РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СОЦИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЛИАЛ в г. ОБНИНСКЕ

С.М. Коломиец

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Обнинск – 2006

УДК 512.64+514.12 (083)
ББК В 22
К 61

Коломиец С.М. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Справочные материалы. Учебное пособие для студентов гуманитарных специальностей вузов. – Обнинск, 2006. - 130 с.

Пособие имеет характер справочника и предназначено для студентов гуманитарных специальностей, изучающих высшую математику и экономико-математические дисциплины. Содержание пособия соответствует требованиям к обязательному минимуму содержания указанных в названии разделов дисциплины «высшая математика», изложенным в Государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования по специальности 060400 «Финансы и кредит» (№ 180 эк/сп от 13.03.2000).

Большинство правил и формул сопровождается примерами их применения, что позволит читателям более глубоко разобраться в существе вопроса.

Для удобства использования пособие снабжено предметным указателем; в тексте даются ссылки на разделы, в которых рассматриваются «смежные» вопросы.

Рекомендовано к изданию Советом филиала Российского государственного социального университета в г. Обнинске.

УДК 512.64+514.12 (083)
ББК В 22
К 61

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие имеет характер справочника и предназначено для студентов гуманитарных специальностей, изучающих высшую математику и экономико-математические дисциплины.

Содержание пособия соответствует требованиям к обязательному минимуму содержания разделов «линейная алгебра и аналитическая геометрия» дисциплины «высшая математика», изложенным в Государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования по специальности 060400 «Финансы и кредит» (№ 180 эк/сп от 13.03.2000).

Существующие справочники по математике в большинстве своем имеют универсальный характер и предполагают достаточно высокий уровень подготовки читателя (в соответствии с уровнем «математизации» естественнонаучных дисциплин). В то же время, в гуманитарных дисциплинах этот уровень, как правило, заметно ниже. В связи с этим, в пособии материал излагается, по возможности, простым языком, но без ущерба для математической строгости.

Любой справочник по математике (и данное пособие в том числе) предназначен не для замены соответствующих учебников, а только лишь для дополнения к этим учебникам.

Пособие имеет двоякое назначение. Во-первых, оно позволяет навести «моментальную» справку по тем или иным разделам высшей математики: что такое матрица, правила умножения матриц, правила вычисления определителей и т.д. Во-вторых, оно может использоваться для повторения конкретных вопросов при подготовке к практическим занятиям и контрольным работам, к зачетам и экзаменам.

Большинство правил и формул сопровождается примерами их применения, что позволит читателям более глубоко разобраться в существе вопроса. Для удобства использования пособие снабжено предметным указателем; в тексте даются ссылки на разделы, в которых рассматриваются «смежные» вопросы. Номера разделов выделены полужирным шрифтом.

Всюду, где это не оговорено особо, под числами понимаются действительные числа. Точно также, если это не оговорено особо, всюду используется декартова система координат. Ссылки на нумерованные формулы приведены в круглых скобках. Векторы выделены полужирным шрифтом. Так, «0» – нулевое число, «***0***» – нулевой вектор.

Автор будет благодарен всем читателям, которые обратят внимание на возможные недочеты пособия.

С. Коломиец (электронный адрес: kolomiets@mail.ru)

1. Линейная алгебра

1.1. Матрицы

.1.1. Общие сведения

1.1.1.1. *Матрицей A* размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая некоторое количество m строк и некоторое количество n столбцов.

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv (a_{\mathrm{ik}})$$

Числа a_{ik}, входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. Первый индекс $i = 1, 2, \dots, m$ означает номер строки, а второй индекс $k = 1, 2, \dots, n$ означает номер столбца.

1.1.1.2. Матрица размера $1 \times n$ называется *строкой (вектор-строкой)*, матрица размера $m \times 1$называется *столбцом (вектор-столбцом).*

1.1.1.3. Матрица размера $n \times n$ (количество столбцов равно количеству строк) называется *квадратной* матрицей порядка n.

Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главная диагональ - это диагональ $a_{11}a_{22}\dots a_{\mathrm{nn}}$, идущая из левого верхнего угла матрицы в ее правый нижний угол. Побочная диагональ этой же матрицы - это диагональ $a_{\mathrm{n1}}a_{\mathrm{(n-1)2}}\dots a_{\mathrm{1n}}$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если из $i \neq k$ следует, что $a_{\mathrm{ik}} = 0$.

Квадратная матрица называется *верхнетреугольной*, если из $i > k$ следует, что $a_{\mathrm{ik}} = 0$, и *нижнетреугольной*, если из $i < k$ следует, что $a_{\mathrm{ik}} = 0$.

То есть, для диагональной матрицы отличны от нуля элементы только на главной диагонали: для верхнетреугольной (нижне-треугольной) матрицы равны нулю все элементы ниже (выше) главной диагонали.

1.1.2. Основные операции

Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами.

1.1.2.1. *Равенство матриц*

Две матрицы $A \equiv (a_{ik})$ и $B \equiv (b_{ik})$ размера $m \times n$ равны друг другу тогда, и только тогда, когда $a_{ik} = b_{ik}$ для всех i, k. То есть, две матрицы равны, если они имеют одинаковый размер, и все их соответствующие элементы совпадают.

1.1.2.2. *Транспонирование матрицы*

Транспонированием матрицы называется замена первой строки первым столбцом, второй строки вторым столбцом и т.д. Для исходной матрицы $A \equiv (a_{ik})$ транспонированная матрица $A^{т}$ будет иметь вид: $A^{т} = (a_{ki})$, где $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$.

То есть, матрица A_{mn} размера $m \times n$ при транспонировании переходит в матрицу $A^{т}_{nm}$ размера $n \times m$. В частности, при транспонировании вектор-строка переходит в вектор-столбец и наоборот.

1.1.2.3. *Сумма двух матриц* $A \equiv (a_{ik})$ и $B \equiv (b_{ik})$ одинакового размера $m \times n$ есть матрица того же размера $m \times n$

$$A + B \equiv (a_{ik}) + (b_{ik}) \equiv (a_{ik} + b_{ik}).$$

То есть, при сложении двух матриц попарно складываются все их соответствующие элементы.

1.1.2.4. *Умножение матрицы* $A \equiv (a_{ik})$ размера $m \times n$ *на число* α есть матрица того же размера $m \times n$

$$\alpha A \equiv \alpha\,(a_{ik}) \equiv (\alpha\, a_{ik}).$$

То есть, при умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число.

1.1.2.5. *Умножение матрицы* $A \equiv (a_{ik})$ размера $m \times n$ *на матрицу* $B \equiv (b_{kr})$ размера $n \times p$ есть матрица размера $m \times p$

$$C = A \bullet B \equiv (a_{ik}) \bullet (b_{kr}) \equiv (c_{ir}), \text{ где } c_{ir} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kr}\,,\ i = 1, 2, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots, p.$$

То есть, матрицы перемножаются, как иногда говорят, «строка на столбец»: элемент c_{ir}, стоящий на пересечении i-строки и r-столбца матрицы C, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-строки матрицы A и r-столбца матрицы B.

Отметим, что в общем случае $A \bullet B \neq B \bullet A$. Более того, матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B. Для возможности умножения необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B.

Если для двух квадратных матриц одного размера A и B выполняется условие $A \bullet B = B \bullet A$ (коммутативный закон умножения), то о таких матрицах говорят, что они перестановочны (коммутируют) друг с другом.

Пример. Даны матрицы:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};\ B_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix};\ C_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ D_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения $A_{33} \bullet B_{33}$, $B_{33} \bullet A_{33}$, $C_{31} \bullet D_{13}$, $D_{13} \bullet C_{31}$.

$$A_{33} \bullet B_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \bullet 1 + 2 \bullet 0 + 3 \bullet 1 & 1 \bullet 0 + 2 \bullet 1 + 3 \bullet 0 & 1 \bullet 2 + 2 \bullet 3 + 3 \bullet 4 \\ 4 \bullet 1 + 5 \bullet 0 + 6 \bullet 1 & 4 \bullet 0 + 5 \bullet 1 + 6 \bullet 0 & 4 \bullet 2 + 5 \bullet 3 + 6 \bullet 4 \\ 7 \bullet 1 + 8 \bullet 0 + 9 \bullet 1 & 7 \bullet 0 + 8 \bullet 1 + 9 \bullet 0 & 7 \bullet 2 + 8 \bullet 3 + 9 \bullet 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 20 \\ 10 & 5 & 47 \\ 16 & 8 & 74 \end{pmatrix}.$$

$$B_{33} \bullet A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \bullet 1 + 0 \bullet 4 + 2 \bullet 7 & 1 \bullet 2 + 0 \bullet 5 + 2 \bullet 8 & 1 \bullet 3 + 0 \bullet 6 + 2 \bullet 9 \\ 0 \bullet 1 + 1 \bullet 4 + 3 \bullet 7 & 0 \bullet 2 + 1 \bullet 5 + 3 \bullet 8 & 0 \bullet 3 + 1 \bullet 6 + 3 \bullet 9 \\ 1 \bullet 1 + 0 \bullet 4 + 4 \bullet 7 & 1 \bullet 2 + 0 \bullet 5 + 4 \bullet 8 & 1 \bullet 3 + 0 \bullet 6 + 4 \bullet 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 \\ 25 & 29 & 33 \\ 29 & 34 & 39 \end{pmatrix}.$$

$$C_{31} \bullet D_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \bullet 1 & 1 \bullet 2 & 1 \bullet 3 \\ 2 \bullet 1 & 2 \bullet 2 & 2 \bullet 3 \\ 3 \bullet 1 & 3 \bullet 2 & 3 \bullet 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$D_{13} \bullet C_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \bullet 1 + 2 \bullet 2 + 3 \bullet 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$$

1.1.2.6. Для операций над матрицами имеют место соотношения

$$A + B = B + A,\ A + (B + C) = (A + B) + C,$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,\ \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

$$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C,$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,\ (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

$$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C,\ (B + C) \bullet A = B \bullet A + C \bullet A.$$

$$(A^{т})^{т} = A;\ (\alpha A)^{т} = \alpha A^{т};\ (A + B)^{т} = A^{т} + B^{т};\ (A\bullet B)^{т} = B^{т}\bullet A^{т}.$$

1.1.2.7. Каждая квадратная матрица является матрицей некоторого линейного оператора (см. **1.5.3.1**). В различных базисах (см. **1.5.2.1**) матрицы одного и того же оператора могут иметь различный вид, но все эти матрицы будут подобны друг другу (см. **1.1.3.6**).

Пример. При повороте системы декартовых координат на некоторый угол φ исходные координаты (x, y) какой-либо точки на плоскости преобразуются в новые координаты (x', y') по известным соотношениям:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$
$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

В этом случае матрица $A = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ является матрицей оператора поворота систем координат на угол φ. Нетрудно видеть, что вектор-столбцы (векторы) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в новой и старой системах координат связаны матричным соотношением:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\bullet\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Замечание. Для рассматриваемого оператора линейность определяется по векторам (по парам точек x,y), но не по углу поворота.

1.1.3. Некоторые матрицы

1.1.3.1. *Нулевая матрица* (0) размера $m\times n$ есть матрица этого же размера, все элементы которой равны нулю. Тогда

$$A + (0) = A,\ \ (0)\bullet B = (0),\ C\bullet(0) = (0),$$

где A- произвольная матрица размера $m\times n$, B - произвольная матрица, имеющая n строк, C - произвольная матрица, имеющая m столбцов.

1.1.3.2. *Единичная матрица* E порядка n есть диагональная матрица размера $n\times n$ с единичными диагональными элементами и остальными нулевыми элементами:

$$E \equiv \delta_{ik},\text{ где }\ \delta_{ik} = \begin{cases} 0, если i \neq k \\ 1, если i = k \end{cases}$$

Тогда $E \bullet B = B$, $C \bullet E = C$, где B - произвольная матрица, имеющая n строк, C - произвольная матрица, имеющая n столбцов. Для любой квадратной матрицы A порядка n

$$E \bullet A = A; \; A \bullet E = A.$$

То есть, нулевая матрица аналогична числу «нуль», а единичная матрица аналогична числу «единица» в обычной алгебре.

1.1.3.3. *Симметрическая матрица* A есть квадратная матрица, для которой $a_{ik} = a_{ki}$. В этой матрице любые два элемента, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой. Вследствие этого справедливо соотношение: $A = A^{т}$.

Симметрическая (действительная) матрица порядка n имеет ровно n действительных собственных значений, с учетом кратности корней (см. **1.5.4.1**).

Если A и B - симметрические матрицы, то их сумма - также симметрическая матрица.

Антисимметрическая (кососимметрическая) матрица есть квадратная матрица, для которой $a_{ik} = -a_{ki}$. В этой матрице любые два элемента, симметричные относительно главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку, а все элементы на главной диагонали равны нулю. Вследствие этого справедливо соотношение: $A = -A^{т}$.

Пример. Приведенные ниже матрицы являются: матрица A - симметрической, матрица B - антисимметрической.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.3.4. Квадратная матрица A порядка n называется *ортогональной*, если все ее строки (вектор-строки) или столбцы (вектор-столбцы) представляют собой ортонормированную систему векторов, см. **1.5.2.11**. Отсюда следует, что

$$a_{1i}\, a_{1k} + a_{2i}\, a_{2k} + \ldots + a_{ni}\, a_{nk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, если\; i \neq k \\ 1, если\; i = k \end{cases},$$

$$A \bullet A^{т} = A^{т} \bullet A = E,$$

$$A^{т} = A^{-1}.$$

Здесь $A^{т}$, A^{-1} - транспонированная (см. **1.1.2.2**) и обратная (см. **1.4.1.1**) матрицы по отношению к исходной матрице A.

Ортогональные матрицы служат матрицами перехода (см. **1.5.2.3**) от одного ортонормированного базиса (см. **1.5.2.11**) к другому.

Произведение двух ортогональных матриц является также ортогональной матрицей.

Определитель (см. **1.2.1**) ортогональной матрицы равен 1 или -1.

В частности, ортогональной является матрица в примере п. **1.1.2.7**, а также нижеприведенные матрицы (см. **1.5.5.4**)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\det \boldsymbol{A} = 1$.

1.1.3.5. Матрица называется *вырожденной (невырожденной)*, если ее определитель равен (не равен) нулю (см. **1.2.1.)**

1.1.3.6. Две квадратные матрицы A и $\tilde{A}$ называются *подобными* (иногда их называют *эквивалентными*), если существует такая невырожденная матрица T, что $\tilde{A} = T^{-1} \bullet A \bullet T$ или $A = T \bullet \tilde{A} \bullet T^{-1}$, где T^{-1} - матрица, обратная для матрицы T (см. **1.4.1.1**).

Подобные матрицы имеют один и тот же ранг, след (см. **1.1.4.2**), определитель (см. **1.2.1**), характеристическое уравнение (см. **1.5.4.4**) и одни и те же собственные значения (см. **1.5.4.1**).

В различных базисах матрицы одного и того же линейного оператора являются подобными (см. **1.5.3.3)**.

Преобразование матрицы в подобную ей матрицу широко используется для «упрощения» исходной матрицы, в частности, для приведения ее к диагональному виду, см. **1.5.5**.

1.1.4. Ранг и след матрицы

1.1.4.1. Линейная зависимость строк (столбцов)

Каждую i-строку матрицы $A \equiv (a_{\mathrm{mn}})$ размера $m \times n$ можно рассматривать как вектор-строку

$$A_i\,(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),$$

а каждый k-столбец - как вектор-столбец

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

Строки A_1, A_2, …, A_m называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа α, β, …, γ, не все равные нулю, что

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \ldots + \gamma A_m = (0)_n,$$

где $(0)_n = (0, 0, \ldots, 0)$ – нулевая строка (содержащая n чисел).
Строки называются *линейно независимыми*, если вышеприведенное равенство выполняется лишь тогда, когда все числа α, β, …, γ одновременно равны нулю (см. **1.5.1.5**).

Аналогично определяется линейная зависимость (независимость) столбцов матрицы.

1.1.4.2. *Рангом* матрицы называется максимальное число линейно независимых столбцов или строк.

След Sp квадратной матрицы A порядка n есть сумма ее диагональных элементов

$$\mathrm{Sp}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad .$$

Подобные матрицы (см. **1.1.3.6**) имеют одинаковый след;
след матрицы равен сумме ее собственных значений (см. **1.5.4.1**).

Если A и B - две матрицы одного порядка, то

$$\mathrm{Sp}\,(A+B) = \mathrm{Sp}\, A + \mathrm{Sp}\, B;$$

$$\mathrm{Sp}\,(A \bullet B) = \mathrm{Sp}\,(B \bullet A).$$

1.1.4.3. Следующие элементарные операции не меняют ранг матрицы.

- Транспонирование.
- Перестановка местами строк (столбцов).
- Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
- Удаление из матрицы нулевой строки (столбца).
- Замена любой строки (столбца) строкой (столбцом), полученной путем прибавления к элементам исходной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число, отличное от нуля.

1.1.5. Приведение матрицы к ступенчатому виду

1.1.5.1. Ступенчатый вид матрицы можно определить следующим образом: если в матрице в i-строке левее элемента a_{ik} стоят только нули, то и ниже этого элемента в k-столбце тоже стоят только нули.

Пример. Рассмотрим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{5} & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет ступенчатый вид, причем подчеркнутые снизу элементы ($\underline{1}$, $\underline{5}$, $\underline{8}$) называются угловыми элементами. Ниже этих элементов в соответствующих столбцах обязательно стоят только нули, остальные же (не угловые) элементы могут быть произвольными. Если имеются нулевые сроки, то они обязательно стоят внизу.

1.1.5.2. Имеет место следующее утверждение: каждую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований (см. **1.1.4.3**) можно привести к ступенчатому виду, причем число ненулевых строк (ненулевых угловых элементов) в ступенчатой форме матрицы равно рангу исходной матрицы.

1.1.5.3. Метод приведения матрицы к ступенчатому виду (метод Гаусса) состоит в следующем.

Перестановкой строк (столбцов) размещаем в левом верхнем углу матрицы ненулевой элемент, желательно +1 или же –1 (если это возможно). Далее получаем нули всюду в первом столбце, кроме верхнего левого элемента. Для этого умножаем вначале первую строку на число, равное отношению $-a_{12}/a_{11}$ (здесь a_{11}, a_{12} - соответствующие элементы исходной матрицы), затем результат умножения прибавляем ко второй строке, а итоговый результат записываем вместо второй строки. Ясно, что в этом итоговом результате первый элемент второй строки будет равен нулю. Далее умножаем первую строку на число, равное отношению $-a_{13}/a_{11}$ (здесь a_{11}, a_{13} - соответствующие элементы исходной матрицы), затем результат умножения прибавляем к третьей строке, а итоговый результат записываем вместо третьей строки. Ясно, что в этом итоговом результате первый элемент третьей строки будет равен нулю. Далее аналогичным образом получаем во всем первом столбце нулевые элементы, стоящие ниже исходного элемента a_{11}. Затем первую строку оставляем без изменения и переходим ко второй строке, повторяя то же самое, что делалось с первой строкой. Затем переходим к третьей строке и так далее, до последней ненулевой строки. Если нулевые строки образовались в середине матрицы, их переставляют вниз матрицы.

Пример. Привести к ступенчатому виду матрицу A и определить ее ранг:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем: шаг 1 шаг 2 шаг 3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{-1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \underline{2} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{0{,}5} & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Шаг 1: меняем местами первую и вторую строки, в дальнейшем первую строку оставляем без изменения.
Шаг 2: Первую сроку умножаем на -2, прибавляем результат ко второй строке, итоговый результат записываем вместо второй строки; далее первую строку умножаем на 2, прибавляем результат к третьей строке, итоговый результат записываем вместо третьей строки. Мы получили нули в первом столбце ниже верхнего элемента (первого элемента первой строки).
Шаг 3: переходим ко второй строке. Умножаем ее на 3/2, прибавляем результат к третьей строке, итоговый результат записываем вместо третьей строки. Мы получили нуль во втором столбце ниже второго элемента второй строки.
Полученная матрица является ступенчатой и содержит три угловых элемента (подчеркнуты снизу). То есть, ранг исходной матрицы равен 3.

Замечания. Элементарные преобразования, конечно же, меняют матрицу. Поэтому знак равенства между преобразованными матрицами ставить нельзя. В этом случае принято использовать стрелки (как в приведенном выше примере).

Последовательность элементарных преобразований, приводящих матрицу к ступенчатому виду, и самый окончательный вид ступенчатый вид матрицы определены неоднозначно. Однако число угловых элементов, т.е. число ее ненулевых строк не зависит от способа приведения исходной матрицы к ступенчатому виду.

1.2. Определители

1.2.1. Общие сведения

Каждой произвольной квадратной матрице порядка n можно поставить в соответствие некоторую численную характеристику Δ, которая называется *определителем (детерминантом),* соответствующим этой матрице. Определитель, в отличие от матрицы, это одно число.

Если порядок матрицы $n = 1$, то матрица содержит всего один элемент a_{11}. Определителем первого порядка, соответствующим такой матрице, называется величина элемента a_{11}.

Если порядок матрицы $n = 2$, то матрица имеет вид:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем второго порядка, соответствующим такой матрице, называется число $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$. Таким образом, по определению

$$\Delta \equiv \det A \equiv |A| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

То есть, определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали соответствующей матрицы, и произведения элементов, стоящих на побочной ее диагонали.

В общем случае определитель порядка n обозначается следующим образом

$$\Delta \equiv \det A \equiv |A| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.2.1)$$

Этот определитель представляет собой число, полученное по определенным правилам из величин всех элементов соответствующей матрицы.

Вычисление определителей порядка выше второго обычно производится их разложением по строке или столбцу (см. **1.2.3**).

1.2.2. Свойства определителей

1.2.2.1. При транспонировании величина определителя не меняется

$$|A| = |A^{\text{т}}|.$$

1.2.2.2. При перестановке местами двух любых строк или столбцов определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

Соответственно, при четном числе перестановок местами строк или столбцов определитель знак не меняет, а при нечетном числе перестановок – меняет знак на противоположный.

1.2.2.3. Умножение каждого элемента строки или столбца на некоторое число α равносильно умножению определителя на это же число α.

1.2.2.4. Определитель равен нулю, если:

- все элементы какой-либо его строки или столбца равны нулю;
- соответствующие элементы каких-либо двух его строк или столбцов равны или же пропорциональны друг другу.

1.2.2.5. Определитель треугольной (в том числе, и диагональной) матрицы (см. **1.1.1.3**) равен произведению элементов на ее главной диагонали.

1.2.2.6. Определитель матрицы равен произведению ее собственных значений (см. **1.5.4.1**).

1.2.2.7. Определитель ортогональной матрицы (см. **1.1.3.4**) равен 1 или -1.

1.2.2.8. Если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число α, то величина определителя не изменится.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+\alpha a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+\alpha a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.2.2.9. Если каждый элемент какой-либо j- строки (столбца) можно представить в виде суммы двух слагаемых, то исходный определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей. В каждом из этих определителей все строки, кроме j-строки, совпадают, а j-строки представляют собой строки только одного из слагаемых.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.2.2.10. Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A\bullet B) = (\det A)\bullet(\det B).$$

1.2.3. Разложение определителей по строке или столбцу

1.2.3.1. *Минором* D_{ik} элемента a_{ik} исходного определителя (см. **1.2.1**) порядка n, называется определить порядка n - 1, получаемый, по определению, из исходного определителя вычеркиванием i-строки и k-столбца (строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}).
Главными минорами (угловыми минорами) исходного определителя $\det A$ (1.2.1) называют совокупность определителей:

$$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

…………………

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-2)2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \det A.$$

1.2.3.2. *Алгебраическим дополнением* A_{ik} элемента a_{ik} исходного определителя порядка n называется число, полученное следующим образом

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}.$$

То есть, алгебраическое дополнение элемента a_{ik} равно соответствующему минору, умноженному на (-1) в степени, равной сумме номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}.

1.2.3.3. Любой определитель порядка n можно следующим образом выразить через элементы произвольной его строки или столбца и их алгебраические дополнения (разложить определитель по строке или столбцу):

$$\Delta \equiv \det A \equiv |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

То есть, вычисление определителя порядка n сводится к вычислению n определителей порядка n - 1. В свою очередь, вычисление определителей порядка n - 1 сводится к вычислению определителей порядка n - 2, и так далее, до вычисления определителей второго и первого порядка (в соответствии с правилами, указанными в **1.2.1**).

Нетрудно видеть, что вычисление определителя второго порядка также представляет собой разложение этого определителя по любой строке или столбцу. В результате получаются определители первого порядка, по определению равные соответствующим числам (см. **1.2.1**).

Пример. Вычислить определить третьего порядка разложением по первой строке

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

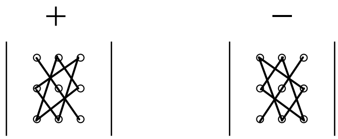
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

1.2.3.4. Определитель третьего порядка также может быть вычислен и по иному правилу, называемому "правилом треугольников".

Как видно из последней строки предыдущей формулы, определитель третьего порядка представляет собой сумму трех слагаемых, взятых со знаком "плюс", и сумму трех слагаемых, взятых со знаком "минус". Принцип формирования первой группы слагаемых состоит в следующем. Находим произведение элементов, стоящих на главной диагонали, затем к нему прибавляем произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников, одна из сторон которых параллельна главной диагонали.

Для второй группы слагаемых находим произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, затем к нему прибавляем произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников, одна из сторон которых параллельна побочной диагонали.

Эта схема иллюстрируется нижеприведенными рисунками. Слева - для вычисления группы положительных слагаемых, справа - для вычисления группы отрицательных слагаемых. Ясно, что для конкретных чисел, соответствующих элементам определителя, знак каждого слагаемого будет зависеть и от знаков всех сомножителей.



1.2.3.5. Определитель, имеющий треугольный вид (соответствующий треугольной, в частности, диагональной матрице), равен произведению элементов на главной диагонали.

1.2.3.6. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки (столбца) равна нулю.

1.3. Системы линейных уравнений

1.3.1. Общие сведения

1.3.1.1. *Системой m линейных уравнений с n неизвестными* называется совокупность уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь a_{ik} - коэффициенты (i = 1, 2, … , m; k = 1, 2, …, n), b_i - свободные члены, x_k - неизвестные (переменные). При этом все уравнения системы являются уравнениями первой степени относительно всех неизвестных.

Если все $b_i = 0$, система называется *однородной* (и *неоднородной* в противном случае).

