МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южный федеральный университет»

А. П. ЧЕГОЛИН

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

*для студентов физического факультета
Южного федерального университета*

Ростов-на-Дону
2015

УДК 512 + 514
ББК 22
Ч34

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений ЮФУ, Авсянкин О. Г.

Ч34 **Чеголин, А. П.**

Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / А. П. Чеголин ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2015. – 150 с.

ISBN 978-5-9275-1728-2

Настоящее учебное пособие предназначено в первую очередь для студентов первого курса инженерных специальностей физического факультета Южного федерального университета, но также может быть использовано студентами других естественно-научных факультетов. Его цель – помочь студентам овладеть навыками самостоятельной работы при изучении указанного курса.

Оно содержит: лекционный материал по соответствующему модулю с примерами решения наиболее характерных задач.

Публикуется в авторской редакции.

ISBN 978-5-9275-1728-2 УДК 512 + 514
ББК 22

© Чеголин А. П., 2015
© Южный федеральный университет, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса инженерных специальностей физического факультета Южного федерального университета; может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих в том или ином объеме высшую математику. Оно содержит: лекционный материал по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», а также блок задач и вопросов для самоконтроля по рассматриваемому материалу.

Изложенный здесь материал имеет самостоятельное значение. Основная цель этого раздела – исследование матриц, многочленов, вычисление определителей и, как результат, исследование систем линейных уравнений, а такжеизучение свойств геометрических объектов при помощи аналитического метода. Особое внимание уделено различным системам координат на плоскости и в пространстве, уравнениям линий на плоскости и поверхностей в пространстве. Рассматриваемый здесь материал актуален не только с точки зрения логических принципов построения линейной алгебры и аналитической геометрии, но и для понимания ряда разделов современной физики и химии, особенно здесь стоит отметить потребности теоретической механики, электротехники, химии. Кроме того, овладение материалом этой дисциплинынеобходимо при изученииосновных разделов математического анализа и дифференциальных уравнений.

Главная задача, преследуемая данным пособием, помочь студентам в освоении основ линейной алгебры и аналитической геометрии. Это достигается за счет компактного и, вместе с тем, достаточно полного изложения указанного теоретического материала с решениями наиболее характерных задач.

В пособии используются классические математические методы. В частности, при доказательстве основных утверждений используется метод математической индукции, и типичные для геометрии логические построения рассуждений, а при доказательстве свойств алгебраических объектов используется техника перехода к соответствующим операциям над числами. Для определения основных геометрических объектов часто используется аксиоматический метод, в развитии которого большая заслуга принадлежит Давиду Гильберту. Аксиоматический метод закладывает фундамент и для лежащего в основе аналитической геометрии метода координат, впервые систематически примененный Рене Декартом.

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Алгебра возникла в результате поиска общих приемов для решения однотипных арифметических задач. Она отграничилась от арифметики тем, что изучает, пользуясь буквенными обозначениями, общие свойства числовых систем и общие методы решения задач при помощи уравнений. Классическим разделом алгебры является линейная алгебра, основным объектом исследования которой являются векторные пространства (множества математических элементов, наделенные определенными операциями и аксиомами). Частью линейной алгебры являютсятеория линейных уравнений и теория матриц. Алгебра классифицирует системы объектов той или иной природы с заданными на них алгебраическими операциями по их свойствам сходными со сложением и умножением чисел. В новых системах объектов возникающие задачи, в том числе задача решения и исследования уравнений, получают новый смысл. Например, решением уравнений может быть вектор или матрица.

Одним из основных объектов изучения в алгебре является многочлен порядка n– выражение вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$, где x - переменная, а $a_0, \ldots, a_n$ - числовые коэффициенты. Если приравнять многочлен к нулю, то получают алгебраическое уравнение. Исторически первой задачей алгебры было решение таких уравнений. С древних времен известно решение квадратного уравнения. Решение уравнений 3-го и 4-го порядка было найдено в 16 веке. В 19 веке Нильс Абель (Норвегия) и Эварист Галуа (Франция) доказали, что уравнения выше 4-го порядка в общем случае решены в радикалах (по формулам, связанными с извлечением корней) быть не могут. Задача извлечения квадратного корня из отрицательного числа натолкнула математиков на введение комплексных чисел. В рамках класса этих чисел в 17 веке была высказана, а в 18 веке Карлом Гауссом (Германия) была доказана теорема о том, что любое алгебраическое уравнение произвольного порядка имеет корни. Эта теорема в дальнейшем получила название «Основная теорема алгебры».

Многие задачи приводят не к одному уравнению, а к целой системе уравнений с несколькими неизвестными. Особенно важен случай системы линейных уравнений. Еще Готфрид Лейбниц (Германия) в конце 17-го века обратил внимание на то, что при изучении таких систем наиболее существенной является таблица, состоящая из коэффициентов, и показал как из этих коэффициентов при совпадении числа уравнений и числа неизвестных строить так называемые определители, при помощи которых исследуются системы линейных уравнений. Впоследствии такие таблицы, или матрицы, стали предметом самостоятельного изучения, так как обнаружилось, что их роль не исчерпывается приложениями к теории систем линейных уравнений. В 1750 г. Габриель Крамер (Швейцария) получил формулы для решения систем линепйных уравнений, в которых число уравнений и неизвестных совпадают, а определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. В 1849 г. Карлом Гауссом был предложен универсальный метод решения систем линейных уравнений в общем случае. Понятие ранга матрицы, предложенное Фердинандом Фробениусом (Германия) в 1877 г., позволило Леопольду Кронекеру (Германия) и Альфреду Капелли (Италия) доказать условия совместности и определенности системы линейных уравнений. Тем самым в конце 19 века было завершено построение общей теории систем линейных уравнений.

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности) исследуются средствами алгебры на основе метода координат. На основе понятия векторного пространства определяются различные классические пространства, изучаемые в геометрии, в частности евклидово пространство.

Основная идея метода координат заключается в следующем. Вводится, так называемая, система координат – набор геометрических данных, за счет которых определяются координаты точки – числа, заданием которых однозначно определяется местоположение этой точки. Геометрические свойства линии или поверхности выясняются путем изучения свойств уравнения этой линии – равенства, устанавливающего связь между координатами любой точки этой линии или поверхности.

Основные идеи метода координат были развиты еще Пьером Ферма (Франция), который дал уравнения прямой и кривых второго порядка. Отчетливое изложение этого метода было дано Рене Декартом (Франция) в его «Геометрии» (1637 г). В этой работе широкое применение получило понятие переменной величины. У Декарта она выступала и как отрезок переменной длины, и текущая координата точки, описывающей своим движением кривую. Дальнейшая разработка аналитической геометрии связана с трудами Готфрида Лейбница, Исаака Ньютона (Англия) и особенно Леонарда Эйлера (Швейцария). Долгое время для аналитической геометрии было принято название «декартова геометрия». Термин «аналитическая геометрия» впервые был употреблен Исааком Ньютоном (1671 г).

МАТРИЦЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица $m \cdot n$ чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Указанные числа, образующие матрицу, называются ее элементами.

Матрицы обычно обозначаются A, B, C и т.п. Если требуется при этом указать размер матрицы, то матрицу размера $m \times n$ обозначают, например, $A_{m \times n}$. Если требуется не только название матрицы, но и указание элементов матрицы, то используют следующую запись

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Иногда такую матрицу для краткости будет удобно обозначать:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}.$$

Индексы i ($i = 1,2,\dots,m$) и j ($j = 1,2,\dots,n$) элемента a_{ij} означают соответственно номер строки и номер столбца, на пересечении которых находится элемент.

Элементы матрицы, имеющие равные индексы (каждый такой элемент стоит на пересечении строки и столбца с одинаковыми номерами), называются элементами главной диагонали.

Две матрицы одного размера называются равными, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой все элементы, лежащие выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется нижнетреугольной (верхнетреугольной). В дальнейшем будем обращаться лишь к верхнетреугольным матрицам и будем их просто называть треугольными или матрицами треугольного вида.

Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу ее столбцов. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей порядка n.

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие вне главной диагонали, равны нулю, называется диагональной.

Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единице, называется единичной. Единичная матрица обозначается:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & . & . & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Перейдем к изучению операций над матрицами. Рассмотрим в первую очередь линейные операции. К ним относятся операции сложения и вычитания матриц и операция умножения матрицы на число.

Определение. Суммой (разностью) матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица такого же размера, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов исходных матриц, т.е.

$$\left(a_{ij}\right)_{m\times n} \pm \left(b_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Отметим, что складывать или вычитать матрицы можно лишь в случае совпадения их размеров.

Определение. Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число α называется матрица такого же размера, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента исходной матрицы на указанное число, т.е.

$$\alpha \cdot \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(\alpha \cdot a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Замечание. Матрица $-1 \cdot A$ называется противоположной к матрице A и обозначается $-A$. В дальнейшем операцию вычитания можно не рассматривать отдельно, учитывая следующее очевидное равенство

$$A - B = A + (-B).$$

Рассмотрим свойства линейных операций. Будем предполагать, что все соответствующие операции, имеют смысл.

1. $A + B = B + A$.

Доказательство. Это утверждение, как и все последующие свойства линейных операций, следует из свойства для соответствующей операции над числами:

$$A + B = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} + \left(b_{ij}\right)_{m\times n} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n} = \left(b_{ij} + a_{ij}\right)_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{m\times n} + \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = B + A. \blacksquare$$

Аналогично, сведением к соответствующим операциям над числами, доказываются последующие свойства.

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. $A+O=A$.

4. $A+(-A)=O$

5. $1\cdot A=A$.

6. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

7. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

8. $(\alpha\cdot\beta)A=\alpha\cdot(\beta A)$.

Упражнение. Доказать свойства 2-8 самостоятельно.

Пример. Найти $2A-3B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δ Заметим, в первую очередь, что матрица $2A-3B$ существует, т.к. исходные матрицы имеют размер 3×4, а при умножении на числа размеры матриц не меняются. Выполним сначала операции умножения матриц на соответствующие числа. По определению это означает, что каждый элемент матрицы A умножается на число 2, а каждый элемент матрицы B умножается на число 3:

$$2A=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 2 & 4 \\ -8 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ 3B=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 6 & 12 & 3 & 3 \\ -9 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Осталось произвести операцию вычитания полученных матриц. Для этого из каждого элемента матрицы $2A$ надо вычесть соответствующий элемент матрицы $3B$:

$$2A-3B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 5 & -1\end{pmatrix}. \blacktriangle$$

ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ И ТРАНСПОНИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ

Перейдем к изучению операции произведения матриц. Сразу заметим, что такая операция возможна лишь в случае, когда число столбцов матрицы, являющейся первым сомножителем равно числу строк матрицы, являющейся вторым сомножителем (в этом случае говорят, что матрицы согласованы относительно произведения).

Определение. Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B=(b_{jk})_{n\times p}$ называется матрица $C=(c_{ik})_{m\times p}$, каждый элемент которой c_{ik} равен сумме парных произведений всех элементов строки с номером i матрицы A на соответствующие элементы столбца с номером k матрицы B:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} .$$

Замечание. Из определения сразу видно, что произведение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. нельзя говорить, что от перестановки мест сомножителей произведение не меняется. Может оказаться так, что исходное произведение существует, но, переставив сомножители, мы получим не существующее произведение. Например, произведение $A_{3\times 4}\cdot B_{4\times 5}$ существует, а произведение $B_{4\times 5}\cdot A_{3\times 4}$ - нет. Мало того, даже если существует и произведение $A\cdot B$, и произведение $B\cdot A$, то это не означает, что $A\cdot B=B\cdot A$. Убедимся в этом на следующем примере.

Пример. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Δ В первую очередь заметим, что оба произведения существуют (число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, и число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы A). Произведение $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3}$ дает матрицу $C_{3\times 3}$. Найдем все ее элементы. Для нахождения элемента c_{11} надо выбрать первую строчку матрицы A, первый столбец матрицы B и найти сумму парных произведений соответствующих элементов выбранной строки и выбранного столбца:

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = -1.$$

Для нахождения элемента c_{12} надо выбрать первую строчку матрицы A, второй столбец матрицы B и найти сумму парных произведений соответствующих элементов выбранной строки и выбранного столбца:

$$c_{12} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) = 2.$$

Продолжим по аналогии вычисление последующих элементов матрицы C:

$$c_{13} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1,$$

$$c_{21} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13,$$

$$c_{22} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) = -11,$$

$$c_{23} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3,$$

$$c_{31} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4,$$

$$c_{32} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = -5,$$

$$c_{33} = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2.$$

Таким образом, получаем:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 13 & -11 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично найдем матрицу $D_{2\times 2} = B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2}$. Будем иметь:

$$d_{11} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 0,$$

$$d_{12} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 = -5,$$

$$d_{21} = 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -4,$$

$$d_{22} = 3 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = -10.$$

Таким образом, получаем:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что полученные результаты не совпадают, о чем и говорилось в замечании. ▲

Рассмотрим свойства, связанные с произведением матриц. Будем предполагать, что все соответствующие операции, имеют смысл.

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Доказательство. Для того, чтобы все используемые здесь операции имели смысл, потребуем, чтобы матрицы имели следующие размеры: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$, $C = (c_{kl})_{p\times r}$. Тогда будем иметь:

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{m\times p},$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) \cdot c_{kl} \right)_{m\times r}.$$

Используя известные правила для арифметических операций над числами, получим:

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{m\times r} = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{m\times r} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) \right)_{m\times r} =$$
$$= A \cdot (B \cdot C). \blacksquare$$

2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Доказательство. Рассмотрим матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B=\left(b_{jk}\right)_{n\times p}$, $C=\left(c_{jk}\right)_{n\times p}$. Тогда

$$A\cdot\left(B+C\right)=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\left(b_{jk}+c_{jk}\right)_{n\times p}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(b_{jk}+c_{jk}\right)\right)_{m\times p}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}b_{jk}+a_{ij}c_{jk}\right)\right)_{m\times p}=$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)_{m\times p}+\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}\right)_{m\times p}=A\cdot B+A\cdot C.\blacksquare$$

Аналогично доказываются следующие свойства.

3. $\left(A+B\right)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

4. $\alpha\left(A\cdot B\right)=\left(\alpha A\right)\cdot B=A\cdot\left(\alpha B\right)$.

5. $A\cdot O=O$.

6. $O\cdot A=O$.

Свойства 5,6 говорят о том, что нулевая матрица в классе матриц обладает теми же свойствами, что и число 0 в классе действительных чисел.

7. $A\cdot E=A$.

8. $E\cdot A=A$.

Свойства 7,8 говорят о том, что единичная матрица в классе матриц обладает теми же свойствами, что и число 1 в классе действительных чисел.

Упражнение. Доказать свойства 3-8

Рассмотрим операцию транспонирования матриц.

Определение. Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки на столбец с тем же номером, называется транспонированной к матрице A и обозначается A^T.

Замечание. Получение транспонированной матрицы называют операцией транспонирования. В данном определении, можно говорить не о замене строк на столбцы, а о замене столбцов на строки. Это дает тот же самый результат.

Рассмотрим свойства, связанные с транспонированием матриц.

1. $\left(A^T\right)^T = A$.

Доказательство этого свойства очевидно: заменяя строки соответствующими столбцами, а затем столбцы соответствующими строками получим исходную матрицу.■

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Тогда получаем следующую цепочку равенств:

$$(\alpha A)^T = \left(\left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}\right)^T = \left(\alpha a_{ji}\right)_{n\times m} = \alpha\left(a_{ji}\right)_{n\times m} = \alpha A^T. ■$$

Аналогично доказывается свойство

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Упражнение. Доказать свойство 3.

4. $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Доказательство. Рассмотрим матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$. Заметим, что матрица $A\cdot B$ имеет размер $m\times p$, а матрица $(A\cdot B)^T$ - соответственно $p\times m$. Матрица B^T имеет размер $p\times n$, матрица A^T - размер $n\times m$, и соответственно матрица $B^T\cdot A^T$ - размер $p\times m$. Следовательно, матрицы стоящие в левой и правой части доказываемого равенства имеют одинаковый размер. Обозначим: c_{ki} - элементы матрицы $(A\cdot B)^T$, d_{ki} - элементы матрицы $B^T\cdot A^T$, $k = 1,2,...p$, $i = 1,2,...m$. Тогда

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij} = d_{ki},$$

т.к. $\sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij}$ - есть сумма произведений всех элементов столбца с номером k матрицы B (т.е. строки с номером k матрицы B^T) на соответствующие элементы строки с номером i матрицы A (т.е. столбца с номером i матрицы A^T).Таким образом, получаем:

$$\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T . \blacksquare$$

Пример.Найти $A \cdot B^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δ В первую очередь заметим, что это произведение существует: матрица A имеет размер 2×3, а матрица B^T имеет размер 3×2. В результате матрица $A \cdot B^T$ будет иметь размер 2×2. Найдем сначала матрицу B^T, записав первую строку матрицы B первым столбцом, а вторую строку – вторым столбцом:

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, найдем все элементы матрицы $C = A \cdot B^T$:

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 0,$$

$$c_{12} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 = -4,$$

$$c_{21} = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -7,$$

$$c_{22} = (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = -11. \blacktriangle$$

ПЕРЕСТАНОВКИ.

Понятие «перестановка» существует в общем случае для набора любых объектов. Здесь же нам понадобятся перестановки не равных друг другу чисел.

Определение. Упорядоченная запись чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ называется перестановкой этих чисел.

Для нахождения количества перестановок введем понятие факториала натурального числа.

Определение. Факториалом натурального числа n (обозначается $n!$) называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n .$$

В дальнейшем будем иметь дело с перестановками только различных чисел.

Замечание. При доказательстве следующей теоремы будет использован хорошо известный в математике метод математической индукции. Его суть заключается в следующем. Пусть требуется доказать утверждение, зависящее от натурального параметра k. Первый шаг (базис) индукции заключается в проверке справедливости утверждения при начальном значении параметра k. Далее выдвигается индуктивное предположение – утверждение справедливо при значении параметра $k = n - 1$. Доказательство будет завершенным, если на основании сделанного предположения будет доказана справедливость утверждения при последующем значении параметра: $k = n$

Теорема. Число всевозможных перестановок n различных чисел равно $n!$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. В первую очередь заметим, что при начальном значении параметра n, т.е. при $n = 1$, данное утверждение очевидно (число перестановок одного числа равно 1!=1).

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при фиксированном значении параметра: пусть число перестановок $n - 1$ чисел равно $(n-1)!$. В этом предположении необходимо доказать, что утверждение теоремы справедливо при последующем значении параметра, т.е. в случае, когда в перестановке n чисел.

Зафиксируем в перестановках на первом месте некоторое число a_1. Тогда перестановки всех n чисел можно составлять за счет перестановок оставшихся $n-1$ чисел. По предположению количество таких перестановок равно $(n-1)!$. Поставим теперь на первое место число a_2. Аналогично можно сказать, что при этом можно составить $(n-1)!$ перестановок. Варьируя число на первом месте в перестановках, получаем, что число всевозможных перестановок равно

$$\underbrace{(n-1)!+(n-1)!+\ldots+(n-1)!}_{n}.$$

В этой сумме n слагаемых, так как на первом месте может быть любое из данных n чисел. Таким образом, число всевозможных перестановок n различных чисел равно

$$n\cdot(n-1)!=n!.\blacksquare$$

Определение. Если в перестановке есть два числа, и большее из этих чисел имеет меньший порядковый номер, то говорят, что эти числа находятся в инверсии.

Определение. Если число инверсий в перестановке четно или равно нулю, то перестановка называется четной, если же число инверсий нечетно, то перестановка называется нечетной.

Теорема. Среди перестановок n $(n>1)$ различных чисел количество четных перестановок равно количеству нечетных перестановок.

Доказательство. Пусть количество всевозможных четных перестановок равно k, а количество всевозможных нечетных перестановок равно l. Применим к каждой четной перестановке одну транспозицию – перестановку двух элементов местами, получая нечетные перестановки. В результате уже будем иметь k нечетных перестановок. Таким образом $k\le l$.

Аналогично применив одну транспозицию к каждой нечетной перестановке, получим l четных перестановок. Таким образом, $l\le k$. В итоге получаем, что $k=l$.$\blacksquare$

Пример. Рассмотрим перестановки чисел 1,2,3. Всего можно составить 3!=6 перестановок. Из них 3 четных перестановки:

$$\begin{cases}(1,2,3)\\(2,3,1)\\(3,1,2)\end{cases}$$

и 3 нечетных перестановки

$$\begin{cases}(1,3,2)\\(2,1,3).\\(3,2,1)\end{cases} \blacktriangle$$

<u>ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОРЯДКА n</u>

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составим всевозможные произведения элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Такие произведения могут быть записаны в виде:

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n},$$

где $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ - перестановки чисел 1,2,…, n. Для таких перестановок введем обозначение: $t(j_1, j_2, \dots, j_n)$ - число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Определение. Определителем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

порядка n называется число

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{t(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n},$$

где суммирование идет по всем перестановкам $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ чисел 1,2,…, n. Числа a_{ij}, составляющие определитель, называются его элементами.

Замечание. Определитель порядка n представляет собой сумму $n!$ слагаемых, причем произведения, соответствующие четным перестановкам, состоящих из вторых индексов, берутся со знаком плюс, а произведения, соответствующие нечетным перестановкам, берутся со знаком минус.

