, что $\times$: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ представляет собой функтор. Действительно, мы имеем:

$$1_A \times 1_C = 1_A\, \pi_{AC} \wedge 1_C\, \pi'_{AC} = \pi_{AC} \wedge \pi'_{AC} =$$
$$\pi_{AC} 1_{A \times C} \wedge \pi'_{AC} 1_{A \times C} = 1_{A \times C}$$

и, опуская нижние индексы, по закону дистрибутивности получаем:

$$(f \times g)(f' \times g') = (f\pi \wedge g\pi')(f'\pi \wedge g'\pi') =$$
$$(f\pi(f'\pi \wedge g'\pi')) \wedge (g\pi'(f'\pi \wedge g'\pi')) =$$
$$ff'\pi \wedge gg'\pi' = ff' \times gg'$$

*Декартово замкнутая* дедуктивная категория представляет собой декартову дедуктивную категорию с дополнительной структурой, удовлетворяющей следующим тождествам:

$$\xi_{AB}(h^*\pi_{CB} \wedge \pi'_{CB}) = h$$
$$\xi_{AB}(k\pi_{CB} \wedge \pi'_{CB})^* = k$$

для всех $h\colon C \wedge B \vdash A$ и $k\colon C \vdash B \supset A$.

Таким образом, декартово замкнутая дедуктивная категория представляет собой позитивное интуиционистское пропозициональное дедуктивное исчисление, стрелки которого выполняют вышеприведенные тождества.

Так же как мы записывали $A \wedge B = A \times B$, мы можем записывать $A \supset B = B^A$(заимствуя общепринятую символику теории категорий). Стрелка $\xi_{AB}\colon B^A \times B \vdash A$ обладает следующим универсальным свойством, называемым *экспоненцированием*:

> для любой стрелки $h{:}C{\times}B \vdash A$ существует единственная стрелка $h^*\colon C \vdash B^A$, такая, что $\xi_{AB}(h^* \times 1_B) = h$.

Большей частью именно в таком виде это свойство и фигурирует в литературе по теории категорий. Естественно, в нотации категорной логики все это можно переписать как:

> для любой стрелки $h{:}C{\wedge}B \vdash A$ существует единственная стрелка $h^*\colon C \vdash A \supset B$, такая, что $\xi_{AB}(h^* \wedge 1_B) = h$.

Для некоторого графа ***X*** мы можем сконструировать позитивное интуиционистское исчисление ***D***(***X***) и декартово замкнутую дедуктивную категорию ***Fr***(***X***), *свободно порожденную* ***X***.

С содержательной точки зрения ***Fr***(***X***) будет представлять собой *наименьшее* позитивное интуиционистское исчисление, чьи формулы включают вершины ***X*** и чьи доказательства включают стрелки ***X***. Логики обычно говорят о них как о "постулатах", хотя может существовать несколько способов постулирования $X \vdash Y$, точно так же, как может существовать несколько стрелок $X \vdash Y$ в ***X***. Более формально формулы и доказательства определяются индуктивно следующим образом:

- все вершины ***X*** являются формулами,
- Т есть формула;

- если $A$ и $B$ суть формулы, то формулами будут $A \wedge B$ (= $A \times B$) и $A \supset B$ (= $B^A$);
- стрелки $\boldsymbol{X}$ и стрелки $1_A$, $O_A$, $\pi_{AB}$, $\pi'_{AB}$ и $\xi_{AB}$ являются доказательствами для всех формул $A$ и $B$,
- доказательства замкнуты относительно правил вывода - композиции, конъюнкции выводов и правила дедукции.

Мы конструируем дедуктивную категорию $\boldsymbol{Fr}(\boldsymbol{X})$, свободно порожденную $\boldsymbol{X}$, из $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ путем наложения ограничений в виде тождеств между доказательствами, которые справедливы для декартово замкнутых дедуктивных категорий. Иначе говоря, мы получаем наименьшее отношение эквивалентности между доказательствами, выполняющее подстановочные законы и соответствующие тождества декартово замкнутой дедуктивной категории. Классами эквивалентности между доказательствами будут при этом стрелки $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, но обычно в записи не различают доказательства и их классы эквивалентности.

Пусть ***Cart*** будет категорией декартово замкнутых дедуктивных категорий, чьими объектами являются декартово замкнутые дедуктивные категории, а стрелками - функторы $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, сохраняющие декартово замкнутую структуру на вершинах, т.е.

$$\boldsymbol{F}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},\ \boldsymbol{F}(A \wedge B) = \boldsymbol{F}(A) \wedge \boldsymbol{F}(B),\ \boldsymbol{F}(A \supset B) = \boldsymbol{F}(A) \supset \boldsymbol{F}(B),$$

$$\boldsymbol{F}(O_A) = O_{\boldsymbol{F}(A)},$$

$$\boldsymbol{F}(\pi_{AB}) = \pi_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},\ \boldsymbol{F}(\pi'_{AB}) = \pi'_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},\ \boldsymbol{F}(\xi_{AB}) = \xi_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)} \text{ и т. д.}$$

$$\boldsymbol{F}(f \wedge g) = \boldsymbol{F}(f) \wedge \boldsymbol{F}(g), \text{ и т. д.}$$

Пусть $\boldsymbol{U}$ будет обычным стирающим функтором ***Cart***$\to$***Grph***. С каждым графом $\boldsymbol{X}$ мы можем ассоциировать морфизм графов $\boldsymbol{H_X}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{UF}(\boldsymbol{X})$ следующим образом: $\boldsymbol{H_X}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$ и, если $f\colon X \to Y$ есть стрелка в $\boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{H_X}(f) = f$ (классы эквивалентности $f$ рассматриваются как доказательства в $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$). Имеет место следующее универсальное свойство:

***Предложение 1***. *Для любой декартово замкнутой дедуктивной категории* $\boldsymbol{A}$ *и любого морфизма графов* $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{U}(\boldsymbol{A})$ *существует единственная стрелка* $\boldsymbol{F'}\colon \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{A}$ *в* ***Cart***, *такая, что* $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{F'})\boldsymbol{H_X} = \boldsymbol{F}$.

***Доказательство***. Конструкция $\boldsymbol{F'}$ требует от нас выполнения следующих условий:

$$\boldsymbol{F'}(X) =: \boldsymbol{F}(X),\ :\boldsymbol{F'}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},$$

$$\boldsymbol{F'}(A \wedge B) = \boldsymbol{F'}(A) \wedge \boldsymbol{F'}(B) \text{ и т.д.}$$

$\boldsymbol{F'}(f) = \boldsymbol{F}(f)$ для всех $f: X \to Y$, $\boldsymbol{F'}(O_A) = O_{\boldsymbol{F'}(A)}$ и т.д.

$\boldsymbol{F}(f \wedge g) = \boldsymbol{F}(f) \wedge \boldsymbol{F}(g)$ и т.д.

Требуется проверить, что функтор $\boldsymbol{F'}$ определен правильно, т.е. что для всех $f,g$: $A \vdash B$ в $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{X})$ $f = g$ влечет $\boldsymbol{F'}(f) = \boldsymbol{F'}(g)$. Последнее очевидно, поскольку никаких других, кроме требуемых нам, тождеств в $\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{X})$ не выполняется. ■

В декартовых или декартово замкнутых дедуктивных категориях тождество доказательств $=_x$ должно быть таким, чтобы $\boldsymbol{A}[x]$ становилось декартовой или декартово замкнутой категорией, и чтобы функтор $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}[x]$ сохранял декартову (декартово замкнутую) структуру. То есть, отношение эквивалентности $\equiv$ между доказательствами, рассмотренное для случая экспоненциальных категорий, должно также выполнять следующие условия:

если $f \wedge g = h$ в $\boldsymbol{A}$ , то $f \wedge g \equiv h$, и т. д.

если $\psi(x) \equiv \psi'(x)$ и $\chi(x) \equiv \chi'(x)$, то $\psi(x) \wedge \chi(x) \equiv$
$\equiv \psi'(x) \wedge \chi'(x)$, и т. д.

$\pi_{BC}(\psi(x) \wedge \chi(x)) \equiv \psi(x)$ и т. д.

для всех $\psi(x)$, $\psi'(x)$: $D \vdash B$ и $\chi(x)$, $\chi'(x)$: $D \vdash BC$.

Под *декартовым* (*декартово замкнутым*) *функтором* будем понимать функтор, сохраняющий декартову (декартово замкнутую) структуру на категориях. Пусть $\boldsymbol{H_X}:\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}[x]$ будет (декартовым, декартово замкнутым) функтором, отображающим $f$: $B \vdash C$ на "постоянный" полином с тем же самым названием. В этом случае можно говорить о процессе подстановки доказательства $a$ вместо $x$ и рассмотреть функтор "подстановки".

***Предложение 2.*** *Для данной (декартовой, декартово замкнутой) дедуктивной категории* $\boldsymbol{A}$, *индетерминанта* $x$: $A_0 \vdash A$ *над* $\boldsymbol{A}$ *и стрелки* $a: A_0 \vdash A$, *существует единственный функтор* $\boldsymbol{S_x}^a$: $\boldsymbol{A}[x] \to \boldsymbol{A}$, *такой, что* $\boldsymbol{S_x}^a(x) = a$ *и* $\boldsymbol{S_x}^a \boldsymbol{H_X} = \boldsymbol{1_A}$.

***Доказательство***. Вначале докажем, что:

Для данной дедуктивной категории $\boldsymbol{A}$ и индетерминанта $x$: $A_0 \vdash A$ над $\boldsymbol{A}$, функтора $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ и любой стрелки $b$: $\boldsymbol{F}(A_0) \vdash \boldsymbol{F}(A)$ в $\boldsymbol{B}$ имеется единственный функтор $\boldsymbol{F'}$: $\boldsymbol{A}[x] \to \boldsymbol{B}$, такой, что $\boldsymbol{F}(x) = b$ *и* $\boldsymbol{F'H_X} = \boldsymbol{F}$.

Каждое доказательство $\varphi(x)$ при допущении $x$ может иметь следующую форму:

$k$, $x$, $\chi(x)\psi(x)$, $\psi(x) \wedge \chi(x)$, $\psi(x)^*$

где $k$ есть стрелка в $\boldsymbol{A}$, т.е. постоянный полином. Решающим шагом является определение $\boldsymbol{F}'(\varphi(x))$. Определим индуктивно:

$$\boldsymbol{F}'(k) = \boldsymbol{F}(k),$$
$$\boldsymbol{F}'(x) = b,$$
$$\boldsymbol{F}'(\chi(x)\psi(x)) = \boldsymbol{F}'(\chi(x))\,\boldsymbol{F}'(\psi(x)),$$
$$\boldsymbol{F}'(\psi(x) \wedge \chi(x)) = \boldsymbol{F}'(\psi(x)) \wedge \boldsymbol{F}'(\chi(x))$$
$$\boldsymbol{F}'(\psi(x)^*) = (\boldsymbol{F}'(\psi(x))^*.$$

Остается лишь показать, что $\boldsymbol{F}'$ определен на полиномах, а не на доказательствах, то есть, что $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$ влечет $\boldsymbol{F}'(\varphi(x)) = = \boldsymbol{F}'(\varphi'(x))$. Если в последнем случае писать $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$, то достаточно проверить, что $\equiv$ имеет все свойства подстановки и отвечает всем тождествам экспоненциальной категории. Например, чтобы проверить, что $\pi_{CD}\chi(x) \wedge \pi'_{CD}\chi(x) \equiv \chi(x))$ мы вычисляем $\boldsymbol{F}'(\pi_{CD}\chi(x) \wedge \pi'_{CD}\chi(x)) \equiv \pi_{\boldsymbol{F}'(C)\boldsymbol{F}'(D)}\boldsymbol{F}'(\chi(x)) \wedge \pi'_{\boldsymbol{F}'(C)\boldsymbol{F}'(D)}\boldsymbol{F}'(\chi(x)) \equiv \boldsymbol{F}'\psi(x)$ и т. д.

Теперь, чтобы получить доказательство нашего предложения, достаточно положить $\boldsymbol{F} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$. ■

Обычно подстановка записывается в виде $\boldsymbol{S}_x^{a}(\varphi(x)) = \varphi(a)$.

Следующая теорема, называемая теоремой функциональной полноты, усиливает теорему дедукции для декартовых (декартово замкнутых) дедуктивных категорий:

***Теорема 1*** (функциональная полнота)**.** Для *любого полинома* $\varphi(x)$: $B \vdash C$ *по индетерминанту* $x$: $\mathrm{T} \vdash A$, *над декартовой или декартово замкнутой дедуктивной категорией* $\boldsymbol{A}$ *существует единственная стрелка* $f: A \wedge B \vdash C$ *в* $\boldsymbol{A}$, *такая, что* $f(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x \varphi(x)$.

**Доказательство**. Пусть $k_{x\in A}\,\varphi(x)$ будет определено как в доказательстве теоремы дедукции. Проверяем индукцией по длине доказательства $\varphi(x)$, что

$$k_{x\in A}\,\varphi(x)(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x \varphi(x).$$

Действительно,

$$k\pi'_{AB}(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x k,$$
$$\pi_{A1}(x\mathrm{O}_1 \wedge 1_1) =_x x\mathrm{O}_1 =_x x1_1 =_x x,$$
$$(k_{x\in A}\psi(x) \wedge k_{x\in A}\,\chi(x))(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x$$
$$=_x k_{x\in A}\psi(x)(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) \wedge k_{x\in A}\chi(x)(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x \psi(x) \wedge \chi(x),$$
$$(k_{x\in A}\chi(x)(\pi_{AB} \wedge k_{x\in A}\psi(x))(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x$$
$$=_x k_{x\in A}\chi(x)(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B)\psi(x) =_x \chi(x) \wedge \psi(x),$$

$(k_{x\in A}\psi(x)\alpha_{A,B,C})^*(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x$
$=_x (k_{x\in A}\psi(x)\alpha((x\mathrm{O} \wedge 1)\pi \wedge \pi'))^* =_x$
$=_x (k_{x\in A}\psi(x)\alpha((x\mathrm{O} \wedge \pi) \wedge \pi'))^* =_x$
$=_x (k_{x\in A}\psi(x)(x\mathrm{O} \wedge (\pi\wedge \pi')))^* =_x$
$=_x (k_{x\in A}\psi(x)(x\mathrm{O} \wedge 1))^* =_x (\psi(x))^*$,

с помощью $h^*k = (h(k)(\pi_{DB} \wedge \pi'_{DB}))^*$ и $\alpha((f \wedge g) \wedge h) = f \wedge (g\wedge h)$. Первое из этих равенств, справедливое для $h$: $A \wedge B \to C$ и $k$:$D\to A$, легко получается при опускании нижних индексов: $h^*k = (\xi(h^*k\pi \wedge \pi'))^* = (\xi(h^*\pi \wedge \pi')(k\pi \wedge \pi'))^* = (h(k\pi \wedge \pi'))^*$.

Следующим этапом является проверка того, что $k_{x\in A}\ \varphi(x)$ зависит от полинома $\varphi(x)$, то есть, от класса эквивалентности доказательства $\varphi(x)$ по модулю $=_x$. Будем писать $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ вместо $k_{x\in A}\ \varphi(x) = k_{x\in A}\ \psi(x)$. Легко проверить, что $\equiv$ обладает всеми подстановочными свойствами и выполняет все условия, которые должно выполнять тождество в $\boldsymbol{A}[x]$. Поскольку $=_x$ было определено как наименьшее такое отношение эквивалентности, отсюда следует, что $=_x$ содержится в $\equiv$, т.е. что имеет место

$\varphi(x) =_x \psi(x)$ влечет $k_{x\in A}\ \varphi(x) = k_{x\in A}\ \psi(x)$,

как и утверждалось.

Проверим, например, что если $f \wedge g = h$ в $\boldsymbol{A}$ , то $f \wedge g \equiv h$. Действительно:

$$k_{x\in A}\ (f \wedge g\ ) = (k_{x\in A}f \wedge k_{x\in A}\ g) = (f\pi' \wedge g\pi') =$$
$$= (f \wedge g\ )\ \pi' = h\pi' = k_{x\in A}\ h.$$

Наконец, чтобы доказать единственность $f$: $A \wedge B \to C$, допустим что $f(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =_x \varphi(x)$. Тогда можно утверждать, что $f = k_{x\in A}\varphi(x)$. Действительно:

$k_{x\in A}\varphi(x) = k_{x\in A}f(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =$
$f\,k_{x\in A}\,(x\mathrm{O}_B \wedge 1_B) =$
$f\,(k_{x\in A}\,(x\mathrm{O}_B) \wedge k_{x\in A}\,1_B) =$
$f\,(k_{x\in A}\,x(\pi_{AB} \wedge k_{x\in A}\,\mathrm{O}_B) \wedge k_{x\in A}\,1_B) =$
$f\,(\pi_{A1}\,(\pi_{AB} \wedge \pi'_{AB}\mathrm{O}_B) \wedge \pi'_{AB}) =$
$f\,(\pi_{AB} \wedge \pi'_{AB}) =$
$f\,1_{A\wedge B} = f$. ■

***Следствие.*** Для *любого полинома* $\varphi(x)$:T$\vdash$ *C по индетерминанту* $x$:T$\vdash$ *A, над декартовой или декартово замкнутой дедук-*

*тивной категорией* $\boldsymbol{A}$ *существует единственная стрелка* $f{:}A \vdash C$ *в* $\boldsymbol{A}$*, такая, что* $g\, x =_x \varphi\,(x)$*. Над декартово замкнутой дедуктивной категорией* $\boldsymbol{A}$ *существует единственная стрелка* $h{:}\mathrm{T} \vdash A \supset C$*, такая, что* $\xi_{CA}(h \wedge x) =_x \varphi\,(x)$.

**Доказательство**. Чтобы вывести это из предложения 8, достаточно положить

$$g = k_{x \in A}\,(\mathrm{O}_A \wedge 1_A), \qquad h = \ulcorner g \urcorner$$

и проверить, что $k_{x\in A}\,(g\, x)(\mathrm{O}_A \wedge 1_A) = g$ и $h^s = g$. ■

Именно это следствие чаще всего называют "функциональной полнотой".

### 3. Декартово бизамкнутые дедуктивные категории

*Декартово бизамкнутая дедуктивная категория* представляет собой полное интуиционистское дедуктивное исчисление, выполняющее следующие дополнительные тождества:

$$f = \square_A, \text{ для всех } f{:}\ \bot \vdash A;$$
$$(f \vee g)\rho_{AB} = f;$$
$$(f \vee g)\rho'_{AB} = g;$$
$$(h\rho_{AB} \vee h\rho'_{AB}) = h;$$

для всех $f{:}\ A \vdash C$, $g{:}\ B \vdash C$ и $h{:}\ A \vee B \vdash C$.

Операция (-)$\vee$ (-) была определена ранее как $f \vee g = (\xi^C_{AB}\,(\ulcorner f \urcorner \wedge \ulcorner g \urcorner))^s$. Порою пишут 0 вместо $\bot$ и $A + B$ вместо $A \vee B$. В этом случае (в математической терминологии) тождества утверждают, что 0 есть инициальный объект, а $A + B$ представляет собой копроизведение с инъекциями $\rho_{AB}$ и $\rho'_{AB}$. Отсюда $\mathbf{Arr}(\bot, A)$ имеет в точности один элемент и $\mathbf{Arr}(A,C) \times \mathbf{Arr}(B,C)$ будет изоморфно $\mathbf{Arr}(A \vee B, C)$.

Если понимать изоморфизм $A \dashv\vdash B$ как факт одновременного существования стрелок $A \vdash B$ и $B \vdash A$, то нетрудно доказать, что в декартово бизамкнутых категориях имеют место следующие стрелки:

$$A \vee \bot \dashv\vdash A,\ A \wedge \bot \dashv\vdash \bot,\ A \supset \bot \dashv\vdash \mathrm{T},$$
$$A \vee B \dashv\vdash B \vee A,\ (A \vee B) \vee C \dashv\vdash (A \vee B) \vee C,$$
$$(A \vee B) \wedge C \dashv\vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C),$$
$$(B \vee C) \supset A \dashv\vdash (B \supset C) \wedge (A \supset C).$$

Для декартово бизамкнутых дедуктивных категорий имеет место функциональная полнота. Точнее, мы имеем:

***Предложение 1.*** *Если* $\boldsymbol{A}$ *есть декартово бизамкнутая дедуктивная категория и* $\boldsymbol{A}[x]$ *есть декартово замкнутая дедуктивная категория полиномов по индетерминанту* $x$: $\mathrm{T}\vdash A$ *над* $\boldsymbol{A}$, *то* $\boldsymbol{A}[x]$ *также является декартово бизамкнутой дедуктивной категорией.*

***Доказательство***. Сошлемся на одно-однозначное соответствие между стрелками $B\vdash C$ в $\boldsymbol{A}[x]$ и стрелками $A \vee B\vdash C$ в $\boldsymbol{A}$. Таким образом $\perp$ будет инициальным объектом в $\boldsymbol{A}[x]$, поскольку (записывая изоморфизм как $\cong$)

$$\mathbf{Arr}(A \wedge \perp, B) \cong \mathbf{Arr}(\perp \wedge A, B) \cong \mathbf{Arr}(\perp, A \supset B),$$

а последнее множество имеет как раз один элемент, потому что $\perp$ есть инициальный объект в $\boldsymbol{A}$. Опять, $B \vee C$ (т.е. $B + C$) является дизъюнкцией (копроизведением) в $\boldsymbol{A}[x]$, потому что

$$\mathbf{Arr}(A \wedge B, D) \times \mathbf{Arr}(A \wedge C, D) \cong$$
$$\cong \mathbf{Arr}((A \wedge B) \vee ( A \wedge C), D) \cong \mathbf{Arr}((A \wedge (B \vee C), D).$$

Здесь используется тот факт, что $(A \wedge B) \times (A \wedge C)$ есть копроизведение в $\boldsymbol{A}[x]$, а также дистрибутивный закон

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \dashv\vdash (A \wedge (B \vee C). \blacksquare$$

## 4. Подструктурные дедуктивные категории

Описываемые ниже дедуктивные категории называются *подструктурными*, так как они соответствуют таким минимальным фрагментам ассоциативного исчисления Ламбека, линейной, релевантной, BCK и интуиционистской логик, которые достаточны, чтобы описать лежащие в их основании структурные правила (подробнее см. [Restall 2000]). Заметим, что в отличие от рассмотренных ранее систем AL, M, R, BCK, тоже соответствующих упомянутым логикам, в рассматриваемых ниже подструктурных дедуктивных (системах) категориях нет операции импликации.

Под ***дедуктивной категорией с умножением***, следуя [Petrić 2002], будем подразумевать дедуктивную категорию с формулой T (= истина) и бинарной операцией $\bullet$ для образования произведений $A\bullet B$ из двух данных формул $A$ и $B$. Кроме этого, мы вводим следующее правило вывода:

$$\frac{f\colon A \vdash B \quad g\colon C \vdash D}{f\bullet g\colon A\bullet C\vdash B\bullet D}$$

и добавляем к обычным категорным тождествам следующие дополнительные уравнения между доказательствами:

$$(g_1 f_1) \bullet (g_2 f_2) = (g_1 \bullet g_2)\,(f_1 \bullet f_2),$$

$$1_A \bullet 1_B = 1_{A \bullet B}.$$

Дедуктивная категория с умножением является ***моноидальной дедуктивной категорией***, если в ней существуют следующие специальные стрелки для всех объектов $A$,$B$ и $C$:

$\sigma_A$: $\mathrm{T}\bullet A \vdash A$ $\qquad$ $\delta_A$: $A\bullet\mathrm{T} \vdash A$

$\sigma^i{}_A$: $A \vdash \mathrm{T}\bullet A$ $\qquad$ $\delta^i{}_A$: $A \vdash A\bullet\mathrm{T}$

$\mathbf{b}_{A,B,C}$: $A\bullet(B\bullet C) \vdash (A\bullet B)\bullet C$ $\qquad$ $\mathbf{b}^\circ{}_{A,B,C}$: $(A\bullet B)\bullet C \vdash A\bullet(B\bullet C)$

и выполняются следующие уравнения:

σδ-уравнения:

(σ) $\quad f\sigma_A = \sigma_B(1_\mathrm{T} \bullet f)$ $\qquad$ для всех $f$: $A \vdash B$;

(δ) $\quad f\delta_A = \delta_B(f \bullet 1_\mathrm{T})$ $\qquad$ для всех $f$: $A \vdash B$;

($\sigma\sigma^i$) $\quad \sigma_A\sigma^i{}_A = 1_A$, $\qquad$ $\sigma^i{}_A\sigma_A = 1_{\mathrm{T}\bullet A}$;

($\delta\delta^i$) $\quad \delta_A\delta^i{}_A = 1_A$, $\qquad$ $\delta^i{}_A\delta_A = 1_{A\bullet\mathrm{T}}$;

($\sigma\delta^i$) $\quad \sigma_\mathrm{T} = \delta_\mathrm{T}$.

**b**-уравнения:

(**b**) $\quad ((f\bullet g)\bullet h)\mathbf{b}_{A,B,C} = \mathbf{b}_{D,E,F}(f\bullet(g\bullet h))$

для всех $f$: $A \vdash D$, $g$: $B \vdash E$, $h$: $C \vdash F$;

(**bb**) $\quad \mathbf{b}_{A,B,C}\mathbf{b}^\circ{}_{A,B,C} = 1_{(A\bullet B)\bullet C}$, $\qquad$ $\mathbf{b}^\circ{}_{A,B,C}\mathbf{b}_{A,B,C} = 1_{A\bullet(B\bullet C)}$;

(σδ**b**) $(\delta_A \bullet 1_B)\mathbf{b}_{A,\mathrm{T},B} = 1_A \bullet \sigma_B$;

(**b1**) $\quad \mathbf{b}_{A\bullet B,C,D}\mathbf{b}_{A,B,C\bullet D} = (\mathbf{b}_{A,B,C}\bullet 1_D)\mathbf{b}^\circ{}_{A,B\bullet C,D}(1_A\bullet\mathbf{b}_{B,C,D})$.

Моноидальная дедуктивная категория является ***симметричной моноидальной дедуктивной категорией***, если она имеет специальную стрелку

$\mathbf{c}_{A,B}$: $A\bullet B \vdash B\bullet A$

для каждой пары ($A$,$B$) ее объектов, и если выполняются следующие уравнения:

**c**-уравнения:

(**c**) $\quad (g\bullet f)\mathbf{c}_{A,B} = \mathbf{c}_{C,D}(f\bullet g)$

для всех $f$: $A \vdash C$, $g$: $B \vdash D$;

(**cc**) $\quad \mathbf{c}_{B,A}\mathbf{c}_{A,B} = 1_{A\bullet B}$;

(σδ**c**) $\quad \sigma_A\mathbf{c}_{A,\mathrm{T}} = \delta_A$;

(**bc1**) $\quad \mathbf{b}_{C,A,B}\mathbf{c}_{A\bullet B,C}\mathbf{b}_{A,B,C} = (\mathbf{c}_{A,C}\bullet 1_B)\mathbf{b}_{A,C,B}(1_A\bullet\mathbf{c}_{B,C})$.

Симметричная моноидальная дедуктивная категория является ***релевантной***, если она имеет специальную стрелку

$\mathbf{w}_A$: $A \vdash A\bullet A$

для каждого объекта $A$ и выполняются следующие уравнения:

<u>**w**-уравнения:</u>

**(w)** $(f \bullet f)\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_B f$

для всех $f$: $A \vdash B$;

**(σδw)** $\boldsymbol{\sigma}_T \mathbf{w}_T = 1_T$;

**(bw)** $\mathbf{b}_{A,A,A}(1_A \bullet \mathbf{w}_A)\mathbf{w}_A = (\mathbf{w}_A \bullet 1_A)\mathbf{w}_A$;

**(cw)** $\mathbf{c}_{A,A}\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_A$;

**(bcw1)** $\mathbf{c}^m{}_{A,B,A,B}\mathbf{w}_{A\bullet B} = \mathbf{w}_A \bullet \mathbf{w}_B$,

где $\mathbf{c}^m{}_{A,B,C,D} =_{def} \mathbf{b}_{A,C,B\bullet D}(1_A \bullet (\mathbf{b}^\circ{}_{C,B,D}(\mathbf{c}_{B,C} \bullet 1_D))\mathbf{b}_{B,C,d})\mathbf{b}_{A,B,C\bullet D}$.

Симметричная моноидальная дедуктивная категория является ***аффинной***, если она имеет специальную стрелку

$\mathbf{k}_A$: $A \vdash \mathrm{T}$

Для каждого объекта и выполняются следующие уравнения:

<u>**k**-уравнения:</u>

**(k)** $\mathbf{k}_A = \mathbf{k}_B f$

для всех $f$: $A \vdash B$;

**(Tk)** $\mathbf{k}_T = 1_T$.

***Предложение 1***. *Если симметричная моноидальная дедуктивная категория является одновременно и релевантной и аффинной, и ее стрелки удовлетворяют следующим уравнениям:*

**(σkw)** $\boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{k}_A \bullet 1_A)\mathbf{w}_A = 1_A$,

**(δkw)** $\delta_A(1_A \bullet \mathbf{k}_A)\mathbf{w}_A = 1_A$,

*то она представляет собой декартову дедуктивную категорию.*

***Доказательство***. Приведенную аксиоматизацию декартовой дедуктивной категории будем называть *структурно-эквациональной*, чтобы отличить ее от стандартной аксиоматизации, приведенной ранее. Чтобы показать, что эти две аксиоматизации экстенсионально эквивалентны, определим:

$\mathrm{O}_A =_{def} \mathbf{k}_A$

$\pi_{AB} =_{def} \delta_A(1_A \bullet \mathbf{k}_B)$

$\pi'_{AB} =_{def} \boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{k}_A \bullet 1_B)$

и для всех $f$: $C \vdash A$ и $g$: $C \vdash B$

$f \wedge g =_{def} (f \bullet g)\mathbf{w}_C$

для случая структурной аксиоматизации. Нетрудно показать, что это ведет к выполнению стандартных условий декартовой категории:

$f = \mathrm{O}_A$, для всех $f$: $A \vdash \mathrm{T}$,

$\pi_{AB}(f \wedge g) = f$,

$\pi'_{AB}(f \wedge g) = g$,

$\pi_{AB}h \wedge \pi'_{AB}h = h,$
для всех $f$: $C \vdash A$ и $g$: $C \vdash B$, $h$: $C \vdash A \wedge B$.

Наоборот, если мы начнем со стандартной аксиоматизации, то можем определить

$$\boldsymbol{\sigma}_A =_{def} \pi'_{\mathrm{T}B}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^i_A =_{def} \mathrm{O}_A \wedge 1_A$$
$$\boldsymbol{\delta}_A =_{def} \pi_{A\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\delta}^i_A =_{def} 1_A \wedge \mathrm{O}_A$$
$$\mathbf{b}_{A,B,C} =_{def} (\pi_{A(B\wedge C)} \wedge \pi_{BC}\pi'_{A(B\wedge C)}) \wedge (\pi'_{BC} \wedge \pi_{BC}\pi'_{A(B\wedge C)})$$
$$\mathbf{b}^\circ_{A,B,C} =_{def} (\pi_{AB}\pi_{(A\wedge B)C}) \wedge (\pi'_{AB}\pi_{(A\wedge B)C} \wedge \pi'_{(A\wedge B)C})$$
$$\mathbf{c}_{A,B} =_{def} \pi'_{AB} \wedge \pi'_{AB}$$
$$\mathbf{w}_{A,B} =_{def} 1_A \wedge 1_A$$

и для $f$: $A \vdash C$ и $g$: $B \vdash D$

$$f \bullet g =_{def} f\,\pi_{AB} \wedge g\pi'_{AB}.$$

Нетрудно видеть, что при этом выполнимы $\boldsymbol{\sigma}$,$\boldsymbol{\delta}$,**b**,**c**,**w**-уравнения, так же как и выполнимы ($\boldsymbol{\sigma}$**kw**) и ($\boldsymbol{\delta}$**kw**)–уравнения.

Теперь мы должны доказать, что «двойной перевод» (туда и обратно) приведет нас к тем же самым понятиям, т.е. показать, что в структурной аксиоматизации выполняются следующие уравнения:

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \quad \boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{k}_\mathrm{T} \bullet 1_A)$$
$$\boldsymbol{\sigma}^i_A = \quad (\mathbf{k}_A \bullet 1_A)\mathbf{w}_A$$
$$\boldsymbol{\delta}_A = \quad \boldsymbol{\delta}_A(1_A \bullet \mathbf{k}_\mathrm{T})$$
$$\boldsymbol{\delta}^i_A = \quad (1_A \bullet \mathbf{k}_A)\mathrm{w}_A$$
$$\mathbf{b}_{A,B,C} = \quad (((\boldsymbol{\delta}_A(1_A \bullet \mathbf{k}_{B\bullet C})) \bullet (\boldsymbol{\delta}_A(1_B \bullet \mathbf{k}_C)\boldsymbol{\sigma}_{B\bullet C}(\mathbf{k}_A \bullet 1_{B\bullet C})))\mathrm{w}_{A\bullet(B\bullet C)} \bullet$$
$$(\boldsymbol{\sigma}_C(\mathbf{k}_B \bullet 1_C)\boldsymbol{\sigma}_{B\bullet C}(\mathbf{k}_A \bullet 1_{B\bullet C})))\mathrm{w}_{A\bullet(B\bullet C)}$$
$$\mathbf{b}^\circ_{A,B,C} = \quad ((\boldsymbol{\delta}_A(1_A \bullet \mathbf{k}_B)\boldsymbol{\delta}_{A\bullet B}(1_{A\bullet B} \bullet \mathbf{k}_C)) \bullet (((\boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{k}_A \bullet 1_B)\boldsymbol{\delta}_{A\bullet B}(1_{A\bullet B} \bullet \mathbf{k}_C)) \bullet$$
$$(\boldsymbol{\sigma}_C(\mathbf{k}_{A\bullet B} \bullet 1_C)))\mathrm{w}_{(A\bullet B\bullet)C}))\mathrm{w}_{(A\bullet B\bullet)C}$$
$$\mathbf{c}_{A,B} = \quad ((\boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{k}_A \bullet 1_B)) \bullet (\boldsymbol{\delta}_A(1_A \bullet \mathbf{k}_B)))\mathrm{w}_{A\bullet B}$$
$$\mathbf{w}_{A,B} = \quad (1_A \bullet 1_A)\mathrm{w}_A$$
$$f \bullet g = \quad ((f\,\boldsymbol{\delta}_A(1_A \bullet \mathbf{k}_B)) \bullet (g\boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{k}_A \bullet 1_B)))\mathrm{w}_{A\bullet B}$$

для всех $f$: $A \vdash C$ и $g$: $B \vdash D$,

а в стандартной аксиоматизации -

$$\pi_{AB} = \quad \pi_{A\mathrm{T}}(1_A\pi_{AB} \wedge \mathbf{k}_B\pi'_{AB})$$
$$\pi'_{AB} = \quad \pi_{\mathrm{T}B}(\mathbf{k}_A\pi_{AB} \wedge 1_B\pi'_{AB})$$
$$f \wedge g = \quad (f\,\pi_{CC} \wedge g\pi'_{CC})(1_C \bullet 1_C)$$

для всех $f$: $C \vdash A$ и $g$: $C \vdash B$.

Некоторые из этих выводов очевидны, другие (например, касающиеся **b**-стрелок) требуют некоторых усилий, которые остаются на долю читателя. ■

## 5. Подструктурные дедуктивные мультикатегории

Расширим теперь, следуя [Lambek 1993], понятие дедуктивной мультикатегории за счет введения новых операций $\otimes$, $\wedge$, $\vee$, $\boldsymbol{I}$, $\perp$. Первая из этих операций представляет собой категорный аналог «произведения» (конкатенации) в системах Айдукевича-Ламбека, $\wedge$ и $\vee$ - это конъюнкция и дизъюнкция из декартовых дедуктивных категорий, $\boldsymbol{I}$ представляет собой константу, играющую ту же роль относительно $\otimes$, которую играет T относительно $\wedge$ и $\vee$. И, наконец, $\perp$ также знакома нам по декартовым категориям. Отсутствие в логике аналогов $\otimes$ и $\boldsymbol{I}$ обычно объясняется тем, что, в присутствии генценовских структурных правил, эти связки совпадают с $\wedge$ и T.

Введем следующие специальные стрелки:

$$\boldsymbol{\mu}_{AB}: AB\vdash A\otimes B$$

$$\mathbf{p}_{AB}: A\wedge B\vdash A \qquad \mathbf{q}_{AB}: A\wedge B\vdash B$$

$$\mathbf{k}_{AB}: A\vdash A\vee B \qquad \mathbf{l}_{AB}: B\vdash A\vee B$$

$$\mathbf{i}: \vdash \boldsymbol{I}$$

$$\mathbf{O}_{\Gamma}: \Gamma\vdash \boldsymbol{I}$$

$$\square^{C}_{\Gamma\Delta}: \Gamma\perp\Delta\vdash C$$

и следующие правила:

$$\frac{f: \Gamma AB\Delta\vdash C}{f^{\otimes}: \Gamma(A\otimes B)\Delta\vdash C}$$

$$\frac{f: \Gamma\vdash A \qquad g: \Gamma\vdash \boldsymbol{B}}{f\wedge g: \Gamma\vdash A\wedge B}$$

$$\frac{f: \Gamma A\Delta\vdash C \qquad g: \Gamma B\Delta\vdash C}{f\vee g: \Gamma(A\vee B)\Delta\vdash C}$$

$$\frac{f: \Gamma\vdash A}{f^{i}: \Gamma\boldsymbol{I}\Delta\vdash C}$$

Список новых мультикатегорных тождеств выглядит следующим образом:

$f^{\otimes}\langle\boldsymbol{\mu}\rangle = f$ $\qquad$ $(g\langle\boldsymbol{\mu}\rangle)^{\otimes} = g$

$\mathbf{p}\langle f\wedge g\rangle = f$ $\qquad$ $\mathbf{q}\langle f\wedge g\rangle = g$

$\mathbf{p}\langle h\rangle \wedge \mathbf{q}\langle h\rangle = h$

$(f\vee g)\langle\mathbf{k}\rangle = f$ $\qquad$ $(f\vee g)\langle\mathbf{l}\rangle = g$

$\mathbf{p}\langle h\rangle \vee \mathbf{q}\langle h\rangle = h$

$f^{i}\langle \boldsymbol{i}\rangle = f \qquad\qquad (g\langle \boldsymbol{i}\rangle)^{i} = g$

$f = \mathrm{O}_{\Gamma}$, для всех $f$: $\Gamma \vdash \boldsymbol{I}$

$g = \Box^{C}{}_{\Gamma\Delta}$, для всех $g$: $\Gamma\bot\Delta\vdash C$

С помощью введенных правил нетрудно получить следующие правила:

$$\frac{f\colon \Gamma\vdash A \qquad g\colon \Gamma\Delta\vdash B}{f\otimes g\colon \Gamma\Delta\vdash (A\otimes B)}\,(\otimes)$$

(достаточно положить $f\otimes g = \boldsymbol{\mu}_{AB}\langle f\rangle\langle g\rangle$; очевидным образом $\boldsymbol{\mu}_{AB} = 1_A\otimes 1_B$)

$$\frac{f\colon \Gamma A\Delta\vdash C}{f_p\colon \Gamma(A\wedge B)\Delta\vdash C}\,(\text{-})_p$$

$$\frac{g\colon \Gamma B\Delta\vdash C}{g_q\colon \Gamma(A\wedge B)\Delta\vdash C}\,(\text{-})_q$$

(достаточно положить $f_p = f\langle\mathbf{p}\rangle$ и $g_p = g\langle\mathbf{q}\rangle$; очевидным образом $\mathbf{p}_{AB} = (1_A)_p$, $\mathbf{q}_{AB} = (1_B)_l$)

$$\frac{f\colon \Delta\vdash A}{f_k\colon \Delta\vdash A\vee B}\,(\text{-})_k$$

$$\frac{g\colon \Delta\vdash B}{g_l\colon \Delta\vdash A\vee B}\,(\text{-})_l$$

(достаточно положить $f_k = \mathbf{k}\langle f\rangle$ и $g_l = \mathbf{l}\langle g\rangle$; очевидным образом $\mathbf{k}_{AB} = (1_A)_k$, $\mathbf{l}_{AB} = (1_B)_l$).

В частности, $\boldsymbol{\mu}^{\otimes}{}_{AB} = 1_{A\otimes B}$, $\mathbf{p}_{AB}\wedge\mathbf{q}_{AB} = 1_{A\wedge B}$, $\mathbf{k}_{AB}\vee\mathbf{l}_{AB} = 1_{A\vee B}$, $\mathbf{i}^{i} = 1_{\boldsymbol{I}}$, $\Box^{\bot} = 1_{\bot}$.

Во внутреннем языке единственность секвенций может быть выражена также в виде правил вывода, отсюда тождества подструктурной дедуктивной мультикатегории могут быть переписаны следующим образом:

$$f^{\otimes}u\boldsymbol{\mu}xyv = fuxyv, \qquad \frac{g_1u\boldsymbol{\mu}xyv = g_2u\boldsymbol{\mu}xyv}{g_1us_1v = g_2us_1v}$$

где $s_1$ есть переменная типа $A\otimes B$;

$$\begin{array}{ll}\mathbf{p}\langle f\wedge g\rangle u = fu, & \dfrac{\mathbf{p}g_1u = \mathbf{p}g_2u \qquad \mathbf{q}g_1u = \mathbf{q}g_2u}{g_1u = g_2u}\\ \mathbf{q}\langle f\wedge g\rangle u = gu, & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}(f\vee g)u\mathbf{k}xv = fu, & \dfrac{g_1u\mathbf{k}xv = g_2\,u\mathbf{k}xv \quad g_1u\mathbf{k}xv = g_2u\mathbf{k}xv}{g_1us_2v = g_2us_2v}\\ (f\vee g)u\mathbf{l}xv = gu, & \end{array}$$

где $s_2$ есть переменная типа $A \vee B$;

$$f^{i}\, u\mathbf{i}v = fuv, \qquad \frac{g_1 u\mathbf{i}v = g_2 u\mathbf{i}v}{g_1 us_3v = g_2 us_3v}$$

где $s_3$ есть переменная типа T;

$$fu = \mathrm{O}_{\Gamma}u;$$

$$gus_4v = \square us_4v,$$

где $s_4$ есть переменная типа $\perp$.

## 6. Устранение сечения в подструктурных дедуктивных мультикатегориях

Для подструктурной дедуктивной мультикатегории $\boldsymbol{G}$ мы можем сконструировать свободную подструктурную дедуктивную мультикатегорию $\boldsymbol{Fr}(\boldsymbol{G})$, порожденную $\boldsymbol{G}$. Объекты этой мультикатегории получаются индуктивно из объектов $\boldsymbol{G}$ с помощью операций $\otimes$, $\wedge$, $\vee$, $\boldsymbol{I}$, $\perp$. Ее секвенции получаются из секвенций $\boldsymbol{G}$ путем присоединения базисных секвенций $1_A$, $\mu_{AB}$ и т.д., и формирования новых операций из старых с помощью правила сечения и правил ($\otimes$), $(\text{-})_p$ и т.д. Тождества между сравнимыми секвенциями в $\boldsymbol{Fr}(\boldsymbol{G})$ будут те и только те, которые следуют из тождеств в $\boldsymbol{G}$, и мультикатегорные тождества

$$h\langle g\langle f\rangle\rangle = h\langle g\rangle\langle f\rangle,$$

$$g'\langle f\rangle\langle f'\rangle = g'\langle f''\rangle\langle f\rangle$$

Помимо этого, добавляются еще и тождества

$$f^{\otimes}\langle\mu\rangle = f,$$

$$(g\langle\mu\rangle)^{\otimes} = g,$$

$$\mathbf{p}\langle f \wedge g\rangle = f,$$

$$\mathbf{q}\langle f \wedge g\rangle = g,$$

и т. п., рассмотренные ранее.

Ранее уже было рассмотрено понятие мультифунктора для случая экспоненциальных дедуктивных мультикатегорий. Расширим теперь это понятие на случай подструктурных дедуктивных мультикатегорий.

