Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Иркутский государственный технический университет

Заочно-вечерний факультет

Кафедра общеобразовательных дисциплин

С.П. Потемкина

МАТЕМАТИКА

Линейная алгебра

Методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочного обучения

Иркутск 2009

Рецензенты: Горбачев О.А., к.ф.-м.н., профессор, директор ИФ МГТУ, Д.В. Хазанов, к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой ЕНД ИФ МГТУ.

С.П.Потемкина. **Математика. Линейная алгебра**. Методическое пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2009. – 54 с.

Методическое пособие выполнено в соответствии с государственным образовательным стандартом и представляет собой краткий курс лекций по разделу математики «Линейная алгебра». Содержит большое число примеров, задания для самостоятельной работы и вопросы для самоподготовки.

Предназначены для самостоятельного изучения дисциплины студентами заочной формы обучения всех специальностей.

Библ. 7 назв. Рис. 12.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)

1.1. Определитель и его свойства

Определение. Определителем n-го порядка называется функция от n^2 аргументов, записанная в виде квадратной таблицы. Таблица имеет n строк и n столбцов.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Аргументы, заполняющие таблицу, называются элементами определителя: a_{ij} – элемент, расположенный в i - той строке и j – том столбце определителя. Определитель обозначают: Δ; D; det A; |A|.

1.1.1. Свойства определителей.

Строки и столбцы обладают одинаковыми свойствами. Свойства, излагаемые для строк, распространяются и на столбцы.

1.Определитель не меняется при замене строк соответствующими его столбцами и столбцов строками (при транспонировании). Например, для определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.1)$$

2. Общий множитель элементов какой-нибудь строки может быть вынесен за знак определителя.

3. Если элементы одной строки соответственно равны элементам другой строки, то определитель равен нулю.

4. При перестановке двух строк определитель меняет знак на противоположный.

5. Определитель не меняется при линейном преобразовании строк (элементы строки слаживаются с элементами другой строки, умноженные на одно и то же число $k \neq 0$). Так для (1.1):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.1.2. Минор, алгебраическое дополнение

Определение. Минором элемента a_{ij} определителя n–го порядка называется определитель n–1 порядка, который получается при вычёркивании *i*-той строки и *j*-того столбца в исходном определителе.

Если минор $M(a_{ij})$ умножить на $(-1)^{i+j}$, то получим алгебраическое дополнение $A(a_{ij})$ или A_{ij}: $A(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot M(a_{ij})$. Так для определителя $|A|$

$$M(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad ; \qquad A(a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

С помощью алгебраических дополнений можно определитель разложить по какой-либо строке.

Теорема Лапласа. Определитель n–го равен сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

То есть определитель заменяется суммой элементов строки умноженных на их алгебраические дополнения. Разложение определителя D из (1.1) по второй строке имеет вид:

$$D = -a_{21}\cdot M(a_{21}) + a_{22}\cdot M(a_{22}) - a_{23}\cdot M(a_{23}) \quad \text{или}$$

$$D = a_{21}\cdot A(a_{21}) + a_{22}\cdot A(a_{22}) + a_{23}\cdot A(a_{23}) \qquad (1.2)$$

При разложении определителя по строке (столбцу) его порядок уменьшается на единицу. Многократным повторением процедуры разложения определителей по строке, можно определитель n–го порядка представить суммой определителей второго порядка.

1.1.3. Вычисление определителей

Определители второго порядка вычисляются по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определители третьего порядка вычисляются по формуле (1.2).

Рекомендуется перед разложением определителей по строке провести линейные преобразования определителя с целью получения максимального количества нулей в какой-либо строке или столбце. Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 5 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 5 & -0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -310$$

В этом примере вначале вынесен множитель 2 из третьей строки, затем второй столбец сложен с третьим, первый со вторым. После этого определитель разложен по второй строке.

Определитель можно вычислить и на компьютере: в программе Excell с помощью команды "=МОПРЕД()".

1.2. Использование определителя для решения СЛУ (метод Крамера)

Пусть дана система из трёх линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Решением системы уравнений (1.3) называется набор чисел x_0, y_0, z_0, которые при подстановке в данную систему дают тождества.

По этой системе составим четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – определитель системы;

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

После вычисления определителей неизвестные системы находятся по формулам: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$ – решение системы линейных уравнений, набор чисел. Метод Крамера применим для любого числа уравнений, но ограничен условиями:

1) Число уравнений должно быть равно числу неизвестных.

2) Определитель системы не должен быть равным нулю, то есть $\Delta \neq 0$.

Пример 1.1:

Решить СЛУ методом Крамера. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = -3, \\ x + 5y - 12z = -1, \\ 3x - 2y + 3z = 2. \end{cases}$

Решение: Вычислим определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & 5 & -12\\ 3 & -2 & 3\end{vmatrix}=87;\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}-3 & -4 & 3\\ -1 & 5 & -12\\ 2 & -2 & 3\end{vmatrix}=87;\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & -3 & 3\\ 1 & -1 & -12\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=174;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & -4 & -3\\ 1 & 5 & -1\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=87.$$

Решение системы находим по формулам:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{87}{87}=1;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{174}{87}=2;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{87}{87}=1.$$

Ответ: x = 1; y = 2; z = 1.

1.3. Матрицы и действия над ними

Определение. Матрицей называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов. Размер матрицы (m x n). Например,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.

Среди матриц выделяют квадратные матрицы. Квадратные матрицы имеют равное число строк и столбцов. Это число определяет порядок матрицы. Для квадратной матрицы существует определитель того же порядка, который называется определителем матрицы.

Порядок не квадратной матрицы определяется меньшим числом из числа строк и столбцов (m или n).

Квадратную матрицу А, для всех элементов которой справедливо равенство $a_{ij} = a_{ji}$, называют симметрической.

Определение: Матрица A^T, полученная из матрицы А заменой строк столбцами, называется транспонированной матрицей.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix};\qquad A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Процедура получения транспонированной матрицы называется транспонированием.

Элементы квадратной матрицы a_{11} a_{22} a_{33} … a_{nn} образуют её главную диагональ. Если главная состоит только из 1, а все остальные элементы матрицы равны 0, то такую матрицу называют единичной матрицей и обозначают E. Например: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

Матрицы A и B считаются равными тогда и только тогда, когда для всех элементов выполняется равенство $a_{ij} = b_{ij}$.

1.3.1. Сложение матриц

Если матрицы имеют одинаковый размер, то их можно складывать. В результате получается матрица C того же размера, каждый элемент которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{23}+b_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{vmatrix}.$$

1.3.2. Умножение матриц на число

Чтобы умножить матрицу на постоянное число $k \neq 0$, надо на это число умножить все элементы матрицы. Процедура умножения на постоянный множитель у матриц и определителей различна. В случае определителей надо умножать на это число какую-нибудь одну строку (столбец). Например:

$$k\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -9 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & 3k & -4k \\ 3k & k & 5k \\ -9k & 2k & 3k \end{pmatrix}; \qquad k\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3k \\ 2 & 5k \end{vmatrix}.$$

Операции сложения и умножения на число называются линейными операциями.

1.3.3. Умножение двух матриц

Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B (матрица A согласуется с матрицей B). При умножении матрицы A размером (m x k) на матрицу B размером (k x n) получается матрица C = AB размером (m x n). Элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов *i*-той строки матрицы A на соответствующие элементы *j*-того столбца матрицы B

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, k. \quad (1.4)$$

Например:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 2y + 3z \\ x - 2y + 4z \\ 3x + 4y - z \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц на компьютере в программе Excell производится по команде "=МУМНОЖ(();())". Результат выдаётся в виде скрытого массива. Доступ к элементу $c_{i,j}$ вычисленной матрицы даёт команда "=ИНДЕКС(МУМНОЖ(();();*i*;*j*)"

Свойства произведения матриц

1. В общем случае $AB \neq BA$.
2. Если A согласуется с B, а B согласуется с C, то
   (AB)C = A(BC) и (A+B)C = AC + BC.
3. AE = EA = A, где E – единичная матрица.

1.3.4. Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной матрицей для матрицы A, если выполняется равенство:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица.

Обратной матрицей обладают квадратные матрицы, определитель которых отличен от нуля (невырожденные матрицы) Обратная матрица у вырожденных матриц не существует.

Порядок нахождения обратной матрицы

1. Вычислить определитель матрицы A, то есть найти |A|.
2. Найти все алгебраические дополнения A_{ij} для элементов матрицы A.
3. Из A_{ij} составить матрицу C: $c_{ij} = A_{ij}$ и транспонировать её, то есть найти C^T.
4. Записать ответ в виде $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T$.