1.3.1.2. *Решением системы уравнений* называется множество значений неизвестных X = x_1, x_2, … , x_n, удовлетворяющих одновременно каждому из уравнений системы. В общем случае $m \neq n$ (количество уравнений не равно количеству переменных). Любое решение системы уравнений x_1, x_2, … , x_n можно рассматривать как n-мерный вектор, а потому можно говорить о линейной комбинации, линейной зависимости решений (см. **1.5.1.5**).

Если решения не существует, то такая система уравнений называется *несовместной*. Если же система совместна, то она может иметь или одно решение, или больше (во многих случаях - бесчисленное множество решений).

1.3.1.3. Матричная форма записи системы линейных уравнений имеет вид:

$$A \bullet X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь A - *основная матрица системы*, X - вектор-столбец неизвестных (вектор-столбец решений), B - вектор-столбец свободных членов.

Расширенной матрицей системы называют матрицу

$$D = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Замечание. Ввиду важности последнего столбца (столбца свободных членов) его принято отделять вертикальной чертой.

1.3.2. Однородные системы уравнений

1.3.2.1. Матричная форма однородной системы уравнений имеет вид:

$$A \bullet X = (0),$$

где в правой части стоит нулевая матрица. Прежде всего, отметим, что такая система всегда совместна, поскольку нуль-вектор

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

является решением системы. Это (нулевое) решение часто называют тривиальным решением.

1.3.2.2. Однородная система линейных уравнений имеет единственное (тривиальное) решение, если ранг основной матрицы системы равен числу переменных. Если ранг этой матрицы меньше числа переменных, то система имеет нетривиальные (ненулевые) решения, причем этих решений, вообще говоря, существует бесчисленное множество.

1.3.2.3. Если X_1 и X_2 - решения однородной системы линейных уравнений, то их линейная комбинация также является решением той же системы уравнений.

1.3.2.4. Линейно независимые решения X_1, X_2, …, X_k однородной системы уравнений называются *фундаментальной системой решений*, если каждое решение системы уравнений является линейной комбинацией решений X_1, X_2, …, X_k.

1.3.2.5. Метод Гаусса решения однородной системы линейных уравнений

Метод Гаусса - метод последовательного исключения переменных. С помощью элементарных преобразований основную матрицу системы приводят к ступенчатому виду (иногда эту процедуру называют прямым ходом). Далее (обратный ход) записывается система уравнений, соответствующая преобразованной матрице. Эта система эквивалентной исходной системе уравнений (обе системы имеют одни и те же решения), однако, является существенно более простой с точки зрения ее решения.

Решение преобразованной системы уравнений начинают "с конца" - с самого "нижнего" уравнения (содержащего наименьшее количество переменных).

Если ранг преобразованной матрицы равен количеству переменных, то эта матрица, как нетрудно видеть, будет иметь верхнетреугольный вид (см. **1.1.1.3**). Тогда из "нижнего" уравнения следует, что $x_n = 0$. Соответственно, переходя ко второму снизу уравнению, получим: $x_{n-1} = 0$. Аналогично получим, что все $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). То есть, в данном случае имеется лишь тривиальное решение.

Замечание. Система однородных уравнений имеет лишь тривиальное решение только в том случае, когда определитель основной матрицы отличен от нуля.

Если ранг r преобразованной системы уравнений меньше количества n переменных, то нижнее уравнение содержит не одну, а несколько переменных. В этом случае в левой части уравнения оставляют лишь одну переменную, соответствующую угловому элементу преобразованной матрицы (см. **1.1.5.1**), а остальные $n - r$ переменные переносят в правую часть и объявляют их «свободными» (независимыми) переменными, то есть, некоторыми произвольными константами (вообще говоря, различными для различных переменных). Далее переходят ко второму снизу уравнению, из которого определяют x_{n-1} как функцию «свободных» переменных, и так далее, до самого верхнего уравнения. В рассматриваемом случае система уравнений имеет бесчисленное множество решений, выражающихся через линейную комбинацию $n - r$ «свободных» переменных. Полученное решение называется общим решением. Если же "свободным" переменным придать какие-то конкретные значения, то соответствующее решение называется частным решением.

В частности, если $n = r$, то число «свободных» переменных равно нулю, и система имеет лишь единственное тривиальное (нулевое) решение.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Запишем основную матрицу A исходной системы уравнений и приведем ее к ступенчатому виду A_s (см. **1.1.5.3**). Опуская промежуточные преобразования, в результате получим:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\1&1&1&2&-1\\1&2&1&-1&2\\1&2&-1&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-2&1\\0&0&2&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=A_s.$$

Далее запишем систему уравнений, соответствующую матрице A_s. Эта система эквивалентна исходной системе уравнений.

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0\\ \quad x_2+2x_3-2x_4+x_5=0\\ \qquad 2x_3+x_4-2x_5=0\end{cases}$$

Переходим теперь к решению этой системы уравнений, начиная с самого нижнего уравнения. Назовем переменные x_4, x_5, не связанные с угловыми коэффициентами, свободными переменными и выразим несвободную переменную x_3 через x_4, x_5: $x_3=-\frac{x_4}{2}+x_5$. Полученное выражение подставим во второе снизу уравнение и выразим из него x_2 через x_4, x_5. Затем аналогичным образом выразим из верхнего уравнения x_1 через x_4, x_5. Положим далее, что $x_5 = C_1$, $x_4 = C_2$, где C_1, C_2 – произвольные константы. Тогда общее решение исходной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}x_1=3C_1-\frac{9}{2}C_2\\ x_2=-3C_1+3C_2\\ x_3=C_1-\frac{C_2}{2}\\ x_4=C_2\\ x_5=C_1\end{cases}$$

Если же в этом общем решении выбрать конкретные значения C_1, C_2, то мы получим одно из частных решений. Так, если $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, тогда

$$\begin{cases}x_1=-\frac{9}{2}\\ x_2=3\\ x_3=-\frac{1}{2}\\ x_4=1\\ x_5=0\end{cases}.$$

1.3.3. Неоднородные системы уравнений

1.3.3.1. Основные свойства решений

Для того, чтобы неоднородная система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы (теорема Кронекера-Капелли).

Для совместной системы общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

1.3.3.2. Метод Гаусса решения неоднородной системы уравнений

С помощью элементарных преобразований расширенную основную матрицу системы приводят к ступенчатому виду (иногда эту процедуру называют прямым ходом). Далее (обратный ход) записывается система уравнений, соответствующая преобразованной матрице. Эта система эквивалентной исходной системе уравнений (обе системы имеют одни и те же решения), однако, является существенно более простой с точки зрения ее решения. Решение преобразованной системы уравнений начинают "с конца" - с самого "нижнего" уравнения (содержащего наименьшее количество переменных).

Неоднородная система имеет единственное решение только тогда, когда соответствующая однородная система имеет лишь единственное нулевое решение. То есть, в этом случае ранг основной матрицы равен количеству переменных, и, соответственно, определитель основной матрицы отличен от нуля.

<u>Пример</u>. Решить систему уравнений (см. **1.3.2.5**.):

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=1 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5=1 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=1 \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4+4x_5=1 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу D исходной системы уравнений и приведем ее к ступенчатому виду D_s (см. **1.1.5.3**.). Опуская промежуточные преобразования, в результате получим:

$$D=\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=D_s.$$

Далее запишем систему уравнений, соответствующую матрице D_s. Эта система эквивалентна исходной системе уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Переходим теперь к решению этой системы уравнений, начиная с самого нижнего уравнения. Назовем переменные x_4, x_5, не связанные с угловыми коэффициентами, свободными переменными и выразим несвободную переменную x_3 через x_4, x_5: $x_3 = -\frac{x_4}{2} + x_5$. Полученное выражение подставим во второе снизу уравнение и выразим из него x_2 через x_4, x_5. Затем аналогичным образом выразим из верхнего уравнения x_1 через x_4, x_5. Положим далее, что $x_5 = C_1$, $x_4 = C_2$, где C_1, C_2 – произвольные константы. Тогда общее решение исходной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 3C_1 - \frac{9}{2}C_2 + 1 \\ x_2 = -3C_1 + 3C_2 \\ x_3 = C_1 - \frac{C_2}{2} \\ x_4 = C_2 \\ x_5 = C_1 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что если $C_1 = C_2 = 0$, то частное решение неоднородной системы имеет вид: $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

1.3.3.3. *Правило Крамера* (решения неоднородной системы уравнений)

Если число уравнений равно числу переменных $(m = n)$, и определитель основной матрицы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение, определяемое соотношениями:

$$x_{\text{i}} = \frac{\Delta_i}{\Delta_0},$$

где Δ_0 - определитель основной матрицы; Δ_i – определитель, полученный из определителя Δ_0 заменой *i*-столбца столбцом свободных членов. Так, для системы уравнений п. **1.3.1.1** имеем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_\text{n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

1.4. Обратная матрица

1.4.1. Общие сведения

1.4.1.1. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1} называется *обратной* для матрицы A, если выполняются условия:

$$A\bullet A^{-1} = A^{-1}\bullet A = E,$$

где E- единичная матрица. Обратная матрица A^{-1} существует тогда, и только тогда, когда $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} – алгебраические дополнения, соответствующие элементам a_{ik} исходной матрицы A.

Обратная матрица в матричном исчислении играет роль, аналогичную числу, обратному данному числу (очевидно, что $a\, a^{-1} = 1$).

Замечание. Для вычисления обратной матрицы вначале транспонируют исходную матрицу, затем каждый элемент транспонированной матрицы заменяют его алгебраическим дополнением. Полученная матрица иногда называется присоединенной матрицей. В завершение эта присоединенная матрица умножается на число, обратное определителю исходной матрицы. Полученный результат легко проверяется, исходя из соотношений: $A\bullet A^{-1} = A^{-1}\bullet A = E$. При этом достаточно использовать лишь одно (любое) из двух последних равенств.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Первый шаг - вычисление определителя: $\det A = 10 \neq 0$. Следовательно, обратная матрица существует.
- Второй шаг - транспонирование исходной матрицы: $A^{т} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
- Третий шаг - вычисление присоединенной матрицы: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
- Четвертый шаг - вычисление обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\tilde{A} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

- Пятый шаг - проверка:

$$A \bullet A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

1.4.1.2. Имеют место следующие соотношения:

$$(A^{-1})^{-1} = A;\ (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1};\ (A \bullet B)^{-1} = B^{-1} \bullet A^{-1};\quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Для ортогональной матрицы (см. **1.1.3.4**): $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

1.4.2. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Идея этого метода состоит в следующем. Напишем исходную (невырожденную) матрицу A. Припишем к ней за вертикальной чертой единичную матрицу E того же порядка. Будем приводить матрицу A к ступенчатому виду, совершая преобразования «с длинной строкой», то есть, по тем же правилам будем преобразовывать соответствующие строки единичной матрицы E. В результате матрица A преобразуется в ступенчатую матрицу P, имеющую верхнетреугольный вид, причем все угловые (диагональные) элементы будут отличны от нуля. Единичная матрица E при этом преобразуется в некоторую промежуточную матрицу B. Продолжим преобразование матрицы P, обеспечивая получение нулевых элементов в столбцах выше главной диагонали, то есть, приведем матрицу P к диагональному виду. Затем, умножая каждую из строк на соответствующее число, переведем матрицу P в единичную матрицу E. Тогда матрица B будет переведена в обратную матрицу A^{-1}.

1.4.3. Некоторые матричные уравнения

1.4.3.1. Рассмотрим матричное уравнение относительно неизвестной матрицы X, полагая, что матрица A – невырожденная матрица:

$$A \bullet X = B$$

Тогда, умножив слева обе части уравнения на обратную матрицу A^{-1}, и учитывая свойства матриц (см. **1.1.2.6, 1.4.1.1**), получим:

$$X = A^{-1} \bullet B$$

В частности, это решение описывает решение неоднородной системы линейных уравнений (см. **1.3.3**).

1.4.3.2. Уравнение вида

$$X \bullet A = B$$

решается умножением справа на обратную матрицу A^{-1}. Тогда получим:

$$X = B \bullet A^{-1}.$$

1.4.3.3. Решение уравнения

$$A \bullet X \bullet B = C$$

при условии, что матрицы A, B – невырожденные матрицы, имеет вид

$$X = A^{-1} \bullet C \bullet B^{-1}.$$

Здесь имеет место умножение обеих частей уравнения: слева – на матрицу A^{-1}, а справа – на матрицу B^{-1}.

1.5. Линейные пространства и линейные операторы

1.5.1. Общие сведения

1.5.1.1. Пусть V - некоторое непустое множество элементов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$, которые называют *векторами*, и пусть в этом множестве определены две операции: сложения элементов (векторов) и умножения элемента (вектора) на действительное число (скаляр), причем элементы (векторы), получающиеся в результате этих операций, принадлежат исходному множеству V. Это множество называется *линейным (векторным) пространством*, если для указанных выше операций выполняются следующие аксиомы:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}; \ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c});$$

существует нулевой вектор $\boldsymbol{0}$, принадлежащий множеству V, такой, что $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;

для любого элемента $\boldsymbol{a} \in V$ существует противоположный элемент $-\boldsymbol{a}$ (принадлежащий множеству V), такой, что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$;

$\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$; $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\,\boldsymbol{a} + \alpha\,\boldsymbol{b}$; $(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{a}$; $1\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.
Заметим, что $0\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$; $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$; $(-\alpha)\,\boldsymbol{a} = -(\alpha\boldsymbol{a})$.

При введении линейного пространства абстрагируются не только от природы изучаемых объектов (элементов пространства), но и от конкретного вида правил образования суммы элементов и умножения элемента на число. Важно лишь, чтобы эти правила удовлетворяли приведенным выше аксиомам.

Примеры:

- Множество V_3 свободных векторов (направленных отрезков) в трехмерном пространстве. Операции сложения векторов и умножения векторов на число определяются так, как это принято в аналитической геометрии (см. **2.1**).

- Множество $C_{[a,b]}$ всех функций $y = y(x)$, определенных и непрерывных на интервале $[a, b]$, для которых приняты обычные правила сложения функций и умножения их на число.

- Множество всех матриц размера $m \times n$, для которых приняты правила сложения матриц и умножения их на число (см. **1.1.2**).

1.5.1.2. Множество $V^* \in V$ называется подпространством линейного пространства V, если для всех векторов, принадлежащих V^*, векторы, получающиеся в результате операций сложения векторов и умножения вектора на число, принадлежат рассматриваемому множеству V^*.

Примеры:

- Множество $V^* = V_2$ векторов, параллельных некоторой плоскости, является подпространством пространства V_3 всех свободных векторов.

- Множество всех алгебраических многочленов степени не выше n является подпространством пространства $C_{[a,b]}$ всех функций $y = y(x)$, определенных и непрерывных на интервале $[a, b]$.

1.5.1.3. *Линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ называют вектор $\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – действительные числа - коэффициенты линейной комбинации. Комбинация называется тривиальной, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, и нетривиальной, если хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля.

1.5.1.4. *Линейной оболочкой* $L(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$ векторов $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ называется совокупность всех линейных комбинаций этих векторов, т.е. множество векторов вида

$$L(\boldsymbol{x_1},(\boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – любые действительные числа.

1.5.1.5. Совокупность векторов $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ *линейно независима*, если их линейная комбинация тривиальна, и *линейно зависима* в противном случае. Для того, чтобы векторы $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Замечание. Вопрос о линейной зависимости (независимости) векторов весьма важен в теории линейных уравнений – как алгебраических, так и дифференциальных.

1.5.1.6. Линейное пространство $V = V_n$ называется *n-мерным* (имеет размерность $n = \dim V$), если в нем существует n линейно независимых векторов, а любая система, содержащая $n + 1$ векторов, является линейно зависимой.

1.5.1.7. Пусть векторы $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m}$ в n-мерном пространстве ($m \le n$) представляют собой упорядоченные наборы n чисел,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x_1} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \\ \boldsymbol{x_2} = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{1n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{x_m} = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}). \end{gathered}$$

Тогда условие равенства нулю линейной комбинации рассматриваемых m векторов сводится к системе n линейных уравнений с m неизвестными величинами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\begin{gathered} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \ldots + \alpha_m x_{n1} = 0 \\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_m x_{n2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 x_{1m} + \alpha_2 x_{2m} + \ldots + \alpha_m x_{nm} = 0 \end{gathered}$$

Эта однородная система линейных уравнений имеет единственное (тривиальное) решение, если ранг основной матрицы системы равен числу переменных. Если ранг этой матрицы меньше числа переменных, то система имеет нетривиальные (ненулевые) решения (см. **1.3.2.2**).

То есть, рассматриваемые m векторов будут линейно независимыми, если ранг матрицы X будет равен m, причем матрица X имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1m} & x_{2m} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}.$$

В частности, если $m = n$, то условием линейной независимости n векторов в n-мерном пространстве является неравенство нулю определителя матрицы X (или, что равносильно, матрицы X^{T}).

Пример. Выяснить вопрос о линейной зависимости векторов

$$\boldsymbol{x_1} = (1, 0, 1),$$
$$\boldsymbol{x_2} = (1, 1, 0),$$
$$\boldsymbol{x_3} = (0, 1, 0).$$

Рассмотрим определитель, соответствующий матрице указанных векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, указанные векторы линейно независимы.

1.5.1.8. Пусть векторы $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{x})$ представляют собой непрерывные функции, дифференцируемые $(n - 1)$ раз на некотором интервале. Эти функции будут линейно независимыми тогда, и только тогда, когда хотя бы в одной точке этого интервала отличен от нуля *определитель Вронского*:

$$W(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_{\mathrm{n}}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}_1 & y^{(n-1)}_2 & \dots & y^{(n-1)}_n \end{vmatrix}.$$

Пример. Выяснить вопрос о линейной зависимости функций:

$$y_1(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}};\ y_2(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}};\ y_3(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}.$$

$$W(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{4x}(6\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{x} + 2) \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что $W(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) > 0$ для любых конечных значений x. То есть, рассматриваемые функции являются линейно независимыми.
1.5.1.9. В случае векторов произвольной природы, заданных в евклидовом пространстве (см. **1.5.2.5**), для выяснения вопроса о линейной зависимости этих векторов часто используют определитель матрицы Грама (см. **1.5.2.8**).

1.5.2. Базис пространства V_n

1.5.2.1. *Базисом* пространства V_n называется любая упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. При этом для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in V_n$ существуют числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такие, что

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e})(\boldsymbol{x}) =$$

$$= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (1.5.1)$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора в данном базисе, а $(\boldsymbol{x})$ – координатным столбцом (вектор-столбцом), см. **1.1.1.2**. Равенство (1.5.1) называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $(\boldsymbol{e})$. Такое разложение может быть осуществлено единственным образом, то есть, координаты каждого вектора относительно данного базиса определяются однозначно.
1.5.2.2. При сложении двух любых векторов линейного пространства их координаты (относительно любого базиса) складываются, при умножении произвольного вектора на число α все координаты этого вектора умножаются на α.

То есть, основное назначение базиса состоит в том, что операции сложения векторов и умножения их на числа при задании базиса сводятся к соответствующим операциям над числами – координатами этих векторов.

При этом «по умолчанию» обычно используют ортономировнный базис, см. **1.5.2.11**, например, базис (1.5.9). В аналитической геометрии таким базисом, в частности, является декартова система координат.

1.5.2.3. Пусть $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $(\boldsymbol{e}') = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n')$ - два различных базиса одного и того же линейного пространства. Во многих случаях каждый вектор базиса $(\boldsymbol{e}')$ может быть разложен по базису $(\boldsymbol{e})$ - может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса $(\boldsymbol{e})$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1' &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{e}_n \\
\boldsymbol{e}_2' &= a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{e}_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{e}_n' &= a_{n1}\boldsymbol{e}_1 + a_{n2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n
\end{aligned}
\qquad (1.5.2)
$$

Тогда переход от базиса $(\boldsymbol{e}')$ к базису $(\boldsymbol{e})$ задается матричным соотношением (см. **1.1.2.5**):

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_n' \end{pmatrix} = A \bullet \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}, \qquad (1.5.3)
$$

где матрица перехода A имеет вид:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.5.4)
$$

В аналитической геометрии такой переход соответствует повороту декартовой системы координат на некоторый угол.

Следует отметить, что не во всех случаях переход от одного базиса к другому задается в виде (1.5.2) или (1.5.3). Так, например, параллельный перенос декартовой системы координат или же переход от декартовой системы координат к полярной системе координат соотношениями (1.5.2) или (1.5.3) не описывается.

Если базис $(\boldsymbol{e}')$ – ортономированный базис (см. **1.5.2.11**), то первый столбец матрицы (1.5.4) представляет собой координаты вектора $\boldsymbol{e}_1$ в базисе $(\boldsymbol{e}')$, второй столбец - координаты вектора $\boldsymbol{e}_2$ в базисе $(\boldsymbol{e}')$ и так далее.

Переход от базиса $(\boldsymbol{e}')$ к базису $(\boldsymbol{e})$ осуществляется следующим образом. Если обе части матричного уравнения (1.5.3) умножить слева на матрицу A^{-1} обратной к матрице A (см. **1.4.1.1**), то получим (см. **1.4.3**):

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = A^{-1} \bullet \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \dots \\ e_n' \end{pmatrix}.$$

1.5.2.4. Рассмотрим разложение некоторого вектора $\boldsymbol{x}$ по базису ($\boldsymbol{e}$') в соответствии с (1.5.1):

$$\boldsymbol{x} = x_1'\, \boldsymbol{e}_1' + x_2'\, \boldsymbol{e}_2' + \dots + x_n'\, \boldsymbol{e}_n'. \qquad (1.5.5)$$

Далее в (1.5.5) перейдем к базису ($\boldsymbol{e}$) по соотношениям (1.5.2). После перегруппировки слагаемых получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = {} & (x_1' a_{11} + x_2' a_{21} + \dots + x_n' a_{n1})\, \boldsymbol{e}_1 + \\ & + (x_1' a_{12} + x_2' a_{22} + \dots + x_n' a_{n2})\, \boldsymbol{e}_2 + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + (x_1' a_{1n} + x_2' a_{2n} + \dots + x_n' a_{nn})\, \boldsymbol{e}_n . \end{aligned}$$

Из сравнения этого разложения с разложением (1.5.1) получим формулы для преобразования координат вектора:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' a_{11} + x_2' a_{21} + \dots + x_n' a_{n1}; \\ x_2 &= x_1' a_{12} + x_2' a_{22} + \dots + x_n' a_{n2}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= x_1' a_{1n} + x_2' a_{2n} + \dots + x_n' a_{nn} . \end{aligned}$$

В матричной форме эти соотношения имеют вид:

$$(\boldsymbol{x}) = A^{\mathrm{T}} \bullet (\boldsymbol{x}').$$

Если теперь обе части этого равенства умножить слева на $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$, то получим соотношения для «обратного» преобразования координат:

$$(\boldsymbol{x}') = (A^{\mathrm{T}})^{-1} \bullet (\boldsymbol{x}).$$

где ($\boldsymbol{x}$), ($\boldsymbol{x}'$) - координатные столбцы (вектор-столбцы) в базисах ($\boldsymbol{e}$) и ($\boldsymbol{e}'$) соответственно (см. **1.5.2.1**).

1.5.2.5. Линейное пространство E называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E$ ставится в соответствие скаляр (число) $\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{ab})$ – так называемое *скалярное произведение векторов*, причем:

$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$;

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc}$;

$\alpha(\boldsymbol{ab}) = (\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$;

$\boldsymbol{aa} \geq 0$, причем $\boldsymbol{aa} = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Число $\boldsymbol{aa} = (\boldsymbol{aa}) = \boldsymbol{a}^2$ называют скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$.

1.5.2.6. В произвольном n-мерном линейном пространстве V_n скалярное произведение можно определить различными способами, в зависимости от природы элементов пространства (векторов).

Пусть векторы этого пространства представляют собой упорядоченные наборы n чисел. Тогда произвольные векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ имеют вид:

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n);$$
$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

В этом случае скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \,. \tag{1.5.6}$$

То есть, указанное определение скалярного произведения является обобщением скалярного произведения векторов, принятого в аналитической геометрии, см. **2.1.2**.

В линейном пространстве $C_{[a,b]}$ всех функций, определенных и непрерывных на интервале $[a, b]$, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$, соответствующих функциям $f(x)$ и $g(x)$, определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{fg} = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{1.5.7}$$

Замечание. Переход от формулы (1.5.6) к формуле (1.5.7) в некотором смысле аналогичен переходу от интегральной суммы к определенному интегралу.

1.5.2.7. В линейном пространстве обобщением понятия длины свободного вектора (принятого в аналитической геометрии, см. **2.1.1**), является норма вектора. Для евклидова пространства норма $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a}$ определяется как корень квадратный из скалярного квадрата:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} \,.$$

Вектор $\boldsymbol{a}$ называется нормированным или единичным, если $|\boldsymbol{a}| = 1$.

Любому ненулевому вектору $\boldsymbol{a}$ соответствуют нормированные векторы

$$\boldsymbol{a}_{01} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \boldsymbol{a}_{02} = -\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \,.$$

Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$|\,\boldsymbol{ab}| \le |\boldsymbol{a}|\,|b|.$$

1.5.2.8. В евклидовом пространстве для выяснения вопроса о линейной зависимости (см. **1.5.1.5**) системы векторов $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}})$ используют *матрицу Грама* G, элементами которой являются скалярные произведения векторов рассматриваемой системы:

$$G = \begin{pmatrix} (e_1e_1) & (e_1e_2) & \ldots & (e_1e_n) \\ (e_2e_1) & (e_2e_2) & \ldots & (e_2e_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_ne_1) & (e_ne_2) & \ldots & (e_ne_n) \end{pmatrix}.$$

Система векторов будет линейно зависимой тогда, и только тогда, когда определитель этой матрицы равен нулю ($\Delta_G = 0$).

В частности, это правило может использоваться в линейном пространстве $C_{[a,b]}$ всех функций, определенных и непрерывных на некотором интервале $[a, b]$. При этом скалярное произведение векторов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$, соответствующих функциям $f(x)$ и $g(x)$, определяется (1.5.7).