***Определение 1.*** Подструктурный мультифунктор $\boldsymbol{F}$ из подструктурной дедуктивной мультикатегории $\boldsymbol{M}$ в подструктурную дедуктитвную мультикатегорию $\boldsymbol{M}'$ представляет собой мультифунктор, сохраняющий структуру мультикатегорий, т.е. выполняются следующие условия:

$$\boldsymbol{F}(\mathrm{T}) = \mathrm{T},$$

$$\boldsymbol{F}(A \otimes B) = \boldsymbol{F}(A) \otimes \boldsymbol{F}(B),$$
$$\boldsymbol{F}(A \wedge B) = \boldsymbol{F}(A) \wedge \boldsymbol{F}(B),$$
$$\boldsymbol{F}(A \vee B) = \boldsymbol{F}(A) \vee \boldsymbol{F}(B),$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I},$$
$$\boldsymbol{F}(\perp) = \perp,$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mu}_{AB}) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},$$
$$\boldsymbol{F}(\mathbf{p}_{AB}) = \mathbf{p}_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},$$
$$\boldsymbol{F}(\mathbf{q}_{AB}) = \mathbf{q}_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},$$
$$\boldsymbol{F}(\mathbf{k}_{AB}) = \mathbf{k}_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},$$
$$\boldsymbol{F}(\mathbf{l}_{AB}) = \mathbf{l}_{\boldsymbol{F}(A)\boldsymbol{F}(B)},$$
$$\boldsymbol{F}(\mathbf{i}) = (\vdash \boldsymbol{F}(\boldsymbol{I})),$$
$$\boldsymbol{F}(\mathrm{O}_\Gamma) = \mathrm{O}_{\boldsymbol{F}(\Gamma)},$$
$$\boldsymbol{F}(\square^{\mathrm{C}}{}_{\Gamma\Delta}) = \square^{\boldsymbol{F}(\mathrm{C})}{}_{\boldsymbol{F}(\Gamma\Delta)}.$$

Здесь для простоты не делается различия между константами и операциями первой и второй мультикатегории.

Пусть $\boldsymbol{U}$ будет стирающим мультифунктором, тогда подструктурный мультифунктор $\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{UF}(\boldsymbol{G})$ будет, как известно, полным и точным [Lambek 1993] (полнота свидетельствует о том, что мультифунктор не порождает никаких новых секвенций по сравнению со старыми, а точность свидетельствует об отсутствии новых тождеств между секвенциями).

Теорема устранения сечения принимает теперь следующий вид:

***Теорема 1*** (устранение сечения). *Если стрелки* $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ *заменить на правила* ($\otimes$), $(\text{-})_p$, $(\text{-})_q$, $(\text{-})_k$, $(\text{-})_l$, *то любая секвенция в* $\boldsymbol{UF}(\boldsymbol{G})$, *сконструированная с помощью правил сечения, будет эквивалентна секвенции, сконструированной без применения правила сечения.*

***Доказательство***. Без потери общности допускаем, что стрелки $f$: $\Lambda \vdash A$ и $g$: $\Gamma A \Delta \vdash B$ уже были получены без применения правила сечения. Позднее покажем, что $g\langle f \rangle$ эквивалентна секвенции, в конструировании которой были вовлечены сечения меньшей "степени", причем *степень* сечения $g\langle f \rangle$ определяется как

$$d(\Lambda) + d(\Gamma) + d(\Delta) + d(A) + d(B)$$

где $d(A)$ есть число вхождений всех связок в $A$ и $d(\Gamma) = d(A_1) + ... + d(A_m)$. Возможны следующие случаи:

0. И $f$ и $g$ содержатся в $\boldsymbol{G}$.

1. На последнем шаге конструирования $f$ вводится одна связка по левую сторону стрелки.
2. На последнем шаге конструирования $g$ вводится одна связка по левую сторону стрелки, но не в $A$.
3. На последнем шаге конструирования $g$ вводится одна связка по правую сторону стрелки.
4. На последнем шаге конструирования и $f$ и $g$ вводится одна связка в $A$.

В случае 0 стрелка $g\langle f\rangle$ уже содержится в мультикатегории $\boldsymbol{G}$, замкнутой относительно сечения. Рассмотрим теперь по очереди остальные случаи.

(1). Связка $\otimes$.

Случай 1. Пусть $\Lambda = \Gamma' A'\otimes B'\Delta'$ и $f = f'^{\otimes}$. В этом случае мы имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon \Gamma' A' B' \Delta' \vdash A}{f'^{\otimes}\colon \Gamma' A'\otimes B'\Delta' \vdash A} \qquad g\colon \Gamma A \Delta \vdash B}{g\langle f'^{\otimes}\rangle\colon \Gamma\Gamma' A'\otimes B'\Delta'\Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon \Gamma' A' B' \Delta' \vdash A \quad g\colon \Gamma A \Delta \vdash B}{g\langle f'\rangle\colon \Gamma\Gamma' A' B'\Delta'\Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}}{(g\langle f'\rangle)^{\otimes}\colon \Gamma\Gamma' A'\otimes B'\Delta'\Delta \vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того, имеет место $g\langle f'^{\otimes}\rangle = (g\langle f'\rangle)^{\otimes}$, что можно показать во внутреннем языке. На место переменной типа $A'\otimes B'$ мы можем поставить $\mu x'y'$, где $x'$ и $y'$ являются переменными типа $A'$ и $B'$ соответственно. Нетрудно убедиться, что

$$g\langle f'^{\otimes}\rangle uu'\mu x'y'v'v = (g\langle f'\rangle)^{\otimes}\, uu'\mu x'y'v'v$$

проверяя, что обе стороны сводятся к $guf'u'x'y'v'v$, используя определения $\langle\ \rangle$ и $^{\otimes}$.

Случай 2. Пусть $\Gamma = \Gamma' A'\otimes B'\Delta'$ и $f = f'^{\otimes}$. (Случай, когда $\Delta = \Gamma' A'\otimes B'\Delta'$ такой же, поэтому он будет опущен) Мы имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda \vdash A \qquad \dfrac{f'\colon \Gamma' A' B' \Delta' A \Delta \vdash B}{f'^{\otimes}\colon \Gamma' A'\otimes B'\Delta' A\Delta \vdash B}}{f'^{\otimes}\langle f\rangle\colon \Gamma' A'\otimes B'\Delta'\Lambda\Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad f'\colon \Gamma' A' B' \Delta' A \Delta\vdash B}{f'\langle f\rangle\colon \Gamma' A' B' \Delta' \Lambda\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}}{(f'\langle f\rangle)^{\otimes}\colon \Gamma' A'\otimes B' \Delta' \Lambda\Delta\vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$f'^{\otimes}\langle f\rangle u'\mu x'y'v'wv = (f\langle f'\rangle)^{\otimes} u'\mu x'y'v'wv$$

поскольку обе стороны сводятся к $f'u'x'y'v'fwv$.

<u>Случай 3</u>. $B = A'\otimes B'$ и $g = f_0\otimes f_1\colon \Gamma'\Delta'\vdash A'\otimes B'$. Допустим, что $A$ содержится в $\Gamma'$. (Случай, когда оно появляется в $\Delta'$ аналогичен и будет опущен) Мы имеем:

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad \dfrac{f_0\colon \Gamma_1 A \Gamma_2\vdash A' \quad f_1\colon \Delta'\vdash B'}{f_0\otimes f_1\colon \Gamma_1 A \Gamma_2 \Delta'\vdash A'\otimes B'}}{f_0\otimes f_1\langle f\rangle\colon \Gamma_1 \Lambda \Gamma_2 \Delta'\vdash A'\otimes B'}\ \text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad f_0\colon \Gamma_1 A \Gamma_2\vdash A'}{f_0\langle f\rangle\colon \Gamma_1 \Lambda \Gamma_2\vdash A'}\ \text{(сечение)} \qquad f_1\colon \Delta'\vdash B'}{f_0\langle f\rangle\otimes f_1\colon \Gamma_1 \Lambda \Gamma_2 \Delta'\vdash A'\otimes B'}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$(f_0\otimes f_1)\langle f\rangle u_1 w u_2 v' = f_0\langle f\rangle\otimes f_1 u_1 w u_2 v''$$

поскольку обе стороны сводятся к $\mu f_0 u_1 f w u_2 f_1 v'$ ввиду определений $(\otimes)$ и $\langle\ \rangle$.

<u>Случай 4</u>. $B = A'\otimes B'$ и $g = f_0\otimes f_1$ и $f = g'^{\otimes}$. Мы имеем

$$\dfrac{\dfrac{f_0\colon \Gamma' A'\vdash B \quad f_1\colon \Delta'\vdash B'}{f_0\otimes f_1\colon \Gamma'\Delta'\vdash A'\otimes B'} \qquad \dfrac{f'\colon \Gamma' A' \Delta'\vdash B}{f'^{\otimes}\colon \Gamma' A'\otimes B' \Delta\vdash B}}{f'^{\otimes}\langle f_0\otimes f_1\rangle\colon \Gamma\Gamma'\Delta'\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\dfrac{f_1\colon \Delta'\vdash B' \qquad \dfrac{f_0\colon \Gamma'\vdash A' \quad f'\colon \Gamma B' \Delta'\vdash B}{f'\langle f_0\rangle\colon \Gamma\Gamma' B' \Delta\vdash B}}{f'\langle f_0\rangle\langle f_1\rangle\colon \Gamma\Gamma'\Delta'\Delta\vdash B}\ \text{(сечение)}$$

где оба новых сечения имеют более низкую степень. Более того,

$$f'^{\otimes}\langle f_0\otimes f_1\rangle u u'v'v = f'\langle f_0\rangle\langle f_1\rangle u u'v'v$$

что можно рассматривать следующим образом. Левая часть выражения сводится к $f'^{\otimes} u\mu f_0 u' f_1 v'v$ ввиду определений $(\otimes)$ и $\langle\rangle$. Теперь мы используем тот факт, что $f'^{\otimes}\langle\mu\rangle = f'$, а это затем сводится к $f'uf_0u'f_1v'v$, которое также представляет собой то, к чему сводится правая часть ввиду определения $\langle\ \rangle$.

(2). Связка $\wedge$.

Случай 1. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 A'\wedge B'\Lambda_2$ и $f = f'_p$. Мы имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f': \Lambda_1 A'B'\Lambda_2 \vdash A}{f'_p: \Lambda_1 A'\wedge B'\Lambda_2 \vdash A} \qquad g: \Gamma A\Delta \vdash B}{g\langle f'_p\rangle: \Gamma\Lambda_1 A'\wedge B'\Lambda_2\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f': \Lambda_1 A'B'\Lambda_2 \vdash A \quad g: \Gamma A\Delta \vdash B}{g\langle f'\rangle: \Gamma\Lambda_1 A'B'\Lambda_2\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g\langle f'\rangle)_p: \Gamma\Lambda_1 A'\wedge B'\Lambda_2\Delta \vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того, если $t'$ есть переменная типа $A'\wedge B'$, то

$$g\langle f'_p\rangle uw't'w_2v = (g\langle f'\rangle)_p uw't'w_2v$$

так как обе стороны сводятся к $guf'w'\mathbf{p}t'w_2v$, используя определения $\langle\ \rangle$ и $f'_p$.

Случай 2. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 A'\wedge B'\Gamma_2$ и $g = g'_p$. Мы имеем:

$$\dfrac{f: \Lambda \vdash A \qquad \dfrac{g': \Gamma_1 A'\Gamma_2 A\Delta \vdash B}{g'_p: \Gamma_1 A'\wedge B'\Gamma_2 A\Delta \vdash B}}{g'_p\langle f\rangle: \Gamma_1 A'\wedge B'\Gamma_2\Lambda\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f: \Lambda \vdash A \quad g': \Gamma_1 A'\Gamma_2 A\Delta \vdash B}{g'\langle f\rangle: \Gamma_1 A'\Gamma_2\Lambda\Delta \vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f\rangle)_p: \Gamma_1 A'\wedge B'\Gamma_2\Lambda\Delta \vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'_p\langle f\rangle ut'u_2wv = (g'\langle f\rangle)ut'u_2wv$$

поскольку обе стороны сводятся к $gu_1\mathbf{p}t'u_2fwv$ так же как в случае 1.

Случай 3. $B = A'\wedge B'$ и $g = g_0\wedge g_1$. Мы имеем

$$\dfrac{f: \Lambda \vdash A \qquad \dfrac{g_0: \Gamma A\Delta \vdash A' \qquad g_1: \Gamma A\Delta \vdash B'}{g_0\wedge g_1: \Gamma A\Delta \vdash A'\wedge B'}}{g_0\wedge g_1\langle f\rangle: \Gamma\Lambda\Delta \vdash A'\wedge B'}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на

$$\dfrac{\dfrac{f{:}\,\Lambda\vdash A \quad g_0{:}\ \Gamma A\Delta\vdash A'}{g_0\langle f\rangle{:}\ \Gamma\Lambda\Delta\vdash A'}(\text{сечение}) \qquad \dfrac{f{:}\,\Lambda\vdash A \quad g_0{:}\,\Gamma A\Delta\vdash B'}{g_1\langle f\rangle{:}\ \Gamma\Lambda\Delta\vdash B'}(\text{сечение})}{g_0\langle f\rangle\wedge g_1\langle f\rangle{:}\ \Gamma\Lambda\Delta\vdash A'\wedge B'}$$

где оба новых сечения имеют меньшую степень. Более того,

$$\mathbf{p}(g_0\wedge g_1)\langle f\rangle uwv = \mathbf{p}(g_0\langle f\rangle\wedge g_1\langle f\rangle)uwv$$

(и аналогично для $\mathbf{q}$), так как левая сторона сводится к

$$\mathbf{p}(g_0\wedge g_1)u\,fwv = g_0ufwv$$

так же как и правая.

Случай 4. Пусть $A = A'\wedge B'$, $f = f_0\wedge f_1$ и $g = g'_p$. Мы имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f_0{:}\ A\vdash A' \qquad g_1{:}\ \Lambda\vdash B'}{f_0\wedge f_1{:}\ \Lambda\vdash A'\wedge B'} \qquad \dfrac{g'{:}\ \Gamma A'\Delta\vdash B}{g'_p{:}\ \Gamma A'\wedge B'\Delta\vdash B}}{g'_p\langle f_0\wedge f_1\rangle{:}\ \Gamma\Lambda\Delta\vdash B}(\text{сечение})$$

Заменим это выражение на

$$\dfrac{f_0{:}\ A\vdash A' \qquad g'{:}\ \Gamma A'\Delta\vdash B}{g'\langle f_0\rangle{:}\ \Gamma\Lambda\Delta\vdash B}(\text{сечение})$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'_p\langle f_0\wedge f_1\rangle uwv = g'_pu\,f_0\wedge f_1wv = g'_pu\mathbf{p}\,f_0\wedge f_1wv = g'u\,f_0wv = g'\langle f_0\rangle uwv$$

(3). Связка $\vee$.

Случай 1. $\Lambda = \Gamma'_1A\vee B'\Delta'$ и $f = f_0\vee f_1$. Мы имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f_0{:}\ \Gamma'A'\Delta'\vdash A \qquad f_1{:}\ \Gamma'B'\Delta'\vdash A}{f'_p{:}\ \Gamma'A'\vee B'\Delta'\vdash A} \qquad g{:}\ \Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle f_0\vee f_1\rangle{:}\ \Gamma\Gamma'_1A\vee B'\Delta'\Delta\vdash B}(\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f_0{:}\Gamma'A'\Delta'\vdash A \quad g{:}\Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle f_0\rangle{:}\ \Gamma\Gamma'A'\Delta'\Delta\vdash B}(\text{сеч.}) \qquad \dfrac{f_1{:}\Gamma'B'\Delta'\vdash A \quad g{:}\Gamma A\Delta\vdash B'}{g\langle f_1\rangle{:}\ \Gamma\Gamma'B'\Delta'\Delta\vdash B}(\text{сечение})}{g\langle f_0\rangle\vee g\langle f_1\rangle{:}\ \Gamma\Gamma'_1A\vee B'\Delta'\Delta\vdash B}$$

где оба новых сечения имеют меньшую степень. Более того,

$$g\langle f_0\vee f_1\rangle uu'\mathbf{k}x'v'v = g\langle f_0\rangle\vee g\langle f_1\rangle\ uu'\mathbf{k}x'v'v$$

(то же самое имеет место, если мы заменим $\mathbf{k}x'$ на $\mathbf{l}y'$), поскольку обе стороны сводятся к $gu\,f_0u'x'v'v$.

Случай 2. Пусть $\Gamma = \Gamma'A'\vee B'\Delta'$ и пусть $g = g_0\vee g_1$. Мы имеем:

$$\dfrac{f{:}\ \Lambda\vdash A \qquad \dfrac{g_0{:}\ \Gamma'A'\Delta'A\Delta\vdash B \qquad g_1{:}\ \Gamma'B'\Delta'A\Delta\vdash B}{g_0\vee g_1{:}\ \Gamma'A'\vee B'\Delta'A\Delta\vdash B}}{g_0\vee g_1\langle f\rangle{:}\ \Gamma'A'\vee B'\Delta'\Lambda\Delta\vdash B}(\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad g_0\colon \Gamma' A'\Delta' A\Delta\vdash B}{g_0\langle f\rangle\colon \Gamma' A'\Delta'\Lambda\Delta\vdash B}\text{(сеч.)} \qquad \dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad g_1\colon \Gamma' B'\Delta' A\Delta\vdash B}{g_1\langle f\rangle\colon \Gamma' B'\Delta'\Lambda\Delta\vdash B}\text{(сеч.)}}{g_0\langle f\rangle\vee g_1\langle f\rangle\colon \Gamma' A'\vee B'\Delta'\Lambda\Delta\vdash B}$$

где оба новых сечения имеют меньшую степень. Более того,

$$g_0\vee g_1\langle f\rangle u'\mathbf{k}x'v'wv = g_0\langle f\rangle\vee g_1\langle f\rangle\, u'\mathbf{k}x'v'wv$$

(то же самое имеет место, если мы заменим $\mathbf{l}y'$ на $\mathbf{k}x'$), поскольку обе стороны сводятся к $g_0u'x'v'fwv$.

Случай 3. $B = A'\vee B'$ и $g = g'_k$. Мы имеем

$$\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad \dfrac{g'\colon \Gamma A\Delta\vdash A'}{g'_k\colon \Gamma A\Delta\vdash A'\vee B'}}{g'_k\langle f\rangle\colon \Gamma\Lambda\Delta\vdash A'\vee B'}\text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на

$$\dfrac{\dfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad g'\colon \Gamma A\Delta\vdash A'}{g'\langle f\rangle\colon \Gamma\Lambda\Delta\vdash A'}\text{(сечение)}}{(g'\langle f\rangle)_k\colon \Gamma\Lambda\Delta\vdash A'\vee B'}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'_k\langle f\rangle uwv = (g'\langle f\rangle)_k uwv'$$

поскольку обе стороны сводятся к $\mathbf{k}g'ufwv$.

Случай 4. $A = A'\vee B'$, $f = f'_k$ и пусть $g = g_0\vee g_1$. Мы имеем

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon \Lambda\vdash A}{f'_k\colon \Lambda\vdash A'\vee B'} \qquad \dfrac{g_0\colon \Gamma A'\Delta\vdash B \quad g_1\colon \Gamma B'\Delta\vdash B}{g_0\vee g_1\colon \Gamma A'\vee B'\Delta\vdash B}}{g_0\vee g_1\langle f_k\rangle\colon \Gamma\Lambda\Delta\vdash B}\text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\dfrac{f'\colon \Lambda\vdash A \quad g_0\colon \Gamma A'\Delta\vdash B}{g_0\langle f'\rangle\colon \Gamma\Lambda\Delta\vdash B}\text{(сечение)}$$

где оба новых сечения имеют меньшую степень. Более того,

$$g_0\vee g_1\langle f_k\rangle uwv = g_0\vee g_1u\mathbf{k}f'wv = g_0uf'wv = g_0\langle f'\rangle uwv.$$

(4). Нульместная связка $\boldsymbol{I}$. Заметим, что Случай 3 невозможен.

Случай 1. $\Lambda = \Gamma'\boldsymbol{I}\Delta'$ и $f = f'^{\,i}$. Мы имеем:

$$\dfrac{\dfrac{f'\colon \Gamma'\Delta'\vdash A}{f'^{\,i}\colon \Gamma'\boldsymbol{I}\Delta'\vdash A} \quad g\colon \Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle f'^{\,i}\rangle\colon \Gamma\Gamma'\boldsymbol{I}\Delta'\Delta\vdash B}\text{(сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\cfrac{\cfrac{f'\colon \Gamma'\Delta'\vdash A \quad g\colon \Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle f'\rangle\colon \Gamma\Gamma'\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g\langle f'\rangle)^{i}\colon \Gamma\Gamma'\boldsymbol{I}\Delta'\Delta\vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g\langle f'^{i}\rangle uu'\mathbf{i}v'v = guf'u'v'v'$$

и

$$(g\langle f'\rangle)^{i}uu'\mathbf{i}v'v = g\langle f'\rangle u'uv'v'$$

сводятся к тому же самому выражению.

Случай 2. $\Gamma = \Gamma'\boldsymbol{I}\Delta'$ и пусть $g = g'^{i}$. Мы имеем:

$$\cfrac{f\colon \Lambda\vdash A \qquad \cfrac{g'\colon \Gamma\Delta'A\Delta\vdash B}{g'^{i}\colon \Gamma\boldsymbol{I}\Delta'A\Delta\vdash B}}{g'^{i}\langle f\rangle\colon \Gamma\boldsymbol{I}\Delta'\Lambda\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменим это выражение на:

$$\cfrac{\cfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad g'\colon \Gamma\Delta'A\Delta\vdash B}{g'\langle f\rangle\colon \Gamma\Delta'A\Lambda\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})}{(g'\langle f\rangle)^{i}\colon \Gamma\boldsymbol{I}\Delta'\Lambda\Delta\vdash B}$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того,

$$g'^{i}\langle f\rangle u'\mathbf{i}v'wv = g'u'v'f\,wv = (g'\langle f\rangle)^{i}u'\mathbf{i}v'wv.$$

Случай 3. $A = \boldsymbol{I}, f = \mathbf{i}$ и пусть $g = g'^{i}$. Мы имеем:

$$\cfrac{\mathbf{i}\colon \vdash \boldsymbol{I} \qquad \cfrac{g'\colon \Gamma\Delta\vdash B}{g'^{i}\colon \Gamma\boldsymbol{I}\Delta\vdash B}}{g'^{i}\langle\mathbf{i}\rangle\colon \Gamma\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Очевидно, что $g'^{i}\langle\mathbf{i}\rangle = g'$ может быть построено без сечения.

(4). Нульместная связка $\perp$. Возможны только два случая.

Случай 1. Мы имеем:

$$\cfrac{\square\colon \Gamma'\perp\Delta'\vdash A \qquad g\colon \Gamma A\Delta\vdash B}{g\langle\square\rangle\colon \Gamma\Gamma'\perp\Delta'\Delta\vdash B}\ (\text{сечение})$$

Заменяем все это построение на стрелку $\square\colon \Gamma\Gamma'\perp\Delta'\Delta\vdash B$, сконструированную без сечения, и отметим, что $g\langle\square\rangle = \square$.

Случай 2. Пусть $\Gamma = \Gamma'\perp\Delta'$. Мы имеем:

$$\cfrac{f\colon \Lambda\vdash A \quad \square\colon \Gamma'\perp\Delta'A\Delta\vdash C}{\square\langle f\rangle\colon \Gamma'\perp\Delta'\Lambda\Delta\vdash C}\ (\text{сечение})$$

Заменяем все это на стрелку $\square\colon \Gamma'\perp\Delta'A\Delta\vdash C$, сконструированную без сечения, и отметим, что $\square\langle f\rangle = \square$. ■

## 7. Генценовские дедуктивные мультикатегориии

Чтобы получить секвенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле со структурными правилами, вводятся специальные структурные правила:

$$\frac{f\colon \Gamma A B \Delta \vdash \Psi}{f^{int}\colon \Gamma B A \Delta \vdash \Psi}\ \text{(перестановка)}$$

$$\frac{f\colon \Gamma A A \quad \vdash \Psi}{f^{cont}\colon A \Gamma \vdash \Psi}\ \text{(сокращение)}$$

$$\frac{f\colon \Gamma \vdash \Delta}{f^{thin}\colon A \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(ослабление)}$$

Добавление этих правил к секвенциальным дедуктивным исчислениям порождает ***генценовские дедуктивные системы***.

Наделяя генценовские секвенциальные дедуктивные системы дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные системы, соответствующие логическим исчислениям. Так, чтобы получить минимальное генценовское дедуктивное исчисление, достаточно ввести специальную стрелку $1_A\colon A \vdash A$ и бинарную операцию сечения на стрелках:

$$\frac{f\colon \Theta \vdash A \quad g\colon \Gamma A \Delta \vdash B}{g\langle f \rangle\colon \Gamma \Theta \Delta \vdash B}\ \text{(сечение)}$$

Генценовское импликативное дедуктивное исчисление ***GI*** получается при введении дополнительно специальных стрелок $\varepsilon_{AB}\colon A\ (A \supset B) \vdash B$, $i_A\colon \vdash A$ и правил

$$\frac{f\colon A \Delta \vdash B}{f^{\varepsilon}\colon \Delta \vdash A \supset B} \qquad\qquad \frac{f\colon \Gamma \Delta \vdash C}{f^{i}\colon \Gamma \mathrm{T} \Delta \vdash C}$$

Чтобы получить, например, ***декартово замкнутую генценовскую дедуктивную систему***, нам помимо этих стрелок и правил потребуются еще уже известное нам правило для импликации

$$\frac{f\colon \Lambda \vdash A \quad g\colon \Gamma B \Delta \vdash C}{g\{f\}\colon \Gamma\ (A \supset B)\ \Lambda \Delta \vdash C}\ \{\text{-}\}$$

и два правила для конъюнкции

$$\frac{f\colon \Gamma \vdash A \; g\colon \Gamma \vdash \boldsymbol{B}}{f \wedge g\colon \Gamma \vdash A \wedge B} \qquad\qquad \frac{f\colon \Gamma A \Delta \vdash C}{f_p\colon \Gamma (A \wedge B) \Delta \vdash C}\ (\text{-})_p$$

Под ***генценовской дедуктивной мультикатегорией*** [Lambek 1989] мы будем понимать дедуктивную мультикатегорию с дополнительными операциями $f^{int}$, $f^{cont}$, $f^{thin}$ (введенными правилами перестановки, сокращения и ослабления), удовлетворяющим следующим уравнениям:

$$f^{thin}x_1 \ldots x_m yx\, y_1 \ldots x_n = fx_1 \ldots x_m xy\, y_1 \ldots x_n,$$
$$f^{con}x_1 \ldots x_m yx = fx_1 \ldots x_m xx,$$
$$f^{thin}x_1 \ldots x_m x = fx_1 \ldots x_m.$$

В частности, в мультикатегории из $f\,xy$, $gxx'$ и $hx$, где $x$ и $x'$ имеют один и тот же тип, мы можем получить

$$f^{thin}yx = fxy,\ g^{con}x = gxx,\ h^{thin}xy = hx,$$

допуская, таким образом, перестановку аргументов, диагональное отображение и проекции.

***Предложение 1***. *Внутренний язык генценовской дедуктивной мультикатегории выполняет условие неограниченной функциональной полноты:*

*для любого данного терма* $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$*, который не содержит никаких других переменных, отличных от* $x_i$ *типа* $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$*, существует единственная операция* $f\colon A_1 \ldots A_m \vdash B$*, такая, что*

$$fx_1 \ldots x_m = \varphi(x_1,\ldots,x_m).$$

Здесь вхождение $x_i$ не обязательно упорядочено, $x_i$ может входить несколько раз и вообще может явным образом не появляться (см. [Lambek 1989, p.232]).

# Глава третья. Многоуровневые дедуктивные системы и дедуктивные *n*-категории

## 1. Импликативные секвенциальные двухуровневые дедуктивные системы

Наряду с рассмотренным ранее *внутренним* (*типовым*) *языком* мультикатегорий существует еще одна возможность описания отношений между стрелками, связанная с конструкцией так называемой ***двухуровневой дедуктивной мультикатегории***. В этом случае, отправляясь от стрелок дедуктивной системы **P**, строится новый секвенциальный язык, в котором формализуется дедуктивная металогика $\mathbf{P}^2$ системы **P**, а тем самым и описываются отношения между стрелками, т.е. отношения между выводами (см. [Došen 1992]).

Объектами секвенциальной двухуровневой дедуктивной системы $\mathbf{P}^2$ будут последовательности стрелок системы **P**, т.е. последовательности типа $X = f_1 \ldots f_m$. Поскольку $m$ может быть равно нулю, то в этом случае $X$ будет представлять собой пустую последовательность $\varnothing$. Стрелки (секвенции) будут представлять собой выражения вида $X \to f$, где $X$ есть объект $\mathbf{P}^2$, а $f$ есть стрелка **P.** Доказуемость секвенции $X \to f$ в соответствующей двухуровневой дедуктивной системе будет означать утверждение о том, что исходя из стрелки $X$, мы можем сконструировать стрелку $f$, используя примитивные стрелки и примитивные операции. Иными словами, существует производная операция, отображающая $X$ в $f$. Таким образом, система подобных секвенций будет представлять собой формализацию металогики производных правил исходной дедуктивной системы. Теорема такой двухуровневой системы соответствует производной операции без посылок, т.е. секвенции $X \to f$, где $X$ целиком и полностью сконструирована из $\varnothing$. Стрелка $\varnothing \to f$ будет называться элементом $f$.

Чтобы получить минимальное двухуровневое дедуктивное исчисление, вводим специальные стрелки

$$1_f\colon f \to f$$
$$(\circ)\colon fg \to g\circ f$$
$$\mathbf{i}_f\colon \varnothing \to f$$
где $f\circ g$ есть композиция $f$ и $g$, и бинарную операцию на стрелках

$$\frac{\varphi\colon X \to f \quad \psi\colon Y f Z \to g}{\psi\langle\varphi\rangle\colon Y X Z \to g} \text{ (сечение)}$$

Пусть теперь **S** есть импликативная дедуктивная система и $\mathbf{S}^2$ ее импликативная двухуровневая дедуктивная система.

***Предложение 1***. *Секвенция $\varnothing \to f$ доказуема в двухуровневом дедуктивном исчислении $\mathbf{S}^2$ тогда и только тогда, когда $f$ есть стрелка* **S**.

***Доказательство***. Слева направо показываем по длине доказательства, что если $X \to f$ доказуема в $\mathbf{S}^2$, то все стрелки из $X$ будут стрелками **S** лишь тогда, когда $f$ содержится в **S**. В противоположную сторону индукция проходит также без затруднений. ■

Рассмотрим теперь, как отражается **S** в металогике $\mathbf{S}^2$, т.е. когда мы можем записывать в **S** производные операции $\mathbf{S}^2$. Мы увидим, что **S** способна на это, если $\mathbf{S}^2$ замкнута относительно следующего правила:

$$\frac{(\mathrm{T}\vdash A)\, X \to (B\vdash C)}{X \to (A \supset B\vdash A \supset C)} \text{ (дедукция)}$$

т.е. когда правило дедукции допустимо для $\mathbf{S}^2$.

Рассмотрим следующий перевод, т.е. биекцию $t$ из $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}$:

$t(A\vdash B) = A \supset B$,

$t(\varnothing) = \mathrm{T}$,

$t(X) = t(f_m\circ f_{m\text{-}1}\circ \ldots \circ f_1)$,

$t(X \to f) = t(X)\vdash t(f)$.

Пусть **S** есть импликативная дедуктивная ***IB***-система. Докажем следующее предложение:

***Предложение 2***. *$X \to f$ доказуема в $\mathbf{S}^2$ тогда и только тогда, когда $t(X \to f)$ есть стрелка в* **S**.

***Доказательство***. Слева направо доказываем индукцией по длине доказательства $X \to f$ в $\mathbf{S}^2$. Если $X = \varnothing$, то получаем $\varnothing\to f$. Но тогда $t(\varnothing \to f) = t(\varnothing)\vdash t(f) = \mathrm{T}\vdash t(f)$. Поскольку $t(A\vdash B) = A \supset B$, то $\mathrm{T}\vdash A \supset B$ приводит к $A\vdash B$, т.е. к стрелке в **S**. Если $X = fg$, то тогда получаем доказуемую стрелку $fg \to g\circ f$. Но $t(fg \to g\circ f) = t(fg)\vdash t(g\circ f)$

$= t(g \circ f) \vdash t(g \circ f)$, т.е. все сводится к единичной стрелке типа $1_{A \supset B}$. Справа налево по предложению 1 получаем $\varnothing \to (t(X) \vdash t(f))$ как доказуемую стрелку в $\mathbf{S}^2$, а затем применяем стрелку $(\circ)$ в виде $(\mathrm{T} \vdash t(X))(t(X) \vdash t(f)) \to (\mathrm{T} \vdash t(f))$ и сечение, получая $(\mathrm{T} \vdash t(X)) \to (\mathrm{T} \vdash t(f))$. Действуя аналогично, мы доходим до стрелок в последовательности $X$ и для каждой такой стрелки $A \vdash B$ получаем $(A \vdash B) \to (\mathrm{T} \vdash A \supset B)$. Используя обратную секвенцию для $f$, получаем $X \to f$. ■

***Предложение 3***. $\mathbf{S}^2$ *замкнуто относительно правила дедукции.*

***Доказательство***. Мы имеем:

(1) $(\mathrm{T} \vdash A)\ X \to (B \vdash C)$ в $\mathbf{S}^2$ тогда и только тогда, когда $t(X \circ (\mathrm{T} \vdash A)) \vdash t(B \vdash C)$ в $\mathbf{S}$

(2) тогда и только тогда, когда $t(X \circ (\mathrm{T} \vdash A)) \vdash B \supset C$.

Но из $B \supset C$ с помощью стрелки β в $\mathbf{S}$ и сечения получаем $t(X \circ (\mathrm{T} \vdash A)) \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$, что можно записать как $t(X \circ (\mathrm{T} \vdash A)) \vdash t(A \supset B \vdash A \supset C)$. Отсюда по предложению 2 получаем $(\mathrm{T} \vdash A)\ X \to (A \supset B \vdash A \supset C)$. Поскольку $\mathrm{T} \vdash A$ есть стрелка $\mathbf{S}$, то по предложению 1 $\varnothing \to (\mathrm{T} \vdash A)$ и, применяя сечение, получаем $X \to (A \supset B \vdash A \supset C)$, что и требовалось доказать. ■

Заметим, что аналогично, применяя стрелку γ, можно получить правило

$$\frac{(\mathrm{T} \vdash A)\ X \to (A \vdash B \supset C)}{X \to (B \vdash A \supset C)}\ ;$$

применяя стрелку $w$, получаем правило

$$\frac{(\mathrm{T} \vdash A)\ X \to (A \vdash A \supset B)}{X \to (A \vdash B)}\ ;$$

применяя стрелку κ, получаем правило

$$\frac{(\mathrm{T} \vdash A)\ X \to (\mathrm{T} \vdash A)}{X \to (B \vdash A)}\ .$$

Если добавить к $\mathbf{S}^2$ дополнительную метасвязку импликации $\Rightarrow$, то мы получаем импликативное секвенциальное двухуровневое дедуктивное исчисление $\mathbf{GP}^2$ при введении специальных стрелок:

$$(\Rightarrow){:}\, gf \to f \Rightarrow g$$

где $f$: $A \vdash B$, $g$: $B \vdash C$; $f \Rightarrow g$: $B \supset A \vdash B \supset C$,

$$\varepsilon_{fg}{:}\ f\,(f \Rightarrow g) \to g$$

и правил

$$\frac{\varphi{:}\ f\,X \to g}{\varphi^{\varepsilon}{:}\ X \to f \Rightarrow g}$$

$$\frac{\varphi\colon X\,Y \to f}{\varphi^{\mathbf{i}}\colon X \varnothing\, Y \to f}$$

где $\varnothing$ означает пустую стрелку, т.е. стрелку $\vdash$ .

Точно так же можно ввести, помимо этого, следующие стрелки:

$$\beta^{f}_{gh}\colon g \Rightarrow h \to (f \Rightarrow g) \Rightarrow (f \Rightarrow h)$$
$$\gamma^{f}_{gh}\colon f \Rightarrow (g \Rightarrow h) \to g \Rightarrow (f \Rightarrow h)$$
$$\omega_{fg}\colon f \Rightarrow (f \Rightarrow g) \to f \Rightarrow g$$
$$\kappa^{g}_{f}\colon f \to g \Rightarrow f$$

Соответственно можно заменить эти стрелки на следующие правила:

$$\frac{\varphi\colon g\,X \to h}{\varphi^{\beta}\colon f\,(f \Rightarrow g)\,X \to h} \quad \text{(слабая транзитивность)}$$

(достаточно положить $\varphi^{\beta} = \varepsilon\langle\varepsilon\langle\beta\langle\varphi^{\varepsilon}\rangle\rangle\rangle$)

$$\frac{\varphi\colon g\,f\,X \to h}{\varphi^{\gamma}\colon f\,g\,X \to h} \quad \text{(перестановка)}$$

(достаточно положить $\varphi^{\gamma} = \varepsilon\langle\varepsilon\langle\gamma\langle\varphi^{\varepsilon\,\varepsilon}\rangle\rangle\rangle$)

$$\frac{\varphi\colon f\,f\,X \to g}{\varphi^{\omega}\colon f\,X \to g} \quad \text{(сокращение)}$$

(достаточно положить $\varphi^{\omega} = \varepsilon\langle\omega\langle\varphi^{\varepsilon\,\varepsilon}\rangle\rangle$)

$$\frac{\varphi\colon X \to f}{\varphi^{\kappa}\colon g\,X \to f} \quad \text{(ослабление)}$$

(где $\varphi^{\kappa} = \varepsilon\langle\kappa\langle\varphi\rangle\rangle$).

В этом случае мы получаем удвоение логики в двухуровневой дедуктивной системе $\mathbf{S}^2$, что приводит к двухуровневой системе $\mathbf{S}^{\boldsymbol{GIBWK}}$ (см. о подобном удвоении [Došen 1988a]). Нетрудно также, рассматривая соответствующие тождества на метастрелках, получить двухуровневые мультикатегории, отвечающие полученным двухуровневым системам.

## 2. Секвенциальные двухуровневые дедуктивные системы

Расширим теперь $\mathbf{S}^2$ за счет дополнительных структурных правил. Первое из них получается путем замены правила

$$\frac{\varphi\colon X\,Y \to f}{\varphi^{\mathbf{i}}\colon X \varnothing\, Y \to f}$$

на два правила

$$\frac{\varphi\colon X\,Y \to f}{\varphi^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}\colon X\,(\varnothing\;Y) \to f} \qquad \frac{\varphi\colon X\,Y \to f}{\varphi^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}\colon X\,(Y\;\varnothing) \to f}$$

где двойная черта означает, что данное правило работает как вверх, так и вниз.

Затем вводим следующие дополнительные правила:

$$\frac{\varphi\colon X\,(Y_1\;Y_2)\;Y_3 \to f}{\varphi^{\mathbf{as}}\colon X\,Y_1\,(Y_2\;Y_3) \to f}\,(\text{Assoc}) \qquad \frac{\varphi\colon X\,Y_1\,Y_2 \to f}{\varphi^{\mathbf{per}}\colon X\,Y_2\,Y_1 \to f}\,(\text{Perm})$$

$$\frac{\varphi\colon X\,Y\,Y \to f}{\varphi^{\mathbf{cont}}\colon X\,Y \to f}\,(\text{Contr}) \qquad \frac{\varphi\colon X\,\varnothing \to f}{\varphi^{\mathbf{thin}}\colon X\,Y \to f}\,(\text{Thin})$$

$$\frac{\varphi\colon X\,Y \to f}{\varphi^{\mathbf{exp}}\colon X\,Y\,Y \to f}\,(\text{Expans})$$

Системы $\mathbf{S}^2$ для некоторой системы **S** разрабатываются, как правило, для записи *производных* операций в **S**, а не для операций, *допустимых* для **S**, т.е. таких, что, будучи добавленными к **S**, они не приводят к увеличению количества доказуемых стрелок. Операции, которые, например, могут привести нас от $\mathrm{T}\vdash A\bullet B$ к $\mathrm{T}\vdash A$, допустимы для NL (см. главу вторую), но в формулировке NL у нас нет операций на стрелках, примитивных или производных, которые можно применить к $\mathrm{T}\vdash A\bullet B$ для получения $\mathrm{T}\vdash A$. Соответственно, в $\mathrm{NL}^2$ (или в некотором из его расширений типа $\mathrm{NL}^2 + (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}$, $(\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$, (Assoc), (Perm)) у нас не будет для каждого $A$ и $B$ секвенции $(\mathrm{T}\vdash A\bullet B)\to(\mathrm{T}\vdash A)$. Таким образом, если мы должны сформулировать систему в **P** с примитивной операцией, которая допустима для нашей системы, но мы не хотим иметь ее во всех расширениях, то нам следует не рассматривать эту операцию в рамках $\mathbf{i}_{(\ )}$ - $(\circ)$. Не каждая формулировка системы **S** может служить в качестве исходного пункта для построения $\mathbf{S}^2$ и ее расширений.

С помощью структурных правил мы получаем следующие системы в $\mathbf{P}^2$:

$\mathbf{S}^{\mathrm{NL}} = \mathbf{S}^2 + (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$;
$\mathbf{S}^{\mathrm{AL}} = \mathbf{S}^2 + (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$; (Assoc);
$\mathbf{S}^{\mathrm{M}} = \mathbf{S}^2 + (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$; (Assoc), (Perm);
$\mathbf{S}^{\mathrm{R}} = \mathbf{S}^2 + (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$; (Assoc), (Perm), (Contr);
$\mathbf{S}^{\mathrm{BCK}} = \mathbf{S}^2 + (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$; (Assoc), (Perm), (Thin);
$\mathbf{S}^{\mathrm{J}} = \mathbf{S}^2 + (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, (\ )^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$; (Assoc), (Perm), (Contr), (Thin).

В расширениях $\mathbf{S}^{\mathrm{R}}$ следующее правило

$$\frac{X\,Y \to g \quad X\,Z \to g}{X\,Y\,Z \to g}\,(\text{Mingle})$$

дает такой же результат, как и (Expans). С его помощью мы определеяем $\mathbf{S}^{RM}$ как

$\mathbf{S}^{RM} = \mathbf{S}^{R}$ + (Mingle).

Пусть теперь **L** обозначает одну из систем NL, AL, … , J, а $\mathbf{S}^{L}$ будет одной из выше сформулированных в $\mathbf{P}^2$ систем. Если мы введем в $\mathbf{P}^2$ связки $\bullet^2$, $\supset^2$ и $\subset^2$, связывающие стрелки **P**, и константу $\mathrm{T}^2$, а затем расширим $\mathbf{S}^{L}$ с помощью правил

$$\frac{Xfg \rightarrow h}{X(f\bullet^2 g) \rightarrow h} \qquad \frac{fX \rightarrow h}{X \rightarrow (f\supset^2 g)\, h}$$

$$\frac{Xf \rightarrow h}{X \rightarrow (f\subset^2 g)\, h} \qquad \frac{X\varnothing \rightarrow h}{X\,\mathrm{T}^2 \rightarrow h}$$

то мы получим удвоение логики системы **L** в $\mathbf{P}^2$для **P**. Таким образом, в $\mathbf{S}^{L}$ возникают две логики, одна на низшем уровне **S**, а вторая на высшем уровне $\mathbf{S}^{L}$, и эти две логики не обязательно должны быть тождественными. Одна из них может быть более слабой, или даже они могут быть не сравнимыми между собой.

Все наши металогики $\mathbf{S}^{L}$ достоверны для **S** настолько, насколько это касается доказуемых стрелок, т.е. легко можно доказать следующее

***Предложение 4.*** *Секвенция $\varnothing \rightarrow f$ доказуема в двухуровневом дедуктивном исчислении $\mathbf{S}^{L}$ тогда и только тогда, когда $f$ есть стрелка* **S**.

***Доказательство***. Слева направо показываем по длине доказательства, что если $X \rightarrow f$ доказуема в $\mathbf{S}^{L}$, то все стрелки из $X$ будут стрелками **S** лишь тогда, когда $f$ содержится в **S**. В противоположную сторону индукция проходит также без затруднений. ■

## 3. Двухуровневая теорема дедукции

Рассмотрим теперь, как **S** может отражаться в ее металогике $\mathbf{S}^{L}$, т.е. когда мы можем записывать в $\mathbf{S}^{L}$ производные операции из **S**. Мы увидим, что **S** способна это делать, если $\mathbf{S}^{L}$ замкнута относительно правила

$$\frac{\varphi\colon (\mathrm{T}\vdash A),\, X \rightarrow (B\vdash C)}{\varphi^*\colon X \rightarrow (A\bullet B\vdash C)} \text{ (Ded)}$$

т.е. когда правило (Ded) допустимо для $\mathbf{S}^{L}$. Заметим, что для $\mathbf{S}^{L}$ правило (Ded) эквивалентно правилу

$$\frac{\varphi\colon (\mathrm{T}\vdash A),\, X \rightarrow (\mathrm{T}\vdash C)}{\varphi^*\colon X \rightarrow (A\vdash C)} \text{ (Ded}'\text{)}$$

потому что в NL у нас имеются операции для перехода от $B \vdash C$ к $\mathrm{T} \vdash B \Leftarrow C$ и обратно, а также от $A \bullet B \vdash C$ к $A \vdash B \Leftarrow C$ и обратно («эквивалентность» здесь означает, что $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$, замкнута относительно (Ded′)).