Например, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Пример 1.2.

Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решение: 1. Вычислим определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5;$$

1. Найдем алгебраические дополнения для матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7;$$

2. Из A_{ij} составим матрицу C и транспонируем её:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -12 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \quad C^{T} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица на компьютере Excell вычисляется по команде "=МОБР()" в виде скрытого массива. Доступ к элементу $c_{i,j}$ обратной матрицы даёт команда "=ИНДЕКС(МОБР();*i*;*j*)"

1.3.5. Матричное представление системы линейных уравнений

Если из коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

составить матрицу A, из неизвестных величин матрицу X, а из чисел правой части уравнений матрицу B, то система линейных уравнений запишется в виде матричного уравнения

$$AX = B, \tag{1.5}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$

Например, две системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}t + a_{12}u + a_{13}v = b_1, \\ a_{21}t + a_{22}u + a_{23}v = b_2, \\ a_{31}t + a_{32}u + a_{33}v = b_3, \end{cases}$$

можно записать в виде одного матричного уравнения $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x & t \\ y & u \\ z & v \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Преобразования заканчиваются в получении нулей ниже главной диагонали матрицы. Запишем систему линейных уравнений соответствующих этой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}5493x_2 + 2{,}1147x_3 + 3{,}0281x_4 = 50{,}76, \\ \qquad x_2 - 0{,}0611x_3 + 1{,}7045x_4 = 10{,}53, \\ \qquad\qquad x_3 - \ 5{,}719x_4 = -19{,}40, \\ \qquad\qquad\qquad 6{,}305x_4 = 28{,}54. \end{cases}$$

Вид этой системы указывает, что система имеет решение и при том единственное: $x_1 = 54{,}9394$; $x_2 = 3{,}876$; $x_3 = 16{,}6583$; $x_4 = 4{,}5266$.

1.3.6. Решение СЛУ матричным способом

Умножив обе части уравнения (1.5) на A^{-1}, получим:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$$

Поскольку произведение $A^{-1} \cdot A = E$, а произведение $EX = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Как и для метода Крамера, матричный способ требует равенства числа неизвестных числу уравнений и неравенства нулю определителя матрицы А.

Пример 1.3.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 5; \\ x + 3y + z = -5; \\ 5x + 3y + 4z = 10. \end{cases}$

Решение: По этой системе составляем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Матрица A^{-1} вычислена в предыдущем примере, поэтому сразу находим матрицу X:

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9\cdot 1 - 2\cdot(-1) - 4\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 1\cdot 2 \\ -12\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 7\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x = 3$; $y = {}^{-}3$; $z = 1$.

1.4. Исследование СЛУ

1.4.1. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы A называются:

1) перестановка двух строк матрицы;
2) вычёркивание строки состоящей исключительно из нулей;
3) умножение какой-либо строки на число $\lambda \neq 0$;
4) линейное преобразование строки матрицы, которое означает сложение элементов одной строки с соответствующими элементами другой строки, умноженных на число $\lambda \neq 0$.

Аналогичные элементарные преобразования матрицы можно выполнять и со столбцами матрицы.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к специальному виду:

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

Число r единиц, стоящих на главной диагонали, не зависит от способа приведения матрицы A к виду A_r и называется рангом матрицы A.

Матрицы, полученные друг из друга элементарными преобразованиями, называются эквивалентными матрицами:

$$A \sim A_r.$$

Эквивалентные матрицы имеют равные ранги.

Пример.1.4.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Выполняя элементарные преобразования над данной матрицей, получим следующую систему эквивалентных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы A равен 2.

Ответ: $r = 2$.

1.4.2. Решение СЛУ с помощью эквивалентных матриц (метод Гаусса)

Метод Гаусса, в отличие от матричного и метода Крамера, не ограничен условиями в его применении. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Пример 1.5.

Решить СЛУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2{,}423x_1 + 3{,}754x_2 + 5{,}124x_3 + 7{,}337x_4 = 123, \\ 1{,}685x_1 - 2{,}854x_2 + 3{,}897x_3 - 4{,}212x_4 = 28, \\ 2{,}223x_1 + 11{,}43x_2 + 12{,}87x_3 - 25{,}33x_4 = 42, \\ 3{,}103x_1 + \ \ 9{,}43x_2 - 15{,}05x_3 - 5{,}33x_4 = 22. \end{cases}$$

Решение: Разделим каждое уравнение на коэффициент перед x_1 и составим расширенную матрицу, полученной системы. Затем в этой матрице вычтем первую строку из второй, третьей и четвертой:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5493 & 2{,}1147 & 3{,}0281 & 50{,}76 \\ 1 & -1{,}6938 & 2{,}3128 & -2{,}4997 & 16{,}62 \\ 1 & 5{,}1417 & 5{,}7895 & -11{,}395 & 18{,}89 \\ 1 & 3{,}0390 & -4{,}8501 & -1{,}7177 & 7{,}090 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}5493 & 2{,}1147 & 3{,}0281 & 50{,}76 \\ 0 & -3{,}2431 & 0{,}1981 & -5{,}5278 & -34{,}14 \\ 0 & 3{,}5924 & 3{,}6748 & -14{,}423 & -31{,}87 \\ 0 & 1{,}4897 & -6{,}9648 & -4{,}7458 & -43{,}67 \end{array}\right)$$

Теперь такие же преобразования проведём с тремя нижними строками, а затем с двумя:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,5493 & 2,1147 & 3,0281 & \bigg| & 50,76 \\ 0 & 1 & -0,0611 & 1,7045 & \bigg| & 10,53 \\ 0 & 1 & 1,0229 & -4,0149 & \bigg| & -8,872 \\ 0 & 1 & -4,675 & -3,1857 & \bigg| & -29,31 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1,5493 & 2,1147 & 3,0281 & \bigg| & 50,76 \\ 0 & 1 & -0,0611 & 1,7045 & \bigg| & 10,53 \\ 0 & 0 & 1,084 & -5,719 & \bigg| & -19,40 \\ 0 & 0 & -4,614 & -4,7458 & \bigg| & -39,84 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1,5493 & 2,1147 & 3,0281 & \bigg| & 50,76 \\ 0 & 1 & -0,0611 & 1,7045 & \bigg| & 10,53 \\ 0 & 0 & 1 & -5,276 & \bigg| & -19,90 \\ 0 & 0 & 1 & 1,0286 & \bigg| & 8,635 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1,5493 & 2,1147 & 3,0281 & \bigg| & 50,76 \\ 0 & 1 & -0,0611 & 1,7045 & \bigg| & 10,53 \\ 0 & 0 & 1 & -5,719 & \bigg| & -19,40 \\ 0 & 0 & 0 & 6,305 & \bigg| & 28,54 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Преобразования заканчиваются получением нулей под главной диагональю матрицы. Запишем систему линейных уравнений соответствующих этой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 1,5493x_2 + 2,1147x_3 + 3,0281x_4 = 50,76, \\ \qquad x_2 - 0,0611x_3 + 1,7045x_4 = 10,53, \\ \qquad\qquad x_3 - 5,719x_4 = -19,40, \\ \qquad\qquad\qquad 6,305x_4 = 28,54. \end{cases}$$

Вид этой системы указывает, что система имеет решение и притом единственное: $x_1 = 54,9394$; $x_2 = 3,876$; $x_3 = 16,6583$; $x_4 = 4,5266$.

1.4.3. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Пусть матрица А – невырожденная. Составим матрицу

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

которая получается, если справа к матрице А приписать единичную матрицу Е. Применяя метод Гаусса, матрицу $(A|E)$ можно преобразовать к виду

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right).$$

Отсюда

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = A^{-1},$$

что следует из равенства $A^{-1}(A|E) = (A^{-1}A|A^{-1}E) = (E|A^{-1})$.

Пример.1.6.

Методом Гаусса вычислить обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицу

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Элементарными преобразованиями строк она сводится к виду

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right). \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.4.4. Исследование системы m линейных уравнений с n неизвестными

Исследовать систему линейных уравнений значит установить: имеет ли данная система решение (система совместна) или решения нет (система несовместна). Если система совместна, необходимо найти все возможные решения.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.7)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется матрицей этой системы, а

матрица $A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \hdotsfor{4} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ – расширенной матрицей системы.

Набор чисел $x_1^*,\ x_2^*, \ldots, x_n^*$ – решение СЛУ (1.7)

Следующие две теоремы позволяют установить наличие решений системы (1.7).

Теорема Кронекера – Капелли.

Для того, чтобы система линейных уравнений (1.7) была совместна необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A\ \ B$.