Пример. Рассмотрим вопрос о линейной зависимости на интервале [0, 1] системы векторов (функций):

$$\boldsymbol{e}_1 = 1;\ \boldsymbol{e}_2 = x;\ \boldsymbol{e}_3 = x^2.$$

Из (1.5.5) для указанной системы векторов получим:

$$(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1) = \int_0^1 1\bullet 1dx = 1;\ (\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2) = \int_0^1 x\bullet x dx = \frac{1}{3};\ (\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3) = \int_0^1 x^2\bullet x^2 dx = \frac{1}{5};$$

$$(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1) = \int_0^1 1\bullet x dx = \frac{1}{2};\ (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1) = \int_0^1 1\bullet x^2 dx = \frac{1}{3};$$

$$(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2) = \int_0^1 x\bullet x^2 dx = \frac{1}{4};$$

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2160} \neq 0.$$

То есть, рассматриваемая система векторов является линейно независимой. При этом нормированным является лишь один вектор $\boldsymbol{e}_1 = 1$.

Следует отметить, что для рассматриваемой системы функций использование матрицы Грамма имеет лишь учебный характер. В данном случае вопрос о независимости векторов может быть решен значительно более простым способом. Действительно, рассмотрим функцию

$$y = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2$$

Эта функция представляет собой кубическую параболу, причем ее график имеет не более трех значений x - точек пересечения с осью 0X, т.е. точек, в которых $y = 0$ при любых значениях α_1, α_2, α_3. Для всех других значений x равенство $y = 0$ тождественно выполняется лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. В соответствии с **1.5.1.5**, отсюда следует, что рассматриваемые функции являются линейно независимыми.

1.5.2.9. В евклидовом пространстве обобщением понятия перпендикулярности свободных векторов, принятого в аналитической геометрии (см. п. **2.1.1**), является *ортогональность* векторов. Два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю: $\boldsymbol{ab} = 0$.

Отметим, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору, так как для любого вектора $\boldsymbol{a}$ имеем: $\boldsymbol{a0} = 0$.

Из любого произвольного базиса евклидова пространства E_n ($n \geq 2$) может быть построен ортогональный базис путем так называемой ортогонализации исходного базиса см. **1.5.2.13**.

Пример. Даны векторы (см. **1.5.1.7)**:

$$\boldsymbol{x_1} = (1, 0, 1),$$
$$\boldsymbol{x_2} = (1, 1, 0),$$
$$\boldsymbol{x_3} = (0, 1, 0).$$

Найти норму каждого из них и выяснить вопрос об их ортогональности.

$$|\boldsymbol{x_1}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,,$$
$$|\boldsymbol{x_2}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}\,;$$
$$|\boldsymbol{x_3}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1.$$
$$(\boldsymbol{x_1}\,\boldsymbol{x_2}) = 1\bullet 1 + 0\bullet 1 + 1\bullet 0 \neq 0;$$
$$(\boldsymbol{x_1}\,\boldsymbol{x_3}) = 1\bullet 0 + 0\bullet 1 + 1\bullet 0 = 0;$$
$$(\boldsymbol{x_2}\,\boldsymbol{x_3}) = 1\bullet 0 + 1\bullet 1 + 0\bullet 0 \neq 0.$$

Итак, ортогональны друг другу лишь векторы $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_3}$.

1.5.2.10. Имеет место следующее утверждение: любая ортогональная система ненулевых векторов является линейно независимой. Обратное, вообще говоря, неверно. В примере **1.5.1.7** система независимых векторов не является ортогональной.

1.5.2.11. Базис ($\boldsymbol{e}$) = ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$) пространства E_n, для которого выполнено условие:

$$(\boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1 & если\ i = j \\ 0 & если\ i \neq j \end{cases}, \tag{1.5.8}$$

называется *ортонормированным базисом.*

В таком базисе, говоря языком геометрии, одинаков масштаб по каждой из «осей координат».

В частности, для векторов в n-мерном пространстве, представляющих собой упорядоченные наборы n чисел, таким базисом является совокупность n векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

1.5.2.12. Ортонормированные базисы широко используются в различных разделах математики. Они играют ту же роль, что и декартов прямоугольный базис в аналитической геометрии и позволяют существенно упростить вычисление различных величин.

Рассмотрим для примера произвольный (вообще говоря, не ортонормированный) базис ($\boldsymbol{f}$) = ($\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, …, $\boldsymbol{f}_n$) и разложим два произвольных вектора $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ по этому базису (см. **1.5.2.1**). Очевидно,

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{f}_1 + x_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{f}_n,$$
$$\boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{f}_1 + y_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + y_n \boldsymbol{f}_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – координаты соответственно векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в указанном базисе. Тогда выражение для скалярного произведения $\boldsymbol{xy}$ представляет собой квадратичную форму (см. **1.6.1**) и определяется следующим соотношением:

$$\boldsymbol{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{ik} x_i y_k , \tag{1.5.10}$$

где $f_{ik} = (\boldsymbol{f}_i \boldsymbol{f}_k)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$) - элементы матрицы Грамма (см. **1.5.2.8**), а скалярное произведение базисных векторов ($\boldsymbol{f}_i$ $\boldsymbol{f}_k$) определяется (1.5.6).

Если же базис ($\boldsymbol{f}$) является ортонормированным, т.е. выполняется условие (1.5.8), то (1.5.10) сводится к существенно более простому соотношению (1.5.6).

1.5.2.13. Из произвольного базиса ($\boldsymbol{f}$) = ($\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, …, $\boldsymbol{f}_n$) евклидова пространства ортогональный базис может быть построен с помощью процесса *ортогонализации*. Нормировка каждого вектора полученного ортогонального базиса (в соответствии с **1.5.2.7**) приводит к ортонормированному базису.

Построение ортонормированного базиса ($\boldsymbol{e}$) = ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$) из произвольного базиса ($\boldsymbol{f}$) = ($\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, …, $\boldsymbol{f}_n$) производится по следующим формулам.

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1; \qquad \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{g}_1/|\boldsymbol{g}_1|;$$
$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - (\boldsymbol{f}_2\, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1; \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{g}_2/|\boldsymbol{g}_2|;$$
$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - (\boldsymbol{f}_3\, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{f}_3\, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2; \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{g}_3/|\boldsymbol{g}_3|;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{g}_n = \boldsymbol{f}_n - (\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - \ldots (\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{e}_{n-1})\boldsymbol{e}_{n-1}; \qquad \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{g}_n/|\boldsymbol{g}_n|.$$

<u>Пример 1.</u> Преобразовать исходный базис $\boldsymbol{f}_1 = 1$; $\boldsymbol{f}_2 = x$; $\boldsymbol{f}_3 = x^2$ (см. пример в **1.5.2.8**) в ортонормированный базис.

$$\boldsymbol{g}_1 = 1; \qquad \boldsymbol{e}_1 = 1;$$

$$\boldsymbol{g}_2 = x - \left(\int_0^1 x\bullet 1dx\right)\bullet 1 = x - \frac{1}{2}; \quad \boldsymbol{e}_2^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}; \qquad \boldsymbol{e}_2 = \sqrt{3}\,(2x - 1);$$

$$\boldsymbol{g}_3 = x^2 - \left(\int_0^1 x^2 \bullet 1dx\right)\bullet 1 - \left(\sqrt{3}\int_0^1 x^2(2x-1)dx\right)\bullet\left(\sqrt{3}\,(2x-1)\right) = x^2 - x + \frac{1}{6};$$

$$\boldsymbol{e}_3^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{120}.$$

Таким образом, ортонормированный базис имеет вид:

$$\boldsymbol{e}_1 = 1; \; \boldsymbol{e}_2 = \sqrt{3}\,(2x - 1); \; \boldsymbol{e}_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

<u>Пример 2</u>. Преобразовать в ортонормированный базис исходный базис (см. пример в **1.5.4.7**):

$$\boldsymbol{f}_1 = (0, 0, 1)^{\text{т}}; \; \boldsymbol{f}_2 = (1, 1, 0)^{\text{т}}; \; ; \boldsymbol{f}_3 = (1, -1, 1)^{\text{т}}.$$

Имеем:

$$\boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - (1\bullet 0 + 1\bullet 0 + 0\bullet 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - (1\bullet 0 - 1\bullet 0 + 1\bullet 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (1\bullet 1 - 1\bullet 1 + 0\bullet 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ортонормированный базис имеет вид:

$$\boldsymbol{e}_1 = (0, 0, 1)^{\text{т}};\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^{\text{т}};\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^{\text{т}}.$$

1.5.3. Линейные операторы

1.5.3.1. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}$ в линейном пространстве V - это правило, по которому каждому вектору $\boldsymbol{x}\in V$ ставится в соответствие некоторый вектор $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\in V$, причем для всех векторов $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in V$ выполняются требования линейности: $\boldsymbol{A}(\alpha_1\boldsymbol{x_1} + \alpha_2\boldsymbol{x_2}) = \alpha_1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}) + \alpha_2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_2})$, где α_1, α_2 – действительные числа.

Напомним, что функция – это правило, по которому каждому числу ставится в соответствие некоторое другое число. То есть, в определенном смысле понятие оператора является обобщением понятия функции. Иногда говорят, что оператор – это правило, по которому каждой функции ставится в соответствие некоторая другая функция (оператор дифференцирования, оператор интегрирования и т.д.).

Часто линейный оператор называют преобразованием (отображением) линейного пространства в себя.

1.5.3.2. Каждому линейному оператору $\boldsymbol{A}$ в базисе $(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{\text{n}})$ соответствует квадратная матрица $A = (a_{\text{ik}})$, см. **1.1.1.1**. Элементы a_{ik} этой матрицы определяются действием оператора $\boldsymbol{A}$ на векторы базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{\text{n}}$, исходя из соотношений:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e_k}) = a_{1\text{k}}\,\boldsymbol{e}_1 + a_{2\text{k}}\,\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{\text{nk}}\,\boldsymbol{e}_{\text{n}};\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Различным линейным операторам соответствуют и различные матрицы в заданном базисе. С другой стороны, каждая квадратная матрица является матрицей некоторого линейного оператора.

1.5.3.3. В различных базисах матрицы одного и того же линейного оператора $\boldsymbol{A}$, вообще говоря, различны. При этом матрицы A_{e} и A_{b} в базисах $(\boldsymbol{e})$ и $(\boldsymbol{b})$ соответственно, связаны друг с другом соотношением:

$$A_{\text{e}} = U^{-1}\bullet A_{\text{b}}\bullet U,$$

где U – матрица перехода от базиса ($\boldsymbol{e}$) к базису ($\boldsymbol{b}$), см. **1.5.2.3**. То есть, матрицы оператора A_e и A_b являются подобными матрицами (см. **1.1.3.6**).
1.5.3.4. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ называется *самосопряженным*, если

$$(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})).$$

Линейный оператор является самосопряженным тогда, и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе (см. **1.5.2.11**) является симметричной (см. **1.1.3.3**).
1.5.3.5. Свойства самосопряженных операторов:
- самосопряженный оператор имеет только действительные собственные значения;
- для всякого самосопряженного оператора существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

1.5.4. Собственные значения и собственные векторы

1.5.4.1. Число λ называется собственным значением линейного оператора $\boldsymbol{A}$, если существует такой ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$, что имеет место следующее соотношение:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda\,\boldsymbol{x}.$$

Соответствующий вектор $\boldsymbol{x}$ называется собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, принадлежащим ее собственному значению λ.

Поскольку каждому линейному оператору соответствует некоторая квадратная матрица (см. **1.5.3.2**), то можно говорить о собственных значениях и собственных векторах квадратных матриц.

Можно сказать, что действие оператора на собственные векторы сводится лишь к изменению нормы (см. **1.5.2.7**) этих векторов. Применительно к векторам в аналитической геометрии это означает изменение длины векторов (их растяжение или сжатие), причем коэффициент изменения длины равен соответствующему собственному значению. В этом случае собственные векторы иногда называют собственными направлениями.

Нетрудно видеть, что для единичной матрицы все собственные значения равны единице, а собственными являются любые (ненулевые) векторы. Для нулевой матрицы все собственные значения равны нулю, а собственными являются любые (ненулевые) векторы.

Задачи, связанные с нахождением собственных значений и собственных векторов, встречаются в самых разных областях математики.
1.5.4.2. Каждому собственному значению соответствуют свои собственные векторы, причем таких векторов, вообще говоря, бесконечно много. Так, если $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор некоторого оператора, то $C\boldsymbol{x}$ - также

собственный вектор того же оператора (здесь C – произвольная константа).

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям одного и того же линейного оператора, являются линейно независимыми.

1.5.4.3. Множество всех собственных векторов квадратной матрицы A принадлежащих ее собственному значению λ, совпадает с множеством всех ненулевых решений матричного уравнения

$$(A - \lambda E) \bullet X = (0),$$

где E- единичная матрица порядка n. В свою очередь, это матричное уравнение эквивалентно соответствующей однородной системе линейных алгебраических уравнений (см. **1.3.1.1**).

1.5.4.4. Для произвольной квадратной матрицы A и единичной матрицы E порядка n рассмотрим определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Относительно переменной λ этот определитель является некоторым многочленом $P_A(\lambda)$ степени n, $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а уравнение

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + I_1 \lambda^{n-1} + I_2 \lambda^{n-2} + \ldots + I_n = 0 \qquad (1.5.11)$$

называется *характеристическим уравнением матрицы* A.

Здесь I_1, I_2, …, I_n – некоторые коэффициенты, выражающиеся через элементы матрицы A. В частности, $I_1 = \mathrm{Sp}\, A$ (см. **1.1.4.2**); $I_n = \det A$ при любых n. Остальные коэффициенты имеют, вообще говоря, более сложный вид.

В различных базисах матрицы одного и того же оператора могут иметь различный вид, но все эти матрицы будут подобны друг другу и будут иметь одно и то же характеристическое уравнение (см. **1.1.3.6**). То есть, в различных базисах коэффициенты I_1, I_2, …, I_n будут одинаковыми – иногда говорят, что эти коэффициенты являются инвариантами относительно преобразования базиса (1.5.2).

Корни этого характеристического уравнения и являются собственными значениями матрицы A.

Действительно, матричное уравнение в **1.5.4.3** имеет ненулевые решения только тогда, когда определитель соответствующей матрицы равен нулю.

Замечание. Ниже рассматриваются только действительные собственные значения. Случай комплексных значений см., например, в [6].

Пример. Найти собственные значения линейного оператора $\boldsymbol{A}$, имеющего в некотором базисе ($\boldsymbol{e}$) матрицу $\boldsymbol{A}_e$:

$$\boldsymbol{A}_e = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы $\boldsymbol{A}_e$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение относительно λ:

$$(5 - \lambda)[(4-\lambda)^2 - 1] = 0.$$

Отсюда следует, что собственные значения имеют вид:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5;\ \lambda_3 = 3.$$

В данном случае собственное значение $\lambda = 5$ является кратным (кратности 2).

1.5.4.5. Собственными векторами являются векторы, образующие фундаментальную систему решений (см. **1.3.2.4**) однородной системы линейных алгебраических уравнений, соответствующих матричному уравнению, приведенному в **1.5.4.3**. При этом для каждого собственного значения λ_i находятся свои собственные векторы.

1.5.4.6. Как указывалось в **1.5.4.2**. собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям одного и того же линейного оператора, являются линейно независимыми. То есть, если все n собственных значений некоторого линейного оператора различны, то такой оператор имеет n линейно независимых собственных векторов, система которых может быть базисом.

Если же имеются совпадающие собственные значения (корни характеристического уравнения кратности k), то таким значениям может соответствовать либо единственный собственный вектор, либо несколько – вплоть до k. То есть, система собственных векторов для случая совпадающих собственных значений не всегда может быть базисом.

1.5.4.7. Для нахождения собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i, необходимо найти решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-\lambda_i)x_n=0 \end{cases}.$$

В частности, решения такой системы могут быть получены методом Гаусса, см. **1.3.2.5**.

Пример. Найти собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, имеющего в некотором базисе ($\boldsymbol{e}$) матрицу $\boldsymbol{A}_e$):

$$\boldsymbol{A}_e = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы в **1.5.4.4** были найдены собственные значения:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5;\ \lambda_3 = 3.$$

Система уравнений для собственного значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ \ \ x_1-x_2=0 \\ -x_1+x_2=0 \end{cases}.$$

Запишем соответствующую матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений, соответствующая матрице ступенчатого вида, сводится всего лишь к одному уравнению:

$$- x_1 + x_2 = 0.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$x_1 = x_2 = C_1,\ x_3 = C_2.$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные константы. Тогда совокупность собственных векторов $\boldsymbol{x}$, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, представим для удобства записи в виде:

$$\boldsymbol{x} = (C_1, C_1, C_2)^{\text{т}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Однако C_1, C_2 – не зависящие друг от друга константы. Поэтому можно положить $C_1 = 0$, C_2 – произвольная константа. С другой стороны, можно положить $C_2 = 0$, C_1 – произвольная константа. В результате получим два собственных вектора:

$$\boldsymbol{x}_1 = (0, 0, C_2)^{\text{т}};$$
$$\boldsymbol{x}_2 = (C_1, C_1, 0)^{\text{т}}.$$

Скалярное произведение этих векторов $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = 0•C_1 + 0•C_1 + C_2•0 = 0$. То есть, эти векторы ортогональны и, следовательно, линейно независимы (см. **1.5.2.9, 1.5.2.10**).
Для проверки полученные векторы запишем в виде вектор-столбцов:

$$A_{\mathbf{e}} \bullet (\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5C_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1);$$

$$A_{\mathbf{e}} \bullet (\boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5C_1 \\ 5C_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1(\boldsymbol{x}_2).$$

То есть, два найденных вектора являются линейно независимыми собственными векторами, соответствующими собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$.

Для собственного значения $\lambda_3 = 3$ аналогичным образом получим:

$$\boldsymbol{x}_3 = (C, -C, C)^{\text{т}}.$$

Проверка:

$$A_{\mathbf{e}} \bullet (\boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} C \\ -C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C \\ -3C \\ 3C \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} C \\ -C \\ C \end{pmatrix} = \lambda_3(\boldsymbol{x}_3).$$

То есть, третий собственный вектор является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_3 = 3$. При этом система из всех трех векторов является линейно независимой.

Нетрудно видеть, что вектор $\boldsymbol{x}_3$ не ортогонален вектору $\boldsymbol{x}_1$ и, в общем случае, вектору $\boldsymbol{x}_2$. Однако для случая $C = C_1$ векторы $\boldsymbol{x}_3$ и $\boldsymbol{x}_2$ являются ортогональными. В то же время, эти векторы могут быть преобразованы в ортонормированный базис (см. **1.5.2.13**, пример 2):

$$\boldsymbol{e}_1 = (0,\ 0,\ 1)^{\text{т}};\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0)^{\text{т}};\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1,\ 0)^{\text{т}}.$$

Пример. Найти собственные векторы линейного оператора $\boldsymbol{A}$, имеющего в некотором базисе ($\boldsymbol{e}$) матрицу $\boldsymbol{A}_{\text{e}}$):

$$A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для этой матрицы имеет следующие корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 1$. Однако здесь кратному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ соответствует только один линейно независимый собственный вектор $\boldsymbol{x}_1 = (C_1,\ 0,\ 0)^{\text{т}}$. Собственному значению $\lambda_3 = 1$ соответствует собственный вектор $\boldsymbol{x}_2 = (0,\ 0,\ C_2)^{\text{т}}$. Отметим, что векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ являются ортогональными – их скалярное произведение равно нулю.

В данном случае имеется только два линейно независимых собственных вектора, которые не могут являться базисом в трехмерном пространстве.

1.5.4.8. Если матрица A - симметрическая (соответствует некоторому самосопряженному оператору), то все ее собственные значения являются действительными.

1.5.4.9. Собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными. Ясно, что эти векторы легко могут быть нормированы.

Собственные векторы, соответствующие совпадающим (кратным) собственным значениям, вообще говоря, не ортогональны. Однако к ним может быть применена процедура ортонормирования (см. **1.5.2.13**).

Следовательно, для любого самосопряженного линейного оператора (симметрической матрицы) существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. Матрица в этом базисе имеет диагональный вид, причем на ее главной диагонали расположены собственные значения, повторяющиеся в соответствии с их алгебраической кратностью.

1.5.5. Приведение матрицы к диагональному виду

1.5.5.1. Если собственные векторы матрицы (линейного оператора) образуют базис, то из этих векторов (вектор-столбцов) можно составить матрицу перехода к некоторому новому базису, см. **1.5.2.3**. В новом базисе исходная матрица (заданная в исходном базисе), преобразованная в соответствии с соотношением, приведенным в **1.5.3.3**, будет иметь диагональный вид (см. **1.1.1.3**). При этом на главной диагонали будут стоять собственные значения матрицы. Такое преобразование называют *диагонализацией матрицы*. Исходная и преобразованная матрицы являются подобными матрицами. Подобные же матрицы имеют одинаковые собственные значения, см. **1.1.3.6, 1.5.4.1**.

1.5.5.2. Если все собственные значения линейного оператора A различны, то в некотором базисе матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Матрица самосопряженного оператора - симметрическая матрица - в некотором базисе всегда имеет диагональный вид.

Матрица линейного оператора A в данном базисе является диагональной тогда, и только тогда, когда базис состоит из собственных векторов оператора A. При этом диагональными элементами являются собственные значения оператора.

1.5.5.3. Общая идея диагонализации состоит в следующем. Если исходную матрицу умножить на матрицу перехода, составленную из собственных векторов (вектор-столбцов), то результатом будет матрица, каждый столбец которой представляет собой исходный вектор-столбец (то есть, собственный вектор), умноженный на соответствующее собственное значение исходной матрицы. Затем полученную матрицу умножим слева на матрицу, обратную матрице перехода. При поочередном умножении первой строки на первый, второй и так далее столбцы общий множитель – соответствующее собственное значение – можно «вынести за скобки». При этом числа «в скобках» определяются результатом умножения матрицы на обратную матрицу. То есть, в «итоговой» матрице первый элемент первой строки равен первому собственному значению, а остальные элементы равны нулю. Аналогично во второй строке второй элемент равен второму собственному значению, а остальные элементы равны нулю, и так далее. Итак, «итоговая» матрица будет диагональной, причем на главной диагонали будут стоять собственные значения матрицы.

Пример. Привести к диагональному виду матрицу $\boldsymbol{A}_e$, заданную в некотором базисе $(\boldsymbol{e})$:

$$A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы ранее были найдены собственные значения и собственные векторы (см. **1.5.4.4, 1.5.4.7**). В дальнейшем для упрощения вычислений все константы положим равными единице:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5;\ \lambda_3 = 3;$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

.

Составим из вектор-столбцов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ матрицу U перехода к новому базису (см. **1.5.2.4**):

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь обратную матрицу U^{-1} (см. **1.4.1.1**).

- Первый шаг - вычисление определителя: det $\boldsymbol{U}$ = -2 ≠ 0. Следовательно, обратная матрица существует.
- Второй шаг - транспонирование исходной матрицы: $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Третий шаг - вычисление присоединенной матрицы:

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Четвертый шаг - вычисление обратной матрицы:

$$\boldsymbol{U}^{-1} = -\frac{1}{2}\tilde{U} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Пятый шаг – проверка правильности вычисления обратной матрицы:

$$U\bullet U^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = E.$$

- Шестой шаг – вычисление диагональной матрицы A_{d}:

$$A_{\mathrm{d}} = U^{-1}\bullet\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}\bullet U = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\bullet\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\bullet\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица $\boldsymbol{A}_e \bullet U$ состоит из вектор-столбцов x_1, x_2, x_3, умноженных на соответствующие собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 3$.

Итак, полученная матрица является диагональной. При этом на главной диагонали стоят собственные значения, причем кратное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ повторяется два раза, в соответствии с кратностью этого значения.

1.5.5.4. Пусть дана симметрическая матрица некоторого самосопряженного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется привести ее к диагональному виду. Прежде всего, найдем собственные значения этой матрицы, исходя из характеристического уравнения (см. **1.5.4.4**): $(\lambda - 1)^2 - 1 = 0$. В данном случае собственные значения различны: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_1 = 2$. Первому из этих собственных значений соответствует собственный вектор $x_1 = (C_1, -C_1)^{т}$, а второму – собственный вектор $x_2 = (C_2, C_2)^{т}$. Видно, что эти векторы ортогональны при любых значениях произвольных констант C_1, C_2. В дальнейшем для упрощения вычислений положим $C_1 = C_2 = 1$.

Составим матрицу перехода U к новому базису из собственных векторов (вектор-столбцов) и найдем обратную ей матрицу U^{-1}:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\ U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда диагональная матрица A_d имеет вид:

$$A_d = U^{-1}\bullet A_e\bullet U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что на главной диагонали матрицы $\boldsymbol{A}_d$ стоят ее собственные значения $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$.

Матрица U не является ортогональной матрицей (см. **1.1.3.4**), поскольку ее столбцы образуют хотя и ортогональную, но не нормированную систему векторов. Если же нормировать эти столбцы, то матрица перехода U_n и обратная ей матрица U_n^{-1} будут ортогональными:

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};\ U_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

При этом $A_d = U^{-1} \bullet A_{\mathbf{e}} \bullet U$ $A_d = U_n^{-1} \bullet A_{\mathbf{e}} \bullet U_n$. То есть, диагональный вид матрицы не изменился, однако новый базис из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

является ортонормированным.

Сравним матрицу перехода U_n с матрицей A поворота системы декартовых координат на угол φ (см. **1.1.2.7**):

$$A = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Видно, что обе матрицы совпадают, если $\varphi = \frac{\pi}{4}$. То есть, матрица U_n соответствует повороту системы декартовых координат на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

1.6. Квадратичные формы

1.6.1. Общие сведения

1.6.1.1. *Квадратичной формой* переменных x_1, x_2, …, x_n называют однородный многочлен второй степени, то есть, функцию вида

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2a_{1n} x_1 x_n + a_{22} x_2^2 +$$
$$+ 2a_{23} x_2 x_3 + + \ldots + 2a_{2n} x_2 x_n + \ldots + a_{nn} x_n^2, \qquad (1.6.1)$$

где a_{ik} - коэффициенты квадратичной формы; $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $a_{ik} = a_{ki}$, то $a_{12} + a_{21} = 2a_{12}$, $a_{13} + a_{31} = 2a_{13}$, и так далее. Поэтому в (1.6.1) фигурируют коэффициенты «2» перед слагаемыми, соответствующими произведению различных переменных ($i \neq k$).

1.6.1.2. Из коэффициентов (1.6.1) можно составить матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $a_{ik} = a_{ki}$, то ясно, что матрица A является симметрической матрицей (см. **1.1.3.3**).