В направлении снизу-вверх правило (Ded), которое мы отметим как (Ded)↑, тривиально выводится во всех системах с помощью

$(\mathrm{T} \vdash A), (A \bullet B \vdash C) \to (\mathrm{T} \bullet B \vdash C)$

Но в обратном направлении (Ded), т.е. (Ded)↓ получается более сложным образом.

Заметим, что если $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ замкнуто относительно (Ded), то система **S** должна представлять собой расширение M (не обязательно собственное). Мы имеем следующий вывод:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varnothing \to (A \bullet B \vdash ((A \bullet B) \bullet C) \Leftarrow C)}{(\mathrm{T} \vdash A), \varnothing \to (B \vdash ((A \bullet B) \bullet C) \Leftarrow C)}\ \eta^{\circ}_{C, A \bullet B}}{(\mathrm{T} \vdash A), \varnothing \to (B \bullet C \vdash (A \bullet B) \bullet C)}\ (\mathrm{Ded})\uparrow}{\varnothing \to (A \bullet (B \bullet C) \vdash (A \bullet B) \bullet C)}\ (\mathrm{Ded})\downarrow$$

и аналогично мы выводим $\varnothing \to ((A \bullet B) \bullet C \vdash A \bullet (B \bullet C))$ и $\varnothing \to (A \bullet B \vdash B \bullet A)$ (для последней секвенции мы используем стрелки $\mathbf{Tr}_A$ и $\mathbf{Tr'}_B$). Заметим, что мы не использовали (Assoc) и (Perm) в этих выводах. Таким образом, стрелки $\boldsymbol{B}_{\mathrm{A},B,C}$, $\boldsymbol{B}^{\circ}_{\mathrm{A},B,C}$ и $\boldsymbol{C}_{\mathrm{A},B}$ необходимы для (Ded). Покажем теперь, что вместе с добавочными условиями этого достаточно.

Рассмотрим следующий перевод, т.е. биекцию $t$ из $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}$:

$t(A \vdash B) = A \supset B$,

$t(\varnothing) = \mathrm{T}$,

$t(X, Y) = t(X) \bullet t(Y)$,

$t(X \to f) = t(X) \vdash t(f)$.

Мы можем доказать следующее предложение:

***Предложение 5***. *Если* M $\subseteq$ **S** *и* L $\subseteq$ **S**, *то* $\varphi$: $X \to f$ *доказуема в* $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ *тогда и только тогда, когда* $t(X \to f)$ *есть стрелка в* **S**.

***Доказательство***. Слева направо доказываем индукцией по длине доказательства $X \to f$ в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$. Проблематическим случаем является ситуация, когда **S** сильна настолько же, насколько и M, при рассмотрении переводов аксиом, полученных по ($\circ$). Например, мы должны иметь в **S** стрелку $(A \supset B) \bullet (C \supset D) \vdash (A \bullet C) \supset (B \bullet D)$. Когда мы рассматриваем применение структурных правил, то видим, что L не может быть сильнее.

Справа налево по предложению 1 получаем $\varnothing \to (t(X)\vdash t(f))$ как доказуемую стрелку в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$, а потом применяем стрелку ($\circ$) с операцией $\circ$ и сечение, получая $(\mathrm{T}\vdash t(X)) \to (\mathrm{T}\vdash t(f))$. Если $X$ имеет форму $YZ$, то мы используем операцию $\bullet$ и Т-стрелки, чтобы получить $(\mathrm{T}\vdash t(Y)), (\mathrm{T}\vdash t(Z)) \to (\mathrm{T}\vdash t(f))$.

Действуя аналогично, мы доходим до стрелок в последовательности $X$ и для каждой такой стрелки $A\vdash B$ получаем $(A\vdash B) \to (\mathrm{T}\vdash A \supset B)$. Используя обратную секвенцию для $f$, получаем $X \to f$. ■

***Предложение 6***. *Если* $\mathrm{M} \subseteq \mathbf{S}$ *и* $\mathrm{L} \subseteq \mathbf{S}$, *то* $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ *замкнуто относительно правила* (Ded).

***Доказательство***. Мы имеем:

(1) $(\mathrm{T}\vdash A)\, X \to (B\vdash C)$ в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ тогда и только тогда, когда $(\mathrm{T}\supset A)\bullet t(X)\vdash B \supset C)$ в $\mathbf{S}$ по предложению 5,

(2) тогда и только тогда, когда $t(X)\vdash (A\bullet B) \supset C$ в $\mathbf{S}$,

(3) тогда и только тогда, когда $X \to (A\bullet B\vdash C)$ в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$. ■

Таким образом, стрелки $\boldsymbol{B}_{\mathrm{A},B,C}$, $\boldsymbol{B}^{\circ}{}_{\mathrm{A},B,C}$ и $\boldsymbol{C}_{\mathrm{A},B}$ необходимы и достаточны для (Ded), при условии, что металогика $\mathbf{S}$ не сильнее $\mathbf{S}$. Структурные правила (Assoc) и (Perm), ассоциированные с этими стрелками, не обязательно должны приниматься для металогики $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ логики $\mathbf{S}$. Но тот факт, что нам не потребовались структурные правила для $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$, не означает, что $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ не будет замкнута относительно этих структурных правил. Если $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ и L будут такими, как в предложении 5 и 6, система $\mathbf{S}$ будет индуцировать структурные правила в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$, как это показывает следующее предложение.

***Предложение*** *7. Если* $\mathrm{M} \subseteq \mathbf{S}$ *и* $\mathrm{L} \subseteq \mathbf{S}$, *то* $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$ *и* $\mathbf{S}^{\mathrm{S}}$ *содержат те же самые доказуемые секвенции.*

***Доказательство***. Предположим $\varphi$: $X \to f$ есть стрелка в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$, а $\psi$: $X' \to f$ получается из $\varphi$ по одному из структурных правил (Assoc), …, (Thin), которые мы имеем в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$. Тогда по предложению 5 слева направо, мы получаем стрелку $t(\varphi)$ в $\mathbf{S}$ и без труда выводим, что $t(\psi)$ также будет стрелкой в $\mathbf{S}$. Следовательно, по предложению 5, справа налево получаем, что $\psi{:}X' \to f$ также будет стрелкой в $\mathbf{S}^{\mathrm{L}}$. ■

## 4. Модальный аналог двухуровневой теоремы дедукции

Рассмотрим теперь язык $\Box\mathbf{P}$, получаемый путем добавления унарного пропозиционального оператора $\Box$. Мы строим язык $\Box\mathbf{P}^2$ точно так же, как язык $\mathbf{P}^2$ был построен на основании $\mathbf{P}$. Предположим, что у нас есть система $\Box\mathbf{S}$ в языке $\Box\mathbf{P}$, которая представляет собой расширение **S** за счет некоторых стрелок и операций с $\Box$, и добавим к системе $\Box\mathbf{S}^{L}$ в $\Box\mathbf{P}^{2}$, полученной из $\Box$S так же, как $\mathbf{S}^{L}$ была получена из **S**, следующее правило:

$$\frac{\varphi\colon (\mathrm{T}\vdash A), X \to (B\vdash C)}{\varphi^{\Box}\colon X \to (\Box A\bullet B\vdash C)}\ (\Box)$$

Постараемся выяснить, каковы будут последствия этого шага для стрелок и операций $\Box$**S**. Допустим, что теперь $\Box$**S** представляет собой $\Box$NL, а $\Box\mathbf{S}^{L}$ есть $\Box$NL, т.е. мы имеем слабейшую из наших логик со слабейшей металогикой. Мы получаем следующий вывод в $\Box\mathrm{NL}^{\mathrm{NL}} + (\Box)$:

$$\dfrac{\dfrac{\varnothing \to (\Box A\bullet B\vdash \Box B)}{(\mathrm{T}\vdash A), \varnothing \to (\mathrm{T}\vdash \Box A)}\ (\Box)\uparrow}{(\mathrm{T}\vdash A) \to (\mathrm{T}\vdash \Box A)}\ (\varnothing)$$

Назовем эту секвенцию (nec), поскольку она утверждает, что в $\Box$NL мы должны иметь операции на стрелках, соответствующие гёделевскому правилу *введения необходимости*.

Кроме этого в $\Box\mathrm{NL}^{\mathrm{NL}} + (\Box)$ имеется следующее правило сечения:

$$\frac{(\mathrm{T}\vdash A), (A\vdash B) \to (\mathrm{T}\vdash B) \qquad (\mathrm{T}\vdash B) \to (\mathrm{T}\vdash \Box B)}{(\mathrm{T}\vdash A), (A\vdash B) \to (\mathrm{T}\vdash \Box A)}\ \text{(сечение)}$$

из которого с помощью $(\Box)\downarrow$, сечения с $(\Box A\bullet \mathrm{T}\vdash \Box B) \to (\mathrm{T}\vdash \Box A \supset \Box B)$, затем сечения с $(\mathrm{T}\vdash A \supset B) \to (A\vdash B)$ и применяя $(\Box)\downarrow$ и сечение со стрелками T, получаем $\varnothing \to (\Box(A \supset B) \vdash (\Box A \supset \Box B))$. Таким образом, в $\Box$NL имеется следующая стрелка

$\boldsymbol{d}_{\mathrm{A},B}$: $\Box(A \supset B \vdash \Box A \supset \Box B$,

и частичная одноместная операция на стрелках:

$$\frac{f\colon \mathrm{T} \vdash A}{\mathbf{nec}(f)\colon \mathrm{T} \vdash \Box A}$$

Нетрудно показать, что стрелка $\boldsymbol{d}_{\mathrm{A},B}$ и операция **nec** могут быть заменены в  на следующие стрелки:

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{A},B}$: $\Box A\bullet\Box B\vdash \Box(A\bullet B)$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{nec}(1_{\mathrm{T}})$: $\mathrm{T} \vdash \Box\mathrm{T}$

и правило

$$\frac{f\colon A \vdash B}{\Box f\colon \Box A\vdash \Box B}$$

Легко также получить, что в $\Box$NL у нас имеется стрелка $\Box(B\Leftarrow A)\vdash \Box B \Leftarrow \Box A$.

Покажем теперь, что $\Box$NL может быть аксиоматизирована путем расширения NL в $\Box$**P** за счет операции **nec** и следующих стрелок:

$\boldsymbol{d}_{A,B}$: $\Box(A \supset B) \vdash \Box A \supset \Box B$,

$\boldsymbol{r}_{A}$: $\Box A \vdash A$, $\quad$ $\boldsymbol{t}_{A}$: $\Box A \vdash \Box\Box A$,

$\boldsymbol{B}_{A,B,C}$: $A\bullet(B\bullet C) \vdash (A\bullet B)\bullet C$, $\quad$ $\boldsymbol{B}^{\circ}_{A,B,C}$: $(A\bullet B)\bullet C \vdash A\bullet(B\bullet C)$,

$\boldsymbol{C}_{A,B}$: $A\bullet B \vdash B\bullet A$

при условии, что в $\boldsymbol{B}_{A,B,C}$, $\boldsymbol{B}^{\circ}_{A,B,C}$ либо $A$, либо $B$, либо $C$ имеет вид $\Box D$, и в $\boldsymbol{C}_{A,B}$ либо $A$, либо $B$ имеет вид $\Box D$. Таким образом, мы получаем расширение S4-типа системы NL.

Пусть $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ получается из $\Box$NL так же как и $\mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ была получена из NL, т.е. мы допускаем в $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ стрелки $1_f$, $(\circ)$,$\mathbf{i}_f$, правило сечения и $(\text{-})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}$,$(\text{-})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{2}}$. Таким образом, мы не принимаем ($\Box$). Теперь рассмотрим перевод $n$ из $\Box\mathbf{P}^2$ в $\Box\mathbf{P}$:

$n(A \vdash B) = \Box(A \supset B)$,

$n(\varnothing) = \mathrm{T}$,

$n(X,Y) = n(X)\bullet n(Y)$,

$n(X \to (A \vdash B)) = n(X) \vdash (A \supset B)$.

Этот перевод отличается от предыдущего перевода за счет добавления префикса $\Box$ к переводам стрелок по левую сторону от $\to$. Следующий модальный аналог предложения 5 доказывается тем же способом, что и предложение 5.

***Предложение 8***. $\varphi$: *$X \to f$ доказуема в* $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ *тогда и только тогда, когда $n(X \to f)$ есть стрелка в* $\Box$NL.

Как следствие, мы получаем аналог предложения 6 в виде

***Предложение 9***. *Система* $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ *замкнута относительно правила* ($\Box$).

***Доказательство***. Мы имеем:

(1) $(\mathrm{T} \vdash A)\ X \to (B \vdash C)$ в $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ тогда и только тогда, когда $\Box(\mathrm{T} \supset A)\bullet n(X) \vdash B \supset C$ в $\Box$NL,

(2) тогда и только тогда, когда $n(X) \vdash (\Box A\bullet B) \supset C$ в $\Box$NL,

(3) тогда и только тогда, когда $X \to (\Box A\bullet B \vdash C)$ в $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$. ■

Таким образом, мы приходим к заключению, что модальные постулаты $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ необходимы и достаточны, чтобы $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ была замкнута относительно ($\Box$).

Особый интерес представляла бы для нас системы типа $\mathbf{S}^{\Box L}$. В этом случае нам потребовалась бы связка $\Box^2$, а затем пришлось бы расширить $\mathbf{S}^{L}$ с помощью правила

$$\frac{X f \to g}{X \Box^2 f \to g}$$

что привело бы к получению модальной логики на уровне $\mathbf{S}^{L}$, а не на уровне **S**, который бы не подвергся изменениям. Роль $\Box^2$ в $\Box \mathrm{NL}^{\mathrm{NL}}$ фактически выполнял оператор **nec**, преобразующий стрелку $f$: $\mathrm{T} \vdash A$ в стрелку **nec**($f$): $\mathrm{T} \vdash \Box A$, однако его действие было детерминировано оператором $\Box$ на формулах. В общем же случае, рассматривая $\Box^2 f$ как *необходимое* доказательство, в отличие от просто доказательства $f$: $A \vdash B$, можно было бы рассуждать о *необходимых* выводах, свойства которых определялись бы лишь заданными постулатами. С использованием же дополнительной метасвязку импликации $\Rightarrow$ можно было бы говорить о полученных модальных логиках на метастрелках как о некоторых *стратегиях* доказательства.

## 5. Многоуровневые дедуктивные системы и дедуктивные *n*-категории

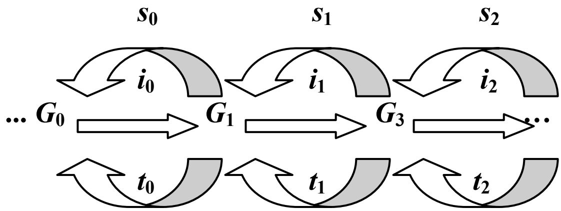
Предыдущее рассмотрение двухуровневых систем и категорий естественным образом подводит нас к необходимости обобщения подобного подхода на любое количество уровней (т.е., по сути, дела, метауровней). Существует и еще одна мотивация подобного обобщения, вызванная особенностями формулировки понятия дедуктивной категории.

Напомним, что дедуктивная категория есть дедуктивная система, в которой между доказательствами имеют место тождества типа $f\,1_A = f$, $1_B f = f$, $(hg)\,f = h\,(gf)$. Казалось бы, что эти тождества имеют совершенно ясный смысл в теории доказательств. И это действительно так, за одним мелким, но досадным исключением. Что формально означает понятие «тождества», употребленное в такой формулировке?

В дедуктивных категориях обычно говорят не о тождестве двух объектов, но об их изоморфизме (одно-однозначном соответствии), определяемом с помощью стрелок (туда и обратно), т.е. формулы могут быть разными, но доказательно эквивалентными. В этом случае понятие тождества-изоморфизма не требует обращения к какой-либо содержательной теории тождества, внешней по отношению к категории как логической системе. Однако этот подход не работает для стрелок – в категории нет «стрелок» для стрелок, позволяющих использовать понятие изоморфизма вместо понятия тождества. Следовательно, понятие тождества для стрелок не то же, что понятие тождества для объектов. В двухуровневых категориях та же самая проблема возникает для стрелок второго уровня (метастрелок) – понятие тождества в общем случае может быть содержательно другим. Если же быть последовательным, то следует избегать обращения к такого рода содержательным понятиям (даже если явно указывать, какое понятие тождества подразумевается на каждом уровне). Поэтому для определения тождества в двухуровневых категориях приходится обращаться к трехуровневым категориям и т.д. Выполнение подобной программы приводит к понятию многоуровневых систем и так называемых *n*-категорий (где *n* указывает на то, что на каком-то *n*–ом уровне мы отказываемся от своего ригоризма и заменяем понятие изоморфизма некоторым неформальным понятием тождества).

Рассмотрим понятие так называемого *n*-графа (см. [Marcinek Oziewicz 2001]).

***Определение 1***. $\infty$-граф $G$ представляет собой бесконечную последовательность семейств $i$-ячеек $\{G_i\}_{i\in Z}$, последовательность сюрьективных начал $\{s_G \equiv s_i\}$ и концов $\{t_G \equiv t_i\}$, и семейство сечений $\{i_G \equiv i_i\}$,




Пусть type $x \equiv (sx, tx)$ (т.е. определяем понятие типа). По определению все 0-ячейки имеют один и тот же тип, должно быть не более двух и не менее одной (-1)-ячейки, $G_{-1} \equiv \{s_{-1}G_0, t_{-1}G_0\}$. Би-отображение $G_i$: $G_i \times G_i \to 2^{G_{i+1}}$ определяется следующим образом. Если $x,y \in G_i \times G_i$, то

$G_i(x,y) \equiv \{z \in G_{i+1}, \text{type } z = (x,y)\} \subset G_{i+1}$.

Должны выполняться следующие условия:

1. Если type $x \neq$ type y, то $G_i(x,y) = \varnothing$;
2. $s_i \circ i_i = t_i \circ i_i$.

***Определение 2***. Если для всякого $i\in\mathbb{N}$ имеет место $G_{i+n} \cong G_n$, то про $\infty$-граф $G$ говорят, что он является *n-графом*. В этом случае $s_{i+n} = t_{i+n}$ и $i_{n+1}\circ s_{n+1} = \mathrm{id}_{G_{n+i+1}}$.

Если для любых $x,y$, таких, что type $x$ = type $y$, и для всякого $i\in\mathbb{N}$ имеет место $|G_i(x,y)| = 1$, то про $n$-граф говорят, что он является *скелетальным*.

Таким образом, $n$-графы с формулами в качестве 0-ячеек (в частности, с формулой T) и доказательствами в качестве 1-ячеек будут представлять собой *многоуровневые дедуктивные системы* (2-ячейки в этом случае можно рассматривать как стратегии доказательств в стиле предыдущего параграфа). И, наконец, на основании этих понятий, мы можем определить, что представляет собой $n$–категория.

***Определение 3***. *n–категория* есть $n$-граф $G$ с операцией композиции

$c_G \equiv \{s_ixyz: G_i(x,y)\times G_i(\mathrm{y},z) \to G_i(x,z)\}$.

$n$–категория $G$ является *точной*, если композиция $c_G$ ассоциативна, в противном случае она является *слабой n*–категорией. Отсутствие ассоциативности означает, что у нас вместо равенств для стрелок соответствующих уровней присутствуют метастрелки, т.е. вместо уравнений $(hg)\, f = h\, (gf)$ мы имеем «стрелку-ассоциатор» $\alpha_{f,g,h} : (hg)\, f \Rightarrow h\, (gf)$.

Слабую 2-категорию обычно называют бикатегорией [Benabou 1967], слабую 3-категорию – трикатегорией [Gordon Power Street 1995], [Baez 1997]. 0-ячейки также называют объектами, 0-морфизмами, вершинами; 1-ячейки - морфизмами, 1-стрелками, функторами; 2-ячейки - 2-морфизмами, морфизмами морфизмов, естественными преобразованиями и т.д.

Таким образом, мы получаем *дедуктивную n-категорию*, полагая формулы в качестве 0-ячеек и доказательства в качестве 1-ячеек. Однако в этом случае мы также получаем две разновидности дедуктивных $n$-категорий – сильную и слабую, в зависимости от выбора равенств или стрелок для уравнений ассоциативности композиции соответствующих уровней.

# Глава четвертая. Сопряжение и когерентность

## 1. Предсопряжение в дедуктивных системах

Перед тем как рассмотреть понятие сопряжения, рассмотрим более общее понятие, которое будем называть предсопряжением, и которое выполняет те же функции в дедуктивных системах, что и сопряжение в дедуктивных категориях (таким образом, предсопряжение находится в таком же отношении к сопряжению, как дедуктивные системы к дедуктивным категориям)[3]. Обозначим для удобства дальнейшего изложения дедуктивную систему как тройку $\langle \boldsymbol{D},1,\circ\rangle$, где $\boldsymbol{D}$ будет представлять собой граф, 1 есть стрелка тождества в $\boldsymbol{D}$, а $\circ$ есть композиция в $\boldsymbol{D}$. Тождество и композиция в различных дедуктивных системах всегда будем обозначать одними и теми же символами 1 и $\circ$, предполагая, что из контекста ясно, какой дедуктивной системе они принадлежат.

Пусть $\langle \boldsymbol{A},1,\circ\rangle$ и $\langle \boldsymbol{B},1,\circ\rangle$ будут представлять собой дедуктивные системы и пусть $\boldsymbol{F}$ будет морфизмом графов из $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$ и пусть $\boldsymbol{G}$ будет морфизмом графов из $\boldsymbol{B}$ в $\boldsymbol{A}$. Далее, пусть $\varphi$ будет операцией на стрелках $\boldsymbol{A}$, которая сопоставляет каждой стрелке $f\colon A_1 \to A_2$ из $\boldsymbol{A}$ стрелку $\varphi(f)\colon \boldsymbol{FG}(A_1) \to A_2$ и пусть $\gamma$ будет операцией на стрелках $\boldsymbol{B}$, такой, что она сопоставляет каждой стрелке $g\colon B_1 \to B_2$ из $\boldsymbol{B}$ стрелку $\gamma(g)\colon B_1 \to \boldsymbol{FG}(B)$ из $\boldsymbol{B}$.

Будем говорить, что шестерка $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\varphi,\gamma\rangle$ есть *предсопряжение*. Будем говорить, что это предсопряжение *между* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, именно в этом порядке (порядок, как видно будет далее, здесь очень важен). Упрощая обозначения, мы не будем различать тождества и композицию в $\langle \boldsymbol{A},1,\circ\rangle$ и $\langle \boldsymbol{B},1,\circ\rangle$.

Морфизмы между предсопряжениями будем называть юнкторами[4]. Юнктор из предсопряжения $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\varphi,\gamma\rangle$ в предсопряжение

А[3] К.Дошен [Došen 1999] говорит о *junction* и *adjunction*, что по-русски можно было бы буквально передать как *пряжение* и *сопряжение*.

[4] Опять-таки следуя Дошену (у него в тексте – *junctor*s, по аналогии с *functors*).

$\langle \boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}',\boldsymbol{F}',\boldsymbol{G}',\varphi',\gamma' \rangle$ будет представлять собой пару функторов ($\boldsymbol{M_A}$,$\boldsymbol{M_B}$) из $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{A}'$ и из $\boldsymbol{B}$ в $\boldsymbol{B}'$, соответственно, которые сохраняют структуру предсопряжений.

Определим теперь понятие *свободного предсопряжения* $\boldsymbol{J}$, *порожденного парой множеств объектов* ($G$,$H$). Множество объектов может рассматриваться как граф без стрелок.

Вначале введем понятие атомарных символов для объектов из $G$ и $H$, называемых порождающими объектными термами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно. Порождающие объектные термы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ будут принадлежать к *объектным термам* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, которые можно определить, полагая, что если $B$ будет объектным термом $\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{F}B$ будет объектным термом $\boldsymbol{A}$ и что если $A$ будет объектным термом $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{G}A$ будет объектным термом $\boldsymbol{B}$.

Определим теперь *стрелочные термы* $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Каждый стрелочный терм из $\boldsymbol{A}$ будет иметь единственный *тип*, представляющий собой пару ($A_1$,$A_2$) объектных термов $\boldsymbol{A}$. Чтобы обозначить, что стрелочный терм $f$ из $\boldsymbol{A}$ имеет тип ($A_1$,$A_2$), будем писать $f$: $A_1 \to A_2$. То же самое будет иметь место и для стрелочных термов из $\boldsymbol{B}$.

***Определение***. Стрелочные термы из $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ можно определить индуктивно следующим образом:

- если $A$ есть объектный терм из $\boldsymbol{A}$, то $1_A$: $A \to A$ будет стрелочным термом из $\boldsymbol{A}$, и аналогично с заменой $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$;
- если $f_1$: $A_1 \to A_2$ и $f_2$: $A_2 \to A_3$ суть стрелочные термы из , то ($f_2 \circ f_1$): $A_1 \to A_3$ ,будет представлять собой стрелочный терм из $\boldsymbol{A}$, и аналогично с заменой $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$;
- если $g$: $B_1 \to B_2$ есть стрелочный терм из $\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{F}$(g): $\boldsymbol{F}(B_1) \to \boldsymbol{F}(B_2)$ будет представлять собой стрелочный терм из $\boldsymbol{A}$;
- если $f$: $A_1 \to A_2$ есть стрелочный терм из $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{G}$(f): $\boldsymbol{G}(A_1) \to \boldsymbol{G}(A_2)$ будет представлять собой стрелочный терм из $\boldsymbol{B}$;
- если $f$: $A_1 \to A_2$ есть стрелочный терм из $\boldsymbol{A}$, то $\varphi$(f): $\boldsymbol{FG}(A_1) \to A_2$ будет представлять собой стрелочный терм из $\boldsymbol{A}$;
- если $g$: $B_1 \to B_2$ есть стрелочный терм из $\boldsymbol{B}$, то $\gamma$(g): $B_1 \to \boldsymbol{GF}(B_2)$ будет представлять собой стрелочный терм из $\boldsymbol{B}$;

Объектные термы из $\boldsymbol{A}$ порождают объекты, а стрелочные термы порождают стрелки графа $\boldsymbol{A}$, то же самое относится и к графу $\boldsymbol{B}$. Более того, $\langle \boldsymbol{A},1,\circ\rangle$ и $\langle \boldsymbol{B},1,\circ\rangle$ представляют собой дедуктивные системы, а $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\varphi,\gamma\rangle$ представляет собой предсопряжение. Таким образом, это *свободное предсопряжение* $\boldsymbol{J}$, порожденное $(G,H)$.

## 2. Сопряжение в дедуктивных категориях

Предсопряжение $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\varphi,\gamma\rangle$ представляет собой *сопряжение* тогда и только тогда, когда:

(i) $\langle \boldsymbol{A},1,\circ\rangle$ и $\langle \boldsymbol{B},1,\circ\rangle$ суть дедуктивные категории;

(ii) $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$ являются функторами;

(iii) между $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют место следующие естественные тождества:

$$\varphi(f_2 \circ f_1) = f_2 \circ \varphi(f_1), \qquad \gamma(g_2 \circ g_1) = \gamma(g_2) \circ g_1,$$
$$\varphi(f_2 \circ f_1) = \varphi(f_2) \circ \boldsymbol{FG}(f_1), \qquad \gamma(g_2 \circ g_1) = \boldsymbol{GF}(g_2) \circ \gamma(g_1);$$

(iv) следующие аналогии равенства треугольника сопряжения имеют место между $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\varphi(f) \circ \boldsymbol{F}(\gamma(g)) = f \circ \boldsymbol{F}(g), \; \boldsymbol{G}(\varphi(f) \circ \gamma(g)) = \boldsymbol{G}(f) \circ g.$$

Легко проверить, что определенное подобным образом понятие сопряжения равносильно стандартным определениям сопряжения, которые можно найти в литературе по теории категорий. Естественные преобразования $\varphi$ и $\gamma$, которые представляют собой единицу и коединицу сопряжения, определяются следующим образом:

$$\varphi_A =_{def} \varphi 1_A, \qquad \gamma_B =_{def} \gamma 1_B.$$

Определим теперь понятие *свободного сопряжения* $\boldsymbol{J}^*$, *порожденного предсопряжением* $\boldsymbol{J}$. Пусть $\boldsymbol{J}$ будет $\langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\varphi,\gamma\rangle$ и рассмотрим пары $(\equiv_{\boldsymbol{A}},\equiv_{\boldsymbol{B}})$, такие, что $\equiv_{\boldsymbol{A}}$ представляет собой отношение эквивалентности на стрелках $\boldsymbol{A}$, а $\equiv_{\boldsymbol{B}}$ есть отношение эквивалентности на стрелках $\boldsymbol{B}$, удовлетворяющих соответствующим условиям конгруэнтности по отношению к $\circ,\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\varphi$ и $\gamma$ и удовлетворяющее также условиям, выведенным из пунктов (i)-(iv) определения сопряжения путем замены $=$ на $\equiv_{\boldsymbol{A}}$ или $\equiv_{\boldsymbol{B}}$ соответственно. Назовем подобные пары $(\equiv_{\boldsymbol{A}},\equiv_{\boldsymbol{B}})$ *парами сопряженных отношений эквивалентности на* $\boldsymbol{J}$.

Нетрудно убедиться, что если мы возьмем все пары сопряженных отношений эквивалентности на $\boldsymbol{J}$ и возьмем пересечение $\equiv_{\boldsymbol{A}\cap}$ всех отношений $\equiv_{\boldsymbol{A}}$ и пересечение $\equiv_{\boldsymbol{B}\cap}$ всех отношений $\equiv_{\boldsymbol{B}}$ в подобных парах, то получим вновь пару сопряженных отношений эквивалентности ($\equiv_{\boldsymbol{A}\cap}, \equiv_{\boldsymbol{B}\cap}$). Рассмотрим теперь для каждой стрелки $f$ из $\boldsymbol{A}$ классы эквивалентности $[f] =_{def} \{f' : f \equiv_{\boldsymbol{A}\cap} f'\}$, и аналогично для $\boldsymbol{B}$, и определим на них следующие операции:

$$1_A =_{def} [1_A], \qquad 1_B =_{def} [1_B],$$
$$[f_2] \circ [f_1] =_{def} [f_2 \circ f_1], \qquad [g_2] \circ [g_1] =_{def} [g_2 \circ g_1],$$
$$\boldsymbol{F}[g] =_{def} [\boldsymbol{F}(g)], \qquad \boldsymbol{G}[f] =_{def} [\boldsymbol{G}(f)],$$
$$\varphi[f] =_{def} [\varphi(g)], \qquad \gamma[g] =_{def} [\gamma(f)].$$

Объекты из $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ вместе с классами эквивалентности образуют категории $\langle \boldsymbol{A^*}, 1, \circ \rangle$ и $\langle \boldsymbol{B^*}, 1, \circ \rangle$. Тогда $\langle \boldsymbol{A^*}, \boldsymbol{B^*}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \varphi, \gamma \rangle$, где $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \varphi$ и $\gamma$ определены для $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{B^*}$ (т.е. на классах эквивалентности), будет представлять собой сопряжение. Оно то и будет называться *свободным сопряжением* $\boldsymbol{J^*}$, *порожденным* $\boldsymbol{J}$.

Свободное сопряжение $\boldsymbol{J^*}$, порожденное свободным предсопряжением $\boldsymbol{J}$, порожденным парой объектов $(G,H)$, будет называться *свободным сопряжением* $\boldsymbol{J^*}$, *порожденным* $(G,H)$. Стрелочные термы категорий $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{B^*}$ из $\boldsymbol{J^*}$ являются, соответственно, теми же, что и стрелочные термы дедуктивных систем $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ из $\boldsymbol{J}$.

## 3. Устранение сечения в свободных сопряжениях

Пусть теперь $\langle \boldsymbol{A^*}, \boldsymbol{B^*}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \varphi, \gamma \rangle$ будет свободным сопряжением, порожденным парой множеств объектов. Назовем вхождение символа композиции $\circ$ в стрелочный терм из $\boldsymbol{A^*}$ или $\boldsymbol{B^*}$ *сечением*. Каждое сечение в стрелочном терме $h$ из $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{B^*}$ определяется подтермом $h$ вида $h_2 \circ h_1$, который мы будем называть *подтермом сечения*.

*Степень* стрелочного терма есть число вхождений символов $1, \circ, \boldsymbol{F}$ (примененного к стрелочным термам), $\boldsymbol{G}$ (примененного к стрелочным термам), $\varphi$ или $\gamma$ в этих стрелочных термах. Если подтермом сечения является $h_2 \circ h_1$, то *степень сечения* будет степенью $h_2 \circ h_1$.

Докажем теперь следующую теорему.

***Теорема устранения сечения***. *Для любого стрелочного терма $h$ из $\boldsymbol{A^*}$ существует свободный от сечения стрелочный терм $h'$ из $\boldsymbol{A^*}$, такой, что $h = h'$ в $\boldsymbol{A^*}$, и то же самое справедливо для $\boldsymbol{B^*}$.*

***Набросок доказательства***. В стрелочном терме $h$ из $\boldsymbol{A^*}$ или из $\boldsymbol{B^*}$ возьмем сечение *наивысшего* уровня, т.е. сечение, чей подтерм $h_2 \circ h_1$ таков, что в $h_1$ и $h_2$ нет сечений. Покажем путем рассмотрения всех возможных случаев, что существует такой стрелочный терм $h'$, что $h_2 \circ h_1 = h'$ и $h'$ либо свободен от сечения, либо содержит сечение наивысшего уровня, чья степень все еще в точности меньше степени $h_2 \circ h_1$. Отсюда индукцией по длине терма получим, что существует стрелочный терм $h'$, такой, что $h_2 \circ h_1 = h'$ и $h'$ свободен от сечения. Теорему получаем индукцией по числу сечений в $h$. В полном доказательстве этой теоремы используется все равенства (i)-(iv) из определения сопряжения кроме случая ассоциативности композиции стрелок категории. ■

Свободный от сечения стрелочный терм из $\boldsymbol{A}^*$ или из $\boldsymbol{B}^*$ вида $Q_1 \ldots Q_n 1_C$ где $n \geq 1$, каждый $Q_i$ есть либо $\boldsymbol{F}$, либо $\boldsymbol{G}$, либо $\varphi$, либо $\gamma$, а $C$ представляет собой порождающий объектный терм, будет называться *нормальной формой*. С помощью теоремы устранения сечения и условия $\boldsymbol{F}(1_A) = 1_{\boldsymbol{F}(A)}$ легко получить теорему о нормальной форме:

***Теорема о нормальной форме***. *Для каждого стрелочного терма $h$ из $\boldsymbol{A}^*$ или $\boldsymbol{B}^*$ существует стрелочный терм $h'$ из $\boldsymbol{A}^*$ или $\boldsymbol{B}^*$ в нормальной форме, такой, что $h = h'$ имеет место в $\boldsymbol{A}^*$ или $\boldsymbol{B}^*$.*

## 4. Свободное сопряжение и когерентность

Рассмотрим свободное сопряжение между $\boldsymbol{A}^*$ и $\boldsymbol{B}^*$, порожденное парой множество объектов. Каждому стрелочному терму $h: C_1 \to C_2$ из $\boldsymbol{A}^*$ или $\boldsymbol{B}^*$ мы сопоставляем множество *связей* $\Lambda(h)$, представляющее собой множество неупорядоченных пар вхождений $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{G}$ в $C_1$ или $C_2$. $\Lambda(h)$ определяем индукцией по сложности $h$.

Если $h$ есть $1_C$, то $C_1$ и $C_2$ представляют собой два экземпляра $C$, и в $\Lambda(h)$ мы помещаем связи между $n$-ым $\boldsymbol{F}$ из $C_1$ и $n$-ым $\boldsymbol{F}$ из $C_2$ (отсчитывая слева) и точно так же для связей между $n$-ым $\boldsymbol{G}$ из $C_1$ и $n$-ым $\boldsymbol{G}$ из $C_2$.

Если $h$ имеет вид $\boldsymbol{F}(g)$: $\boldsymbol{F}(B_1) \to \boldsymbol{F}(B_2)$, то $\Lambda(h)$ получается путем добавления к копии $\Lambda(h)$ связи между первым $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{F}(B_1)$ и первым $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{F}(B_2)$. Если $h$ имеет вид $\boldsymbol{G}(f)$: $\boldsymbol{G}(A_1) \to \boldsymbol{G}(A_2)$, то $\Lambda(h)$ получается путем добавления к копии $\Lambda(h)$ связи между первым $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{G}(A_1)$ и первым $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{G}(C_2)$.

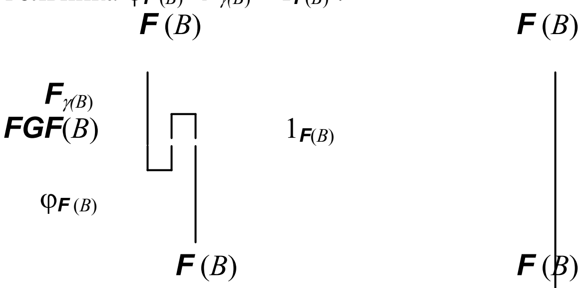
Если $h$ имеет вид $\varphi(f)$: $\boldsymbol{FG}(A_1) \to A_2$, то $\Lambda(\varphi(f))$ получается путем добавления к копии $\Lambda(f)$ связи между первым $\boldsymbol{F}$ и первым $\boldsymbol{G}$ в $\boldsymbol{FG}(A_1)$. Если $h$ имеет вид $\gamma(g)$: $B_1 \to \boldsymbol{GF}(B_2)$, то мы получаем $\Lambda(\gamma(g))$

путем добавления к копии $\Lambda(f)$ связи между первым $\boldsymbol{G}$ и первым $\boldsymbol{F}$ в $\boldsymbol{GF}(B_2)$.

Наконец, если $h$: $C_1 \to C_2$ имеет вид $h_2 \circ h_1$ для $h_1$: $C_1 \to C_3$ и $h_2$: $C_3 \to C_2$, то каждая связь $\{x_1,x_n\}$ в $\Lambda(h)$ получается в из конечной последовательности связей $\{x_1,x_2\}$, $\{x_2,x_3\}$, $\{x_3,x_4\}$, ... , $\{x_{n-1},x_n\}$, с $n \geq 1$, в которой связи $\Lambda(h_1)$ чередуются со связями $\Lambda(h_2)$ (в этой последовательности имеется по меньшей мере одна связь из $\Lambda(h_1)$ или $\Lambda(h_2)$). Вершины $x_1$ и $x_n$ представляют собой вхождения $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{G}$ в $C_1$ или $C_2$ и если $n \geq 3$, то все $x_2$, ... , $x_{n-1}$ являются вхождениями $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{G}$ в $C_3$. Легко видеть, что не может быть последовательности связей вида $\{x_1,x_2\}$, $\{x_2,x_3\}$, ... , $\{x_{2n-1},x_{2n}\}$, $\{x_{2n},x_1\}$ с $n \geq 1$, в которой все $x_1$, ... , $x_{2n}$ представляют собой вхождения $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{G}$ в $C_3$.

Заметим, что для $h$: $C_1 \to C_2$ каждый $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{G}$ в $C_1$ или $C_2$ связан в $\Lambda(h)$ в точности с одним вхождением $\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{G}$ в $C_1$ или $C_2$ (в [Eilenberg Kelly 1966] и [Kelly Mac Lane 1971] подобные связи называются графами).

Поскольку связи были определены для стрелочных термов из $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{B^*}$ в одной формулировке сопряжения, связи стрелочных термов из $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{B^*}$ в другой формулировке сопряжения получаются, если мы принимаем, что стрелочные термы последней определены в терминах первой из них. Например, основываясь на естественных преобразованиях $\varphi$ и $\gamma$ как они были определены ранее в этом разделе, мы получаем следующие связи для двух сторон равенства треугольника $\varphi_{\boldsymbol{F}(B)} \circ \boldsymbol{F}_{\gamma(B)} = 1_{\boldsymbol{F}(B)}$ :




Основываясь на понятии нормальной формы, можно доказать следующую лемму, касающуюся связей стрелочных термов из $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{B^*}$:

***Лемма***. *Предположим, что $h_1$ и $h_2$ представляют собой стрелочные термы из $\boldsymbol{A^*}$ и $\boldsymbol{B^*}$ в нормальной форме, имеющей тот же* *самый тип. Тогда* $\Lambda(h_1) = \Lambda(h_2)$ *тогда и только тогда, когда* $h_1$ *будет тем же самым стрелочным термом, что и* $h_2$.

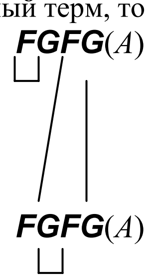
С помощью этой леммы мы можем доказать следующую теорему, которая представляет собой разновидность теоремы когерентности (см., например, [Mac Lane 1971]).

***Теорема когерентности***. *Если* $h_1$ *и* $h_2$ *представляют собой стрелочные термы из* $\mathbf{A}^*$ *одного и того же типа, то* $h_1 = h_2$ *в* $\mathbf{A}^*$ *тогда и только тогда, когда* $\Lambda(h_1) = \Lambda(h_2)$ *и то же самое для* $\mathbf{B}^*$.

Таким образом, для того, чтобы проверить, коммутирует ли диаграмма стрелок, достаточно вычертить связи стрелок из диаграммы и проверить, равны ли они.

Теорема когерентности гарантирует, что существует точный функтор из $\mathbf{A}^*$ в категорию, чьи объекты представляют собой конечные, возможно пустые, последовательности чередований ***F*** и ***G***, которые, если они непусты, должны начинаться с ***F***; стрелки этой категории являются связями. Аналогичным образом гарантируется, что существует точный функтор из $\mathbf{B}^*$ в категорию, чьи объекты суть такие последовательности ***F*** и ***G*** , что непустые последовательности начинаются с ***G***; вновь стрелки будут представлять собой связи. Если каждое из порождающих множеств объектов $G$ и $H$ непусто, то функторы будут функторами на объекты и на стрелки. Если и $G$ и $H$ являются единичными множествами, то эти функции будут изоморфизмами.

Связи, введенные нами, дают простой теоретико-модельный метод для нормализации стрелочных термов из $\mathbf{A}^*$ или $\mathbf{B}^*$. Этот метод заключается в вычерчивании связей стрелочных термов, а затем конструировании очевидным образом из этих связей стрелочный терм в нормальной форме с теми же самыми связями. Теорема о нормальной форме и теорема когерентности гарантируют, что эти конструкции всегда могут быть получены. Например, если $A$ есть порождающий объектный терм, то из связей



мы конструируем стрелочный терм в нормальной форме $\varphi(\boldsymbol{F}(\gamma(\boldsymbol{G}(1_A))))$.

Наши связи также снабжают нас доказательством единственности нормальной формы, не прибегая при этом к чему-то вроде слияния редукций, т.е. свойству Чёрча-Россера. А именно, мы можем показать, что если $h_1 = h_2$ имеет место в $\boldsymbol{A}^*$ или $\boldsymbol{B}^*$, и $h'_1$ и $h'_2$ являются нормальными формами $h_1$ и $h_2$ соответственно, то $h'_1$ есть та же самая стрелка, что и $h'_2$.

## 5. Когерентность в декартово замкнутых генценовских дедуктивных мультикатегориях

Итак, согласно результатам предыдущего параграфа, чтобы проверить, коммутирует ли диаграмма стрелок, достаточно вычертить связи стрелок из диаграммы и проверить, равны ли они. Для декартово замкнутых генценовских дедуктивных мультикатегорий (т.е. генценовских мультикатегорий, надстроенных над декартово замкнутой генценовской дедуктивной системой) существует еще более простой способ обнаружения подобной когерентности (см. [Szabo 1989]).