Терминология для квадратных матриц справедлива и для определителей.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА

Рассмотримобщее определение определителя для 1-го, 2-го и 3-го порядков.

1. Определителем первого порядка является сам элемент:

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

2. Определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ есть сумма двух слагаемых. Перестановке $(1,2)$ вторых индексов элементов соответствует произведение $a_{11}a_{22}$. Так как эта перестановка четная, то такое произведение

нужно взять со знаком плюс. Перестановке $(2,1)$ вторых индексов элементов соответствует произведение $a_{12}a_{21}$. Так как эта перестановка нечетная, то такое произведение нужно взять со знаком минус. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример. Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Δ Согласно последней формуле получаем:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 = -1. \blacktriangle$$

3. Определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ есть сумма 3!=6 слагаемых. Четным перестановкам $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ вторых индексов элементов соответствуют произведения $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$. Эти произведения нужно взять со знаком плюс. Нечетным перестановкам $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$ вторых индексов элементов соответствуют произведения $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$. Эти произведения нужно взять со знаком минус. Таким образом, получаем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Пример. Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Δ Воспользуемся последней формулой:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot1+(-4)\cdot1\cdot(-1)+(-2)\cdot2\cdot3-3\cdot1\cdot3-(-4)\cdot2\cdot1-$$

$$-(-2)\cdot5\cdot(-1)=15+4-12-9+8-10=-4. \blacktriangle$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Рассмотрим свойства определителей.

1. Определитель в результате транспонирования не меняется.

Доказательство этого свойства следует из того, что после транспонирования в записи определителя произведения не меняются, меняется лишь порядок сомножителей в этих произведениях. ■

Замечание. Это свойство говорит о том, что последующие утверждения, сформулированные относительно строк, справедливы и относительно столбцов.

2. Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю, то такой определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть все элементы строки с номером k определителя равны нулю. По определению в каждое слагаемое суммы, являющейся определителем, входит один сомножитель - элемент строки с номером k. Таким образом, каждое слагаемое этой суммы равно нулю, следовательно, и весь определитель также равен нулю. ■

3. Определитель квадратной матрицы треугольного вида равен произведению элементов ее главной диагонали.

Доказательство. Одно из слагаемых, составляющих определитель, есть произведение элементов главной диагонали. Все остальные слагаемые представляют собой произведения элементов, среди которых обязательно есть хотя бы один, находящийся ниже главной диагонали, и, следовательно, являющийся нулевым. Таким образом, лишь произведение элементов главной диагонали является ненулевым слагаемым в записи определителя.■

4. Если поменять местами две строки определителя, то изменится лишь знак определителя.

Доказательство. Пусть A - исходная матрица, а B - матрица, полученная из матрицы A заменой местами строк с номерами k и l. По определению имеем:

$$\det A = \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_l,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,\dots,j_k,\dots,j_l,\dots,j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{nj_n},$$

$$\det B = \sum_{(j_1,\dots,j_l,\dots,j_k,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,\dots,j_l,\dots,j_k,\dots,j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}.$$

Так как любая транспозиция меняет характер четности перестановки, то

$$(-1)^{t(j_1,\dots,j_k,\dots,j_l,\dots,j_n)} = -(-1)^{t(j_1,\dots,j_l,\dots,j_k,\dots,j_n)}.$$

Следовательно,

$$\det B = -\det A. \ ■$$

5. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

Доказательство. Пусть определитель $\det A$ имеет две одинаковые строки. Поменяем эти строки местами. В результате согласно свойству 3 получим $-\det A$. С другой стороны указанное действие не изменит определитель. Таким образом, имеем:

$$\det A = -\det A.$$

Последнее равенство возможно лишь в случае $\det A = 0$. ■

6. Постоянный множитель элементов некоторой строки можно вынести множителем за знак определителя.

Доказательство. Пусть A - исходная матрица, а B - матрица, полученная из матрицы A умножением строки с номером k на число λ. По определению имеем:

$$\det A = \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n},$$

$$\det B = \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots \lambda a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} =$$

$$= \lambda \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,\dots,j_k,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} = \lambda \det A. \ \blacksquare$$

7. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

Доказательство. Пусть в определителе $\det A$ строки с номером k и l пропорциональны, т.е. все элементы строки с номером k получены из соответствующих элементов строки с номером l умножением на число λ. Согласно предыдущему свойству это число можно вынести сомножителем за знак всего определителя. В результате получим определитель, у которого строки с номерами k и l совпадают. Такой определитель согласно свойству 4 равен нулю. Таким образом,

$$\det A = 0. \ \blacksquare$$

8. Если к элементам некоторой строки прибавить соответствующие элементы некоторой другой строки, умноженные на одно и то же число.

Доказательство. Пусть A - исходная матрица, а B - матрица, полученная из матрицы A прибавлением к элементам строки с номером k соответствующих элементов строки с номером l. По определению имеем:

$$\det A = \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_l,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,j_2,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n},$$

$$\det B = \sum_{(j_1,\dots,j_k,\dots,j_l,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,j_2,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots \left(a_{kj_k} + \lambda a_{lj_l}\right) \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,j_2,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} + \lambda \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,j_2,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n}.$$

Сумма

$$\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,j_2,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n}$$

есть определитель $\det A$. Сумма

$$\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{t(j_1,j_2,\dots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n}$$

представляет собой определитель, полученный из определителя $\det A$ заменой строки с номером k на строку с номером l. Такой определитель имеет две одинаковые строки и, следовательно, равен нулю. Следовательно,

$$\det A = \det B\,. \ \blacksquare$$

Пример.Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Δ Воспользуемся свойствами определителей. С их помощью сведем определитель к треугольному виду. Будем получать нули ниже главной диагонали последовательно по столбцам. При этом будут использоваться операции со строками в соответствии со свойством 8, причем каждый раз за счет строки с тем же номером, что и у столбца, с которым мы работаем.

В первую очередь поменяем первую и вторую строчку местами для того, чтобы на пересечении первой строки и первого столбца стояла единица (этого можно было бы добиться и за счет свойства 8 в случае какого-либо другого определителя). В соответствии со свойством 4 поменяется знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь из элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки, умноженные на 3, из элементов третьей строки вычтем соответствующие элементы первой строки, умноженные на 4, к элементам четвертой строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -10 & -10 \\ 0 & -7 & -14 & -17 \\ 0 & 7 & 11 & 13 \end{vmatrix}.$$

Из элементов третьей строки вычтем соответствующие элементы второй строки, умноженные на 2, а к элементам четвертой строки прибавим соответствующие элементы второй строки. Затем из второй строки за знак определителя вынесем множитель -1. За счет таких операций мы, в первую очередь, получим единицу (с точностью до знака) во втором столбце, а во-вторых, упростим элементы второй, третьей и четвертой строк. В результате получим:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 10 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Поменяем теперь вторую и третью строки местами так, чтобы на пересечении второй строки и второго столбца стоял элемент -1. При этом в соответствии со свойством 4 поменяется знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 10 & 10 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теперь к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на 3, к элементам четвертой строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на 4:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 28 & 19 \\ 0 & 0 & 25 & 15 \end{vmatrix}.$$

Для уменьшения элементов из четвертой строки за знак определителя вынесем множитель 5 и затем из элементов третьей строки вычтем соответствующие элементы четвертой строки, умноженные на 6 (таки образом мы также получим единицу, которую впоследствии можно будет переместить на пересечение третьей строки и третьего столбца):

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Поменяем теперь местами третий и четвертый столбец:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Осталось из элементов четвертой строки вычесть соответствующие элементы третьей строки, умноженные на 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся теперь свойством 3 определителей, согласно которому получаем:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 11 = -55 . \blacktriangle$$

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Пусть дан определитель порядка n и натуральное число k, $k \le n$. Выберем в определителе любые k строк и любые k столбцов. Составим определитель, состоящий из элементов исходного определителя, находящихся на пересечении выбранных строк и столбцов, не меняя взаимное расположение элементов. Полученный определитель называется минором порядка k данного определителя.Если $k < n$, то определитель, составленный из элементов исходного определителя, не попавших ни в выделенные строки, ни в выделенные столбцы, называется дополнительным минором. Очевидно, что если $k < n$, то можно составить несколько миноров порядка k и соответственно несколько дополнительных миноров.

Пусть для составления минора порядка k выделены строки с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, ..., j_k$. Введем следующее обозначение: $s = i_1 + i_2 + i_k + j_1 + j_2 + ... + j_k$ - сумма номеров выделенных строк и столбцов.

Обозначим также полученный минор $M_{(i_1, i_2, ..., i_k), (j_1, j_2, ..., j_k)}$, а дополнительный минор - $M'_{(i_1, i_2, ..., i_k), (j_1, j_2, ..., j_k)}$. Число

$$A_{(i_1, i_2, ..., i_k), (j_1, j_2, ..., j_k)} = (-1)^s M'_{(i_1, i_2, ..., i_k), (j_1, j_2, ..., j_k)}$$

называется алгебраическим дополнением к минору $M_{(i_1, i_2, ..., i_k), (j_1, j_2, ..., j_k)}$.

Приведем, без доказательства, следующее важное утверждение.

Теорема Лапласа. Пусть в определителе порядка n зафиксировано k строк, $k < n$. Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров порядка k, лежащих в выделенных строках, на их алгебраические дополнения.

Заметим, что согласно первому свойству определителей теорема Лапласа может быть сформулирована и относительно зафиксированных столбцов.

Следствие. Пусть A и B - квадратные матрицы порядка n. Тогда

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Особый интерес теорема Лапласа представляет в случае, когда $k = 1$. В этом случае миноры, попавшие в выделенную строку (или столбец) – это элементы этой строки (или столбца). В этом случае обычно применяются следующие обозначения: M_{ij} - дополнительный минор к элементу a_{ij} (минору первого порядка), $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ - соответствующее алгебраическое дополнение. Тогда формула теоремы Лапласа принимает вид:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

где i - номер любой строки. Эта формула называется разложением определителя по строке с номером i.

Если зафиксировать столбец с номером j, то получим аналогичную формулу разложения определителя по этому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Пример. Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Δ Воспользуемся формулой разложения определителя по строке или столбцу. Выберем третий столбец, так как в этом столбце больше всего нулей (каждый такой нуль дает нулевое слагаемое в сумме, как следствие это позволит нам находить меньшее число дополнительных миноров):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Первый из полученных определителей вычислим по второй строке, а второй – по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4-1)-(3-4) = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4-1)+2(-6-2) = -21.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4) + 2\cdot(-21) = -54. \blacktriangle$$

Покажем, как работает комбинированный метод вычисления определителей.

Пример. Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Δ Добьемся того, чтобы все элементы некоторого столбца, за исключением одного, превратились в нулевые за счет свойства 8 определителей. Лучше выбрать столбец, в котором есть единичный элемент (или элемент равный -1). В данном определителе выберем первый столбец и единичный элемент, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца. Из элементов первой строки вычтем соответствующие элементы второй строки, умноженные на 5, к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, а из элементов четвертой строки вычтем соответствующие элементы второй строки, умноженные на 2. Согласно свойству 8 при этом определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 19 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

Применим теперь разложение определителя по первому столбцу. В результате получим:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & 19 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \\ -6 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

Выберем теперь третий столбец и единичный элемент, стоящий на пересечении третьей строки и третьего столбца. По аналогии произведем следующие преобразования: к элементам первой и второй строк прибавим соответствующие элементы третьей строки, умноженные на 3. В результате будем иметь:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -25 & 46 & 0 \\ -13 & 26 & 0 \\ -6 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -25 & 46 \\ -13 & 26 \end{vmatrix}.$$

Вычислим теперь полученный определитель второго порядка по определению, предварительно вынеся за знак определителя множитель -13 элементов второй строки:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 13 \cdot \begin{vmatrix} -25 & 46 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 13 \cdot \left(-25 \cdot (-2) - 46 \cdot 1\right) = 52 . \blacktriangle$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение. Пусть A - квадратная матрица порядка n. Квадратная матрица A^{-1} порядка n называется обратной к матрице A, если справедливо равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E - единичная матрица порядка n.

Теорема. Пусть A - квадратная матрица порядка n. Тогда обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. При этом обратная матрица определена однозначно.

Доказательство. 1) Докажем сначала, что в случае существования матрицы A^{-1} выполняется: $\det A \neq 0$. Из определения обратной матрицы следует равенство: $A \cdot A^{-1} = E$. Тогда

$$\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det E = 1 .$$

Из теоремы об определителе произведения квадратных матриц следует, что

$$\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det A \cdot \det\left(A^{-1}\right).$$

Таким образом,

$$\det A \cdot \det\left(A^{-1}\right) = 1,$$

Откуда следует, что определитель матрицы A не может быть равным нулю.

2) Пусть теперь $\det A \neq 0$. Покажем, что в этом случае существует единственная обратная матрица A^{-1}. Построим следующую матрицу:

$$B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица построена из матрицы A следующим образом: каждый элемент матрицы заменяется его алгебраическим дополнением, а полученная матрица транспонируется.

Покажем, что построенная таким образом матрица является обратной к матрице A. По свойству 4 и определению произведения матриц получаем:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\frac{1}{\det A} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\det A} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} \right)_{n \times n}.$$

Рассмотрим элементы $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk}$ полученной матрицы. Если $i = j$, то

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \det A,$$

так как полученная сумма представляет собой разложение определителя $\det A$ по элементам строки с номером i. Если же $i \neq j$, то сумма $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk}$ есть определитель, полученный из определителя $\det A$ заменой строки с номером j на строку с номером i. Такой определитель имеет две одинаковые строки и, следовательно, по свойству 5 определителей равен нулю. Следовательно,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A, & \text{если}\, i = j \\ 0, & \text{если}\, i \neq j \end{cases}.$$

Таким образом,

$$A \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det A & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \det A \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $B \cdot A = E$. Так как $A \cdot B = B \cdot A = E$, томатрица B является обратной к матрице A.

Покажем, что обратная матрица определена однозначно. Пусть кроме матрицы A^{-1} существует еще одна обратная к матрице A - матрица $\widetilde{A}^{-1}$. Тогда согласно определению обратной матрицы и свойству 7 произведения матриц имеем:

$$\widetilde{A}^{-1} \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) = \widetilde{A}^{-1} \cdot E = \widetilde{A}^{-1}.$$

С другой стороны с учетом свойства 1 произведения матриц получаем:

$$\widetilde{A}^{-1} \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) = \left(\widetilde{A}^{-1} \cdot A\right) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}.$$

Таким образом,

$$\widetilde{A}^{-1} = A^{-1},$$

и, следовательно, обратная матрица определена однозначно.■

Определение. Квадратная матрица, определитель которой не равен нулю, называется невырожденной.

Теорема говорит о том, что невырожденность квадратной матрицы является критерием существования для нее обратной матрицы.

Пример. Найти обратную матрицу (если она существует) к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Δ Найдем определитель исходной матрицы:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-2)+2\cdot(3-2)-(6+2)=-9.$$

Так как $\det A\neq 0$, то обратная матрица существует. Для ее нахождения определим алгебраические дополнения всех элементов исходной матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-2=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-2)=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=6+2=8,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(-2+2)=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+2=3,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-(2+4)=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2-1=-3,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(1+3)=-4,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1+6=5.$$

Для составления обратной матрицы из исходной матрицызаменим элементы на их алгебраические дополнения, протранспонируем полученную матрицу и умножим на число $\frac{1}{\det A}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/9 & -1/3 & 4/9 \\ -8/9 & 2/3 & -5/9 \end{pmatrix}.▲$$

РАНГ МАТРИЦЫ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу. Определим миноры этой матрицы так же, как и для определителя, т.е. минор порядка k - это любой определитель, стоящий на пересечении любых k строк и любых k столбцов данной матрицы. Очевидно, что для матрицы размера $m\times n$ можно составить миноры до порядка $s=\min\{m,n\}$.

Определение. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ненулевой минор, порядок которого совпадает с рангом матрицы, называется базисным.

Ранг матрицы A обозначается: $rankA$.

Если пользоваться лишь приведенным определением, тодля нахождения ранга матрицы размера $m\times n$нужно начать с нахождения миноров самого высокого порядка $s=\min\{m,n\}$. Если среди этих миноров есть хотя бы один ненулевой, то ранг данной матрицы равен s. Если все миноры этого порядка равны нулю, то надо перейти к нахождению миноров порядка $s-1$ и т.д. Этот процесс надо продолжать до тех пор, пока не возникнет ситуация, когда миноры порядка $r+1$ еще равны нулю, а среди миноров порядка r есть хотя бы один ненулевой. Тогда ранг матрицы и будет равен r.

Очевидно, что такой метод нахождения (по определению) на практике может оказаться очень громоздким.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема. Пусть все миноры порядка k матрицы A равны нулю. Тогда все миноры матрицы A более высокого порядка также равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим любой минор порядка $k+1$. Распишем его по элементам любой строки. Все алгебраические дополнения этих элементов будут представлять собой миноры порядка k исходного определителя и, следовательно, равны нулю. Таким образом, любой минор порядка $k+1$ равен нулю. Аналогично доказывается равенство нулю всех миноров более высоких порядков. ■

К элементарным преобразованиям над матрицей относятся:

1) замена местами любых двух строк (двух столбцов)

2) умножение всех элементов любой строки (любого столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам любой строки (любого столбца) соответствующих элементов любой другой строки (любого другого столбца), умноженных на любое число, отличное от нуля.

Определение. Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется эквивалентной к матрице A.

То, что матрица B эквивалентна матрице A, обозначается $B \sim A$. Очевидно, что если $B \sim A$, то и $A \sim B$.

На практике при нахождении ранга матрицы важным будет следующее, приводимое здесь без доказательства, утверждение.

Теорема. Ранги эквивалентных матриц совпадают.

В дальнейшем мы будем использовать такое понятие, как нулевая строка. Этот термин означает, что все элементы данной строки равны нулю. Соответственно ненулевая строка – это строка, содержащая хотя бы один ненулевой элемент. Эта же терминология относится и к столбцам.

Как мы видели в одном из примеров на нахождение определителей, за счет элементарных преобразований всегда можно получить цу B треугольного вида, эквивалентную матрице A. Согласно последней теореме ранг полученной эквивалентной матрицы B равен рангу исходной матрицы. Таким образом, можно перейти к нахождению ранга матрицы B. В этой матрице могли возникнуть нулевые строки или столбцы. Очевидно, что они никак не влияют на ранг матрицы, ихнужно выбросить из рассмотрения.Треугольный вид позволит быстро определить базисный минор.

Пример. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 9 & 11 \\ 4 & 8 & 15 & 20 \end{pmatrix}$.

Δ Для получения нулей ниже главной диагонали в первом столбце произведем следующие преобразования: из всех элементов второй, третьей и пятой строк вычтем соответствующие элементы первой строки, умноженные на число 2, из всех элементов четвертой строки вычтем соответствующие элементы первой строки, умноженные на число 3 (преобразования совершаем за счет строки с тем же номером, что и у столбца, с которым мы работаем). В результате получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 9 & 11 \\ 4 & 8 & 15 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} c2 : c2 - 2c1 \\ c3 : c3 - 2c1 \\ c4 : c4 - 3c1 \\ c5 : c5 - 2c1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице есть две одинаковые строки, одну из них можно сделать нулевой. Например, можно из всех элементов четвертой строки вычесть соответствующие элементы третьей строки. После этого поменяем местами третью и пятую строки:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} c4 : c4 - c3 \\ c3 \leftrightarrow c5 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для получения нулей ниже главной диагонали во втором столбце достаточно из всех элементов третьей строки вычесть соответствующие элементы второй строки, умноженные на 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim [c3 : c3 - 2c2] \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для приведения матрицы к треугольному виду осталось ко всем элементам четвертой строки прибавить соответствующие элементы третьей строки:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim [c4 : c4 + c3] \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выбросим из рассмотрения четвертую и пятую строки, являющиеся нулевыми. Останется три строки, поэтому ранг матрицы не может быть больше чем 3. Очевидно, что левый верхний угловой минор порядка 3 является определителем треугольного вида и не равен нулю, т.к. на его главной диагонали нет нулевых элементов:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6.$$

Таким образом, ранг исходной матрицы равен 3. ▲

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ . ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется совокупность равенств вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные; числа a_{ij} называются коэффициентами при неизвестных; числа b_i называются свободными коэффициентами ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$).

В этих обозначенияхиндекс i означает номер уравнения, а индекс j – номер неизвестного, к которым относятся коэффициенты.

Число уравнений m может быть больше, равно или меньше числа неизвестных n. Если $m = n$, то будем называть систему линейных уравнений квадратной.

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные коэффициенты этой системы равны нулю, и называется неоднородной, если среди свободных коэффициентов есть хотя бы один ненулевой коэффициент.

Определение. Упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется решением данной системы, если подстановка этих чисел вместо соответствующих неизвестных обращает каждое уравнение системы в истинное тождество.

Решить систему линейных уравнений означает найти совокупность всех ее решений.

Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной. Система, не имеющая решений, называется несовместной.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и называется неопределенной, если она имеет более одного решения.

Две системы называются эквивалентными или равносильными, если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы также считаются эквивалентными.