Квадратичную форму (1.6.1) формально можно представить в виде матричного соотношения:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \bullet A \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пример. Составить матрицу квадратичной формы для случая трех переменных:

$$L(x, y, z) = 9x^2 + 4xy + 2xz + 7y^2 + 6yz + 5z^2.$$

Положим, что переменной x соответствует индекс «1», переменной y соответствует индекс «2», переменной z соответствует индекс «3». Тогда

$$a_{11} = 9;\ 2a_{12} = 2a_{21} = 4;\ 2a_{13} = 2a_{31} = 2;\ a_{22} = 7;\ 2a_{23} = 2a_{32} = 6;\ a_{33} = 5.$$

Следовательно, матрица этой формы имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix}9 & 2 & 1\\ 2 & 7 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Пример. Составить квадратичную форму, соответствующую матрице

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 5\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$L(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 4y^2 + 10yz + 6z^2.$$

1.6.1.3. Ранг матрицы A называют рангом квадратичной формы. Если этот ранг равен числу переменных n, то квадратичную форму называют невырожденной (ясно, что в этом случае и матрица является невырожденной). Если же ранг меньше n, то квадратичную форму называют вырожденной (ясно, что в этом случае и матрица является вырожденной). Соответственно, для невырожденной матрицы ее определитель отличен от нуля, а для вырожденной - равен нулю.

1.6.1.4. Квадратичные формы $L(x, y)$, $L(x, y, z)$ для случая двух и трех переменных широко используются в аналитической геометрии. При этом по умолчанию полагается, что x, y, z заданы в декартовой системе координат. Тогда преобразование базиса вида (1.5.2) с матрицей перехода (1.5.4) по существу означает поворот декартовой системы координат на некоторый угол.

При таком преобразовании базиса не меняется характеристическое уравнение матрицы, то есть, являются инвариантами (не меняются) коэффициенты характеристического уравнения (1.5.11).

Для двух переменных матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A_{22}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

В этом случае инварианты квадратичной формы определяются соотношениями (см. **1.5.11**):

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2;$$

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \lambda_1 \bullet \lambda_2. \tag{1.6.2}$$

Здесь λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы A_{22}.

Для трех переменных матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае инварианты квадратичной формы определяются соотношениями (см. **1.5.11**):

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \bullet \lambda_2 + \lambda_1 \bullet \lambda_3 + \lambda_2 \bullet \lambda_3; \qquad (1.6.3)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \bullet \lambda_2 \bullet \lambda_3.$$

Здесь λ_1, λ_2, λ_3 – собственные значения матрицы A_{33}. Для случая кратных значений каждое из них повторяется в соответствии со своей алгебраической кратностью.

Напомним, что для симметрической матрицы все собственные значения являются действительными, см. **1.5.4.8**.

1.6.2. Канонический вид квадратичной формы

1.6.2.1. Квадратичная форма называется *канонической* (имеет канонический вид), если все $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$, т.е.

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + \ldots + a_{nn}\, x_n^2. \qquad (1.6.4)$$

То есть, в этом виде квадратичной формы отсутствуют «смешанные» слагаемые $x_i\, x_k$ $(i \neq k)$, а матрица диагональный вид. При этом количество ненулевых коэффициентов a_{ii} равно рангу квадратичной формы (см. **1.6.1.3**).

1.6.2.2. Если исходную матрицу квадратичной формы привести к диагональному виду с помощью соответствующего преобразования базиса (см. **1.5.5**), то в этом новом базисе квадратичная форма будет иметь канонический вид. А поскольку в любом базисе матрица квадратичной формы является симметрической, то она всегда может быть приведена к диагональному виду, см. **1.5.5.2**.

То есть, любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью преобразования базиса с матрицей перехода вида (1.5 4).

1.6.2.3. Канонический вид квадратичной формы определяется неоднозначно, поскольку каждому собственному значению соответствует, вообще говоря, бесконечное число собственных векторов (см. **1.5.4.2**). То есть, можно построить различные базисы, в которых квадратичная форма будет иметь диагональный вид. Ясно, что в различных базисах различными могут быть и коэффициенты a_{ii} квадратичной формы. В частности, можно выбрать такой базис, в котором все коэффициенты a_{ii} по модулю будут равны единице. Тогда говорят, что квадратичная форма имеет ***нормальный вид***. В этом базисе масштабы по различным осям координат становятся различными.

Нетрудно видеть, что для (1.6.4) переход к нормальному виду осуществляется при переходе к базису $x_i' = x_i / \sqrt{|a_{ii}|}$.

Пример. Рассмотрим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если изменить масштабы по осям координат, т.е. перейти к переменным $x' = ax$; $y' = by$, то эллипс трансформируется в окружность единичного радиуса:

$$(x')^2 + (y')^2 = 1.$$

1.6.2.4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть осуществлено приведением соответствующей матрицы к диагональному виду, см. **1.5.5**. При этом, как правило, базис из собственных векторов приводят к ортонормированному виду, см. **1.5.2.11, 1.5.2.13**.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 - 2yz + 3z^2.$$

Матрица A этой формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 1] = 0.$$

Отсюда следует, что все собственные значения различны:

$$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 4;\ \lambda_3 = 6.$$

Тогда квадратичная форма примет следующий вид:

$$L(t_1, t_2, t_3) = 6t_3^2 + 4t_2^2 + 2t_1^2,$$

где t_1, t_2, t_3 – некоторые новые переменные (координаты), определенные в «новом» базисе из собственных векторов.

Найдем теперь собственные векторы (см. **1.5.4.7**) для собственных значений $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = 6$:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, C_1, C_1)^{\text{т}}; \ \boldsymbol{a}_2 = (0, C_2, -C_2)^{\text{т}}; \ \boldsymbol{a}_3 = (C_3, 0, 0)^{\text{т}}.$$

Теперь для C_1, C_2, C_3 положим, что $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2}$; $C_3 = 1$. В этом случае базис является ортонормированным:

$$\boldsymbol{e}_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^{\text{т}}; \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^{\text{т}}; \ \boldsymbol{e}_3 = (1, 0, 0)^{\text{т}}.$$

Составим ортогональную матрицу U перехода к новому базису из вектор-столбцов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и найдем обратную ей матрицу $U^{-1} = U^{\text{т}}$:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}; \ U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда переход от «старых» переменных (координат) x, y, z к «новым» переменным t_1, t_2, t_3 определяется соотношением (см. **1.5.2.3**):

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = U^{-1} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z); \ t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z); \ t_3 = x.$$

Проверка:

$$6t_3^2 + 4t_2^2 + 2t_1^2 = 6x^2 + 2(y - z)^2 + (y + z)^2 = 6x^2 + 3y^2 - 2yz + 3z^2.$$

То есть, $L(t_1, t_2, t_3) = L(x, y, z) = 6x^2 + 2(y - z)^2 + (y + z)^2$.

В данном случае, как и в **1.5.5.4**, преобразование базиса сводится к повороту исходной декартовой системы координат вокруг оси 0X на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

<u>Пример.</u> Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Матрица A этой формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0.$$

Отсюда следует, что собственные значения различны:

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 5.$$

Ортонормированные собственные векторы имеют вид:

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\text{т}}; \quad \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\text{т}}.$$

Тогда квадратичная форма примет следующий вид:

$$L(t_1, t_2) = 0 \bullet t_1^2 + 5t_2^2 = 5t_2^2,$$

где t_1, t_2 – некоторые новые переменные (координаты), определенные в «новом» базисе из собственных векторов.

Для рассматриваемого случая ранг исходной матрицы равен единице, поэтому в канонический вид квадратичной формы входит только одно слагаемое.

Составим ортогональную матрицу U перехода к новому базису из вектор-столбцов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и найдем обратную ей матрицу $U^{-1} = U^{\text{т}}$:

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix};\ U^{-1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Тогда переход от «старых» переменных (координат) x, y к «новым» переменным t_1, t_2 определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = U^{-1} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y);\ t_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y).$$

Нетрудно видеть, что $L(t_1, t_2) = L(x, y) = 5t_2^2 = (x + 2y)^2$, поскольку исходная квадратичная форма представляет собой квадрат суммы.

В данном случае преобразование базиса сводится к повороту исходной декартовой системы координат вокруг оси 0X на угол $\varphi \approx \frac{\pi}{6,67}$ ($\mathrm{tg}\, \varphi = 0,5$), см. **1.5.5.4**.

1.6.2.5. Второй метод приведения квадратичной формы к каноническому виду – метод Лагранжа – состоит в последовательном выделении полных квадратов, с прибавлением и вычитанием одинаковых дополнительных членов (при необходимости). В общем случае приведение формы к каноническому виду может содержать несколько этапов.

Пример: Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz - y^2.$$

Первые три слагаемых можно представить в виде двух слагаемых:

$$x^2 + 2xy + 2xz = x^2 + 2x(y + z).$$

В свою очередь, их можно рассматривать как «квадрат первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе». Здесь второе число есть $(y + z)$. Для выделения полного квадрата прибавим и отнимем квадрат второго числа. Тогда получим:

$$L(x, y, z) = x^2 + 2x(y + z) + (y + z)^2 - (y + z)^2 - y^2 = (x + y + z)^2 - (y + z)^2 - y^2.$$

То есть, исходная квадратичная форма приведена к каноническому виду:

$$L(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 - t_2^2 – t_3^2,$$

где $t_1 = (x + y + z)$; $t_2 = (y + z)$; $t_3 = y$.

Следует отметить, что аналогичным образом может быть приведена к каноническому виду и квадратичная форма (см. **1.6.2.4**):

$$L(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 - 2yz + 3z^2 = 6x^2 + 2y^2 + y^2 - 2yz - 2yz + 2yz + 2z^2 + z^2 =$$

$$= 6x^2 + 2(y^2 - 2yz + z^2) + (y^2 + 2yz + z^2) = 6x^2 + 2(y – z)^2 + (y + z)^2.$$

1.6.2.6. Если в исходном виде квадратичной формы или на каком-то этапе ее преобразования отсутствуют квадраты соответствующих величин, то можно использовать промежуточную замену переменной на основе очевидного тождества типа:

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

Так, например, квадратичная форма $L(x, y) = 8xy$ приводится к каноническому виду «в одно касание»:

$$L(x, y) = 8xy = 2t_1^2 - 2t_2^2,$$

где $t_1 = (x + y)$; $t_2 = (x - y)$.

1.6.2.7. Исходная квадратичная форма в различных базисах может иметь различный канонический вид. Однако существуют некоторые характеристики, не меняющиеся при переходе от одного базиса к другому.

Ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях; он равен количеству ненулевых собственных значений матрицы квадратичной формы (с учетом алгебраической кратности этих собственных значений), то есть, количеству ненулевых коэффициентов в любом каноническом виде. Соответственно, количество независимых переменных одинаково в представлении квадратичной формы.

Для любых двух канонических видов квадратичной формы всегда одинаково число положительных и число отрицательных коэффициентов (*закон инерции*).

1.6.3. Определенные квадратичные формы

1.6.3.1. Квадратичная форма называется *положительно определенной* (неотрицательно определенной), если $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ ($L \geq 0$) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю. Квадратичная форма называется *отрицательно определенной* (неположительно определенной), если $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ ($L \leq 0$) для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю. И, наконец, квадратичная форма называется *знакопеременной*, если $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример. Рассмотрим следующие квадратичные формы:

$$L_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$L_2(x, y, z) = x^2 + y^2;$$

$$L_3(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2;$$

$$L_4(x, y, z) = 2xy.$$

Этим формам соответствуют матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Форма $L_1(x, y, z)$ положительно определена, поскольку сумма квадратов всегда положительна (если хотя бы одна из переменных x, y, z отлична от нуля).

Форма $L_2(x, y, z)$ неотрицательно определена: она не принимает отрицательных значений, но $L_2(x, y, z) = 0$ при $x = y = 0$, $z \neq 0$.

Формы $L_3(x, y, z)$ и $L_4(x, y, z)$ знакопеременны, поскольку могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. В частности, $L_3(1, 0, 0) > 0$; $L_3(0, 1, 0) < 0$; $L_4(1, 1, z) > 0$; $L_4(1, -1, z) < 0$.

Формы $L_2(x, y, z)$ и $L_4(x, y, z)$ являются вырожденными, поскольку их матрицы A_2 и A_4 содержат нулевые строки.

1.6.3.2. Квадратичная форма является положительно (отрицательно) определенной, если все ее собственные значения положительны (отрицательны).

Квадратичная форма является знакопеременной, если существуют собственные значения различных знаков.

Квадратичная форма является вырожденной, если существуют нулевые собственные значения. Ясно, что вырожденная квадратичная форма не может быть положительно (отрицательно) определенной, но может быть неотрицательно (неположительно) определенной или же знакопеременной.

1.6.3.3. Во многих случаях «определенность» квадратичной формы (ее тип) можно определить, не прибегая к вычислению собственных значений. *Критерий Сильвестра*:

Для того, чтобы квадратичная форма n переменных была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры (см. **1.2.3.1**) были положительны. То есть, должны выполняться неравенства:

$$\Delta_1 = |\,a_{11}| = a_{11} > 0;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0;\ \ldots\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn)} \end{vmatrix} > 0.$$

Следствие 1.

Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров чередовались, начиная с «минуса». То есть, должны выполняться неравенства:

$$-\Delta_1 > 0;\ \Delta_2 > 0;\ -\Delta_3 > 0;\ \ldots,\ (-1)^n\Delta_n > 0.$$

Следствие 2.

Невырожденная квадратичная форма знакопеременна тогда, и только тогда, когда для матрицы квадратичной формы выполнено хотя бы одно из условий:

- один из главных миноров равен нулю;
- один из главных миноров четного порядка отрицателен;
- два главных минора нечетного порядка имеют разные знаки.

Следствие 3.

Если квадратичная форма положительно определена, то все диагональные элементы ее матрицы положительны.

Пример. Используя критерий Сильвестра, определить тип квадратичной формы (см. **1.6.2.4**):

$$L(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 - 2yz + 3z^2.$$

Имеем:

$$\Delta_1 = 6 > 0;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 > 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 48 > 0.$$

То есть, квадратичная форма является положительно определенной.

Пример. Используя критерий Сильвестра, определить тип квадратичной формы

$$L(x, y, z) = x^2 - 6xy + 2\,xz + y^2 - 2yz + 5z^2.$$

Матрица A этой формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим:

$$\Delta_1 = 1 > 0;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -36 > 0.$$

В данном случае квадратичная форма невырождена ($\Delta_3 \neq 0$), при этом главный минор второго (четного) порядка отрицателен ($\Delta_2 = -8 < 0$).

То есть, квадратичная форма является знакопеременной.

2. Аналитическая геометрия

2.1. Векторы в аналитической геометрии

2.1.1. Общие сведения

2.1.1.1. Прямая с выбранными на ней положительным направлением и единицей измерения (масштабом) называется *осью*.

Две (три) взаимно перпендикулярные оси 0x, 0y (0x, 0y, 0z), имеющие общее начало 0 и одинаковый масштаб образуют прямоугольную *декартову систему координат* на плоскости (в пространстве).

Ось 0x называется осью абсцисс, ось 0y – осью ординат, ось 0z – осью аппликат, точка 0 – началом координат.

2.1.1.2. Выберем две произвольные точки A и B с координатами (x_A, y_A, z_A) и (x_B, y_B, z_B) в некоторой декартовой системе координат и проведем через эти точки прямую линию. Отрезок этой линии с граничными точками A и B называется *направленным*, если указано, какая точка считается началом, а какая – концом отрезка. Этот отрезок называют также *вектором* (геометрическим вектором). Обозначения: $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Здесь точки A и B обозначают соответственно начало и конец вектора. Часто вектор обозначают одной латинской буквой, например, $\boldsymbol{a}$ (полужирным шрифтом). Начало вектора – точку $A = (x_A, y_A, z_A)$ - называют *точкой его приложения*.

Длины a_x, a_y, a_z вектора $\boldsymbol{a}$ в направлениях осей 0x, 0y, 0z определяются разностями соответствующих координат начала и конца вектора: $a_x = x_B - x_A$; $a_y = y_B - y_A$; $a_z = z_B - z_A$. Эти длины называют также координатами вектора – его проекциями на оси координат.

Единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ осей 0x, 0y, 0z образуют удобную систему базисных векторов. Тогда

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}.$$

Длина вектора $\boldsymbol{a}$, иначе называемая его *модулем*, определяется по теореме Пифагора:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (2.1.1)$$

Вектор называется *нулевым*, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления, а его длина равна нулю.

2.1.1.3. Косинусы углов α, β, γ, образованных вектором $\boldsymbol{a}$ с осями координат 0x, 0y, 0z называют *направляющими косинусами* и находят из соотношений:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|a|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}.$$

При этом имеет место важное соотношение:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

То есть, из трех углов α, β, γ лишь два являются независимыми.

2.1.1.4. В геометрии обычно рассматривают *свободные векторы*, для которых точка приложения может быть выбрана произвольно. То есть, свободные векторы можно перемещать (на плоскости или в пространстве) параллельно самим себе. Поэтому часто полагают, что точка приложения свободного вектора совпадает с началом координат.

Свободный вектор характеризуется модулем и направлением. Направление определяется углами ориентации относительно выбранной системы координат. Так, на плоскости направление можно задать в виде угла наклона к оси $0x$. Для характеристики направления вектора в пространстве необходимо задать два угла ориентации.

Углы ориентации (как и модуль) могут быть выражены через координаты вектора. То есть, свободный вектор $\boldsymbol{a}$ на плоскости (рис. 2.1.1) полностью характеризуется двумя числами a_x, a_y. В геометрии принято векторы записывать в виде вектор-строк, см. **1.1.1.2**. Тогда $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$, причем:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_y}{a_x}.$$

Свободный вектор $\boldsymbol{a}$ в пространстве (рис. 2.1.2) полностью характеризуется тремя числами $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_y}{a_x},\ \operatorname{tg}\psi = \frac{l}{a_z},\ \text{где } l = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

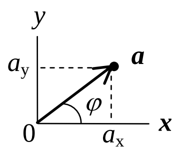


Рис. 2.1.1. Свободный вектор на плоскости

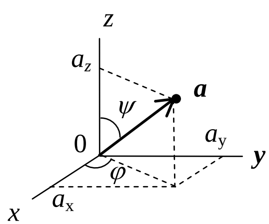


Рис. 2.1.2. Свободный вектор в пространстве

При этом углы φ, ψ отсчитываются от осей 0x и 0y соответственно. То есть, при одновременном изменении знака a_x, a_y, a_z углы φ, ψ изменятся на π - вектор $\boldsymbol{a}$ изменит свое направление на противоположное.

Замечание. В физике, помимо свободных векторов, рассматривают скользящие и связанные векторы. *Скользящий* вектор можно перемещать только вдоль прямой, соответствующей исходному положению вектора. *Связанные* векторы, как следует из названия, «привязаны» к точке их приложения. Соответственно, для полного описания таких векторов, помимо направления и ориентации, необходимы и дополнительные параметры.

2.1.1.5. Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Векторы называются *компланарными,* если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

2.1.1.6. Два (свободных) вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными. На рис. 2.1.3 изображены слева неравные, справа - равные векторы.

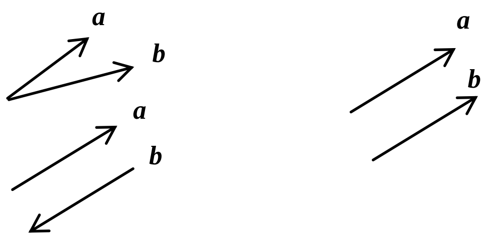


Рис. 2.1.3. Равные и неравные векторы

2.1.1.7. Линейные операции над векторами – сложение векторов и умножение вектора на число. Эти операции определяются аналогично операциям над векторами в алгебре (см. **1.5.1.1, 1.5.2.2**) и сводятся к соответствующим действиям над координатами векторов.

2.1.1.8. Умножение вектора на некоторое число k состоит в умножении каждой его координаты на это число. Как следует из соотношений, приведенных в **2.1.1.4**, направление вектора остается неизменным при умножении вектора на положительное число, и меняется на противоположное при умножении на отрицательное число. Модуль вектора умножается на $|k|$. То есть, умножение вектора на число приводит к изменению длины вектора в $|k|$ раз.

2.1.1.9. При сложении векторов складываются их координаты. Так, если вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты (a_x, a_y), а вектор $\boldsymbol{b}$ - координаты (b_x, b_y), то вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ будет иметь координаты ($a_x + b_x$, $a_y + b_y$).

Если вектор $\boldsymbol{a}$ умножить на k = -1, то полученный вектор $-\boldsymbol{a}$ будет противоположным для исходного вектора $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
Таким образом, для линейных операций над векторами в геометрии справедливы аксиомы, приведенные в **1.5.1.1**:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}; \ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}; \ \alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\,\boldsymbol{a} + \alpha\,\boldsymbol{b}; \ (\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{a}; \ 1\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

$$0\bullet\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}; \ (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}; \ (-\alpha)\,\boldsymbol{a} = -(\alpha\boldsymbol{a}).$$

2.1.1.10. Рассмотрим теперь чисто геометрическое определение сложения векторов. Суммой $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\boldsymbol{a}$ в конец вектора $\boldsymbol{b}$ при условии, что вектор $\boldsymbol{b}$ приложен к концу вектора $\boldsymbol{a}$. Правило сложения двух векторов, содержащееся в этом определении, обычно называют *правилом треугольника,* поскольку векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (при условии, что они неколлинеарны) и их сумма $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ образуют треугольник (рис. 2.1.4).

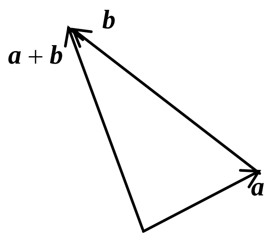


Рис. 2.1.4. Сложение двух векторов
по правилу треугольника

2.1.1.11. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ этих векторов представляет собой диагональ указанного параллелограмма, идущую из общего начала векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Это правило называют ***правилом параллелограмма,*** рис. 2.1.5.

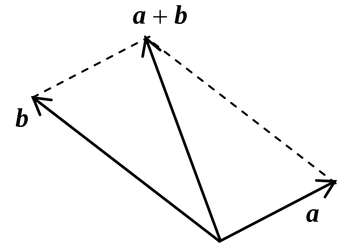


Рис. 2.1.5. Сложение двух векторов по правилу параллелограмма

Нетрудно видеть, что оба правила дают один и тот же результат. Однако при коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ понятие параллелограмма становится неопределенным, и в этом случае следует пользоваться определением, приведенным в **2.1.1.10**.

2.1.1.12. Геометрическое сложение векторов легко обобщается на случай нескольких слагаемых. С учетом того, что $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, сумма любого числа векторов может быть построена по следующему правилу. Если приложить вектор $\boldsymbol{a}_2$ к концу вектора $\boldsymbol{a}_1$, вектор $\boldsymbol{a}_3$ - к концу вектора $\boldsymbol{a}_2$, …, вектор $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ - к концу вектора $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}-1}$, то сумма $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \ldots + \boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\boldsymbol{a}_1$ в конец вектора $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$. Это правило иногда называют «правилом замыкания ломаной до многоугольника». На рис. 2.1.6. представлен случай $n = 4$.

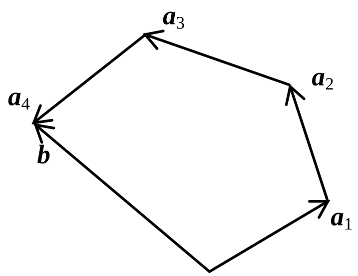


Рис. 2.1.6. Сложение нескольких векторов

2.1.1.13. *Разностью* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора $\boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{c}$, который в сумме с вектором $\boldsymbol{b}$ дает вектор $\boldsymbol{a}$. Для приведенных к общему началу векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ эта разность представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого вектора $\boldsymbol{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\boldsymbol{a}$, рис. 2.1.7. Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$.

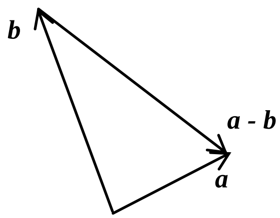


Рис. 2.1.7. Разность векторов

2.1.1.14. Если два вектора коллинеарны, то один из них можно представить в виде произведения другого вектора на действительное число. То есть, такие векторы линейно зависимы, см. **1.5.1.5**.

Если же два вектора неколлинеарны, то они линейно независимы. В частности, среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора (иначе эти векторы оказались бы линейно зависимыми).

2.1.1.15. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность (поскольку на плоскости не может быть больше двух независимых векторов).

Если три вектора некомпланарны, то они линейно независимы.

Среди трех некомпланарных векторов не может быть двух коллинеарных векторов и не может быть ни одного нулевого вектора (иначе эти векторы оказались бы линейно зависимыми).

Любые четыре вектора линейно зависимы (поскольку базис – декартова система координат – содержит лишь три линейно независимых вектора).

2.1.2. Скалярное произведение

2.1.2.1. Положим, что два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определены своими декартовыми координатами: $\boldsymbol{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$; $\boldsymbol{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$. Тогда их скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ определяется формулой (1.5.6):

$$\boldsymbol{ab} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z. \tag{2.1.2}$$

При этом справедливы соотношения (см. **1.5.2.5**):

$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$;

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc}$;

$\alpha(\boldsymbol{ab}) = (\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$;

$\boldsymbol{aa} \geq 0$, причем $\boldsymbol{aa} = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Число $\boldsymbol{aa} = (\boldsymbol{aa}) = \boldsymbol{a}^2$ называют скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$.

2.1.2.2. С геометрической точки зрения скалярное произведение определяется следующим образом. Пусть угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен φ. Тогда

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\bullet|\boldsymbol{b}| \cos \varphi. \qquad (2.1.3)$$

Необходимым и достаточным *условием ортогональности* (перпендикулярности) векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

С учетом (2.1.2) необходимое и достаточное условие ортогональности векторов может быть записано в виде:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (2.1.4)$$

Из (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.3) следует формула для определения угла φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \bullet \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (2.1.5)$$

2.1.2.3. Для единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ декартовой системы координат имеют место соотношения:

$$\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1; \ \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0.$$

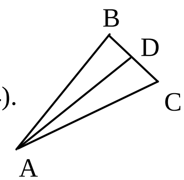
2.1.2.4. Рассмотрим проекцию $пр_a\, \boldsymbol{b}$ вектора $\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}$, точнее, на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{a}$. Нетрудно видеть, что $пр_a\, \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos \varphi$. Также определяется и проекция $пр_b\, \boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$: $пр_b\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi$. Тогда скалярное произведение может быть определено через проекции векторов:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\bullet пр_a\, \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\bullet пр_b\, \boldsymbol{a}. \qquad (2.1.6)$$

Координаты a_x, a_y, a_z вектора $\boldsymbol{a}$ (его проекции на оси координат $0x$, $0y$, 0z) определяются скалярными произведениями этого вектора на единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ соответствующих осей:

$$a_x = \boldsymbol{ai}; \ \ a_y = \boldsymbol{aj}; \ \ a_z = \boldsymbol{ak}.$$

Пример. Дан треугольник с вершинами в точках A(0, 0); B(3, 4); C(4, 3). Из точки A опущен перпендикуляр на противоположную сторону, основанием его является точка D. Найти: длины отрезков AB, BD и $\angle$ BAC = φ.