Будем говорить, что все стрелки нашей мультикатегории *расширены* до конгруэнтных стрелок, если они заменены на стрелки, не включающие в свою конструкцию фрагменты, эквивалентные стрелке ослабления, и в которых стрелки типа $g\{f\}$ предшествуют стрелкам типа $f \wedge g$, всегда, когда это синтаксически возможно. Теперь в качестве стрелок будут рассматриваться только свободные от сечения *расширенные* стрелки. С каждой стрелкой $f$: $\Gamma \vdash A$ мы ассоциируем пару $\alpha \rhd \beta$ последовательностей $\alpha$ и $\beta$ букв, устанавливающих упорядоченную связь между переменной в заключении $f$ и ее прототипами в исходных стрелках, по которым сконструирована $f$. Будем называть пару $\alpha \rhd \beta$ *алфавитным следом* $f$. Последовательность $\alpha$ получается путем замещения каждого вхождения переменной в последовательность формул $\Gamma$, $A$ по порядку слева направо на различающиеся между собой буквы. Мы допускаем, что для этой цели у нас в распоряжении имеется бесконечный алфавит. Если $\Gamma$, $A$ не содержит переменных, то $\alpha$ пуста. Затем мы переписываем доказательство, переименовывая все прототипы переменной согласно их новым именам в $\alpha$. Последовательность $\beta$ представляет собой последовательность букв, полученных путем считывания имен по мере их появления в исходных стрелках конструкции *f* слева направо. Если $\vdash$ T является единственной исходной стрелкой *f*, то β пуста. Таким образом, также разрешаются «пары» $\varnothing \rhd \beta$ и $\varnothing \rhd \varnothing$.

Пусть, например, у нас имеются два доказательства

$$\dfrac{g\colon A\vdash B \qquad \dfrac{\dfrac{f\colon A\vdash D}{f^{thin}\colon CA\vdash D}}{(f^{thin})^{\varepsilon}\colon A\vdash C\supset D}}{g\wedge(f^{thin})^{\varepsilon}\colon \mathrm{A}\vdash B\wedge(C\supset D)} \qquad \dfrac{g\colon A\vdash B \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{f\colon C\vdash D}{f^{thin}\colon AC\vdash D}}{(f^{thin})^{int}\colon CA\vdash D}}{((f^{thin})^{int})^{\varepsilon}\colon A\vdash C\supset D}}{g\wedge((f^{thin})^{int})^{\varepsilon}\colon \mathrm{A}\vdash B\wedge(C\supset D)}$$

Их алфавитные следы будут выглядеть следующим образом:

$ABCD \rhd ABAD \qquad\qquad ABCD \rhd ABCD$

***Определение***. *Общность* (generality) стрелки $f\colon \Gamma\vdash A$ есть алфавитный след расширения $f^*\colon \Gamma\vdash A$ стрелки *f*.

Используя понятие общности, можно доказать следующую теорему [Szabo 1989, p. 294].

***Теорема когерентности.*** *Если* $h_1, h_2\colon \Gamma\vdash A$ *представляют собой свободные от сечения стрелки в свободной декартово замкнутой генценовской дедуктивной мультикатегории, то* $h_1 = h_2$ *тогда и только тогда, когда* $h_1$ и $h_2$ *имеют одну и ту же общность.*

Данная теорема позволяет не только отождествить стрелки, но и различить их, что особенно важно в случае использования только одной переменной. Так, если воспользоваться нашими стрелками $g\wedge(f^{thin})^{\varepsilon}$ и $g\wedge((f^{thin})^{int})^{\varepsilon}$, то даже в случае секвенции $\mathrm{A}\vdash A\wedge(A\supset A)$ эти стрелки легко различаются своей общностью.

# Часть 2.

# Логика в категориях

# Глава пятая. Логические исчисления в категориях предпорядка с функторами

## 1. Классическая логика в N-категориях.

Любое предупорядоченное множество можно рассматривать как категорию. Ее объектами будут его элементы и для любой пары объектов $(a,b)$, существует не более чем одной стрелки $a \to b$ в точности тогда, когда $a \leq b$.

Именно подобные категории предпорядка и позволяют решить нам проблему, связанную с формулировкой классической логики с полным набором связок. Дело в том, что при попытке сконструировать дедуктивное исчисление для классической логики мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что у нас нет метода для интерпретации отрицания. В случае позитивных логик этой проблемы не возникало ввиду отсутствия отрицания, а в случае интуиционистского исчисления отрицание, как известно, может быть сконструировано с помощью константы "ложь" и импликации.

Чтобы обойти эту трудность, снабдим нашу категорию предпорядка функтором, передающим свойства логической операции отрицания (см. [Riscos Laita 1987]). Выбор категорий предпорядка выгоден здесь именно тем, что в силу единственности стрелок мы сразу можем говорить и о дедуктивных исчислениях и о категориях, поскольку мы не будем нуждаться в тождествах на стрелках: все стрелки единственны.

***Определение 1***. N-категория $\boldsymbol{C}$ представляет собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, такую, что:

(i) $\boldsymbol{C}$ имеет терминальный объект T;

(ii) $\boldsymbol{C}$ имеет конечные копроизведения [-,-];

(iii) функтор $\boldsymbol{N}^2$ естественно эквивалентен единице в $\boldsymbol{C}$, т.е. $\boldsymbol{N}^2 a \cong a$ для любого объекта $a$ из $\boldsymbol{C}$.

(iv) $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $[\boldsymbol{N}a,b] \cong 1$ для любых двух объектов $a$, $b$ из $\boldsymbol{C}$.

Заметим, что скелетом N-категории будет булева алгебра.

Любая N-категория $\boldsymbol{C}$ обладает, как нетрудно видеть, следующими свойствами:

(1) $\boldsymbol{C}$ имеет начальный объект $0 \cong \boldsymbol{N}1$.

(2) $\boldsymbol{C}$ имеет конечные копроизведения $\langle a,b\rangle = \boldsymbol{N}\,[\boldsymbol{N}a,\boldsymbol{N}b]$ (закон де Моргана).

(3) $\boldsymbol{C}$ дистрибутивна, т.е. $[\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle] = [a, \langle b,c\rangle]$.

(4) $\boldsymbol{C}$ имеет псевдодополнения ($c$ есть псевдодополнение $a$ относительно $b$, если выполняется следующее свойство: для любого $x$ в $\boldsymbol{C}$, $x \to c$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $\langle a,x\rangle \to c$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$). $[\boldsymbol{N}a,b]$ является псевдодополнением $a$ относительно $c$ с точностью до изоморфизма.

Дадим интерпретацию в терминах N-категорий следующему списку аксиом:

(I) $\alpha \to \alpha \wedge \alpha$,

(II) $\alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha$,

(III) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \wedge\gamma) \to (\beta \wedge \gamma))$,

(IV) $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$,

(V) $\beta \to (\alpha \to \beta)$,

(VI) $(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$,

(VII) $\alpha \to \alpha \vee \beta$,

(VIII) $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$,

(IX) $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)$,

(X) $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$,

(XI) $((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \neg\beta)) \to \neg\alpha$,

(XII) $\alpha \vee \neg\alpha$,

и правило *модус поненс*:

$$\frac{\alpha,\quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

Заметим, что если $\alpha$ и $\beta$ суть формулы, то $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\neg\alpha$ и $\alpha \to \beta$ также будут формулами, в то время как если $a$ и $b$ являются объектами в $\boldsymbol{C}$, то $[a,b]$, $\langle\, a,b\,\rangle$и $\boldsymbol{N}a$ тоже будут объектами, но , $a \to b$ уже представляет собой стрелку, а не объект. Так как логически $\alpha \to \beta$ эквивалентно $\neg\alpha \vee \beta$, то представляется естественным предложить следующий список в качестве словаря перевода высказываний в N-категории:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \wedge \beta$ | $\alpha \vee \beta$ | $\neg\alpha$ | $\alpha \to \beta$ |
| $a$ | $b$ | $\langle a,b \rangle$ | $[a,b]$ | $\boldsymbol{N}a$ | $[\boldsymbol{N}a,b]$ |

По причине, указанной выше, псевдодополнение $[\boldsymbol{N}a,b]$ будет обозначаться как $a \Rightarrow b$, так что (iv) перепишется теперь как

(iv') $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $a \Rightarrow b \cong 1$ для любых двух объектов $a$, $b$ из $\boldsymbol{C}$.

Данный перевод позволяет нам отождествить объекты в $\boldsymbol{C}$ и индивидуальные высказывания. Напомним, что в булевой алгебре имеет место процедура отождествления элементов алгебры и классов эквивалентных высказываний; в $\boldsymbol{C}$ эквивалентным высказываниям отвечают изоморфные объекты.

Теперь процесс интерпретации аксиом и правил вывода, приведенных выше, становится ясным. Например, интерпретацией аксиомы (IV) будет следующее выражение:

$$\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \Rightarrow a \Rightarrow c.$$

Но утверждать, что это есть аксиома, равносильно тому, что сказать

$$\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \Rightarrow a \Rightarrow c \cong 1,$$

что по (iv') дает нам

$$\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \to a \Rightarrow c.$$

Осуществляя подобные преобразования, мы получаем из списка логических аксиом следующий список:

(I) $a \to \langle a \wedge a \rangle$,

(II) $\langle a,b \rangle \to \langle b,a \rangle$,

(III) $(a \Rightarrow b) \to \langle a,c \rangle \Rightarrow \langle b,c \rangle$,

(IV) $\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \to a \Rightarrow c$,

(V) $b \to a \Rightarrow b$,

(VI) $\langle a, a \Rightarrow b \rangle \to b$ ,

(VII) $a \to [a,b]$,

(VIII) $[a,b] \to [b,a]$,

(IX) $\langle a \Rightarrow c, b \Rightarrow c \rangle \to [a,b] \Rightarrow c)$,

(X) $\boldsymbol{N}a \to a \Rightarrow b)$,

(XI) $\langle a \Rightarrow b, a \Rightarrow \boldsymbol{N}b \rangle \to \boldsymbol{N}a$ ,

(XII) $[a, \boldsymbol{N}a] \cong 1$,

и правило *модус поненс*: если $a \cong 1$ и $a \to b$, то $b \cong 1$.

Характеристика как правила модус поненс, так и аксиомы (XII) очевидна.

Рассмотрим теперь алгебраические свойства N-категорий. Введем с этой целью понятие N-функтора. Его определение будет выглядеть следующим образом:

***Определение 2***. Пусть $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C'}$ будут две N-категории (с функторами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N'}$ соответственно). N-функтором $\boldsymbol{F}$:$\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C'}$ будет называться функтор, для которого имеет место (для $a,b,1$ в $\boldsymbol{C}$ и для 1' в $\boldsymbol{C'}$):

(i) $\boldsymbol{F}1 \cong 1'$;

(ii) $\boldsymbol{F}[a,b] \cong [\boldsymbol{F}a,\boldsymbol{F}b]$;

(iii) $\boldsymbol{FN} = \boldsymbol{N'F}$.

С помощью соответствующей модификации метода дедекиндовых сечений для N-категорий [Riscos Laita 1987, c.510] доказываются следующие два предложения (упражнение для читателя):

***Предложение 1.*** *Каждая N-категория имеет полное расширение* (*полнота означает здесь наличие бесконечных копроизведений*).

***Предложение 2.*** *Пусть* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ *будут N-категориями, причем* $\boldsymbol{B}$ *есть расширение* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{E}$ *полна. Любой N-функтор* $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}$ *может быть расширен до N-функтора* $\boldsymbol{H}$: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{E}$.

## 2. Интуиционистская логика в N-категориях

Как известно, алгебра Гейтинга категорно представляет собой декартово замкнутую конечную кополную категорию предпорядка $\boldsymbol{H}$ [Гольдблатт 1983]. Нетрудно превратить подобную категорию в N-категорию, если рассмотреть контравариантный функтор $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, такой, что:

(i) $\boldsymbol{N}a = a \Rightarrow 0$;

(ii) $\boldsymbol{N}(a \to b) = \boldsymbol{N}b \to \boldsymbol{N}a$,

где $\Rightarrow$ есть экспоненциал и мы полагаем, что:

(iii) $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{H}$ тогда и только тогда, когда $a \Rightarrow b \cong 1$ для любых двух объектов $a$, $b$ из $\boldsymbol{H}$.

Назовем полученные категории Н-категориями и дадим интерпретацию в терминах Н-категорий аксиом интуиционистского исчисления высказываний, используя следующий словарь перевода высказываний интуиционистской логики в Н-категорию:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \vee \beta$ | $\alpha \wedge \beta$ | $\neg\alpha$ | $\alpha \supset \beta$ |
| $a$ | $b$ | $[a,b]$ | $\langle a, b \rangle$ | $\boldsymbol{N}a$ | $a \Rightarrow \mathrm{b}$ |

Как и в случае N-категорий, нетрудно убедиться, что любая аксиома типа $a \Rightarrow b \cong 1$ может быть переписана как $a \to b$. Нетрудно, применяя подобное преобразование, получить Н-категорный эквивалент соответствующего списка интуиционистских аксиом.

***Определение 1***. Пусть $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{H'}$ будут две Н-категории (с функторами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N'}$ соответственно). Н-функтором $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{H}\to \boldsymbol{H'}$ будет называться функтор, для которого имеет место (для $a,b,1,0$ в $\boldsymbol{H}$ и для $1',0'$ в $\boldsymbol{H'}$):

(iv) $\boldsymbol{F}1 \cong 1'$;

(i) $\boldsymbol{F}0 \cong 0'$;

(ii) $\boldsymbol{F}[a,b] \cong [\boldsymbol{F}a,\boldsymbol{F}b]$;

(iii) $\boldsymbol{F}\langle a,b\rangle\cong \langle \boldsymbol{F}a,\boldsymbol{F}b\rangle$;

(iv) $\boldsymbol{F}a \Rightarrow b \cong \boldsymbol{F}a \Rightarrow \boldsymbol{F}b$;

(v) $\boldsymbol{FN} = \boldsymbol{N'F}$.

С помощью соответствующей модификации метода дедекиндовых сечений для N-категорий [Riscos Laita 1987, с.510] доказываются следующие два предложения (упражнение для читателя):

***Предложение 1.*** *Каждая Н-категория имеет полное расширение (полнота означает здесь наличие конечных копроизведений и произведений).*

***Предложение 2.*** *Пусть* $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ *будут Н-категориями, причем* $\boldsymbol{B}$ *есть расширение А и С полна. Любой Н-функтор* $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ *может быть расширен до Н-функтора* $\boldsymbol{H}: \boldsymbol{B}\to \boldsymbol{C}$.

$\boldsymbol{C}$ далее будет означать Н-категорию.

Пусть $p$ будет объектом из $\boldsymbol{C}$ и обозначим как $\boldsymbol{C}_p$ категорию

$$\boldsymbol{C}_p=\{x: p \to x \text{ есть стрелка в } \boldsymbol{C}\},$$

с теми же самыми стрелками, что и в $\boldsymbol{C}$. Если мы определим $\boldsymbol{N}_p$: $\boldsymbol{C}_p\to\boldsymbol{C}_p$ как $\boldsymbol{N}_px=[\boldsymbol{N}_{p},p]$, то легко видеть, что $\boldsymbol{N}_p$ будет представлять собой контравариантный функтор, откуда пара $\boldsymbol{C}_p,\boldsymbol{N}_p$ становится Н-категорией с $p$ в качестве инициального объекта и теми же самыми произведениями, копроизведениями и экспоненциалами, что и в $\boldsymbol{C}$. Подобные категории $\boldsymbol{C}_p$ являются очевидными обобщениями понятия принципиальных идеалов алгебры Гейтинга.

Пусть $E$ будет непустой совокупностью элементов $\boldsymbol{C}$. Для $n\geq 2$ рассмотрим

$$\langle E_n \rangle= \{\langle p_1, ..., p_n \rangle: p_i\in E,\ i = 1, ..., n\},$$

и определим

$$\langle E \rangle = \cup \{\langle E_n \rangle: n \geq 2), \qquad (E) = \cup \{E_p : p \in\langle E \rangle\}.$$

Доказательство следующих свойств очевидно.

$E \subseteq (E)$;

если $E = \{p\}$, то $(E) = E_p$;

$(E) = \boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $0 \in (E)$ тогда и только тогда, когда существуют объекты $p_1, ..., p_n \in E$, такие, что $\langle p_1, ..., p_n \rangle \cong 0$;

если $p,q \in (E)$, то $\langle p,q \rangle \in (E)$;

Если $p \in (E)$, то $E_p \subseteq (E)$.

Отметим, что наши $(E)$ являются просто Н-категорными переводами идеалов алгебры Гейтинга.

Отношение $\sim_E$, определенное как

$p \sim_E q$ *тогда и только тогда, когда* $\langle p \Rightarrow q, q \Rightarrow p \rangle \in (E)$,

есть отношение эквивалентности, по которому можно образовать фактор-множество $\boldsymbol{C}/_{(E)}$. Если мы определим в $\boldsymbol{C}/_{(E)}$, что

$\|x\| \to \|y\|$ есть стрелка тогда и только тогда, когда $x \Rightarrow y \in (E)$,

то $\boldsymbol{C}/_{(E)}$ становится категорией предпорядка. Если мы определим $\boldsymbol{N}_E$: $\boldsymbol{C}/_{(E)} \to \boldsymbol{C}/_{(E)}$ как $\boldsymbol{N}_E\|x\| = \|\boldsymbol{N}x\|$, то $\boldsymbol{N}_E$ будет контравариантным функтором, так что пара $(\boldsymbol{C}/_{(E)},\boldsymbol{N}_E)$ становится Н-категорией с $\|0\|$ в качестве инициального объекта, $\|1\|$ в качестве терминального объекта, произведениями $\langle\|x\|,\|y\|\rangle_E = \|\langle x,y\rangle\|$, копроизведениями $[\|x\|,\|y\|]_E = \|[x,y]\|$ и $\|x\| \Rightarrow_E \|y\| = \|x \Rightarrow y\|$. Справедливо следующее предложение:

***Предложение 3***. $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}/_{(E)}$, *определенный с помощью* $\boldsymbol{F}x = \|x\|$, *есть Н-функтор*.

***Определение 2***. $(E)$ является *максимальным*, если не существует такого $E' \subseteq$ C, что $(E) \subset (E') \subset \boldsymbol{C}$.

Максимальность эквивалентна $\boldsymbol{C}/_{(E)} = \{\|0\| \to \|1\|\}$.

***Определение 3***. Н-категорная интерпретация логики высказываний есть пара $(\boldsymbol{C},(E))$, описывающая множество высказываний, содержащее доказуемые высказывания.

***Определение 4***. Пусть $\boldsymbol{B}$ будет нетривиальной Н-категорией. $\boldsymbol{B}$-оценка есть Н-функтор $\boldsymbol{V}$:$\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$. Элемент $p \in \boldsymbol{C}$ называется *истинным при* $\boldsymbol{V}$, если $\boldsymbol{V}p \cong 1$. $(\boldsymbol{C},(E))$ *семантически непротиворечива*, если существует оценка $\boldsymbol{V}$, такая, что $p \in E$ влечет $\boldsymbol{V}p \cong 1$.

При этих условиях легко доказать, что $\boldsymbol{V}p \cong 1$ для всех $p \in (E)$, и также, что применение $\|\boldsymbol{V}\|$: $\boldsymbol{C}/_{(E)} \to \boldsymbol{V}$, задаваемого как $\|\boldsymbol{V}\|\ \|p\| = \boldsymbol{V}p$, определяет Н-функтор.

***Определение 5***. Модель $(\boldsymbol{C},(E))$, есть $\boldsymbol{B}$-оценка $\boldsymbol{V}$, такая, что $\boldsymbol{V}p \cong 1$ для всех $p \in E$.

Говоря кратко: модель теории есть структура, в которой аксиомы теории являются значимыми. Тогда $(\boldsymbol{C},(E))$ является семантически непротиворечивой тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{C},(E))$ имеет модель, и легко доказать, что ($\boldsymbol{C}$,($E$)) семантически непротиворечива тогда и только тогда, когда ($E$) является собственным.

***Определение 6.*** ($\boldsymbol{C}$,($E$)) семантически полна, если выполняется следующее условие: $p \in (E)$ тогда и только тогда, когда $p$ истинно во всех моделях ($\boldsymbol{C}$,($E$)).

Как и в случае классической логики, легко можно показать, что ($\boldsymbol{C}$,(E)) является семантически полной.

## 3. Исчисления Айдукевича-Ламбека в S-категориях

Как известно, в 1958 году Дж. Ламбек ввел формальную систему LSC вывода редукций для синтаксических типов [Lambek 1958], которая существенно сильнее классической системы К. Айдукевича, разработанной им еще в 1935 году [Ajdukiewicz 1935].

Согласно В. Бушковскому [Buszkowski 1986], мы можем описать ламбековские синтаксические исчисления (LSC) следующим образом. Зафиксируем счетное множество $Pr$ констант, называемых примитивными типами. Множество $Tp$ (синтаксических) типов будет представлять собой наименьшее, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $Pr \subseteq Tp$,

(ii) если $x,y \in Tp$, то $(x \cdot y)$, $(x \,/\, y)$, $(x \setminus y) \in Tp$.

Операционные символы $\cdot$, /, \ называются «произведением», «правым» и «левым делением» соответственно. Переменные $x$, $y$, $z$ (соотв. $p$, $q$, $r$; соотв. $T$; соотв. $X$, $Y$, $Z$), с индексами или без индексов, будут пробегать по типам (соотв. примитивным типам; соотв. множествам типов; соотв. конечным последовательностям типов). Любая секвенция вида $X \to x$ (где $X \neq 0$) будет называться (редукционной) формулой. Про формулу $x \to y$ будем говорить, что она представляет собой простую формулу. Под сложностью типа формулы будем подразумевать общее число операционных знаков в ней.

Понятие подтипа понимается естественным образом. Под местом подтипа в типе будем подразумевать конкретное вхождение подтипа в тип. Говорят, что множество $T$ замкнуто, если наряду с каждым типом $T$ также содержит каждый подтип типа. $Cl(T)$ будет обозначать наименьшее замкнутое множество, содержащее $T$.

Переменная $R$ будет пробегать по множествам формул. $T(R)$ обозначает множество тех типов, которые появляются в некоторых формулах из $R$, и будем писать $T(X \to x)$ вместо $T\{X \to x\}$. Формула $X \to x$ будет называться $T$-формулой, если $X \in T$, $x \in T$.

Первая формулировка Ламбека LSC сводилась к системе, чьи формулы являются простыми формулами и чьи аксиомы выглядят следующим образом:

(A1) $x \to x$

(A2) $(x \cdot y) \cdot z \to x \cdot (y \cdot z)$

(A3) $x \cdot (y \cdot z) \to (x \cdot y) \cdot z$

для всех $x,y,z \in Tp$, а выводы выглядят следующим образом:

(R1) $\dfrac{x \cdot y \to z}{x \to z \cdot / y}$ (R2) $\dfrac{x \cdot y \to z}{x \to z \cdot \backslash y}$

(R3) $\dfrac{x \to z \cdot / y}{x \cdot y \to z}$ (R4) $\dfrac{x \to x \cdot \backslash \mathrm{z}}{x \cdot y \to z}$

(R5) $\dfrac{x \to y \cdot y \to z}{\cdot x \to z}$

Классические редукционные схемы Айдукевича выглядели следующим образом:

(B1) $x / y \cdot y \to x$

(B2) $y \cdot y \backslash x \to x$

Легко видеть, что эти схемы выводимы в LSC, поэтому нетрудно прийти к выводу, что ламбековское LSC включает в себя систему Айдукевича, будучи существенное сильнее последней.

Секвенциальная формулировка LSC имеет в качестве единственной аксиомы схему (A1), в то время как правила вывода выглядят следующим образом:

(/1) $\dfrac{XxZ \to z \qquad Y \to y}{X(x / y)YZ \to z}$ (/2) $\dfrac{Xy \to x \qquad (\mathrm{X} \neq \varnothing)}{X \to x / y}$

(\1) $\dfrac{XxZ \to z \qquad Y \to y}{XY(y \backslash x)\, Z \to z}$ (\2) $\dfrac{Xx \to y \qquad (\mathrm{X} \neq \varnothing)}{X \to x \backslash y}$

(·1) $\dfrac{XxyY \to x}{X(x \cdot y)Y \to z}$ (·2) $\dfrac{X \to x \qquad Y \to y}{XY \to x \cdot y}$

(сечение) $\dfrac{XyZ \to z \qquad Y \to y}{XYZ \to z}$

Ламбек в своей работе 1985 г. доказал, что $x_1, x_2, \ldots, x_n \to x$ выводима в данной секвенциальной системе тогда и только тогда, когда, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n \to x$ (порядок скобок несущественен) доказуема в первой приводимой выше формулировке. Поскольку последняя система фактически является консервативным расширением первой, то будем в дальнейшем отождествлять LSC с последней.

Так называемая S-семантика LSC, представляющаяся наиболее естественной с математической точки зрения, охватывает резидуальные полугруппы, представляющие собой просто структуру **M** = $\langle |M|, \leq, \cdot, /, \backslash \rangle$, где $\langle |M|, \rangle$ представляет собой полугруппу, $\leq$ есть отношение частичного порядка на $|M|$, а /, \ являются бинарными операциями на $|M|$, удовлетворяющие следующим тождествам:

(1) для $a,b,c \in |M|$ $a \leq c / b$ тогда и только тогда, когда $a \cdot b \leq c$ тогда и только тогда, когда $b \leq a \backslash c$.

Если обозначить класс резидуальных полугрупп как RES, то для каждого $M$ в RES $\langle |M|, \leq, \cdot \rangle$ является частично упорядоченной полугруппой; это означает, что $\leq$ выполняет условие монотонности

(2) для $a,b,c \in |M|$ если $a \leq b$ то $a \cdot c \leq b$ и $c \cdot a \leq c \cdot b$.

Для данного $M$ из RES можно стандартным образом расширить оценку $v$: $Pr \to |M|$ до интерпретации $f$: $Tp \to |M|$ и определить отношение выполнимости:

(3) $(M,f) \Vdash x_1, x_2, \ldots, x_n \to x$ тогда и только тогда, когда $f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n) \leq f(x)$.

$(M,f) \Vdash X \to x$ читается как «$X \to x$ значимо в $M$ при $f$». Как обычно, $(M,f) \Vdash R$ означает «каждая формула в $R$ значима в $M$ при $f$», а $M \Vdash X \to x$ (соотв. $M \Vdash R$) означает «$X \to x$ (соотв. каждая формула из $R$) значима в $M$ при каждой оценке $v$: $Pr \to |M|$».

Для данной $K \subseteq$ RES говорится, что формула $X \to x$ будет $K$-значимой, если $M \Vdash X \to x$ всякий раз, когда $M \in K$; говорится, что формула $X \to x$ будет $K$-следствием $R$, если $M \Vdash X \to x$ всякий раз, когда $M \in K$ и $v$: $Pr \to |M|$ таковы, что $M \Vdash R$. Если определить отношение $R \vdash X \to x$ (читается «$X \to x$ выводима из (A1) и формул из $R$ с помощью правил LSC»), то справедлива [Buszkowski 1986, p.15]

***Теорема 1***. *$R \vdash X \to x$ тогда и только тогда, когда $X \to x$ является RES-следствием $R$*

и следующее

***Следствие***. *$\vdash X \to x$ тогда и только тогда, когда $X \to x$ является RES-значимой.*

Другой семантикой LSC является семантика Дошена GS $\subseteq$ RES [Došen 1988]. Для данной частично упорядоченной полугруппы **G** = $\langle |G|, \leq, \cdot \rangle$ под резидуальной полугруппой над **G** понимается резидуальная полугруппа $\mathbf{M} = \langle |M|, \subseteq, \cdot, /, \backslash \rangle$, где $|M|$ состоит из всех $A \subseteq |G|$, таких, что $a \in A$ всякий раз как $b \in A$ и $a \leq b$, $\subseteq$ представляет собой включение, а операции определяются следующим образом: для $A, B \subseteq |G|$

(4) $A \cdot B = \{c \in |G| : c \leq a \cdot b$ для некоторых $a \in A$ и $b \in B\}$,

(5) $A / B = \{c \in |G| : c \cdot b \in A$ для каждого $b \in B\}$,

(6) $A \backslash B = \{c \in |G| : a \cdot c \in B$ для каждого $a \in A\}$.

GS охватывает все резидуальные полугруппы над частично упорядоченными полугруппами. Приведем еще следующие результаты из [Buszkowski 1986]:

***Лемма* 1**. *Каждая* $\mathbf{M} = \langle |M|, \leq, \cdot, /, \backslash \rangle \in$ *RES может быть изоморфно вложена в резидуальную полугруппу над* $\langle |M|, \leq, \cdot \rangle$.

***Следствие***. (i) $R \vdash X \to x$ *тогда и только тогда, когда* $X \to x$ *является GS-следствием R.*

(ii) $\vdash X \to x$ *тогда и только тогда, когда* $X \to x$ *является GS-значимой.*

Переформулируем S-семантику на языке категории предпорядка.

***Определение 1.*** S-категория представляет собой категорию предпорядка $\boldsymbol{C}$, снабженную ковариантным бифунктором $\otimes$: $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, таким, что:

(i) для всяких $a,b,c \in \boldsymbol{C}$ если существует стрелка $a \to b$, то существуют и стрелки $a \otimes c \to b \otimes c$ и $c \otimes a \to c \otimes b$;

(ii) в $\boldsymbol{C}$ имеются левые $\Rightarrow$ и правые $\Leftarrow$ экспоненты (резидуалы), т.е. для всяких $a,b,c \in \boldsymbol{C}$ стрелка $a \to c \Rightarrow b$ существует тогда и только тогда, когда существует $a \otimes b \to c$ тогда и только тогда, когда существует $b \to a \Leftarrow c$;

(iii) $\otimes$ ассоциативен, т.е. $a \otimes (b \otimes c) \cong (a \otimes b) \otimes c$.

Следующий список представляет собой словарь перевода LSC-формул в S-категорию:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ | $x / y$ | $x \backslash y$ | $x \to y$ |
| $a$ | $b$ | $a \otimes b$ | $a \Rightarrow b$ | $a \Leftarrow b$ | $a \to b$ |

Этот перевод позволяет нам отождествить объекты и стрелки в $\boldsymbol{C}$ и LSC-формулы. Легко проверить, что аксиомы (A1)-(A3) и правила (R1)-( R5) можно интерпретировать в $\boldsymbol{C}$. Фактически эту интерпретацию можно бы было понимать как обусловленность существования некоторой стрелки в $\boldsymbol{C}$ в случае существования другой (например, (R1) означает, что если $x\otimes y \to z$ есть стрелка в ***C***, то стрелка $x \to z\cdot\Rightarrow y$ принадлежит к ***C***).

***Определение 2***. Пусть ***C*** и ***C′*** будут двумя S-категориями (с бифункторами $\otimes$ и $\otimes'$ соответственно). S-функтор ***F***: ***C*** $\to$ ***C′*** есть функтор сохраняющий бифункторы, т.е. ***F***$(a\otimes b)$ = ***F***$(a)\otimes'$ ***F***$(b)$.

С помощью соответствующей модификации метода дедекиндовых сечений можно как и в случае N-категорий доказать два следующих предложения [Vasyukov 1995, p.325-326].

***Предложение 1***. *Каждая S-категория имеет полное расширение.*

***Предложение 2***. *Пусть* ***U***, ***B***, ***D*** *будут S-категории, где* ***B*** *есть расширение* ***U*** *и* ***D*** *полна. Любой S-функтор* ***F***: ***U*** $\to$ ***D*** *может быть расширен до S-функтора* ***H***: ***B*** $\to$ ***D***.

Обозначим категорию всех S-категорий, все стрелки которой являются S-функторами, как CatRES, и пусть переменная $R$ пробегает по множествам стрелок некоторой S-категории. Мы будем иметь дело с отношением $R \Vdash x_1\otimes x_2\otimes \dots \otimes x_n \to x$, что читается следующим образом: стрелка $x_1\otimes x_2\otimes \dots \otimes x_n \to x$ выводима из стрелки тождества и стрелок в $R$ с помощью категорного перевода (R1)-(R5).

Про стрелку $a_1\otimes a_2\otimes \dots \otimes a_n \to b$ говорят, что она $K$-значима, если она сохраняется каждым S-функтором подкатегории $K \subseteq$ CatRES; говорят, что она будет $K$-следствием $R$, если она сохраняется каждым S-функтором из $K$ всякий раз, когда $R$ сохраняется каждым S-функтором из $K$.

***Теорема* 2**. $R \Vdash x_1\otimes x_2\otimes \dots \otimes x_n \to x$ *тогда и только тогда, когда* $x_1\otimes x_2\otimes \dots \otimes x_n \to x$ *является* CatRES-*следствием* $R$.

***Доказательство***. Слева направо доказательство проводим индукцией по выводимости, согласно категорному переводу (A1) и (R1)-(R5). В обратную сторону воспользуемся категорным переводом соответствующих формул из [Buszkowski 1986, p.15], доказанных в LSC:

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & x \to y \Vdash z\otimes x \to z\otimes y,\\
& x \to y \Vdash x\otimes z \to y\otimes z,\\
& x \to y \Vdash x \Rightarrow z \to y \Rightarrow z,\\
& x \to y \Vdash z \Leftarrow x \to z \Leftarrow y,\\
& x \to y \Vdash z \Rightarrow y \to z \Rightarrow x,\\
& x \to y \Vdash y \Leftarrow z \to x \Leftarrow z.
\end{aligned}
$$

Ввиду (8) отношение

(9) $a \equiv_R b$ тогда и только тогда, когда $R \Vdash a \to b$ и $R \Vdash b \to a$ для $a, b \in \boldsymbol{C}$,

очевидным образом будет конгруэнцией на $\boldsymbol{C}$, что дает нам фактор-множество $\boldsymbol{C}/R$. Если мы определим для $\boldsymbol{C}/R$, что $\|a\| \to \|b\|$ будет стрелкой тогда и только тогда, когда $R \Vdash a \to b$, то $\boldsymbol{C}/R$ превращается в категорию предпорядка. А если мы определим $\otimes_R$: $\boldsymbol{C}/R \times \boldsymbol{C}/R \to \boldsymbol{C}/R$ как $\|a\| \otimes_R \|b\| = \|a \otimes_R b\|$, то $\otimes_R$ становится ковариантным функтором и $\boldsymbol{C}/R$ будет S-категорией. Принимая в расчет, что $\boldsymbol{C}/R \in \mathrm{CatRES}$, выводим, что стрелка $\|a_1\| \otimes_R \|a_2\| \otimes_R \ldots \otimes_R \|a_n\| \to \|b\|$ из $\boldsymbol{C}/R$ будет CatRES-следствием $R$ тогда и только тогда, когда $R \Vdash a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \to b$. ■

***Следствие***. $\Vdash a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \to b$ тогда и только тогда, когда $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \to b$ будет CatRES-значимой.

## 4. Модальная логика в MN-категориях

Поскольку модальные системы содержат аксиомы классической логики, то ясно, что их категорная интерпретация будет основываться на N-категориях, наделенных дополнительной структурой.

***Определение 1***. MN-категория представляет собой N-категорию $\boldsymbol{C}$, снабженную дополнительно ковариантным функтором $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, таким, что:

(i) $\boldsymbol{M}[a,b] \cong [\boldsymbol{M}a, \boldsymbol{M}b]$ (функтор $\boldsymbol{M}$ сохраняет конечные произведения),

(ii) для любого $a$ из $\boldsymbol{C}$ существует стрелка $a \to \boldsymbol{M}a$ в $\boldsymbol{C}$,

(iii) функтор $\boldsymbol{M}^2$ естественно эквивалентен функтору $\boldsymbol{M}$, т.е. $\boldsymbol{M}^2 \cong \boldsymbol{M}$,

(iv) $\boldsymbol{M}\,0 \cong 0$.

Скелетоном MN-категории является топологическая булева алгебра.

Определим еще один ковариантный функтор $\boldsymbol{L}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ как композицию функторов $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ следующего вида: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{N}$ (т.е. $\boldsymbol{L}a \cong \boldsymbol{NMN}a$). MN-категории обладают следующим свойством:

$\boldsymbol{L}\langle a,b\rangle \cong \langle \boldsymbol{L}a, \boldsymbol{L}b\rangle$, т.е. $\boldsymbol{L}$ сохраняет конечные произведения.

Словарь перевода высказываний в MN-категорию выглядит следующим образом:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\vee\beta$ | $\alpha\wedge\beta$ | $\neg\alpha$ | $\alpha\to\beta$ | $\Diamond\alpha$ | $\Box\alpha$ |
| $a$ | $b$ | $[a,b]$ | $\langle a,b\rangle$ | $\boldsymbol{N}a$ | $[\boldsymbol{N}a,b]$ | $\boldsymbol{M}a$ | $\boldsymbol{L}a$ |

Напомним, что основной прием перевода в N-категории заключается в том, чтобы переводить аксиомы, содержащие несколько связок импликации, в стрелки, заменяя все импликации на $\Rightarrow$, кроме самой внешней, которая заменяется на категорную стрелку $\rightarrow$.

***Определение 2***. Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ будут две MN-категории (с функторами $\mathbf{M},\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}',\mathbf{N}'$ соответственно). MN-функтором $\mathbf{F}:\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ будет называться функтор, для которого имеет место (для $a,b,1$ в $\mathbf{C}$ и для $1'$ в $\mathbf{C}'$):

(i) $\mathbf{F}1 \cong 1'$;

(ii) $\mathbf{F}[a,b] \cong [\mathbf{F}a,\mathbf{F}b]$;

(iii) $\mathbf{FN} = \mathbf{N'F}$;

(iv) $\mathbf{FM} = \mathbf{M'F}$.

Как и раньше, с помощью соответствующей модификации метода дедекиндовых сечений для N-категорий доказываются следующие два предложения:

***Предложение 1.*** *Каждая MN-категория имеет полное расширение (полнота означает здесь наличие бесконечных произведений).*

***Предложение 2.*** *Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ будут MN-категориями, причем $\mathbf{B}$ есть расширение $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ полна. Любой MN-функтор $\mathbf{F}$: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ может быть расширен до MN-функтора $\mathbf{H}$: $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$.*

$\mathbf{C}$ далее будет означать MN-категорию.

Пусть $p$ будет объектом из $\mathbf{C}$ и обозначим как $\mathbf{C}_p$ категорию

$$\mathbf{C}_p=\{\mathbf{M}x\colon p \rightarrow x \text{ есть стрелка в } \mathbf{C}\},$$

с теми же самыми стрелками, что и в $\mathbf{C}$. Заметим, что при этом $p \cong \mathbf{M}p$ и $x \rightarrow p$ есть стрелка в $\mathbf{C}$ для всех $x$ из $\mathbf{C}_p$. Если мы определим $\mathbf{N}_p$: $\mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ как $\mathbf{N}_p x = [\mathbf{N}x,p]$, то получаем, что $\mathbf{N}_p$ будет представлять собой контравариантный функтор, откуда пара $(\mathbf{C}_p,\mathbf{N}_p)$ становится MN-категорией с $p$ в качестве терминального объекта и теми же самыми копроизведениями, что и в $\mathbf{C}$. Определив теперь $\mathbf{M}_p$: $\mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ как $\mathbf{M}_p x = \langle \mathbf{NM}x,p\rangle$, получаем ковариантный функтор $\mathbf{M}_p$, так что $(\mathbf{C}_p,\mathbf{N}_p,\mathbf{M}_p)$ становится MN-категорией. Подобные категории $\mathbf{C}_p$ являются очевидными обобщениями понятия главных идеалов топологической булевой алгебры.

Пусть $E$ будет непустой совокупностью элементов $\mathbf{C}$. Для $n \geq 2$ рассмотрим

$$\langle E_n \rangle = \{\langle p_1, \ldots, p_n\rangle\colon p_i \in E,\ i = 1, \ldots, n\},$$

и определим

$$\langle E\rangle = \cup\ \{\langle E_n\rangle\colon n \geq 2), \qquad (E) = \cup\ \{E_p : p \in \langle E\rangle\}.$$

Доказательство следующих свойств очевидно:

$E \subseteq (E)$;

если $E = \{p\}$, то $(E) = E_p$;

$(E) = \boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $1 \in (E)$ тогда и только тогда, когда существуют объекты $p_1, ..., p_n \in E$, такие, что $[p_1, ..., p_n] \cong 1$;

если $p,q \in (E)$, то $[p,q] \in (E)$;

если $p \in (E)$, то $E_p \subseteq (E)$.

Отметим, что эти $(E)$ являются просто MN-категориальными переводами идеалов топологической булевой алгебры.

Отношение $\sim_E$, определенное как

$p \sim_E q$ *тогда и только тогда, когда* $[\langle p,\boldsymbol{N}q\rangle,\langle \boldsymbol{N}p,q\rangle] \in (E)$,

есть отношение эквивалентности, по которому можно образовать фактор-множество $\boldsymbol{C}/_{(E)}$. Если мы определим в $\boldsymbol{C}/_{(E)}$, что

$\|x\| \to \|y\|$ *есть стрелка* $\boldsymbol{C}/_{(E)}$ *тогда и только тогда, когда*

$\boldsymbol{N}[\boldsymbol{N}x,y] \in (E)$,

то $\boldsymbol{C}/_{(E)}$ становится категорией предпорядка. Если мы определим $\boldsymbol{N}_E$: $\boldsymbol{C}/_{(E)} \to \boldsymbol{C}/_{(E)}$ как $\boldsymbol{N}_E\|x\| = \|\boldsymbol{N}x\|$, то $\boldsymbol{N}_E$ будет контравариантным функтором, откуда пара $(\boldsymbol{C}/_{(E)},\boldsymbol{N}_E)$ становится N-категорией с $\|1\|$ в качестве терминального объекта и копроизведениями $[\|x\|,\|y\|]_E = \|[x,y]\|$.

Определим теперь $\boldsymbol{M}_E$: $\boldsymbol{C}/_{(E)} \to \boldsymbol{C}/_{(E)}$ посредством $\boldsymbol{M}_E\|x\| = \|\boldsymbol{M}x\|$, откуда $\boldsymbol{M}_E$ есть ковариантный функтор, а тройка $(\boldsymbol{C}/_{(E)},\boldsymbol{N}_E,\boldsymbol{M}_E)$ образует MN-категорию. При этом очевидным образом $\boldsymbol{L}_E\|x\| = \|\boldsymbol{L}x\|$. Справедливо следующее предложение:

***Предложение 3.*** ***F***: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}/_{(E)}$, *определенный с помощью* $\boldsymbol{F}x = \|x\|$, *есть MN-функтор*.

***Определение 3***. $(E)$ является *максимальным*, если не существует такого $E' \subseteq$ C, что $(E) \subset (E') \subset \boldsymbol{C}$.

Свойства $(E)$ означает, что это семейство интерпретируется как множество всех опровержимых высказываний теории. Из элементов $E$, называемых ко-аксиомами, выводятся опровержимые высказывания. Отношение $\sim_E$ определяет «меру опровержимости», поскольку оно гласит, что

$x \sim_E y$ тогда и только тогда, когда «$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$» опровержимо.

Точно так же истолковывается определение $\|x\| \to \|y\|$ в $\boldsymbol{C}/_{(E)}$: если мы хотим, чтобы $\neg x \vee y$ было доказуемо, мы должны требовать, чтобы $\boldsymbol{N}[\boldsymbol{N}x,y]$ было опровержимо.

***Определение 4***. MN-категорная интерпретация логики высказываний есть пара ($\boldsymbol{C}$,($E$)), описывающая множество высказываний вместе со множеством опровержимых высказываний.

Рассмотрим теперь пару ($\boldsymbol{C}$,($E$)), являющуюся согласно вышеприведенным построениям категорным переводом модальной логики.

***Определение 5***. Пусть $\boldsymbol{B}$ будет нетривиальной MN-категорией. $\boldsymbol{B}$-оценка есть MN-функтор $\boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$. Элемент $p \in \boldsymbol{C}$ называется *истинным при* $\boldsymbol{V}$, если $\boldsymbol{V}(p) \cong 0$. ($\boldsymbol{C}$,($E$)) *семантически непротиворечива*, если существует оценка $\boldsymbol{V}$, такая, что $p \in E$ влечет $\boldsymbol{V}(p) \cong 0$.

При этих условиях легко доказать, что $\boldsymbol{V}(p) \cong 0$ для всех $p \in (E)$, а также, что применение $\|\boldsymbol{V}\|$: $\boldsymbol{C}/_{(E)} \to \boldsymbol{V}$, задаваемого как $\|\boldsymbol{V}\|\ \|p\| = \boldsymbol{V}p$, определяет MN-функтор.

***Определение 6***. Моделью ($\boldsymbol{C}$,($E$)) называется $\boldsymbol{B}$-оценка $\boldsymbol{V}$, такая, что $\boldsymbol{V}(p) \cong 0$ для всех $p \in E$.

Говоря кратко: модель теории есть структура, в которой аксиомы теории являются значимыми. Тогда ($\boldsymbol{C}$,($E$)) является *семантически непротиворечивой* тогда и только тогда, когда ($\boldsymbol{C}$,($E$)) имеет модель.

***Теорема 1***. ($\boldsymbol{C}$,($E$)) *семантически непротиворечива* тогда и только тогда, когда ($E$) является *собственным*.