Введем следующую терминологию. Матрица

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется матрицей системы. Очевидно, что для квадратных систем матрица системы является квадратной матрицей. Матрица-столбец

$$B_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix},$$

составленная из свободных коэффициентов, называется столбцом свободных коэффициентов. Матрица

$$
\left(A|B\right)_{m\times(n+1)}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),
$$

составленная из всех коэффициентов, называется расширенной матрицей системы. Матрица-столбец

$$
X_{n\times 1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},
$$

составленная из неизвестных, называется столбцом неизвестных.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для введенной матрицы системы A и столбца неизвестных X по определению произведения матриц имеем:

$$
\left(A\cdot X\right)_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}.
$$

Элементы получаемой матрицы есть левые части соответствующих уравнений данной системы линейных уравнений. Элементы матрицы B - это правые части соответствующих уравнений. Поэтому решение данной системы линейных уравнений равносильно решениюматричного уравнения

$$A \cdot X = B.$$

В общем случае решение такого уравнения именно в матричном виде может быть не найдено.

Рассмотрим случай квадратной системы. В этом случае матрица A является квадратной, и если $\det A \neq 0$, то для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части матричного уравнения на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

Воспользуемся свойством 1 произведения матриц. Согласно этому свойству, определению обратной матрицы и свойству 7 произведения матриц имеем:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X.$$

Таким образом, исходное матричное уравнение переходит в равенство

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Это равенство дает решение матричного уравнения, а вместе с тем и решение системы. Применение последней формулы и называется матричным методом или методом решения системы с помощью обратной матрицы. Так как обратная матрица и произведение матриц определены однозначно, то и решение системы в данном случае единственно, т.е. в случае, когда система является квадратной и определитель матрицы системы не равен нулю (а эти требования существенны при реализации данного метода), эта система будет определенной.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

матричным методом.

Δ Для данной системы имеем:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-3-1)-(-9+4)+(-3-4)=-8+5-7=-10.$$

Так как $\det A\neq 0$, то система является определенной. Кроме того, для матрицы A существует обратная матрица. Определим ее. Для этого осталось найти алгебраические дополнения все элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-3-1=-4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-(-9+4)=5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-3-4=-7,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-(-3+1)=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-6-4=-10,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-(-2-4)=6,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(-2-3)=5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 5 & -10 & 5 \\ -7 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение $A^{-1} \cdot B$ с учетом свойства 4 произведения матриц:

$$A^{-1} \cdot B = \left(-\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 5 & -10 & 5 \\ -7 & 6 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \left(\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 5 & -10 & 5 \\ -7 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$-\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение данной системы:

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = -3,$$

$$x_3 = 2.$$

Проверим правильность найденного решения. Подставим для этого найденные значения неизвестных во все уравнения данной системы. Получим истинные тождества:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + (-3) + 2 = 1 \\ 3 \cdot 1 + (-3) - 2 = -2 \\ 4 \cdot 1 - (-3) - 3 \cdot 2 = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, решение системы найдено правильно. ▲

МЕТОД КРАМЕРА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постараемся непосредственно реализовать равенство $X = A^{-1} \cdot B$. Воспользуемся формулой для нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим: $\Delta = \det A$. Согласно свойству 4 и определению произведения матриц имеем:

$$X = A^{-1} \cdot B = \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ . \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем:

$$x_i = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n,\ i = 1,2,\dots,n.$$

Сумма, стоящая в правой части последнего равенства, есть определитель, полученный из определителя Δ заменой столбца с номером i на столбец свободных коэффициентов. Обозначим такой определитель Δ_i. В результате получаем формулы:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,2,\dots,n.$$

Эти формулы и называются формулами Крамера. По сути, формулы Крамера позволяют находить решение квадратной системы линейных уравнений с помощью нахождения определителей. Напомним, что эти формулы можно применять, как и матричный метод, лишь в случае, когда система является квадратной и определитель матрицы системы не равен нулю.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

методом Крамера.

Δ Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (6-15) - 2 \cdot (4-9) + (10-9) = -9 + 10 + 1 = 2.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система является определенной и можно воспользоваться формулами Крамера. Для этого необходимо найти определители Δ_i, $i = 1,2,3,$ каждый из которыхполучается из определителя Δ заменой столбца с номером i на столбец свободных коэффициентов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (6-15) - (4-5) = -9 + 1 = -8$$

,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-9) + (2-3) = 5 - 1 = 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (10-9)-(5-6) = 1+1 = 2,$$

(первый из этих определителей расписан по элементам первого столбца, второй – по элементам второго столбца, а третий – по элементам третьего столбца). Воспользуемся формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{2} = -4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1.$$

Проверим правильность найденного решения. Подставив найденные значения во все уравнения системы. В результате получим истинные тождества:

$$\begin{cases} -4 + 2\cdot 2 + 1 = 1 \\ 2\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 = 1 \\ 3\cdot(-4) + 5\cdot 2 + 2\cdot 1 = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, решение найдено правильно.▲

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ
МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Очевидно, что ранг расширенной матрицы системы

$$
(A|B)_{m\times(n+1)} = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
. & . & \dots & . & . \\
. & . & \dots & . & . \\
. & . & \dots & . & . \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

не меньше ранга матрицы системы

$$
A_{m\times n} = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
. & . & \dots & . \\
. & . & \dots & . \\
. & . & \dots & . \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}.
$$

Причем $rank(A|B)$ может быть больше чем $rankA$ лишь на единицу. Оказывается, что соотношение между этими рангами полностью определяет совместность данной системы. Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений является совместной тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы.

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}.
$$

К элементарным преобразованиям над системой относятся следующие преобразования:

1) замена местами двух уравнений,

2) умножение обеих частей какого-либо уравнения на любое число, отличное от нуля,

3) прибавление к каждой части одного уравнения соответствующей части любого другого уравнения, умноженной на некоторое число.

Эти преобразования, очевидно, не меняют множество всех решений системы, т.е. приводят к эквивалентной системе. Очевидно также, что эти преобразования сводятся к соответствующим элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы системы.

Метод Гаусса заключается в приведении расширенной матрицы системы к треугольному виду с помощью указанных преобразований.При этом используется уже известный нам принцип (см. вычисление определителей) приведения матрицы к треугольному виду: элементы, находящиеся ниже главной диагонали, сводятся к нулевым последовательно по столбцам за счет элементарных преобразований над строками. При этом кроме текущей строки используется строка с тем же номером, что и у столбца, с которым работаем.

После этого необходимо восстановить систему линейных уравнений по полученной эквивалентной матрице. Как уже отмечалось, полученная система будет эквивалентной относительно исходной системы. Далее нужно обратиться к теореме Кронекера-Капелли, дающей критерий совместности системы линейных уравнений. Кроме того, надо учитывать, что совместная система является определенной лишь в случае, когда ранг расширенной матрицы системы r равен числу неизвестных n, и является неопределенной в случае, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных. В случае определенной системы решение системы, восстановленной по матрице треугольного вида, легко может быть найдено последовательно, начиная с последней неизвестной из последнего уравнения (пермещаясь по уравнениям «снизу-вверх»). В случае неопределенной системы будем иметь бесчисленное множество решений. Для описания этого множества нужно считать, что неизвестные, соответствующие столбцам, не вошедшим в базисный минор, (таких неизвестных будет ровно $n-r$) принимают произвольные значения, а остальные неизвестные нужно выразить через эти значения так же, как и в случае определенной системы.

Таким образом, в результате применения метода Гаусса может возникнуть одна из следующих ситуаций:

1) $rank(A|B) \neq rankA \Rightarrow$ система несовместна,

2) $rank(A|B) = rankA = n \Rightarrow$ система является определенной,

3) $rank(A|B) = rankA < n \Rightarrow$ система является неопределенной.

Таким образом, метод Гаусса является универсальным. В отличие от матричного метода или метода Крамера он работает в любом случае. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие каждую из указанных выше ситуаций.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 + 10x_5 = 1 \end{cases}$$

или показать, что это система несовместна.

Δ Отметим, что эта система не является квадратной и для нее применим только метод Гаусса. Приведем расширенную матрицу системы к треугольному виду за счет элементарных преобразований над строками:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & -1 & 10 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} c2 : c2 - 2c1 \\ c3 : c3 - 3c1 \\ c4 : c4 - 4c1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & 17 & -2 \\ 0 & -3 & -12 & -5 & 26 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} c3: c3-2c2 \\ c4: c4-3c2 \end{bmatrix}\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & -3 \end{array}\right)\sim[c4: c4-c3]\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

По виду полученной матрицы можно сразу судить о том, что ранг матрицы системы меньше четырех (все элементы четвертой строки матрицы, эквивалентной матрице системы, равны нулю). Можно уточнить, что ранг этой матрицы равен 3, так как минор третьего порядка, стоящий на пересечении первых трех строк и первого, второго и четвертого столбца (определитель треугольного вида), не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-8) = 8 \neq 0.$$

Ранг расширенной матрицы системы равен 4. Действительно, минор четвертого порядка, стоящий на пересечении всех четырех строк и первого, второго, четвертого и шестого столбца (определитель треугольного вида), не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-8)\cdot(-1) = 8 \neq 0.$$

Таким образом, ранг расширенной матрицы системы не совпадает с рангом матрицы системы. Следовательно, система является несовместной. ▲

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

или показать, что это система несовместна.

Δ Приведем расширенную матрицу системы к треугольному виду за счет элементарных преобразований над строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} c2:3c2-2c1 \\ c3:3c3-4c1 \\ c4:c4-c1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 11 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} c3:5c3+11c2 \\ c4:5c4+2c2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -39 & -117 \\ 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} c3: c3/(-39) \\ c4: c4/(-13) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim [c4:c4-c3] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $rank(A|B) = rankA = 3$, так каклевый верхний угловой минор 3-го порядка не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 1 = -15 \neq 0,$$

А 4-я строка является нулевой. Значит, система является совместной согласно теореме Кронекера-Капелли. Так как ранг расширенной матрицы системы совпадает с числом неизвестных, то система является определенной. Восстановим эквивалентную систему по полученной матрице:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_2 - 4x_3 = -7 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Подставим найденное x_3 во второе уравнение системы. В результате получим: $-5x_2 - 12 = -7$, откуда будем иметь: $x_2 = -1$. Подставим найденные x_2 и x_3 в первое уравнение системы: $3x_1 - 1 - 3 = 2$. Следовательно, $x_1 = 2$. Таким образом, набор чисел 2,-1,3 – единственное решение данной системы. ▲

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -10 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = -7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 13x_4 = -15 \\ 3x_1 + x_2 - 10x_3 = -8 \end{cases}$$

или показать, что это система несовместна.

Δ Отметим, в первую очередь, что система является квадратной. Однако матричный метод и метод Крамера не применимы, так как определитель матрицы системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 4 & -13 \\ 3 & 1 & -10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} c2 : c2 - c1 \\ c3 : c3 - 3c1 \\ c4 : c4 + c1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 10 & 5 \\ 6 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 10 & 5 \\ 6 & -12 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

(все строки полученного определителя третьего порядка пропорциональны).

Применим метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -6 & \bigg| -10 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & \bigg| -7 \\ 4 & -3 & 4 & -13 & \bigg| -15 \\ 3 & 1 & -10 & 0 & \bigg| -8 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} c2 : 3c2 - 2c1 \\ c3 : 3c3 - 4c1 \\ c4 : c4 - c1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -6 & \bigg| -10 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & \bigg| -1 \\ 0 & -5 & 20 & -15 & \bigg| -5 \\ 0 & 2 & -8 & 6 & \bigg| 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} c3 : c3 - 5c2 \\ c4 : c4 + 2c2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -6 & \bigg| -10 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & \bigg| -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bigg| 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bigg| 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы и равен 2 (нулевые строки можно не брать в рассмотрение, а в качестве базового минора можно взять левый верхний угловой минор). Число неизвестных больше этого ранга. Так как $n - r = 4 - 2 = 2$, тодве неизвестных, соответствующихстолбцам, невошедшим в указанный базовый минор, могут принимать произвольные значения. Таким образом, $x_3 = \alpha_1$, $x_4 = \alpha_2$. Восстановим систему по полученной эквивалентной матрице:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -10 \\ -x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

Выразим из второго уравнения x_2, подставив $x_3 = \alpha_1$, $x_4 = \alpha_2$:

$$x_2 = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 1.$$

Затем, подставив найденные x_2, x_3, x_4 в первое уравнение, выразим x_1:

$$3x_1 = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 1 + 2\alpha_1 + 6\alpha_2 - 10$$

$$\Updownarrow$$

$$3x_1 = 6\alpha_1 + 3\alpha_2 - 9$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3.$$

Таким образом,бесконечное множество всех решений данной системы имеет вид:

$$x_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3,$$

$$x_2 = 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 1,$$

$$x_3 = \alpha_1,$$

$$x_4 = \alpha_2,$$

где α_1, α_2 - произвольные числа.

СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Так как нулевой столбец не влияет на нахождение ранга матрицы, то очевидно, что ранг расширенной матрицы системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

совпадает с рангом матрицы системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли такая система всегда совместна. Очевидно также, что однородная система всегда имеет нулевое (тривиальное) решение:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 .$$

Выясним, когда эта система имеет ненулевое решение.

Теорема. Система однородных линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг r ее матрицы меньше числа неизвестных n.

Доказательство.

Необходимость. Так как ранг матрицы системы не может быть больше числа неизвестных, то $r \le n$. Предположим, что $r = n$. Тогда один из миноров порядка n отличен от нуля. Поэтому соответствующая система линейных уравнений согласно методу Крамера имеет единственное решение:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0 ,$$

так как $\Delta \ne 0$, $\Delta_i = 0$ (определитель Δ_i получен из определителя Δ заменой столбца с номером i на нулевой столбец свободных коэффициентов). Значит, других, кроме тривиального, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Достаточность. Пусть $r < n$. Тогда, как известно из теоремы Кронекера-Капелли, система является неопределенной. Значит, она имеет и ненулевое решение. ■

Рассмотрим теперь квадратную систему однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Теорема. Система n однородных линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю.

Доказательство. Определитель Δ равен нулю тогда и только тогда, когда $r < n$, а это согласно предыдущей теореме равносильно тому, что система имеет ненулевое решение.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Δ Заметим, в первую очередь, что определитель этой системы равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-2) - (-5+14) - (-5-7) = -3 - 9 + 12 = 0.$$

Таким образом, данная система имеет ненулевое решение. Для нахождения множества всех решений этой системы применим метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} c2 : c2 - 5c1 \\ c3 : c3 - 7c1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim [c3 : c3 - 2c2] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Заметим, что в случае однородной системы можно было работать не с расширенной матрицей системы, а с основной матрицей системы, так как последний столбец расширенной матрицы остается нулевым при любых элементарных преобразованиях.

Ранг матрицы системы равен 2 (базовым является левый верхний угловой минор). Восстановим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Пусть $x_3 = \alpha$, где α - любое число. Выразим x_2 из второго уравнения:

$$4x_2 = 3\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\alpha .$$

Подставим найденные x_2, x_3 в первое уравнение и выразим x_1:

$$x_1 = \alpha - \frac{3}{4}\alpha = \frac{1}{4}\alpha .$$

Таким образом, данная однородная система имеет бесчисленное множество решений вида:

$$x_1 = \frac{1}{4}\alpha ,$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\alpha ,$$

$$x_3 = \alpha ,$$

где α - любое число (такое множество содержит, в том числе, нулевое решение). ▲

ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ

Операции сложения, вычитания, умножения, деления переводят действительные числа в действительные числа. Операция извлечения корня четной степени из отрицательного числа неразрешима в классе действительных чисел. Это привело к введению чисел нового вида, которые называются комплексными числами.

Введем в рассмотрение так называемую мнимую единицу i, которая определяется равенством:

$$i^2 = -1.$$

Определение. Числа вида

$$z = x + iy,$$

где x и y - действительные числа, а i - мнимая единица, называются комплексными числами. При этом x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, а число y называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Замечание. В дальнейшем мы рассмотрим другие формы записи комплексного числа. Форма записи $z = x + iy$ называется алгебраической.

Комплексные числа, у которых мнимая часть равна нулю, являются действительными числами. Комплексные числа, у которых действительная часть равна нулю, называются чисто мнимыми.

Комплексное число считается равным нулю тогда и только тогда, когда равна нулю и его действительная и его мнимая часть.

Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные и мнимые части.

Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел вводятся в соответствии с обычными представлениями об этих операциях над действительными числами с учетом того, что $i^2 = -1$. При этом результатом любой арифметической операции должно быть комплексное число. В соответствии с этим имеем:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Определение. Комплексное число

$$\bar{z}=x-iy$$

называется сопряженным к комплексному числу $z=x+iy$.

Рассмотрим свойства операции сопряжения.

1. $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$.

Доказательство. Воспользуемся определением соответствующих арифметических операций и операции сопряжения. В результате получаем следующую цепочку равенств:

$$\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)}=(x_1\pm x_2)-i(y_1\pm y_2)=$$
$$(x_1-iy_1)\pm(x_2-iy_2)=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}. \blacksquare$$

Аналогично доказываются следующие свойства.

2. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Пример. Вычислить

$$\frac{(1+i)\overline{(3+i)}}{1-i}.$$

Δ Воспользуемся определениями операций умножения и деления комплексных чисел:

$$\frac{(1+i)\overline{(3+i)}}{1-i}=\frac{(1+i)(3-i)}{1-i}=\frac{(3+1)+i(3-1)}{1-i}=\frac{4+2i}{1-i}=\frac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=$$
$$=\frac{(4-2)+i(4+2)}{1+1}=\frac{2+6i}{2}=1+3i. \blacktriangle$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ ЗАПИСИ

Задать комплексное число $z = x + iy$ означает задать упорядоченную пару (x, y) действительных чисел. С геометрической точки зрения такая пара есть либо точка $M(x, y)$, либо вектор (направленный отрезок) $\overline{OM} = \{x, y\}$ на плоскости (в случае, если $z \neq 0$). При этом действительная часть комплексного числа откладывается на оси абсцисс, а мнимая часть - на оси ординат. Поэтому при изображении комплексных чисел ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат - мнимой. Саму координатную плоскость при этом называют комплексной плоскостью.

Операциям сложения, вычитания комплексных чисел, умножения на действительное число отвечают соответствующие операции над изображающими их векторами.

Будем отталкиваться от изображения комплексного числа $z = x + iy$ в виде вектора $\overline{OM} = \{x, y\}$. Длина этого вектора называется модулем числа z и обозначается $|z|$. По известной формуле длины вектора получаем:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overline{OM}$ называется аргументом комплексного числа z и обозначается $Arg z$.

Очевидно, что модуль комплексного числа определен однозначно, а его аргумент – с точностью до слагаемого $2\pi n$, где n - целое число. Аргумент будет определен однозначно, если область его изменения ограничить промежутком величины 2π. В качестве такого промежутка возьмем промежуток $(-\pi, \pi]$. Такое значение аргумента называют главным значением и обозначают: $\arg z$.

В случаях, когда $\operatorname{Re} z = 0$ или $\operatorname{Im} z = 0$ найти главное значение аргумента не представляет труда.

Пусть $\operatorname{Re} z \neq 0$ и $\operatorname{Im} z \neq 0$. Очевидно, что для комплексного числа $z = x + iy$ справедливы равенства:

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi,$$

где $r = |z|$. Из этих формул следует, что

$$tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Тогда

$$Argz = arctg\frac{y}{x} + \pi k,$$

где k - целое число. Для нахождения главного значения аргумента выберем число k следующим образом: $k = 0$, если точка $M(x, y)$ располагается в первой или четвертой четверти; для второй четверти полагаем $k = 1$, а для третьей: $k = -1$.

Используя соотношения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем следующую форму записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи называется тригонометрической.

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

комплексное число с аргументом φ и модулем r можно записать в так называемой показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Отметим, что тригонометрическая и показательная форма записи несут одну и ту же информацию.

Пример. Перевести комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$ в тригонометрическую и показательную форму.

Δ Выделим действительную и мнимую части данного комплексного числа:

$$\operatorname{Re} z = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{Im} z = 1.$$

Найдем его модуль:

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$$

Главное значение аргумента найдем по формуле

$$\arg z = arctg\,\frac{y}{x} + \pi k,$$

полагая в ней $k = 1$ (так как точка $M\left(-\sqrt{3},1\right)$ находится во второй четверти):

$$\arg z = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

В итоге имеем:

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Этот результат можно переписать в показательной форме:

$$z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.\ \blacktriangle$$

ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ

При умножении и делении комплексных чисел в тригонометрической или показательной форме пользуются следующим утверждением.

Теорема. 1) При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2) При делении двух комплексных чисел в тригонометрической форме модуль числителя делится на модуль знаменателя, а аргумент знаменателя вычитается из аргумента числителя.

Доказательство. Пусть

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

1) Непосредственно распишем произведение данных комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot \rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$$
$$= r\rho((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) =$$
$$= r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)),$$

что и требовалось доказать.