Рассмотрим векторы: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC} = (4 - 3, 3 - 4) = (1, -1)$; $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = (4 - 0, 3 - 0) = (4, 3)$; $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB} = (3 - 0, 4 - 0) = (3, 4)$. То есть, $a_x = 1$; $a_y = -1$; $b_x = 4$; $b_y = 3$; $c_x = 3$; $c_y = 4$.

Тогда имеем: AB = $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{\tilde{n}_x^2 + c_y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$;

$$\cos\varphi = \frac{c_x b_x + c_y b_y}{\sqrt{c_x^2+c_y^2}\bullet\sqrt{b_x^2+b_y^2}} = \frac{3\bullet4+4\bullet3)}{\sqrt{4^2+3^2}\bullet5} = \frac{24}{25} \approx 0{,}96;\ \varphi \approx 16°.$$

Отрезок BD представляет собой проекцию вектора $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$ на вектор $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$, то есть, BD = пр$_a$ $\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{ac}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_x\tilde{n}_x + a_y\tilde{n}_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} = \dfrac{1\bullet3+(-1)\bullet4}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Итак,

BD ≈ -0,71. Знак «минус» обусловлен выбором направления вектора $\boldsymbol{a}$ по отношению к направлению вектора $\boldsymbol{c}$. Если положить $\boldsymbol{a}'$ = $\overrightarrow{\tilde{N}B}$ = (-1, 1), то BD ≈ +0,71.

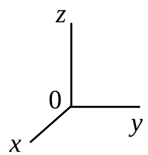
2.1.3. Векторное произведение

2.1.3.1. Три вектора называются упорядоченной тройкой (или просто тройкой), если указано, какой из этих векторов является первым, какой – вторым и какой – третьим. При записи векторы всегда располагают в порядке их следования.

Тройку некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называют *правой* (левой), если после приведения к общему началу вектор $\boldsymbol{c}$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, откуда кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Для трех ортогональных векторов это правило сводится к «*правилу штопора*»: если совершать кратчайший поворот от первого вектора ко второму, то для правой тройки третий вектор будет направлен в направлении движения штопора при его «закручивании» (по часовой стрелке). Соответственно, для левой тройки – третий вектор будет иметь противоположное направление.

Декартова система координат представляет собой правую тройку единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ по осям 0x, 0y, 0z. Отметим, что если на представленном рисунке поменять местами оси 0x, 0y, то новая тройка будет левой. Поэтому всегда следует оси координат выбирать так, чтобы тройка была правой (в соответствии с рисунком).



2.1.3.2. *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}] \equiv \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,удовлетворяющий следующим трем требованиям:

- $|\boldsymbol{c}| = |[\boldsymbol{ab}]| = |\boldsymbol{a}|\bullet|\boldsymbol{b}| \sin\varphi$,

где φ - угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

- вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
- вектор $\boldsymbol{c}$ направлен так, что тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ является правой.

2.1.3.3. Основные соотношения:

$$[\boldsymbol{aa}] = \boldsymbol{0};\ [\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}];\ [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)] = [\boldsymbol{ab}_1] + [\boldsymbol{ab}_2];\ [(\alpha\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}] = \alpha\,[\boldsymbol{ab}].$$

Видно, что векторное произведение некоммутативно – от перестановки мест сомножителей произведение меняет знак на противоположный.

2.1.3.4. Для единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ декартовой системы координат имею место соотношения:

$$[\boldsymbol{ii}] = [\boldsymbol{jj}] = [\boldsymbol{kk}] = \boldsymbol{0};\ [\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k};\ [\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i};\ [\boldsymbol{ki}] = \boldsymbol{j}.$$

2.1.3.5. Геометрические свойства векторного произведения.

Необходимым и достаточным *условием коллинеарности* двух векторов ($\varphi = 0$) является равенство нулю их векторного произведения. Напомним, (см. **2.1.2.2),** что необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Модуль векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$ равен площади параллелограмма, построенного на приведенных в общему началу векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Векторное произведение определяет направление нормали к плоскости, в которой лежат векторы-сомножители.

2.1.3.6. Если два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определены своими декартовыми координатами: $\boldsymbol{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$; $\boldsymbol{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$, то их векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ имеет вид:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}. \qquad (2.1.7)$$

Из (2.1.7) следует важный вывод: если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (2.1.8)$$

Действительно, если векторы коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю. С другой стороны, определитель в (2.1.7) равен нулю, если соответствующие элементы каких-либо двух его строк или столбцов равны или же пропорциональны друг другу см. **1.2.2.4**.

<u>Пример</u>. Дан треугольник (см. **2.1.2.4**) с вершинами в точках A(0, 0); B(3, 4); C(4, 3). Найти его площадь *S*.

Нетрудно видеть, что площадь этого треугольника есть половина площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = (4,\ 3)$; $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB} = (3,\ 4)$. То есть, эта площадь может быть определена по модулю векторного произведения [***bc***]. Однако векторы ***b*** и ***c*** заданы на плоскости (и характеризуются только двумя координатами). В то же время, векторное произведение всегда имеет «пространственный характер», поскольку вектор [***bc***] ортогонален сомножителям ***b***, ***c***. В связи с этим, при рассмотрении подобных вопросов обязательно вводится третья координата $z = 0$: $\boldsymbol{b} = (4,\ 3,\ 0)$; $\boldsymbol{c} = (3,\ 4,\ 0)$.

При этом, в соответствии с (2.1.7), векторное произведение [***bc***] примет вид:

$$[\boldsymbol{bc}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (4{\cdot}4 - 3{\cdot}3)\,\boldsymbol{k} = 7\,\boldsymbol{k}.$$

Как и следовало ожидать, вектор [***bc***] в данном случае перпендикулярен плоскости 0*xy* (и направлен по оси 0*z*).

Итак, $S = \dfrac{1}{2}\,|7\,\boldsymbol{k}| = 3{,}5.$

<u>Пример</u>. Через три точки O(0, 0, 0); A(1, 0, 1); B(1, 1, 0) проведена плоскость. Найти площадь *S* треугольника OAB и вектор, нормальный к проведенной плоскости.

Определим два вектора: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = (1,\ 0,\ 1)$; $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = (1,\ 1,\ 0)$ и найдем их векторное произведение:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (0{\cdot}0 - 1{\cdot}1)\boldsymbol{i} - (1{\cdot}0 - 1{\cdot}1)\boldsymbol{j} + (1{\cdot}1 - 1{\cdot}0)\,\boldsymbol{k} = -\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Таким образом, в качестве нормального вектора к проведенной плоскости можно взять вектор [***ab***] = (-1, 1, 1).

Площадь *S* треугольника OAB определяется модулем вектора [***ab***],

$$S = \frac{1}{2}\,|-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\,| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.1.4. Смешанное произведение

2.1.4.1. Пусть даны три произвольных вектора ***a***, ***b*** и ***c***. Если вектор ***a*** векторно умножить на вектор ***b***, а затем получившийся при этом вектор [***ab***] скалярно умножить на вектор ***c***, то в результате получается скаляр (число) [***ab***]***c***, называемый (называемое) *смешанным произведением* векторов ***a***, ***b*** и ***c***.

При этом имеет место равенство: [***ab***]***c*** = ***a***[***bc***]. То есть, несущественно, какие именно два вектора перемножаются векторно - первые два или последние два. Поэтому часто смешанное произведение записывают в виде ***abc***.

Для векторного произведения однократное изменение порядка множителей приводит к изменению знака результата. Поэтому для смешанного произведения имеют место соотношения:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\boldsymbol{bac} = -\boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{acb}.$$

То есть, знак результата меняется при нечетном числе перестановок.

2.1.4.2. Геометрический смысл смешанного произведения состоит в следующем.

Смешанное произведение ***abc*** равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах ***a***, ***b*** и ***c***, взятому со знаком плюс, если тройка ***abc*** – правая, и со знаком минус, если тройка ***abc*** – левая.

Отметим, что произведение двух векторов (векторное - его модуль) характеризует площадь, а произведение трех векторов (смешанное) характеризует объем. Это обстоятельство соответствует размерности указанных величин: площадь характеризуется двумя множителями, а объем – тремя множителями.

2.1.4.3. Имеет место утверждение. Необходимым и достаточным *условием компланарности* трех векторов является равенство нулю их смешенного произведения.

Если векторы ***abc*** компланарны, то, очевидно, объем соответствующего параллелепипеда равен нулю. В частности, векторы ***abc*** компланарны, если два из них коллинеарны.

Напомним, что для двух векторов равенство нулю их скалярного или векторного произведения есть необходимые и достаточные условие ортогональности или коллинеарности соответственно, см. **2.1.2.2**, **2.1.3.5**.

2.1.4.4. Положим, что три вектора ***a***, ***b*** и ***c*** определены своими декартовыми координатами: $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$; $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда из формул (2.1.2), (2.1.7) можно получить выражение для смешанного произведения ***abc***:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.1.9)$$

Нетрудно видеть, что при перестановке местами множителей следует переставить и соответствующие строки в определителе. При этом определитель изменит свой знак.

Далее, если векторы ***a***, ***b*** и ***c*** компланарны, то они не являются линейно независимыми. То есть, в этом случае одна из строк является линейной комбинацией других строк. Соответственно, в этом случае определитель равен нулю.

Пример. Дан тетраэдр с вершинами в точках O(0, 0, 0); A(1, 0, 1); B(1, 1, 0); C(1,0,0). Найти его объем.

Определим три вектора: ***a*** = $\overrightarrow{OA}$= (1, 0, 1); ***b*** = $\overrightarrow{OB}$ = (1, 1, 0); ***c*** = $\overrightarrow{OC}$ = (1, 0, 0).

Объем V_1 тетраэдра (пирамиды), как известно из «школьной» геометрии, определяется формулой: $V_1 = \frac{1}{3} S_1 H_1$, где S_1 – площадь основания, H_1 – высота пирамиды. Примем для определенности, что основанием является треугольник OBC. В свою очередь, площадь S_1 этого треугольника равна половине площади S_2 параллелограмма, построенного на векторах ***b*** и ***c***, $S_1 = S_2/2$. С другой стороны, объем V_2 параллелепипеда, построенного на векторах ***a***, ***b***, ***c***, определяется формулой: $V_2 = S_2H_2$, где H_2 – высота параллелепипеда. Однако в рассматриваемой задаче, очевидно, $H_1 = H_2$. То есть, $V_1 = \frac{1}{6} V_2$. Итак, определение объема тетраэдра сводится к определению объема параллелепипеда, то есть, к вычислению смешанного произведения ***abc***.

Таким образом,

$$V_1 = \frac{1}{6}\,\boldsymbol{abc} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(0\cdot 0 - 1\cdot 1) = -\frac{1}{6}.$$

Отрицательное значение объема говорит о том, что порядок векторов ***abc*** представляет собой левую тройку (а не правую, как это следовало бы, см. **2.1.4.2**). В этом легко убедиться, сделав соответствующий чертеж.

По общепринятому смыслу объемы тел являются положительными величинами.

Итак, окончательный ответ: объем тетраэдра $V_1 = \frac{1}{6}$.

2.2. Аналитическая геометрия на плоскости

2.2.1. Общие сведения

2.2.1.1. Аналитическая геометрия, в отличие от изучаемой в средней школе геометрии Евклида, широко использует методы линейной и векторной алгебры. По возможности различные геометрические объекты (линии, поверхности) задаются соответствующими уравнениями. Существенно, что чертежи в аналитической геометрии носят вспомогательный характер, и, в принципе, можно обойтись вообще без построения чертежей. В результате существенно упрощается решение многих задач.

Приведем в качестве примера вывод теоремы Пифагора методами аналитической геометрии (линейной алгебры).

Положим, что имеется два свободных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем эти векторы ортогональны ($\boldsymbol{ab} = 0$). Найдем сумму $\boldsymbol{c}$ этих векторов по правилу треугольника (см. **2.1.1.10**): $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Очевидно, построенный треугольник является прямоугольным, причем в нем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются катетами, а вектор $\boldsymbol{c}$ – гипотенузой. Возведем теперь векторное равенство $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ в квадрат (скалярный квадрат, см. **2.1.2.1**):

$$\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2.$$

Но, по условию, $\boldsymbol{ab} = 0$. Тогда $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$. То есть, другими словами, «квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов», что и составляет содержание теоремы Пифагора.

2.2.1.2. Предположим, что на некоторой плоскости задана декартова система координат и некоторая линия L. Рассмотрим уравнение, связывающее две переменные величины x и y:

$$F(x, y) = 0. \tag{2.2.1}$$

Уравнение (2.2.1) называется *уравнением линии* L (относительно заданной системы координат), если ему удовлетворяют координаты x, y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты x, y ни одной точки, не лежащей на линии L. То есть, линия L представляет собой геометрическое место точек (множество точек), координаты которых удовлетворяют уравнению (2.2.1).

<u>Замечание.</u> Далеко не всегда уравнение (2.2.1) определяет геометрический образ, который мы привыкли понимать под термином «линия». Так, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет лишь одну точку (0, 0), а уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ вообще не определяет никакого геометрического

образа. Поэтому в общем случае на функцию $F(x, y)$ накладываются некоторые ограничения.

В связи с аналитическим описанием линий возникают задачи двух типов. Задачи первого типа состоят в изучении свойств линии по заранее известному уравнению этой линии.

Задачи второго типа состоят в выводе уравнения линии, заранее заданной геометрически (например, линии, заданной как геометрическое место точек, удовлетворяющих определенным условиям).

2.2.1.3. Для аналитического представления линии L, помимо (2.2.1), часто удобно бывает, выражать переменные x, y при помощи третьей вспомогательной переменной (параметра) t:

$$x = u(t), y = v(t). \tag{2.2.2}$$

Соотношения (2.2.2) определяют *параметрическое представление линии*. При этом функции $u(t)$, $v(t)$ предполагают непрерывными по параметру t.

Отметим, что в различных задачах механики параметром t часто является время.

Пример. Точка $M(x, y)$ вращается по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω. Составить параметрические уравнения ее движения.

Положим, что центр декартовой системы координат совпадает с центром вращения. Введем угол φ между текущим положением радиус-вектора $\overline{0M}$ и осью $0x$, отсчитываемый против часовой стрелки, $\varphi = \omega t$. Тогда

$$x = R\cos \omega t; \ y = R\sin \omega t.$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения действительно описывают окружность, поскольку $x^2 + y^2 = R^2$.

2.2.1.4. Исходя из аналитического представления линий относительно декартовых координат, устанавливают следующую классификацию плоских линий.

Линия называется *алгебраической*, если она определяется уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

в котором функция $F(x, y)$ представляет собой алгебраический полином, то есть, сумму конечного числа слагаемых вида $a_{ik}x^iy^k$, где i, k – целые неотрицательные числа, a_{ik} – некоторые константы.

Алгебраическая линия называется *линией порядка n*, если $F(x, y)$ представляет собой алгебраический полином степени n.

Всякая неалгебраическая линия называется *трансцендентной*.

2.2.1.5. Во многих случаях уравнения линий, особенно уравнения трансцендентных линий, в декартовой системе координат являются достаточно сложными. В связи с этим, помимо декартовой системы координат в математике вообще, и в аналитической геометрии в частности, широко используются и другие, *криволинейные, системы координат.*

В декартовой системе координат линии x = const и y = const (их называют координатными линиями) представляют собой прямые линии. Поэтому декартову систему иногда называют прямолинейной. В различных криволинейных системах координат координатные линии могут быть окружностями, эллипсами, параболами и т.д. Существенно, что для таких систем координат можно определить лишь понятие локального базиса, поскольку в различных участках плоскости эти базисы могут иметь различный масштаб и различную ориентацию.

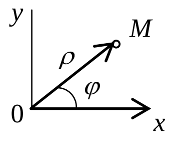
Если в любой точке плоскости касательные к координатным пересекаются под прямыми углами, то такие системы криволинейных координат называются ортогональными.

2.2.1.6. Одной из наиболее распространенных криволинейных систем координат на плоскости является полярная система координат.

Рассмотрим задачу, «естественным образом» приводящую к этой системе координат. Положим, что ось w вращается вокруг неподвижной точки O с некоторой угловой скоростью ω, и по этой вращающейся оси от точки O движется с постоянной скоростью v некоторая точка M. Необходимо описать движение точки в неподвижной системе координат.

Введем расстояние ρ точки M от центра вращения – точки O, $\rho = vt$, где t – текущее время. Введем теперь характеристику текущего положения оси w на плоскости, определив ее как угол между осью w и осью $0x$, отсчитываемый против часовой стрелки, $\varphi = \omega t$. Нетрудно видеть, что в этом случае $\rho = \dfrac{v}{\omega}\varphi = a\varphi$ $\left(a \equiv \dfrac{v}{\omega}\right)$. Уравнение $\rho = a\varphi$ описывает линию, называемую спиралью Архимеда. Система координат ρ, φ называется полярной системой координат.

В общем случае эта система определяется следующим образом. Выберем на плоскости некоторую точку O – полюс, и некоторый выходящий из нее луч $0x$ (с определенным масштабом на нем). *Полярными координатами* точки M называются два числа ρ и φ, первое из которых (полярный радиус



ρ) равно расстоянию точки M от полюса O, а второе (полярный угол φ) есть угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки луч $0x$, чтобы совместить его с лучом $0M$. Связь декартовых и полярных координат дается соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi; \; y = \rho \sin \varphi.$$

В частности, уравнение спирали Архимеда, имеющей весьма простой вид в полярной системе координат, в декартовой системе координат выглядит существенно сложнее:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi n) \qquad \text{при } x > 0,$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = a(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi n + \pi) \qquad \text{при } x < 0,$$

$$|y| = a(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y + 2\pi n) \qquad \text{при } x = 0.$$

2.2.1.7. Важную роль в аналитической геометрии играет задача о нахождении точек пересечения двух произвольных линий L_1 и L_2, определяемых уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$.

Поскольку точки пересечения, если они существуют, должны удовлетворять каждому из этих уравнений, то для нахождения таких точек следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$$

Каждое решение этой системы определяет одну из точек пересечения линий L_1 и L_2.

Если система не имеет решения, то линии L_1 и L_2 не пересекаются.

2.2.2. Уравнение прямой

2.2.2.1. В декартовой системе координат простейшей линией является прямая – алгебраическая линия первого порядка. Она описывается алгебраическим многочленом первой степени вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.2.1}$$

где A, B, C- произвольные константы, причем из констант A и B хотя бы одна отлична от нуля (иногда это условие записывают в виде: $A^2 + B^2 \neq 0$).

Уравнение (2.2.1) называется *общим уравнением прямой*.

Если $A = 0$, то $y = -C/B$, при этом любое значение x удовлетворяет (2.2.1). То есть, прямая параллельна оси $0x$. Аналогично, если $B = 0$, то $x = -C/A$. В этом случае прямая параллельна оси $0y$.

Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

2.2.2.2. Для определения координат какой-либо точки, лежащей на прямой, достаточно положить одну из переменных равной конкретному числу (например, нулю). Тогда из получившегося уравнения с одним неизвестным легко найти и вторую координату точки.

Пример. Прямая линия определяется уравнением: $x + 2y + 3 = 0$. Найти две точки, лежащие на этой прямой.

Положим, что для первой точки $x_1 = 0$. Тогда, подставляя это значение в исходное уравнение прямой, найдем и вторую координату первой точки: $y_1 = -3/2$.

Положим теперь, что $y_2 = 0$. Тогда $x_2 = -3$.
Итак, две точки $M_1(0, -3/2)$ и $M_2(-3, 0)$ лежат на рассматриваемой прямой.

Некоторая точка $M(x_0, y_0)$ лежит на прямой (2.2.1), если ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой.

Пример. Прямая линия определяется уравнением: $x + 2y + 3 = 0$.

Определить, лежит ли на этой прямой точка $M(1, -2)$.

Подставляем координаты точки M в уравнение прямой:

$$1 + 2(-2) + 3 = 0.$$

То есть, точка M лежит на рассматриваемой прямой.

Помимо общего уравнения прямой (2.2.1) во многих случаях используются иные, эквивалентные уравнения. Рассмотрим некоторые из них.

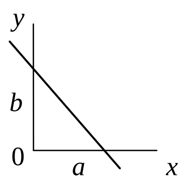
2.2.2.3. Если все коэффициенты A, B, C отличны от нуля, то (2.2.1) можно переписать в виде:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Введем обозначения $a \equiv -\frac{C}{A}$, $b \equiv -\frac{C}{B}$. Тогда получим *уравнение прямой «в отрезках»*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2.2.2)$$

Геометрический смысл чисел a и b ясен из приведенного рисунка: эти числа равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях $0x$, $0y$ соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат).



2.2.2.4. Положим, что точка $M(x_0, y_0)$ лежит на прямой (2.2.1). Тогда, подставив ее координаты в (2.2.1), получим:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Если теперь из (2.2.1) вычесть это уравнение, то придем к уравнению прямой, проходящей через заданную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2.2.3)$$

Нетрудно видеть, что свободный член в (2.2.1) $C = - A\,x_0 - By_0$.

2.2.2.5. *Направляющим вектором* прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой (в том числе, и лежащий на этой прямой).

Выберем на прямой, определяемой уравнением (2.2.3), некоторую точку $M(x, y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Очевидно, этот вектор лежит на прямой и является ее направляющим вектором. Тогда левая часть уравнения (2.2.3) может рассматриваться как аналог (2.1.2) - как выражение для скалярного произведения векторов ($\overline{M_0M} \cdot \overline{N}$), где $\overline{N} \equiv \boldsymbol{N} = (A, B)$. Но скалярное произведение равно нулю лишь для ортогональных векторов.

Отсюда ясен геометрический смысл коэффициентов A, B в уравнениях прямой (2.2.1), (2.2.3) - эти коэффициенты определяют вектор $\boldsymbol{N} = (A, B)$, перпендикулярный (ортогональный) этой прямой. Этот вектор называют также нормальным вектором.

Таким образом, (2.2.3) представляет собой *уравнение прямой с нормальным вектором* $\boldsymbol{N} = (A, B)$*, проходящей через точку* M.

Коэффициент C не влияет на «угловое положение» прямой: при его изменении прямая перемещается на плоскости параллельно самой себе.

2.2.2.6. Рассмотрим теперь прямую, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$, и ее некоторый направляющий вектор $\boldsymbol{q} = (l, m)$. Ясно, что этот вектор коллинеарен рассмотренному выше вектору $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Тогда, в соответствии с (2.1.8), имеет место соотношение:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}. \qquad (2.2.4)$$

Уравнение (2.2.4) называется *каноническим уравнением прямой*.

Отметим, что один из знаменателей n, m может оказаться равным нулю. Но в этом случае и соответствующий числитель равен нулю. Так, если $l = 0$, то $x = x_0$; если $m = 0$, то $y = y_0$. В первом случае прямая параллельна оси $0y$, во втором случае - оси $0x$.

Если сравнить (2.2.3) и (2.2.4), то нетрудно видеть, что в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\boldsymbol{q} = (l,\ m) = (1/A,\ -1/B)$. При этом, поскольку нормальный и направляющий векторы ортогональны, то $Al + Bm = 0$, или, что то же самое, $A/B = -\ m/l$.

Отметим, что любой вектор $\alpha\boldsymbol{q}$ (α - отличное от нуля число), является направляющим вектором. Поэтому $\boldsymbol{q}' = (l',\ m') = (-1/A,\ 1/B)$ также будет направляющим вектором.

2.2.2.7. Рассмотрим две точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ на прямой, определяемой уравнением (2.2.4). В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Тогда получим *уравнение прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ . \qquad (2.2.5)$$

2.2.2.8. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* имеет вид:

$$y = kx + b. \qquad (2.2.6)$$

Оно легко получается из любого из уравнений (2.2.1) – (2.2.5). Здесь k имеет геометрический смысл тангенса угла наклона прямой к оси $0x$, а b есть величина отрезка, который отсекает прямая на оси $0y$ (отрезок отсчитывается от начала координат).

Нетрудно видеть, что

$$k = -\frac{A}{B} = \frac{m}{l} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ , \qquad (2.2.7)$$

$$b = -\frac{C}{B} = y_1 - \frac{m}{l}x_1 = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}\ .$$

<u>Пример</u>. Дано уравнение прямой $x + 2y + 3 = 0$.

Найти нормальный и направляющий векторы этой прямой, ее угловой коэффициент. Записать для этой прямой: уравнение в отрезках; уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,\ -2)$ и через две точки $M_1(0,\ -3/2)$ и $M_2(-3,\ 0)$ (см. пример в **2.2.2.2**); каноническое уравнение и уравнение с угловым коэффициентом.

Для рассматриваемой прямой $A = 1$; $B = 2$; $C = 3$. Тогда нормальный вектор $\boldsymbol{N}$ имеет вид: $\boldsymbol{N} = (A,\ B) = (1,\ 2)$. Направляющий вектор $\boldsymbol{q}$ имеет вид: $\boldsymbol{q} = (l,\ m) = (1/A,\ -1/B) = (1,\ -1/2)$. С другой стороны, направляющим будет и вектор $\boldsymbol{q}' = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) = (-3,\ 3/2) = -3\boldsymbol{q}$.

Для углового коэффициента k (по любому из приведенных выше соотношений) имеем: $k = -1/2$.