Теорема.

Если: 1) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A\ \ B = n$, где n – число неизвестных, то система имеет единственное решение; 2) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A\ \ B = r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений; 3) $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} A\ \ B$, то система не имеет решений (несовместна).

При единственно возможном решении систему называют определённой. При множестве решений – неопределённой. В случае неограниченного числа решений следует выразить связь между неизвестными через свободные параметры. Количество свободных параметров равно $n - r$.

Рассмотрим все возможные случаи, возникающие при использовании метода Гаусса. Расширенную матрицу приводят к виду, когда в нижней строке находится минимальное количество элементов, отличных от нуля. Если таких элементов два (по одному до и после разделительной прямой, как это было в матрице 1.7), то система совместна и определена. Если слева от черты стоят все нули, а справа нет нуля, то система линейных уравнений не имеет решения, то есть несовместна.

Наличие слева от черты двух элементов, отличных от нуля означает, что система имеет бесчисленное число решений, то есть система является совместной, но неопределённой. В качестве свободного параметра выбирается x_n, относительно которого определяются все другие неизвестные.

Возможен и случай получения нулей во всей нижней строке матрицы, тогда анализ системы проводится по предпоследней строке, которая после удаления нулевой строки становится последней.

Таким образом, по виду последней строки можно заключить:

1. $(0 \ \ldots\ 0 \quad 0 \quad 0 \ \ |\ \ n\,)$ – система несовместна;
2. $(0 \ \ldots\ 0 \quad 0 \quad a \ \ |\ \ n\,)$ – система совместна и определена;
3. $(0 \ \ldots\ 0 \quad b \quad a \ \ |\ \ n\,)$ – система совместна, но неопределенна.

Пример 1.7.

Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение: Проведём эквивалентные преобразования расширенной матрицы: вычтем из второй строки первую; а из третьей – удвоенную первую строку. После чего к последней строке добавим вторую:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Вывод: система линейных уравнений несовместна, так как rang A = 2, а rang A B =3.

1.4.5. Однородные СЛУ

Системы линейных уравнений, у которых все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$) образуют класс однородных систем.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Эти системы всегда совместны, так как имеют нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Наличие других решений можно установить переводом однородной системы уравнений в неоднородную с помощью соответствующей замены переменной.

Пример 1.8.

Найти все решения системы $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

Решение: По методу Гаусса получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & \vert & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & \vert & 0 \\ 3 & 4 & -5 & -3 & \vert & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & \vert & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 11 & \vert & 0 \\ 0 & 10 & -14 & 3 & \vert & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & \vert & 0 \\ 0 & 70 & -10 & 110 & \vert & 0 \\ 0 & 70 & -98 & 21 & \vert & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & \vert & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 11 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & -88 & -89 & \vert & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученной матрице соответствует однородная СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 7x_2 - x_3 + 11x_4 = 0, \\ -88x_3 - 89x_4 = 0. \end{cases}$$

Положив $x_4 = t$, где $t \in (-\infty; +\infty)$, получим множество решений данной системы.

Ответ: $x_1 = 1{,}89t$; $x_2 = -1{,}57t$; $x_3 = -1{,}01t$; $x_4 = t$.

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать данные системы линейных уравнений на совместность. В случае совместности системы найти все ее решения.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ 1.**2.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 1.**3.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$ 1.**5.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -8, \\ 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ **1.7.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.Найти все решения данных однородных систем линейных уравнений.

2.1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ **2.3.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Ответы

1.1. $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1$. **1.2.** $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$. **1.3.** $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$. **1.4.** $x_1 = 2 - t$, $x_2 = -3 + t$, $x_3 = t$. **1.5.** $x_1 = 6 - t$; $x_2 = -2 + t$; $x_3 = t$. **1.6.**

$x_1 = 5 + 10t$; $x_2 = 10 + 16t$; $x_3 = t$. **1.7.** $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$. **2.1.** $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$. **2.2.** $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$. **2.3.** $x_1 = -3t$, $x_2 = -5t$, $x_3 = t$.

Вопросы для самоподготовки

1. Что называется определителем?
2. Свойства определителей.
3. Что называется минором и алгебраическим дополнение?
4. Теорема Лапласа.
5. Формулы для вычисления определителей второго и третьего порядка.
6. Правило Крамера для решения СЛУ.
7. Что называется матрицей? Размер матриц. Виды матриц.
8. Какие операции над матрицами называются линейными?
9. Правила выполнения линейных операций над матрицами.
10. Умножение матриц.
11. Свойства произведения матриц.
12. Обратная матрица.
13. Для каких матриц существует обратная матрица?
14. Правило нахождения обратной матрицы.
15. Матричная форма СЛУ. Решение СЛУ в матричной форме.
16. Исследование СЛУ.
17. Теорема Кронекера-Капелли.
18. Метод Гаусса.
19. Однородные СЛУ и их решение.

2.ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1.Определение вектора

Физические величины делятся на скалярные, которые при выбранной системе единиц характеризуются одним числом, и векторные, которые характеризуются не только числом, но и направлением.

Скалярными величинами являются масса, температура, объём тела, время, концентрация вещества и тому подобные величины. К векторным величинам относятся, например, скорость, ускорение, сила, напряженность электрического или магнитного полей и т.д.

Геометрическое определение вектора – направленный отрезок.

Обозначаются векторы одной буквой $\vec{a}$ или – двумя $\overrightarrow{AB}$, где A – начальная точка, а B – конечная.

Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Определение. Вектором называется упорядоченный набор чисел, называемых его координатами. Записывается вектор в виде матрицы–строки $\vec{a} = (x_1, x_2, ... x_n)$ или матрицы–столбца $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Мы будем рассматривать свободные векторы, то есть такие, которые можно перемещать параллельно самим себе.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными, если они одинаково направлены и длины отрезков AB и CD равны. Вектор, длина которого равна нулю, называется нуль–вектором и обозначается $\vec{0}$ (или просто 0). Вектор $\vec{a}$, длина которого рана единице, называется единичным или ортом. Свободный вектор однозначно определяется своей длиной и направлением.

Параллельные векторы и векторы, лежащие на одной прямой называются коллинеарными и обозначаются $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

2.2. Линейные операции над векторами. Линейное пространство

2.2.1. Умножение вектора на число

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, длина которого $\left|\vec{b}\right| = \lambda\left|\vec{a}\right|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Если $\vec{a} \neq 0$, то орт вектора есть вектор $\vec{a}^0 = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

2.2.2. Сложение векторов

Определение. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, который получается из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.2.1).

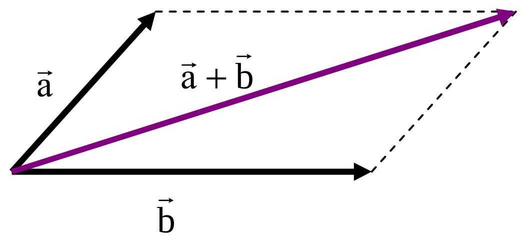

Рис.2.1.

Чтобы сложить n векторов, надо в конец первого вектора поместить начало второго, конец второго – в начало третьего и так далее. Начало первого вектора и конец последнего слагаемого дадут две точки, которые являются, соответственно, началом и концом результирующего (суммарного) вектор.

Например,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} \text{ (рис.2.2).}$$

Правило сложения векторов в пространстве называют правилом многоугольника.

Определение. Разностью двух векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется вектор $\vec{b}-\vec{a}$, являющийся суммой векторов $\vec{b}$ и $-\vec{a}$.

Отметим, что вектор $\vec{b}-\vec{a}$ направлен к концу вектора $\vec{b}$, если $\vec{b}$ и $\vec{a}$ приведены к общему началу (рис.2.3).

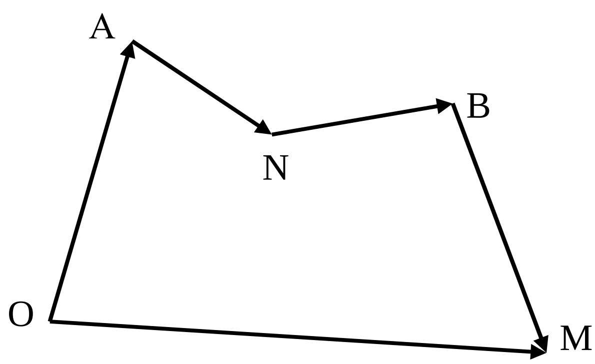

Рис.2.2.