2) Пусть $\frac{z_1}{z_2} = z$. Покажем, что

$$z = \frac{r}{\rho}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)).$$

Для этого достаточно показать, что для такого z имеет место равенство:

$$z \cdot z_2 = z_1.$$

По доказанной первой части данного утверждения имеем:

$$z\cdot z_2 = \frac{r}{\rho}\cdot \rho(\cos(\varphi-\psi+\psi) + i\sin(\varphi-\psi+\psi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z_1 .\blacksquare$$

Теорема (формула Муавра). Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n\in N,$$

т.е. при возведении в натуральную степень модуль комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент на нее умножается.

Доказательство. Для доказательства достаточно многократно применить результат пункта 1 предыдущей теоремы:

$$z^n = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n} \cdot \left(\cos\underbrace{(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi)}_{n} + i\sin\underbrace{(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi)}_{n} \right) = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

■

Замечание. Утверждения последних двух теорем хорошо прослеживаются в показательной форме:

$$\left(r_1 e^{i\varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Эти формулы соответствуют обычным представлениям об операциях с показательными выражениями.

Пример. Вычислить

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2008}.$$

Δ Переведем комплексное число $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрическую форму:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\varphi = \arg z = arctg\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Воспользуемся формулой Муавра-Лапласа:

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2008}=\cos\frac{2008\pi}{3}+i\sin\frac{2008\pi}{3}=cos\frac{2007\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{2007\pi+\pi}{3}=$$

$$=cos\left(669\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(669\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \blacktriangle$$

Определение. Комплексное число w называется корнем порядка n из комплексного числа z (обозначается $w=\sqrt[n]{z}$), если $z^n=w$.

Теорема. При извлечении корня порядка n из комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ получается n различных значений, которые могут быть найдены по формуле:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где k может принимать значения $0,1,...,n-1$.

Доказательство. Воспользуемся определением корня порядка n. Пусть

$$w=\sqrt[n]{z}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Тогда $z=w^n$. Воспользуемся теперь формулой Муавра, в соответствии с которой имеем:

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi).$$

Получили равенство двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Такое равенство возможно лишь в случае, когда совпадают модули комплексных чисел, а аргументы совпадают с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k - целое число. Следовательно,

$$r=\rho^n,$$

$$n\psi=\varphi+2\pi k\Leftrightarrow\psi=\frac{\varphi+2\pi k}{n}.$$

Выясним, при каких значениях k будем получать разные значения корня. В записи $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$ тригонометрические функции являются 2π -

периодическими. Этот период будет пройден аргументом $\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, когда k пройдет n значений, например, от 0 до $n-1$. Действительно, например,

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{z}\right)_0 .$$

Аналогично

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_{n+1} = \left(\sqrt[n]{z}\right)_1, \ldots, \left(\sqrt[n]{z}\right)_{n+l} = \left(\sqrt[n]{z}\right)_l .$$

Таким образом, получаем n различных значений корня:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,1,\ldots,n-1$. ■

Пример. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$.

Δ Переведем комплексное число $z = -8 - i8\sqrt{3}$ в тригонометрическую форму:

$$\operatorname{Re} z = -8, \ \operatorname{Im} z = -8\sqrt{3},$$

$$r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + \left(-8\sqrt{3}\right)^2} = 16,$$

$$\varphi = \arg z = arctg\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3},$$

$$z = 16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Воспользуемся формулой для извлечения корня:

$$\left(\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}\right)_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right), \ k = 0,1,2,3.$$

В результате получаем четыре значения данного корня:

$$\left(\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}\right)_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i,$$

$$\left(\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}\right)_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$\left(\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}\right)_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i,$$

$$\left(\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}\right)_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3}. \ \blacktriangle$$

МНОГОЧЛЕНЫ. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН.

Определение. Многочленом называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ - некоторые числа, называемые коэффициентами многочлена. Порядок старшей степени, присутствующей в записи многочлена, называется порядком этого многочлена, а слагаемое, содержащее эту степень, называется старшим членом многочлена.

Многочлен порядка n обозначается, например, $P_n(x)$.

Замечание. Любое число является многочленом порядка 0. Если это число равно нулю, то многочлен будем называть нулевым.

Теорема. Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - произвольные ненулевые многочлены порядка n и m соответственно. Тогда существуют многочлены $S(x)$ и $R(x)$, такие что справедливо равенство:

$$P_n(x) = Q_m(x)S(x) + R(x),$$

причем порядок многочлена $R(x)$ меньше чем m.

Доказательство. 1) Пусть $n < m$. Определим следующие многочлены:

$S(x)=0$, $R(x)=P_n(x)$. Тогда очевидно, что справедливо требуемое соотношение:

$$P_n(x)=Q_m(x)S(x)+R(x),$$

при этом порядок многочлена $R(x)$ меньше m, так как равен n.

2) Пусть $n \geq m$. Разделим старший член многочлена $P_n(x)$ на старший член многочлена $Q_m(x)$. В результате получим c_0x^{n-m}. Это выражение будет старшим членом многочлена $S(x)$. Если порядок этого выражения равен нулю (это означает, что $n=m$), то на этом процесс построения многочлена $S(x)$ заканчивается. В обратном случае умножим $Q_m(x)$ на выражение c_0x^{n-m} и вычтем полученный многочлен из $P_n(x)$. В результате получим многочлен $R^1(x)$, порядок которого меньше чем n. Проделаем те же самые операции, отталкиваясь уже не от $P_n(x)$, а от полученного многочлена. Процесс этот продолжаем до тех пор, пока порядок многочлена $R(x)$, полученного вычитанием, не станет меньше чем m. В результате получаем цепочку равенств:

$$P_n(x)=c_0x^{n-m}Q_m(x)+R^1(x),$$

$$R^1(x)=c_1x^{n-m-1}Q_m(x)+R^2(x),$$

$$\dots$$

$$R^k(x)=c_kx^{n-m-k}Q_m(x)+R(x).$$

Таким образом, получаем:

$$P_n(x)=c_0x^{n-m}Q_m(x)+c_1x^{n-m-1}Q_m(x)+\ldots+c_kx^{n-m-k}Q_m(x)+R(x)=$$
$$=Q_m(x)\left(c_0x^{n-m}+c_1x^{n-m-1}+\ldots+c_kx^{n-m-k}\right)+R(x).$$

Обозначим:

$$S_{n-m}(x)=c_0x^{n-m}+c_1x^{n-m-1}+\ldots+c_kx^{n-m-k}.$$

В результате получаем требуемое равенство:

$$P_n(x) = Q_m(x) S_{n-m}(x) + R(x),$$

где порядок многочлена $R(x)$ меньше порядка многочлена $Q_m(x)$. ■

Утверждение теоремы в случае $n \geq m$ можно записать в виде следующего равенства:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

Эта формула называется формулой деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$. При этом получаемый многочлен $S_{n-m}(x)$ называется целой частью, а многочлен $R(x)$ называется остатком.

Заметим, что в доказательстве последней теоремы, по сути, описан метод деления многочлена на многочлен. Проследим за этим методом на следующем примере.

Пример. Выделить целую часть в выражении

$$\frac{2x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x + 2}{x^3 + x^2 + x - 1}.$$

Δ Разделим старший член числителя $2x^6$ на старший член знаменателя x^3. В результате получим $2x^3$. Это выражение будет старшим членом целой части. Умножим знаменатель на $2x^3$ и вычтем полученный многочлен из числителя:

$$\left(2x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x + 2\right) - 2x^3\left(x^3 + x^2 + x - 1\right) = x^4 - x + 2.$$

Разделим старший член полученного многочлена на старший член знаменателя x^3. В результате получим x. Это будет следующий член целой части. Умножим знаменатель на x и вычтем полученный многочлен из многочлена $x^4 - x + 2$:

$$\left(x^4 - x + 2\right) - x\left(x^3 + x^2 + x - 1\right) = -x^3 - x^2 + 2.$$

Разделим старший член полученного многочлена на старший член знаменателя x^3. В результате получим -1. Это будет следующий член целой части. Умножим знаменатель на -1 и вычтем полученный многочлен из многочлена $-x^3 - x^2 + 2$:

$$\left(-x^3 - x^2 + 2\right) - (-1)\cdot\left(x^3 + x^2 + x - 1\right) = x + 1 .$$

Полученный многочлен уже является остатком, так как его порядок меньше порядка знаменателя. В результате получаем:

$$\frac{2x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x + 2}{x^3 + x^2 + x - 1} = 2x^3 + x - 1 + \frac{x+1}{x^3 + x^2 + x - 1} . \ \blacktriangle$$

Если остаток от деления – есть нулевой многочлен, то говорят что многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$ без остатка.

КОРНИ МНОГОЧЛЕНА. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА СОМНОЖИТЕЛИ

Определение. Число a называется корнем многочлена $P_n(x)$, если подстановка этого числа в данный многочлен вместо x обращает его в нуль:

$$P_n(a) = 0 .$$

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P_n(a)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой деления многочлена на многочлен. Из того, что порядок делителя равен 1, следует, что порядок остатка равен нулю, т.е. остаток является числом, которое мы обозначим r. В результате получаем следующее равенство:

$$P_n(x) = (x - a)S_{n-1}(x) + r .$$

Подставим в это равенство число a вместо x. В результате получим: $P_n(a) = r$, что и требовалось доказать. ■

Следствие. Число a является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на двучлен $x-a$ без остатка.

Доказательство.

Необходимость. Пусть a - корень многочлена $P_n(x)$. Тогда согласно теореме Безу получаем следующий остаток от деления многочлена $P_n(x)$на двучлен $x-a$:

$$r = P_n(a) = 0 .$$

Достаточность. Пусть остаток r от деления многочлена $P_n(x)$на двучлен $x-a$ равен нулю. Тогда

$$P_n(x) = (x-a)S_{n-1}(x).$$

Подставим в полученное равенство a вместо x. В результате получим: $P_n(a)=0$, т.е. a является корнем многочлена $P_n(x)$. ■

Приведем без доказательства следующее утверждение, называемое основной теоремой алгебры.

Теорема. Любой многочлен ненулевого порядка имеет, по крайней мере, один вещественный или комплексный корень.

В основе разложения многочлена на сомножители лежит следующее утверждение.

Теорема. Любой многочлен порядка n, $n>0$, может представлен в виде произведения коэффициента старшего члена и n множителей вида $x-a$, где a может быть как вещественным, так и комплексным числом.

Доказательство. Пусть a_0 - коэффициент старшего члена многочлена $P_n(x)$. Воспользуемся основной теоремой алгебры, согласно которой произвольный многочлен $P_n(x)$ имеет корень, который мы обозначим a_1. Тогда имеет место равенство:

$$P_n(x) = (x-a_1)S_{n-1}^1(x),$$

Причем коэффициент старшего члена многочлена $S_{n-1}^{1}(x)$ остается таким же, как и у многочлена $P_n(x)$. Если $n=1$, то $S_{n-1}^{1}(x)=a_0$, и мы получаем требуемое равенство:

$$P_1(x)=a_0(x-a_1).$$

Если $n>1$, то продолжим далее. Применим такие же рассуждения к полученному многочлену $S_{n-1}^{1}(x)$. Обозначим через a_2 корень этого многочлена. В результате получим соотношение:

$$S_{n-1}^{1}(x)=(x-a_2)S_{n-2}^{2}(x),$$

и, соответственно,

$$P_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)S_{n-2}^{2}(x),$$

причем коэффициент старшего члена многочлена $S_{n-2}^{2}(x)$ по-прежнему равен a_0. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока порядок многочлена $S_{n-k}^{k}(x)$ не станет равным нулю, т.е. пока он не станет равным a_0 (это произойдет на шаге с номером n. В результате получим равенство:

$$P_n(x)=a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

Что и требовалось доказать. ■

Следствие. Любой многочлен порядка n, $n>0$, имеет ровно n корней (вещественных или комплексных).

Доказательство. Из доказанного равенства

$$P_n(x)=a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

Сразу следует, что числа $a_1,a_2,...,a_n$ являются корнями данного многочлена и только они (подстановка только этих чисел обращает многочлен в нуль). ■

Обратимся к разложению многочлена ненулевого порядка на сомножители:

$$P_n(x)=a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

Среди сомножителей могут оказаться одинаковые двучлены. В результате это разложение примет вид:

$$P_n(x) = a_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_m)^{k_m},$$

где среди чисел $a_1, a_2, ..., a_m$ нет одинаковых, а $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. В этом случае каждое число k_i, $i = 1,2,...,m$, называется кратностью корня a_i.

Теорема. Если комплексное число $a + ib$ является корнем многочлена $P_n(x)$, $n > 0$, то и сопряженное к нему число $a - ib$ также является корнем этого многочлена.

Доказательство. Запишем корень $a + ib$ в тригонометрической форме:

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

и подставим его в такой форме в многочлен $P_n(x)$ учитывая формулу Муавра. В результате получим:

$$a_0 r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + a_1 r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i\sin((n-1)\varphi)) + ...$$
$$... + a_{n-1} r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a_n = 0.$$

Выделим вещественную и мнимую часть в левой части полученного равенства:

$$(a_0 r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos((n-1)\varphi) + ... + a_{n-1} r\cos\varphi + a_n) +$$
$$+ i(a_0 r^n \sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin((n-1)\varphi) + ... + a_{n-1} r\sin\varphi) = 0.$$

Комплексное число может быть равно нулю лишь в случае, когда равны нулю и его действительная, и его мнимая часть. Поэтому получаем соотношения:

$$a_0 r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos((n-1)\varphi) + ... + a_{n-1} r\cos\varphi + a_n = 0,$$
$$a_0 r^n \sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin((n-1)\varphi) + ... + a_{n-1} r\sin\varphi = 0.$$

Заметим, что подстановка в данный многочлен сопряженного комплексного числа

$$a - ib = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Дает комплексно-сопряженный результат:

$$\left(a_0 r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos((n-1)\varphi) + \ldots + a_{n-1} r\cos\varphi + a_n\right) -$$
$$- i\left(a_0 r^n \sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin((n-1)\varphi) + \ldots + a_{n-1} r\sin\varphi\right).$$

Полученное число также равно нулю, так как по доказанному равна нулю и его действительная, и его мнимая часть. Следовательно, число $a - ib$ также является корнем данного многочлена. ■

Следствие. У любого многочлена либо нет комплексных корней, либо их число четно.

Доказательство. Все комплексные корни, если они вообще есть, согласно последней теореме разбиваются на пары комплексно-сопряженных. Поэтому если у многочлена есть комплексные корни, то их число четно. ■

Следствие. Любой многочлен, порядок которого больше единицы, может быть представлен в виде произведения многочленов с вещественными коэффициентами, порядки которых не больше двух.

Доказательство. Обратимся к формуле разложения многочлена на сомножители

$$P_n(x) = a_0(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n).$$

Те сомножители, которые соответствуют вещественным корням, являются многочленами первого порядка с вещественными коэффициентами. Но среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут быть комплексные числа. Однако, как мы знаем из предыдущего следствия, любому комплексному корню $a + ib$ соответствует сопряженный корень $a - ib$. Т.е. все двучлены с комплексными коэффициентами можно разбить на пары. Каждая такая пара дает квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами:

$$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = (x - a)^2 - (ib)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Таким образом, в формуле разложения многочлена на сомножители получаем либо двучлены с вещественными коэффициентами, либо квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами. ■

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ИХ СВОЙСТВА

Пусть дано некоторое множество X. Заметим, что это множество не обязательно должно быть числовым, например, это может быть множество матриц. Будем считать, что в рамках этого множества введены операции сложения и умножения элемента на число. При этом изначально должен быть зафиксирован класс чисел, которые могут быть задействованы в последней операции. Это может быть класс действительных чисел или класс комплексных чисел.

Определение. Множество X с введенными операциями называется векторным или линейным пространством, если эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

I) длялюбых элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ данного множества выполняется равенство:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x};$$

II) для любых элементов $\overline{x}, \overline{y}$ и $\overline{z}$ данного множества выполняется равенство:

$$(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z});$$

III) в множестве X существует нулевой элемент $\overline{0}$, т.е. такой элемент, что для любого элемента $\overline{x}$ данного множества выполняется равенство:

$$\overline{x} + \overline{0} = \overline{x};$$

IV) для любого элемента $\overline{x}$ данного множества существует противоположный элемент $-\overline{x} \in X$, т.е. элемент, удовлетворяющий равенству:

$$\overline{x} + \left(-\overline{x}\right) = \overline{0};$$

V) для любого элемента $\overline{x}$ данного множествавыполняется равенство:

$$1 \cdot \overline{x} = \overline{x};$$

VI) для любого элемента $\overline{x}$ данного множества и любых чисел α, β выполняется равенство:

$$\alpha\left(\beta\overline{x}\right) = (\alpha\beta)\overline{x};$$

VII) для любого элемента $\overline{x}$ данного множества и любых чисел α, β выполняется равенство:

$$(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x};$$

VIII) для любых элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ данного множества и любого числа α выполняется равенство:

$$\alpha\left(\overline{x} + \overline{y}\right) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}.$$

Элементы векторного пространства будем называть векторами.

Пример. Приведем примеры векторных пространств:

1) Множество всех матриц фиксированного размера $m \times n$.

2) Множество всех многочленов, порядки которых не выше чем n.

Упражнение. Проверить выполнение аксиом векторного пространства для указанных множеств.

Приведем без доказательств свойства векторных пространств.

1. Нулевой элемент векторного пространства определен однозначно.

2. Для любого фиксированного элемента $\overline{x}$ данного векторного пространства существует только один противоположный элемент $-\overline{x} \in X$.

3. Для любого элемента $\overline{x}$ данного векторного пространства выполняется равенство:

$$0 \cdot \overline{x} = \overline{0}.$$

4. Для любого элемента $\overline{x}$ данного векторного пространства противоположным является элемент $(-1) \cdot \overline{x}$, т.е. справедливо равенство:

$$\overline{x} + (-1) \cdot \overline{x} = \overline{0}.$$

5. Для любого числа α выполняется равенство:

$$\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

6. Пусть $\overline{x}$ - ненулевой элемент данного векторного пространства. Тогда если $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$, то $\alpha = 0$.

7. Пусть $\alpha \neq 0$ и $\overline{x}$ - некоторый элемент данного векторного пространства. Тогда если $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$, то $\overline{x} = \overline{0}$.

ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Пусть в векторном пространстве X зафиксированы векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$.

Определение. Выражение $\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + ... + \alpha_n \overline{x_n}$,где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - некоторые числа, называется линейной комбинацией векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$. При этом указанные числа называются коэффициентами линейной комбинации.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о возможности равенства линейной комбинации нулевому вектору. В соответствии со свойством 3 и аксиомой 3 векторных пространств, становится очевидным, что для любой системы векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$ существует тривиальный (нулевой) набор коэффициентов $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, для которого это равенство выполняется:

$$0 \cdot \overline{x_1} + 0 \cdot \overline{x_2} + ... + 0 \cdot \overline{x_n} = \overline{0}.$$

Возникает вопрос о существовании для данной системы векторов нетривиального набора коэффициентов (среди которых есть хотя бы один ненулевой коэффициент), для которого выполняется упомянутое равенство. В соответствии с этим будем различать линейно зависимые и независимые системы.

Определение. Система векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$ называется линейно зависимой, если существует набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$,среди которых есть хотя бы одно ненулевое число, такой что

$$\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + ... + \alpha_n \overline{x_n} = \overline{0},$$

и называется линейно независимой, если это равенство возможно лишь в случае тривиального набора коэффициентов:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Заметим, что порядок следования векторов в системе не влияет на ее линейную зависимость. Приведем без доказательств свойства линейно зависимых и независимых систем.

1. Любая система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.

2. Пусть в системе векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$ есть линейно зависимая подсистема. Тогда и вся система также является линейно зависимой.

3. Если система векторов является линейно независимой, то любая ее подсистема также является линейно независимой.

4. Если в системе векторов есть два вектора, один из которых получается из другого умножением на некоторое число, то вся система является линейно зависимой.

Теорема (критерий линейной зависимости). Ситема векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов этой системы представим в виде линейной комбинации остальных векторов системы.

Доказательство.

Необходимость. Пусть система векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$ является линейно зависимой. Тогда по определению существует нетривиальный набор коэффициентов, для которого справедливо равенство:

$$\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + ... + \alpha_n \overline{x_n} = \overline{0}.$$

В нетривиальном наборе коэффициентов есть ненулевой коэффициент. Пусть это будет некоторый коэффициент α_k. Из последнего равенства следует, что вектор $\alpha_1 \overline{x_1} + ... + \alpha_{k-1} \overline{x_{k-1}} + \alpha_{k+1} \overline{x_{k+1}} + ... + \alpha_n \overline{x_n}$ является противоположным к вектору $\alpha_k \overline{x_k}$. Тогда имеем:

$$-\alpha_k \overline{x_k} = \alpha_1 \overline{x_1} + ... + \alpha_{k-1} \overline{x_{k-1}} + \alpha_{k+1} \overline{x_{k+1}} + ... + \alpha_n \overline{x_n}.$$

Разделим обе части полученного равенства на число $-\alpha_k \neq 0$. В результате получим:

$$\overline{x_k} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \overline{x_1} - ... - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \overline{x_{k-1}} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \overline{x_{k+1}} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \overline{x_n},$$

т.е. вектор $\overline{x_k}$ представим в виде линейной комбинации остальных векторов данной системы.