Для составления уравнения прямой в отрезках преобразуем исходное уравнение, перенеся свободный член в правую часть и поделив на него обе части уравнения. При этом коэффициенты при переменных запишем в виде соответствующих дробей. Тогда получим:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-3/2} = 1.$$

Уравнение прямой с нормальным вектором $\boldsymbol{N} = (A, B) = (1, 2)$, проходящей через точку $M_0(1, -2)$, имеет вид:

$$1\cdot(x - 1) + 2(y - 2) = x - 1 + 2(y - 2) = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(0, -3/2)$ и $M_2(-3, 0)$, является также и каноническим уравнением. Оно имеет вид:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y-(-3/2)}{0-(-3/2)} \Rightarrow \frac{x}{-3} = \frac{y+3/2}{3/2}.$$

Наконец, уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}.$$

2.2.2.9. Если в каноническом уравнении прямой (2.2.4) положить

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \lambda,$$

где λ - некоторое ненулевое число (параметр), то соотношения

$$x = x_0 + l\lambda,$$
$$y = y_0 + m\lambda$$

представляют *параметрические уравнения прямой* (см. **2.1.2.3**).

Отметим, что в механике при описании движения тел параметр λ часто имеет смысл текущего времени.

2.2.3. Взаимное расположение точек и прямых

2.2.3.1. Рассмотрим две прямые, определяемые уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (2.2.8)$$

Их нормальные векторы имеют вид: $\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1)$; $\boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2)$. Эти же прямые можно характеризовать направляющими векторами $\boldsymbol{q}_1 = (l_1, m_1)$; $\boldsymbol{q}_2 = (l_2, m_2)$ и угловыми коэффициентами k_1; k_2.

Тогда условие параллельности (коллинеарности) этих прямых, в соответствии с (2.1.8), состоит в пропорциональности координат соответствующих векторов, либо в равенстве угловых коэффициентов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow A_1B_2 = A_2 B_1,$$
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow l_1m_2 = l_2 m_1, \qquad (2.2.9)$$
$$k_1 = k_2.$$

Коэффициенты C_1, C_2, свободные члены b_1, b_2, координаты точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на первой и второй прямой соответственно, определяют пространственное разнесение этих прямых. В частности, обе прямые совпадают, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$
$$b_1 = b_2, \qquad (2.2.10)$$
$$k_1 = k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

В этом случае, как нетрудно видеть, оба уравнения фактически сводятся к одному уравнению, то есть, описывают только одну прямую.

Пример. Даны две прямые:

$$x + 2y + 3 = 0,$$

$$Ax + By + C = 0.$$

Найти условия, при которых эти прямые параллельны.

Прямые будут параллельны, если $B = 2A$. При этом A может быть любым ненулевым числом. Тогда уравнение второй прямой можно записать в виде:

$$A(x + 2y) + C = 0.$$

В частности, если $C = 3A$, то обе прямые совпадают. При этом

$$A(x + 2y + 3) = 0 \Rightarrow (x + 2y + 3) = 0.$$

То есть, оба уравнения описывают только одну прямую.

2.2.3.2. Условие перпендикулярности (ортогональности) прямых (2.2.8) состоит в ортогональности нормальных и направляющих векторов, либо в определенном соотношении угловых коэффициентов:

Тогда, в соответствии с (2.1.4), получим:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{1}{A_2/B_2},$$
$$l_1l_2 + m_1m_2 = 0 \Rightarrow \frac{l_1}{m_1} = -\frac{1}{l_2/m_2}, \tag{2.2.11}$$
$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Последнее соотношение очевидным образом следует из предыдущих соотношений с учетом (2.2.7).

Пример. Даны две прямые:

$$x + 2y + 3 = 0,$$
$$Ax + By + C = 0.$$

Найти условия, при которых эти прямые перпендикулярны.

Прямые будут перпендикулярны, если $1 \cdot A + 2B = 0 \Rightarrow A = -2B$. При этом B может быть любым ненулевым числом. Тогда уравнение второй прямой можно записать в виде:

$$B(-2x + y) + C = 0.$$

2.2.3.3. Угол φ между прямыми (2.2.8) может быть определен по скалярному произведению нормальных векторов, в соответствии с формулой (2.1.5):

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \bullet \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.2.12}$$

Нетрудно видеть, что $\cos\varphi = 1$ для параллельных прямых ($A_1B_2 = A_2 B_1$), и $\cos\varphi = 0$ для перпендикулярных прямых ($A_1A_2 = -B_1B_2$).

С другой стороны, угол φ может быть вычислен по угловым коэффициентам прямых, если использовать формулу для тангенса разности углов $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ наклона первой и второй прямой к оси $0x$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \qquad (2.2.13)$$

Пример. Даны две прямые:

$$x + 2y + 3 = 0,$$
$$Ax + By + C = 0.$$

Найти условия, при которых угол между этими прямыми равен $\pi/4$.

В соотношении (2.2.13) положим: $A_1 = 1$, $A_2 = A$, $B_1 = 2$, $B_2 = B$. Тогда получим:

$$1 = \frac{1 \bullet B - A \bullet 2}{1 \bullet A + 2 \bullet B} \Rightarrow A + 2\,B = B - 2A.$$

Отсюда следует, что $B = -3A$, причем A может быть любым ненулевым числом. Тогда уравнение второй прямой можно записать в виде:

$$A(x - 3y) + C = 0.$$

2.2.3.4. Найдем общие точки прямых (2.2.8). Для этого уравнения обеих линий следует рассматривать как систему уравнений (см. **2.1.2.7**). Каждое решение этой системы определяет одну из точек пересечения соответствующих прямых. Если система не имеет решения, то прямые не пересекаются.

Пусть прямые параллельны (и не совпадают):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Тогда, по определению, общих точек они не имеют.

Пусть прямые совпадают:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Тогда они имеют бесконечное число общих точек.

И, наконец, пусть прямые не параллельны:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0.$$

Тогда прямые пересекаются, то есть, имеют одну общую точку.

Рассмотрим теперь алгебраический подход, основанный на анализе неоднородной системы уравнений (см. **1.3.3**), описывающих обе прямые:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y_1 = -C_1 \\ A_2 x + B_2 y_2 = -C_2 \end{cases} \qquad (2.2.14)$$

Для совместности этой системы необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы (см. **1.3.3.1**). Основная A и расширенная D матрицы (см. **1.3.1.3**) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad D = \left(\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \end{array}\right).$$

Нетрудно видеть, что для параллельных (и не совпадающих) прямых ранг основной матрицы равен единице, а ранг расширенной матрицы равен двум. То есть, система несовместна.

Если прямые совпадают, то ранг основной матрицы, как и ранг расширенной матрицы, равен единице. В этом случае система совместна, причем имеется бесконечное множество решений.

И, наконец, если прямые не параллельны, то ранг основной матрицы, как и ранг расширенной матрицы, равен двум – количеству переменных. В этом случае система имеет единственное решение.

То есть, алгебраический подход дает тот же самый результат, что и геометрический подход.

Точку $M_0(x_0, y_0)$ пересечения (не параллельных) прямых проще всего найти, используя правило Крамера (см. **1.3.3.3**):

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta_0}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta_0}, \tag{2.2.15}$$

где определители Δ_0, Δ_x, Δ_y имеют следующий вид:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример. Даны две прямые. Первая из них определяется уравнением

$$x + 2y + 3 = 0,$$

а вторая перпендикулярна первой и проходит через точку $M_1(5, 6)$. Найти точку M_0 пересечения этих прямых.

Прежде всего, запишем уравнение второй линии в виде (2.2.3). Нормальный вектор второй прямой (см. **2.2.3.2**), очевидно, есть вектор $N_2(2, -1)$. Тогда получим:

$$2(x - 5) - (y - 6) = 0 \Rightarrow 2x - y - 4 = 0.$$

Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y & = & -3 \\ 2x - y & = & 4 \end{cases}.$$

Для этой системы

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$

Тогда $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Соответственно, точка пересечения прямых есть точка $M_0(1, -2)$.

2.2.3.5. Найдем расстояние l между двумя параллельными прямыми

$$Ax + By + C_1 = 0,$$
$$Ax + By + C_2 = 0.$$

Выберем на первой прямой некоторую точку $M_1(x_1, y_1)$, а на второй прямой - точку $M_2(x_2, y_2)$. Запишем уравнение (2.2.5) прямой, проходящей через две точки M_1, M_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Поскольку расстояние измеряется «по перпендикуляру», то примем, что новая прямая перпендикулярна исходным прямым. Это значит, что направляющим вектором новой прямой является и нормальный вектор $N(A, B)$ исходных прямых. То есть,

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{A}{B} \Rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{A}{B}(y_2 - y_1).$$

Далее, нетрудно видеть, что имеют место соотношения:

$$-C_1 = Ax_1 + By_1,$$
$$-C_2 = Ax_2 + By_2,$$
$$C_1 - C_2 = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_2) \Rightarrow C_1 - C_2 = \frac{A^2 + B^2}{B}(y_2 - y_1).$$

Тогда для расстояния $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ получим:

$$l = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.2.16}$$

<u>Пример.</u> Найти расстояние l между двумя параллельными прямыми

$$x + 2y + 3 = 0,$$
$$x + 2y + 4 = 0.$$

Для рассматриваемых прямых $A = 1$; $B = 2$; $C_1 = 3$; $C_2 = 4$. Подставляя эти значения в (2.2.16), получим: $l = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2.2.3.6. Найдем расстояние l от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Для того, чтобы свести эту задачу к предыдущей, запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно исходной прямой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 \Rightarrow Ax + By + C_2 = 0,$$

где $C_2 = - Ax_0 - By_0$.

Таким образом, задача свелась к определению расстояния между двумя параллельными прямыми. Поэтому из (2.2.16) получим:

$$l = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (2.2.17)$$

2.2.3.7. Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Найдем условие, при котором все эти точки лежат на одной прямой.

Запишем уравнение прямой, проходящей через первые две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Для того, чтобы и третья точка лежала на той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению этой прямой. То есть, искомое условие имеет вид:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2.2.18)$$

2.2.4. Линии второго порядка

2.2.4.1. В декартовой системе координат (алгебраическая) линия второго порядка описывается алгебраическим многочленом второй степени:

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0 \qquad (2.2.19)$$

Уравнение (2.2.19) называется ***общим уравнением линии второго порядка.*** В нем группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется группой старших членов. Очевидно, она представляет собой квадратичную форму, см. **1.6.1.1**. При этом полагается, что хотя бы один из коэффициентов этой группы слагаемых отличен от нуля. Группа слагаемых $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ называется линейной частью**,** при этом коэффициент a_{33} обычно называется свободным членом.

Здесь индекс «1» соответствует переменной x^1, индекс «2» - переменной y^1, индекс «3» - любой переменной в нулевой степени - «единице». То есть, коэффициент a_{11} есть множитель при произведении $x^1 \cdot x^1$, коэффициент a_{12} – при произведении $x^1 \cdot y^1$, коэффициент a_{22} – при произведении $y^1 \cdot y^1$, коэффициент a_{13} – при произведении $x^1 \cdot 1$, коэффициент a_{23} – при произведении $y^1 \cdot 1$, коэффициент a_{33} – при произведении $1 \cdot 1$ – свободный член.

Поскольку $x \cdot y = y \cdot x$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x$, $y \cdot 1 = 1 \cdot y$, то $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. В связи с этим, в (2.2.19) фигурируют множители «2» перед соответствующими коэффициентами.

Уравнению (2.2.19) можно сопоставить некоторую симметричную матрицу A_3 (матрицу линии второго порядка):

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (2.2.20)$$

Матричная форма уравнения (2.2.19) имеет следующий вид:

$$(x \quad y \quad 1) \cdot A_3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

В данном случае вектор-строка и вектор-столбец, помимо переменных x и y, содержат и число – «единицу».

<u>Пример</u>. Дано уравнение линии второго порядка

$$x^2 + 2xy + 5y^2 + 4x + 6y + 7 = 0.$$

Записать матрицу, соответствующую этому уравнению.

Имеем: $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 2/2 = 1$, $a_{22} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 4/2 = 2$, $a_{23} = a_{32} = 6/2 = 3$, $a_{33} = 7$. Тогда матрица A_3 примет вид:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.2.4.2. При некоторых значениях коэффициентов уравнение (2.2.19) может быть представлено в виде произведения двух многочленов первой степени. Тогда оно описывает *распадающиеся линии* – прямые.
Например, уравнение $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0$ описывает две пересекающиеся в начале координат прямые $y = \pm x$.
2.2.4.3. Линия второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется при переходе от одной декартовой системы координат к другой. Однако коэффициенты уравнения линии меняются. Оказывается, что при некотором специальном выборе системы координат общее уравнение (2.2.19) может принять такой простой вид, что геометрическая характеристика линии не будет представлять затруднений.

Во многих случаях для определения типа линии второго порядка и выяснения ее геометрических свойств нет необходимости в определении системы координат, в которой уравнение этой линии имеет предельно простой (канонический) вид. Важно лишь получить этот вид, например, используя свойства матриц и квадратичных форм.

Имеет место следующее утверждение. Для общего уравнения лини второго порядка (2.2.19) являются инвариантами (не меняются при параллельном переносе и при повороте системы координат) следующие величины:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1 \bullet \lambda_2; \qquad (2.2.21)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Здесь λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы группы старших членов

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то есть, корни характеристического уравнения $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$.

Поскольку группа старших членов (представляющая собой квадратичную форму) при параллельном переносе не меняется, см. **2.2.5.2**, а поворот системы координат соответствует преобразованию базиса вида (1.5.2), то являются инвариантами величины I_1, I_2 (см. **1.6.1.4)**.

Инвариантность величины I_3 доказывается в курсе линейной алгебры [4].

В качестве пояснения (но не доказательства) можно привести следующие соображения. Линия второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется при переходе от одной декартовой системы координат к другой. В связи с этим, должна существовать некоторая инвариантная характеристика соответствующей матрицы A_3. По аналогии с линейными операторами, такой характеристикой может быть определитель I_3 этой матрицы.

Геометрические характеристики линий второго порядка, главным образом, определяются значениями инвариантов I_1, I_2, I_3.

Если $I_3 = 0$, линия второго порядка называется *вырожденной*.

Помимо этих инвариантов, важным для полной характеристики линии является следующий параметр:

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Линии второго порядка по числу центров симметрии можно классифицировать на три типа.

2.2.4.4. I тип – линии, имеющие единственный центр симметрии: $I_2 \neq 0$. При этом оба собственных значения $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. К этому типу относятся линии, уравнения которых можно привести к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + I_3/I_2 = 0. \qquad (2.2.22)$$

Линии такого типа называют *центральными*, поскольку при одновременном изменении знака обеих переменных вид (2.2.22) не меняется. Это значит, что все точки линии симметричны относительно центра - начала координат, то есть, центр линии является ее центом симметрии. Если $I_2 > 0$, то оба собственных значения λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки, и соответствующая квадратичная форма является знакоопределенной. Если $I_2 < 0$, то λ_1, λ_2 имеют различные знаки, и квадратичная форма является знакопеременной (см. **1.6.3.1**).

В зависимости от знаков коэффициентов уравнения линий имеют следующий канонический вид.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{- эллипс } (I_2 > 0,\ I_1 I_3 < 0); \qquad (2.2.23)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{- мнимый эллипс } (I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0);$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{- точка - вырожденная линия } (I_3 = 0);$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{- \textit{гипербола}} \ (I_2 < 0,\ I_3 \neq 0); \qquad (2.2.24)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{- пара пересекающихся прямых} \ (I_2 < 0,\ I_3 = 0).$$

2.2.4.5. II тип – линии, не имеющие центра симметрии: $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$, $-I_3/I_1 < 0$. При этом одно из собственных значений λ_1, λ_2, очевидно, равно нулю. Тогда соответствующая квадратичная форма является вырожденной (см. **1.6.3.2**). К этому типу относится единственная линия, уравнение которой можно привести к виду:

$$I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-I_3/I_1}\ x = 0. \qquad (2.2.25)$$

Оно имеет следующий канонический вид:

$$y^2 = 2px \quad \text{- \textit{парабола}}. \qquad (2.2.26)$$

2.2.4.6. III тип – линии, имеющие прямую центров симметрии: $I_2 = I_3 = 0$, $I_1 \neq 0$. При этом одно из собственных значений λ_1, λ_2 равно нулю. Соответствующая квадратичная форма является вырожденной. К этому типу относятся линии, уравнения которых можно привести к виду:

$$x^2 + K/I_1^2 = 0.$$

В зависимости от знаков коэффициентов уравнения линий имеют следующий канонический вид.

$x^2 = a^2$ - пара параллельных прямых ($K < 0$);
$x^2 = -a^2$ - пара мнимых параллельных прямых ($K_1 > 0$);
$x^2 = 0$ - пара совпадающих прямых ($K_1 = 0$).

Замечание. Возможна и другая классификация линий, «классификация по другому основанию» – по знаку инварианта I_2:

- линии эллиптического типа, если $I_2 > 0$;
- линии гиперболического типа, если $I_2 < 0$;
- линии параболического типа, если $I_2 = 0$.

2.2.4.7. Рассмотрим подробнее эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Он имеет две оси симметрии - оси 0x и 0y.

Пусть $a > b$ (рис. 2.2.1). Тогда отрезки $0a$ и $0b$ называются большой и малой полуосями соответственно. Точки $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$ называются *фокусами эллипса*. Центром эллипса (центром симметрии) является точка 0 - начало координат. Точки $(-a,\ 0)$, $(a,\ 0)$, $(0,\ -b)$, $(0,\ b)$ пересечения эллипса с осями координат называют *вершинами эллипса*.

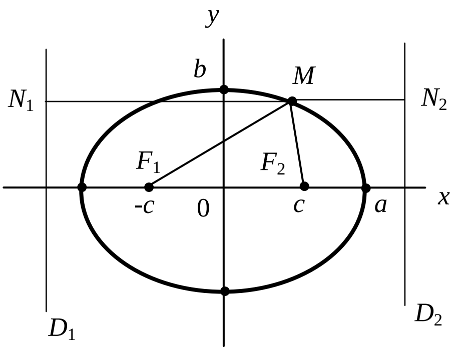


Рис. 2.2.1. Эллипс

Имеет место важное свойство (иногда его используют как определение эллипса): для любой точки M эллипса сумма *фокальных радиусов* - расстояний от этой точки до фокусов F_1 и F_2 - есть величина постоянная:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a.$$

Величина c (половина расстояния между фокусами) выражается через полуоси следующим образом:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Очевидно, для окружности как частного случая эллипса ($a = b$) оба фокуса совпадают и находятся в начале координат.

«Оптическое свойство» эллипса состоит в следующем: лучи света, исходящие под любым углом из одного фокуса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус. То есть, фокусы F_1 и F_2 есть оптически сопряженные точки, причем фокус F_2 есть действительное изображение фокуса F_1 (и наоборот).

Эксцентриситетом эллипса называется величина e, равная отношению «фокусного расстояния» c к большой полуоси a:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\ .$$

Нетрудно видеть, что $e < 1$ (при этом $e = 0$ лишь для окружности).

Фокальные радиусы $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ могут быть представлены в виде: $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$.

Директрисой эллипса D_1 (D_2), соответствующей фокусу F_1 (F_2) называется прямая, расположенная перпендикулярно большой полуоси на расстоянии $\frac{a}{e}$ от его центра. А поскольку $e < 1$, то директрисы расположены вне эллипса. Для окружности, очевидно, директрисы формально находятся на бесконечности.

Имеет место следующее свойство эллипса: отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса. То есть,

$$\left|\frac{MF_1}{MN_1}\right| = \left|\frac{MF_2}{MN_2}\right| = \text{e}.$$

2.2.4.8. Рассмотрим подробнее гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

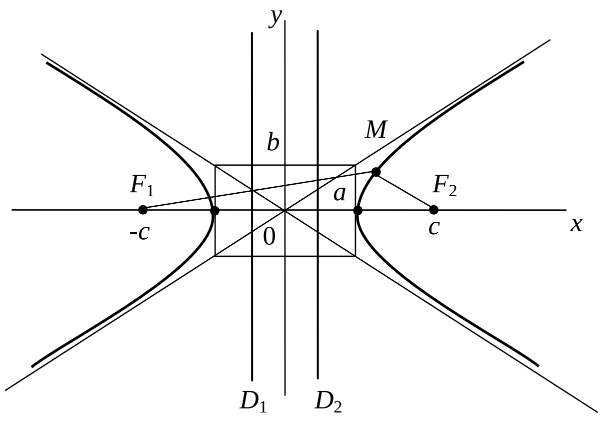


Рис. 2.2.2. Гипербола

Гипербола имеет две оси симметрии (оси $0x$, $0y$) и центр симметрии – начало координат. Одна из осей ($0x$) пересекается с гиперболой в двух точках ($-a$, 0) и (a, 0), называемых ***вершинами гиперболы***. Эта ось называется ***действительной осью гиперболы***. Вторая ось не имеет общих точек с гиперболой и поэтому называется *мнимой осью гиперболы.*

Отметим, что если правая часть уравнения равна минус единице, то график гиперболы будет повернут на 90° относительно графика, представленного на рис. 2.2.2.

Асимптотами гиперболы являются прямые, лежащие на диагоналях прямоугольника со сторонами $2a$, $2b$ (см. рис. 2.2.2).

Для «школьной» гиперболы вида $y = \dfrac{1}{x}$ (повернутой на 45° относительно графика, представленного на рис. 2.2.2), асимптотами являются оси координат.

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ называются *фокусами гиперболы.*

Имеет место важное свойство (иногда его используют как определение гиперболы): для любой точки M гиперболы абсолютная величина разности фокальных радиусов - расстояний от этой точки до фокусов F_1 и F_2 - есть величина постоянная:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Величина c (половина расстояния между фокусами) выражается через полуоси следующим образом:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

«Оптическое свойство» гиперболы состоит в следующем: лучи света, исходящие под любым углом из одного фокуса, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из второго фокуса. То есть, фокусы F_1 и F_2 есть оптически сопряженные точки, причем фокус F_2 есть мнимое изображение фокуса F_1 (и наоборот).

Эксцентриситетом гиперболы называется величина e, равная отношению «фокусного расстояния» c к действительной полуоси a:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\,.$$

Нетрудно видеть, что для гиперболы, в отличие от эллипса, $e > 1$.

Фокальные радиусы $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ могут быть представлены в виде:

$$r_1 = a + ex,\ r_2 = -a + ex.$$

Директрисой гиперболы D_1 (D_2), соответствующей фокусу F_1 (F_2) называется прямая, расположенная перпендикулярно действительной полуоси на расстоянии $\frac{a}{e}$ от его центра. А поскольку $e > 1$, то директрисы расположены между вершинами гиперболы.

Имеет место следующее свойство гиперболы, аналогичное соответствующему свойству эллипса: отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.

Гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

называются сопряженными. Их графики развернуты относительно друг друга на $\pi/2$.

2.2.4.9. Рассмотрим подробнее параболу $y^2 = 2px$.   .

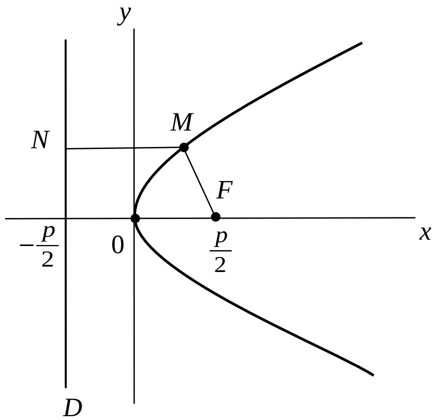


Рис. 2.2.3. Парабола

Эта не центральная линия имеет лишь одну ось симметрии – ось $0x$. *Вершина параболы* – точка пересечения с осью $0x$ - совпадает с началом координат.

Точка $F(p/2,\ 0)$ называется *фокусом параболы.* Иногда говорят, что парабола имеет два фокуса (аналогично эллипсу и гиперболе), но второй фокус «находится на бесконечности».

Директрисой параболы D, соответствующей фокусу F называется прямая, расположенная перпендикулярно оси параболы на расстоянии $p/2$ от ее центра.

Имеет место важное свойство (иногда его используют как определение параболы): для любой точки M параболы фокальный радиус – расстояние MF от этой точки до фокуса F – равняется расстоянию MN от этой точки до директрисы: $|MF| = |MN|$.

Тогда, по аналогии с эллипсом и гиперболой, можно ввести понятие ***эксцентриситета параболы*** е: $e = |MF|/|MN| = 1$.

Фокальный радиус $r = MF$ может быть представлен в виде:

$$r = p/2 + x.$$

«Оптическое свойство» параболы состоит в следующем: лучи света, исходящие под любым углом из фокуса, после зеркального отражения от параболы образуют пучок, параллельный оси параболы. Если же световой пучок, падающий на параболу, параллелен ее оси, то после отражения от параболы он соберется в фокусе. То есть, фокус F оптически сопряжен с бесконечностью.

2.2.4.10. Все линии второго порядка – эллипс, гипербола и парабола – представляют собой конические сечения (см. **2.3.6.3**). С точки зрения значения эксцентриситета парабола ($e = 1$) занимает промежуточное положение между эллипсом ($e < 1$) и гиперболой ($e > 1$).

Канонические уравнения всех трех линий могут быть приведены к виду:

$$y^2 = 2px - (1 - e^2)\,x^2 \qquad (p > 0), \tag{2.2.27}$$

где p – ***фокальный параметр*** – половина длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной фокальной оси, е – эксцентриситет линии. В этом случае вершина линии совпадает с началом координат.

При $e < 1$, уравнение описывает эллипс, при $e = 1$ уравнение описывает параболу, а при $e > 1$ гиперболу. Фокальный параметр p равен параметру параболы, а для эллипса и гиперболы он выражается через полуоси a и b следующим образом:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Нетрудно видеть, что $y^2 \cong 2px$, если $x << 1$. То есть, вблизи вершины как эллипс, так и гипербола приближенно представляют собой участки параболы. При этом для эллипса второе слагаемое в правой части (2.2.27) имеет отрицательный знак ($e < 1$), а для гиперболы – положительный ($e > 1$). Это значит, что «наружной» линией является гипербола, а «внутренней» - эллипс. Парабола занимает промежуточное положение.

2.2.5. Приведение уравнений линий второго порядка к каноническому виду

2.2.5.1. Линия второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется при переходе от одной декартовой системы координат к другой. Однако коэффициенты уравнения линии меняются. Оказывается, что при некотором специальном выборе системы координат общее уравнение (2.2.19) может принять такой простой вид, что геометрическая характеристика линии не будет представлять затруднений.

Переход от одной системы декартовых координат к другой в общем случае может быть осуществлен с помощью некоторого параллельного переноса системы координат и последующего поворота на некоторый угол. Эти операции имеют различный характер, поэтому рассмотрим их раздельно.