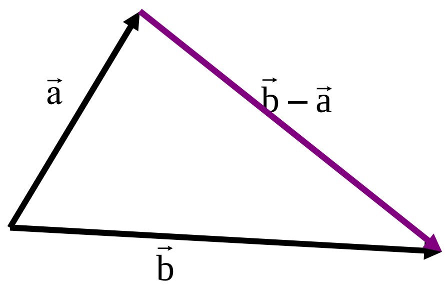

Рис.2.3.

Введенные операции сложение и умножение на число называются линейными.

2.2.3. Свойства линейных операций

1. Сложение векторов коммутативно: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. Сложение векторов ассоциативно: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3. Умножение вектора на число ассоциативно: $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$, $\alpha,\beta \in R$.
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, где $\vec{a}$ – любой вектор.

5. Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел: $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}, \quad \alpha,\beta\in R.$

6. Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов: $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}, \quad \alpha\in R.$

7. Если $\vec{0}$ − нулевой вектор, то $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$.

8. Если $-\vec{a}$ − противоположный вектор для вектора $\vec{a}$, то $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

2.2.4. Линейные пространства

Определение. Множество векторов, удовлетворяющих перечисленным свойствам линейных операций (см. **2.2.3**), называется линейным или векторным пространством, которое обозначают $\mathbf{R^3}$. А свойства линейных операций над векторами называют аксиомами линейного пространства.

Элементы линейного пространства называются векторами независимо от их природы.

Множество действительных чисел также образует пространство линейное пространство **R.** Аксиомы 1 – 8 в нём выполняются.

Множество векторов на плоскости и на прямой также являются линейными пространствами и обозначаются $\mathbf{R^2}$ и $\mathbf{R^1}$ соответственно.

Обобщением пространства $\mathbf{R^3}$ служит пространство $\mathbf{R^n}$, $n\in N$, называемое арифметическим n–мерным пространством, элементами (векторами) которого являются упорядоченные совокупности n произвольных действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для удобства используют обозначение $\vec{x}=(x_1, x_2,\dots, x_n)$, при этом x_i называется i-й координатой (компонентой) вектора $\vec{x}$. В пространстве $\mathbf{R^n}$**,** как и в пространстве $\mathbf{R^3}$, определяются линейные операции, удовлетворяющие аксиомам 1 – 8.

Кроме перечисленных линейных пространств, линейным пространство является множество $Q_{[a;\ b]}$ непрерывных на [a; b] функций $f : [a; b]\to R$, в котором суммой функций f и g из $Q_{[a;\ b]}$ называется функция h = f + g, определяемая равенством

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ где } x\in[a; b],$$

а произведением функции $f\in Q_{[a;\ b]}$ на число $\alpha\in R$ есть функция $u = \alpha f$, такая что

$$u(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ где } x\in[a; b].$$

Нулевым вектором этого пространства является нулевая функция, а равенство двух функций f и g означает, по определению, следующее:

$$(f = g), \text{ если } f(x) = g(x), \text{ где } x\in[a; b],$$

2.3. Линейная зависимость между векторами

Для характеристики взаимного расположения векторов в пространстве вводится понятие линейной зависимости между векторами.

Определение. Линейной комбинацией трёх векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ называется вектор

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ некоторые действительные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации. Говорят, что вектор $\bar{a}$ разложен по векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Определение. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются линейно-зависимыми, если существуют такие постоянные числа, одновременно не равные нулю (хотя бы один из них не равен нулю), что выполняется равенство

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = 0.$$

Если это равенство выполняется только для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются линейно-независимыми.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$– линейно-зависимые векторы, то один из них является линейной комбинацией остальных.

Например, $\lambda_3 \neq 0$, тогда $\vec{e}_3 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\vec{e}_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}\vec{e}_2$. Это равенство говорит, что вектор $\vec{e}_3$ является линейной комбинацией векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Примером линейной зависимости векторов могут быть два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, так как в этом случае имеет место соотношение $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое действительное число.

Из элементарной математики известно, что если $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$– два неколлинеарных вектора, то всякий компланарный им вектор $\vec{a}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации этих векторов

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2. \qquad (2.1)$$

Отсюда следует, что любые три компланарных вектора линейно-зависимы.

Примером линейной независимости векторов могут быть три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, а любой четвертый вектор $\vec{a}$ пространства единственным образом разлагается в их линейную комбинацию

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3. \qquad (2.2)$$

Равенство (2.2) означает, что любые четыре вектора в пространстве являются линейно-зависимыми.

2.3.1. Базис пространства и разложение вектора по базису

Определение. Базисом пространства назовется совокупность линейно-независимых векторов, по которым можно разложить любой вектор этого пространства. В трехмерном пространстве это будет любая тройка некомпланарных векторов, на плоскости любая пара неколлинеарных векторов, а на прямой – любой ненулевой вектор. Векторы, составляющие базис называются базисными.

Таким образом, формула (2.2) представляет собой разложение вектора $\bar{a}$

по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, на плоскости, а формула (2.3) – разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в пространстве. Эти разложения единственны.

Коэффициенты λ_1, λ_2, λ_3 в разложении (2.2) называются координатами вектора $\bar{a}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Аналогично интерпретируются коэффициенты λ_1 и λ_2 в равенстве (2.1).

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами в заданном базисе сводятся к обычным линейным операциям над числами – координатами векторов.

Теорема. 2.1. При сложении двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их соответствующие координаты суммируются. При умножении вектора $\vec{a}$ на любое число λ все его координаты умножаются на это число.

Доказательство. Пусть $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ и $\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$. Тогда в силу свойств линейных операций над векторами и единственности разложения вектора по базису получим

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3,$$
$$\mu\vec{a} = (\mu\alpha_1)\vec{e}_1 + (\mu\alpha_2)\vec{e}_2 + (\mu\alpha_3)\vec{e}_3, \quad \mu \in R.$$

2.4. Проекция вектора на ось и её свойства

Определение. Если на прямой задано направление, то она называется осью. Углом между двумя векторами (или между вектором и осью, или между двумя осями) называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть один вектор (ось), чтобы он совпал по направлению с другим вектором (осью) (рс.2.4).

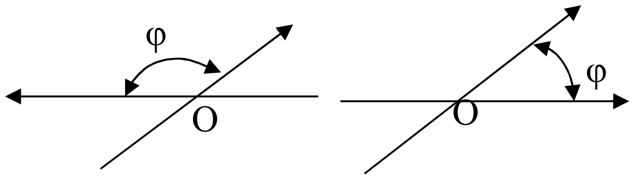

Рис.2.4.

Очевидно, что $0 \le \varphi \le \pi$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

Определение. Проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось L называется длина отрезка A_1B_1, заключенного между ортогональными проекциями начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на эту ось, взятая со знаком плюс, если направление от A_1 к B_1 совпадает с направлением оси L, и со знаком минус, если не совпадает.

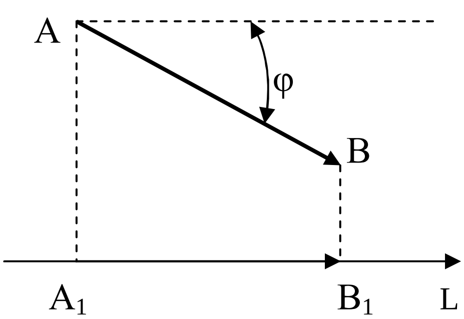

Рис.2.5.

Из определения и рис.2.5 следует, что проекция $\text{пр}_L\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на ось L равна

$$\text{пр}_L\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi. \qquad (2.3)$$

Направленный отрезок $\vec{a}_L = \overrightarrow{A_1B_1}$ называется ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ по оси L. Если $\vec{l}^0$ – единичный вектор, соответствующий направлению оси L, то с учетом формулы (2.3.)

$$\vec{a}_L = |\vec{a}|\cos\phi \cdot \vec{l}^0. \qquad (2.4)$$

Проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на данную ось L обладают следующими свойствами:

1. $пр_L(\vec{a}+\vec{b}) = пр_L\vec{a} + пр_L\vec{b}$.
2. $пр_L(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot пр_L\vec{a}$.

2.5. Декартова система координат

Векторы будем рассматривать в реальном физическом пространстве, известном из элементарной математики как прямоугольная декартова система координат в R^3, образованная тремя взаимно перпендикулярными осями X, Y, Z, называемых осями координат, и точки O – начало координат. Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направленные вдоль осей X, Y, Z соответственно, образуют прямоугольный базис. Так как вектор $\vec{a}$ свободный вектор, то совместим его начало с началом координат.