Достаточность. Пусть некоторый вектор $\overline{x_k}$ системы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}$ представим в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы, т.е. существует набор чисел $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ таких, что

$$\overline{x_k} = \alpha_1 \overline{x_1} + ... + \alpha_{k-1} \overline{x_{k-1}} + \alpha_{k+1} \overline{x_{k+1}} + ... + \alpha_n \overline{x_n}.$$

Для составления линейной комбинации всех векторов системы определим еще один коэффициент: $\alpha_k = -1$. Тогда справедливо равенство:

$$\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+\ldots+\alpha_n\overline{x_n}=\alpha_1\overline{x_1}+\ldots+\alpha_{k-1}\overline{x_{k-1}}+(-1)\cdot\overline{x_k}+\alpha_{k+1}\overline{x_{k+1}}+\ldots+\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0},$$

Так как вектор $(-1)\cdot\overline{x_k}$ является противоположным к вектору

$$\alpha_1\overline{x_1}+\ldots+\alpha_{k-1}\overline{x_{k-1}}+\alpha_{k+1}\overline{x_{k+1}}+\ldots+\alpha_n\overline{x_n}.$$

Так как построенный набор коэффициентов является нетривиальным ($\alpha_k=-1\neq 0$), то вся система векторов является линейно зависимой. ■

БАЗИС ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Определение. Векторное пространство X называется n-мерным, если в этом пространстве есть линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система из $n+1$ вектора является линейно зависимой. При этом число n называется размерностью пространства X и обозначается $\dim X$.

Отметим, что согласно свойству 2 линейной зависимости и независимости систем векторов если любая система из $n+1$ вектора является линейно зависимой, то любая система из большего числа векторов тем более является линейно зависимой. Таким образом, размерность пространства можно определить как максимальное количество векторов, образующих линейно независимую систему в данном векторном пространстве.

Определение. Любая линейно независимая система n векторов в n-мерном векторном пространстве называется базисом этого пространства.

Теорема. Пусть в n-мерномвекторном пространстве система векторов $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}$ образует базис. Тогда любой вектор $\overline{x}$ данного векторного пространства представим в виде некоторой линейной комбинации базисных векторов:

$$\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+\ldots+x_n\overline{e_n}.$$

При этом такое разложение фиксированного вектора определено однозначно.

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}, \overline{x}$, в которую входит $n+1$ вектор. По определению размерности пространства такая система является линейно зависимой. Тогда существует набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ такой, что справедливо равенство:

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_n \overline{e_n} + \alpha_{n+1} \overline{x} = \overline{0},$$

причем среди указанных чисел есть хотя бы одно ненулевое. Покажем, что не равен нулю коэффициент α_{n+1}. Предположим обратное, т.е. что $\alpha_{n+1} = 0$, а среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ есть хотя бы одно ненулевое. Тогда имеет место равенство:

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_n \overline{e_n} + \alpha_{n+1} \overline{x} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_n \overline{e_n} = \overline{0}.$$

Но последнее равенство с учетом того, что набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ является нетривиальным, означает, что система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ является линейно зависимой, что противоречит определению базиса. Таким образом, $\alpha_{n+1} \neq 0$. Из равенства

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_n \overline{e_n} + \alpha_{n+1} \overline{x} = \overline{0}$$

следует, что вектор $\alpha_{n+1} \overline{x}$ является противоположным к вектору $\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_n \overline{e_n}$. Тогда имеем:

$$\alpha_{n+1} \overline{x} = -\alpha_1 \overline{e_1} - \alpha_2 \overline{e_2} - ... - \alpha_n \overline{e_n},$$

откуда следует соотношение:

$$\overline{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} \overline{e_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} \overline{e_2} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \overline{e_n}.$$

Следовательно, вектор $\overline{x}$ представим в виде линейной комбинации базисных векторов. Покажем, что такое представление определено однозначно. Предположим, что кроме представления

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$$

существует еще одно:

$$\overline{x} = y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} + ... + y_n\overline{e_n}\ .$$

Из последнего равенства следует, что вектор $-y_1\overline{e_1} - y_2\overline{e_2} - ... - y_n\overline{e_n}$ является противоположным к вектору $\overline{x}$. Тогда согласно аксиоме 4 векторного пространства выполняется равенство:

$$\left(x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}\right) + \left(-y_1\overline{e_1} - y_2\overline{e_2} - ... - y_n\overline{e_n}\right) = \overline{0}\,.$$

В соответствии с аксиомами IIи VIIполучаем:

$$(x_1 - y_1)\overline{e_1} + (x_2 - y_2)\overline{e_2} + ... + (x_n - y_n)\overline{e_n} = \overline{0}\,.$$

Учитывая то, что базис – это линейно независимая система, заключаем, что последнее равенство возможно лишь в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации левой части равенства равны нулю. В итоге получаем, что $x_i = y_i$ для любого $i = 1,2,...,n$. Таким образом, разложение любого вектора по базисным векторам определено однозначно. ■

Пусть в векторном пространстве зафиксирован базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ и $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$ - разложение вектора $\overline{x}$ в этом базисе.

Определение. Коэффициенты $x_1, x_2, ..., x_n$ указанногоразложения вектора $\overline{x}$ называются координатами этого вектора в данном базисе.

Замечание. При фиксированном базисе координаты вектора определены однозначно, но при смене базиса координаты вектора естественно могут меняться.

С одной стороны в данном базисе каждому вектору $\overline{x}$ ставится в соответствие единственный упорядоченный набор его координат: $x_1, x_2, ..., x_n$. С другой стороны, если взять упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, то в данном базисе он однозначно определяет некоторый вектор

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}\ .$$

Таким образом, для фиксированного базиса в данном векторном пространстве можно отождествлять любой вектор с набором его координат, т.е. в n-мерном пространстве вектор можно определять как упорядоченный набор n чисел – его координат.

То, что в заданном базисе вектор имеет координаты $x_1, x_2, ..., x_n$, будем обозначать: $\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Приведем без доказательства критерий линейной независимости векторов в терминах их координат.

Теорема. Пусть X - n-мерное векторное пространство. Система m векторов $\overline{a_1} = \{a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}\}, ..., \overline{a_m} = \{a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{nm}\}$ этого пространства является линейно независимой тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

равен m.

Следствие. Пусть X - n-мерное векторное пространство. Система n векторов $\overline{a_1} = \{a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}\}, ..., \overline{a_n} = \{a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{nn}\}$ в этом пространстве является базисом тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Доказательство. Данное утверждение сразу следует из последней теоремы с учетом определений ранга матрицы и базиса n-мерного векторного пространства. ■

СВОЙСТВА КООРДИНАТ ВЕКТОРОВ

Пусть зафиксировано некоторое n-мерное векторное пространство с некоторым базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$. Перечислим свойства координат векторов.

1. Вектор является нулевым тогда и только тогда, когда все координаты этого вектора равны нулю.

2. При сложении двух векторов складываются соответствующие координаты этих векторов.

3. При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число.

4. Два вектора равны друг другу тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Пусть в данном векторном пространстве X введена операция, в соответствии с которой каждой паре векторов $\overline{x}, \overline{y}$ ставится в соответствие Действительное число, которое будем обозначать $\overline{x} \cdot \overline{y}$.

Определение. Введенная операция называется скалярным произведением в данном векторном пространстве, если справедливы следующие аксиомы:

I. для любых $\overline{x}, \overline{y} \in X$ выполняется:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x};$$

II. для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in X$ выполняется:

$$\left(\overline{x} + \overline{y}\right) \cdot \overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z};$$

III. для любых $\overline{x}, \overline{y} \in X$ и любого действительного числа λ выполняется:

$$(\lambda\overline{x}) \cdot \overline{y} = \lambda(\overline{x} \cdot \overline{y});$$

IV. для любого $\overline{x} \in X$ выполняется: $\overline{x} \cdot \overline{x} > 0$, если $\overline{x} \neq \overline{0}$, и $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0$, если $\overline{x} = \overline{0}$.

Определение. Векторное пространство, снабженное скалярным произведением, называется евклидовым пространством.

Пусть $\overline{x}$ - вектор евклидова пространства. Скалярное произведение $\overline{x} \cdot \overline{x}$ называется скалярным квадратом вектора $\overline{x}$ и обозначается $\overline{x}^2$.

Определение. Нормой вектора $\overline{x}$ евклидова пространства (обозначается $\|x\|$) называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$\|x\| = \sqrt{\overline{x}^2}.$$

Перечислим свойства нормы вектора евклидова пространства.

1. Вектор $\overline{x}$ является нулевым тогда и только тогда, когда его норма равна нулю.

2. Для любого вектора $\overline{x}$ и любого числа λ выполняется равенство:

$$\|\lambda\overline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\overline{x}\|.$$

Следующее свойство носит название «неравенство Коши-Буняковского»

3. Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ выполняется неравенство:

$$|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|.$$

Следствие. Для любого вектора $\overline{x}$ справедливо равенство:

$$\overline{x} \cdot \overline{0} = 0.$$

Следующее свойство носит название «неравенство треугольника».

4. Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ выполняется неравенство:

$$\|\overline{x}+\overline{y}\| \le \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|.$$

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Определение. Углом между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называется число φ, определяемое равенством:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{\|\overline{x}\|\cdot\|\overline{y}\|}.$$

Определение. Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\overline{x}\cdot\overline{y} = 0.$$

Очевидно, что определение ортогональности векторов можно дать в терминах угла между ними. А именно, векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ ортогональны, если угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Определение. Система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ называется ортогональной, если для любых номеров $i, j = 1,2,...,n$, таких что $i \ne j$, выполняется:

$$\overline{e_i}\cdot\overline{e_j} = 0.$$

Вектор $\overline{x}$ называется единичным, если его норма равна единице.

Определение. Система векторов называется ортнормированной, если она является ортогональной, и все векторы, входящие в нее, являются единичными. Базис называется ортонормированным, если все векторы, входящие в него, образуют ортнормированную систему.

Для ортонормированного базиса справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\overline{x}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $\overline{y}=\{y_1,y_2,...,y_n\}$в ортонормированном базисе $\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}$.Тогда

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n.$$

Доказательство. Воспользуемся аксиомами I,II,III скалярного произведения и определением ортонормированной системы. В результате получим:

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=\left(x_1\overline{e_1}+...+x_n\overline{e_n}\right)\cdot\left(y_1\overline{e_1}+...+y_n\overline{e_n}\right)=x_1y_1\overline{e_1}^2+...+x_ny_n\overline{e_n}^2=x_1y_1+...+x_ny_n$$

Следствие. Пусть $\overline{x}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ в ортонормированном базисе $\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}$. Тогда

$$\left\|\overline{x}\right\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\,.$$

Доказательство следует непосредственно из определения нормы вектора и последней теоремы.

Ортогональная система векторов обладает следующим свойством.

Теорема. Ортогональная система ненулевых векторов является линейно независимой.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

Геометрическим вектором называется направленный отрезок.

До настоящего момента нами были рассмотрены «алгебраические» векторы, представляющие собой в n-мерном пространстве упорядоченные наборы n чисел. Уже отмечалось, что геометрические векторы (на плоскости или в трехмерном пространстве) являются частным случаем алгебраических векторов. Поэтому все результаты, известные из курса линейной алгебры для алгебраических векторов, переносятся и на случай геометрических векторов.

Будем обозначать вектор символом $\overline{AB}$, если известны начало (точка приложения) – точка A и конец – точка B данного вектора. Если же начало и конец вектора неизвестны или не представляют интереса, то будем обозначать вектор символом $\overline{a}$. На чертеже вектор будем изображать стрелкой. Длину вектора $\overline{a}$ будем обозначать $|\overline{a}|$.

Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными.

Из определения равенства векторов следует, что каковы бы ни были вектор $\overline{a}$ и точка A всегда можно найти такую точку B, что $\overline{a} = \overline{AB}$. Другими словами, любой вектор можно отложить из любой точки. В соответствии с этим геометрические векторы называют свободными (они определены с точностью до точки приложения).

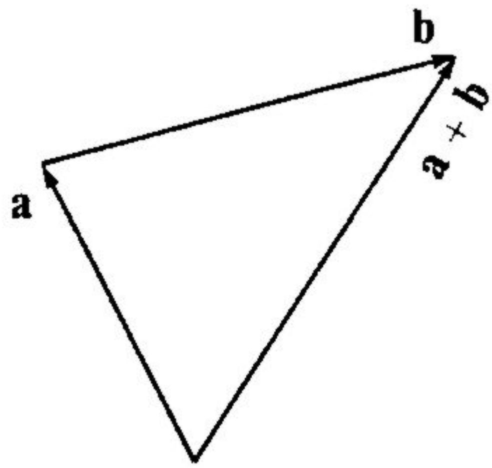
Два вектора называются противоположными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и противоположные направления.

В трехмерном пространстве векторы называются компланарными, если, будучи отложенными из одной точки, они лежат в одной плоскости.

Заметим, что в дальнейшем, не нарушая общности, будем рассматривать случай векторов в трехмерном пространстве. На плоскости рассмотрение векторов производится аналогично.

Введем линейные операции над векторами, т.е. операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

Суммой $\overline{a}+\overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$.



Произведением $\alpha\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на действительное число α называется вектор, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину $|\alpha|\cdot|\overline{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\overline{a}$, если $\alpha>0$, и противоположное направлению вектора $\overline{a}$, если $\alpha<0$. Если $\alpha=0$ или $\overline{a}=\overline{0}$, то произведение $\alpha\overline{a}$ представляет собой нулевой вектор.

Приведем без доказательства критерий коллинеарности векторов.

Теорема. Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует действительное число λ, такое что $\overline{b}=\lambda\overline{a}$.

Ранее нами были рассмотрены векторные пространства. Исходя из геометрических соображений, становится очевидным то, что множество геометрических векторов (на плоскости или в пространстве) с введенными линейными операциями является векторным пространством.

Упражнение. Для геометрических векторов, например в пространстве, проверить выполнение всех аксиом векторного пространства.

Замечание. На практике аксиомы векторного пространства можно использовать как свойства линейных операций над геометрическими векторами.

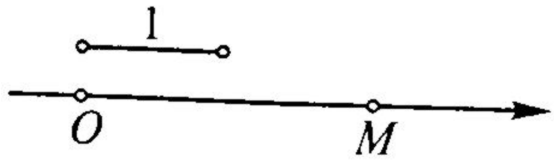
Все результаты, известные для векторных пространств, переносятся и на случай геометрических векторов.

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ

Задать систему координат означает установить правило, по которому каждому числу (на прямой) или набору чисел (на плоскости или пространстве) ставится в соответствие единственная точка, и наоборот, каждой точке соответствует единственное число (на прямой) или единственный набор чисел (на плоскости или пространстве).

Введем декартовы координаты на оси. Прямую линию с указанным на ней направлением будем называть осью. Величиной вектора $\overline{AB}$ называется число, равное длине этого отрезка, взятой со знаком плюс, если направление $\overline{AB}$ совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление $\overline{AB}$ противоположно направлению оси. Величину направленного отрезка $\overline{AB}$ будем обозначать AB.

Выберем на оси некоторую точку O, которую будем называть началом координат. Кроме того, укажем единицу масштаба.



Рассмотрим произвольную точку M на оси. Декартовой координатой x точки M называется величина направленного отрезка $\overline{OM}$ (обозначается: $M(x)$). Очевидно, что значение x однозначно определяет положение точки M на прямой, и наоборот, любой точке соответствует единственная координата. Очевидно следующее утверждение.

Теорема. Пусть $A(x_1)$, $B(x_2)$ - две точки на оси. Тогда величина направленного отрезка $\overline{AB}$ равна $x_2 - x_1$.

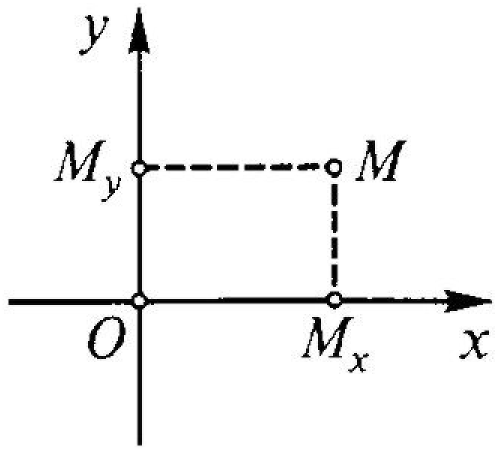
Следствие. Расстояние между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ определяется формулой:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Введем прямоугольные декартовы координаты на плоскости. Выберем на плоскости некоторую точку O, которую будем называть началом координат. Кроме того, укажем единицу масштаба. Через начало координат проводим две взаимно перпендикулярные оси, которые будем называть координатными. Одна из них называется осью абсцисс и обозначается Ox, вторая – называется осью ординат и обозначается Oy. Направления этих осей выбираются таким образом, чтобы кратчайший поворот от положительного направления оси абсцисс до положительного направления оси ординат осуществлялся против часовой стрелки.

Рассмотрим произвольную точку M на плоскости. Спроектируем эту точку на координатные оси. В результате получим: точка M_x - проекция точки M на ось Ox, точка M_y - проекция точки M на ось Oy. Абсциссой x и ординатой y называются координаты точек M_x и M_y на соответствующих координатных осях. Абсцисса и ордината составляют декартовы координаты точки на плоскости (обозначается: $M(x, y)$). Очевидно, что упорядоченная пара (x, y) однозначно определяет положение точки на плоскости, и наоборот, каждой точке соответствует единст-



венная пара координат (x, y).Сама плоскость после введения декартовой системы координат обозначается: Oxy.

Рассмотрим возможные преобразования декартовой системы координат на плоскости.

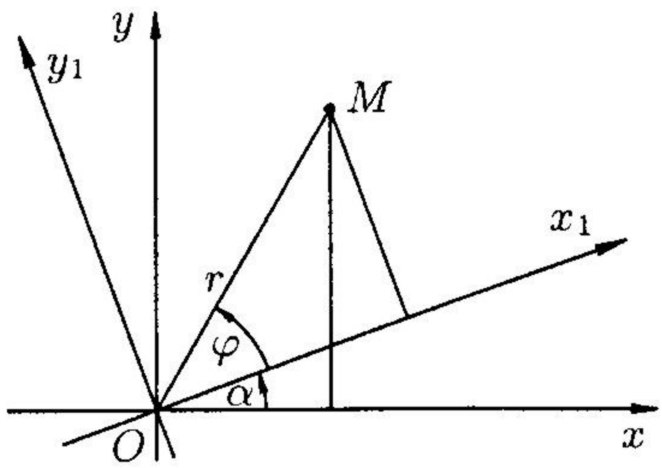
Параллельным переносом прямоугольной декартовой системы координат на плоскости называется такое ее преобразование, при котором не меняются направления осей, а начало координат O перемещается в новую точку O' на плоскости.

Пусть в исходной системе координат точка $O'(x_0, y_0)$. Тогда очевидно, что для произвольной точки M на плоскости координаты x, y в исходной системе координат и координаты x', y' в новой системе связаны равенствами:

$$x = x' + x_0,$$
$$y = y' + y_0.$$

Поворотом прямоугольной системы координат на плоскости называется такое ее преобразование, при котором начало координат O остается без изменения, а координатные оси поворачиваются на один и тот же угол α.

Пусть точка M на плоскости Oxy имеет координаты x, y, а в висте-ме Ox_1y_1, полученной поворотом на угол α, координаты этой точки равны x_1, y_1. Пусть φ - угол от положительного направления оси Ox_1 до направленного отрезка $\overline{OM}$, и r - длина этого отрезка. Тогда из рисунка видно, что



$$\frac{x_1}{r} = \cos\varphi,\ \frac{y_1}{r} = \sin\varphi,\ \frac{x}{r} = \cos(\alpha+\varphi),\ \frac{y}{r} = \sin(\alpha+\varphi).$$

Следовательно,

$$x = r\cos(\alpha+\varphi) = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,$$

$$y = r\sin(\alpha+\varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha.$$

Таким образом, переход от старой системы координат к новой описывается формулами:

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,$$

$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha.$$

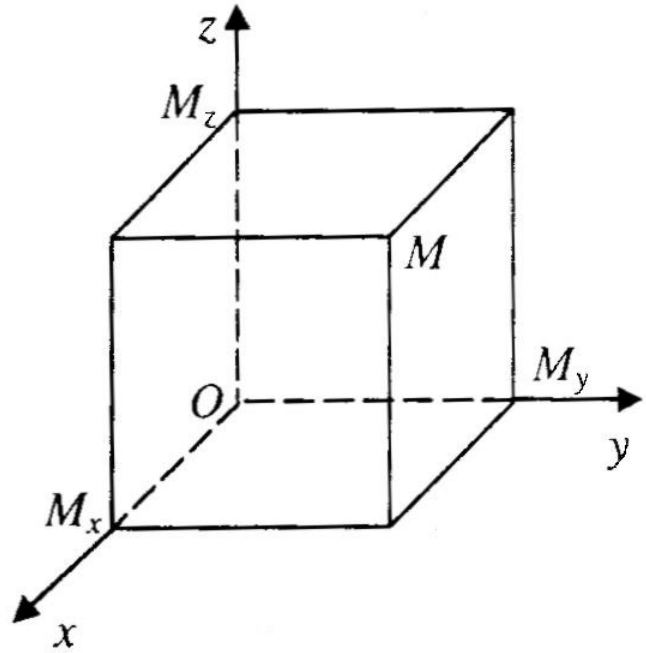
Для того, чтобы выразить координаты в новой системе через координаты в старой системе, достаточно представить, что старая система получается из новой поворотом на угол $-\alpha$. В результате получим:

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Введем прямоугольные декартовы координаты в пространстве. Выберем в пространстве некоторую точку O, которую будем называть началом координат. Кроме того, укажем единицу масштаба. Через начало координат проводим три взаимно перпендикулярные оси, которые будем называть координатными. Одна из них называется осью абсцисс и обозначается Ox, вторая – называется осью ординат и обозначается Oy, третья – называется осью аппликат и обозначается Oz. Направления этих осей выбираются в соответствии с тем, чтобы тройка осей Ox, Oy, Oz была правой, т.е. если смотреть с конца оси Oz, то кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy должен осуществляться против часовой стрелки. Пары осей образует плоскости, называемые координатными. Они обозначаются соответственно: Oxy, Oxz и Oyz.