2.2.5.2. Положим, что система координат $0'x'y'$ получена параллельным переносом исходной системы $0xy$ в некотором направлении. При этом старые и новые координаты любой точки линии связаны соотношениями:

$$x = x' + x_0,\ \ y = y' + y_0, \qquad (2.2.28)$$

где x_0, y_0 – координаты нового начала координат 0' в старой системе $0xy$.

Подставляя выражения (2.2.28) для x, y в правую часть (2.2.19), мы получим уравнение линии в новой системе координат $0'x'y'$:

$$a_{11}\,(x')^2 + 2a_{12}\,x'y' + a_{22}\,(y')^2 + 2a'_{13}\,x' + 2a'_{23}\,y' + a'_{33} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{11}\,x_0 + a_{12}\,y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} &= a_{12}\,x_0 + a_{22}\,y_0 + a_{23}, \qquad (2.2.29) \\ a'_{33} &= a_{11}\,x_0^2 + 2a_{12}\,x_0y_0 + a_{22}\,y_0^2 + 2a_{13}\,x_0 + 2a_{23}\,y_0 + a_{33}. \end{aligned}$$

Таким образом, при параллельном переносе системы координат коэффициенты группы старших членов не меняются, а коэффициенты линейной части преобразуются по формулам (2.2.29). Видно, что группа старших членов дает вклад как в коэффициенты a'_{13}, a'_{23}, так и в свободный член a'_{33}. В то же время, группа членов, содержащих переменные в первой степени, дает вклад лишь в свободный член a'_{33}.

Можно попытаться найти такую точку (x_0, y_0), для которой коэффициенты a'_{13}, a'_{23} были бы равны нулю.

Для этого, очевидно, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_o + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \qquad (2.2.30)$$

Основной матрицей этой системы является матрица A_2 квадратичной формы – группы старших членов:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если ее определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение, причем соответствующая точка $0'(x_0, y_0)$ называется *центром линии второго порядка*. Сама линия в этом случае называется *центральной линией второго порядка*.

Если начало координат перенести в 0', то уравнение линии будет содержать лишь группу старших членов и свободный член:

$$a_{11}(x')^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}(y')^2 + a'_{33} = 0. \qquad (2.2.31)$$

Видно, что при одновременном изменении знака обеих переменных вид уравнения не меняется. Это значит, что все точки линии симметричны относительно центра 0', то есть, центр линии является ее центом симметрии.

2.2.5.3. Положим, что система координат $0'x'y'$ получена поворотом исходной системы $0xy$ на некоторый угол φ. При этом старые и новые координаты любой точки линии связаны соотношениями:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \qquad (2.2.32)$$

Подставляя выражения (2.2.32) для x, y в правую часть (2.2.19), мы получим уравнение линии в новой системе координат $0'x'y'$:

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Выражения для коэффициентов этого уравнения (приведенные, например, в [3]) являются весьма громоздкими. Но из них следует важный вывод: коэффициенты a_{11}', a'_{12}, a'_{22} группы старших членов выражаются лишь через угол поворота φ и коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}; коэффициенты a'_{13}, a'_{23} выражаются лишь через угол поворота φ и коэффициенты a_{13} a_{23}; свободный член не изменяется ($a'_{33} = a_{33}$). То есть, группа старших членов, линейные члены и свободный член при повороте системы координат преобразуются независимо друг от друга.

2.2.5.4. Для центральной линии (2.2.31) можно привести группу старших членов - квадратичную форму - к каноническому виду (см. **1.6.2.5**), поскольку поворот системы координат соответствует преобразованию базиса вида (1.5.2).

Тогда (2.2.31) может быть сведено к виду:

$$a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 + a''_{33} = 0, \qquad (2.2.33)$$

где a''_{11}, a''_{22}, $a''_{33} = a'_{33}$ – коэффициенты в новой системе координат; x'', y'' – переменные в новой системе координат. Часто коэффициентами a''_{11}, a''_{22} являются собственные значения λ_1, λ_1 группы старших членов, а переменные x'', y'' соответствуют собственным векторам этой группы.

Уравнение (2.2.33) называют каноническим уравнением центральной линии второго порядка.

Видно, что это уравнение существенно проще для анализа, чем общее уравнение (2.2.19).

Пример. Упростить уравнение линии

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y = 0.$$

Для этого уравнения $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = 0$.

Найдем основной определитель системы (2.2.30): $\Delta_0 = 1 \neq 0$. То есть, рассматриваемая система имеет единственное решение, которое может быть найдено, например, с помощью правила Крамера (см. **1.3.3.3**): $x_0 = -1$, $y_0 = 0$. При этом соответствующая линия является центральной. Тогда, перенеся начало координат в центр 0'(-1, 0), т.е. перейдя к новым переменным $x' = x - x_0 = x - 1$; $y' = y - y_0 = y$, получим:

$$(x')^2 + 2x'y' + 2(y')^2 - 1 = 0.$$

Привести к каноническому виду квадратичную форму – группу старших членов – можно различными путями, см. **1.6.2.4**. В данном случае наиболее простой представляется очевидная замена переменных (переход к некоторой новой системе координат): $x'' = x' + y'$; $y'' = y'$. Тогда получим:

$$(x'')^2 + (y'')^2 = (x + y - 1)^2 + y^2 = 1.$$

То есть, исходная линия представляет собой окружность единичного радиуса.

2.2.5.5. Рассмотрим теперь не центральную линию, для которой равен нулю определитель Δ_0 системы (2.2.30): $\Delta_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Нетрудно видеть, что этот определитель есть инвариант $I_2 = \lambda_1 \bullet \lambda_2$ (см. **1.6.1.4**) квадратичной формы, соответствующей группе старших членов, где λ_1, λ_2 – собственные значения этой формы. А поскольку для линии второго порядка хотя бы одно из собственных значений должно быть отлично от нуля, то для не центральной линии только одно из собственных значений отлично от нуля.

В этом случае упрощение уравнения обычно начинают с приведения квадратичной формы к каноническому виду - с поворота системы координат. При этом отличным от нуля оказывается только один из коэффициентов a'_{11}, a'_{22} при одной из новых переменных. Далее параллельным переносом системы координат преобразовывают линейную часть уравнения, по существу назначая эту линейную часть второй новой переменной.

С точки зрения алгебры упрощение уравнения не центральной линии второго порядка представляется весьма простым.

Прежде всего, отметим, что коэффициенты a_{11}, a_{22} не могут иметь разных знаков, поскольку $a_{11}a_{22} = a_{12}^2 \geq 0$. При этом без ограничения общности этот знак можно считать положительным – в противном случае можно изменить знак в общем уравнении (2.2.19).

Тогда группа старших членов представляет собой полный квадрат:

$$a_{11}\, x^2 + 2a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = (\sqrt{a_{11}}\; x + \sqrt{a_{22}}\; y)^2 = x''.$$

Оставшуюся линейную часть принимают в качестве новой переменой y''.

Таким образом, общее уравнение (2.2.19) можно представить в виде:

$$(y'')^2 + x'' = 0.$$

Обычно это уравнение записывают в виде:

$$a''_{22}(y'')^2 + 2a''_{13}\, x'' = 0, \tag{2.2.34}$$

где a''_{22}, a''_{13} – коэффициенты в новой системе координат; x'', y'' – переменные в новой системе координат.

Уравнение (2.2.34) называют каноническим уравнением нецентральной линии второго порядка.

<u>Пример.</u> Упростить уравнение линии

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0.$$

Нетрудно видеть, что группа старших членов представляет собой квадрат суммы. Тогда имеем:

$$(x + y)^2 + 2(x + y + 1) = (x'')^2 + 2y'' = 0.$$

То есть, $x'' = x + y$, $y'' = x + y + 1$. В этом случае исходная линия представляет собой параболу.

2.3. Аналитическая геометрия в пространстве

2.3.1. Общие сведения

2.3.1.1. Предположим, что в пространстве задана декартова система координат и некоторая поверхность S. Рассмотрим уравнение, связывающее три переменные величины x, y и z:

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (2.3.1)$$

Уравнение (2.3.1) называется *уравнением поверхности* S (относительно заданной системы координат), если ему удовлетворяют координаты x, y и z любой точки, лежащей на поверхности S, и не удовлетворяют координаты x, y и z ни одной точки, не лежащей на поверхности S. То есть, поверхность S представляет собой геометрическое место точек (множество точек), координаты которых удовлетворяют уравнению (2.3.1).

Замечание. Далеко не всегда уравнение (2.3.1) определяет геометрический образ, который мы привыкли понимать под термином «линия». Так, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ определяет лишь одну точку – начало координат, а уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ вообще не определяет никакого геометрического образа. Поэтому в общем случае на функцию $F(x, y, z)$ накладываются некоторые ограничения.

Если уравнение поверхности имеет вид $F(x, y) = 0$ (то есть, не содержит переменную z), то такая поверхность S называется *цилиндрической поверхностью* с образующей, параллельной оси $0z$. Она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси $0z$, целиком лежит на поверхности S.

2.3.1.2. По аналогии с классификацией плоских линий (см. **2.1.2.4**), устанавливают следующую классификацию поверхностей относительно декартовой системы координат.

Поверхность называется *алгебраической*, если она определяется уравнением (2.3.1), в котором функция $F(x, y, z)$ представляет собой алгебраический полином, то есть, сумму конечного числа слагаемых вида $a_{ijk}x^iy^jz^k$, где i, j, k – целые неотрицательные числа, a_{ijk} – некоторые константы.

Алгебраическая поверхность называется *поверхностью порядка* n, если $F(x, y, z)$ представляет собой алгебраический полином степени n. Всякая неалгебраическая поверхность называется *трансцендентной*.

2.3.1.3. *Линии в пространстве* рассматриваются как пересечение двух поверхностей, то есть, как геометрическое место точек, находящихся одновременно на двух поверхностях. Если уравнения $F_1(x, y, z) = 0$ и

$F_2(x, y, z) = 0$ есть уравнения двух поверхностей, пересечением которых является данная линия L, то координаты любой точки линии, если они существуют, должны удовлетворять каждому из этих уравнений. То есть, уравнениями (во множественном числе) линии является система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}. \tag{2.3.2}$$

2.3.1.4. Для аналитического представления линии L, помимо (2.3.2), часто удобно бывает, выражать переменные x, y, z при помощи вспомогательной переменной (параметра) t:

$$x = u(t),\ y = v(t),\ z = w(t). \tag{2.3.3}$$

Соотношения (2.3.3) определяют *параметрическое представление линии*. При этом функции $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ предполагают непрерывными по параметру t.

Отметим, что в различных задачах механики параметром t часто является время.

Пример. Точка $M(x, y, z)$ в плоскости, параллельной плоскости $0xy$, вращается по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω. При этом центр вращения перемещается по оси $0x$ с некоторой постоянной скоростью v_0. Составить параметрические уравнения траектории точки.

Введем в плоскости $0xy$ угол φ между текущим положением проекции радиус-вектора на эту плоскость $\overline{0M}$ и осью $0x$, отсчитываемый против часовой стрелки, $\varphi = \omega t$. Тогда

$$x = R\cos \omega t;\ \ y = R\sin \omega t,\ z = v_0 t.$$

Траекторией точки является спираль.

2.3.1.5. Для отыскания точек пересечения поверхностей или линий (поверхностей и линий) следует рассмотреть совместно уравнения, описывающие указанные геометрические объекты. Решение полученной системы уравнений и определяет координаты всех точек пересечения. Если полученная система не имеет решений, то точек пересечения нет.

2.3.2. Уравнение плоскости

2.3.2.1. В декартовой системе координат простейшей поверхностью является плоскость – алгебраическая поверхность первого порядка. Она описывается алгебраическим многочленом первой степени вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.3.4)$$

где A, B, C, D - произвольные константы, причем из констант A, B, C хотя бы одна отлична от нуля (иногда это условие записывают в виде: $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Уравнение (2.3.4) называется *общим уравнением плоскости*.

Если $A = 0$, то любое значение x удовлетворяет (2.3.4). То есть, плоскость параллельна оси $0x$. Аналогично, если $B = 0$, то плоскость параллельна оси $0y$, и если $C = 0$, то плоскость параллельна оси $0z$.

Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

Если $A = 0$, $B = 0$, то плоскость параллельна плоскости $0xy$; если $A = 0$, $C = 0$, то плоскость параллельна плоскости $0xz$, и так далее.

2.3.2.2. Для определения координат какой-либо точки, лежащей на плоскости, достаточно положить две из переменных равными конкретным числам (например, нулю). Тогда из получившегося уравнения с одним неизвестным легко найти и третью координату точки.

Пример. Плоскость определяется уравнением: $x + 2y + 3z + 4 = 0$. Найти две точки, лежащие на этой плоскости.

Положим, что для первой точки $x_1 = y_1 = 0$. Тогда, подставляя это значение в исходное уравнение плоскости, найдем и вторую координату первой точки: $z_1 = -4/3$.

Положим теперь, что $x_2 = z_2 = 0$. Тогда $y_2 = -2$.

Итак, две точки $M_1(0, 0, -4/3)$ и $M_2(0, -2, 0)$ лежат на рассматриваемой плоскости.

Некоторая точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на плоскости (2.3.4), если ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости.

Пример. Плоскость определяется уравнением: $x + 2y + 3z + 4 = 0$. Определить, лежит ли на этой плоскости точка $M(1, -2, -1)$.

Подставляем координаты точки M в уравнение плоскости:

$$1 + 2(-2) + 3(-1) + 4 \neq 0.$$

То есть, точка M не лежит на рассматриваемой плоскости.

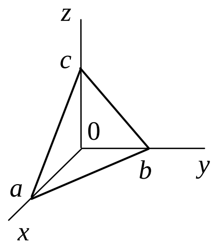
Помимо общего уравнения плоскости (2.3.4) во многих случаях используются иные, эквивалентные уравнения. Рассмотрим некоторые из них.

2.3.2.3. Если все коэффициенты A, B, C отличны от нуля, то (2.3.4) можно переписать в виде:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Введем обозначения $a \equiv -\frac{D}{A}$, $b \equiv -\frac{D}{B}$, $c \equiv -\frac{D}{C}$, Тогда получим *уравнение плоскости «в отрезках»*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2.3.5)$$



Геометрический смысл чисел a, b и c ясен из приведенного рисунка: эти числа равны величинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях $0x$, $0y$, $0z$ соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат).

2.3.2.4. Положим, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на плоскости (2.3.4). Тогда, подставив ее координаты в уравнение (2.3.4), получим:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Если теперь из (2.3.4) вычесть это уравнение, то придем к уравнению плоскости, проходящей через заданную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2.3.6)$$

Нетрудно видеть, что свободный член в (2.3.4) $D = - A x_0 - By_0 - Cz_0$.

Выберем на плоскости, определяемой уравнением (2.3.6), некоторую точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$. Очевидно, этот вектор лежит на плоскости. Тогда левая часть уравнения (2.3.6) может рассматриваться как аналог (2.1.2) - как выражение для скалярного произведения векторов ($\overline{M_0M} \cdot \overline{N}$), где $\overline{N} \equiv \boldsymbol{N} = (A, B, C)$. Но скалярное произведение равно нулю лишь для ортогональных векторов.

Отсюда ясен геометрический смысл коэффициентов A, B, C в уравнениях прямой (2.3.4), (2.3.6) - эти коэффициенты определяют вектор $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$, перпендикулярный (ортогональный) этой прямой. Этот вектор называют также нормальным вектором.

Таким образом, (2.3.6) представляет собой *уравнение плоскости с нормальным вектором* $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$*, проходящей через точку* M_0.

Коэффициент D не влияет на «угловое положение» плоскости: при его изменении плоскость перемещается в пространстве параллельно самой себе.

2.3.2.5. Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Через такие точки всегда можно «провести» плоскость, и притом только одну.

Отметим, что через две точки можно провести только одну прямую, но через прямую можно «провести» бесконечное число плоскостей.

Поскольку указанные точки не лежат на одной прямой, то векторы $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ не коллинеарны. Определим некоторый третий вектор для точек $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Точка M будет лежать в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 тогда, и только тогда, когда все три вектора компланарны (см. **2.1.4.3**), т.е. когда их смешанное произведение равно нулю. Тогда, в соответствии с 2.1.9, получим:

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3.7)$$

Уравнение (2.3.7) и является искомым уравнением.

Пример. Даны три точки $M_1(1, 0, 0)$; $M_2(0, 1, 0)$; $M_3(0, 0, 1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти точки, найти нормальный вектор этой плоскости. Записать уравнение плоскости в отрезках.

Подставляя в (2.3.7) координаты точек M_1, M_2, M_3 получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x\ \text{-}1)\cdot 1 - y(\text{-}1) + z\cdot 1 = x + y + z - 1 = 0.$$

Мы получили общее уравнение плоскости. Его же можно записать как уравнение для плоскости, проходящей, например, через точку $M_1(1, 0, 0)$:

$$(x - 1) + (y - 0) + (z - 0) = x - 1 + y + z = 0.$$

Нормальный вектор $\boldsymbol{N}$ имеет следующий вид: $\boldsymbol{N} = (1, 1, 1)$. И наконец, уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Rightarrow x + y + z = 1.$$

То есть, рассматриваемая плоскость отсекает отрезки единичной длины на каждой из осей координат.

2.3.3. Прямая в пространстве

2.3.3.1. Прямая в пространстве может задаваться как пересечение двух плоскостей - как система уравнений этих плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (2.3.8)$$

Если плоскости параллельны, то параллельны и их нормальные векторы $\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$; $\boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Тогда (см. **2.2.3.1**):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Если при этом отношение $\frac{D_1}{D_2}$ не равно указанным выше отношениям, то плоскости разнесены в пространстве. В этом случае система (2.3.8) несовместна и решений не имеет. Если же плоскости совпадают, то система (2.3.8) сводится лишь к одному уравнению. В этом случае имеется бесконечное множество решений – прямых, лежащих в рассматриваемой плоскости. И, наконец, лишь при неколлинеарности нормальных векторов плоскости пересекаются, причем линия их пресечения есть прямая линия.

Следует отметить, что совместная система двух уравнений с тремя неизвестными с точки зрения алгебры имеет бесконечное множество решений. И именно это множество решений представляет собой множество точек на прямой в пространстве.

2.3.3.2. Для прямой в пространстве можно составить канонические уравнения, аналогичные уравнению (2.2.4) для прямой на плоскости.

Положим, что прямая проходит через некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и при этом задан направляющий вектор прямой (см. **2.2.2.5**) $\boldsymbol{q} = (l, m, n)$. Рассмотрим лежащий на прямой вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Ясно, что этот вектор коллинеарен направляющему вектору $\boldsymbol{q}$. Тогда, в соответствии с (2.1.8), имеют место соотношения:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \qquad (2.3.9)$$

Уравнения (2.3.9) называется *канонческими уравнениями прямой в пространстве*.

Следует отметить, что (2.3.9) представляют собой два уравнения, а не одно, поэтому и говорят об уравнениях (во множественном числе). Точно так же, как для прямой на плоскости (см. **2.2.2.7, 2.2.2.9**), можно рассмотреть *уравнения прямой в пространстве, проходящей через две различные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и *параметрические уравнения прямой в пространстве*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.3.10}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l\lambda, \\ y &= y_0 + m\lambda, \\ z &= z_0 + n\lambda, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

где λ - некоторое ненулевое число (параметр).

Пример. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат симметрично координатным осям.

Выберем начало координат в качестве точки $M_0(0, 0, 0)$. Симметричность прямой означает, что координаты направляющего вектора равны друг другу, их можно положить равными единице. Тогда получим:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Принята именно такая запись уравнений прямых, с тем, чтобы отличить эти уравнения от алгебраически эквивалентной системы уравнений $x = y = z$.

Следует отметить, что в рассматриваемом случае легко определить направляющие косинусы прямой (см. **2.1.1.3**) - косинусы углов α, β, γ, образованных направляющим вектором с осями координат $0x$, $0y$, $0z$:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma \approx 55°.$$

2.3.3.3. Для перехода от задания прямой в виде пересечения двух не параллельных плоскостей (2.3.8) к каноническим уравнениям (2.3.9) необходимо найти какую-либо точку, лежащую на прямой, и направляющий вектор этой прямой.

Для первого следует задать произвольное значение какой-то одной координаты, например, положить $x = 0$. Тогда (2.3.8) перейдет в систему двух уравнений с двумя неизвестными. Эта система имеет единственное решение (поскольку плоскости пересекаются), которое и дает значения двух других координат точки, лежащей на прямой.

Для нахождения координат направляющего вектора $\boldsymbol{q}$ будем исходить из того, что он перпендикулярен каждому из нормальных векторов $\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$; $\boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Действительно, перпендикуляр к плоскости перпендикулярен каждой прямой, лежащей в этой плоскости, искомая же прямая лежит в обеих плоскостях одновременно. Таким образом, в качестве направляющего вектора может быть взято векторное произведение [$\boldsymbol{N}_1$ $\boldsymbol{N}_2$], которое перпендикулярно каждому из своих сомножителей (см. **2.1.3.2**).

Пример. Найти канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x+2y+3z+4=0 \\ 2x-2y+z+8=0 \end{cases}.$$

Найдем вначале точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на прямой. Положим, что $x_0 = 0$. Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} 2y+3z=-4 \\ -2y+z=-8 \end{cases}.$$

Отсюда найдем оставшиеся координаты: $y_0 = 5/2$; $z_0 = -3$. Таким образом, точка $M_0(0, 5/2, -3)$ лежит на прямой.

Найдем векторное произведение нормальных векторов $\boldsymbol{N}_1 = (1, 2, 3)$ и $\boldsymbol{N}_1 = (2, -2, 1)$ в соответствии с (2.1.7):

$$[\boldsymbol{N}_1\ \boldsymbol{N}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}.$$

Итак, направляющим является вектор $\boldsymbol{q} = (8, 5, -6)$. Тогда канонические уравнения прямой примут вид:

$$\frac{x-0}{8} = \frac{y-5/2}{5} = \frac{z+3}{-6}.$$

Соответственно, параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$x = 8\lambda,$$
$$y = 5/2 + 5\lambda,$$
$$z = -3 - 6\lambda.$$

2.3.4. Взаимное расположение плоскостей, прямых, прямой и плоскости

2.3.4.1. Рассмотрим две плоскости, определяемые уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 z + D_2 = 0. \qquad (2.3.12)$$

Их нормальные векторы имеют вид: $\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$; $\boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Тогда условие параллельности этих плоскостей, в соответствии с (2.1.8), состоит в пропорциональности координат соответствующих векторов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Если при этом отношение $\frac{D_1}{D_2}$ не равно указанным выше отношениям, то плоскости разнесены в пространстве (не совпадают).

Условие (ортогональности) плоскостей (2.3.12) состоит в ортогональности нормальных векторов. Тогда, в соответствии с (2.1.4), получим:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Пример. Даны две плоскости:

$$x + 2y + 3z + 4 = 0,$$
$$x + By + 3z + 5 = 0.$$

Найти значения B, соответствующие параллельности и перпендикулярности этих плоскостей.

Плоскости будут параллельны, если $B = 2$.

Плоскости будут перпендикулярны, если $1\cdot1 + 2B + 3\cdot3 = 0 \Rightarrow B = -5$. Тогда уравнение второй плоскости можно записать в виде:

$$x - 5y + 3z + 5 = 0.$$

2.3.4.2. Угол φ между плоскостями (2.3.12) может быть определен по скалярному произведению нормальных векторов (2.1.5):

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \bullet \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (2.3.13)$$

Нетрудно видеть, что $\cos\varphi = 1$ для параллельных плоскостей, и $\cos\varphi = 0$ для перпендикулярных плоскостей.

Пример. Даны две плоскости:

$$x + 2y + 3z + 4 = 0,$$
$$x + By + 3z + 5 = 0.$$

Найти условия, при которых угол между этими прямыми равен $\pi/4$.

Имеем: $A_1 = A_2 = 1$; $B_1 = 2$; $B_2 = B$; $C_1 = C_2 = 3$. Тогда из (2.3.13) получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\bullet 1 + \bullet 2B + 3\bullet 3}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\bullet\sqrt{1^2+B^2+3^2}} \Rightarrow 10 + 2\,B = \sqrt{70+7B^2}\;.$$

Решая полученное квадратное уравнение, найдем его корни: B_1 = -0,71; B_2 = 14,04. Один из корней соответствует углу $+\varphi$, а второй – углу $-\varphi$, то есть противоположным направлениям поворота второй плоскости относительно первой плоскости.

2.3.4.3. Расстояние l между двумя параллельными плоскостями

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$
$$Ax + By + Cz + D_2 = 0,$$

определяется аналогично расстоянию между двумя параллельными прямыми на плоскости, см. **2.2.3.5**:

$$l = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\;. \tag{2.3.14}$$

Расстояние l от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

определяется аналогично расстоянию от этой точки до прямой на плоскости, см. **2.2.3.6**:

$$l = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\;. \tag{2.3.15}$$

По этой же формуле может быть определено расстояние от плоскости до параллельной ей прямой, если рассматривать точку, лежащую на этой прямой.

2.3.4.4. Рассмотрим плоскость и прямую, определяемые уравнениями:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}\;.$$

Нормальный вектор плоскости имеет вид: $\boldsymbol{N} = (A,\ B,\ C)$, а направляющий вектор прямой - $\boldsymbol{q} = (l,\ m,\ n)$. Взаимное положение прямой и плоскости целиком определяется взаимным положением векторов $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{q}$.

Прямая и плоскость параллельны, если векторы ***N***, ***q*** ортогональны:

$$Al + Bm + Cn = 0. \qquad (2.3.16)$$

Прямая и плоскость перпендикулярны, если векторы ***N***, ***q*** параллельны, т.е.

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \qquad (2.3.17)$$

Угол между прямой и плоскостью может быть определен как угол φ между векторами ***N***, ***q***. Однако можно определять угол между прямой и плоскостью как угол ψ между прямой и ее проекцией на эту плоскость, $\psi = \pi/2 - \varphi$. Тогда (2.1.5) принимает вид:

$$\cos\varphi = \sin\psi = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \bullet \sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (2.3.18)$$

2.3.4.5. Рассмотрим две прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Взаимное положение этих прямых определяется взаимным положением их направляющих векторов $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$.

Две прямые параллельны, если параллельны

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (2.3.19)$$

Две прямые называют перпендикулярными, если ортогональны векторы $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \qquad (2.3.20)$$

Угол φ между прямыми может быть определен как угол между векторами $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2} \bullet \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (2.3.21)$$

Однако две прямые в пространстве могут быть не параллельными, но, тем не менее, лежать в разных плоскостях и, соответственно, не пересекаться. В этом случае говорят о скрещивающихся прямых.