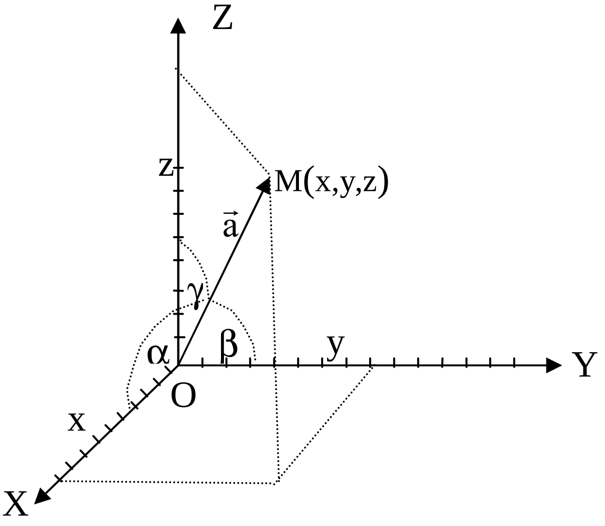

Рис.2.6.

Известно, что каждый вектор $\vec{a}$ пространства можно единственным образом разложить по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис.2.6):

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (2.5)$$

Числа x, y, z называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Этот факт будем записывать в виде $\vec{a} = (x, y, z)$, что равносильно разложению (2.5).

Геометрический смысл декартовых прямоугольных координат вектора выясняет следующее утверждение.

Теорема.2.2. Декартовы прямоугольные координаты x, y, z вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ являются его проекциями на соответствующие оси координат. (Доказательство теоремы предлагается выполнить самостоятельно).

Согласно теореме 2.1, при выполнении линейных операций над векторами тем же операциям подвергаются и координаты этих векторов, то есть если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$; $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z);$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z).$$

Если $\vec{a}=\vec{b}$, $a_x=b_x$, $a_y=b_y$, $a_z=b_z$, то есть у равных векторов соответствующие координаты векторов равны.

Пример 2.1.

Даны три вектора $\vec{a}=(4;5;2)$; $\vec{b}=(3;0;1)$ и $\vec{c}=(-1;4;2)$, образующие базис. Найти координаты вектора $\vec{d}=(5;7;8)$ в этом базисе.

Решение: Из условия единственности разложения вектора в данном базисе следует, что $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, где α, β и γ некоторые неизвестные числа, одновременно неравные нулю.

Для определения α, β и γ, используя теорему 2.1 и условия равенства соответствующих координат у равных векторов, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\alpha+3\beta-\gamma=5, \\ 5\alpha \qquad +4\gamma=7, \\ 2\alpha+\beta+2\gamma=8. \end{cases}$$

Решив полученную систему линейных уравнений, получим координаты вектора $\vec{d}$ в базисе векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\alpha = -1$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$.

Ответ: $\vec{d}=-\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}$.

2.5.1. Направляющие косинусы вектора

Из теоремы 2.2. и рис.2.6 следует, что

$$x=\text{пр}_X\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha,\ \ y=\text{пр}_Y\vec{a}=|\vec{a}|\cos\beta,\ \ z=\text{пр}_Z\vec{a}=|\vec{a}|\cos\gamma. \qquad (2.6)$$

По теореме Пифагора (рис.2.6) имеем

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (2.7)$$

Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Из формул (2.6) и (2.7) имеем

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad , \qquad (2.8)$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

откуда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (2.10)$$

Для единичного вектора $\vec{a}^0$, $|\vec{a}^0|=1$, получим:

$$\vec{a}^0=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma).$$

Пример 2.2:
Найти координаты орт вектора $\vec{a}=(2;-1;3)$.

Решение: Находим длину вектора ā: $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$; $\vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

$$\text{Тогда} \quad \vec{a}^0=\left(\frac{2}{\sqrt{14}};\ \frac{-1}{\sqrt{14}};\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

2.5.2. Условие коллинеарности двух векторов

Пусть $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$; $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$ – коллинеарные векторы. Поскольку $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то для любого $\lambda\in R$ и $(\lambda\neq 0)$ $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ $\Rightarrow$

$$(a_x;a_y;a_z)=\lambda(b_x;b_y;b_z)=(\lambda b_x;\lambda b_y;\lambda b_z),$$

отсюда

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{2.11}$$

Итак, коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равносильна пропорциональности соответствующих координат этих векторов

2.5.3. Радиус-вектор и координаты точки

Радиус–вектором точки M назовём вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом системы координат (рис.2.6). Очевидно, что всякая точка $M\in R^3$ однозначно определяется своим радиус–вектором $\vec{r}$.

Координатами x, y, z точки M (рис.2.6) называются проекции её радиус-вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ на координатные оси, то есть координатами точки являются коэффициенты разложения её радиус-вектора по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x;y;z).$$

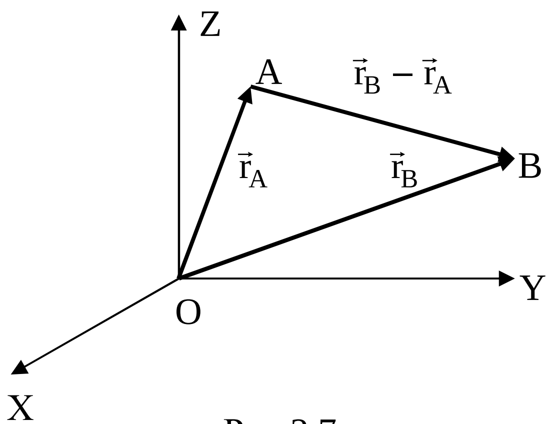

Рис.2.7.

При этом координата x называется **абсциссой**, y – **ординатой**, z – **аппликатой** точки M и обозначается M(x;y;z).

Рассмотрим две точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, радиус-векторы которых соответственно равны $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ (рис.2.7).

Так как $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$, то $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Отсюда, в частности, получаем

формулу для вычисления расстояния между двумя точками A и B:

$$\rho(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2.12)$$

Из формулы (2.12) следует, что длина радиус–вектора точки M вычисляется по формуле:

$$|\vec{r}\,|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2.5.4. Деление отрезка в данном отношении

Говорят, что точка C внутренним образом делит отрезок AB в отношении λ, если $\dfrac{|AC|}{|CB|}=\lambda$. Найдём координаты такой точки $C(x, y, z)$, если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$– радиусы-векторы точек C, A и B соответственно (рис.2.8).

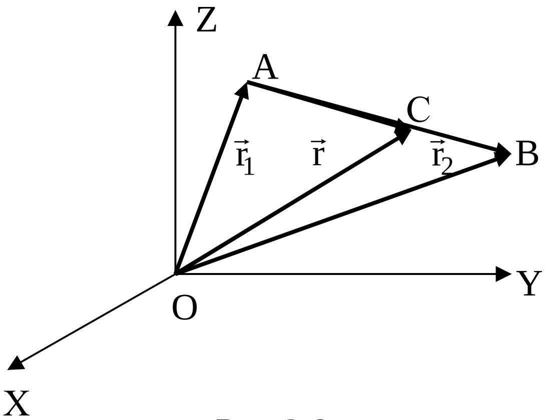

Рис.2.8.

Из рис.2.8 следует, что: $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$, где

$$\overrightarrow{AC}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$

$$\overrightarrow{CB}=(x_2-x;y_2-y;z_2-z),$$

$$\overrightarrow{\lambda CB}=(\lambda(x_2-x);\lambda(y_2-y);\lambda(z_2-z))$$

Отсюда, приравняв координаты, получим:

$$x-x_1=\lambda(x_2-x)\Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

$$y-y_1=\lambda(y_2-y);\ \Rightarrow\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ (2.13)$$

$$z-z_1=\lambda(z_2-z)\ \Rightarrow\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

то есть радиус-вектор точки C равен

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}.$$

При $\lambda = 1$ получаются координаты середины отрезка AB:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2};\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Пример 2.3.

Найти отношение, в котором координатная плоскость XOY делит отрезок между точками $A(2;-1;7)$ и $B(4;5;-2)$ и координаты точки пересечения M.

Решение: Пусть прямая AB пересекает плоскость XOY в точке $M(x;y;0)$. Из формулы (2.13) найдем λ, подставляя вместо z_1 и z_2 аппликаты точек A и B.

$$0=\frac{7+\lambda(-2)}{1+\lambda}, \quad \text{то есть} \quad \lambda=\frac{7}{2}.$$

Зная отношение λ, найдем координаты x и y точки M.

$$x=\frac{2+\frac{7}{2}\cdot 4}{1+\frac{7}{2}}=\frac{32}{9}, \quad y=\frac{-1+\frac{7}{2}\cdot 5}{1+\frac{7}{2}}=\frac{33}{9}.$$

Ответ: $\lambda=\frac{7}{2}$, $M\left(\frac{32}{9};\frac{33}{9};0\right)$.