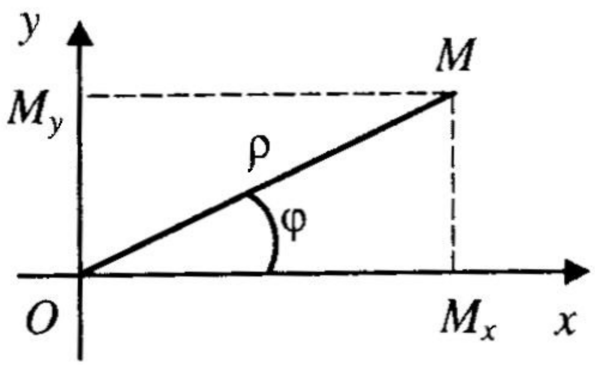


Рассмотрим произвольную точку M в пространстве. Спроектируем эту точку на координатные оси. Получим соответственно точки M_x, M_y и M_z. Абсциссой x, ординатой y и аппликатой z точки M называется координаты точек M_x, M_y и M_z на соответствующих координатных осях. Абсцисса, ордината и аппликата составляют декартовы координаты точки на плоскости (обозначается: $M(x, y, z)$). Само пространство после введения декартовой системы координат обозначается: $Oxyz$.

Параллельный перенос прямоугольной декартовой системы координат в пространстве определяется так же, как и на плоскости. По аналогии с плоским случаем заключаем, что при параллельном переносе координаты точки M в пространстве $Oxyz$ и в пространстве $Ox'y'z'$, полученном за счет параллельного переноса со смещением начала координат в точку $O'(x_0, y_0, z_0)$, справедливы формулы: $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$.

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Введем полярные координаты на плоскости. Для этого выберемнекоторую точку O, которую будем называть полюсом, и некоторый выходящий из нее луч, который мы будем называть полярной осью. Кроме того, укажем единицу масштаба. Полярными координатами точки M называются числа ρ и φ, первое из которых ρ равно расстоянию от этой точки до полюса и называется полярным радиусом, а второе φ – равно углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось, чтобы совместить ее с лучом OM, и называется полярным углом (обозначается $M(\rho,\varphi)$).



При совмещении на плоскости декартовой и полярной систем координат полюс совмещают с началом декартовой системы, а направление полярной оси выбирают таким же, как и положительное направление оси абсцисс. При этом очевидны формулы перехода от декартовой к полярной системе координат:

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

и формулы перехода от полярной к декартовой системе:

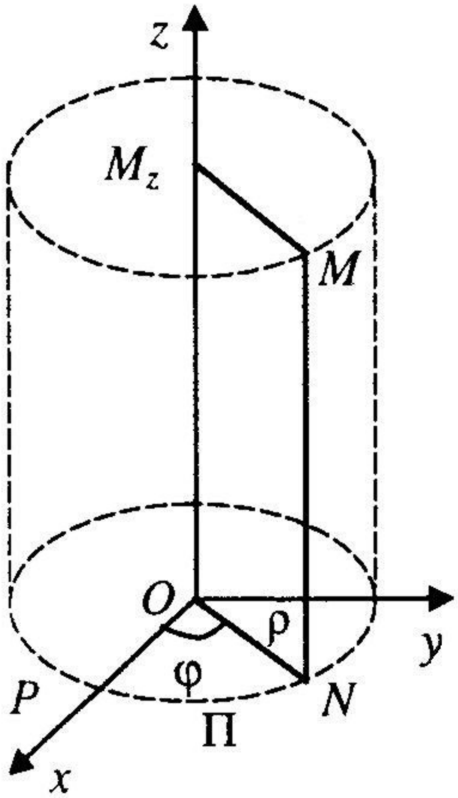
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Введем цилиндрические координаты в пространстве. Для этого зафиксируем плоскость Π, в которой вводится полярная система координат. Проведем ось Oz, проходящую через полюс перпендикулярно к выбранной плоскости, и выбираем на оси в качестве начала координат полюс. Кроме того, укажем единицу масштаба.

Рассмотрим произвольную точку M в пространстве. Спроектируем эту точку на плоскость Π. Получим точку N. Пусть ρ и φ - полярные координаты точки N. Также найдем точку M_z - проекцию точки M на ось Oz. Пусть z - координата точки M_z на оси Oz. Цилиндрическими координатами точки M называются числа ρ, φ и z (обозначается $M(\rho, \varphi, z)$).



Название «цилиндрические координаты» связано с тем, что координатная поверхность $\rho = const$ является цилиндром.

При совмещении в пространстве декартовой и цилиндрической систем координат поступают следующим образом: полярную систему координат плоскости Π совмещают, как указано выше, с декартовой системой плоскости Oxy, а также совмещают оси Oz. При этом очевидны формулы перехода от декартовой к цилиндрической системе координат:

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi,$$

$$z = z,$$

а также формулы обратного перехода:

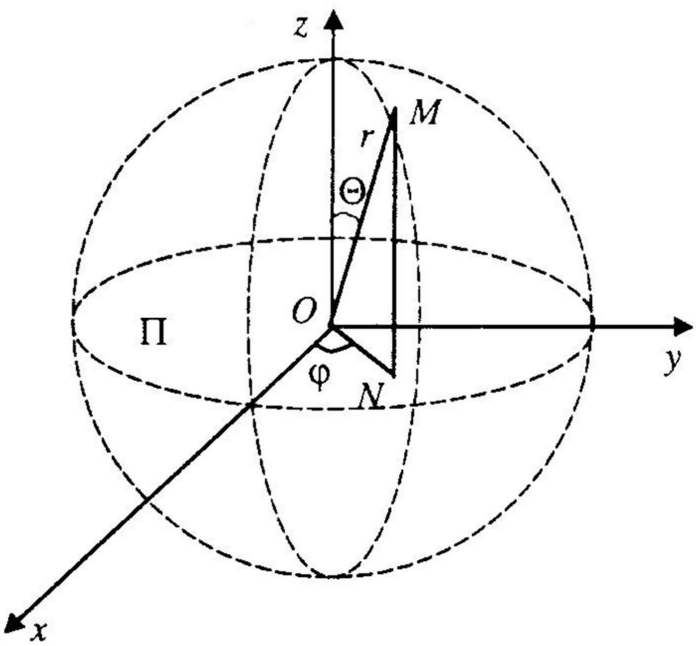
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x},$$

$$z = z.$$

СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Введем сферические координаты в пространстве. Для этого зафиксируем плоскость Π, в которой вводится полярная система координат. Проведем ось Oz, проходящую через полюс перпендикулярно к выбранной плоскости, и выбираем на оси в качестве начала координат полюс. Кроме того, укажем единицу масштаба.



Рассмотрим произвольную точку M в пространстве. Спроектируем эту точку на плоскость Π. Получим точку N. Пусть φ - полярный угол этой точки, r - длина отрезка OM, а θ - угол между вектором $\overline{OM}$ и осью Oz. Сферическими координатами точки M называются числа r, φ и θ (обозначается $M(r,\varphi,\theta)$). При этом координаты φ и θ называются долготой и широтой соответственно.

Название «сферические координаты» связано с тем, что координатная поверхность $\rho = const$ является сферой.

При совмещении в пространстве декартовой и сферической систем координат поступают так же, как и в случае цилиндрической системы. Пусть a - длина отрезка ON. Тогда из рисунка видно, что

$$a = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r\sin\theta .$$

Следовательно, формулы перехода от декартовой к цилиндрической системе координат имеют вид:

$$x = a\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = a\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta.$$

Очевидны также формулы обратного перехода:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x},$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим задачу нахождения проекции вектора на ось. Пусть в пространстве задан вектор $\overline{MN}$. Предположим, что на оси Ox введены декартовы координаты. Проекцией вектора $\overline{MN}$ на ось Ox называется величина вектора $\overline{M_x N_x}$, началом которого служит проекция точки M на ось Ox, а концом – проекция точки N на эту ось. Эта проекция обозначается: $\text{Пр}_{\text{Ox}}\overline{MN}$. Для ее нахождения отложимвекторданный вектор из начала координат. Обозначим через φ наименьший угол между нашимвектором и осью Ox. Если $\left|\overline{MN}\right|$ - длина рассматриваемого вектора, то получаем: $\text{Пр}_{\text{Ox}}\overline{MN} = \left|\overline{MN}\right|\cos\varphi$.

Рассмотрим теперь задачу нахождения расстояния между двумя точками по известным координатам этих точек. Эта задача уже решена нами на оси. Пусть в пространстве $Oxyz$ заданы точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$.

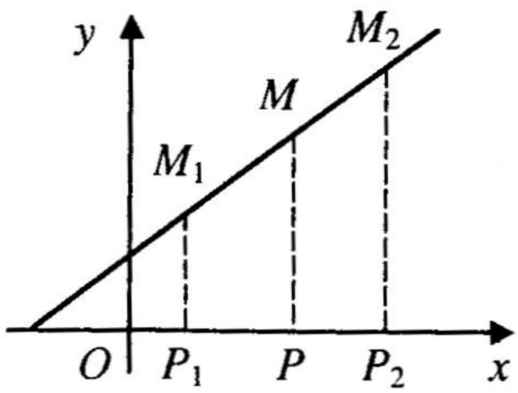
Очевидно, что расстояние между этими точками равно длине диагонали параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям и проходят через точки M и N. Длина параллельного оси Ox ребра этого параллелепипеда равна, очевидно, $|x_2 - x_1|$. По аналогичным соображениям длины ребер, параллельных осям Oy и Oz, равны соответственно $|y_2 - y_1|$ и $|z_2 - z_1|$. Используя теорему Пифагора, получим следующую формулу:

$$\rho(M,N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Заметим, что, по аналогии, расстояние между точками $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$на плоскости определяется равенством:

$$\rho(M,N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Рассмотрим задачу, связанную с делением отрезка в заданном отношении. Пусть на отрезке MN задана точка A, отличная от границ этого отрезка. Говорят, что точка A делит отрезок MN в отношении λ, если $\frac{MA}{AN} = \lambda$.



Пусть на плоскости Oxy заданы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найдем координаты точки $M(x, y)$, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Спроектируем точки M_1, M_2 и M на ось абсцисс. Получим соответственно точки P_1, P_2 и P. Из подобия треугольников следует, что $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$. С другой стороны нам известно, что

$$P_1P = x - x_1,$$

$$PP_2 = x_2 - x\,.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

$$\Updownarrow$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогично спроектировав рассматриваемые точки на оси Oy, получим формулы для нахождения ординаты точки M:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Отметим частный случай, когда $\lambda = 1$. В этом случае точка A делит отрезок MN пополам, и мы получаем следующие равенства:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Заметим, что аналогичные формулы будут справедливы и при делении отрезка в заданном отношении в пространстве.

Пример. Даны точки $A(1,2,4)$ и $B(1,-1,8)$. Найти расстояние между этими точками и точку, которая делит отрезок AB в отношении 2.

Δ Найдем расстояние между данными точками:

$$\rho(A,B) = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Пусть точка $C(x_C, y_C, z_C)$ делит отрезок AB в отношении 2. Тогда получаем равенства:

$$x_C = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 1,$$

$$y_C = \frac{2 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = 0,$$

$$z_C = \frac{4 + 2 \cdot 8}{1 + 2} = \frac{20}{3}.$$

Таким образом, искомой точкой является точка $C\left(1{,}0, \frac{20}{3}\right)$. ▲

БАЗИС И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим сначала вопрос о линейной зависимости геометрических векторов. Для геометрических векторов справедливы следующие утверждения, отвечающие на вопрос об их линейной зависимости.

Теорема (критерий линейной зависимости двух векторов). Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Теорема (критерий линейной зависимости трех геометрических векторов в пространстве). Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Теорема. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

Теорема. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

С учетом этих утверждений можно считать, что векторы на плоскости образуют двумерное векторное пространство, а в пространстве - трехмерноевекторное пространство; базис на плоскости – это любая пара неколлинеарных векторов, базис в пространстве – это любая тройка некомпланарных векторов.

Обратимся к пространственному случаю. Пусть в векторном пространстве зафиксирован базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Напомним, что любой вектор $\bar{x}$ однозначно представим в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3},$$

Причем числа x_1, x_2, x_3 - координаты этого вектора в данном базисе. Для фиксированного базиса в трехмерном пространстве вектор можно определять как упорядоченный набор трех чисел – его координат:

$$\overline{x} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Из критерия линейной зависимости n векторов в n–мерном пространстве следует сутверждение

Теорема. В трехмерном пространстве система трех векторов $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \overline{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ является базисом тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В трехмерном пространстве с введенной декартовой системой координат в качестве базиса часто берут тройку векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$,которые будучи отложенными из начала координат лежат на соответствующих координатных осях, направлены в положительных направлениях этих осей и имеют единичную длину. Очевидно, что такие векторы некомпланарны и, следовательно, образуют базис, причем этот базис является ортонормированным, а сами векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ называются единичными ортами. Заметим, что в таком базисе координаты любого вектора есть величины его проекций на соответствующие координатные оси. Также очевидно, что сами векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, и $\overline{k}$ в таком базисе имеют следующие координаты:

$$\overline{i} = \{1,0,0\},$$

$$\overline{j} = \{0,1,0\},$$

$$\overline{k} = \{0,0,1\}.$$

Определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

Что еще раз доказывает правильность выбранного базиса.

Пусть зафиксирован некоторый базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ в трехмерном пространстве. Перенесем свойства координат элементов векторного пространства на случай геометрических векторов.

1. Вектор является нулевым тогда и только тогда, когда все координаты этого вектора равны нулю.

2. При сложении двух векторов складываются соответствующие координаты этих векторов.

3. При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число.

4. Два вектора равны друг другу тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема. Пусть в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве заданы две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Доказательство. Осуществим параллельный перенос системы координат так, чтобы начало новой системы совпало с точкой A. Тогда в новой системе координат имеем: $A(0,0,0)$, $B(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Спроектируем точку B на координатные оси. В результате получим точки B_1, B_2 и B_3 соответственно. Очевидно, что

$$\overline{AB} = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} + \overline{AB_3}.$$

Кроме того,

$$\overline{AB_1} = (x_2 - x_1)\overline{i},$$

$$\overline{AB_2} = (y_2 - y_1)\overline{j},$$

$$\overline{AB_3} = (z_2 - z_1)\overline{k}.$$

Следовательно,

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Определим в векторном пространстве геометрических векторов скалярное произведение как операцию, согласно которой каждой паре ненулевых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ ставится в соответствие число $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$, где φ- угол между этими векторами (если хотя бы один из векторов – нулевой, то скалярное произведение равно нулю).

Упражнение. Для введенной операции проверить выполнение всех аксиом скалярного произведения в векторном пространстве.

Замечание. Все свойства скалярного произведения в векторном пространстве переносятся на случай геометрических векторов.

Из формулы для нахождения проекции вектора на ось следует, что

$$\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cos\varphi$$

И, соответственно, справедливо равенство:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}.$$

Поменяв местами векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ также получаем:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}|\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$$

Из этих формул можно находить проекцию вектора на вектор с помощью скалярного произведения.

Из определения скалярного произведения также следует формула для нахождения угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Кроме того, из определения следует, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Напомним также, что нормой вектора $\bar{a}$ называется число

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}^2}\ .$$

Для геометрического вектора получаем цепочку равенств:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0} = |\bar{a}|.$$

Таким образом, нормой геометрического вектора является его длина.

Все свойства нормы в векторном пространстве переносятся на случай длины геометрического вектора. Напомним некоторые из них.

1. Для любого вектора $\bar{a}$ и любого числа λ выполняется равенство:

$$|\lambda\bar{a}| = |\lambda|\cdot|\bar{a}|.$$

2. Неравенство Коши-Буняковского. Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется неравенство:

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}| \le |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|.$$

3. Неравенство треугольника. Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется

$$|\bar{a}+\bar{b}| \le |\bar{a}|+|\bar{b}|.$$

Утверждения для векторов в ортонормированном базисе переносятся на случай геометрических векторов в трехмерном пространстве с базисом $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ следующим образом.

Теорема. Пусть $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Тогда

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Следствие. Пусть $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Тогда

$$\left|\overline{a}\right| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

Пример. Даны вершины треугольника $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ и $C(3,-2,1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

Δ Искомый угол может быть определен как угол между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Поэтому найдем координаты этих векторов, вычитая из координат конца координаты начала:

$$\overline{BA} = \{-1+4, -2+2, 4-0\} = \{3,0,4\},$$

$$\overline{BC} = \{3+4, -2+2, 1-0\} = \{7,0,1\}.$$

Найдем теперь длины этих векторов, а также их скалярное произведение, как сумму парных произведений соответствующих координат:

$$\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5,$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 25.$$

Теперь искомый угол α может быть найден с помощью скалярного произведения:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right|} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Соответственно, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. ▲

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Введем, в первую очередь, следующее понятие.

Определение. Упорядоченная тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется правой, если, будучи отложенными из одной точки, они направлены таким образом, что глядя с конца вектора $\overline{c}$ на плоскость, образованную векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ будет осуществляться против часовой стрелки. В обратном случае указанная тройка векторов называется левой.

Примером правой тройки векторов может служить упорядоченная тройка единичных ортов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Определение. Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ (обозначается $\overline{a}\times\overline{b}$) называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен и вектору $\overline{a}$, и вектору $\overline{b}$;

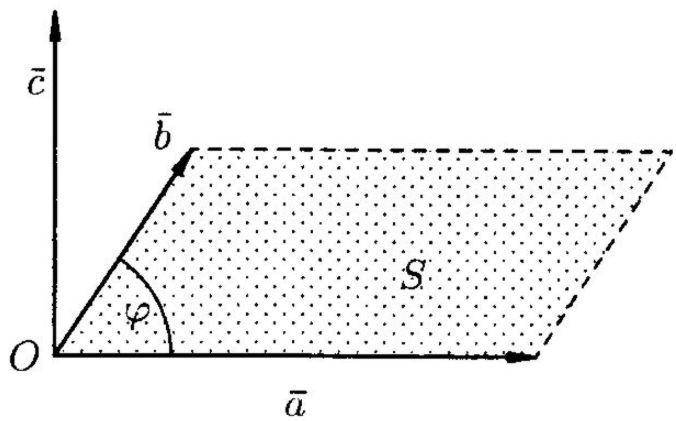
2) длина вектора $\overline{c}$ определяется равенством:

$$\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - правая.

Заметим, что второе условие последнего определения означает, что длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, если отложить их из одной точки.



Приведем без доказательства основные свойства векторного произведения.

1. Векторное произведение равно нулевому векторутогда и только тогда, когда либо векторы коллинеарны, либо один из них является нулевым.

2. Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется равенство:

$$\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}.$$

3. Для любых векторов $\overline{a},\overline{b}$ и для любого числа α справедливо равенство:

$$(\alpha\overline{a})\times\overline{b}=\overline{a}\times(\alpha\overline{b})=\alpha(\overline{a}\times\overline{b}).$$

4. Для любых векторов $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ справедливо равенство:

$$(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{b}.$$

Как следствие из этих свойств получаем следующее утверждение.

Теорема. Пусть в ортонормированном базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ заданы два вектора:

$$\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\},$$

$$\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}.$$

Тогда векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$ может быть найдено по формуле:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Пример. Даны вершины треугольника $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$. С помощью векторного произведения вычислить площадь этого треугольника и длину его высоты, опущенной из вершины B.

Δ Найдем векторы $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{BA}=\{1-5,-1+6,2-2\}=\{-4,5,0\},$$

$$\overline{BC}=\{1-5,3+6,-1-2\}=\{-4,9,-3\}.$$

Для нахождения площади треугольника найдем векторное произведение

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & 5 & 0\\ -4 & 9 & -3\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}5 & 0\\ 9 & -3\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 0\\ -4 & -3\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -4 & 9\end{vmatrix}=-15\bar{i}-12\bar{j}-16\bar{k}$$

.