***Доказательство***. Пусть ($\boldsymbol{C}$,($E$)) на самом деле будет семантически непротиворечива и пусть $\boldsymbol{V}$ есть ее модель. Поскольку $\boldsymbol{V}(1) \cong 1$ (по свойству MN-функтора) и поскольку $1 \ncong 0$ в силу нетривиальности $\boldsymbol{B}$, то $1 \notin (E)$) и поэтому ($E$)) является собственным. Наоборот, пусть ($E$)) будет собственным. Мы должны сконструировать модель для ($\boldsymbol{C}$,($E$)). Покажем, что существует $E' \subseteq \boldsymbol{C}$, такое, что $(E) \subseteq (E')$, где ($E'$) является максимальным (собственным). Определим теперь

$$\boldsymbol{H} = \{(D)\colon (E) \subseteq (D) \neq \boldsymbol{C}\}.$$

$\boldsymbol{H}$ непуста, потому что $(E) \in \boldsymbol{H}$. Более того, если ($D_\alpha$) есть семейство элементов $\boldsymbol{H}$, тотально упорядоченных по включению, тогда $\cup(D_\alpha) = (\cup(D_\alpha)) \in \boldsymbol{H}$. По лемме Цорна $\boldsymbol{H}$ имеет максимальный элемент ($E'$). Так как ($E'$), то мы имеем либо, либо $\boldsymbol{NM}p \in (E')$ для всех $p \in \boldsymbol{C}$. Теперь не составляет труда доказать, что отображение $\boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, определяемое как

$$\boldsymbol{V}p = \begin{cases} 0, & \textit{если } \boldsymbol{N}p \in (E') \\ 1, & \textit{если } \boldsymbol{MN}p \in (E') \end{cases}$$

есть MN-функтор, который является моделью для ($\boldsymbol{C}$,$(E)$). ■

***Определение*** *7*. ($\boldsymbol{C}$,$(E)$) *семантически полна*, если выполняется следующее условие: $p\in(E)$ тогда и только тогда, когда $p$ истинно во всех моделях ($\boldsymbol{C}$,$(E)$).

***Теорема* 2**. ($\boldsymbol{C}$,$(E)$) семантически полна.

***Доказательство***. Аргументация та же, что и в случае классической логики, с учетом изменения понятия ($\boldsymbol{C}$,$(E)$) для случая модальной логики.

Ясно, что если $p\in E$, тогда $\boldsymbol{V}(p) \cong 0$ для любой оценки $\boldsymbol{V}$. Наоборот, пусть $p\in E$ будет ложным для всех моделей ($\boldsymbol{C}$,$(E)$). Рассмотрим множество $(E\cup\{\boldsymbol{N}p\})$. Если $(E\cup\{\boldsymbol{N}p\}) \neq \boldsymbol{C}$, то логика $(\boldsymbol{C},(E\cup\{\boldsymbol{N}p\}))$ будет непротиворечивой, так что должна существовать модель $\boldsymbol{V}$, которая ввиду $(E)\subseteq(E\cup\{\boldsymbol{N}p\})$ будет также моделью ($\boldsymbol{C}$,$(E)$). Отсюда получаем противоречие: $\boldsymbol{VN}p \cong 0$, потому что $\boldsymbol{N}p\in(E\cup\{\boldsymbol{N}p\})$; $\boldsymbol{VN}p \cong \boldsymbol{NV}p \cong \boldsymbol{N}0 \cong 1$, потому что $\boldsymbol{V}(p) \cong 0$, так как $p$ локально по отношению к $\boldsymbol{V}$. Поэтому ) $(E\cup\{\boldsymbol{N}p\}) = \boldsymbol{C}$, и, следовательно, $p\in(E\cup\{\boldsymbol{N}p\})$. Отсюда следует, что существует $q\in(E)$, такой, что $p \to [q,\boldsymbol{N}p]$. Но $p \to [q,\boldsymbol{N}p]$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $1 \cong [\boldsymbol{N}p,[q,\boldsymbol{N}p]] \cong [p,\boldsymbol{N}q]]$ тогда и только тогда, когда $p \to q$, поэтому $p\in E \subseteq (E)$. ■

## 5. Паранепротиворечивая логика в CN-категориях

В настоящее время существует много паранепротиворечивых логик, поэтому оговоримся сразу, что мы будем иметь дело главным образом с пропозициональным исчислением $C_n$ ($1\leq n\leq\omega$), которое было введено бразильским логиком Н. да Костой [da Costa 1963] в 1963 г. Первая алгебраизация этих логик была получена самим да Костой [da Costa 1966] и позднее исследована им вместе с А.М. Сетте и М. Фиделем. Проблема существования алгебры Линденбаума для $C_n$ оставалась долгое время открытой, пока К. Мортенсен не обнаружил, что не существует отношения эквивалентности для $C_n$, позволяющего получить нетривиальную фактор-алгебру [Mortensen 1980]. В некотором смысле стало очевидным, что алгебраический эквивалент этих исчислений вообще не может быть получен.

В 1984 году В. А. Карниелли и Л. П. Алькантара [Carnielli Alcantara 1984] сформулировали понятие алгебры да Косты, отражающей большинство логических свойств $C_n$. Было показано, что алгебра да Косты изоморфна паранепротиворечивой алгебре множеств, которая могла бы приниматься в качестве эквивалента стоуновской теоремы о представлении для булевых алгебр. Однако подобная аналогия законна только с неклассической точки зрения: некоторые операции в паранепротиворечивой алгебре множеств сформулированы не в обычных теоретико-множественных терминах.

Ввиду того, что наши теоретико-категорные конструкции существенным образом основываются на алгебре да Косты, для дальнейшего употребления приведем полные определения[Carnielli Alcantara 1984, p.81].

***Определение 1***. Под *алгеброй да Косты* будем понимать следующую алгебраическую структуру

$$\mathbf{A} = \langle S, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$$

такую, что для каждых $a,b,c$ в $S$ выполняются следующие условия:

1. $\leq$ есть предпорядок;
2. $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$;
3. если $c \leq a$ и $c \leq b$, то $c \leq a \wedge b$;
4. $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$;
5. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
6. $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$;
7. если $a \leq c$ и $b \leq c$, то $a \vee b \leq c$;
8. $a \wedge (a \supset b) \leq b$;
9. если $a \wedge c \leq b$, то $c \leq (a \supset b)$;
10. $0 \leq a$, $a \leq 1$;
11. $x^0 \leq (x')^0$, где $x^0 = (x \wedge x')'$;
12. $x \vee x' \equiv 1$, где $a \equiv b$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$ и $b \leq a$;
13. $x'' \leq x$, где $x''$ есть сокращение для $(x')'$;
14. $a^0 \leq (b \supset a) \supset ((b \supset a') \supset b')$;
15. $x^0 \wedge (x^0)' \equiv 0$.

Если существует $x \in S$, такой, что неверно, что $x \wedge x' \equiv 0$, то про алгебру $\mathbf{A}$ говорят, что она представляет собой *собственную алгебру да Косты*

***Предложение 1.*** *Если* $\mathbf{A} = \langle S, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$ *является алгеброй да Косты, то имеют место следующие свойства:*

(C1) $y \leq x$ *тогда и только тогда, когда* $x \wedge y \equiv y$;

(C2) $x \wedge 0 \equiv 0$, $x \vee 1 \equiv 1$;

(C3) $x \vee 0 \equiv x$, $x \wedge 1 \equiv x$;

(C4) $x \vee y \equiv y \vee x$, $x \wedge y \equiv y \wedge x$;

(C5) *если* $x = y$, *то* $x \equiv y$;

(C6) *если* $a \equiv b$ *и* $x \equiv y$, *то* $x \wedge a \equiv y \wedge b$;

(C7) *если* $a \equiv b$ *и* $x \equiv y$. *то* $x \vee a \equiv y \vee b$;

(C8) $y \leq x$ *тогда и только тогда, когда* $y \vee x \equiv x$;

(C9) *если* $x \vee y \equiv 0$ *то* $x \equiv 0$ *и* $y \equiv 0$;

(C10) *if* $x \leq y^0$ *и* $x \leq (y^0)'$, *то* $x \equiv 0$;

(C11) $p \vee (p' \wedge p^0) \equiv 1$, $p' \vee (p \wedge p^0) \equiv 1$;

(C12) $x \wedge y \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $x \leq y' \wedge y^0$;

(C13) $x \wedge (y \wedge y^0) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $x \leq y'$;

(C14) $x \wedge x' \wedge x^0 \equiv 0$;

(C15) *если* $x \wedge (x')^0 \equiv 0$, *то* $x \equiv x''$;

(C16) *if* $x' \wedge (x')^0 \equiv 0$ *то* $x \equiv x''$;

(C17) *если* $x \wedge y \equiv 0$, *то* $x \leq y'$;

(C18) *если* $y \equiv y^0$, *то* $x \wedge y \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $x \leq y'$;

(C19) $x \wedge y' \wedge y^0 \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $x \leq y$.

***Доказательство.*** Очевидно. ■

Модификация конструкции N-категории с целью получения так называемых CN-категорий, позволяющих нам передать свойства алгебры да Косты, дает нам возможность получить версию категорной семантики $C_n$. Следует отметить, что существуют альтернативные категорные семантики для паранепротиворечивых логик, например, Мортенсена-Лаверса-Джеймса основывающиеся на когейтинговых алгебрах (см. [Mortensen 1980]).

В дальнейшем мы покажем, что так называемые CN-алгебры, чья конструкция приводится ниже, позволяют преодолеть многие из трудностей, связанных с алгебраизацией паранепротиворечивых логик.

***Определение 2***. CN-категория представляет собой категорию предпорядка $\boldsymbol{C}$, снабженную контравариантным функтором $\boldsymbol{N}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, такую, что

(i) $\boldsymbol{C}$ имеет конечные произведения $\langle -,- \rangle$, копроизведения $[-,-]$ и $\boldsymbol{C}$ дистрибутивна по отношению к ним, т.е. $\langle [a,b],[a,c] \rangle \cong [a, \langle b,c \rangle]$ для любых объектов $a,b,c$ в $\boldsymbol{C}$;

(ii) $\boldsymbol{C}$ имеет терминальный объект 1 и инициальный объект 0, $1 \cong [a, \boldsymbol{N}a]$ and $0 \cong \langle a^0, \boldsymbol{N}a^0 \rangle$, где $a^0 = \boldsymbol{N}\langle a, \boldsymbol{N}a \rangle$;

(iii) для каждого объекта $a$ в $\boldsymbol{C}$ существуют стрелки $\boldsymbol{N}^2 a \to a$ и $a^0 \to (\boldsymbol{N}a)^0$ in $\boldsymbol{C}$;

(iv) $\boldsymbol{C}$ допускает экспоненцирование;

(v) $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $a \Rightarrow b \cong 1$ для любых двух объектов $a,b$ в $\boldsymbol{C}$, где $a \Rightarrow b$ является экспоненциалом;

(vi) для любых двух объектов $a,b$ в $\boldsymbol{C}$ существует стрелка $a^0 \to (b \Rightarrow a) \Rightarrow ((b \Rightarrow \boldsymbol{N}a) \Rightarrow \boldsymbol{N}b)$ в $\boldsymbol{C}$.

Легко проверить, что любая CN-категория имеет следующие свойства:

экспоненциал $a \Rightarrow b$ в $\boldsymbol{C}$ будет резидуалом;

$\boldsymbol{C}$ декартово замкнута;

$y \to x$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $\langle x,y\rangle \cong y$ и $[x,y] \cong x$;

$\langle\langle \boldsymbol{N}a,a_0\rangle,a\rangle \cong 0$, $[\langle \boldsymbol{N}a,a_0\rangle,a] \cong 1$;

каждая CN-категория имеет, по меньшей мере, три объекта.

Дадим интерпретацию в терминах CN-категорий следующего списка аксиом и правил вывода [da Costa 1963, p.3790]:

A1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$ A2. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \supset \gamma))$

A3. $\alpha\wedge\beta \supset \alpha$ A4. $\alpha\wedge\beta \supset \beta$

A5. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha\wedge\beta)$ A6. $\alpha\vee\beta \supset \alpha$

A7. $\alpha\vee\beta \supset \beta$ A8. $((\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta \supset \gamma)$

A9. $\alpha \vee \neg\alpha$ A10. $\neg\neg\alpha \supset \alpha$

A11. $\beta^0 \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg\beta) \supset \neg\alpha))$

A12. $\alpha^0\wedge\beta^0 \supset (\alpha\wedge\beta)^0$

A13. $\alpha^0\wedge\beta^0 \supset (\alpha\vee\beta)^0$ A14. $\alpha^0\wedge\beta^0 \supset (\alpha \supset \beta)^0$

A15. $\alpha^0 \supset (\neg\alpha)^0$

R1. $\dfrac{\alpha,\quad \alpha \supset \beta}{\beta}$

Здесь $\alpha^0$ есть сокращение для $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$. Эта аксиоматика фактически описывает систему $C_1$ паранепротиворечивой логики да Косты.

Примем следующий список в качестве словаря перевода высказываний в CN-категории:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\vee\beta$ | $\alpha\wedge\beta$ | $\neg\alpha$ | $\alpha \supset \beta$ |
| $a$ | $b$ | $[a,b]$ | $\langle a,b\rangle$ | $\boldsymbol{N}a$ | $a \Rightarrow b$ |

Процесс интерпретации аксиом и правил вывода очевиден. Например, интерпретацией $A5$ будет $a \Rightarrow (b \Rightarrow \langle a,b\rangle$. Но утверждение, что это аксиома, означает, что $a \Rightarrow (b \Rightarrow \langle a,b\rangle) \cong 1$, что по (v) дает нам стрелку $a \to b \Rightarrow \langle a,b\rangle$.

Мы получаем исчисление $C_n$, когда подставляем вместо $A11$-$A15$ следующие аксиомы:

A11′. $\beta^{(n)} \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg \beta) \supset \neg\alpha))$

A12′. $\alpha^{(n)}\wedge\beta^{(n)} \supset (\alpha\wedge\beta)^{(n)}$ A13′. $\alpha^{(n)}\wedge\beta^{(n)} \supset (\alpha\vee\beta)^{(n)}$

A14′. $\alpha^{(n)}\wedge\beta^{(n)} \supset (\alpha \supset \beta)^{(n)}$ A15′. $\alpha^{(n)} \supset (\neg\alpha)^{(n)}$

где $\alpha^{(n)}$ $(0\leq n\leq\omega)$ означает $\alpha^1\wedge\alpha^2\wedge\ldots\wedge\alpha^n$ и $\alpha^n$, в свою очередь, означает $\alpha^{00\ldots0}$, где символ $^0$ повторяется $n$ раз.

Нетрудно видеть, что аксиомы $A11'$-$A15'$ будут переводиться в CN-категории как и в случае $C_1$ и их переводы схожим образом будут связаны с категорными свойствами CN-категорий.

***Определение 3.*** Пусть $\boldsymbol{C_N}$ и $\boldsymbol{C_{N'}}$ будут двумя CN-категориями (с функторами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N'}$ соответственно). CN-функтор $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{C_N} \to \boldsymbol{C_{N'}}$ іпредставляет собой функтор, имеющий следующие (для $a,b,$1,0 в $\boldsymbol{C_N}$ и 1′,0′ в $\boldsymbol{C_{N'}}$):

(i) $\boldsymbol{F}0 \cong 0'$;

(ii) $\boldsymbol{F}1 \cong 1'$;

(iii) $\boldsymbol{F}[a,b] \cong [\boldsymbol{F}a, \boldsymbol{F}b]$;

(iv) $\boldsymbol{F}\langle a,b\rangle \cong \langle \boldsymbol{F}a, \boldsymbol{F}b\rangle$;

(v) $\boldsymbol{F}a \Rightarrow b \cong \boldsymbol{F}a \Rightarrow \boldsymbol{F}b$;

(vi) $\boldsymbol{FN} = \boldsymbol{NF}$.

С помощью соответствующей CN-категорной модификации понятий паранепротиворечивой алгебры множеств и фильтров в алгебрах да Косты можно доказать следующие предложение [Carnielli Alcantara 1984, p.81-82]:

***Предложение 2.*** *Каждая CN-категория имеет полное расширение.* (Полнота означает здесь существование бесконечных произведений и копроизведений).

***Предложение 3.*** *Пусть* $\boldsymbol{A,B,C}$ *будут CN-категориями, где* $\boldsymbol{B}$ *является расширением* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{C}$ *является полной. Любой CN-функтор* $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ *может быть расширен до CN-функтора* $\boldsymbol{H}$: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{E}$.

В дальнейшем $\boldsymbol{C}$ будет обозначать CN-категорию.

Пусть $p$ есть объект $\boldsymbol{C}$ и обозначим через $\boldsymbol{C}_p$ категорию

$$\boldsymbol{C}_p = \{x\text{: } p\to x \text{ есть стрелка в } \boldsymbol{C}\},$$

чьи стрелки совпадают со стрелками $\boldsymbol{C}$. Если мы определим $\boldsymbol{N}_p$:$\boldsymbol{C}_p\to \boldsymbol{C}_p$ как $\boldsymbol{N}_px=[\boldsymbol{N}x,p]$, то тогда легко видеть, что $\boldsymbol{N}_p$ будет контравариантным функтором, таким, что пара $(\boldsymbol{C}_p,\boldsymbol{N}_p)$ становится CN-категорией с $p$ в качестве инициального объекта и 1 в качестве терминального. Ясно, что при таком определении $\langle \boldsymbol{N}_pa,a^{0_p}\rangle$ будет играть роль N-функтора в N-категориях, в то время как $\boldsymbol{C}_p$ будет очевидным образом CN-категорным обобщением полных фильтров в алгебре да Косты.

Пусть $\boldsymbol{E}$ будет непустой совокупностью элементов $\boldsymbol{C}$. Для $n \geq 2$ рассмотрим

$$\langle \boldsymbol{E}_n \rangle = \{\langle p_1,...,p_n \colon p_i \in \boldsymbol{E},\ i=1,2,...,n\}$$

и определим

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle = \cup\{\langle \boldsymbol{E}_n \rangle \colon n \geq 2\}, \quad (\boldsymbol{E}) = \cup\{\boldsymbol{E}_p \colon p \in \langle \boldsymbol{E} \rangle\}.$$

Заметим, что в сущности эти $(\boldsymbol{E})$ являются совокупностями CN-категорных переводов фильтров в алгебрах да Косты.

***Определение 4***. $(\boldsymbol{E})$ максимально, если не существует $\boldsymbol{E}' \subset \boldsymbol{C}$, такого, что $(\boldsymbol{E}) \subset (\boldsymbol{E}') \subset \boldsymbol{C}$.

Свойства $(\mathbf{E})$ допускают, что совокупность может быть интерпретирована как множество доказуемых высказываний теории. Элементы $(\boldsymbol{E})$ можно было бы понимать как аксиомы и рассматривать их как порождающие доказуемые высказывания, т.е. аксиомы (и их конъюнкции) «влекут» доказуемые высказывания.

***Определение 5***. *CN-категорная интерпретация* системы $C_n$ представляет собой пару $(\boldsymbol{C},(\boldsymbol{E}))$, которая описывает множество высказываний вместе с доказуемыми высказываниями.

Логика $(\boldsymbol{C},(\boldsymbol{E}))$ *синтаксически непротиворечива*, если не имеет места, что и высказывание и его отрицание одновременно доказуемы, что эквивалентно неравенству $(\boldsymbol{E}) \neq \boldsymbol{C}$. В N-категориях $\langle a,\boldsymbol{N}a \rangle \cong 0$, что ведет к тривиализации логике в случае противоречивости. В CN-категориях $\langle a,\boldsymbol{N}a \rangle \ncong 0$ и имеет место более слабое условие (ii), т.е. $\langle a^0,\boldsymbol{N}a^0 \rangle \cong 0$, что приводит к противоречивости $(\boldsymbol{C},(\boldsymbol{E}))$, но без тривиализации.

Логика $(\boldsymbol{C},(\boldsymbol{E}))$ *синтаксически полна,* если для любого высказывания P мы имеем либо $p \in (\boldsymbol{E})$, либо $\langle \boldsymbol{N}p,p^0 \rangle \in (\boldsymbol{E})$, но не одновременно (взамен $p \in (\boldsymbol{E})$ или $\boldsymbol{N}p \in (\boldsymbol{E})$ в случае N-категорий). Это означает, что невыполнение подобного условия преобразует $(\boldsymbol{E})$ в $(\|0\| \to \|1\|)$, следовательно $(\boldsymbol{E})$ будет максимальным.

Случай теорий с конечным числом аксиом (что может быть сведено к их конъюнкции) дает нам $\boldsymbol{E} = \{p_1,...,p_n\}$ и $(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}_p$ с $p = \langle p_1,...,p_n \rangle$. Отсюда $(\boldsymbol{C},(\boldsymbol{E}))$ является полным тогда и только тогда, когда $p$ является минимальным относительно упорядочения, индуцированного на $\boldsymbol{C}$.

Рассмотрим пару $(\boldsymbol{C},(\boldsymbol{E}))$ – категорный перевод паранепротиворечивой логики. Пусть $\boldsymbol{B}$ будет нетривиальной CN-категорией. Как и в случае N-категорий мы вводим понятие оценки, допускающей, что каждая CN-категория имеет, по меньшей мере, три элемента.

***Определение 6***. ***B****-оценка* есть CN-функтор $\boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, такой, что:

(i) если $\boldsymbol{V}p \ncong 1$, то $\boldsymbol{VN}p \cong 1$;

(ii) если $\boldsymbol{VN}^2 p \cong 1$, то $\mathbf{V}p \cong 1$;

(iii) если $\boldsymbol{V}p^0 \cong \boldsymbol{V}(q \Rightarrow p) \cong \boldsymbol{V}(q \Rightarrow \boldsymbol{N}p) \cong 1$, то $\boldsymbol{V}q \ncong 1$;

(iv) $\boldsymbol{V}(p \Rightarrow q) \cong 1$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{V}p \ncong 1$ или $\boldsymbol{V}q \cong 1$;

(v) $\boldsymbol{V}\langle p,q\rangle \cong 1$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{V}p \cong \boldsymbol{V}q \cong 1$;

(vi) $\boldsymbol{V}[p,q] \cong 1$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{V}p \cong 1$ или $\boldsymbol{V}q \cong 1$;

(vii) если $\boldsymbol{V}p^0 \cong \boldsymbol{V}q^0 \cong 1$, то $\boldsymbol{V}(p \Rightarrow q)^0 \cong \boldsymbol{V}\langle p,q\rangle^0 \cong \boldsymbol{V}[p,q]^0 \cong 1$.

Оценка $\boldsymbol{V}$ называется *сингулярной*, если существует такой $p \in \boldsymbol{C}$, что $\boldsymbol{V}p \cong \boldsymbol{VN}p \cong 1$ и *нормальной* в противном случае. Объект $p \in \boldsymbol{C}$ называется истинным по отношению к $\boldsymbol{V}$, если $\boldsymbol{V}p \cong 0$.

Если ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)), как в случае N-категорий, называлось бы семантически непротиворечивой (т.е. если бы существовала оценка $\boldsymbol{V}$, такая, что $p \in \boldsymbol{C}$ влечет $\boldsymbol{V}p \cong 1$), то по отношению к сингулярной оценке ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)) было бы противоречивой. Но в то же время ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)) будет нетривиальным, поскольку $\langle \boldsymbol{V}p, \boldsymbol{VN}p\rangle \cong \langle 1,1\rangle \cong 1$. В общем случае ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)) будет противоречивым, но нетривиальным, если мы примем во внимание, что любая CN-категория имеет, по меньшей мере, три элемента.

***Определение** 7. Модель* ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)) есть $\boldsymbol{B}$-оценка $\boldsymbol{V}$, такая, что $\boldsymbol{V}p \cong 1$ для всех $p \in \boldsymbol{C}$.

Согласно вышесказанному ($\mathbf{C}$,($\mathbf{E}$)) имеет модель, что не означает, что ($\mathbf{C}$,($\mathbf{E}$)) будет непротиворечивой, но лишь свидетельством ее нетривиальности.

***Определение 8***. ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)) *семантически полна,* если имеет место следующее: $p$ доказуемо (т.е., $p \in$($\boldsymbol{E}$)) тогда и только тогда, когда $p$ истинно во всех моделях ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)).

***Теорема 1.*** ($\boldsymbol{C}$,($\boldsymbol{E}$)) *семантически истинно*.

***Доказательство*** такое же, как в случае N-категорий с $\langle \boldsymbol{N}p, p^0\rangle$вместо $\boldsymbol{N}p$. ■

## 6. Релевантная логика в RN-категориях

Трудности, возникающие на пути интерпретации в категориях предпорядка, связаны еще и с отличием в формулировке понятия импликации в неклассических логиках. Чтобы преодолеть эту трудность, прибегают к интерпретации импликации как *резидуала* относительно некоторой операции. Дело в том, что для большинства логических исчислений справедливо следующее утверждение:

существует бинарная операция $\otimes$, такая, что для всех $a$, $b$, $c$,
$a \otimes b \leq c$ тогда и только тогда, когда $a \leq b \to c$.

При этом операция $\otimes$ обычно соответствует некоторой логической связке (в частности, в случае классической и интуиционистской логик это конъюнкция), хотя в общем случае это необязательно.

В N-категориях роль резидуала выполняет относительное псевдодополнение, в случае же релевантной логики ситуация сложнее: операции $\otimes$ здесь соответствует связка $\circ$ (совместимость или релевантная конъюнкция), которая хотя и производна, но ее алгебраическая модель - операция группоидного умножения. Поскольку алгебраические модели релевантной логики согласно [Максимова 1973] представляют собой т.н. *стримплану*, т.е. дистрибутивную решетку с резидуалом (импликацией) и дополнением, то возникает необходимость наделить N-категорию еще и структурой группоида.

***Определение 1.*** R-категория $\boldsymbol{C}$ есть группоидная категория предпорядка, снабженная ковариантным бифунктором $\otimes$: $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, такая, что:

(i) $\boldsymbol{C}$ имеет конечные произведения $\langle -,- \rangle$ и копроизведения $[-, -]$;

(ii) если $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$, то $a \otimes x \to b \otimes x$ и $x \otimes a \to x \otimes b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ для всех $x$ из $\boldsymbol{C}$;

(iii) для любых $x,y,z$ из $\boldsymbol{C}$ имеет место следующие естественные изоморфизмы:

$$x \otimes [y, z] \cong [x \otimes y, x \otimes z],$$
$$[y, z] \otimes x \cong [y \otimes x, z \otimes x],$$

т.е. бифунктор сохраняет копроизведения;

(iv) в $\boldsymbol{C}$ существует объект 1, такой, что $1 \otimes x \cong x$ и $x \to x \otimes x$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ для всех их $\boldsymbol{C}$;

(v) в $\boldsymbol{C}$ существуют резидуалы ($c$ есть резидуал $a$ относительно $b$, если следующее свойство имеет место: для любого $x$ из $\boldsymbol{C}$, $x \to c$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $x \otimes a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$).

Будем обозначать наибольший резидуал $a$ относительно $b$ как $a \Rightarrow b$. Нетрудно видеть, что резидуал $\Rightarrow$ отличается от относительного псевдодополнения в N-категориях [Riscos Laita 1987, p. 507] тем, что псевдодополнение есть резидуал относительно произведений $\langle$-, -$\rangle$ в категориях предпорядка.

***Определение 2.*** RN-категория есть R-категория, снабженная контравариантным функтором $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, таким, что:

(i) функтор $\boldsymbol{N}^2$ естественно эквивалентен тождеству в $\boldsymbol{C}$, т.е. $\boldsymbol{N}^2 a \cong a$ для любого объекта $a$ из $\boldsymbol{C}$;

(ii) для любых $a,b$ из $\boldsymbol{C}$, $(a \Rightarrow \boldsymbol{N}b)\otimes b \to \boldsymbol{N}a$ и $a \Rightarrow \boldsymbol{N}a \to \boldsymbol{N}a$ суть стрелки в $\boldsymbol{C}$.

RN-категория обладает следующими свойствами:

$\boldsymbol{N}\langle a,b\rangle \cong [\boldsymbol{N}a,\boldsymbol{N}b]$,

$\boldsymbol{N}[a,b] \cong \langle \boldsymbol{N}a,\boldsymbol{N}b\rangle$,

$\boldsymbol{C}$ дистрибутивна, т.е. $[\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle] \cong [a,\langle b,c\rangle]$.

***Теорема 1***. *RN-категория является декартово замкнутой относительно бифунктора $\otimes$ категорией.*

***Доказательство***. Декартова замкнутость относительно бифунктора $\otimes$ означает, что в диаграмме экспоненцирования вместо произведений фигурирует бифунктор $\otimes$, т.е. она выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
(a\Rightarrow b)\otimes a \arrow[r, "ev"] & b \\
c\otimes a \arrow[u, "\hat{g}\otimes 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

В качестве экспоненциала здесь выступает резидуал. Для стрелки $g$: $c\otimes a \to b$ стрелку $\hat{g}$: c $\to a\Rightarrow b$ мы получаем из определения резидуала, а используя $1_a$: $a \to a$ переходим к стрелке $\hat{g}\otimes 1_a$. Рассмотрим теперь стрелку $1_a$: $a \Rightarrow b \to a \Rightarrow b$. Из определения резидуала мы получаем стрелку $(a \Rightarrow b)\otimes a \to b$ которая и будет стрелкой $ev$, замыкая диаграмму. Поскольку конечная полнота следует из пункта (i) определения 1, то RN-категория будет декартово замкнутой относительно бифунктора $\otimes$. ■

В работе [Максимова 1973] пропозициональной регулярной логикой называется любое множество $\boldsymbol{L} \subseteq F_n$ (где $F_n$ – множество формул, содержащих конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание в качестве логических связок), удовлетворяющее условиям: для любых $\alpha,\beta,\gamma\in F_n$

Л1. $(\alpha \to \alpha)\in \boldsymbol{L}$,

Л2. $(\alpha \to \beta)\in \boldsymbol{L}$ влечет $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))\in \boldsymbol{L}$,

Л3. $(\alpha \to \beta)\in \boldsymbol{L}$ влечет $((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))\in \boldsymbol{L}$,

Л4. $\alpha\in \boldsymbol{L}$ и $(\alpha \to \beta)\in \boldsymbol{L}$ влечет $\beta\in \boldsymbol{L}$,

Л5. $\alpha\in \boldsymbol{L}$ влечет $((\alpha \to \beta) \to \beta)\in \boldsymbol{L}$,

Л6. $((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)\in \boldsymbol{L}$,

Л7. $((\alpha \wedge \beta) \to \beta)\in \boldsymbol{L}$,

Л8. $(((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))\in \boldsymbol{L}$,

Л9. $\alpha\in \boldsymbol{L}$ и $\beta\in \boldsymbol{L}$ влечет $(\alpha \wedge \beta)\in \boldsymbol{L}$,

Л10. $(\alpha \to (\alpha \vee \beta))\in \boldsymbol{L}$,

Л11. $(\beta \to (\alpha \vee \beta))\in \boldsymbol{L}$,

Л12. $(((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))\in \boldsymbol{L}$,

Л13. $(((\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))\in \boldsymbol{L}$,

Л14. $((\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha))\in \boldsymbol{L}$,

Л15. $((\neg\neg\alpha \to \alpha))\in \boldsymbol{L}$,

Л16. $((\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta))\in \boldsymbol{L}$,

Л16. Если $\alpha\in \boldsymbol{L}$ и $\beta$ есть результат подстановки некоторых формул вместо переменных в формулу $\alpha$, то $\beta\in \boldsymbol{L}$.

Пропозициональное исчисление называется регулярным пропозициональным исчислением, если множество выводимых в этом исчислении формул составляет регулярную логику. Рассмотрим регулярные пропозициональные исчисления, в которых в качестве аксиом взяты одна или несколько следующих формул:

А1. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$

А2. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

А3. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

Регулярное пропозициональное исчисление с аксиомами А1 и А2 представляет собой исчисление со строгой импликацией. Добавляя сюда А3,мы получаем исчисление R релевантной импликации.

Словарь перевода высказываний в RN-категории будет представлять собой следующий список:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\vee\beta$ | $\alpha\wedge\beta$ | $\neg\alpha$ | $\alpha \to \beta$ |
| $a$ | $b$ | $[a,b]$ | $\langle a,b\rangle$ | $\mathbf{N}a$ | $a \Rightarrow b$ |

Если $a$ есть перевод аксиомы или общезначимой релевантной формулы в RN-категорию $\boldsymbol{C}$, то это означает, что $1 \to a$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$. Однако по определению резидуала существование стрелки $1 \to a \Rightarrow b$ означает, что $1 \otimes a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$. Поскольку же по (iv) $1 \otimes a \cong a$, то отсюда следует, что если, например, перевод аксиомы A1 есть

$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$,

то это эквивалентно

$(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \to (a \Rightarrow b)$.

Применяя подобные преобразования к списку аксиом, мы получаем следующий список стрелок:

C1. $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) \to a \Rightarrow b$

C2. $a \Rightarrow b \to (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

C3. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \to a \Rightarrow c$

Условия C1-C3 в чисто RN-категорном виде перепишутся следующим образом:

G1. $a \otimes b \to (a \otimes b) \otimes b$

G2. $(a \otimes b) \otimes c \to b \otimes (a \otimes c)$

G3. $(a \otimes b) \otimes c \to (a \otimes c) \otimes b$

Что касается условий Л11-Л17, то их категорный перевод не приводит к каким-либо новым условиям на RN-категории, в чем легко можно убедиться, переводя на категорный язык соответствующие выкладки из [Максимова 1973, с. 452].

***Определение 3***. Пусть $\boldsymbol{C}_{\mathbf{RN}}$ и $\boldsymbol{C}'_{\mathbf{RN}}$ будут RN–категориями (с бифункторами $\otimes$ и $\otimes'$ и функторами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$ соответственно). RN-функтор $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{C}_{\mathbf{RN}} \to \boldsymbol{C}'_{\mathbf{RN}}$ есть функтор, обладающий следующими свойствами (для $a,b,1$ из $\boldsymbol{C}_{\mathbf{RN}}$ и $1'$ из $\boldsymbol{C}'_{\mathbf{RN}}$ соответственно):

(i) $\boldsymbol{F}1 \cong 1'$,

(ii) $\boldsymbol{F}\,[a,b] \cong [\boldsymbol{F}a,\boldsymbol{F}b]$,

(iii) $\boldsymbol{F}\langle a,b\rangle \cong \langle \boldsymbol{F}a,\boldsymbol{F}b\rangle$,

(iv) $\boldsymbol{F}(a \otimes b) \cong \boldsymbol{F}\mathrm{a} \otimes \boldsymbol{F}\mathrm{b}$,

(v) $\boldsymbol{FN} = \boldsymbol{N'F}$.

Доказательства следующих двух предложений получаются путем соответствующей категорной модификации алгебраических результатов из [Максимова 1973], основанных на понятии стрим-планы, RPg-пространства и импликативно-негативного группоида.

***Предложение 1***. *Каждая RN-категория имеет полное расширение* (*полнота означает здесь существование бесконечных произведений и копроизведений*).

***Набросок доказательства***. Пусть $\mathbf{A}$ будет RN-категорией и пусть $\boldsymbol{S}_1$ будет множеством

$$\boldsymbol{S}_1 = \{x\colon 1 \to x \text{ есть стрелка в } \mathbf{A}\}.$$

Рассмотрим множество $\boldsymbol{C}_0$ фильтров на $\boldsymbol{C}$, т.е. таких $C \subseteq \boldsymbol{C}$, что

(a) если $x \in C$ и $x \to y$ есть стрелка в $C$, то $y \in C$;

(b) $C$ замкнуто относительно произведений, т.е. $x,y \in C$ влечет $\langle x,y\rangle \in C$.

Обозначим теперь через $\boldsymbol{C}_1$ семейство всех простых фильтров на $\boldsymbol{C}$ (т.е. таких $C \subseteq \boldsymbol{C}_0$, что если $[x,y] \in C$, то $x \in C$ либо $y \in C$). Пополняя $\boldsymbol{C}_1$ до $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}_1 \cup \boldsymbol{C}$ и определяя на $\mathbf{C}_2$ стрелки как отношение включения, получаем категорию предпорядка $\boldsymbol{C}'$. При этом множество будет плотным, что означает, что $(\forall x,y \in C)(\forall w \in \boldsymbol{C}_2)(w \to x \otimes y$ есть стрелка в $C$, если $((\exists u \in \boldsymbol{C}_2)(u \to x$ и $w \to u \otimes y$ есть стрелки в $C)$ и $(\exists v \in \boldsymbol{C}_2)(v \to y$ и $w \to x \otimes v$ есть стрелки в $\boldsymbol{C}_1))$. Произведения и копроизведения на $\boldsymbol{C}'$ определяются как пересечения и объединения простых фильтров, а отображение

$$\bullet\colon \boldsymbol{C}_1 \times \boldsymbol{C}_2 \mapsto \boldsymbol{C}_1 \bullet \boldsymbol{C}_2 = \{x\colon \exists y \in \mathbf{C}_2(y \to z \in \mathbf{C}_1)\}$$

представляющее собой ковариантный бифунктор вместе с

$$1_{\boldsymbol{C}'} = \bigcap_{\boldsymbol{S}_1 \subseteq \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{C}_2} \boldsymbol{C}$$

приводят к тому, что $\mathbf{C}'$ становится R–категорией. Чтобы превратить ее в RN-категорию, определяем отображение:

$$\boldsymbol{N}\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{NC} = \{x\colon x \in \boldsymbol{C} \text{ и } \boldsymbol{N}x \in \boldsymbol{C}\},$$

которое дает нам контравариантный $\boldsymbol{N}$–функтор.

Таким образом, мы приходим к заключению, что полное расширение определяется парами $(q,\boldsymbol{C})$, где $q \in \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C}$ есть простой ультрафильтр. ■

***Предложение 2***. *Пусть $\boldsymbol{C},\boldsymbol{B},\boldsymbol{S}$ будут RN-категориями, где $\boldsymbol{B}$ есть расширение $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{S}$ есть полная категория. Любой RN-функтор $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{S}$ может быть расширен до RN-функтора $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{S}$.*

***Набросок доказательства***. Определяем семейство пар $(\boldsymbol{D},\boldsymbol{K})$, где $\boldsymbol{D}$ есть подкатегория $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{K}$ есть RN-функтор, расширяющий $\boldsymbol{G}$. Применяя лемму Цорна, получаем максимальный элемент $(\boldsymbol{B}',\boldsymbol{G})$. Если $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}'$, то возьмем $b \in \boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{B}'$ и сконструируем $\boldsymbol{B}'' = \{[\langle b,p\rangle,\langle \boldsymbol{N}b,q\rangle]\colon p,q \in \boldsymbol{B}'\}$, которая будет представлять собой RN-категорию, что входит в явное противоречие с максимальностью $\boldsymbol{B}'$ $([\langle b,p\rangle,\langle \boldsymbol{N}b,q\rangle] = (b \cap q) \cup (\boldsymbol{N}b \cap q)$, т.е. опять простой ультрафильтр). ■

Далее везде $\boldsymbol{E}$ будет означать RN-категорию.

Пусть $p$ есть объект $\boldsymbol{E}$ и пусть $\boldsymbol{S}_p$ обозначает категорию

$$\boldsymbol{S}_p = \{x: p \to x \text{ есть стрелка в } \boldsymbol{E}\},$$

чьи стрелки те же, что и в $\boldsymbol{E}$. Если определить $\otimes_p$ как $\otimes_p$: $\boldsymbol{S}_p \times \boldsymbol{S}_p \to \boldsymbol{S}_p$ посредством $x \otimes_p y = [x \otimes y, p]$, то нетрудно видеть, что $\otimes_p$ будет представлять собой ковариантный бифунктор, такой, что пара $(\boldsymbol{S}_p, \otimes_p)$ становится R-категорий с теми же произведениями и копроизведениями, что и в $\boldsymbol{E}$. Если же мы теперь определим $\boldsymbol{N}_p$: $\boldsymbol{S}_p \to \boldsymbol{S}_p$ как $\boldsymbol{N}_p x = [\boldsymbol{N}x, p]$, то получим контравариантный функтор $\boldsymbol{N}_p$ и тройка $(\boldsymbol{S}_p, \otimes_p, \boldsymbol{N}_p)$ становится RN-категорией.

Пусть $\boldsymbol{S}$ будет непустым семейством элементов $\boldsymbol{E}$. Для $n \geq 2$ определяем

$$\langle \boldsymbol{S}_n \rangle = \{\langle p_1, \dots, p_n \rangle : p_i \in \boldsymbol{S},\ i = 1,2,3, \dots, n\}$$

и определяем

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \bigcup \{\langle \boldsymbol{S}_n \rangle : n \geq 2\},\ (\boldsymbol{S}) = \bigcup \{\boldsymbol{S}_p : p \in \langle \boldsymbol{S} \rangle\}.$$

Отметим, что $(\boldsymbol{S})$ здесь не что иное, как RN-категорный перевод простых фильтров в импликативных группоидах из [Максимова 1973].

Отношение $\sim_{\boldsymbol{S}}$, определяемое как

$$p \sim_{\boldsymbol{S}} q \text{ тогда и только тогда, когда } p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p \in (\boldsymbol{S}),$$

есть отношение конгруэнтности, приводящее нас к фактор-категории $\boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$. Если же мы определим в $\boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$

$$\|x\| \to \|y\| \text{ есть стрелка тогда и только тогда, когда } x \Rightarrow y \in \boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$$

то $\boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$ становится категорией предпорядка. Если мы теперь определим $\otimes_{\boldsymbol{S}}$: $\boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})} \times \boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})} \to \boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$ посредством $\|x\| \otimes_{\boldsymbol{S}} \|y\| = \|x \otimes y\|$ и $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{S}}$: $\boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})} \to \boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$ посредством $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{S}} \|x\| = \|\boldsymbol{N}x\|$, то $\otimes_{\boldsymbol{S}}$ и $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{S}}$ суть ковариантный бифунктор и контравариантный функтор соответственно, а тройка $(\boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}, \otimes_{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{S}})$ есть RN-категория с $\|1\|$ в качестве левой единицы R-категории и произведениями $\langle \|x\|, \|y\| \rangle_{\boldsymbol{S}} = \|\langle x, y \rangle\|$ и копроизведениями $[\|x\|, \|y\|] = \|[x, y]\|$ соответственно.

Справедливо следующее предложение:

***Предложение 3***. *$\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$, определенный как $\boldsymbol{F}x = \|x\|$, есть RN-функтор.*

***Определение 3***. $(\boldsymbol{S})$ является максимальным, если не существует $\boldsymbol{S}' \subseteq \boldsymbol{S}$, такого, что $(\boldsymbol{S}) \subset (\boldsymbol{S}') \subset \boldsymbol{E}$.

Свойства $(\boldsymbol{S})$ позволяют интерпретировать его как множество доказуемых высказываний теории. Элементы $\boldsymbol{S}$ получают в этом случае имя RN-аксиом и рассматриваются как образующие множества $(\boldsymbol{S})$, аналогично тому, как аксиомы генерируют доказуемые высказывания (формулы). В роли правильно построенных формул (ппф) фигурирует множество объектов категории $\boldsymbol{E}$.

***Определение 4***. RN-категорная интерпретация релевантной логики представляет собой пару ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)), описывающую множество всех ппф и множество доказуемых следствий.

Будем говорить, что RN-логика ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) (синтаксически) непротиворечива, если $(\boldsymbol{S}) \neq \boldsymbol{E}$.

RN-логика ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) (синтаксически) полна, если для любого RN-высказывания $p$ либо $p\in(\boldsymbol{S})$, либо $\boldsymbol{N}p\in(\boldsymbol{S})$, но не одновременно. Это эквивалентно тому факту, что либо $p \sim_{\boldsymbol{S}} 1$, либо $\boldsymbol{N}p \sim_{\boldsymbol{S}} 1$.

В случае конечного числа аксиом (которые могут быть сведены к одной, представляющей собой их конъюнкцию) мы имеем $\boldsymbol{S} = \langle p_1, \ldots ,p_n\rangle$ и $(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}_p$ с $p = \langle p_1, \ldots ,p_n\rangle$ и справедливы следующих три утверждения:

($\boldsymbol{E},\boldsymbol{S}_p$) непротиворечива, если $1 \to p$ есть стрелка в $\boldsymbol{E}$,

($\boldsymbol{E},\boldsymbol{S}_p$) полна тогда и только тогда, когда $p$ является минимальным в упорядочении, индуцированным в $\boldsymbol{E}$ предупорядоченной природой стрелок, и

($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) непротиворечива тогда и только тогда, когда ($\boldsymbol{E},\boldsymbol{S}_p$) непротиворечива для всех $p\in(\boldsymbol{S})$

Последний результат можно рассматривать как своеобразный вариант теоремы компактности.