2.6. Умножение векторов

Перемножить два вектора можно двумя различными способами, получая в результате либо скаляр, либо вектор. Выбор способа определяется исключительно условием задачи.

2.6.1. Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженное на косинус угла между ними. Обозначения для скалярного произведения: $(\vec{a},\vec{b})$ либо $\vec{a}\,\vec{b}$.

Из определения:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \quad \varphi=(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Свойства скалярного произведения:

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$.
2. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$.
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$.
4. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, то $(\vec{a},\vec{b})=0$, тогда и только тогда, когда $\vec{a}\perp\vec{b}$. Если $(\vec{a},\vec{b})>0$, то угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, если $(\vec{a},\vec{b})<0$, то то угол φ тупой.
5. Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен $(\vec{a},\vec{a})=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=a^2$.

Из свойства 5 вытекает формула $|\vec{a}|=\sqrt{a^2}$.

2.6.2. Геометрический и механический смысл скалярного произведения

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на единичный вектор $\vec{b}^0$ равно проекции вектора $\vec{a}$ на направление, определяемое $\vec{b}^0$, то есть

$$(\vec{a},\vec{b}^0)=\text{пр}_{\vec{b}^0}\vec{a}.$$

В случае произвольного вектора $\vec{b}$

$$пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{1}{\left|\vec{b}\right|}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

С физической точки зрения, скалярное произведение это работа, производимая силой $\vec{F}$ при перемещении материальной точки по направлению вектора $\vec{s}$:

$$A = \left(\vec{F},\vec{s}\right) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\left(\vec{F} \wedge \vec{s}\right) = \left|\vec{s}\right| \cdot пр_{\vec{s}}\,\vec{F}.$$

2.6.3. Скалярное произведение в координатной форме

Если даны два вектора: $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$, то $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ можно вычислить, используя свойства скалярного произведения указанные выше:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) = a_x\,\vec{i}\left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) +$$

$$+ a_y\,\vec{j}\left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) + a_z\,\vec{k}\left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

При раскрытии скобок получаются различные комбинации скалярных произведений единичных векторов:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \text{ (по свойству 5) и } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,$$

в силу взаимной их перпендикулярности.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноимённых проекций (координат) этих векторов:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (2.14)$$

Если векторы заданы своими координатами, то можно найти:

1. Длину вектора: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

2. Из определения скалярного произведения угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\left(\vec{a},\wedge\,\vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.15)$$

3. Проекцию одного вектора на другой:

$$пр_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cos\left(\vec{a},\wedge\,\vec{b}\right) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (2.16)$$

Пример 2.4.

Даны векторы $\vec{a} = (1;-1;2)$ и $\vec{b} = (2;-2;1)$. Найти проекцию вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.

Решение. Используя линейные операции над векторами в координатной форме (раздел **2.5**), получим координаты вектора $\vec{c}=(1;-1;5)$. По формуле (2.16) получим

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{c}=\frac{2\cdot 1-2(-1)+1\cdot 5}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{9}{3}=3.$$

Пример 2.5.

Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(2;1;0)$ и $\vec{b}=(0;-1;1)$.

Решение. Используя линейные операции над векторами (рис.2.1 и рис.2.3), получаем диагонали параллелограмма $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=(2;0;1)$ и $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=(2;2;-1)$.

По формуле (2.15) получим

$\cos\left(\vec{d}_1,\wedge\vec{d}_2\right)=\dfrac{3}{\sqrt{5}\sqrt{9}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Получен острый угол, так как $\cos\left(\vec{d}_1,\wedge\vec{d}_2\right)>0$.

Отсюда следует, что $\left(\vec{d}_1,\wedge\vec{d}_2\right)=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2.6.4. Векторное произведение векторов и его свойства

Определение. Векторным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, длина и направление которого определяются условиями:

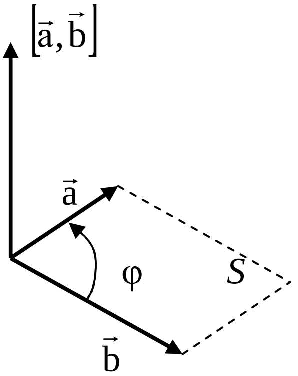

Рис.2.9.

1. $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$;
2. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$ – вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ перпендикулярен плоскости параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. Вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ направлен так, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден с его конца совершающимся против хода часовой стрелки (рис.2.9).

Обозначается векторное произведение:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right],\ \text{либо}\ \vec{a}\times\vec{b}.$$

Свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение равно нулю (нуль-вектору), тогда и только тогда, когда $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (коллинеарные векторы) или один из них нулевой. В частности, $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=0$ для любого вектора $\vec{a}$;

2. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

3. $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

3. $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$

4. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $S=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$ – модуль (длина) вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.6.5. Физический и геометрический смысл векторного произведения

Если $\vec{F}$ – сила, приложенная к точке M, то момент $m_A\vec{F}$ этой силы относительно точки A равен векторному произведению векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{F}$ (рис.2.10) , то есть

$$m_A\vec{F}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{F}\right].$$

В частности, момент относительно начала координат

$$m_O\vec{F}=\left[\vec{r},\vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы.

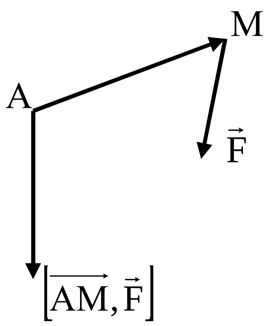

Рис.2.10.

Векторное произведение применяют для определения силы действующей на заряд, движущийся в магнитном поле (сила Лоренца):

$$\vec{F}=q\cdot\left[\vec{v},\vec{H}\right].$$

В аналитической геометрии векторное произведение используют для вычисления площади треугольника и многоугольника, разбивая его на треугольники:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|. \qquad (2.17)$$

2.6.6. Векторное произведение в координатной форме

Если даны два вектора: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ можно вычислить, используя свойства векторного произведения:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_x\vec{i}\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)+$$

$$+a_y\vec{j}\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)+a_z\vec{k}\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x\left[\vec{i},\vec{i}\right]+a_xb_y\left[\vec{i},\vec{j}\right]+$$

$$+a_xb_z\left[\vec{i},\vec{k}\right]+a_yb_x\left[\vec{j},\vec{i}\right]+a_yb_y\left[\vec{j},\vec{j}\right]+a_yb_z\left[\vec{j},\vec{k}\right]+a_zb_x\left[\vec{k},\vec{i}\right]+a_zb_y\left[\vec{k},\vec{j}\right]+a_zb_z\left[\vec{k},\vec{k}\right]=$$

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-$$

$$-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

При раскрытии скобок получаются различные комбинации векторных произведений единичных векторов:

$\left[\vec{i},\vec{i}\right]=\left[\vec{j},\vec{j}\right]=\left[\vec{k},\vec{k}\right]=0$ в силу их взаимной коллинеарности;

$\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k}$; $\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i}$; $\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j}$; $\left[\vec{j},\vec{i}\right]=-\vec{k}$; $\left[\vec{k},\vec{j}\right]=-\vec{i}$; $\left[\vec{i},\vec{k}\right]=-\vec{j}$ по определению векторного произведения.

В свернутой форме векторное произведение имеет вид определителя:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_Y & a_Z \\ b_Y & b_Z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (2.18)$$

Координаты векторного произведения

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_Y & a_Z \\ b_Y & b_Z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix}\right).$$

Пример 2.6.

Дан треугольник с вершинами в точках A(2;−1;2), B(3;2;1) и C(1;2;−1). Найти его площадь.

Решение. Площадь треугольника ABC вычислим по формуле (2.17):

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=i+3j-k,\ \overrightarrow{AC}=-i+3j-3k.$$

Их векторное произведение

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-6\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k},$$

поэтому

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{36+16+36}=2\sqrt{22},$$

и следовательно,

$$S_\Delta=\sqrt{22} \text{ кв. ед.}$$

Пример 2.7.

Даны три силы $\vec{F}=(2;-1;-3)$, $\vec{P}=(3;2;-1)$ и $\vec{R}=(-4;1;3)$, приложенные к точке C(–1; 4; –2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки A(2; 3; –1).