Из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на найденных векторах, равна длине их векторного произведения. Следовательно, площадь треугольника ABC равна половине площади этого параллелограмма и, соответственно, равна

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-15)^2+(-12)^2+(-16)^2}=\frac{25}{2}.$$

Для нахождения высоты, опущенной из вершины B, найдем длину основания AC:

$$AC=\sqrt{(1-1)^2+(3+1)^2+(-1-2)^2}=5.$$

Воспользуемся известной формулой нахождения площади треугольника через его высоту:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot h,$$

где h - высота треугольника, опущенная из вершины B. Следовательно, высота определяется следующим образом:

$$h=\frac{2S}{AC}=\frac{25}{5}=5.\ \blacktriangle$$

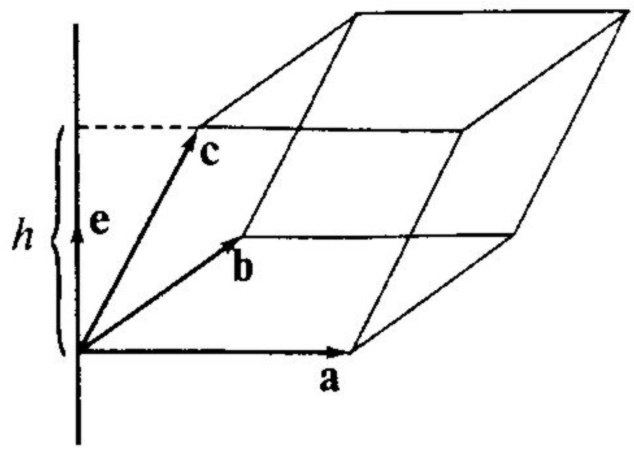
СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Смешанным произведением векторов $\bar{a}$ на $\bar{b}$ и на $\bar{c}$ (будем обознрачать $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$) называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$:

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения описывает следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b},\overline{c}$ - ненулевые некомпланарные векторы. Тогда смешанное произведение $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$ равно объему параллелепипеда, построеннного на этих векторах, отложенных из одной точки, взятому со знаком плюс, если тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - правая, и со знаком минус, если эта тройка – левая.



Доказательство. Восстановим указанный параллелепипед. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна числу $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$. Тогда по известной формуле объем параллелепипеда определяется равенством:

$$V=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|\cdot h,$$

где h - высота параллелепипеда. Пусть φ - угол между векторами $\overline{a}\times\overline{b}$ и $\overline{c}$. Тогда

$$h=\left|\overline{c}\right|\cos\varphi,$$

если тройкавекторов $\overline{a}$, $\overline{b},\overline{c}$ - правая, и

$$h=\left|\overline{c}\right|\cos(\pi-\varphi)=-\left|\overline{c}\right|\cos\varphi,$$

Если указанная тройка векторов – левая. В результате имеем:

$$V=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|\cdot\left|\overline{c}\right|\cos\varphi=\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right),$$

если тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b},\overline{c}$ - правая, и

$$V = -\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \cdot \left|\bar{c}\right| \cos\varphi = -\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right),$$

если эта тройка векторов – левая. ■

Приведем основные свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является нулевым или если рассматриваемые векторы компланарны.

2. Если в смешанном произведении поменять любые два вектора местами, то изменится лишь знак этого произведения.

Для нахождения смешанного произведения обычно пользуются следующим утверждением.

Теорема. Пусть в ортонормированном базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ заданы три вектора:

$$\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\},$$

$$\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$

$$\bar{c} = \{c_1, c_2, c_3\}.$$

Тогда смешанное произведение $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ может быть найдено по формуле:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример. Даны вершины тетраэдра $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ и $D(-5,-4,8)$. Найти его объем и высоту, опущенную из вершины D.

Δ Можно считать, что тетраэдр построен на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Тогда его объем, равный шестой части объема параллелепипеда, определяется формулой:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|.$$

Найдем координаты введенных векторов:

$$\overline{AB} = \{4-2, 1-3, -2-1\} = \{2, -2, -3\},$$

$$\overline{AC} = \{6-2, 3-3, 7-1\} = \{4, 0, 6\},$$

$$\overline{AD} = \{-5-2, -4-3, 8-1\} = \{-7, -7, 7\}.$$

Тогда смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ равно:

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 308$$

.

Соответственно,

$$V_{ABCD} = \frac{308}{6} = \frac{154}{3}.$$

Для нахождения высоты тетраэдра воспользуемся известной формулой:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h,$$

где h - высота тетраэдра, опущенная из вершины D. Необходимо найти площадь треугольника ABC. Будем считать, что он построен на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$$

Воспользуемся формулой для нахождения векторного произведения:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}$$

.

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = 14.$$

Тогда

$$h=\frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}=\frac{154}{14}=11. \ \blacktriangle$$

УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат.

Уравнение $\Phi(x,y)=0$ называется уравнением данной линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на линии L.

В общем случае, когда линия задана уравнением $\Phi(x,y)=0$, будем говорить, что она задана неявно. Если же из этого уравнения можно выразить y через x, то можно говорить о том, что линия задана явно уравнением $y=\varphi(x)$.

Для аналитического представления линии часто бывает удобно выражать переменные координаты x и y точек этой линии при помощи параметра t:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются непрерывными по параметру t в некоторой области изменения этого параметра.

Аналогично определяется уравнение линии в полярной системе координат. Это уравнение имеет неявный вид:

$$\Phi(\varphi,\rho)=0,$$

или явный вид:

$$\rho = \rho(\varphi).$$

В связи с аналитическим представлением линии возникают две основные задачи:

1) изучить свойства линии исходя из заданного ее уравнения;

2) вывести уравнение линии, заранее заданной геометрически.

Линия называется линией порядка n, если в прямоугольной декартовой системе координат эта линия определяется уравнением $\Phi(x, y) = 0$, где $\Phi(x, y)$ многочлен порядка n.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Покажем, в первую очередь, что прямая задается на плоскости уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B отличен от нуля.

Пусть задано такое уравнение. Покажем, что оно определяет некоторую прямую на плоскости. Очевидно, что данное уравнение в силу линейности имеет хотя бы одно решение (x_0, y_0), т.е. существует хотя бы одна точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Вычитая из данного уравнения полученное равенство, будем иметь:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

что равносильно данному уравнению. Покажем, что это уравнение определяет прямую на плоскости, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = \{A, B\}$ (A, B одновременно не равны нулю). В самом деле, точка $M(x, y)$ лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{n}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ ортогональны, и

$$\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Итак, уравнению $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ удовлетворяют координаты всех точек описанной выше прямой и только таких точек.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется общим уравнением. Кроме того, мы убедились в том, что вектор $\overline{n} = \{A, B\}$ перпендикулярен этой прямой. Любой вектор, лежащий на прямой, перпендикулярной данной, будем называть вектором нормали.

Общее уравнение прямой называется полным, если все его коэффициенты не равны нулю. Если хотя бы один из коэффициентов общего уравнения равен нулю, то это уравнение называется неполным. Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений.

1) Пусть $C = 0$. Тогда получаем уравнение $Ax + By = 0$,которое определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) Пусть $B = 0$. Тогда получаем уравнение $Ax + C = 0$ или $x = a$,где $a = -\dfrac{C}{A}$. Такое уравнение определяет прямую параллельную оси ординат, так как вектор нормали $\overline{n} = \{A, 0\}$ перпендикулярен этой оси.

3) Пусть $A = 0$.Тогда получаем уравнение $By + C = 0$ или $y = b$,где $b = -\dfrac{C}{B}$. Такое уравнение определяет прямую параллельную оси абсцисс, так как вектор нормали $\overline{n} = \{0, B\}$ перпендикулярен этой оси.

4) Пусть $B = C = 0$.Тогда получаем уравнение $x = 0$, определяющее ось ординат, так как это – прямая, параллельная оси ординат, и, проходящая через начало координат.

5) Пусть $A=C=0$. Тогда получаем уравнение $y=0$, определяющее ось абсцисс, так как это – прямая, параллельная оси абсцисс, и, проходящая через начало координат.

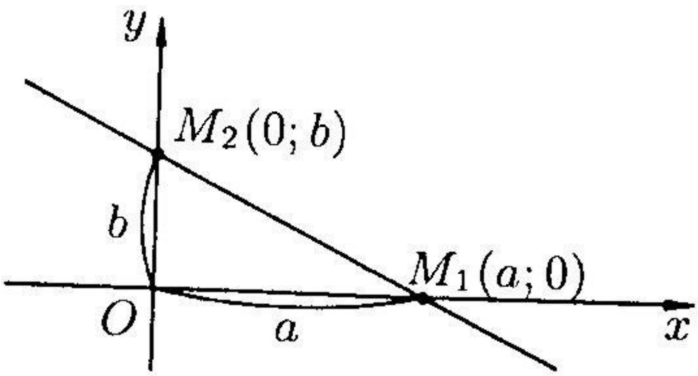
Рассмотрим полное уравнение прямой. Так как все коэффициенты этого уравнения не равны нулю, то это уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1.$$

Если обозначить: $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$, то получаем следующий вид уравнения прямой:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Такое уравнение называется уравнением в отрезках. Очевидно, что такая прямая проходит через точки $M_1(a,0)$ и $M_2(0,b)$. Таким образом, коэффициенты a и b равны величинам отрезков, отсекаемых данной прямой на соответствующих координатных осях.



КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть известно, что прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$. Пусть также задан вектор $\overline{q}=\{l,m\}$, лежащий либо на данной прямой, либо на прямой, параллельной данной. В дальнейшем такие векторы будем называть направляющими. Очевидно, что точка $M(x, y)$ лежит на рассматриваемой прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ и $\bar{q}$ коллинеарны, т.е. когда координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением прямой. Заметим, что в каноническом уравнении один из знаменателей может быть равен нулю. Это не означает деление на число нуль, а означает лишь то, что одна из координат направляющего вектора равна нулю.

В частности, каноническое уравнение может быть получено, если даны две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, через которые проходит прямая. Действительно, при этом в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$ и каноническое уравнение принимает вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Исходя из канонического уравнения получим параметрическое задание прямой. Для этого введем параметр t, равный левой или правой части канонического уравнения (такой параметр может принимать любые значения). Тогда получим систему равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = t \\ \dfrac{y - y_0}{m} = t \end{cases},$$

откуда и следует параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}.$$

Параметрические уравнения допускают наглядную механическую интерпретацию. Если считать, что параметр t - это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью $v = \sqrt{l^2 + m^2}$ (такое движение происходит по инерции).

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Обратимся к общему уравнению прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Если $B = 0$, то, как уже отмечалось, получаем уравнение прямой, параллельной оси ординат: $x = a$. Предположим, что данная прямая не параллельна оси ординат. Угол φ, отсчитываемый в положительном направлении (против часовой стрелки) от положительного направления оси абсцисс до данной прямой, называется углом наклона этой прямой. Число $k = tg\varphi$ называется угловым коэффициентом прямой. Пусть $B(0, b)$ - точка пересечения прямой с осью ординат. Из прямоугольного треугольника видно, что точка $M(x, y)$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{y - b}{x} = tg\varphi = k,$$

если угол наклона прямой – острый, и тогда и только тогда, когда

$$\frac{y - b}{-x} = tg(\pi - \varphi) = -tg\varphi = -k.$$

Таким образом, и в первом, и во втором случае получаем уравнение прямой

$$y = kx + b.$$

Такое уравнение называется уравнением данной прямой с угловым коэффициентом k.

Рассмотрим задачу нахождения уравнения прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение с угловым коэффициентом будет иметь вид $y = kx + b$, где неизвестным остался коэффициент b. Воспользуемся тем, что координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ должны удовлетворять уравнению прямой:

$$y_0 = kx_0 + b$$

$$\Downarrow$$

$$b = y_0 - kx_0.$$

Таким образом, получаем следующее уравнение прямой:

$$y = kx + y_0 - kx_0$$

или

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Рассмотрим вопрос о нахождении угла между прямыми. Если две прямые заданы своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то известны их векторы нормали: $\overline{n_1} = \{A_1, B_1\}$ и $\overline{n_2} = \{A_2, B_2\}$. Угол между прямыми равен углу между этими векторами, т.е. он может быть найден по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

В частности, указанные прямые будут параллельны, если векторы нормали будут коллинеарны, т.е. когда координаты этих векторов будут пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Рассматриваемые прямые будут перпендикулярны, если векторы нормали будут ортогональны, т.е. когда

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 = 0.$$

Если прямые заданы каноническими уравнениями, то по аналогии с предыдущим случаем угол между ними может быть найден как угол между их направляющими векторами.

Рассмотрим теперь случай, когда известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых. Очевидно, что угол φ между этими прямыми равен разности $\alpha_2 - \alpha_1$, где α_1, α_2 - углы наклона данных прямых. Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Эта формула и позволяет находить угол φ с помощью угловых коэффициентов. В частности, условие параллельности имеет вид:

$$k_2 - k_1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$k_1 = k_2.$$

Перпендикулярность прямых равносильна равенству:

$$1 + k_1 k_2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Пример. Найти угол между прямыми

$$5x - y + 7 = 0,$$
$$3x + 2y = 0.$$

Δ Воспользуемся формулой для нахождения угла через коэффициенты общего уравнения:

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot 3+(-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, угол между прямыми равен $\frac{\pi}{4}$. ▲

Пример. Найти прямую перпендикулярную к прямой

$$2x-y+1=0,$$

и проходящую через точку $M_0(2,1)$.

Δ Приведем уравнение данной прямой к уравнению с угловым коэффициентом:

$$2x-y+1=0$$

$$\Updownarrow$$

$$y=2x+1.$$

Следовательно, ее угловой коэффициент равен $k_1=2$, а уравнение искомой прямой, перпендикулярной данной прямой равен

$$k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}.$$

Теперь осталось воспользоваться уравнением прямой с заданным угловым коэффициентом, и проходящей через данную точку:

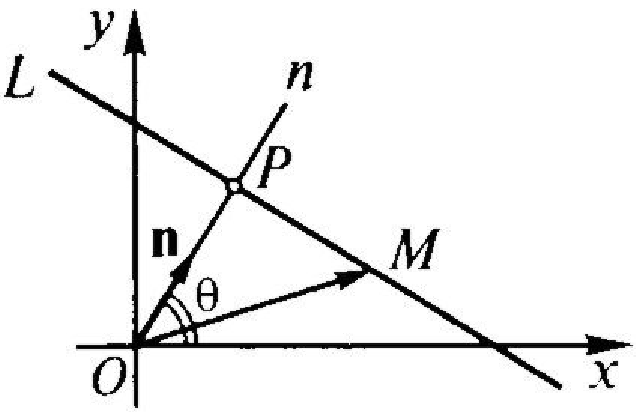
$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

Откуда получаем уравнение искомой прямой:

$$y=-\frac{1}{2}x+2.$$

НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим произвольную прямую. Восстановим из начала координат O вектор нормали $\overline{OP}$ к данной прямой и единичный вектор $\bar{n}$, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{OP}$. Пусть $p = |\overline{OP}|$ (если прямая проходит через начало координат, то $\overline{OP} = \overline{0}$). Пусть θ - угол между вектором $\overline{n}$ и осью абсцисс (в случае, когда $\overline{n} = \overline{0}$ в качестве θ можно взять любое значение). Так как $\overline{n}$ - единичный вектор, то



$$\overline{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}.$$

Очевидно, что точка $M(x, y)$ лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда проекция вектора $\overline{OM}$ на ось, определяемую вектором $\overline{n}$, равна p. Так как $\overline{OM} = \{x, y\}$, то получаем

$$Пр_{\overline{n}}\overline{OM} = \overline{n} \cdot \overline{OM} = x\cos\theta + y\sin\theta.$$

Следовательно, уравнение прямой может быть записано в виде:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p$$

или

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0.$$

Такое уравнение называется нормальным уравнением прямой.

Рассмотрим произвольную точку M. Пусть d - расстояние от этой точки до прямой $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$. Отклонением δ точки M от этой прямой называется расстояние d, взятое со знаком плюс, если эта точка и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, и взятое со знаком минус в обратном случае.

Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$. Спроектируем ее на ось, определяемую вектором $\overline{n}$. Пусть Q - полученная проекция, а P - точка пересечения прямой OQ с данной прямой. Очевидно, что отклонение точки M_0 от данной прямой равно величине вектора $\overline{PQ}$. Соответственно получаем:

$$\delta = PQ = OQ - OP = OQ - p\,.$$

Кроме того,

$$OQ = \text{Пр}_{\bar{n}}\overline{OM_0} = \bar{n}\cdot\overline{OM_0} = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta\,.$$

Следовательно,

$$\delta = x\cos\theta + y\sin\theta - p\,.$$

Таким образом, получаем правило: для нахождения отклонения точки от данной прямой следует в левую часть нормального уравнения этой прямой подставить координаты этой точки.

Выясним, как из общего уравнения получить нормальное уравнение. Пусть дано уравнение

$$Ax + By + C = 0\,.$$

Найдем множитель μ, при умножении на который общее уравнение превратится в нормальное. При этом должно выполняться:

$$\begin{cases} \mu A = \cos\theta \\ \mu B = \sin\theta\,. \\ \mu C = -p \end{cases}$$

Возводя в квадрат первые два равенства и затем, складывая их, получим

$$\mu^2\left(A^2 + B^2\right) = 1\,,$$

откуда

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Так как расстояние p всегда неотрицательно, то из третьего равенства системы заключаем, что знак μ должен быть противоположен знаку C.

В соответствии с этим получаем формулу для нахождения расстояния от точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,1)$ и $B(3,-2)$. Привести это уравнение к нормальному виду и выяснить пересекает ли эта прямая отрезок, соединяющий точки $C(1,1)$ и $D(-2,1)$.

Δ Воспользуемся каноническим уравнением прямой, проходящей через заданные две точки:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-3}.$$

Умножив на число 12 обе части полученного уравнения, получим общее уравнение:

$$3x+4y-1=0.$$

Для приведения его к нормальному виду найдем нормирующий множитель, выбрав его знак, противоположный знаку коэффициента $C=-1$:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}.$$

Умножив на этот множитель, получим нормальное уравнение рассматриваемой прямой:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0.$$

Чтобы выяснить, пересекает ли эта прямая отрезок, соединяющий точки $C(1,1)$ и $D(-2,1)$, найдем отклонения этих точек относительно этой прямой, подставив их координаты в левую часть нормального уравнения:

$$\delta_C=\frac{3}{5}\cdot 1+\frac{4}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}=\frac{6}{5},$$

$$\delta_D = \frac{3}{5}\cdot(-2) + \frac{4}{5}\cdot 1 - \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Так как отклонения точек C и D имеют противоположные знаки, то они лежат по разные стороны относительно данной прямой. Таким образом, эта прямая пересекает отрезок, соединяющий указанные точки. ▲

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Если уравнение второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, определяет некоторую линию, то эта линия называется кривой второго порядка.

Путем поворота координатных осей на угол α, преобразуем данное уравнение, чтобы в нем отсутствовал член с произведением координат. Используя формулы поворота осей

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

получим уравнение в новой системе координат:

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при $x'\cdot y'$ обратился в нуль, т.е. чтобы выполнялось равенство:

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha$$

Если $A = C$, то $\cos 2\alpha = 0$, и $\alpha = 45^0$. Если же $A \neq C$, то из последнего равенства получаем

$$tg 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

При таком выборе α, будет получено уравнение, не содержащее член с произведением координат, т.е. уравнение вида

$$A' x'^2 + B' y'^2 + C' x' + D' y' + E' = 0.$$

Выделим полный квадрат по каждой переменной. В результате получим:

$$A'\left(x' + \frac{C'}{2A'}\right)^2 + B'\left(y' + \frac{D'}{2B'}\right)^2 + E' - \frac{C'^2}{4A'} - \frac{D'^2}{4B'} = 0,$$

т.е. уравнение вида

$$A'(x' - x_0)^2 + B'(y' - y_0)^2 = G.$$

Сделаем параллельный перенос системы координаты так, чтобы начало новой системы оказалось в точке с координатами $x' = x_0$, $y' = y_0$. Тогда в новой системе координат $O'x''y''$ уравнение примет вид:

$$A' x''^2 + B' y''^2 = G.$$

В дальнейшем мы увидим, что такое уравнение определяет: либо окружность (при $A' = B'$), либо эллипс (при $A' \cdot B' > 0$), либо гиперболу (при $A' \cdot B' < 0$), либо параболу (при $A' \cdot B' = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса и окружности – в точку или пустое множество, для гиперболы – в пару пересекающихся прямых, для параболы – в пару параллельных прямых. Рассмотрим теперь каждую кривую второго порядка в отдельности.

ОКРУЖНОСТЬ

Определение. Окружностью называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности.

При этом расстояние от любой точки окружности до ее центра называется радиусом окружности.

Теорема. Уравнением окружности радиуса R с центром в начале координат является уравнение:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Доказательство. Точка $M(x, y)$ лежит на указанной окружности тогда и только тогда, когда

$$OM = R$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + y^2 = R^2. \ \blacksquare$$

Очевидно, что уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

определяет на плоскости окружность радиуса R с центром в точке $O'(x_0, y_0)$.

ЭЛЛИПС

Определение. Эллипсом называется множество точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Теорема. Уравнением эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, для каждой точки которого сумма расстояний до фокусов равна постоянной величине $2a$, является уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{a^2-c^2}$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M(x,y)$ эллипса. В соответствии с определением эллипса имеем:

$$F_1M+F_2M=2a$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\Updownarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Из геометрических соображений очевидно, что $c<a$.