Пусть теперь пара ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) представляет собой перевод релевантной логики, т.е. ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) есть RN-логика и пусть $\boldsymbol{E}$ будет нетривиальной RN-категорией.

***Определение 5***. $\boldsymbol{B}$–оценка представляет собой RN–функтор $\boldsymbol{v}$:$\boldsymbol{E}\to \boldsymbol{B}$. Элемент $p\in\boldsymbol{E}$ будет истинным по отношению к $\boldsymbol{v}$, если $\boldsymbol{v}p\in\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}{}_1$, где $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}{}_1 = \{x\colon 1 \to x$ есть стрелка в $\boldsymbol{B}\}$. RN–логика ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) семантически непротиворечива, если существует оценка $\boldsymbol{v}$, такая, что $p\in\boldsymbol{S}$ влечет $\boldsymbol{v}p\in\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}{}_1$.

При выполнении этих условий легко доказать, что $\boldsymbol{v}p\in\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}{}_1$ для всех $p\in(\boldsymbol{S})$, а также, что функтор $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}/_{(\boldsymbol{S})}$, определенный как $||\boldsymbol{v}||\ ||p|| = \boldsymbol{v}p$, будет RN–функтором.

***Определение 6***. Моделью ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) является $\boldsymbol{B}$–оценка $\boldsymbol{v}$, такая, что $\boldsymbol{v}p\in\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}{}_1$ для всех $p\in\boldsymbol{S}$.

Таким образом, суммируя, получаем, что ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) является семантически непротиворечивой тогда и только тогда, когда ($\boldsymbol{E}$,($\boldsymbol{S}$)) имеет модель.

***Теорема 2***. (***E***,(***S***)) *семантически непротиворечива тогда и только тогда, когда* (***S***)) *есть собственное множество.*

***Доказательство***. Пусть (***E***,(***S***)) будет семантически непротиворечива и пусть ***v*** будет ее моделью. Поскольку ***v***$1 \cong 1'$ (по свойству ***N***-функтора) и поскольку $\neg(1 \cong$ ***N***$1)$ ввиду того, что ***B*** нетривиальна, то ***N***$1\in$(***S***) и, следовательно, (***S***) является собственным. Наоборот, пусть (***S***) будет собственным. Доказательство проводим как в [Максимова 1973]. Сконструируем модель (***E***,(***S***)). Допустим, что существует ***S′***$\in$***E***, такое, что (***S***) $\subseteq$ (***S′***), где (***S′***) будет максимальным (собственным). Определим теперь

$$\boldsymbol{H} = \{(\boldsymbol{D}): (\boldsymbol{S}) \subseteq (\boldsymbol{D}) \neq \boldsymbol{E}\}.$$

***H*** непусто, ибо (***S***)$\in$***H***. Более того, если ($\boldsymbol{D}_\alpha$) есть семейство элементов ***H***, линейно упорядоченное по включению, то тогда $\bigcup(\boldsymbol{D}_\alpha) = (\bigcup(\boldsymbol{D}_\alpha))$. По лемме Цорна ***H*** имеет максимальный элемент (***S′***), что означает, что либо $p\in$(***S′***), либо ***N***$p\in$(***S′***) для всех (***S′***). Теперь определяем отображение ***v***: ***E*** $\to$ ***B*** условием ***v***$p\in\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}{}_1$, если $p\in$(***S′***), либо ***v***$p\notin\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{B}}{}_1$, если ***N***$p\in$(***S′***). Это дает нам RN–функтор, который и является моделью (***E***,(***S***)). ■

***Определение 7***. (***E***,(***S***) семантически полна, если выполняется следующее условие: $p$ доказуемо (т.е. $p\in$(***S***) ) тогда и только тогда, когда $p$ истинно во всех моделях (***E***,(***S***).

***Теорема 3***. (***E***,(***S***)) *семантически полна.*

***Доказательство***. Очевидно, что если $p\in$(***S***), то ***v***$p\in\boldsymbol{S}^{(-)}{}_1$ для всех оценок ***v***. Наоборот, пусть $p\in$***S*** будет истинным во всех моделях (***E***,(***S***)). Определим множество (***S***$\cup$(***N***$p$)). Если (***S***$\cup$(**N**$p$)) $\neq$ ***E***, то RN–логика (***E***,(***S***$\cup$(***N***$p$)) будет непротиворечивой и будет иметь модель ***v***, которая, ввиду (***S***)$\subseteq$(***S***$\cup$(***N***$p$)), должна также быть моделью (***E***,(***S***)). Отсюда получаем противоречие: ***vN***$p\in\boldsymbol{S}^{(-)}{}_1$ поскольку ***N***$p\in$(***S***$\cup$(***N***$p$)) (***vN***$p \cong$ ***Nv***$p\in\boldsymbol{S}^{(-)}{}_1$ по свойствам RN- и R-функторов соответственно). Поэтому (***S***$\cup$(***N***$p$))= ***E*** и отсюда $p\in$(***S***$\cup$(***N***$p$)). Тогда существует такое $q\in$(***S***), что $[q,$***N***$p] \to p$ есть стрелка. Но отсюда ввиду $q \to [q,$***N***$p]$ получаем стрелку $q \to p$, следовательно, $q\in\boldsymbol{S}_p\subseteq$ (***S***). ■

# Глава шестая. Интерпретация секвенций в ситусах

## 1. Предтопологии в категориях предпорядка

В предыдущем разделе была описана интерпретация классической логики в N-категориях. Последние представляют собой категории предпорядка, снабженные контравариантными функторами, выполняющими функцию отрицания. Идя по этому пути, мы можем рассматривать алгебру Гейтинга как категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором, отображающим каждый элемент алгебры в его интуиционистское отрицание. При этом мы очевидным образом можем без особых затруднений переформулировать все свойства алгебры Гейтинга в подобных N-категориях.

Более интересно то обстоятельство, что в полученных N-категориях мы можем естественным образом интерпретировать секвенциальную формулировку интуиционистской логики. Главная идея такого подхода может быть пояснена чисто алгебраически, с помощью понятия *предтопологии*. Для алгебры Гейтинга H предтопология на H представляет собой функцию, сопоставляющую каждому элементу $p$ совокупность $Cov(p)$ множеств элементов (покрытий), таких, что:

(i) $p \in Cov(p)$;

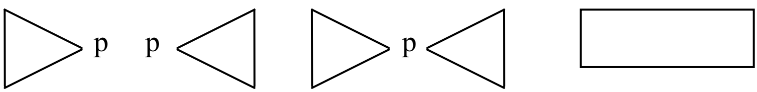
(ii) если $\{p_j: p_j \leq p$ и $i \in I\} \in Cov(p)$ и для любого $i \in I$ имеет место $\{p^i_j: p^i_j \leq p_i$ и $j \in J_i\} \in Cov(p)$, то $\{p^i_j: p^i_j \leq p$ и $i \in I$ и $j \in J_i\} \in Cov(p)$;

(iii) если $r, q \in Cov(p_i)$ то $r \wedge q \in Cov(p)$, и наоборот.

Легко видеть, что мы можем отождествить список формул Г некоторой секвенции $\Gamma \to \alpha$ с элементами предтопологии на H. Тогда правило сечения из секвенциальной формулировки, например, может рассматриваться как следствие условия (ii) нашего определения. Но более элегантно подобная интерпретация выглядит в N-категориях, поскольку там покрытия будут представлять собой совокупности множеств стрелок $\{p_j \rightarrow p\colon i \in I\}$

Преимущество подобной интерпретации становится более очевидным, если мы рассмотрим случаи алгебры Брауэра и HB-алгебры. Согласно предложенному подходу, чтобы интерпретировать соответствующую логику в алгебре Брауэра, мы должны использовать дуальную конструкцию копредтопологии и копокрытия. Далее, подобная предтопология в случае HB-алгебры превращается в бипредтопологию с некоторыми элементами в качестве общего “центра” покрытий и копокрытий, и если рассматривать бипокрытия лишь как совокупности множеств, то легко можно упустить из виду эти “центры”.

В случае классической логики ситуация еще более усложняется, поскольку в классических секвенциях списки формул фигурируют в обеих частях секвенции. Соответственно мы приходим к заключению, что наша предтопология здесь превращается в полипредтопологию и мы должны рассматривать полипокрытия, когда каждый элемент является членом покрытия и копокрытия одновременно. Интуитивный смысл сказанного может быть пояснен с помощью следующего рисунка:




**алгебра Гейтинга** **алгебра Брауэра** **HB-алгебра** **булева алгебра**

Поскольку в теоретико-категорной формулировке (в отличие от алгебраической) понятие предтопологии входит составной частью в определение *ситуса* (см. [Гольдблатт 1983, с. 386]), то мы получаем еще один аргумент в пользу N-категорного подхода.

Наконец, мы можем перенести эти конструкции в любые декартово замкнутые категории ввиду имеющейся возможности перейти от категорий предпорядка к так называемым категориям путей. Это позволяет нам избежать обвинения в слишком узком традиционном рассмотрении категорий.

## 2. Секвенции в Н-ситусах (интуиционистская логика)

Рассмотрим теперь секвенциальную формулировку LJ интуиционистской логики согласно [Такеути 1978]. Начальные секвенции LJ имеют вид $\alpha \to \alpha$ для любой пропозициональной переменной $\alpha$. Правила вывода имеют следующий вид:

$$\frac{\Gamma \to \gamma}{\alpha,\Gamma \to \gamma}\ (\text{ослабление} \to) \qquad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to \gamma}\ (\to \text{ослабление})$$

$$\frac{\alpha,\alpha,\Gamma \to \gamma}{\alpha,\Gamma \to \gamma}\ (\text{сокращение}) \qquad \frac{\Gamma,\alpha,\beta,\Delta \to \gamma}{\Gamma,\beta,\alpha,\Delta \to \gamma}\ (\text{перестановка})$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha,\Delta \to \gamma}{\Gamma,\Delta \to \gamma}\ (\text{сечение})$$

$$\frac{\alpha,\Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta}\ (\to \supset) \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta,\Delta \to \gamma}{\alpha \supset \beta,\Gamma,\Delta \to \gamma}\ (\supset \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \alpha\vee\beta}\ (\to \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha\vee\beta}\ (\to \vee 2)$$

$$\frac{\alpha,\Gamma \to \gamma \quad \beta,\Gamma \to \gamma}{\alpha\vee\beta,\Gamma \to \gamma}\ (\vee \to) \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha\wedge\beta}\ (\to \wedge)$$

$$\frac{\alpha,\Gamma \to \gamma}{\alpha\wedge\beta,\Gamma \to \gamma}\ (\wedge \to 1) \qquad \frac{\beta,\Gamma \to \gamma}{\alpha\wedge\beta,\Gamma \to \gamma}\ (\wedge \to 2)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\neg\alpha,\Gamma \to}\ (\neg \to) \qquad \frac{\alpha,\Gamma \to}{\Gamma \to \neg\alpha}\ (\to \neg)$$

Для интерпретации в терминах Н-категорий данного списка правил нам потребуется ввести некоторые новые понятия. Пусть, как и раньше, ***C*** будет Н-категорией.

***Определение 1***. Предтопология на ***C*** есть функция, сопоставляющая каждому ***C***-объекту $p$ совокупность $Cov(p)$ множеств ***C***-стрелок с концом в $p$ (покрытий), таких, что:

(i) $1_p \in Cov(p)$;

(ii) если $\{p_i \to p\colon i\in I\}$ и для любого $i\in I$ мы имеем $\{p^i_j \to p_i\colon j\in J_i\} \in Cov(p_i)$, то $\{p^i_j \to p_i\colon i\in I\ \&\ j\in J_i\} \in Cov(p)$;

(iii) если $r\to p$, $q\to p \in Cov(p)$, то $\langle r,q\rangle \to p \in Cov(p)$, и наоборот ($\langle$-,-$\rangle$-замкнутость).

Нетрудно проверить, что наша предтопология будет предтопологией Гротендика и, более того, пара (***C***,$Cov$) есть *ситус*.

Теперь наша главная идея заключается в отождествлении секвенций с покрытиями. Поэтому мы переводим любую произвольную секвенцию $\Gamma\to\alpha$ как $Cov(a)$, где $a$ является Н-категорным переводом формулы $\alpha$.

Единственной проблемой является существование N-функтора в наших Н-категориях, поскольку мы должны описать взаимодействие N-функтора и покрытий в ситусе (C,*Cov*). Поэтому мы налагаем на предтопологию еще одно ограничение:

(iv) каждое $Cov(p)$ максимально по отношению к N-функтору, т.е. либо $a \in Cov(p)$, либо $\mathbf{N}a \in Cov(p)$, но не одновременно.

***Теорема 1***. *Все аксиомы и* правила *LJ могут быть интерпретированы в ситусе* ($\mathbf{C}$,*Cov*)*, где* $\mathbf{C}$ *есть Н-категория*.

Доказательство. Аксиома: следует из 1(i).

(ослабление $\rightarrow$): по 1(iii) и в силу произвольности наших множеств индексов. Фактически это просто означает добавление произвольного члена $c \rightarrow a$ в $Cov(a)$.

($\rightarrow$ослабление): $\Gamma \rightarrow$ мы интерпретируем как $Cov(0) = \{a_i \rightarrow 0: i \in I\}$, где $a_i$ есть интерпретация формул из $\Gamma$. 1 есть инициальный объект, поэтому мы имеем $a_i \rightarrow 0 \rightarrow a$ и по 1(ii) любое $Cov(0)$ порождает $Cov(a)$.

(сокращение): так как наше множество индексов $I$ не является мультимножеством и ввиду того, что $a \cong \langle a \wedge a \rangle$ в Н-категориях.

(перестановка): ввиду неупорядоченности множества индексов.

(сечение): является следствием 1(ii).

($\rightarrow\supset$): следует из того, что в Н-категориях существует стрелка $b \rightarrow a \Rightarrow b$.

($\supset\rightarrow$): по $\langle a,b \rangle \rightarrow b$ и 1(ii)-(iii) мы получаем, что $Cov(a) \subseteq Cov(c)$ (где $a,c$ являются переводами $\alpha,\gamma$ соответственно). Затем по $\langle a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \rangle \rightarrow a \Rightarrow c$ и по 1(ii)-(iii) мы получаем $a \Rightarrow b \rightarrow Cov(c)$.

($\rightarrow\vee$1),($\rightarrow\vee$2): по $a \rightarrow [a,b]$ и $[a,b] \rightarrow [b,a]$.

($\vee\rightarrow$): используя диаграмму определения [-,-].

($\wedge\rightarrow$1),($\wedge\rightarrow$2): по $\langle a,b \rangle \rightarrow \langle b,a \rangle$ и $\langle a,b \rangle \rightarrow a$.

($\rightarrow\wedge$): по определению произведений в $\mathbf{C}$ мы имеем

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ a & \langle a,b \rangle \arrow[l] \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

и, следовательно, $Cov(a)$ и $Cov(b)$ будут $Cov(\langle a,b \rangle)$ с $\langle a,b \rangle \rightarrow a$ и $\langle a,b \rangle \rightarrow b$ соответственно.

($\neg\rightarrow$): Так как $\langle a, \mathbf{N}a \rangle \cong 0$ и 0 является инициальным $\mathbf{C}$-объектом, то мы имеем $0 \rightarrow a \in Cov(a)$ и $\langle a, \mathbf{N}a \rangle \rightarrow a \in Cov(a)$. Затем из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \langle\langle a,\mathrm{N}a\rangle,a_i\rangle & \longrightarrow & a_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle a,\mathrm{N}a\rangle & \longrightarrow & a \end{array}$$

легко можно видеть, что по 1(ii) мы получаем $\mathbf{N}a \to 0 \in Cov(0)$ и $\{a_i \to 0\colon i\in I\}\in Cov(0)$ и множество $I$ индексов здесь то же, что и для $Cov(a)$. Следовательно, мы получили интерпретацию нижних секвенций, используя 1(iv).

($\to\neg$): вновь мы используем $\langle a,\mathbf{N}a\rangle \cong 0$ и $\langle a,\mathbf{N}a\rangle \to \mathbf{N}a$. Ввиду $\langle\langle a,\mathbf{N}a\rangle,a_i\rangle \to \langle a,\mathbf{N}a\rangle$ мы из $\langle\langle a,\mathbf{N}a\rangle,a_i\rangle \to \langle a,\mathbf{N}a\rangle \to \mathbf{N}a$ и по 1(iii) получаем $\{a_i \to \mathbf{N}a\colon i\in I\}\in Cov(\mathbf{N}a)$. Затем мы используем 1(iv).■

Обычно каждая секвенция $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \to \beta$ имеет формульный эквивалент $\alpha_1\wedge \ldots \wedge\alpha_m \supset \beta$. Наше свойство 1(iii) дает нам, фактически, одно-однозначное отображение $f_H$: $Cov \to Form$, где $Form$ есть множество переводов формул, определенное для каждого покрытия как $Cov(a) \mapsto (\prod_{i\in I} a_i) \Rightarrow a$. Однако существуют некоторые неклассические исчисления (напр., Айдукевича-Ламбека), где при интерпретации в соответствующих категориях предпорядка отсутствуют произведения и проблема взаимоотношения формульных эквивалентов и покрытий вследствие этого усложняется.

Тем не менее, в нашем случае существование подобных эквивалентов делает наши последующие шаги тривиальными, и мы получаем теорему полноты путем использования $f_H$ стандартным образом.

### 3. Секвенции в коситусах (логика Брауэра)

Понятие копокрытий дуально по отношению к понятию покрытий в алгебре Гейтинга. Теперь мы будем работать с дуальными конструкциями в алгебре Брауэра. Последняя дуальна к алгебре Гейтинга и имеет структуру $\mathbf{B} = \langle B,\wedge,\vee,\dot{-},1\rangle$, где $a \dot{-} b$ есть псевдодополнение $a$ относительно $b$. Соответствующие категорные аналоги выглядят следующим образом.

***Определение 1***. **B**-категория **C** является конечной кополной декартово козамкнутой категорией предпорядка, т.е. для любых $a,b$ из **C** существует **C**-объект $\Leftarrow$ (коэкспоненциал) и **C**-стрелка $ev^{o}$: $b \to [a \Leftarrow b,a]$ (стрелка кооценки), такая, что для любого объекта $c$ в **C** следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{[a \Leftarrow b,a]} \arrow[d, "\breve{g}+1_a"'] & & b \arrow[ll, "ev^{o}"'] \arrow[dll, "g"] \\
{[c,a]} & &
\end{tikzcd}$$

будет коммутативна, т.е.$(\breve{g}+1_a)\circ ev^{o} = g$.

***Определение 2***. BN-категория $\boldsymbol{C}$ является B-категорией, снабженной контравариантным функтором $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, таким, что:

(i) $\boldsymbol{N}a = a \Leftarrow 1$;

(ii) $\boldsymbol{N}(a \to b) = \boldsymbol{N}b \to \boldsymbol{N}a$;

где $\Leftarrow$ есть коэкспоненциал, и мы полагаем, что:

(iii) $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $a \Leftarrow b \cong 0$ для любых двух объектов $a,b$ из $\boldsymbol{C}$.

Напомним, что Н. Гудменом [Goodman 1981] была предложена система логики Брауэра, которая в [Смирнов 1987, с.223] сформулирована в виде секвенциального исчисления LB (см. параграф 8, глава первая). С соответствующими изменениями LB может быть переписана как секвенциальное исчисление с начальной секвенцией единственного вида $\alpha \to \alpha$ и следующими добавочными правилами:

$$\frac{\to \Gamma}{\alpha \to \Gamma,}\ (\to \text{ослабление})$$

$$\frac{\alpha \to \Gamma}{\to \Gamma, \text{г}\alpha}\ (\to \text{г}) \qquad\qquad \frac{\to \Gamma, \alpha}{\text{г}\alpha \to \Gamma}\ (\text{г} \to)$$

где г есть брауэровское отрицание.

Интерпретация в терминах BN-категорий будет основываться на следующей модификации определенного нами ранее словаря перевода высказываний интуиционистской логики в H-категорию:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha\wedge\beta$ | $\alpha\vee\beta$ | $\text{г}\alpha$ | $\alpha \dot{-} \beta$ |
| $a$ | $b$ | $\langle a,b\rangle$ | $[a,b]$ | $\boldsymbol{N}a$ | $a \Leftarrow b$ |

***Определение 3***. Копредтопология на $\boldsymbol{C}$ есть функция, сопоставляющая каждому $\boldsymbol{C}$-объекту $p$ совокупность $CoCov(p)$ множеств $\boldsymbol{C}$-стрелок с началом в $p$ (копокрытий), таких, что:

(i) $1_p \in CoCov(p)$;

(ii) если $\{p \to p_i: i \in I\}$ и для любого $i \in I$ мы имеем $\{p_i \to p^i_j: j \in J_i\} \in CoCov(p_i)$, то $\{p \to p^i_j: i \in I \ \&\ j \in J_i\} \in CoCov(p)$;

(iii) если $p \to r, p \to q \in CoCov(p)$, то $[r,q] \to p \in CoCov(p)$, и наоборот ([-,-]-замкнутость).

Из нашего определения следует, что пара (C,*Cov*) есть *коситус*. Как и в случае H-категорий, мы налагаем еще одно ограничение на копредтопологию:

(iv) каждое $CoCov(p)$ максимально по отношению к N-функтору, т.е. либо $a \in CoCov(p)$, либо $\mathbf{N}a \in CoCov(p)$, но не оба одновременно.

***Теорема 1****. Все аксиомы и правила LB могут быть интерпретированы в коситусе* (C,*CoCov*)*, где* **C** *есть BN-категория.*

***Доказательство***. Все доказывается дуально к соответствующим случаям интерпретации в H-ситусе. ■

Формульным эквивалентом каждой секвенции $\beta \to \alpha_1, \dots, \alpha_m$ будет $\beta \dot{-} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m$. Для каждого копокрытия мы определяем одно-однозначное отображение $f_{Br}$: $CoCov \to Form$, с помощью $CoCov(p) \mapsto a \Leftarrow (\prod_{i \in I} a_i)$ ввиду (iii). Остальное дуально интуиционистскому случаю.

## 4. Секвенции в биситусах (H-B логика)

Пропозициональное исчисление H-B логики представляет собой исчисление интуиционистской логики с двумя дополнительными связками $\dot{-}$, $\ulcorner$ [Rauszer 1973].

Список аксиом H-B логики состоит из всех формул вида:

| | |
|---|---|
| (I) $(\alpha \supset \beta) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma))$ | (II) $\alpha \supset \alpha \vee \beta$ |
| (III) $\beta \supset \alpha \vee \beta$ | (IV) $(\alpha \supset \gamma) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta \supset \gamma))$ |
| (V) $\alpha \wedge \beta \supset \alpha$ | (VI) $\alpha \wedge \beta \supset \beta$ |
| (VII) $(\gamma \supset \alpha) \supset ((\gamma \supset \beta) \supset (\gamma \supset \alpha \wedge \beta))$ | (VIII) $(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \wedge \beta \supset \gamma)$ |
| (IX) $(\alpha \wedge \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset (\beta \supset \gamma))$ | (X) $\alpha \supset (\beta \vee (\alpha \dot{-} \beta))$ |
| (XI) $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg \beta \supset \neg \alpha)$ | (XII) $(\alpha \dot{-} \beta) \supset \ulcorner(\alpha \supset \beta)$ |
| (XIII) $((\alpha \dot{-} \beta) \dot{-} \gamma) \supset (\alpha \dot{-} \beta \vee \gamma)$ | (XIV) $\neg(\alpha \dot{-} \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$ |
| (XV) $(\alpha \supset (\gamma \dot{-} \gamma)) \supset \neg \alpha$ | (XVI) $\neg \alpha \supset (\alpha \supset (\gamma \dot{-} \gamma))$ |
| (XVII) $((\gamma \supset \gamma) \dot{-} \alpha) \supset \ulcorner \alpha$ | (XVIII) $\ulcorner \alpha \supset ((\gamma \supset \gamma) \dot{-} \alpha)$ |

Единственными правилами вывода являются *modus ponens* и

$$(\ulcorner)\quad \frac{\alpha}{\neg \ulcorner \alpha}$$

N-категорным эквивалентом Н-В исчисления является HBN-категория, чье определение выглядит следующим образом:

***Определение 1***. HBN-категория является декартово бизамкнутой конечно биполной категорией предпорядка, снабженной двумя контравариантными функторами $\boldsymbol{N}_1$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{N}_2$: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, такими, что:

(i) $\boldsymbol{N}_1 a = a \Leftarrow 1$, $\boldsymbol{N}_2 a = a \Rightarrow 0$;

(ii) $\boldsymbol{N}_1(a \to b) = \boldsymbol{N}_1 b \to \boldsymbol{N}_1 a$, $\boldsymbol{N}_2(a \to b) = \boldsymbol{N}_2 b \to \boldsymbol{N}_2 a$;

(iii) $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда $a \Rightarrow b \cong 1$ и $a \Leftarrow b \cong 0$ для любых двух объектов $a,b$ из $\boldsymbol{C}$.

Декартова бизамкнутость означает здесь наличие одновременно декартовых замкнутости и козамкнутости и, следовательно, существование экспоненциала $\Rightarrow$ и коэкспоненциала $\Leftarrow$.

Словарь HBN-категорного перевода очевидным образом является объединением словарей Н- и BN-категорных переводов.

Секвенциальная формальная система GHB для пропозиционального исчисления Н-В логики, согласно [Rauszer 1973, с.25], состоит из множества аксиом вида $\alpha \to \alpha$ и множества следующих правил вывода:

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \alpha} \ (\to \text{ослабление}) \qquad \frac{\Gamma \to \gamma}{\alpha, \Gamma \to \gamma} \ (\text{ослабление} \to)$$

$$\frac{\gamma \to \Gamma, \alpha, \alpha}{\gamma \to \Gamma, \alpha} \ (\to \text{сокращение}) \qquad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \gamma}{\alpha, \Gamma \to \gamma} \ (\text{сокращение} \to)$$

$$\frac{\gamma \to \Gamma, \alpha, \beta, \Delta}{\gamma \to \Gamma, \beta, \alpha, \Delta} \ (\to\text{перестановка}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \to \gamma} \ (\text{перестановка}\to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \alpha, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, \Sigma \to \Theta, \Delta} \ (\text{сечение})$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \alpha \vee \beta} (\to \vee 1) \quad \frac{\Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \vee \beta} (\to \vee 2) \quad \frac{\gamma \to \Gamma, \alpha, \beta}{\gamma \to \Gamma, \alpha \vee \beta} (\to \vee 3)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta \quad \beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \Delta} (\vee \to) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta} (\to \wedge)$$

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \to \delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \delta} (\wedge \to 1) \quad \frac{\alpha \to \Gamma}{\alpha \wedge \beta \to \Gamma} (\wedge \to 2) \quad \frac{\beta \to \Gamma}{\alpha \wedge \beta \to \Gamma} (\wedge \to 3)$$

$$\frac{\alpha,\Gamma\to\beta}{\Gamma\to\alpha\supset\beta}(\to\supset)\frac{\Gamma,\Delta\to\alpha\,\beta,\Gamma,\Delta\to\gamma}{\alpha\supset\beta,\Gamma,\Delta\to\gamma}(\supset\to)$$

$$\frac{\gamma\to\Gamma,\Delta,\alpha\quad\beta\to\Gamma,\Delta}{\gamma\to\Gamma,\Delta,\alpha\dot{-}\beta}(\to\dot{-})\quad\frac{\alpha\to\Gamma,\beta}{\alpha\dot{-}\beta\to\Gamma}(\dot{-}\to)$$

$$\frac{\alpha,\Gamma\to}{\Gamma\to\neg\alpha}(\to\neg)\quad\frac{\Gamma\to\Delta,\alpha}{\neg\alpha,\Gamma\to\Delta}(\neg\to)$$

$$\frac{\alpha,\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta,\ulcorner\alpha}(\to\ulcorner)\quad\frac{\to\Gamma,\alpha}{\ulcorner\alpha\to\Gamma}(\ulcorner\to)$$

Антецедент и сукцедент секвенций в вышеприведенных правилах не могут быть одновременно более чем одноэлементными. Например: в правиле ($\vee\!\to$) если $\Delta$ есть (непустая) секвенция, то $\Gamma$ есть пустая секвенция, а если $\Gamma$ есть (непустая) секвенция, то секвенция $\Delta$ состоит не более чем из одной формулы.

Теперь мы определяем бипредтопологию на ***C*** как объединение предтопологии и копредтопологии, задающую, что для любого объекта $p$ в ***C*** существуют одновременно $Cov(p)$ и $CoCov(p)$. Таким образом, мы определяем $BiCov(p)=Cov(p)\cup CoCov(p)$ и бипредтопология на ***C*** является функцией, отображающей каждый ***C***-объект $p$ в $BiCov(p)$. Следовательно, пара (C,$BiCov(p)$), в свою очередь, будет представлять собой *биситус*.

***Теорема 1***. *Все аксиомы и правила вывода GHB могут быть интерпретированы в биситусе (**C**,BiCov(p)), где **C** есть HBN-категория.*

**Доказательство**. Легко видеть, что в свете замечания к определению 1 доказательство становится объединением доказательств дуальных теорем, доказанных ранее. ■

Для любой секвенции $\Gamma\to\Delta$ эквивалент отображения $v$ в формулы определяется как

$$v(\Gamma\to)=\neg(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n)\,;\qquad v(\to\Delta)=\beta_1\vee\ldots\vee\beta_n\,;$$

$$v(\Gamma\to\Delta)=\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n\supset\beta_1\vee\ldots\vee\beta_n\,;$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\Gamma,\beta_1,\ldots,\beta_n\in\Delta$. Соответственно, наше отображение $f_{BH}$: $BiCov\to Form$ для бипокрытий должно определяться как

$$\begin{cases} Cov(p) \mapsto (\prod_{i\in I} p_i) \Rightarrow p \\ CoCov(p) \mapsto p \Leftarrow (\coprod_{i\in I} p_i) \end{cases}$$

Отсюда проблема полноты рассматриваемого исчисления сводится к проблеме точности отображения $f_{BH}$.

## 5. Секвенции в полиситусах (классическая логика)

В случае секвенциальной формулировки классической логики начальные секвенции нашей соответствующей системы LK те же самые. Правила вывода имеют следующий вид:

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\text{ослабление} \to) \quad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \alpha}\ (\to \text{ослабление})$$

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\text{сокращение} \to) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \alpha}\ (\to \text{сокращение})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \to \Delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Sigma \to \Delta}\ (\text{перестановка} \to) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha, \beta, \Sigma}{\Gamma \to \Delta, \beta, \alpha, \Sigma}\ (\to \text{перестановка})$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \quad \alpha, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}\ (\text{сечение})$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \supset \beta}(\to\supset) \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha\ \beta, \Sigma \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}(\supset\to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}(\to \vee 1) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \vee \beta}(\to \vee 2)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta \beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \Delta}(\vee \to) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, \alpha \Gamma \to \Delta, \beta}{\Gamma \to \Delta, \alpha \wedge \beta}(\to \wedge)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}(\wedge \to 1) \frac{\beta, \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Delta}(\wedge \to 2)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Delta}(\neg \to) \frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\alpha}(\to \neg)$$

Главная трудность заключается в том, что мы не имеем права интерпретировать секвенцию $\Gamma \to \Delta$ как покрытие некоторого С-объекта, ибо по правую сторону у нас также стоит список формул. Создается впечатление, что причина интерпретации секвенций как покрытий в Н-категориях связана с экспоненцированием, ибо из $a{\to}b{\in}Cov(b)$ мы заключаем, что $a{\Rightarrow}b{\to}b{\in}Cov(b)$ и, следовательно, покрытия всегда замкнуты относительно $\langle$-,-$\rangle$и [-,-] (для [-,-] мы получаем это по определению). В случае интерпретации алгебры Брауэра в категориях предпорядка мы имеем дело с дуальным экспоненцированием, вследствие чего мы должны рассматривать копокрытия и коситусы. Более того, с точки зрения подобного подхода в случае НВ-алгебр мы имеем дело с двумя экспоненциалами одновременно и, как следствие, вынуждены рассматривать бипокрытия, образованные покрытиями и копокрытиями и соответственно нам требуется конструкция биситусов.

Рассматривая подобным образом булевы алгебры, мы приходим к заключению, что нам необходимо учитывать самодуальность классической логики [Ермолаева 1972].

Наш основной технический прием теперь заключается в использовании нашего словаря перевода в N-категорию.

***Определение 1.*** Интерпретацией секвенции $\Gamma{\to}\Delta$ в $\boldsymbol{C}$ является $\{Cov(p_i): i\in I\}\bigcup\{CoCov(q_j): j\in J\}$, где $p_i$ принадлежит множеству переводов формул из $\Gamma$, $q_j$ принадлежит множеству переводов формул и $\Delta$ и $\boldsymbol{C}$ есть N-категория.

Мы обозначаем $\{Cov(p_i): i\in I\}\bigcup\{CoCov(q_j): j\in J\}$ как $PCov(G,D)$ (*полипокрытия*), где $G,D$ представляют собой списки переводов формул из $\Gamma$,$\Delta$ соответственно, и говорим, что (С,$PCov$) является *полиситусом*. Для получения максимальных полипокрытий мы требуем, чтобы наши копокрытия также были максимальными по отношению к N-функтору.

***Теорема 1***. *Все аксиомы и правила вывода LK могут быть интерпретированы в полиситусе (**C**,PCov), где **C** есть N-категория.*

***Доказательство.*** Аксиома: по определениям покрытий и копокрытий.

(ослабление $\to$): как в 2.4 (повторенное для всех покрытий из $PCov(G,D)$).

($\to$ ослабление): ввиду 1.2.(VII)-(VIII) и по 3.3.(iii).

(сокращение $\to$): как в 2.4 (повторенное для всех покрытий из $PCov(G,D)$).

($\to$ сокращение): ввиду того, что наши множества индексов в копокрытиях не являются мультимножествами и $[a,a]{\to}a$.

(перестановка $\to$): как в теореме 1 для интуиционистской логики (повторенное для всех покрытий из $PCov(G,D)$).

($\to$ перестановка): ввиду отсутствия упорядочения индексов в наших копокрытиях.

(сечение): ввиду транзитивности замкнутости наших покрытий и копокрытий.

($\to\supset$): как в теореме 1 для интуиционистской логики. Здесь мы должны принять во внимание то, что лишь наши покрытия замкнуты относительно экспоненциала $\Rightarrow$ (копокрытия замкнуты относительно коэкспоненциала $\Leftarrow$).

($\supset\to$): доказываем как в теореме 1 для интуиционистской логики правило $\dfrac{\Gamma \to \alpha\, \beta, \Sigma \to \Delta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Sigma \to \Delta}$ (соответствующим повторением) и затем доказываем ($\to$ ослабление) для всех членов D, где D есть N-категорный перевод $\Delta$.

($\to\vee$1),($\to\vee$2): для $\Gamma\to\alpha$ как в теореме 1 для интуиционистской логики и для копокрытий ввиду пункта (iii) из определения копокрытий.

($\vee\to$): как в теореме 1 для интуиционистской логики для $\alpha,\Gamma\to\delta$, $\beta,\Gamma\to\Delta$ (где $\delta\in\Delta$) и ввиду (iii) из определения копокрытий.

($\to\wedge$): как в теореме 1 для интуиционистской логики для $\Gamma\to\alpha$, $\Gamma\to\beta$ и по определению $\langle$-,-$\rangle$ для копокрытий.

($\wedge\to$1),($\wedge\to$2): по $\langle a,b\rangle \to \langle b,a\rangle$ и $\langle a,b\rangle\to a$.

($\neg\to$): $\to\Delta$ мы интерпретируем как $\{1 \to p_i : i \in I\} \in CoCov(1)$ где $p_i\in$D (D есть перевод $\Delta$). Для $\Gamma\to\delta$ (где $\delta\in$D) мы используем (ослабление $\to$) и для копокрытий наше доказательство дуально доказательству теоремы 1 для интуиционистской логики (используя $[a,\boldsymbol{N}a] \cong 1$ и терминальность 1), принимая во внимание максимальность копокрытий.

($\to\neg$): Для покрытий мы используем (ослабление $\to$), а для копокрытий доказательство дуально доказательству теоремы 1 для интуиционистской логики. ■

Каждая секвенция $\alpha_1,...,\alpha_m \to \beta_1,...,\beta_n$ из LK имеет формульный эквивалент $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_m \to \beta_1 \vee ... \vee \beta_n$. Отсюда, как в случае 2.7, путем использования 2.2.(iii) и 3.5.(iii) мы получаем отображение $f_C$: $PCov\to Form$, определенное как

$PCov(G,D) \mapsto \prod_{i \in I} a_i \Rightarrow \coprod_{j \in J} b_j$, где $a_i, b_j$ принадлежат $G,D$ соответственно. Мы получаем полноту нашей интерпретации LK в полиситусах, используя наше отображение $f_C$ стандартным образом.

## 6. Секвенции в *Pa*-ситусах

Главным недостатком интерпретации в категориях предпорядка является невозможность рассмотрения проблемы отождествления выводов. Как следствие, например, мы оказываемся не в состоянии стандартным образом развить в таких категориях подход, предложенный Дж. Ламбеком и описывающий подобного рода аспекты взаимоотношения между категориями и теорией доказательств.

Возможный путь преодоления этих трудностей может быть найден при использовании так называемых категорий путей.

***Определение 1***. Для любой категории предпорядка **C** категорией путей Pa**C** является такая категория, что:

(i) объекты Pa**C** те же, что и C;

(ii) $f$: $a \to b$ есть стрелка Pa**C** тогда и только тогда, когда $f = f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1 (n \geq 1)$, где $f_1,...,f_n$ есть стрелки **C**, $a$ является областью определения $f_1$ и $b$ является областью значения $f_n$.

Очевидным образом **C** будет подкатегорией Pa**C**, и непосредственной проверкой мы приходим к заключению, что следующее предложение может быть доказано:

***Предложение 1***. *Для любой N-категории (HN-,BN-, HBN-категории)* **C** *категория путей Pa***C** *будет декартово замкнутой (соответственно козамкнутой, бизамкнутой) конечно полной (соответственно кополной, биполной) снабженной контравариантным функтором* **N***:Pa***C***→Pa***C** *(соответственно* $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2$*), таким, что выполняются соответствующие условия из определения B-категории (соответственно N-категории, BN-категории, HBN-категории).*

Более того, естественным образом можно перейти от рассмотрения предтопологии в наших категориях предпорядка к топологии Гротендика в категориях путей.

***Предложение 2***. *Предтопология в HN-категории* (*N-, BN-, HBN-категории*) **C** *определяет предтопологию Гротендика* (*поли-, ко-, бипредтопологию соответственно*) *в HN-категории* (*N-, BN-, HBN-категории соответственно*) *путей Pa***C**.

**Доказательство**. Стандартное определение предтопологии Гротендика в [Гольдблатт 1983] выглядит следующим образом:

Предтопологией на категории $\boldsymbol{C}$ называется функция, сопоставляющая каждому $\boldsymbol{C}$-объекту $a$ совокупность $Cov(a)$ множеств $\boldsymbol{C}$-стрелок, оканчивающихся в $a$, такая, что

(1) одноэлементное множество $\{1_a{:}a \to a\}$ принадлежит $Cov(a)$;

(2) если $\{a_x \xrightarrow{f_x} a : x \in X\} \in Cov(a)$ и для каждого $x \in X$

$$\{a_y^x \xrightarrow{f_y^x} a_x : y \in Y_x\} \in Cov(a_x),$$

то

$$\{a_y^x \xrightarrow{f_x \circ f_y^x} a : x \in X \,\&\, y \in Y_x\} \in Cov(a);$$

(3) если $\{a_x \xrightarrow{f_x} a : x \in X\} \in Cov(a)$ и $g$: $b \to a$ - произвольная $\boldsymbol{C}$-стрелка, то для каждого $x \in X$ существует обратный образ стрелки $f_x$ относительно $g$

$$\begin{tikzcd}
b \times_a a_x \arrow[r] \arrow[d, "g_x"'] & a_x \arrow[d, "f_x"] \\
b \arrow[r, "g"] & a
\end{tikzcd}$$

и $\{b \times_a a_x \xrightarrow{g_x} b : x \in X\} \in Cov(b)$.

Если $\boldsymbol{C}$ есть HN-категория, то мы должны проверить лишь выполнимость (3) в $Pa\boldsymbol{C}$. Но ввиду предложения 1 очевидно, что $Pa\boldsymbol{C}$ имеет обратные образы и все $\langle b, a_x \rangle$ принадлежат $Cov(a)$ в силу определения предтопологии. В случае ко-, би- и полипредтопологии доказательство аналогично. ■

Теперь мы получаем $Pa$-ситус (-коситус, -биситус, -полиситус соответственно) как пару $(Pa\boldsymbol{C}, Cov)$ для любого ситуса $(\boldsymbol{C}, Cov)$ (коситуса, биситуса, полиситуса соответственно). В согласии с предшествующим рассмотрением секвенция $\Gamma \to \alpha$ в $Pa$-ситусе должна интерпретироваться как некоторый элемент $Cov(a)$, где $a$ есть перевод $\alpha$, т.е. как конус $\{a_i \to a : i \in I\}$, где $a_i$ являются соответствующими переводами формул из Г.

# Глава седьмая. Логические исчисления в топосах

## 1. Релевантная логика в топосах

Известно, что для любой малой категории $\boldsymbol{C}$ категория $Set^{\boldsymbol{C}}$ всегда будет топосом (см., например, [Гольдблатт 1983]). Именно это положение и служит отправным моментом при получении категорной семантики для интуиционистской логики путем трансформации алгебры Гейтинга в малую категорию. Главной особенностью при этом является то, что в качестве малой категории $\boldsymbol{C}$ служит алгебра Гейтинга, которая категорно представляет собой декартово замкнутую конечную кополную категорию предпорядка $\boldsymbol{H}$. Как мы уже знаем, нетрудно превратить подобную категорию в N-категорию, наделяя ее контравариантным функтором $\boldsymbol{N}$: $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$. Это обстоятельство наводит на мысль использовать рассмотренные нами N-категории с целью получения «топосной» семантики для других, отличных от интуиционистской, логических систем.

В качестве первого шага на этом пути, построим категорную семантику релевантной логики, основывающейся на конструкции категории $Set^{\boldsymbol{A}}$-функторов из $RN$-категории $\boldsymbol{A}$ в категорию множеств *Set.* С этой целью мы начнем со следующих определений и фактов.

Известно, что для ограниченной дистрибутивной решетки $L$ дуальное (двойственное) пространство $L$, $S(L)$ будет упорядоченным топологическим пространством, в котором множество точек $S$ является семейством всех простых фильтров на $L$, упорядоченных по включению. *Релевантное пространство* является структурой $\mathcal{R}$ = $\langle S,R,*,t\rangle$, где $S$ есть наше семейство всех простых фильтров. $R$ есть тернарное отношение на $S$, * - унарная функция на $S$, $t \subseteq S$. Для $A,B \subseteq S$ пусть $A\circ B$ будет $\{z\colon \exists xy(Rxyz \;\&\; x\in A \;\&\; y\in B\}$, и пусть $A\to B$ будет $\{x: \forall yz((Rxyz \ \& \ y\in A)$ влечет $z\in B\}$. Выполняются следующие условия:

1. Если $A,B\in L(S)$, то $A\circ B$ и $A \to B$ являются клопенами;
2. $(Rxyz \ \& \ x'\leq x \ \& \ y'\leq y \ \& \ z'\leq z)$ влечет $Rx'y'z'$;
3. $\forall xyz(\neg Rxyz$ влечет $\exists A,B\in L(S)(x\in A \ \& \ y\in B \ \& \ z\notin A\circ B)$;
4. Функция $x \mapsto x^*$ является непрерывным убывающим отображением на $S$;
5. $t$ принадлежит $L(S)$ и удовлетворяет условию: $\forall yz(y\leq z$ эквивалентно $\exists x(x\in t \ \& \ Rxyz))$,

где $L(S)$ есть двойственная к $S$ решетка.

Двойственная к $\mathcal{R}$ алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ определяется на решетке $L(S)$ путем добавления операций $A\circ B$, $A\to B$, $\neg A = \{z: z^*\notin A\}$ и определения константы 1 как $t$. Для релевантной алгебры $L$ двойственное пространство $L$, $\mathcal{R}(L)$, определяется путем добавления к решетке всех простых фильтров ограниченной дистрибутивной решетки тернарного отношения $x\cdot y \subseteq z$, определяя $x^*$ для $x\in\mathcal{R}(L)$ как $\{a: \neg a\notin x\}$, и полагая $t = \{x\in S(L): 1 \subseteq x\}$. Справедливо следующее утверждение [Urquhart 1996, p.268]:

(1) Алгебра, двойственная к релевантному пространству, является релевантной алгеброй;

(2) Пространство, двойственное к релевантной алгебре, представляет собой релевантное пространство.