Решение. Равнодействующая трёх сил равна

$$\vec{Q}=F+\vec{P}+\overleftarrow{R}=(1;2;-1).$$

Координаты вектора $\overrightarrow{AC} = (-3; 1; -1)$. Момент силы $\vec{Q}$, приложенной к тоске С, относительно точки A

$$m_A\vec{Q} = \left[\overrightarrow{AC}, \vec{Q}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i - 4j - 7r.$$

Величина момента $\left|m_A\vec{Q}\right| = \sqrt{1+16+49} = \sqrt{66}$ и его направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}; \quad \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{66}}; \quad \cos\gamma = \frac{-7}{\sqrt{66}}.$$

2.6.7. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным (векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, получаемое в результате скалярного произведения векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$.

$$\left(\left[\vec{a},\ \vec{b}\right],\ \vec{c}\right) = \left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Определение. Тройка векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, начала которых совмещены, называется левой, если из конца вектора $\vec{e}_3$ кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ виден по ходу часовой стрелке. Если этот поворот виден против хода часовой стрелки, то тройка векторов называется правой.

У векторов перпендикулярных плоскости существует два взаимно противоположных направления. Одно направление принято за положительное, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов; другое, противоположно ориентированное, – отрицательное. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ при этом образуют левую тройку векторов.

2.6.8. Геометрический смысл смешанного произведения векторов

В пространстве R^3 на любой тройке некомпланарных векторов можно построить параллелепипед, приложив векторы к одной точке. Взятые векторы будут служить рёбрами построенного параллелепипеда (рис.2.11).

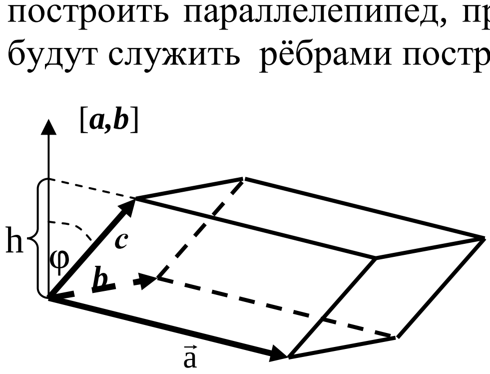

Рис.2.11.

Объём параллелепипеда равен площади основания умноженной на высоту h. Основанием служит параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Построим вектор $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Его модель равен площади основания. На этом векторе будет располагаться высота h параллелепипеда. Эта высота является проекцией вектора $\vec{c}$ на вектор

$\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. А значит скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ равно объёму параллелепипеда.

Припишем объёму параллелепипеда знак плюс, если тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – правая, и знак минус, если она – левая. Это можно записать в виде: $S=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$, $h=|\vec{c}|\cos\varphi$, $V=Sh=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|\cdot|\vec{c}|\cos\varphi=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$, $V>0$, если тройка $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – правая и $V<0$, если тройка $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – левая.

Таким образом, смешанное произведение трёх векторов равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, и имеет знак плюс для правой тройки векторов и знак минус – для левой тройки векторов.

Объём пирамиды (тетраэдра) вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{6}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right). \tag{2.19}$$

2.6.9. Свойства смешанного произведения

1. $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c}\right)=\left(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a}\right)$;

2. Смешанное произведение равно нулю, если векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны. Равенство $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)=0$ – является необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

3. $\left(\left[\vec{a},\ \vec{b}\right],\ \vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right)$. Справедливость этого равенства основана на коммутативности скалярного произведения и произвольности выбора основания параллелепипеда.

Следствие: $V=\ V=\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b};\quad -V=\vec{b}\vec{a}\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}\vec{b}=\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.

2.6.10. Координатная форма смешанного произведения

Проведём последовательное вычисление $\left(\left[\vec{a},\ \vec{b}\right],\ \vec{c}\right)$ в координатной форме:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\begin{vmatrix} a_Y & a_Z \\ b_Y & b_Z \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix}\bar{k}\right)\cdot\left(c_X\bar{i}+c_Y\bar{j}+c_Z\bar{k}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_Y & a_Z \\ b_Y & b_Z \end{vmatrix}c_X-\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix}c_Y+\begin{vmatrix} a_X & a_Z \\ b_X & b_Z \end{vmatrix}c_Z=\begin{vmatrix} a_X & a_Y & a_Z \\ b_X & b_Y & b_Z \\ c_X & c_Y & c_Z \end{vmatrix}. \tag{2.20}$$

Пример 2.8.

Доказать, что четыре точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$ и $D(2;\ 1;\ 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Если точки лежат в одной плоскости, то векторы, их соединяющие, также лежат в этой плоскости. То есть следует доказать, что три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны.

Из условия компланарности трех векторов следует, что

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)=0.$$

Смешанное произведение вычислим по формуле (2.20)

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны, четыре точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

2.7. Евклидовы пространства

Определение. Линейное пространство **V** называется евклидовым, если каждой паре векторов (элементов) $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ставится в соответствие действительное число $(\vec{x}, \vec{y})$, называемое скалярным произведением, удовлетворяющее аксиомам:

1. $(\vec{x}, \vec{y})=(\vec{y}, \vec{x})$;
2. $(\vec{x}+\vec{z}, \vec{y})=(\vec{x}, \vec{y})+(\vec{z}, \vec{y})$;
3. $(\alpha\vec{x}, \vec{y})=\alpha(\vec{x}, \vec{y})$, где $\alpha \in R$;
4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$; $(\vec{x}, \vec{x})=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x}=\vec{0}$.

Например, евклидовым пространством является пространство свободных векторов $\mathbf{R}^3$ скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в котором определяется так:

$$(\vec{a}, \vec{b})=|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

Теорема 2.3. (неравенство Коши-Буняковского). Для любых двух элементов евклидова пространства **V** справедливо неравенство

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}).$$

Часто это неравенство записывается в равносильной форме

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|.$$

Определение. Длиной (нормой) вектора $\vec{x}$ называется число $|\vec{x}|$ (или $\|\vec{x}\|$), вычисляемое по правилу $|\vec{x}|=\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

Свойства нормы вектора, непосредственно вытекающие из определения:

1. $|\vec{x}| \geq 0$, $|\vec{x}|=0$, если $\vec{x}=\vec{0}$;
2. $|\alpha\vec{x}|=|\alpha| \cdot |\vec{x}|$, $\alpha \in R$;
3. Норма удовлетворяет неравенству треугольника (неравенству Минковского)

$$|(\vec{x}+\vec{y})| \leq |\vec{x}|+|\vec{y}|.$$

Определение. Расстоянием между элементами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ евклидова пространства **V** называется величина

$$\rho(\vec{x},\vec{y}) = |\,\vec{y}-\vec{x}\,| = \sqrt{(\vec{y}-\vec{x},\vec{y}-\vec{x})}.$$

Углом между элементами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ евклидова пространства **V** называется число φ, удовлетворяющее следующим условиям:

$$0 \le \varphi \le \pi \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\,\vec{x}\,|\cdot|\,\vec{y}\,|}.$$

Элементы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются ортогональными, если $(\vec{x},\vec{y}) = 0$.

Система элементов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ называется ортогональной, если $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ при $i \ne j$, и ортонормированной, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \ne j. \end{cases}$$

Символ

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \ne j, \end{cases}$$

называется символом Кронекера.

Теорема 2.4. Ортогональная система элементов евклидова пространства – линейно независима.

Если число ортогональных элементов равно n, где n – размерность пространства, то они образуют базис евклидова пространства, называемый ортогональным базисом. Если же нормы базисных векторов равны единице, то базис называется ортонормированным.

Теорема 2.5. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пример 2.9.

Показать, что векторы

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{-1}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right),\quad \vec{e}_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{14}};\frac{-1}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}}\right),\quad \vec{e}_3 = \left(\frac{-1}{2\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

образуют ортонормированный базис в пространстве R^3.

Решение. По определению ортонормированного базиса получим

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = \frac{2}{\sqrt{14}}\cdot\frac{-2}{\sqrt{14}} + \frac{-1}{\sqrt{14}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} = 0;\quad (\vec{e}_2,\vec{e}_3) = 0;\quad (\vec{e}_1,\vec{e}_2) = 0;$$

$|\,\vec{e}_1| = \sqrt{\frac{4}{14}+\frac{1}{14}+\frac{9}{14}} = 1;\quad |\,\vec{e}_2| = 1;\quad |\,\vec{e}_3| = 1$, то есть векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, образуют ортонормированный базис в R^3.

2.8. Линейные операторы и их матрицы

2.8.1. Понятие линейного оператора

Пусть **V** и **W** – два линейных пространства. Отображение $A : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ называется линейным оператором, если

$A(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha A\vec{x}_1+\beta A\vec{x}_2$, где $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\in V$, $\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$.

Вектор $\vec{y}=A\vec{x}$ называется образом вектора $\vec{x}\in V$.