Поэтому в (2.3.20), (2.3.21) неявно полагают, что векторы $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ приведены к одной плоскости. Для (2.3.19) векторы $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ также могут лежать в одной плоскости, поскольку через две прямые всегда можно провести плоскость, и притом только одну.

2.3.4.6. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости состоит в компланарности (см. **2.1.1.5**) трех векторов:

$$\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2,\ \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение этих векторов равнялось нулю (см. **2.1.4.3**):

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.3.22)$$

2.3.5. Поверхности второго порядка

2.3.5.1. В декартовой системе координат (алгебраическая) поверхность второго порядка описывается алгебраическим многочленом второй степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (2.3.23)$$

Уравнение (2.3.23) называется *общим уравнением поверхности второго порядка.* В нем группа слагаемых $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz$ называется группой старших членов. Очевидно, она представляет собой квадратичную форму, см. **1.6.1.1**. При этом полагается, что хотя бы один из коэффициентов этой группы отличен от нуля. Группа слагаемых $2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$ называется линейной частью**,** при этом коэффициент a_{44} обычно называется свободным членом.

Здесь индекс «1» соответствует переменной x^1, индекс «2» - переменной y^1, индекс «3» - переменной z^1, индекс «4» - любой переменной в нулевой степени, то есть, «единице». Таким образом, коэффициент a_{11} есть множитель при произведении $x^1{\cdot}x^1$, коэффициент a_{22} – при произведении $y^1{\cdot}y^1$, коэффициент a_{33} – при произведении $z^1{\cdot}z^1$, коэффициент a_{12} – при произведении $x^1 \cdot y^1$, коэффициент a_{13} – при произведении $x^1 \cdot z^1$, коэффициент a_{23} – при произведении $y^1 \cdot z^1$, коэффициент a_{14} – при произведении $x^1 \cdot 1$, коэффициент a_{24} – при произведении $y^1 \cdot 1$, a_{34} – при произведении $z^1 \cdot 1$, коэффициент a_{44} – при произведении $1 \cdot 1$ - свободный член.

Поскольку $x \cdot y = y \cdot x$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x$, $y \cdot 1 = 1 \cdot y$, и так далее, то $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{14} = a_{41}$, $a_{24} = a_{42}$, $a_{34} = a_{43}$. В связи с этим, в (2.3.23) фигурируют множители «2» перед соответствующими коэффициентами.

Уравнению (2.3.23) можно сопоставить некоторую симметричную матрицу A_4 (матрицу поверхности второго порядка):

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \tag{2.3.24}$$

Матричная форма уравнения (2.3.23) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \cdot A_4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

В данном случае вектор-строка и вектор-столбец, помимо переменных x, y и z содержат и число – «единицу».

2.3.5.2. При некоторых значениях коэффициентов уравнение (2.3.23) может быть представлено в виде произведения двух многочленов первой степени. Тогда оно описывает *распадающиеся поверхности* – плоскости. Например, уравнение $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0$ описывает две пересекающиеся в начале координат плоскости $y = \pm x$.

2.3.5.3. Поверхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется при переходе от одной декартовой системы координат к другой. Однако коэффициенты уравнения поверхности меняются. Оказывается, что при некотором специальном выборе системы координат общее уравнение (2.3.23) может принять такой простой вид, что геометрическая характеристика поверхности не будет представлять затруднений. Преобразование исходной системы координат (параллельный перенос и поворот) аналогично преобразованию для случая линий второго порядка, см. **2.2.5.**

Во многих случаях для определения типа поверхности второго порядка и выяснения ее геометрических свойств нет необходимости в определении системы координат, в которой уравнение этой поверхности имеет предельно простой (канонический) вид. Важно лишь получить этот вид, например, используя свойства матриц и квадратичных форм.

Имеет место следующее утверждение. Для общего уравнения поверхности второго порядка (2.3.23) являются инвариантами (не меняются при параллельном переносе и при повороте системы координат) следующие величины:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{31} & a_{11} \end{vmatrix} = \lambda_1 \bullet \lambda_2 + \lambda_2 \bullet \lambda_3 + \lambda_1 \bullet \lambda_3;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \bullet \lambda_2 \bullet \lambda_3; \qquad (2.3.25)$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные значения матрицы группы старших членов

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то есть, корни характеристического уравнения $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$.

Поскольку группа старших членов (представляющая собой квадратичную форму) при параллельном переносе не меняется, а поворот системы координат соответствует преобразованию базиса вида (1.5.2), то являются инвариантами величины I_1, I_2, I_3 (см. **1.6.1.4)**.

Инвариантность величины I_4 доказывается в курсе линейной алгебры [4].

В качестве пояснения (но не доказательства) можно привести следующие соображения. Поверхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект, не меняется при переходе от одной декартовой системы координат к другой. В связи с этим, должна существовать некоторая инвариантная характеристика соответствующей матрицы A_4. По аналогии с линейными операторами, такой характеристикой может быть определитель I_4 этой матрицы.

Геометрические характеристики поверхностей второго порядка в значительной степени определяются значениями инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4.

Если $I_4 = 0$, поверхность называется вырожденной.

Помимо этих инвариантов, важными для полной характеристики поверхности являются следующие величины:

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Поверхности второго порядка по числу центров симметрии можно классифицировать на пять типов.

2.3.5.4. I тип – центральные поверхности (имеющие единственный центр симметрии). В этом случае $I_3 \neq 0$ (т.е. λ_1, λ_2, $\lambda_3 \neq 0$). К этому типу относятся поверхности, уравнения которых можно привести к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + I_4/I_3 = 0.$$

В зависимости от знаков коэффициентов уравнения центральных поверхностей имеют следующий канонический вид.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид: $I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$, $I_4 < 0$;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ - мнимый эллипсоид: $I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$, $I_4 > 0$;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ - точка (вырожденная поверхность):

$I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$, $I_4 = 0$;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - конус второго порядка:

$I_2 \leq 0$ или $I_1 I_3 \leq 0$, $I_4 = 0$;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный гиперболоид:

$I_2 \leq 0$ или $I_1 I_3 \leq 0$, $I_4 > 0$;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - двуполостный гиперболоид:

$I_2 \leq 0$ или $I_1 I_3 \leq 0$, $I_4 < 0$.

2.3.5.5. II тип – поверхности, не имеющие центра симметрии, причем ранг матрицы группы старших членов равен двум: $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$, $I_4 \neq 0$. К этому типу относятся поверхности, уравнения которых можно привести к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-I_4/I_2}\, z = 0.$$

При этом I_2, I_4 имеют противоположные знаки, так что $-I_4/I_2 > 0$.

В зависимости от знаков коэффициентов уравнения поверхностей имеют следующий канонический вид.

$\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ - эллиптический параболоид: $I_4 < 0$;

$\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ - гиперболический параболоид: $I_4 > 0$.

2.3.5.6. III тип – поверхности, имеющие прямую центров симметрии. В этом случае $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$, $I_4 = 0$. То есть, все поверхности этого типа являются вырожденными. К этому типу относятся поверхности, уравнения которых можно привести к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + K_2/I_2 = 0.$$

В зависимости от знаков коэффициентов уравнения поверхностей имеют следующий канонический вид.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр: $I_2 > 0$, $I_1K_2 < 0$;

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ - мнимый цилиндр: $I_2 > 0$, $I_1K_2 > 0$;

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ - прямая (ось $0z$): $I_2 > 0$, $K_2 = 0$;

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ - гиперболический цилиндр: $I_2 < 0$, $K_2 \neq 0$;

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ - пара пересекающихся плоскостей: $I_2 < 0$, $K_2 = 0$.

2.3.5.7. IV тип – поверхности, не имеющие центра симметрии, а ранг матрицы группы старших членов равен единице: $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $-K_2/I_1 > 0$.

К этому типу относится единственная поверхность, уравнение которой можно привести к виду:

$$\lambda_1 y^2 \pm 2\sqrt{-K_2/I_1}\; x = 0.$$

Оно имеет следующий канонический вид:

$y^2 = 2px$ - параболический цилиндр: $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $K_2 \neq 0$.

2.3.5.8. V тип – поверхности, имеющие плоскость центров симметрии: ($I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $K_2 = 0$, $I_1 \neq 0$). К этому типу относятся поверхности, уравнения которых можно привести к виду:

$$\lambda_1 x^2 + K_1/I_1 = 0.$$

В зависимости от знаков коэффициентов уравнения поверхностей имеют следующий канонический вид.

$x^2 = a^2$ - пара параллельных плоскостей: $K_1 < 0$;
$x^2 = -a^2$ - пара мнимых параллельных плоскостей: $K_1 > 0$;
$x^2 = 0$ - пара совпадающих плоскостей: $K_1 = 0$.

С практической точки зрения наибольший интерес представляют невырожденные поверхности – эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, а также конусы и цилиндры.

Пример. Определить тип поверхности по ее уравнению:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + 2x + 2y + 2z + 1 = 0.$$

Имеем: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = a_{23} = a_{13} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 1$. Найдем теперь значения инвариантов: $I_1 = 3$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$.

То есть, рассматриваемая поверхность относится к пятому типу и представляет собой пару совпадающих плоскостей:

$$(x')^2 = 0.$$

Здесь x' – некоторая единственная переменная в новой системе координат, $x' = x + y + z + 1$ (последнее нетрудно видеть из непосредственной проверки).

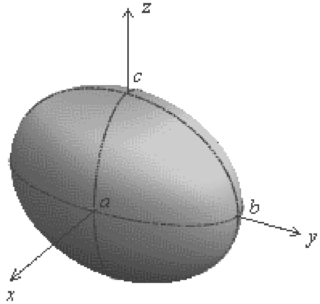
2.3.5.9. Рассмотрим подробнее *эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рисунки поверхностей вращения взяты из [5].

Числа a, b, c - полуоси эллипсоида. Если $a \neq b \neq c$, эллипсоид называется трехосным, если $a = b$ – эллипсоидом вращения (вокруг оси $0z$).

Если $a = b = c$, то эллипсоид переходит в сферу радиуса a.



Эллипсоид – единственная поверхность, ограниченная в пространстве, поскольку $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$.

Для исследования формы поверхностей широко используется *метод параллельных сечений*. Для определенности рассмотрим линию пересечения эллипсоида с плоскостью $z = h$. Подставляя это значение в уравнении эллипса, получим уравнение линии пересечения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Если положить $a^* = a\sqrt{1-h^2/c^2}$, $b^* = b\sqrt{1-h^2/c^2}$, то уравнение линии можно записать в виде:

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1.$$

Итак, линия пересечения представляет собой эллипс с полуосями a^* и b^*, зависящими от h. Если $h = 0$ (плоскость $0xy$), то $a^* = a$, $b^* = b$. С увеличением $|h|$ полуоси a^*, b^* пропорционально уменьшаются, и при $|h| = c$ обращаются в нуль – эллипс стягивается в точку. Условие $|h| > c$ соответствует мнимому эллипсу, не имеющему точек пересечения с плоскостью, параллельной плоскости $0xy$.

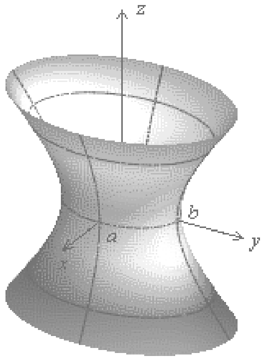
Аналогичный результат будет и при пересечении эллипсоида с плоскостями, параллельными плоскостям $0xz$, $0yz$.

Эллипсоид вращения может быть получен вращением эллипса вокруг одной из осей его симметрии. Так, если $a > b$, то при вращении эллипса вокруг оси $0x$ мы получим вытянутый эллипсоид, а при вращении вокруг оси $0y$ – сплюснутый эллипсоид.

2.3.5.10. Рассмотрим подробнее *однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Используя метод параллельных сечений, нетрудно видеть, что линии пересечения однополостного гиперболоида с плоскостями $z = h$ представляют собой эллипсы. Полуоси эллипсов минимальны в



плоскости $0xy$ и неограниченно возрастают с удалением от указанной плоскости.

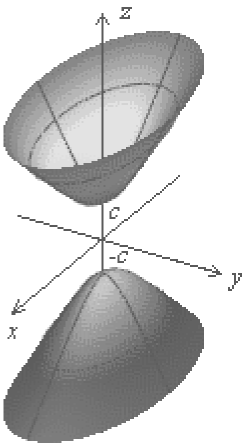
Эллис, образующийся в плоскости $0xy$, называется горловым эллипсом.

Таким образом, однополостный гиперболоид представляет собой поверхность, состоящую из одной полости и подобную трубе, неограниченно расширяющейся в обоих направлениях по оси $0z$.

Линии пересечения однополостного гиперболоида с плоскостями, параллельными плоскостям $0xz$, $0yz$, представляют собой гиперболы.

2.3.5.11. Рассмотрим подробнее *двуполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Линии пересечения двуполостного гиперболоида с плоскостями $z = h$ представляют собой эллипсы. Полуоси эллипсов равны нулю при $|h| = c$ и неограниченно возрастают с увеличением $|h|$.

Таким образом, двуполостный гиперболоид представляет собой поверхность, состоящую из двух пространственно разделенных полостей, неограниченно расширяющихся в обоих направлениях по оси $0z$.

Линии пересечения однополостного гиперболоида с плоскостями, параллельными плоскостям $0xz$, $0yz$, представляют собой гиперболы.

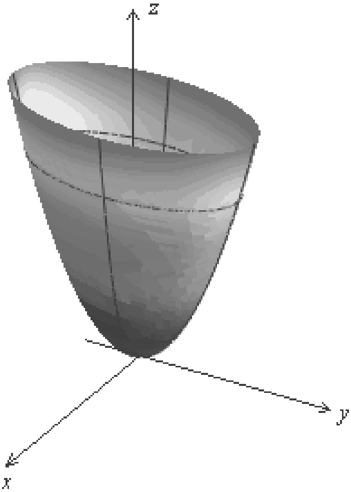
Гиперболоиды вращения могут быть получены вращением гиперболы вокруг одной из ее осей симметрии.

Если вращение производится вокруг фокальной (действительной) оси, то поверхность будет двуполостным гиперболоидом, если же вращение производится вокруг мнимой оси, поверхность буде однополостным гиперболоидом.

2.3.5.12. Рассмотрим подробнее *эллиптический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Ось $0z$ называется осью эллиптического параболоида.



Линии пересечения эллиптического параболоида с плоскостями $z = h$ представляют собой эллипсы. Полуоси эллипсов равны нулю при $h = 0$ и неограниченно возрастают с увеличением h. При этом эллиптический параболоид целиком расположен в полупространстве $z \geq 0$.

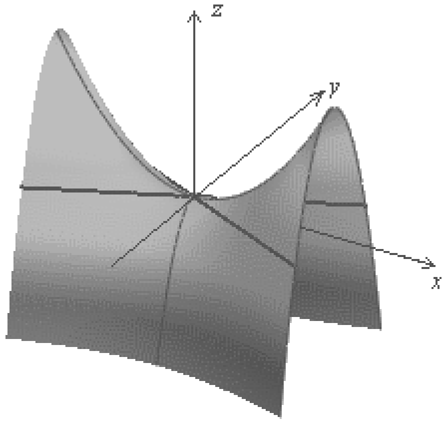
Линии пересечения эллиптического параболоида с плоскостями, параллельными плоскостям $0xz$, $0yz$, представляют собой параболы.

Эллиптический эллипсоид вращения может быть получен вращением параболы вокруг ее единственной оси симметрии.

2.3.5.13. Рассмотрим подробнее *гиперболический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Ось $0z$ называется осью гиперболического параболоида.



Линии пересечения гиперболического параболоида с плоскостями $z = h$ представляют собой гиперболы, причем для $h > 0$ и для $h < 0$ эти гиперболы являются сопряженными – они развернуты относительно друг друга на $\pi/2$, см. **2.2.4.8**.

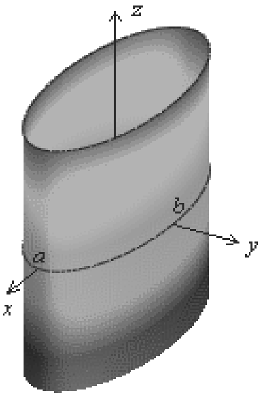
Плоскость $z = 0$ пересекает гиперболический параболоид по двум прямым $y = \pm \dfrac{q}{p}x$.

Линии пересечения гиперболического параболоида с плоскостями, параллельными плоскостям $0xz$, $0yz$, представляют собой параболы, ориентированные (в направлении оси $0z$) вершинами вниз и вверх соответственно.

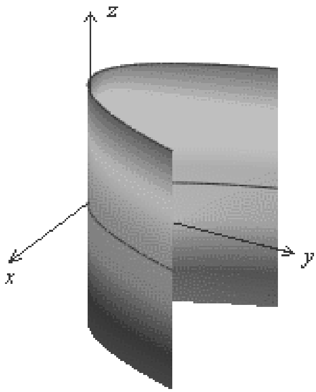
2.3.5.14. Рассмотрим подробнее *цилиндры второго порядка* – эллиптический, параболический, гиперболический:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ x^2 = 2py;\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

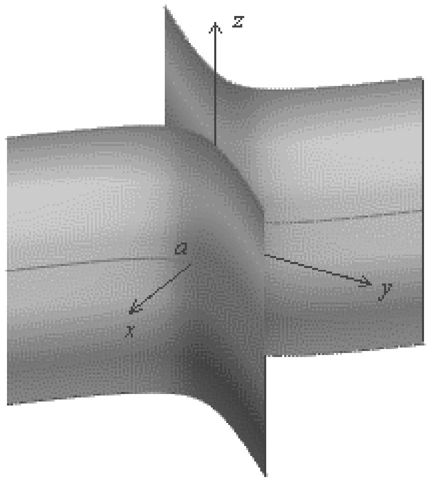
В уравнения всех трех поверхностей координата z не входит, то есть, она может быть произвольной. Это значит, что цилиндры состоят из прямых линий, параллельных оси 0z (см. **2.3.1.1**).



Эллиптический цилиндр



Параболический цилиндр



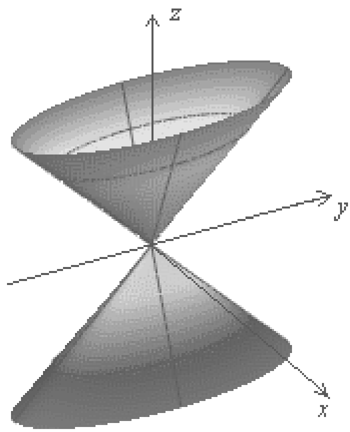
Гиперболический цилиндр

Другими словами, цилиндр есть поверхность, образованная движением прямой линии (образующей) параллельно самой себе и пересекающей заданную линию – направляющую. Если направляющая является линией второго порядка, то и поверхность является цилиндром второго порядка. Для рассматриваемых цилиндров направляющими являются эллипс, парабола и гипербола соответственно. Можно сказать и так: цилиндр есть поверхность, образованная перемещением заданной направляющей параллельно самой себе в направлении некоторой прямой - образующей.

Линии пересечения цилиндра с плоскостями $z = h$, очевидно, представляют собой направляющие. Линии пересечения цилиндра с плоскостями, параллельными плоскостям $0xz$, $0yz$, представляют собой прямую или пары прямых, в том числе, и совпадающих прямых.

2.3.5.15. Рассмотрим подробнее *конус второго порядка*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Конус есть поверхность, образованная движением прямой линии (образующей), проходящей через фиксированную точку – центр конуса (начало координат в рассматриваемом случае) и пересекающей заданную линию – направляющую. Если направляющая является линией второго порядка, то и поверхность является конусом второго порядка. При этом неявно полагается, что центр конуса и направляющая не лежат в одной плоскости. Из линий второго порядка только эллипс является ограниченной линией, поэтому конусы второго порядка являются эллиптическими конусами.

Линии пересечения конуса с плоскостями $z = h$ являются эллипсами (если $z = h$, то эллипс стягивается в точку). Если $a = b$, то конус называется круговым. В этом случае эллипсы переходят в окружности.

Линии пересечения цилиндра с плоскостями, параллельными плоскостям $0xz$, $0yz$, представляют собой гиперболы. Для плоскостей, проходящих через центр конуса, эти гиперболы вырождаются в пару пересекающихся прямых.

2.3.5.16. Кроме конуса и цилиндров, поверхностями второго порядка, состоящим из прямолинейных образующих, являются однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Это значит, что через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходят две различные прямые линии, целиком лежащие на данной поверхности. То есть, однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид покрыты двумя различными семействами прямолинейных образующих.

Это обстоятельство используется в архитектуре и строительстве. Так, радиобашня, построенная проекту В.Г. Шухова в 1930-е годы в Москве (район Шаболовки) выполнена в виде нескольких «поставленных друг на друга» участков однополостных гиперболоидов. При этом все направляющие – стальные балки – являются прямолинейными.

2.3.6. Сечения поверхностей второго порядка плоскостью

2.3.6.1. Пересечение двух поверхностей второго порядка в общем случае представляет собой линию четвертого порядка.

Действительно, рассмотрим линию пересечения двуполостного гиперболоида $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ и эллиптического параболоида $x^2 + y^2 = z$. Подставляя второе уравнение в первое, получим уравнение четвертой степени:

$$x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 1.$$

Пересечение поверхности второго порядка и плоскости в общем случае представляет собой линию второго порядка.

Далее, говоря о сечениях поверхностей второго порядка плоскостью, мы будем иметь ввиду соответствующую линию пересечения указанных поверхностей.

2.3.6.2. Сечение эллипсоида произвольной плоскостью есть эллипс, в том числе, и точка, и мнимый эллипс.

Сечения однополостного гиперболоида плоскостью – либо эллипс, либо парабола, либо гипербола, (в том числе, пара прямых – прямолинейных образующих).

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостью – либо эллипс (в том числе, точка и мнимый эллипс), либо парабола, либо гипербола.

Сечения гиперболического параболоида плоскостью – либо парабола, либо гипербола (в том числе, пара прямых – прямолинейных образующих).

Сечения цилиндров плоскостью – либо соответствующие направляющие, либо прямые или пары прямых.

Сечения конуса плоскостью – либо эллипсы, либо параболы, либо гиперболы.

2.3.6.3. Рассмотрим подробнее сечения кругового конуса плоскостью - их еще называют *коническими сечениями.*

Рассмотрим конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Поскольку конус является круговым, то $a = b$. Тогда уравнение конуса можно записать в виде:

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

где $\operatorname{tg} \varphi = a/c$, φ - угол наклона образующей конуса к оси конуса $0z$.

Пусть плоскость задана общим уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поскольку конус является круговым (симметричным относительно оси $0z$), то без ограничения общности можно считать, что $A = B$.

Уравнение плоскости можно записать в виде:

$$x + y + (C/A)z + D/A = 0.$$

Но $\sqrt{2}\,(A/C) = \operatorname{tg} \gamma$, где γ - угол между осью $0z$ и нормальным вектором плоскости (A, A, C). Если ввести угол наклона $\psi = \pi/2 - \gamma$ (угол между осью $0z$ и рассматриваемой плоскостью – угол между осью $0z$ и ее проекцией на плоскость), то получим:

$$x + y + \sqrt{2}\, z \operatorname{tg} \psi + D/A = 0.$$

Выразив z из этого уравнения плоскости и подставив это выражение в уравнение конуса, получим:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

где $a_{11} = a_{22} = 1 - \varepsilon^2$; $a_{12} = -\varepsilon^2$; $a_{13} = a_{23} = -\varepsilon^2 D/A$; $a_{33} = -\varepsilon^2 D^2/A^2$; $\varepsilon^2 \equiv \dfrac{tg^2\varphi}{2tg^2\psi}$.

Найдем, в соответствии с (2.2.21), значения инвариантов I_1, I_2, I_3:

$$I_1 = 2(1 - \varepsilon^2) = 2 - \frac{tg^2\varphi}{tg^2\psi};$$

$$I_2 = 1 - 2\varepsilon^2 = 1 - \frac{tg^2\varphi}{tg^2\psi};$$

$$I_3 = -\varepsilon^2 D^2/A^2 = -\frac{tg^2\varphi}{2tg^2\psi} \cdot \frac{D^2}{A^2}.$$

Собственные значения группы старших членов имеют вид:

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1 - \frac{tg^2\varphi}{tg^2\psi}.$$

Видно, что знак инварианта I_2 определяется углом ψ наклона плоскости к оси $0z$ и углом φ наклона образующей конуса к той же оси.

Если $\psi > \varphi$, то $I_2 > 0$. В этом случае линия представляет собой эллипс. В частности, если плоскость проходит через начало координат, т.е. $D = 0$ ($I_3 = 0$), то эллипс вырождается в точку.

Если $\psi < \varphi$, то $I_2 < 0$. В этом случае линия представляет собой гиперболу. В частности, если $D = 0$ ($I_3 = 0$), то гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых.

Если $\psi = \varphi$, то $I_2 = 0$. В этом случае линия представляет собой параболу. В частности, если $D = 0$ ($I_3 = 0$), то парабола вырождается в прямую (пару совпадающих прямых), проходящую через начало координат.

Уравнения линий нетрудно записать, используя соотношения, приведенные в **2.2.4.4, 2.2.4.5, 2.2.4.6**.

Таким образом, сечение кругового конуса плоскостью позволяет получить все «настоящие» линии второго порядка – эллипс, параболу, гиперболу.

Отметим, что о конических сечениях знали еще древние греки.

Предметный указатель

Литература

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 780 с.
2. Воднев В.Т., Наумович А.ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. – Минск: «Вышэйшая школа», 1988. – 269 с.
3. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 232 с.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 296 с.
5. Киселёв В. Ю., Пяртли А. С, Калугина Т. Ф. Высшая математика. Первый семестр. Интерактивный компьютерный учебник. - Сайт Ивановского государственного энергетического университета - http://www.ispu.ru/library/math/sem1/index.html
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 720 с.
7. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 620 с.
8. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2002. – 352 с.
9. Математический энциклопедический словарь. / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. - М.: Советская энциклопедия, 1988. - 847 с.
10. Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. - М.: ИНФРА-М, 2003. – 575 с

Заказ 2543 Тираж 100 Формат $60\times84^{1}/_{16}$

Отпечатано в МП «Обнинская типография»
249035 Калужская обл., г. Обнинск, ул. Комарова, 6