Более того:

(3) Если $\mathcal{A}$ является релевантной алгеброй, то $\mathcal{A}$ изоморфна ее второму дуалу, $\mathcal{A}(\mathcal{R}(\mathcal{L}))$, что дается отображением $\eta(a) = \{x\in\mathcal{R}(\mathcal{L}): a\in x\}$;

(4) Если $\mathcal{R}$ является релевантным пространством, то $\mathcal{R}$ $r$-гомеоморфно (т.е. упорядоченно гомеоморфно и изоморфно по отношению к тернарному отношению, *-операции и единице) второму дуалу $\mathcal{R}(\mathcal{A}(\mathcal{R}))$, при отображении $\theta(x) = \{B\in\mathcal{A}(\mathcal{R}): x\in\mathcal{R}\}$.

Для наших целей удобно использовать следующие понятия [Urquhart 1996, p.273]. Если $x,y$ являются элементами релевантного пространства $\mathcal{R}$, то определим $x\circledcirc y$ как множество $\{z\in\mathcal{R}: Rxyz\}$, $x \twoheadrightarrow y$ будет множеством $\{z\in\mathcal{R}: Rzxy\}$ и $\urcorner\, x = \{z: z\notin x^*\}$; для $X,Y$ – подмножеств пространства $\mathcal{R}$ – определяем $X\circledcirc Y$ как множество $\bigcup\{x\circledcirc y$:

$x \in X$, $y \in Y\}$, $X \twoheadrightarrow Y$ будет множеством $\bigcap\{x \twoheadrightarrow y$: $x \in X$, $y \in Y\}$ и $\neg X = \{\neg x$: $x \in X\}$. Элементы релевантного пространства $\mathcal{R}$ можно фактически отождествить с главными фильтрами, т.е. $x \in \mathcal{R}$ можно отождествить с $[x) = \{y$: $x \leq y\}$. В этом случае множество $x \circledcirc y$ совпадает с множеством $[x) \circledcirc [y)$, $x \twoheadrightarrow y$ совпадает с множеством $[x) \twoheadrightarrow [y)$ и $\neg x = \neg [x)$.

Приступим теперь к непосредственному построению топоса $Set^{\boldsymbol{A}}$. Рассмотрим вначале функтор $\Omega$: $\boldsymbol{A} \to Set$ (гдее $\boldsymbol{A}$ есть $RN$-категория), который будет представлять собой классифицирующий объект в топосе $Set^{\boldsymbol{A}}$. Как и в интуиционистской логике для любого функтора $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} \to Set$ определим как $\boldsymbol{F}_p$ значение $\boldsymbol{F}(p)$ функтора $\boldsymbol{F}$ для объекта $p$ из $\boldsymbol{A}$. Для произвольных $q$ и $p$, таких, что $p \leq q$, функтор $\boldsymbol{F}$ определяет функцию из $\boldsymbol{F}_p$ в $\boldsymbol{F}_q$ , которую мы обозначим как $\boldsymbol{F}_{pq}$. Функтор $\boldsymbol{F}$ будет рассматриваться как совокупность $\{ \boldsymbol{F}_p$: $p \in \boldsymbol{A}\}$ множеств, индексированных элементами множества объектов $\boldsymbol{A}$ и снабженной отображением перехода $\boldsymbol{F}_{pq}$: $\boldsymbol{F}_p \to \boldsymbol{F}_q$ по $p \leq q$ (в частности, $\boldsymbol{F}_{pp}$ будет представлять собой функцию тождества на $\boldsymbol{F}_p$).

Продолжим подобным образом, полагая $\Omega_p = [p)^+$ (т.е. равной релевантной алгебре всех главных фильтров в $[p)$), и определяя для $p$ и $q$, таких, что $p \leq q$, функцию $\Omega_{pq}$: $\Omega_p \to \Omega_q$, отображающую каждый $S \in [p)^+$ в $S \cap [q) \in [q)^+$, т.е. $\Omega_{pq}(S) = S_q$.

Постоянный функтор 1: $\boldsymbol{A} \to Set$ может быть определен с помощью условий $1_p = \{[1)\}$ для $p \in \boldsymbol{A}$ и $1_{pq} = id_{\{[1)\}}$ при $p \leq q$. Классификатор подобъектов $true$: $1 \to \Omega$ представляет собой естественное преобразование, чья $p$-я компонента $true_p$: $\{[1)\} \to \Omega_p$ будет определяться равенством $true_p$ $([1)) = [p)$. Таким образом, функция $true$ выбирает наибольший элемент из каждой релевантной алгебры $[p)^+$–типа.

Пусть $\tau$: $\boldsymbol{F} \rightarrowtail \boldsymbol{G}$ будет произвольным подобъектом $Set^{\boldsymbol{A}}$–объекта $\boldsymbol{G}$. Каждая компонента $\tau_p$ является инъективной и может рассматриваться как функция включения $\boldsymbol{F}_p \hookrightarrow \boldsymbol{G}_p$. $p$-я компонента $(\chi_\tau)_p$: $\boldsymbol{G}_p \to [p)^+$ характеристической стрелки $\chi_\tau$: $\boldsymbol{G} \to \Omega$ будет идентифицироваться с помощью равенства

$$(\chi_\tau)_p(x) = \{q: p \leq q \text{ и } \boldsymbol{G}_{pq}(x) \in \boldsymbol{F}_q\}$$

для каждого $x \in \boldsymbol{G}_p$.

Легко убедиться, что Ω-аксиома выполняется в категории (топосе) $Set^{\boldsymbol{A}}$ поскольку доказательство этого факта требует использование свойств главных фильтров в точности как в [Гольдблатт 1983] для случая интуиционистской логики.

Вначале мы сконструируем истинностные стрелки в топосе $Set^{\boldsymbol{A}}$. Конъюнкция и дизъюнкция будут определяться так же, как и в случае $Set^{\boldsymbol{P}}$, где $\boldsymbol{P}$ есть алгебра Гейтинга, т.е. нам, в сущности, нужны для $\cap$: $\Omega \times \Omega \dot{\to} \Omega$ и $\cup$: $\Omega \times \Omega \dot{\to} \Omega$ определения их $p$-х компонент в виде

$$\cap_p(\langle S,T\rangle) = S\cap T;$$
$$\cup_p(\langle S,T\rangle) = S\cup T.$$

Стрелка $false$:$1 \to \Omega$ может быть определена как естественное преобразование, чья $p$-я компонента $false_p$: $\{\text{╕}\ [1)\} \to \Omega_p$ будет определяться равенством $false_p([1)) = \text{╕}\ [p)$. Таким образом, функция $false$ выбирает наибольший элемент из каждой релевантной алгебры $(\text{╕}\ [p))^+$–типа.

Для отрицания $\neg$: $\Omega \dot{\to} \Omega$ мы определяем $p$-ю компоненту $\neg_p$: $\Omega_p \to \Omega_p$ как

$$\neg_p(S) = (\text{╕}\ S)_p.$$

Импликация $\supset$: $\Omega \times \Omega \dot{\to} \Omega$ получается при определении ее $p$-ой компоненты как

$$\supset_p(\langle S,T\rangle) = (S\twoheadrightarrow T)_p.$$

Отметим, что истинностными стрелками в $Set^{\boldsymbol{A}}$ являются естественные преобразования, компоненты которых совпадают с соответствующими связками (операциями) на релевантных алгебрах в $\boldsymbol{A}$. Однако истинностные стрелки получались и в случае $Set^{\boldsymbol{P}}$ из категорного описания интуиционистских истинностных функций в $Set$ в [Гольдблатт 1983]. Нетрудно прийти к выводу, что общая структура, отражаемая в топосах $Set^{\boldsymbol{A}}$ и $Set^{\boldsymbol{P}}$ вызвана тем обстоятельством, что и релевантные алгебры и алгебры Гейтинга содержат в себе дистрибутивные ограниченные решетки. По сути дела, то обстоятельство, что $Set^{\boldsymbol{A}}$ есть топос, означает обязательное существование в нем еще и экспоненциала, обусловленного резидуальностью интуиционистской импликации относительно решеточного пересечения, т.е. релевантная структура здесь наложена на интуиционистскую, представляющую собой некоторый базисный фон.

Будем называть $Set^{\mathbf{A}}$-оценкой функцию $V$: $\Phi_0 \to Set^{\mathbf{A}}(1,\Omega)$, назначающую каждой пропозициональной букве $\pi_i$ некоторое истинностное значение $V(\pi_i) = 1 \,\dot{\to}\, \Omega$. Эта функция может быть продолжена на множестве всех формул Ф следующим способом:

(a) $V(\neg\alpha) = \neg\circ V(\alpha)$

(b) $V(\alpha\wedge\beta) = \cap\circ\langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$

(c) $V(\alpha\vee\beta) = \cup\circ\langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$

(d) $V(\alpha \supset \beta) = \supset\circ\langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$

Мы говорим, что формула $\alpha$ $Set^{\mathbf{A}}$-общезначима (что записываем как $Set^{\mathbf{A}} \vDash \alpha$), если $V(\alpha) = true{:}1\to\Omega$ для всех $Set^{\mathbf{A}}$-оценок $V$.

Напомним, что если $\mathcal{R}$ является релевантной алгеброй, то мы можем определить оценку $V'$ как отображение из Ф в $\mathcal{R}$, а формула $A$ общезначима в $\mathcal{R}$, если $1 \leq V'(A)$ для любой оценки $V$ формул из Ф в $\mathcal{R}$; логика, определяемая $\mathcal{R}$, будет представлять собой множество всех формул, общезначимых в $\mathcal{R}$.

По $V$ мы определяем оценку $V'$, положив

$$(*) \qquad V(\pi_i) = \begin{cases} true, & \text{если } 1 \leq V'(\pi_i) \\ false, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

***Лемма 1***. $V(\alpha) = true$ тогда и только тогда, когда $1 \leq V'(\alpha)$.

***Доказательство.*** Для $\alpha = \pi_i$ лемма справедлива в силу определения. Далее мы применяем индукцию по построению формулы. Пусть $\alpha = \neg\beta$ и $V(\beta) = false$, тогда

$V(\neg\beta)_p = (\neg\circ V(\beta))_p = \neg_p\circ V(\beta)_p$.

Следовательно, $V(\alpha)_p([1)) = \neg_p(V(\beta)_p([1)) = \neg_p(false_p([1))) =$ (по индуктивному определению) $= \neg_p(\neg\,[p)) = [p) = true_p([1))$. Таким образом, $V(\alpha) = true$ and $1 \leq V'(\alpha)$. Остальное доказывается обычным образом. ■.

***Теорема 1***. *Для любого топоса $Set^{\mathbf{A}}$, $Set^{\mathbf{A}} \vDash \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_R \alpha$ (т.е. $\alpha$ доказуема в $R$).*

***Доказательство***. Поскольку по лемме 1 мы выбираем оценку $V$ абсолютно произвольно и для $V'$ полнота уже доказана, то мы приходим к требуемому заключению. ■.

## 2. Паранепротиворечивая логика в топосах

Построим теперь категорную семантику для паранепротиворечивой логики, используя CN-категории. Поскольку у нас имеется категорное представление алгебры да Косты в виде CN-категорий, то мы можем попытаться получить $Set^{\mathbf{A}}$ в качестве модели паранепротиворечивой логики, заменяя RN-категорию $\mathbf{A}$ на CN-категорию.

***Теорема 1***. *Множество главных фильтров алгебры да Косты $\equiv$-изоморфно алгебре да Косты.*

***Доказательство***. Пусть $\mathsf{A} = \langle A, 0, 1, \leq, \wedge, \vee, \supset, ' \rangle$ будет некоторой алгеброй да Косты. Фильтр $F$ на $\mathbf{A}$ представляет собой непустое подмножество $A$, такое, что:

(1) если $a,b \in F$, то $a \wedge b \in F$;

(2) если $a \in F$ и $a \leq b$, то $b \in F$.

Фильтр $F$ является собственным фильтром, если $0 \notin F$. Говорят, что фильтр $F$ будет $\mathsf{A}$-полным (или полным относительно $\mathsf{A}$), если $a' \wedge a^0 \in F$ или $a \in F$ , но не оба одновременно.

Рассмотрим множество $\mathsf{A}^+$ всех главных фильтров, т.е. множество вида

$$[p)=\{q\colon p \leq q\}, \text{ где } p,q \in \mathsf{A}.$$

Относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$, пересечения, объединения и дополнения $\mathsf{A}^+$ будет представлять собой алгебру Макнейла [MacNeille 1937], т.е. полную булеву алгебру. Если определить на $\mathsf{A}^+$ упорядочение $\leq$ как $[p) \leq [q)$ тогда и только тогда, когда $q \leq p$, то очевидным образом мы получаем предпорядок на $\mathsf{A}^+$. Определим теперь операцию $'$ как

$$[p)' = \neg[p) \cup \neg[p^0) \text{ где } \neg \text{ - булево дополнение на } \mathsf{A}^+,$$

т.е. $\neg[x)=\{y\colon [y) \cap [x)=\varnothing\}$. Поскольку, очевидным образом $[p) \cap [q) = [p \wedge q)$ и $[p) \cup [q) = [p \vee q)$ ($\mathsf{A}$ является дистрибутивной решеткой, поэтому $\mathsf{A}$ вложима в решетку своих главных фильтров [Расёва Сикорский 1972, с.82]), то, учитывая закон да Моргана, получаем $\neg[p) \cup \neg[p^0) = \neg([p) \cap [p^0)) = \neg[p \wedge p^0)$. В булевой алгебре $\mathsf{A}^+$ $\neg[p \wedge p^0)$ представляет собой элемент $[y)$, такой, что $[p \wedge p^0) \cap [y) = \varnothing$. С другой стороны, согласно [Carnielli Alcantara 1984, p.82], множество всех фильтров на $\mathsf{A}$ будет представлять собой логику да Косты $\langle \mathsf{A}, C \rangle$, в которой $C$ представляет собой систему замыканий всех фильтров на $\mathsf{A}$. Для логики да Косты имеет место тот результат [Carnielli Alcantara 1984, p.87], что она является паранепротиворечивой абстрактной логикой. Для нас существенно, что тогда фактически все фильтры являются $\mathcal{A}$-полными, т.е. либо $a \in F$, либо $a' \wedge a^0 \in F$, но не оба одновременно, поскольку в этом случае $[a) \cup [a' \wedge a^0) = \mathcal{A}$. Тогда очевидным образом $[a) \cap [a' \wedge a^0) = \varnothing = [a \wedge a' \wedge a^0) = [a') \cap [a \wedge a^0)$. Следовательно, в роли $[p')$ в $\mathcal{A}^+$ будет выступать $[y)$, и мы окончательно получаем $[p)' = [p')$. Определим теперь $[p) \supset [q) = \neg[p) \cup [q)$.

***Лемма 1***. $[p \supset q) = \neg[p) \cup [q)$.

***Доказательство***. В $\mathcal{A}$ мы имеем $a \wedge (a \supset b) \leq b$, откуда получаем $[b) \subseteq [a) \cap [a \supset b)$. Далее, в булевой алгебре $\mathcal{A}^+$ мы получаем $\neg[a) \cup [b) \subseteq \neg[a) \cup ([a) \cap [a \supset b)) = A \cap (\neg[a) \cap [a \supset b)) = \neg[a) \cap [a \supset b)$. Но в $\mathcal{A}$ $a \wedge a' \wedge a^0 \equiv 0$, следовательно, $a \wedge a' \wedge a^0 \leq b$, откуда $a' \wedge a^0 \leq a \supset b$ и $[a \supset b) \subseteq [a' \wedge a^0)$. Но $a' \wedge a^0$, согласно [Carnielli Alcantara 1984, p.81], играет роль классического отрицания, откуда $[a \supset b) \subseteq \neg[a)$ и $\neg[a) \cap [a \supset b) = [a \supset b)$. Отсюда получаем $\neg[a) \cup [b) \subseteq [a \supset b)$.

Далее, в $\mathcal{A}$ $a \wedge b \leq b$ влечет $b \leq (a \supset b)$, откуда в $\mathcal{A}^+$ мы получаем $[a \supset b) \subseteq [b)$. Но поскольку $[a \supset b) \subseteq \neg[a)$, то в булевой алгебре $\mathcal{A}^+$ получаем $[a \supset b) \subseteq \neg[a) \cup [b)$. Следовательно, $[p \supset q) = \neg[p) \cup [q)$. ■

Из доказанной леммы 1 следует $[p) \supset [q) = [p \supset q)$. Отсюда мы получаем сохранение всех операций алгебры да Косты на $\mathcal{A}^+$ и тогда мы можем говорить об отображении $\varphi$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$, которое очевидным образом будет $\equiv$-изоморфизмом. ■

Рассмотрим теперь вопрос релятивизации $\mathcal{A}^+$. Поскольку $\mathcal{A}^+$ является полной булевой алгеброй, то для любого $[p) \in \mathcal{A}^+$ мы стандартным образом можем получить булеву алгебру $[p)^+$ всех главных фильтров в $[p)$ [Расёва Сикорский 1972, с.96]. При этом $\varnothing$ попрежнему является нулевым элементом, а единицей теперь будет $[p)$. Так как предупорядочение $\leq$ теперь можно просто получить сужением отношения предпорядка в $\mathcal{A}^+$ на $[p)$, а операции $'$ и $\supset$ могут быть релятивизированы через булевы операции в $[p)^+$, то нетрудно превратить $[p)^+$ в алгебру да Косты.

Таким образом, обозначая $[p) \wedge [q)$ через $[q)_p$, мы получаем для $S, T \in \mathcal{A}^+$ (сужая операции из $\mathcal{A}^+$ на $[p)^+$):

(1) $(S_p) \cap_p (T_p) = (S \cap T)_p$

(2) $(S_p) \cup_p (T_p) = (S \cup T)_p$

(3) $(S_p)'_p = \neg_p(S_p) \cup_p \neg_p(S^0{}_p) = (S')_p$

(4) $(S_p) \supset_p (T_p) = \neg_p(S_p) \cup_p (T_p) = (\neg S \cup T)_p = (S \supset T)_p$

Перейдем теперь непосредственно к построению топоса $Set^{\boldsymbol{A}}$. Рассмотрим функтор $\Omega$: $\boldsymbol{A} \rightarrow Set$ (где $\boldsymbol{A}$ – CN-категория), который будет представлять собой классифицирующий объект в топосе $Set^{\boldsymbol{A}}$. Как и в случае интуиционистской логики для произвольного функтора $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{A} \rightarrow Set$ обозначим через $\boldsymbol{F}_p$ значение $\boldsymbol{F}(p)$ функтора $\boldsymbol{F}$ на объекте $p$ из $\boldsymbol{A}$. Для любых $q$ и $p$, таких, что $p \leq q$, функтор $\boldsymbol{F}$ определяет функцию из $\boldsymbol{F}_p$ в $\boldsymbol{F}_q$, которую обозначим $\boldsymbol{F}_{pq}$. Функтор $\boldsymbol{F}$ будем рассматривать как семейство $\{\boldsymbol{F}_p\colon p \in A\}$ множеств, заиндексированных элементами множества $A$ из алгебры $\boldsymbol{A}$ снабженных отображением перехода $\boldsymbol{F}_{pq}$: $\boldsymbol{F}_p \rightarrow \boldsymbol{F}_q$ при $p \leq q$ (в частности, $\boldsymbol{F}_{pp}$ будет тождественной функцией на $\boldsymbol{F}_p$).

При подобном подходе мы полагаем $\Omega_p = [p)^+$ и для $p$ и $q$, таких, что $p \leq q$, функция $\Omega_{pq}$: $\Omega_p \rightarrow \Omega_q$ сопоставляет каждому $S \in [p)^+$ множество $S \cap [q) \in [q)^+$, т.е.. $\Omega_{pq}(S) = S_q$.

Конечным объектом категории $Set^{\boldsymbol{A}}$ служит постоянный функтор 1: $\boldsymbol{A} \rightarrow Set$, определяемый условиями $1_p = \{0\}$ для $p \in A$ и $1_{pq} = \mathrm{id}_{\{0\}}$ при $p \leq q$. Классификатор подобъектов $true$: $1 \rightarrow \Omega$ представляет собой естественное преобразование, $p$-я которого $true_p$: $\{0\} \rightarrow \Omega_p$ определяется равенством $true_p(0) = [p)$. Таким образом, функция $true$ выбирает наибольший элемент из каждой алгебры да Косты вида $[p)^+$.

Пусть теперь $\tau$: $\boldsymbol{F} \rightarrowtail \boldsymbol{G}$ – произвольный подобъект $Set^{\boldsymbol{A}}$–объекта $\boldsymbol{G}$. Каждая компонента $\tau_p$ является инъективной и может рассматриваться как функция включения $\boldsymbol{F}_p \hookrightarrow \boldsymbol{G}_p$. $p$-я компонента $(\chi_\tau)_p$: $\boldsymbol{G}_p \rightarrow [p)^+$ характеристической стрелки $\chi_\tau$: $\boldsymbol{G} \rightarrow \Omega$ определяется равенством

$$(\chi_\tau)_p(x) = \{q\colon p \leq q \text{ и } \boldsymbol{G}_{pq}(x) \in \boldsymbol{F}_q\}$$

для каждого $x \in \boldsymbol{G}_p$.

Как и в случае релевантной логики, легко убедиться, что $\Omega$-аксиома выполняется в категории $Set^{\boldsymbol{A}}$ поскольку доказательство этого факта нуждается лишь в использовании свойств главных фильтров в точности как в [Гольдблатт 1983] для случая интуиционистской логики.

Переходя теперь непосредственно к конструированию интерпретации паранепротиворечивой логики в топосе $Set^{\boldsymbol{A}}$, построим вначале истинностные стрелки. Начнем со стрелки *false*.

Начальный объект 0: $\boldsymbol{A} \rightarrow Set$ категории $Set^{\boldsymbol{A}}$ – это постоянный функтор, такой, что $0_p = \varnothing$ и $0_{pq} = \mathrm{id}_\varnothing$ для $p \leq q$. Компонентами естественного преобразования $0 \dot{\to} 1$ являются $\varnothing \hookrightarrow \{0\}$ (она и та же компонента для любого $p$). По определению стрелка *false* характеристической стрелкой подобъекта $!: 0 \dot{\to} 1$. Для ее компоненты $false_p: \{0\} \to \boldsymbol{A}_p$ имеем $false_p(0) = \{q: p \leq q$ и $1_{pq}(0) = 0_q\} = \{q: p \leq q$ и $0 \in \varnothing\} = \varnothing$, и, следовательно, естественное преобразование выбирает нулевой элемент из каждой алгебры да Косты.

Что касается конъюнкции и дизъюнкции, то их определения остаются те же, что и в случае $Set^{\boldsymbol{P}}$ [Гольдблатт 1983], т.е. фактически нам нужно для $\cap: \Omega\times\Omega \dot{\to} \Omega$ and $\cup: \Omega\times\Omega \dot{\to} \Omega$ определения их $p$-х компонент в виде

$$\cap_p(\langle S,T\rangle) = S\cap T;$$
$$\cup_p(\langle S,T\rangle) = S\cup T.$$

Для определения стрелок отрицания и импликации используем то обстоятельство, что в алгебре $[p)^+$ они конструируются из булевых операций. Но в этом случае булево отрицание выглядит у нас как $\neg: \Omega \dot{\to} \Omega$ , чья $p$-я компонента $\neg_p: \Omega_p \to \Omega_p$ при отождествлении $false_p$ с включением $\{\varnothing\} \subseteq \Omega_p$ (и поскольку $\neg: \Omega \dot{\to} \Omega$ является характеристической стрелкой подобъекта *false*) выглядит следующим образом:

$$\neg_p(S) = \{q: p \leq q \text{ и } \Omega_{pq}(S) \in \{\varnothing\}\} = \{q: p \leq q \text{ и } S \cap [q) = \varnothing\} = [p) \cap \neg S = (\neg S)_p.$$

Отсюда отрицание $\urcorner : \Omega \dot{\to} \Omega$ получаем, выводя, что $p$-я компонента $\urcorner_p: \Omega_p \to \Omega_p$ отрицания удовлетворяет равенству

$$\urcorner_p(S) = (\neg S)_p \cup_p (\neg S^0)_p = \cup_p(\langle \neg_p(S), \neg_p(S^0)\rangle) = (S')_p.$$

Импликацию $\supset: \Omega\times\Omega \dot{\to} \Omega$ получаем, определяя $p$-ю компоненту с помощью (4) как

$$\supset_p(\langle S,T\rangle) = \cup_p(\langle \neg_p(S),T\rangle) = (S \supset T)_p.$$

Назовем $Set^{\boldsymbol{A}}$-оценкой функцию $V: \Phi_0 \to Set^{\boldsymbol{A}}(1,\Omega)$, ставящую в соответствие каждой пропозициональной букве $\pi_i$ некоторое истинностное значение $V(\pi_i): 1 \dot{\to} \Omega$. Эта функция очевидным образом продолжается на множество $\Phi$ всех формул:

(а) $V(\neg\alpha) = \urcorner \circ V(\alpha)$
(б) $V(\alpha\wedge\beta) = \cap\circ\langle V(\alpha),V(\beta)\rangle$
(в) $V(\alpha\vee\beta) = \cup\circ\langle V(\alpha),V(\beta)\rangle$
(г) $V(\alpha \supset\beta) = \supset\circ\langle V(\alpha),V(\beta)\rangle$

Будем говорить, что формула $\alpha$ $Set^{\mathbf{A}}$-общезначима (записывая как $Set^{\mathbf{A}} \vDash \alpha$) если $V(\alpha) = true \colon 1 \rightarrow \Omega$ для всех $Set^{\mathbf{A}}$-оценок $V$.

Определим оценку $V' \colon \Phi_0 \rightarrow \{0,1\}$, продолжая ее на $\Phi$ следующим образом:

1. $V'(\alpha) = 0 \Rightarrow V'(\neg\alpha) = 1$
2. $V'(\neg\neg\alpha) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 1$
3. $V'(\beta^0) = V'(\alpha \supset \beta) = V'(\alpha \supset \neg\beta) = 1 \Rightarrow V'(\alpha) = 0$
4. $V'(\alpha \supset \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 0$ или $V'(\beta) = 1$
5. $V'(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = V'(\beta) = 1$
6. $V'(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow V'(\alpha) = 1$ или $V'(\beta) = 1$
7. $V'(\alpha^0) = V'(\beta^0) = 1 \Rightarrow V'((\alpha \supset \beta)^0) = V'((\alpha \wedge \beta)^0) = V'((\alpha \vee \beta)^0) = 1$

Связь между $V$ и $V'$ получаем, положив

$$(*) \qquad V(\pi_i) = \begin{cases} true, & V'(\pi_i) = 1 \\ false, & V'(\pi_i) = 0 \end{cases}$$

***Лемма 2***. $V(\alpha) =$ *true* тогда и только тогда, когда $V'(\alpha) = 1$.

***Доказательство.*** Для $\alpha = \pi_i$ лемма истинна по определению. Далее мы прибегаем к индукции по длине формул, т.е. учитывая наши пункты 1 - 7. Пусть $\alpha = \neg\beta$ и $V(\beta) = false$, тогда

$$V(\neg\beta)_p = ({}_{\neg\circ} V(\beta))_p = \neg_\circ V(\beta)_p$$

Следовательно, $V(\alpha)_p(0) = \neg_p(V(\beta)_p(0)) = \neg_p(false_p(0)) =$ (по индуктивному предположению) $= \neg_p(\varnothing) = [p) = true_p(0)$. Отсюда $V(\alpha) = true$ и $V'(\alpha) = 1$. Точно так же проделываем в остальных случаях. ■

***Теорема.*** *Для любого топоса* $Set^{\mathbf{A}}$ $Set^{\mathbf{A}} \vDash \alpha$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_{C_1} \alpha$ *(т.е.* $\alpha$ *доказуема в* $C_1$*).*

***Доказательство***. Поскольку по лемме 2 выбор оценки $V$ произволен, а для $V'$ в [da Costa Alves 1976] доказана полнота, то это приводит к требуемому результату. ■

### 3. Исчисления Айдукевича-Ламбека в топосах

Несколько иначе выглядит ситуация для исчислений Айдукевича-Ламбека. В этом случае мы будем иметь дело не с N-категориями, как в случаях релевантной и паранепротиворечивой логики, но с S–категориями – категориями предпорядка, снабженными ковариантным бифунктором $\otimes$:

Обозначим для любого $p$ из $\boldsymbol{G} = \langle |G|, \leq, \cdot\rangle$ как $E_p$ множество $E_p = \{q\colon q \leq p\}$ которое очевидным образом будет представлять собой полугруппу с операцией

$a\cdot_p b = min(a\cdot b, p)$

а затем определяем на операции следующим образом:

для $E_r, E_q \subseteq E_p$

1. $E_r\cdot_p E_q = \{c\colon c \leq a\cdot_p b$ для некоторого $a\in E_r, b\in E_q\}$,
2. $E_r /_p E_q = \{c\in E_p\colon c\cdot_p b$ для всякого $b\in E_q\}$,
3. $E_r \backslash_p E_q = \{c\in E_p\colon a\cdot_p c$ для всякого $a\in E_r\}$.

Нетрудно видеть, что $E^+{}_p = \langle E_p, \leq, \cdot_p, /_p, \backslash_p\rangle$, где $\leq$ отождествляется с включением, будет представлять собой резидуальную полугруппу над $E_p$.

Расширяя $\boldsymbol{G}$ естественным образом до резидуальной полугруппы и обозначая $\boldsymbol{S}$ соответствующую S–категорию, мы получаем функтор $\Omega$ на объекте $p$ S-категории $\boldsymbol{S}$ как $\Omega_p = E^+{}_p$ и для любого функтора $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{S} \to Set$ обозначим как $\boldsymbol{F}_p$ значение $\boldsymbol{F}(p)$ функтора $\boldsymbol{F}$ для объекта $p$ из $\boldsymbol{S}$. Для произвольных $q$ и $p$, таких, что $p \leq q$, функтор $\boldsymbol{F}$ определяет функцию из $\boldsymbol{F}_p$ в $\boldsymbol{F}_q$ , которую мы обозначим как $\boldsymbol{F}_{pq}$. Функтор $\boldsymbol{F}$ будет рассматриваться как совокупность $\{\boldsymbol{F}_p\colon p\in |G|\}$ множеств, индексированных элементами $|G|$, снабженная отображением перехода $\boldsymbol{F}_{pq}\colon \boldsymbol{F}_p \to \boldsymbol{F}_q$ по $p \leq q$ (в частности, $\boldsymbol{F}_{pp}$ будет представлять собой функцию тождества на $\boldsymbol{F}_p$).

Определим для $p$ и $q$, таких, что $p \leq q$, функцию $\Omega_{pq}\colon \Omega_p \to \Omega_q$, отображающую каждый $E_r\in E^+{}_p$ в $E_s\in E^+{}_q$, т.е. $\Omega_{pq}(E_r) = E_s\in E^+{}_q$. Постоянный функтор 1: $\boldsymbol{S} \to Set$ может быть определен с помощью условий $1_p = \{\varnothing\}$ для $p\in\boldsymbol{S}$ и $1_{pq} = id_{\{\varnothing\}}$ при $p \leq q$. Классификатор подобъектов $true$: $1 \to \Omega$ представляет собой естественное преобразование, чья $p$-я компонента $true_p$: $\{\varnothing\} \to \Omega_p$ будет определяться равенством $true_p\,(\varnothing) = E_p$. Таким образом, функция $true$ выбирает наибольший элемент из каждой резидуальной полугруппы над $E_p$.

Можно убедиться, что $\Omega$-аксиома выполняется в категории (топосе) $Set^{\boldsymbol{S}}$ поскольку доказательство этого факта требует использование свойств наследственных множеств (как в [Гольдблатт 1983] для случая интуиционистской логики). Поскольку наши $E_p$-множества являются конаследственными, то получаем, что $Set^{\boldsymbol{S}}$ также будет топосом, и мы можем начать определять соответствующие истинные стрелки.

Начнем со стрелки $\otimes$. Мы получаем $\otimes$: $\Omega\times\Omega \dot{\to} \Omega$ как характеристическую стрелку для $\langle true, true\rangle$. Ее $p$-я компонента удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}\otimes_p(\langle S,R\rangle) &= \otimes_p(\langle E_s,E_t\rangle) = \\ &= \{q\colon q \le p \text{ и } \langle\Omega_{qp}(E_s), \Omega_{qp}(E_t)\rangle = \langle E_p,E_p\rangle\} = \\ &= \{q\colon q \le p \text{ и } q\in(E_s\otimes E_t) \cap E_p\} = \\ &= (E_s\otimes E_t)_p = E_s\cdot_p E_t\end{aligned}$$

Стрелки $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$ определяем как $\Rightarrow$: $\Omega\times\Omega \dot{\to} \Omega$ и $\Leftarrow$: $\Omega\times\Omega \dot{\to} \Omega$, такие, что

$$\Rightarrow_p(\langle E_s,E_t\rangle) = \{q\colon q\in(E_s\Rightarrow E_t) \cap E_p\} = (E_s\Rightarrow E_t)_p = E_s\bullet_p E_t$$

и

$$\Leftarrow_p(\langle E_s,E_t\rangle) = \{q\colon q\in(E_s\Leftarrow E_t) \cap E_p\} = (E_s\Leftarrow E_t)_p = E_s\backslash_p E_t$$

соответственно.

Установим связь между $Set^{\mathbf{S}}$- и GS–семантиками с помощью следующей теоремы.

***Теорема 1***. *$Set^{\mathbf{S}}\vDash X\to x$ тогда и только тогда, когда $X\to x$ является GS-значимой.*

***Доказательство***. Как известно [Vasyukov 1995, p.325], отображение $h$: $M \to P(|M|)$ является мономорфизмом в резидуальную полугруппу над $((|M|, \le, \cdot)$. Более того, $\vdash X \to x$ тогда и только тогда, когда $X\to x$ является GS–значимой.

Воспользуемся оценкой $V$: $Pr \to P(|M|)$, чтобы определить $Set^{\mathbf{S}}$-оценку $V'$: $Pr \to Set^{\mathbf{S}}(1,\Omega)$. Для каждого $x$ из $Pr$ мы получаем истинностное значение $V'(x)$: $1 \dot{\to} \Omega$ из $Set^{\mathbf{S}}$, где $p$–я компонента $V'(x)_p$: $\{0\} \to \Omega_p$ определяется как

(*) $$V'(x)_p(0) = V(x) \cap E_p = V(x)_p.$$

Если $p \le q$, то $V(x) \cap E_p \cap E_q = V(x) \cap E_q$ и $V'$ представляет собой естественное преобразование.

Расширим оценку $V'$: $Pr \to Set^{\mathbf{S}}(1,\Omega)$ до функции $\underline{V}'$: $Tp \to Set^{\mathbf{S}}(1,\Omega)$ индукцией по длине формулы, начиная с (*). Пусть $X = x_1\cdot x_2$. Тогда $\underline{V}'(x_1\cdot x_2)_p = (\otimes\circ\langle\underline{V}'(x_1),\underline{V}'(x_2)\rangle)_p = \otimes_p\circ\langle\underline{V}'(x_1),\underline{V}'(x_2)\rangle_p$ и

$$\begin{aligned}&\underline{V}'(x_1\cdot x_2)_p\,(0) = \otimes_p(\langle\underline{V}'(x_1),\underline{V}'(x_2)\rangle_p(0)) = \\ &\otimes_p(\langle\underline{V}(x_1),\underline{V}(x_2)\rangle_p) \text{ (по индуктивному предположению)} = \\ &(\underline{V}(x_1)\otimes\underline{V}(x_2))_p = (\underline{V}(x_1)\cdot\underline{V}(x_2))_p = \underline{V}(x_1\otimes x_2).\end{aligned}$$

В случае связок $\Rightarrow$ и $\Rightarrow$ результаты будут те же самые. Таким образом, для $X \to x$ мы соответственно получаем $p$-ю компоненту $\underline{V}'(X)_p(0) \to \underline{V}'(x)_p(0)$, которая отвечает $\underline{V}(X)_p \le \underline{V}(x)_p$.

***Следствие 1***. *Если $X \to x$ является $Set^{\mathbf{S}}$-значимой, то $X \to x$ является GS-значимой.*

***Доказательство***. Пусть $\underline{V}'$ будет $Set^{\mathbf{S}}$-оценкой, определенной по (*) для соответствующей оценки $\underline{V}$: $Tp \to P(|M|)$. Если $X \to x$ является $Set^{\mathbf{S}}$-значимым, то для произвольного $p$ мы получаем, что $\underline{V}'(X)_p(0) \hookrightarrow \underline{V}'(x)_p(0)$ будет стрелкой включения и, следовательно, $\underline{V}(X)_p \leq \underline{V}(x)_p$. Ввиду произвольности последний результат справедлив для $M$, т.е. $\underline{V}(X) \leq \underline{V}(x)$, и принимая во внимание свободу выбора $M$, $X \to x$ будет $GS$-значимой. ■

Чтобы доказать лемму, обратную следствию 1, будем действовать стандартным образом. Для данной оценки $\underline{V}'$: $Tp \to Set^{\mathbf{S}}(1,\Omega)$ мы сконструируем оценку $\underline{V}$: $Tp \to P(|M|)$. Стрелка $\underline{V}'(x)$: $1 \to \Omega$ выбирает для каждого $q \in |M|$ подмножество $\underline{V}'(X)_q(0)$ множества $E_q$. Определим $\underline{V}(x)$ как объединение всех таких подмножеств. Тогда $\underline{V}(x) = \cup\{\underline{V}'(X)_q(0)\colon q \in |M|\}$, т.е.

(**) $r \in \underline{V}(x)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $q$ мы имеем $r \in \underline{V}'(x)_q(0)$.

***Лемма 1***. *Для каждого $p \in |M|$, справедливо $\underline{V}(x) \cap E_p = \underline{V}'(x)_p(0)$, где множество $\underline{V}(x)$ определяется по* (**).

***Доказательство***. Из (**) очевидно, что $\underline{V}(x)_p(0) \subseteq \underline{V}(x)$. Кроме того, поскольку $\underline{V}'(x)$: $1 \to \Omega$ и $\underline{V}'(x)_p$: $\{0\} \to \Omega$, мы получаем $\underline{V}'(x)_p(0) \subseteq E_p$. Следовательно, $\underline{V}'(x)_p(0) \subseteq \underline{V}(x) \cap E_p$. Наоборот, пусть $r \in \underline{V}(x) \cap E_p$. Тогда $r \leq p$ и $r \in \underline{V}'(x)_q(0)$ для некоторого $q$. Ввиду $\underline{V}'(x)_q(0) \subseteq E_q$ мы получаем $r \leq q$. Поэтому $\underline{V}'(x)$ будет естественным преобразованием и выполняется $\underline{V}'(x)_r(0) \cap E_q = \underline{V}'(x)_q(0)$. Ввиду того, что $r \leq p$, мы аналогично получаем $\underline{V}'(x)_r(0) \cap E_p = \underline{V}'(x)_p(0)$. Поскольку $r \in \underline{V}'(x)_q(0)$ и $r \in E_r$, то с помощью двух последних доказанных тождеств мы выводим, что $r \in \underline{V}'(x)_p(0)$. Таким образом, $\underline{V}(x) \cap E_p \subseteq \underline{V}'(x)_p(0)$. ■

Теперь пусть $\underline{V}$ будет произвольной S-оценкой и $\underline{V}'$ - оценкой, определяемой (*), т.е. $\underline{V}'(x)_p(0) = \underline{V}(x)_p$. Тогда справедливо следующее тождество

$\cup\{\underline{V}'(x)_p(0)\colon p \in |M|\} = \cup\{\underline{V}(x)_p\colon p \in |M|\} = \underline{V}(x)$,

согласно свойству конаследственных множеств. Таким образом, применяя (**) к случаю $\underline{V}'$, мы возвращаемся к $\underline{V}$. Этот факт наряду с леммой 1 показывает нам, что (*) и (**) взаимно коррелируют и устанавливают существование биекции между S-оценкой и $Set^{\mathbf{S}}$-

оценкой. Это позволяет нам рассматривать оценку $\underline{V}$ как выведенную из оценки $\underline{V}'$ по определению (**).

***Следствие 2***. *Если $X \to x$ GS-значима*, то $X \to x$ $Set^{\mathbf{S}}$*-значима*.

***Доказательство***. Пусть $\underline{V}'$ будет произвольной $Set^{\mathbf{S}}$-оценкой и пусть $\underline{V}$: $Tp \to P(|M|)$ будет S-оценкой, определенной по (**). Поскольку $X \to x$ является GS-значимой, то $\underline{V}(X)_p \leq \underline{V}(x)_p$ и, соответственно, для каждого $p$ мы получаем $\underline{V}(X)_p \cap E_p \subseteq \underline{V}(x)_p \cap E_p$, а по лемме 1 это означает $\underline{V}'(X)_p(0) \subseteq \underline{V}'(x)_p(0)$. Наконец, мы получаем стрелку включения $\underline{V}'(X)_p(0) \hookrightarrow \underline{V}'(x)_p(0)$. ■

Следствия 1 и 2 вместе дают нам доказательство нашей теоремы 1. ■

## Глава восьмая. Элементарная теория категорий

### 1. Аксиоматика элементарной теории категорий

С точки зрения логики теория категорий может рассматриваться как элементарная теория, чьи «категорные» нелогические аксиомы добавлены к первопорядковому исчислению с равенством. Подобный подход был реализован еще в 60-70-е годы У. Хэтчером, Ж.Блан и М.Р. Донадью и др. Формально это делается следующим образом.

Язык элементарной теории категорий ETAC [Blanc Donnadieu 1976, с.4] состоит из:

(i) счетного множества переменных двух типов:
переменных типа объект: $x_1, x_2, \ldots$
переменных типа стрелки: $f, g, h, \ldots$

(ii) логических констант: $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \neg, \exists, \forall, =$;

(iii) тернарного предиката $D$(-, -, -), где первая переменная имеет тип стрелки, а две других переменных являются переменными типа объект ($D(f,x_1,x_2)$ означает «$f$ есть стрелка из $x_1$ в $x_2$ »);

(iv) тернарного предиката Γ(-, -, -), где все переменные имеют тип стрелки ($\Gamma(f,g,h)$ означает «$h$ является композицией $f$ и $g$»).

ETAC аксиоматизируется с помощью следующих схем аксиом:

Ax1. $\forall f\, \exists! x_1,x_2\, [D(f,x_1,x_2)]$

Ax2. $\forall x_1\, \exists i\, [\Phi(x_1,i) \wedge D(i,x_1,x_1)]$, где $\Phi(x_1,i)$ представляет собой формулу $\forall f,g,x_2,x_3[D(f,x_1,x_2) \wedge D(g,x_3,x_1) \Rightarrow \Gamma(i,f,f) \wedge \Gamma(g,i,g)]$

Ax3. $\forall h\, \Gamma(f,g,h) \Rightarrow \exists x_1,x_2,x_3[D(f,x_1,x_2) \wedge D(g,x_2,x_3) \wedge D(h,x_1,x_3)]$

Ax4. $D(f,x_1,x_2) \wedge D(g,x_2,x_3) \Rightarrow \exists\, h\, \Gamma(f,g,h)$

Ax5. $\Gamma(f,g,h) \wedge \Gamma(f,g,h') \Rightarrow h = h'$

Ax6. $\Gamma(f,g,k) \wedge \Gamma(g,h,l) \wedge \Gamma(f,l,m) \wedge \Gamma(k,h,m') \Rightarrow m = m'$

Существующие варианты аксиоматизации элементарной теории позволяют выразить и более сложные категорные структуры и конструкции. При этом они могут основываться и на другом наборе нелогических предикатов. В качестве примера рассмотрим аксиоматизацию элементарной теории категорий ***D*** У. Хэтчера [Hatcher 1978, p.387-389].

Пусть $D$ будет первопорядковым языком с равенством, включающим следующие нелогические понятия: символ тернарного отношение $K$, одноместный предикат $F$, константы 1 и $A$, одноместные функциональные символы $D$, $C$, $\Pi_1$ и $\Pi_2$, и бинарный функциональный символ $\times$. Собственные аксиомы элементарной теории категорий делятся на четыре группы. Первая группа - это просто первопорядковые аксиомы элементарной теории категорий:

I. <u>Теория категорий</u>

1. $\forall x\, [D(C(x)) = C(x) \wedge C(D(x)) = D(x)]$
2. $\forall x,y,z\, [K(x,y,z) \wedge K(x,y,w) \Rightarrow z = w]$
3. $\forall x\, \forall y\, \exists z\, [K(x,y,z) \Leftrightarrow (C(x) = D(y))]$
4. $\forall x,y,z\, [K(x,y,z) \Rightarrow (D(x) = D(z) \wedge C(z) = C(y))]$
5. $\forall x\, [K(D(x),x,x) \wedge K(x,C(x),x)]$
6. $\forall x,y,z,w,x',y',z'[K(x,y,z) \wedge K(x,w,x',) \wedge K(x,x',y) \wedge K(z,w,z') \Rightarrow y' = z']$

Интуитивно наш универсум представляет собой универсум стрелок, $K(x,y,z)$ означает, что $z$ есть композиция $x$ и $y$, что можно записать также как «$yx = z$», $D(x)$ означает область определения $x$, а $C(x)$ означает область значения $x$. Стрелка $x$ будет представлять собой объект, что записывается $Ob(x)$, если $x = D(x)$. Далее для объектов будут использоваться заглавные буквы $X$, $Y$, $Z$ и т.д.