Следовательно, можно ввести параметр $b>0$ в соответствии с равенством $b^2=a^2-c^2$, ($b=\sqrt{a^2-c^2}$). Тогда полученное равенство примет вид:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Таким образом, координаты любой точки эллипса удовлетворяют последнему уравнению, а координаты любой точки, не лежащей на эллипсе не удовлетворяютя этому уравнению.

Покажем обратное, что если x и y удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a>b$, то точка $M(x,y)$ лежит на описанном выше эллипсе, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Из указанного уравнения следует, что

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

и тогда

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2cx+b^2+c^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=\left|\frac{c}{a}x+a\right|.$$

Заметим, что из данного уравнения также следует, что

$$|x|\le a$$

$$\Updownarrow$$

$$-a\le x\le a,$$

откуда, с учетом оценки

$$c=\sqrt{a^2-b^2}<a$$

следует неравенство:

$$\frac{c}{a}x+a\ge a-c>0.$$

Следовательно,

$$F_1M=\frac{c}{a}x+a.$$

Аналогично вычислим расстояние от точки M до правого фокуса F_2:

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + b^2 + c^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x - a\right| = a - \frac{c}{a}x,$$

так как

$$\frac{c}{a}x - a \le c - a < 0.$$

Таким образом,

$$F_1M + F_2M = \frac{c}{a}x + a + a - \frac{c}{a}x = 2a,$$

т.е. точка M лежит на данном эллипсе. ■

Для рассмотренного в последеней теореме эллипса параметры a и b называются большой и малой полуосями (в соответствии с тем, что $a < b$).

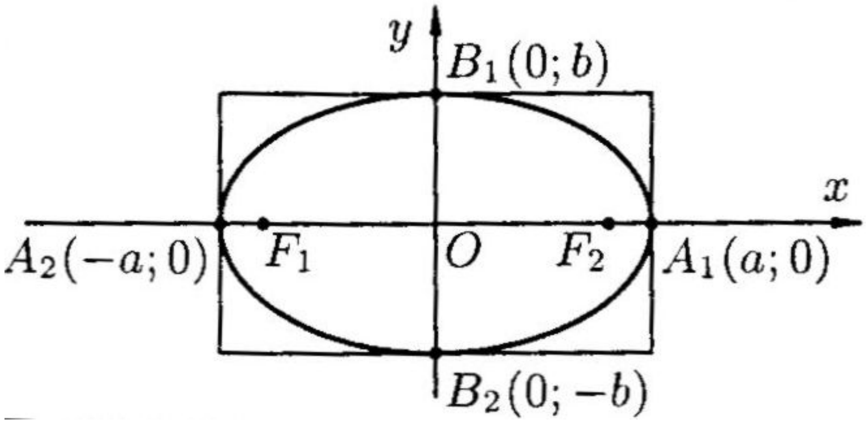
Очевидно, что эллипсу, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат в точках $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$, соответствует такое же уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $2a$ - сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов, а$b = \sqrt{a^2 + c^2}$. При этом уже параметр b называется большой полуосью, а параметр a - малой полуосью.

Установим некоторые геометрические свойства эллипса, описанного в последней теореме (для эллипса, фокусы которого находятся на оси ординат, эти свойства будут аналогичными).

1. Так как уравнение эллипса содержит x и y только в четных степенях, то эллипс симметричен относительно координатных осей и начала координат.

2. Из уравнения эллипса следует, что $|x| \le a$, $|y| \le b$. Следовательно, эллипс находится внутри прямоугольника, стороны которого параллельны

координатным осям и проходят через точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_1(0,b)$. Из уравнения эллипса также следует, что указанные точки являются точками пересечения эллипса с координатными осями.

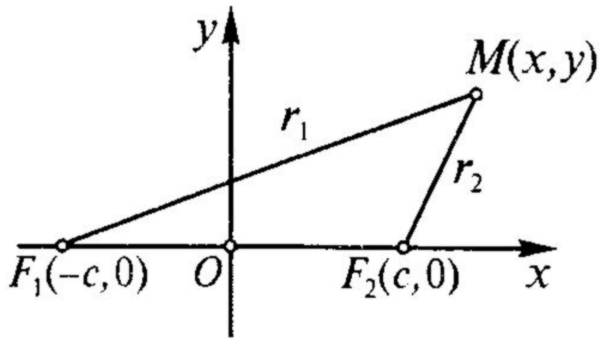


3. Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. При $a=b$ уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет окружность. В качестве характеристики формы эллипса чаще пользуются параметром $\varepsilon=\frac{c}{a}$, называемым эксцентриситетом эллипса. Так как $c<a$, то $0<\varepsilon<1$. Представим эксцентриситет в следующем виде:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Тогда $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет более округлым, а чем больше эксцентристет, тем эллипс будет более сплющенным.

4. Расстояния от точки $M(x,y)$ эллипса до фокусов называются фокальными радиусами этой точки. Обозначим фокальные радиусы этой точки следующим образом:



$$r_1 = F_1M\,,\ r_2 = F_2M\,.$$

В ходе доказательства последней теоремы было показано, что

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x\,,$$

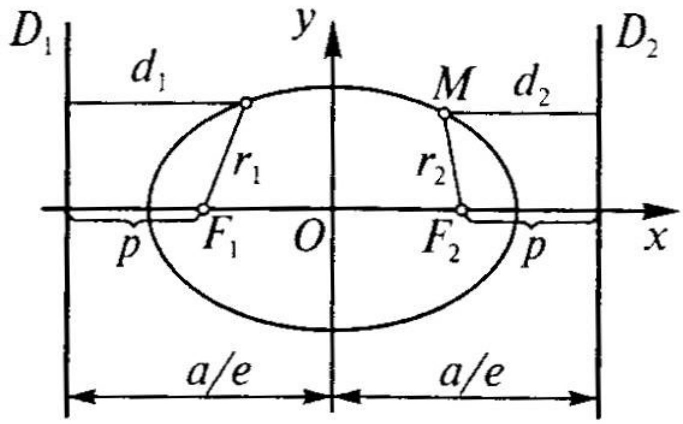
$$r_2 = a - \frac{c}{a}x\,.$$

Эти формулы удобно воспринимать в терминах эксцентриситета:

$$r_1 = a + \varepsilon x\,,$$

$$r_2 = a - \varepsilon x\,.$$

5. Рассмотрим прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, называемые директрисами эллипса. Их значение выявляется следующим утверждением.



Теорема. Пусть r - расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d - расстояние от этой же точки до односторонней с выбранным фокусом директрисы. Тогда отношение $\frac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Пример. На эллипсе

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

найти точку, разность фокальных радиусов которой равна 6,4.

Δ Фокальные радиусы точки $M(x, y)$ эллипса определяются формулами

$$r_1 = a + \varepsilon x\,,$$

$$r_2 = a - \varepsilon x.$$

В нашем случае имеем:

$$a = 5,$$

$$b = 3,$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4,$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$r_1 = 5 + \frac{4}{5}x,$$

$$r_2 = 5 - \frac{4}{5}x,$$

$$|r_1 - r_2| = 1{,}6|x|.$$

По условию задачи получаем:

$$1{,}6|x| = 6{,}4$$

$$\Updownarrow$$

$$|x| = 4.$$

Таким образом, есть две точки, удовлетворяющие условию задачи с абсциссами -4 и 4. Соответствующая ордината равна 1,8. В итоге получаем две искомые точки: $M_1(-4;1{,}8)$, $M_2(4;1{,}8)$. ▲

ГИПЕБОЛА

Определение. Гиперболой называется множество точек на плоскости,для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая чем расстояние между фокусами.

Теорема. Уравнением гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, а модуль разности расстояний от каждой точки которого до фокусов равен постоянной величине $2a$, является уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M(x,y)$ эллипса. По определению эллипса имеем:

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

$$\Downarrow$$

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

$$\Downarrow$$

$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=c^2x^2-2a^2cx+a^4$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right).$$

Из определения гиперболы следует, что

$$a<c.$$

Следовательно, можно ввести параметр $b>0$ в соответствии с равенством

$$b^2=c^2-a^2.$$

Тогда полученное равенство примет вид:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Таким образом, координаты любой точки эллипса удовлетворяют последнему уравнению.

Покажем обратное, что если x и y удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то точка $M(x, y)$ лежит на описанной выше гиперболе, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Из указанного уравнения следует, что

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

и тогда

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right|.$$

Заметим, что из данного уравнения также следует, что

$$|x| \geq a$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty).$$

При $x \leq -a$ имеем:

$$\frac{c}{a}x + a \leq -c + a < 0.$$

При $x \geq a$ имеем:

$$\frac{c}{a}x + a \geq c + a > 0.$$

Следовательно,

$$F_1M = \begin{cases} -\dfrac{c}{a}x - a, & \text{если } x \leq -a \\ \dfrac{c}{a}x + a, & \text{если } x \geq a \end{cases}.$$

Аналогично вычислим расстояние от точки M до правого фокуса F_2:

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2cx + c^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x - a\right|.$$

При $x \leq -a$ имеем:

$$\frac{c}{a}x - a \leq -c - a < 0.$$

При $x \geq a$ имеем:

$$\frac{c}{a}x - a \geq c - a > 0.$$

Следовательно,

$$F_2M = \begin{cases} -\dfrac{c}{a}x + a, & \text{если } x \leq -a \\ \dfrac{c}{a}x - a, & \text{если } x \geq a \end{cases}.$$

Таким образом,

$$|F_1M - F_2M| = 2a,$$

т.е. точка M лежит на данной гиперболе. ■

Для рассмотренной в последеней теореме гиперболы параметры a и b называются действительной и мнимой полуосями.

Очевидно, что гиперболе, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат в точках $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$, соответствует уравнение

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

где $2a$ - сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов, а

$$b=\sqrt{c^2-a^2}\ .$$

При этом уже параметр b называется действительной полуосью, а параметр a - мнимой полуосью.

Установим некоторые геометрические свойства гиперболы, описаной в последней теореме (для гиперболы, фокусы которой находятся на оси ординат, эти свойства будут аналогичными).

1. Так как уравнение гиперболы содержит x и y только в четных степенях, то гипербола симметрична относительно координатных осей и начала координат.

2. Из уравнения гиперболы следует, что $|x|\geq a$. Следовательно, гипербола находится вне полосы, ограниченной прямыми $x=\pm a$. Та часть гиперболы, которая находится левее прямой $x=-a$, называется ее левой ветвью. Та ее часть, которая находится правее прямой $x=a$, называется правой ветвью гиперболы. Из уравнения гиперболы также следует, что гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и не пересекает ось ординат.

3. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы. Покажем, что гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ со своими асимптотами не пересекается. Предположим обратное. Тогда система

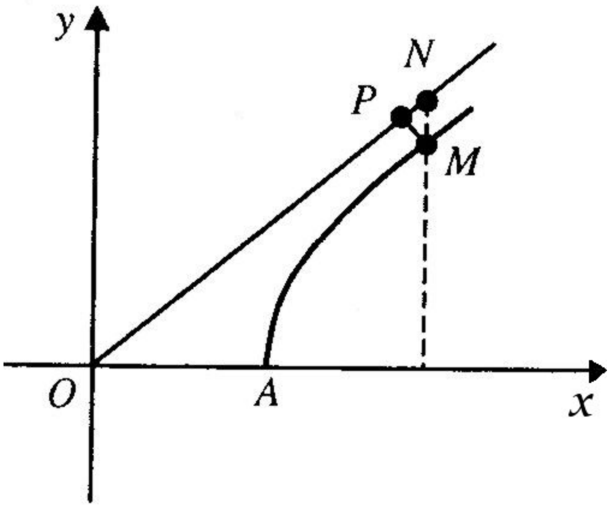
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \pm \dfrac{b}{a} x \end{cases}$$

является совместной. Однако очевидно, что решение этой системы сводится к равенству:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Соответственно эта система решений не имеет, что противоречит предположению. Таким образом, гипербола с асимптотами не пересекается.

Покажем, что при неограниченном удалении точки $M(x, y)$ гиперболы от начала координат эта точка будет все время приближаться к соответствующей точке асимптоты. Рассмотрим часть гиперболы, лежащей в первой четверти и задаваемой уравнением $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, и асимптоту $y = \frac{b}{a}x$. Пусть $N(x, y')$ - соответствующая точка этой асимптоты. Тогда расстояние между точками M и N определяется равенством:



$$MN = |y' - y| = \left| \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) \cdot \left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Очевидно, что по мере увеличения x найденное расстояние будет уменьшаться, неограниченно устремляясь к нулю. Аналогично рассматриваются случаи других четвертей.

Заметим, что асимптоты гиперболы проходят через вершины прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям и проходят через точки $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$. Этот прямоугольник называется основным прямоугольником гиперболы.

3. Форма гиперболы зависит от отношения $\frac{b}{a}$. Так же как и в случае эллипса для гиперболы введем параметр

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

называемый эксцентриситетом гиперболы. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Представим эксцентриситет в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Тогда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ ее полуосей, а значит, тем более вытянут ее основной прямоугольник вдоль оси абсцисс.

4. Расстояния от точки $M(x,y)$ эллипса до фокусов называются фокальными радиусами этой точки. Обозначим фокальные радиусы этой точки следующим образом:

$$r_1 = F_1M, \; r_2 = F_2M.$$

В ходе доказательства последней теоремы было показано, что

$$r_1 = \begin{cases} -\frac{c}{a}x - a, & \text{если } x \le -a \\ \frac{c}{a}x + a, & \text{если } x \ge a \end{cases},$$

$$r_2 = \begin{cases} -\dfrac{c}{a}x + a, & \text{если } x \le -a \\ \dfrac{c}{a}x - a, & \text{если } x \ge a \end{cases}.$$

Эти формулы удобно воспринимать в терминах эксцентриситета. Для точек левой ветви гиперболы имеем:

$$r_1 = -\varepsilon x - a,$$

$$r_2 = -\varepsilon x + a;$$

а для точек правой ветви:

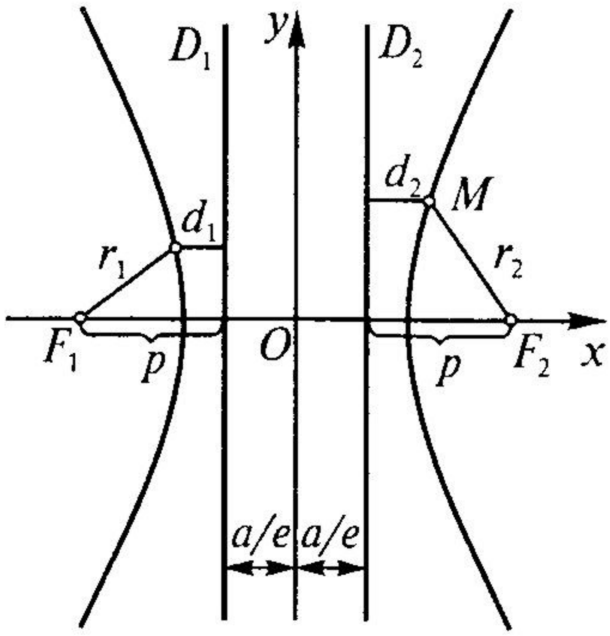
$$r_1 = \varepsilon x + a,$$

$$r_2 = \varepsilon x - a.$$

5. Так же, как и в случае эллипса, прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, называемые директрисами гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Их значение выявляется следующим утверждением.

Теорема. Пусть r - расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-нибудь фокуса, d - расстояние от этой же точки до односторонней с выбранным фокусом директрисы. Тогда отношение $\dfrac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$



Доказательство этой теоремы повторяет доказательство аналогичного утверждения для эллипса.

Пример. Эксцентриситет гиперболы, фокусы которой находятся на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, равен $\sqrt{2}$. Составить ее уравнение, если известно, что гипербола проходит через точку $M\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$.

Δ Данная гипербола имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

По определению эксцентриситета имеем:

$$\frac{c}{a}=\sqrt{2},$$

где $c^2=a^2+b^2$. Тогда

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}=2.$$

Другое равенство получим из условия нахождения точки M на гиперболе:

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=2\\[2mm] \dfrac{3}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1\end{cases}.$$

Из первого уравнения следует, что

$$a^2=b^2.$$

Учитывая это равенство из второго уравнения получаем:

$$\frac{1}{b^2} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = 1.$$

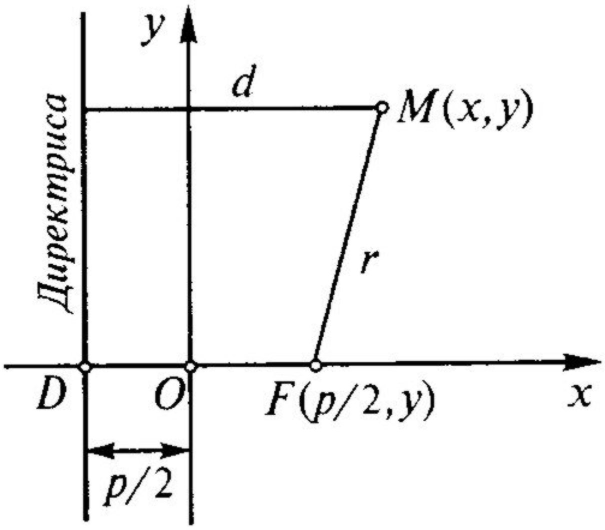
Таким образом, уравнение данной гиперболы:

$$x^2 - y^2 = 1. \ \blacktriangle$$

ПАРАБОЛА

Определение. Параболой называется множество точек на плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние от фокуса до директрисы называется параметром параболы.

Теорема. Уравнением параболы, фокус которой находится в точке $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а директриса которой $x = -\frac{p}{2}$, является уравнение $y^2 = 2px$.



Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M(x,y)$ данной параболы и ее проекцию $A\left(-\frac{p}{2},y\right)$ на директрисе. По определению параболы имеем: $MA = MF$

$$\Updownarrow$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2=2px.$$

Таким образом, координаты любой точки рассматриваемой параболы удовлетворяют полученному уравнению.

Покажем обратное, что если x и y удовлетворяют уравнению $y^2=2px$, то точка $M(x,y)$ лежит на описанной выше параболе. Очевидно, что расстояние от этой точки до директрисы равно $x+\frac{p}{2}$. При этом справедлива цепочка равенств:

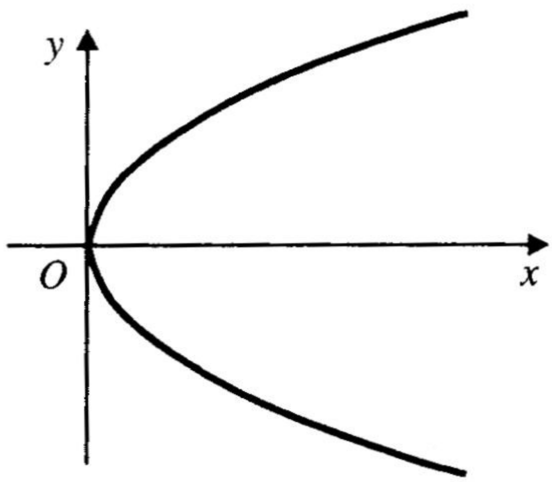
$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=$$

$$=x+\frac{p}{2}.$$

Следовательно, расстояние от точки M до фокуса равно расстоянию до директрисы, т.е. точка M лежит на данной параболе. ■

Очевидно, что параболе, фокус которой находится в точке $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, и директриса которой имеет уравнение $y=-\frac{p}{2}$, соответствует уравнение

$$x^2=2py.$$



Парабола $y^2=2px$ симметрична относительно оси абсцисс, так как y входит в уравнение в четной степени; можно говорить о том, что она состоит из двух ветвей (верхней и нижней). Ветви этой параболы «смотрят» вправо, если параметр p положителен, и «смотрят» влево, если параметр p отрицателен. Начало координат (точка параболы, которая находится ближе остальных к директрисе) называется вершиной этой параболы.

Парабола $x^2 = 2py$ симметрична относительно оси ординат, так как x входит в уравнение в четной степени; можно говорить о том, чтоона состоит из двух ветвей (правой и левой). Ветви этой параболы «смотрят» вверх, если параметр p положителен, и «смотрят» вниз, если параметр p отрицателен. Начало координат (точка параболы, которая находится ближе остальных к директрисе) называется вершиной этой параболы.

Пример. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(4,3)$ и директриса $y = -1$.

Δ Так как любая точка $M(x, y)$ параболы находится на одинаковом расстоянии от директрисы и от фокуса, то

$$MF = y + 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = y + 1.$$

Очевидно, что вершина данной параболы находится в точке $O'(4,1)$, а ее ветви смотрят вверх. Следовательно, обе части последнего равенства положительны, и обе части этого равенства можно возвести в квадрат. Таким образом, оно равносильно равенству:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (y+1)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-4)^2 = 8(y-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М., 1979.
2. Гусак А.А. Высшая математика, т.1. – Мн., 2000.
3. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Мн., 1998.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, 1 часть. – М., 1999.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М., 1978.
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М., 1985.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М., 2006.
8. Шипачев В.С. Высшая математика. – М., 1996.

Учебное издание

ЧЕГОЛИН АНДРЕЙ ПЕТРОВИЧ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Подписано в печать 11.12.2015.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,72. Уч.-изд. л. 3,23.
Тираж 100 экз. Заказ № 4911.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел. (863) 247-80-51.