II. <u>Объекты 1 и $A$</u>

1. 1 *есть единственный терминальный объект.*
2. $Ob(A) \wedge A \neq 1$
3. $\exists x\, [D(x) = 1 \wedge C(x) = A]$
4. 1 *представляет собой генератор* (*порождающий объект*). *Символически:*

$\forall f,g[D(f)=D(g)\wedge C(f)=C(g) \Rightarrow \forall h(D(h)=1 \wedge C(h)=D(f) \wedge fh=gh) \Rightarrow f=g)]$

Определим элемент объекта X как стрелку $1 \rightarrow X$ (если использовать запись $f : A \rightarrow B$ для стрелки с областью определения $A$ и областью значения $B$). Отсюда аксиома II.3 говорит, что $A$ не пусто, а II.4 утверждает, что стрелки представляют собой функции, т.е. параллельные стрелки, совпадающие на элементах области определения, тождественны. Интуитивно 1 является одноэлементным множеством, а $A$ есть непустое базисное множество.

III. Произведение объектов

1. $\forall X,Y$ (*$X \times Y$ есть единственный объект - произведение $X$ и $Y$ - по отношению к некоторым, не обязательно единственным, проекциям*).

   (понятие проекции вводится с помощью предиката $Pr(x,y)$, означающего, что $x$ и $y$ являются проекциями, формально определяющийся как

   $D(x) = D(y) \wedge \forall f \forall g\ [(D(f) = D(g) \wedge C(f) = C(g) \wedge C(y) = C(x)) \Rightarrow$

   $\exists! z\ (xz = f \wedge gz = g)])$
2. $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$.
3. $X \times Y = X \times Z \Rightarrow Y = Z$.
4. $[\varphi(1) \wedge \forall x(\varphi(x) \wedge Ob(x) \Rightarrow \varphi(A \times x))] \Rightarrow \forall x(Ob(x) \Rightarrow \varphi(x))$,

   где $\varphi(x)$ есть любая формула языка элементарной теории категорий.

Интуитивно единственными объектами элементарной теории категорий ***D*** являются $A^n$, $A^n \times A^m = A^{n+m}$. Таким образом произведения объектов не просто единственно с точностью до изоморфизма, но тождественно единственно.

IV. Стандартные проекции

1. $\Pi_1(1) = 1$; $\Pi_1(A) = A$; $\forall X(X \neq 1 \Rightarrow \Pi_1(X){:}\ X \to A)$
2. $\Pi_2(1) = 1$; $\Pi_2(A) = A \to 1$; $\forall X(D(\Pi_2(X)) = X)$
3. *Для каждого объекта $X$ либо $X = 1$, либо $X$ представляет собой произведение объектов $A$ и $C(\Pi_2(X))$ по отношению к проекциям $\Pi_1(X){:}\ X \to A$ и $\Pi_2(X){:}\ X \to C(\Pi_2(X))$.*

Заметим, что аксиомы III.2-III.4 истинны для натуральных чисел, когда 1 интерпретируется как нуль. Аксиома III.3 представляет собой более общую форму аксиомы Пеано $A \times X = A \times Y \Rightarrow X = Y$, а III.4 является первопорядковой формулировкой пеановской аксиомы индукции. Отсутствует только аксиома $A \times X \neq 1$, но она может быть получена в качестве теоремы ***D***. Более того, подтеория ***D***, состоящая из чистых объектов (когда и квантификация ограничивается только объектами), содержит в себя разрешимую и полную первопорядковую теорию арифметики М.Пресбургера [Presburger 1929]. Фактически вся теория объектов ***D*** эквивалентна пресбургеровской арифметике, если устранить имеющуюся функцию предшествования $C(\Pi_2(X))$ на объектах.

## 2. Выразительные возможности элементарной теории категорий

Докажем некоторые утверждения, позволяющие продемонстрировать на примере теории $\boldsymbol{D}$ как работает элементарная теория категорий.

***Теорема* 1**. $A \ncong 1$.

***Доказательство***. Если $A$ изоморфен 1, то он является терминальным объектом и, следовательно, равным 1, что противоречит II.2. ■

***Теорема* 2**. *$A$ состоит, по меньшей мере, из двух элементов.*

***Доказательство***. Если $A$ состоит только из одного элемента, то по II.4 он изоморфен 1, что противоречит теореме 1. ■

***Теорема* 3**. $\forall X\,(X \times 1 = X)$.

***Доказательство***. $X$ является произведением $X$ и 1. ■

***Теорема* 4**. $X \times Y = Y \times X$.

***Доказательство***. $X \times Y$ и $Y \times X$ оба являются произведением объектов $X$ и $Y$. ■

***Теорема* 5**. Каждый объект $X$ состоит их элементов.

***Доказательство***. Доказывается индукцией по $X$. Свойство, описываемое теоремой, имеет место для 1, поскольку $1\colon 1 \to 1$. Оно имеет место для $A$ по II.3. Если допустить, что этим свойством обладает $X$, то тогда $A \times X$ будет иметь в качестве элементов по меньшей мере стрелку произведения элемента $A$ и элемента $X$. Таким образом, теорема будет выполняться согласно III.4. ■

***Следствие***. $\forall X\,(A \times X \neq 1)$.

***Доказательство***. Каждый объекты вида $A \times X$ имеет по меньшей мере два элемента, поскольку $X$ имеет по меньшей мере один элемент по теореме 5, а $A$ имеет по меньшей мере два по теореме 2 (возьмите два различных отображения произведения двух элементов $A$ и одного элемента $X$). Но 1 состоит лишь из одного элемента.

Отсюда $A \times X \ncong 1$ и таким образом не равно 1. ■

***Теорема* 6**. $\forall X\,[X \neq 1 \Rightarrow X = A \times C(\Pi_2(X))]$.

***Доказательство***. $A \times C(\Pi_2(X))$ представляет собой единственной объект - произведение $A$ и $C(\Pi_2(X))$, а $X$ является таким объектом по IV.3. ■

***Следствие***. $\forall X\,[X \neq 1 \wedge X \neq A \Rightarrow C(\Pi_2(X)) \neq 1]$.

***Доказательство***. Поскольку $X \neq 1$, то $X = A \times C(\Pi_2(X))$. Если $C(\Pi_2(X)) = 1$, то $X = A \times 1 = A$, что противоречит второй гипотезе. ■

***Теорема* 7**. $A \times X \neq X$.

***Доказательство***. Если $A \times X = X = 1 \times X$, то $A = 1$ по III.3. Но $A \neq 1$ по II.2. ■

***Следствие***. $\forall X\,[X \neq 1 \Rightarrow C(\Pi_2(X)) \neq X]$.

***Доказательство***. Если $X \neq 1$, то $C(\Pi_2(X)) = X$ влечет $A \times X = X$ вопреки теореме 7. ■

***Теорема* 8**. $\forall X\,[C(\Pi_2(A \times X)) = X]$.

***Доказательство***. $A \times X \neq 1$ согласно следствию теоремы 5, отсюда $A \times C(\Pi_2(A \times X)) = A \times X$ по теореме 6 и $C(\Pi_2(A \times X)) = X$ по III.3. Таким образом, $C(\Pi_2(X))$ является единственным предшественником $X$. $A \times Y$ влечет $Y = C(\Pi_2(X))$. ■

Введем теперь понятие степени, воспользовавшись следующим определением:

***Определение***. $A^0 = 1$, $A^{n+1} = A \times A^n$.

С помощью данного определения и аксиомы III.5 нетрудно убедиться, что $A^2 \neq A$, $A^{n+1} \neq A$, $A^n \neq A^m$ для $n \neq m$.

***Определение* 1.** $X \leq Y$ (*$X$ является компонентом $Y$*) означает $\exists Z\,(X \times Z = Y)$.

***Определение* 2**. $X \langle\, Y$ означает $X \leq Y$ и $Y \leq X$.

Заметим, что если $X \leq Y$, то существует единственный $Z$, такой, что $X \times Z = Y$. Назовем этот $Z$ *дополнением $X$ до $Y$*. При принятой арифметической интерпретации $X \leq Y$ представляет собой обычный частичный порядок. Это позволяет сократить доказательство следующих теорем.

***Теорема* 9**. *$A$ является компонентом $X$ тогда и только тогда, когда $X \neq 1$.*

***Доказательство***. Если $A \times Z = X$, то $X \neq 1$. В обратную сторону результат следует из IV.3. ■

***Следствие***. $X \times Y = 1 \Rightarrow X = 1 \wedge Y = 1$.

***Доказательство***. Если $X \neq 1$, то $A$ является компонентом $X$ и $A \times (Z \times Y) = 1$ для некоторого $Z$. Но это невозможно, откуда $X = 1$ и $Y = 1$. ■

***Теорема* 10**. *Отношение $\leq$ является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным.*

***Доказательство***. Для антисимметричности пусть $X \times Z = Y$ и $Y \times W = X$. Тогда $X \times (Z \times W) = X$ и $Z \times W = 1$. Тогда $Z = 1$ и $W=1$ и $X = Y$. ■

***Теорема* 11.** $X \leq Y \leq A \times X \Rightarrow Y = X \vee Y = A \times X$.

***Доказательство***. Согласно гипотезе $Y \times Z = A \times X$ для некоторого $Z$. Если $Z = 1$, то $Y = A \times X$. Если $Z \neq 1$, то $A \times (Y \times W) = A \times X$ для некоторого $W$ и таким образом $Y \times W = X$, $Y \leq X$ и $Y = X$ по теореме 10. ■

***Следствие***. $\forall X, Y\ (Y \leq A \times X \Rightarrow Y \leq X \vee Y = A \times X)$.

***Доказательство*** очевидно. ■

***Теорема* 12.** $X \leq Y \vee Y \leq X$.

***Доказательство***. Доказывается индукцией по $Y$. ■

## 3. Элементарная теория S-категорий

То обстоятельство, что вся теория объектов ***D*** эквивалентна пресбургеровской арифметике, отнюдь не означает, что универсум элементарной теории категорий обязательно носит арифметический характер. Покажем на примере, что соответствующие расширения элементарной теории категорий позволяют получить и иное строение ее универсума (см. [Vasyukov 1995, p.328]).

Вернемся к аксиоматике элементарной теории категорий ETAC и расширим ее следующими новыми аксиомами, описывающими действие трех новых операторов $\otimes$, /, \ на объектах:

Ax7. $\forall x_1 \forall x_2 \exists! f\, D(f, x_1, x_2)$

Ax8. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [D(f, x_1, x_2) \Rightarrow D(g, x_1 \otimes x_3, x_2 \otimes x_3) \wedge D(h, {}_3 \otimes x_1, x_3 \otimes x_2)]$

Ax9. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\ [D(f, x_1 \otimes x_2, x_3) \Leftrightarrow D(g, x_1, x_3 / x_2) \Leftrightarrow D(f, x_2, x_1 \backslash x_3)]$

Как нетрудно заметить, аксиома Ax7 превращает элементарную теорию категорий в элементарную теорию категорий предпорядка. Теорию ETAC + (Ax7)-(Ax9) обозначим как SETAC, т.е. аксиоматическую теорию S-категорий. Таким образом наш замысел ясен - добавление этих аксиом должно привести к тому, что мы получаем элементарную теорию категорий, моделирующую исчисления Айдукевича-Ламбека. Чтобы доказать, что это действительно так, построим перевод из языка LSC в язык SETAC.

Рассмотрим функцию $tr_1$ из языка LSC в язык SETAC, определяя ее следующим образом:

$tr_1\ (x_i) = x_i$,

$tr_1\ (x_1 \cdot x_2) = tr_1\ (x_1) \otimes tr_1\ (x_2)$,

$tr_1\ (x_1 / x_2) = tr_1\ (x_1) / tr_1\ (x_2)$,

$tr_1\ (x_1 \backslash x_2) = tr_1\ (x_1) \backslash tr_1\ (x_2)$,

$tr_1(x_1 \to x_2) = D(f, tr_1(x_1), tr_1(x_2))$.

***Лемма* 1**. *Если* $\vdash_{LSC} x_1 \to x_2$, *то* $\vdash_{SETAC} D(f, x_1, x_2)$.

Доказательство проводится непосредственной индукцией по длине доказательства $x_1 \to x_2$ в LSC, поэтому мы опускаем его.

Поскольку язык LSC обладает слишком бедными выразительными возможностями, чтобы обратный перевод адекватно передавал структуру языка SETAC в LSC, то прибегнем к следующему приему: будем строить перевод не из языка SETAC в язык LSC, но в метаязык LSC, предоставляющий в наше распоряжение гораздо более широкие возможности.

Рассмотрим отображение из языка SETAC в метаязык LSC, удовлетворяющее следующим условиям:

$tr_2(x_i) = x_i$,

$tr_2(x_1 \otimes x_2) = tr_2(x_1) \cdot tr_2(x_2)$,

$tr_2(x_1 / x_2) = tr_2(x_1) / tr_2(x_2)$,

$tr_2(x_1 \backslash x_2) = tr_2(x_1) \backslash tr_2(x_2)$,

$tr_2(f) = x_i \to x_j$,

$tr_2(D(f, x_1, x_2)) = [tr_2(f)\ \textit{есть}{\cdot} x_1 \to x_2\ \textit{и}\ \vdash_{LSC} x_1 \to x_2]$,

$tr_2(\Gamma(f,g,h)) = [\textit{для}\ tr_2(f) =\cdot\ x_i \to x_j\ \textit{и}\ tr_2(g) =\cdot\ x_j \to x_k\ \textit{и}\ tr_2(h) = x_i \to x_k\ \textit{если}\ \vdash_{LSC} tr_2(f)\ \textit{и}\ \vdash_{LSC} tr_2(g),\ \textit{то}\ \vdash_{LSC} tr_2(h)]$,

$tr_2(f = f') = [tr_2(f)\ \textit{и}\ tr_2(f')\ \textit{один и тот же}]$,

$tr_2(A \Rightarrow B) = [\textit{если}\ tr_2(A),\ \textit{то}\ tr_2(B)]$,

$tr_2(A \Leftrightarrow B) = [tr_2(A)\ \textit{тогда и только тогда, когда}\ tr_2(B)]$,

$tr_2(A \wedge B) = [tr_2(A)\ \textit{и}\ tr_2(B)]$,

$tr_2(A \vee B) = [tr_2(A)\ \textit{или}\ tr_2(B)]$,

$tr_2(\neg A) = [\textit{не}\ tr_2(A)]$,

$tr_2(\forall x_i\, A) = [\textit{для каждого}\ x_i,\ tr_2(A)]$,

$tr_2(\exists x_i\, A) = [\textit{для некоторого}\ x_i,\ tr_2(A)]$,

$tr_2(\forall f\, A) = [\textit{для каждого}\ tr_2(f),\ tr_2(A)]$,

$tr_2(\exists f\, A) = [\textit{для некоторого}\ tr_2(f),\ tr_2(A)]$,

где $A$, $B$ являются формулами языка SETAC.

Теперь мы в состоянии доказать следующую лемму:

***Лемма* 2**. *Если* $\vdash_{SETAC} A$, *то* $\vdash_{LSC} tr_2(A)$.

***Доказательство***. Проводится индукцией по длине доказательства $A$ в SETAC. ■

В качестве следствия леммы 2 мы получаем, что если $\vdash_{SETAC}$ $D(f, x_1, x_2)$, то $\vdash_{LSC} x_1 \to x_2$, что вместе с леммой 1 дает нам следующую теорему вложения для LSC:

***Теорема* 3**. *$\vdash_{LSC} x_1 \to x_2$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{SETAC} D(f, x_1, x_2)$.*

## 4. Эквивалентность расширений элементарной теории категорий и систем категорной логики

Рассмотренная эквивалентность SETAC и LSC наводит на мысль о возможной эквивалентности элементарной теории категорий и систем категорной логики в том виде, как они были сформулированы ранее. Если они действительно эквивалентны, то можно было бы говорить о том, что понятие категории в категорной логике соответствует интуитивным конструкциям, лежащим в основе теории категорий.

Рассмотрим функцию $tr_3$ из языка CatLog категорной логики в язык ETAC элементарной теории категорий, определяя ее следующим образом:

$tr_3(A) = x_A$ (переменная типа объект в языке ETAC);

$tr_3(f) = f$ (переменная типа объект в языке ETAC);

$tr_3(f\colon A \vdash B) = D(f, tr_3(A), tr_3(B))$;

$tr_3(gf) = \Gamma(tr_3(f), tr_3(g), h) = \Gamma(f,g,h)$, где $h = tr_3(h) = gf$;

$tr_3(g = f) = [tr_3(g) = tr_3(f)]$.

***Лемма* 3**. *Если $f\colon A \vdash B$ есть стрелка (дедуктивной) категории, то $\vdash_{ETAC} D(f, x_A, x_B)$.*

***Доказательство***. Доказательство проводится индукцией по конструкции стрелок. ■

Как и в предыдущем случае, обратный перевод будет осуществляться не из языка ETAC в язык CatLog, но в метаязык CatLog, что естественным образом облегчает задачу. Рассмотрим функцию $tr_4$ из ETAC в метаязык (дедуктивной) категории, удовлетворяющую следующим условиям:

$tr_4(x_i) = A_i$,

$tr_4(f) = f$,

$tr_4(D(f, x_1, x_2)) = (tr_4(f)\colon tr_4(x_1) \vdash tr_4(x_2))$,

$tr_4(\Gamma(f, g, h)) = (tr_4(h) = tr_4(g)tr_4(f))$,

$tr_4(f = f') = (tr_4(f) = tr_4(f')')$,

$tr_4(\alpha \Rightarrow \beta) = [$*если* $tr_4(\alpha)$, *то* $tr_4(\beta)]$,

$tr_4$ $(\alpha \Leftrightarrow \beta) = [tr_4(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $tr_4(\beta)]$,

$tr_4$ $(\alpha \wedge \beta) = [tr_4$ $(\alpha)$ *и* $tr_4$ $(\beta)]$,

$tr_4$ $(\alpha \vee B) = [tr_4$ $(\alpha)$ *или* $tr_4$ $(\beta)]$,

$tr_4$ $(\neg\alpha) = [$*не* $tr_4$ $(\alpha)]$,

$tr_4$ $(\forall x_i\ \alpha) = [$*для каждого* $A_i$, $tr_4$ $(\alpha)]$,

$tr_4$ $(\exists x_i\ \alpha) = [$*для некоторого* $A_i$, $tr_4$ $(\alpha)]$,

$tr_4$ $(\forall f\ \alpha) = [$*для каждого* $f$, $tr_4$ $(\alpha)]$,

$tr_4$ $(\exists f\ \alpha) = [$*для некоторого* $f$, $tr_4$ $(\alpha)]$,

где $\alpha$, $\beta$ являются формулами языка ETAC.

Следующим шагом является доказательство леммы:

***Лемма* 4**. *Если* $\vdash_{ETAC} \alpha$, *то* $tr_4(\alpha)$ *является стрелкой (дедуктивной) категории.*

***Доказательство***. Проводится индукцией по длине доказательства $\alpha$ в ETAC. ■

В качестве следствия леммы 4 получаем, что если $\vdash_{ETAC} D(f, x_1, x_2)$, то $f$: $A_1 \vdash A_2$ есть стрелка категории, что вместе с леммой 3 дает нам следующую теорему вложения для CatLog:

***Теорема* 1**. $f$: $A_1 \vdash A_2$ *представляет собой стрелку (дедуктивной) категории тогда и только тогда, когда* $\vdash_{ETAC} D(f, x_1, x_2)$.

Пополним теперь аксиоматику элементарной теории категорий ETAC за счет следующих аксиом, описывающих свойства оператора $\supset$ на объектах, новой константы T и операторов $\ulcorner(\text{-})\urcorner$, $(\text{-})^s$ на стрелках:

Ax10. $\forall f, x_1, x_2\ (D(f, x_1, x_2) \Rightarrow D(\ulcorner f \urcorner, \mathrm{T}, x_1 \supset x_2))$

Ax11. $\forall f, x_1, x_2\ (D(f, \mathrm{T}, x_1 \supset x_2) \Rightarrow D(f^s, x_1, x_2))$

Ax12. $\forall f, x_1, x_2\ (D(f, x_1, x_2) \Rightarrow (\ulcorner f \urcorner^s = f))$

Ax13. $\forall f, x_1, x_2\ (D(f, x_1, x_2) \Rightarrow (\ulcorner f^s \urcorner = f))$

Будем называть теорию ETAC+(Ax10)-(A13) элементарной теорией экспоненциальных категорий и обозначим ее как EETAC. Докажем, что EETAC будет эквивалентна дедуктивной экспоненциальной категории. Рассмотрим вначале функцию-перевод $tr_5$ из языка CatLog в язык EETAC, определяя ее следующим образом:

$tr_5(A) = x_A$ (переменная типа объект в языке EETAC);

$tr_5(f) = f$ (переменная типа объект в языке EETAC);

$tr_5(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$;

$tr_5(A \supset B) = x_A \supset x_B$;

$tr_5(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner tr_5(f) \urcorner$;

$tr_5(f^s) = tr_5(f)^s$;

$tr_5(f\colon A \vdash B) = D(f, tr_5(A), tr_5(B))$;

$tr_5(gf) = \Gamma(tr_5(f), tr_5(g), h) = \Gamma(f,g,h)$, где $h = tr_5(h) = gf$;

$tr_5(g = f) = [tr_5(g) = tr_5(f)]$.

***Лемма* 5**. *Если $f\colon A \vdash B$ есть стрелка (дедуктивной) экспоненциальной категории, то $\vdash_{EETAC} D(f, x_A, x_B)$.*

***Доказательство***. Доказательство проводится индукцией по конструкции стрелок. ■

Обратный перевод будет осуществляться не из языка EETAC в язык CatLog, но в метаязык CatLog. Рассмотрим функцию $tr_6$ из языка EETAC в метаязык (дедуктивной) категории, удовлетворяющую следующим условиям:

$tr_6(x_i) = A_i$,

$tr_6(f) = f$,

$tr_6(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$;

$tr_6(x_1 \supset x_2) = tr_6(x_1) \supset tr_6(x_2)$;

$tr_6(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner tr_6(f) \urcorner$;

$tr_6(f^s) = tr_6(f)^s$;

$tr_6(D(f, x_1, x_2)) = (tr_6(f)\colon tr_6(x_1) \vdash tr_6(x_2))$,

$tr_6(\Gamma(f, g, h)) = (tr_6(h) = tr_6(g)tr_4(f))$,

$tr_6(f = f') = (tr_6(f) = tr_6(f')')$,

$tr_6(\alpha \Rightarrow \beta) = [$*если* $tr_6(\alpha)$, *то* $tr_6(\beta)]$,

$tr_6(\alpha \Leftrightarrow \beta) = [tr_6(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $tr_6(\beta)]$,

$tr_6(\alpha \wedge \beta) = [tr_6(\alpha)$ *и* $tr_6(\beta)]$,

$tr_6(\alpha \vee B) = [tr_6(\alpha)$ *или* $tr_6(\beta)]$,

$tr_6(\neg\alpha) = [$*не* $tr_6(\alpha)]$,

$tr_6(\forall x_i\, \alpha) = [$*для каждого* $A_i$, $tr_6(\alpha)]$,

$tr_6(\exists x_i\, \alpha) = [$*для некоторого* $A_i$, $tr_6(\alpha)]$,

$tr_6(\forall f\, \alpha) = [$*для каждого* $f$, $tr_6(\alpha)]$,

$tr_6(\exists f\, \alpha) = [$*для некоторого* $f$, $tr_6(\alpha)]$,

где $\alpha$, $\beta$ являются формулами языка EETAC.

Следующим шагом является доказательство леммы:

***Лемма* 6**. *Если $\vdash_{EETAC} \alpha$, то $tr_6(\alpha)$ является стрелкой (дедуктивной) экспоненциальной категории.*

***Доказательство***. Проводится индукцией по длине доказательства $\alpha$ в EETAC. ■

В качестве следствия леммы 6 получаем утверждение, что если $\vdash_{EETAC} D(f, x_1, x_2)$, то $f\colon A_1 \vdash A_2$ есть стрелка экспоненциальной категории. Это вместе с леммой 6 дает нам следующую теорему вложения для CatLog:

***Теорема 2***. *$f\colon A_1 \vdash A_2$ представляет собой стрелку (дедуктивной) экспоненциальной категории тогда и только тогда, когда $\vdash_{EETAC} D(f, x_1, x_2)$.*

Нетрудно видеть, что, добавляя к EETAC аксиомы, описывающие различные специальные стрелки в экспоненциальной категории, можно получить соответствующие теоремы вложения (дедуктивных) экспоненциальных категорий со специальными стрелками в соответствующие расширения элементарной теории категорий. В качестве подобных специальных аксиом могут использоваться, например, следующие аксиомы:

Ax14. $\forall x_1, x_2, x_3 \exists f (D(f, x_1 \supset x_2, (x_3 \supset x_1) \supset (x_3 \supset x_2))$

Ax15. $\forall x_1, x_2, x_3 \exists f (D(f, x_1 \supset (x_2 \supset x_3), x_2 \supset (x_1 \supset x_3))$

Ax16. $\forall x_1, x_2 \exists f (D(f, x_1 \supset (x_1 \supset x_2), x_1 \supset x_2)$

Ax17. $\forall x_1, x_2 \; \exists f (D(f, x_1, x_2 \supset x_1))$

описывающие добавление к элементарной теории экспоненциальных категорий специальных стрелок $\beta^{A}{}_{BC}$, $\gamma^{A}{}_{BC}$, $w_{AB}$ и $\kappa^{B}{}_{A}$. Но чтобы превратить EETAC в элементарную теорию ***IBCWK***-экспоненциальных категорий нам нужны еще дополнительные аксиомы, которые бы отвечали соответствующим тождествам на стрелках $((1_B \supset f \ulcorner 1_B \urcorner)^s = f$, $f^{\gamma\gamma} = f$ и т.д. Действуя подобным образом, мы получаем следующую таблицу расширений элементарной теории категорий EETAC.

| ***Категория*** | ***Базис*** | ***Тождества*** |
|---|---|---|
| ***IBB′*** | ***IB*** | $\forall x_1, x_2, x_3(\forall f, g \exists h, k((D(f, x_1, x_2) \wedge [\Phi(x_2, i) \wedge D(i, x_2, x_2)] \wedge D(g, x_2, x_3) \Rightarrow (D(f \supset i, x_2 \supset x_2, x_1 \supset x_2) \wedge (D(g \supset i, x_3 \supset x_2, x_2 \supset x_2) \wedge \Gamma(g \supset i, f \supset i, h) \wedge \Gamma(f, g, k) \Rightarrow h = k \supset i))$ |
| ***MLc*** | ***IBB′*** | $\forall x_1, x_2, x_3(\forall f (D(f, x_1 \supset x_1, x_1 \supset x_1) \Rightarrow D(f^{\alpha}, x_1, x_1)) \wedge [\Phi(x_1 \supset x_1, i) \wedge D(i, x_1 \supset x_1, x_1 \supset x_1)] \wedge [\Phi(x_1, j) \wedge D(j, x_1, x_1)] \Rightarrow i^{\alpha} = j)$ |

| | | |
|---|---|---|
| ***E-W*** | ***IBB′*** | $\forall x_1,x_2,x_3(\forall f,g\exists h,k((D(f,T,x_1) \Rightarrow D(f^{\delta},x_1\supset(x_2\supset x_3),x_2\supset x_3)) \wedge D(g,x_1,x_2\supset x_3) \Rightarrow (\Gamma(\ulcorner g\urcorner,f^{\delta},h) \wedge \Gamma(f,g,k) \Rightarrow \ulcorner h\urcorner = \ulcorner k\urcorner)))$ |
| ***R-W*** | ***IBB′*** | $\forall x_1,x_2(\forall f,g\exists h,k((D(f,T,x_1) \Rightarrow D(f^{\tau},x_1\supset x_2,x_2)) \wedge D(g,x_1,x_2) \Rightarrow (\Gamma(\ulcorner g\urcorner,f^{\tau},h) \wedge \Gamma(f,g,k) \Rightarrow h = k)))$ |
| ***T*** | ***IBB′*** | $\forall x_1,x_2(\forall f,g\ ((D(f,T,x_1) \Rightarrow ((D(\ulcorner f\urcorner,T,T\supset x_1) \Rightarrow D(\ulcorner f\urcorner^{w},x_1,x_2)) \Rightarrow \ulcorner f\urcorner^{w} = f))$ |
| ***E*** | ***T*** | $\forall x_1,x_2,x_3(\forall f,g\exists h,k((D(f,T,x_1) \Rightarrow D(f^{\delta},x_1\supset(x_2\supset x_3),x_2\supset x_3)) \wedge D(g,x_1,x_2\supset x_3) \Rightarrow (\Gamma(\ulcorner g\urcorner,f^{\delta},h) \wedge \Gamma(f,g,k) \Rightarrow \ulcorner h\urcorner = \ulcorner k\urcorner)))$ |
| ***R*** | ***T*** | $\forall x_1,x_2(\forall f,g\exists h,k((D(f,T,x_1) \Rightarrow D(f^{\tau},x_1\supset x_2,x_2)) \wedge D(g,x_1,x_2) \Rightarrow (\Gamma(\ulcorner g\urcorner,f^{\tau},h) \wedge \Gamma(f,g,k) \Rightarrow h = k)))$ |
| ***EM0*** | ***E*** | $\forall x_1,x_2(\forall f,g\exists h,k,l((D(f, x_1\supset x_2,x_3) \Rightarrow D(f^{\eta},x_1\supset x_2, (x_1\supset x_2)\supset x_4)) \wedge D(g,x_1,x_2) \Rightarrow (\Gamma(\ulcorner g\urcorner,f^{\eta},h) \wedge \Gamma(\ulcorner g\urcorner,\ulcorner h\urcorner,k) \wedge \Gamma(f,\ulcorner g\urcorner,l) \Rightarrow k = l))$ |
| ***RM0*** | ***R*** | $\forall x_1,x_2(\forall f,g\exists h,k,l((D(f,x_1,x_2) \Rightarrow D(f^{\theta},x_1,x_1\supset x_2)) \wedge D(g,T,x_1) \Rightarrow (\Gamma(g,f^{\theta},h) \wedge \Gamma(g,\ulcorner h\urcorner,k) \wedge \Gamma(g,f,l) \Rightarrow k = l))$ |
| ***S3*** | ***E*** | $\forall x_1,x_2,x_3,x_4(\forall f,g\exists h((D(f,x_1,x_2) \Rightarrow D(f^{\zeta},x_3\supset x_4,x_1\supset x_2)) \wedge D(g,x_3,x_4) \Rightarrow (\Gamma(\ulcorner g\urcorner,f^{\zeta},h) \Rightarrow \ulcorner h\urcorner = f)))$ |
| ***S4*** | ***E*** | $\forall x_1,x_2,x_3(\forall f,g\exists h((D(f,x_1,x_2) \Rightarrow D(f^{\lambda},x_3,x_1\supset x_2)) \wedge D(g,T,x_3) \Rightarrow (\Gamma(g,f^{\lambda},h) \Rightarrow h = f)))$ |
| ***J*** | ***R*** | $\forall x_1(\forall f(D(f, x_1,T) \wedge D(\mathrm{O}_{x_1}, x_1,T) \Rightarrow f = \mathrm{O}_{x_1}))$ |
| ***S5*** | ***E*** | $\forall x_1,x_2,x_3,x_4(\forall f,g\exists h,k,l((D(f,(x_1\supset x_2)\supset x_3,x_1\supset x_2) \Rightarrow D(f^{\mu},x_1,x_2)) \wedge D(g,x_3,x_4) \Rightarrow (\Gamma(f^{\mu},g,h) \wedge \Gamma(\ulcorner g\urcorner,f,k) \wedge \Gamma(k,g,l) \Rightarrow \ulcorner h\urcorner = l)))$ |
| ***C*** | ***J*** | $\forall x_1,x_2(\forall f,g\exists h,k,l((D(f,x_1\supset x_2,x_1) \Rightarrow D(f^{@},T,x_1)) \wedge D(g,x_1,x_2) \Rightarrow (\Gamma(f^{@},g,h) \wedge \Gamma(\ulcorner g\urcorner,f,k) \wedge \Gamma(f,g,l) \Rightarrow h = l))$ |

# Литература


[Васюков 1993] *Васюков В. Л.* MN-категории для модальных логик // Логические исследования, вып. 1, М., 1993, с.114-123.

[Васюков 1993а] *Васюков В. Л.* RN-категории для релевантных логик // Логические исследования, вып. 1, М., 1993, с.124-132.

[Васюков 1993] *Васюков В. Л.* Категорная семантика для паранепротиворечивых логик // Логические исследования, вып. 2, М., 1993, с. 265-298.

[Васюков 1997] *Васюков В. Л.* Об интерпретации секвенций в ситусах // Логические исследования, вып. 4, М., 1997, с.196-221.

[Васюков 2000] *Васюков В. Л.* Импликативные логики, дедуктивные импликативные системы и экспоненциальные мультикатегории // Логические исследования, вып. 7, М., 2000, с.90-118.

[Гольдблатт 1983] *Гольдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.

[Ермолаева 1972] *Ермолаева Н. М.*. О самодвойственной системе аксиом классического исчисления высказываний // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам. М., 1972, с. 232-237.

[Карпенко 1993] *Карпенко А. С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования, вып. 2, М., Наука, 1993. - С.224-258.

[Леммон 1981] *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик. I. // Семантика модальных и интенсиональных логик, М., 1981, с. 98-124.

[Леммон 1981] *Леммон Е.* Алгебраическая семантика для модальных логик. II. // Семантика модальных и интенсиональных логик, М., 1981, с. 125-165.

[Максимова 1973] *Максимова Л.Л.* Структуры с импликацией // Алгебра и логика, т. 12, № 4, с. 445-467.

[Орлов 1928] *Орлов И. Е.* Исчисление совместимости высказываний // Мат. Сб., вып. 35, 1928, с. 263-286.

[Расёва Сикорский 1972] *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М., 1972.

[Смирнов 2002] *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М., 2002.

[Такеути 1978] *Такеути Г.* Теория доказательств. М., 1978.

[Abrusci 1991] *Abrusci V.M.* Phase semantics and sequent calculus for classical linear propositional logic // J. Symb. Logic 56, 1991, pp. 1403-1451.

[Ajdukiewicz 1935] *Ajdukiewicz K.* Die syntaktische Konnexität // Studia Philosophica, v. 1, S.1-27.

[Anderson Belnap 1975] *Anderson A. R. and Belnap N. D. Jr.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, vol. 1, Princeton: Princeton University, 1975.

[Baez 1997] *Baez J.* An Introduction to n-Categories // 7th Conference on Category Theory and Computer Science, eds. E. Moggi and G. Rosolini, Springer Lecture Notes in Computer Science vol. 1290, Springer, Berlin, 1997. (q-alg/9705009)

[Benabou 1967] *Bénabou J.* Introduction to bicategories // Lecture Notes in Mathematica 47, 1967, pp. 1-17.

[Blanc Donnadieu 1976] *Blanc G., Donnadieu M. R.* Axiomatisation de la categorie des categories // Cah. Topol. Geom. Different. XVII, 2, pp.1-38.

[Buszkowski 1986] *Buszkowski W.* Completeness results for Lambek syntactic calculus // Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math., Bd. 32, S.13-28.

[Carnielli Alcantara 1984] *Carnielli W. A., Alcantara L. P.* Paraconsistent algebras // Studia Logica, XLIII, № 1/2, 1984, pp. 79-87.

[Cockett Seely 1992] *Cockett J.R.B., Seely R.A.G.* Weakly distributive categories // Applications of Categories to Computer Science / M.P. Fourman, P.T. Johnstone, A.M. Pitts (eds.). London Mathematical Society Lecture Note Series 177. 1992, pp. 46-65.

[Czermak 1971] *Czermak I.* A remark on Gentzen's calculus of sequents // Notre Dame J. Form. Log., 1971, vol. 18.

[Curry 1954] *Curry H. B*. Generalizations of the Deduction Theorem // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. 2. Amsterdam. 1954. pp. 399-400.

[Curry 1969] *Curry H. B*. Modified basic functionality in combinatory logic // Dialectica, No 23, 1969, pp. 83-92.

[da Costa 1963] *da Costa N. C. A*. Calculus propositionnels pour les systemes formels inconsistants // C. R. Acad. Sci. Paris, T. 257, № 25, 1963, pp. 3790-3792.

[da Costa 1966] *da Costa N. C. A. Operations non-monotones dans les treillis* // C. R. Acad. Sci. Paris, T. 263, 1966, pp. 429-432.

[da Costa Alves 1976] *da Costa N. C. A., Alves E. H*. Une semantique pour le calculi $C_1$ // C. R. Acad. Sci. Paris, T. 283, № 25, 1976, pp. 729-731.

[Dunn 1986] *Dunn J. M*. Relevance logic and entailment // Handbook of Philosophical Logic, vol III: Alternatives to Classical Logic, D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Dordrecht: Reidel, 1986, pp. 117-224.

[Došen 1988] *K. Došen.* A completeness theorem for the Lambek calculus of syntactic categories // Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math., Bd. 31, 1985, S. 235-241.

[Došen 1988a] *K. Došen.* Sequent systems and groupoid models, I and II // Studia Logica, v. 47, Mo 4, 1988, pp.353-385; Studia Logica, v. 48, No 1, 1989, pp. 41-65; Studia Logica v. 49, No 4, 1990, p. 614.

[Došen 1992] *K. Došen.* Modal Logic as Metalogic // Journal of Logic, Language and Information, No 1, 1992, pp. 175-201.

[Došen 1996] *K. Došen.* Deductive Completeness // The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 2, No 5, 1996, pp. 243-283.

[Došen 1999] *K. Došen.* Cut elimination in adjunction // // Bulletin of the Section of Logic, vol. 28, No 2, 1999, pp. 61-73.

[Eilenberg Kelly 1966] *Eilenberg S., Kelly G.M.* A generalization of the functorial calculus // Journal of Algebra, v. 3, 1966. pp. 366-375.

[Girard 1987] *Girard J.-Y.* Linear logic // Theoret. Comput. Sci., v. 50, 1987, pp. 1-102.

[Goodman 1981] *Goodman N. D.* The logic of contradiction // Zeitschr. Math. Logik. Grundl. Math., 1981, Bd. 27, N 2.

[Gordon Power Street 1995] *Gordon R., Power A.J., Street R*. Coherence for Tricategories // Memoirs of the American Mathematical Society, No 558, 117, 1995.

[Hatcher 1968] *Hatcher W.S*. Foundations of Mathematics. W.B. Saunders & Co., London and Philadelphia, 1968.

[Hatcher 1978] *Hatcher W.S*. A Language for Type-free Algebra // Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math., 1978, Bd. 24, S. 385-397.

[Hindley 1969] *Hindley J. R*. The principal type-scheme of an object in combinatory logic // Transactions of American Mathematical Society, No 146, 1969, p. 29-60.

[Kelly Mac Lane 1971] *Kelly G.M., Mac Lane S.* Coherence in closed categories // Journ. Pure and Appl.Algebra, v.1, 1971. pp. 97-140, 219.

[Lambek 1958] *Lambek J.* The mathematics of sentence structure // Amer. Math. Monthly, v. 65, 1958, pp. 154-170.

[Lambek 1961] *Lambek J.* On the calculus of syntactic types // Structure of Language and its Mathematical Aspects, R. Jacobson (ed.), Providence, American Mathematical Society, 1961, pp. 166-178; 264-265.

[Lambek 1988] *Lambek J.* On the Unity of Algebra and Logic // Categorical Algebra and its Applications. F. Borceux (ed.), Springer, Lecture Notes in Mathematics 1348 (1988).

[Lambek 1989] *Lambek J.* Multicategories Revisited // Contemporary Mathematics, vol 92, 1989, pp. 217-239.

[Lambek 1989a] *Lambek J.* On Some Connections between Logic and Category Theory // Studia Logica, 48, No 3 (1989), p.269-278.

[Lambek 1993] *Lambek J.* Logic Without Structure Rules (Another Look at Cut Elimination) // Substructural Logics, K.Došen and Schroeder-Heister (eds.), Oxford University Press, 1993, pp. 179-206.

[Lambek 1994] *Lambek J.* What is a deductive system? // What is a Logical System? / D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Oxford University Press, 1994, pp. 141-189.

[Lambek Scott 1986] *Lambek J., Scott P. J.* Introduction to higher order categorical logic, Cambridge University Press, London, 1986.

[Mac Lane 1971] *Mac Lane S.* Categories for the Working Mathematician. Springer, Berlin. 1971.

[MacNeille 1937] *MacNeille H.* Partially ordered sets // Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), pp. 416-460.

[Marcinek Oziewicz 2001] *Marcinek W., Oziewicz Z.* $n$-Categories Admissible by $n$-Graph // math.CT/0104136 [2001]

[Meyer McRobbie 1982] *Meyer R. K. and McRobbie M. A*. Multisets and relevant implication, I and II // Australasian J. Philosophy, v. 60, 1982, pp. 107-139; 265-281.

[Mortensen 1980] *Mortensen C*. Every Quotient Algebra for $C_1$ is Trivial // Notre Dame J. Form. Logic 21, 1980, pp. 694-700.

[Mortensen 1980] *Mortensen C*. Inconsistent Mathematics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[Ono Komori 1985] *Ono H. and Komori Y*. Logics without the contraction rules // J. Symb. Logic, v. 50, 1985, pp. 169-201.

[Petrić 2002] *Petrić Z.* Coherence in Substructural Categories // Studia Logica, v. 70, No 2, 2001, pp. 271-296.

[Presburger 1929] *Presburger M*. Über die Volständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes rendue I. Congrès des Math. des Pays Slaves, Warsaw 1929, 192-201, 395.

[Rauszer 1973] *Rauszer C*. A Formalization of the Propositional Calculus of H-B-logic // Studia Logica, 33, 1 (1973), pp. 23-34.

[Restall 2000] *Restall G*. An Introduction to Substructural Logics. Routledge, London and N.Y., 2000.

[Riscos Laita 1987] *Riscos A., Laita L. M*. N-categories in logic // Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math., Bd. 33 (1987), s. 507-516.

[Szabo 1975] *Szabo M.E.* Polycategories // Communications in Algebra 3 (1975), pp. 663-689.

[Szabo 1989] *Szabo M.E.* Coherence in Cartesian Closed Categories and the Generality of Proofs // Studia Logica, vol. 48, No 3, 1989, pp.285-297.

[Salto Méndez 1999] *Salto F., Méndez J.M.* More on Peirce's Law // Bulletin of the Section of Logic, vol. 28, No 1. pp.27-38.

[Urquhart 1996] *Urquhart A*. Duality for Algebras of Relevant Logics // Studia Logica 56, No 1-2, 1996. pp 263-276.

[Vasyukov 1995] *Vasyukov V. L.* Categorial Semantics for Ajdukiewicz-Lambek Calculus // The Heritage of Kazimierz Ajdukiewicz / V.Sinisi and J.Woleński (eds.), Rodopi, Amsterdam-Atlanta, 1995, pp.322-334.

[Vasyukov 1997] *Vasyukov V. L.* Implicative logics in categories // Bull. Sect. Log., v.26, No 4, 1997, pp. 188-192.

[Vasyukov 1997] *Vasyukov V. L.* Implicative Logics, Sequential Deductive Systems and Exponential Multicategories // Bulletin of the Section of Logic, vol. 29, No 1-2, 2000, pp. 13-25.

[Vasyukov 2000] *Vasyukov V. L.* Paraconsistency in Categories // Frontiers of Paraconsistent Logic / D.Batens, C.Mortensen, G.Priest and J.-P. van Bendegem (eds.), Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire, England, 2000. pp. 263-278.

[Velinov 1988] *Velinov Y.* An algebraic structure for derivations in rewriting systems // Theoretical Computer Science 57, 1988, pp. 205-224.

# Предметный указатель

## А



## Г



## Д



## Е



## И

# К



# Л

## М



## Н



## О



## П



## С

# Т



# У



# Ф



# Э



# Ю