Оператор, который каждому вектору $\vec{x}\in V$ ставит в соответствие нулевой вектор $\vec{0}\in W$, называется нулевым оператором и обозначается **O**. Таким образом, $O\vec{x}=\vec{0},\quad \forall\vec{x}\in V$.

Линейный оператор **A**, для которого $A\vec{x}=\vec{x},\ \ \forall\vec{x}\in V$, называется тождественным и обозначается **E**.

Оператор **A,** удовлетворяющий соотношению $A\vec{x}=\alpha\vec{x}$, где $\alpha\in\mathbf{R}$, называется скалярным оператором или оператором подобия.

Областью значений линейного оператора $A:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ называется множество векторов вида $\vec{y}=A\vec{x},\ \ \forall\vec{x}\in V$, и обозначается im **A** (англ. image − образ).

Ядром линейного оператора **A** называется множество ker **A** всех $\vec{x}\in V$, для которых $A\vec{x}=\vec{0}$ (англ. kernel − ядро).

2.8.2. Матрица линейного оператора

Пусть **V** – линейное пространство с базисом $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$, а A – линейный оператор, действующий из в линейное пространство **W,** базисом которого служат векторы $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$. (Для простоты изложения будем рассматривать линейные пространства **V** размерности n =2 и **W** – m = 3.) Тогда любой вектор $\vec{x}\in V$ можно представить в виде $\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2$. В силу линейности оператора A получим

$$A\vec{x}=A(x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2)=x_1A\vec{u}_1+x_2A\vec{u}_2 \qquad (2.21)$$

Векторы $A\vec{u}_1$ и $A\vec{u}_2\in W$ однозначно разлагаются по базису векторов пространства **W**:

$$A\vec{u}_1=a_{11}\vec{v}_1+a_{21}\vec{v}_2+a_{31}\vec{v}_3;\qquad A\vec{u}_2=a_{12}\vec{v}_1+a_{22}\vec{v}_2+a_{32}\vec{v}_3, \qquad (2.22)$$

где (a_{11}; a_{21}; a_{31}) и (a_{12}; a_{22}; a_{32}) – координаты векторов $A\vec{u}_1$ и $A\vec{u}_2$ соответственно в базисе $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$. Так как вектор $A\vec{x}$ тоже принадлежит пространству **W**, то аналогично

$$A\vec{x}=y_1\vec{v}_1+y_2\vec{v}_2+y_3\vec{v}_3, \qquad (2.23)$$

где y_1 и y_2 – координаты вектора $A\vec{x}$ в пространстве **W**. Из формул (2.21), (2.22) и (2.23) получим

$$y_1\vec{v}_1+y_2\vec{v}_2+y_3\vec{v}_3=x_1(a_{11}\vec{v}_1+a_{21}\vec{v}_2+a_{31}\vec{v}_3)+x_2(a_{12}\vec{v}_1+a_{22}\vec{v}_2+a_{32}\vec{v}_3),$$

откуда, приравняв координаты при соответствующих векторах $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$, получим систему равенств вида

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \\ y_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2. \end{cases} \qquad (2.24)$$

Равенства (2.24) позволяют вычислить координаты y_1, y_2, y_3 вектора $\vec{y} = A\vec{x}$ при линейном отображении $A : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ через координаты x_1, x_2 вектора $\vec{x} \in V$, линейный оператор **A** имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}. \qquad (2.25)$$

Из равенств (2.24) и (2.25) следует, что при заданных базисах $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ в пространстве **V** и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ в пространстве **W** линейный оператор $A : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ полностью определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.26)$$

которая называется матрицей линейного оператора **A** выбранных базисах.

Между множествами матриц и линейных операторов устанавливается взаимно-однозначное соответствие, поэтому линейные операторы и соответствующие им матрицы обозначают одними и теми же буквами, то есть если **A** – линейный оператор, то A – его матрица.

Таким образом, равенство $\vec{y} = A\vec{x}$ в координатной форме имеет вид

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}. \qquad (2.27)$$

2.8.3. Примеры линейных операторов

Если $\mathbf{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ или $\mathbf{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ – линейные операторы. действующие в пространстве $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$, то их матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

соответственно. Эти операторы переводят векторы из $\mathbf{R}^2$ в векторы из $\mathbf{R}^2$ или векторы из $\mathbf{R}^3$ в векторы того же пространства $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим некоторые таких линейных операторов.

Пусть **A** – оператор подобия, отображающий вектор $\vec{x} \in R^3$ в некоторый параллельный ему вектор $\vec{y} = \alpha\vec{x}$. Линейность этого оператора очевидна.

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – базис пространства $\mathbf{R}^3$, то

$$A\vec{i} = \alpha\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k};$$
$$A\vec{j} = 0\vec{i} + \alpha\vec{j} + 0\vec{k};$$
$$A\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \alpha\vec{k},$$

и, значит, матрица этого оператора

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

При $\alpha = 1$ получим матрицу E тождественного оператора, при $\alpha = -1$ – матрицу –E оператора, противоположного тождественному, при $\alpha = 0$ – матрицу нулевого оператора.

Пусть **A** – оператор поворота векто-ров плоскости $\mathbf{R}^2$ вокруг начала координат на угол φ против часовой стрелки. Это преобразование линейно.

Найдем матрицу оператора поворота. Из рис. 2.12 видно, что

$$A\vec{i} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\vec{j} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j};$$

$$A\vec{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j} = -\sin\varphi\ \vec{i} + \cos\varphi\ \vec{j},$$

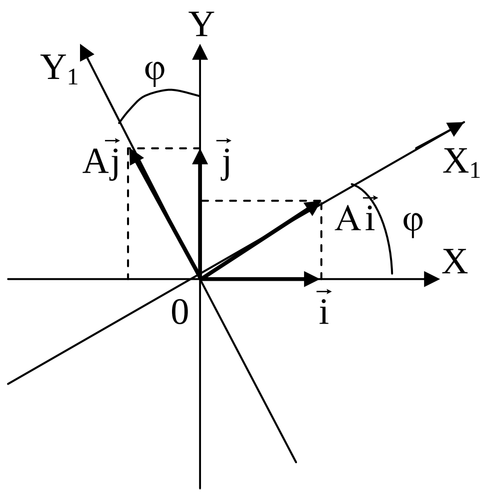

Рис. 2.12

так что матрица поворота в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \qquad (2.28)$$

Матрица A, определённая равенством (2.28), называется матрицей перехода от старого базиса к новому (рис. 2.12).

Используя матрицу (2.28), получим формулы преобразования координат вектора при повороте на угол φ. Пусть x_1, x_2 – координаты вектора $\vec{x}$, тогда координаты y_1, y_2 вектора $\vec{y} = A\vec{x}$ при повороте вектора на угол φ определяются из соотношений

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot x_2; \\ y_2 = \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2. \end{cases}$$

Пример 2.10.

Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ – линейный оператор, для которого $\vec{y} = A\vec{x}$, где

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу перехода оператора **A**.

Решение. Согласно условию и равенству (2.26), матрица A имеет две строки и три столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

По определению,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = A\vec{i} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = A\vec{j} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = A\vec{k} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

так что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A получить проще, если воспользоваться тем, что её строки составлены из коэффициентов разложения координат вектора $\vec{y}$ по координатам вектора $\vec{x}$, то есть из условия задачи следует, что

$y_1 = 1\cdot x_1 - 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3$, откуда $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 0$;

$y_1 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 2\cdot x_3$, откуда $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 2$.

2.8.4. Действия над линейными операторами

Пусть даны два линейных оператора **A** и **B**, отображающих пространство V с базисом $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ в линейное пространство W с базисом $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Матрицы этих линейных операторов A и B соответственно.

Суммой линейных операторов **A** и **B** называется оператор **A** + **B**, определяемый равенством $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}, \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$.

Произведением линейного оператора **A** на число α называется оператор α**A,** определяемый равенством $(\alpha\mathbf{A})\vec{\mathbf{x}} = \alpha(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}), \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$.

Линейность операторов **A** + **B** и α**A** очевидна.

Операторы **A** и **B**, действующие из V в W в заданных базисах имеют матрицы A и B одинаковых размеров. Учитывая равенство (2.26), получаем матричные равенства $(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$; $(\alpha A)\vec{x} = \alpha(A\vec{x})$ для суммы операторов и произведения оператора на число.

Пусть U, V и W – три линейных пространства размерностей k, n и m соответственно. Произведем или композицией двух линейных операторов **A** : V→W и B : U →V называется оператор **C** : U →W, обозначаемый **C** = **AB**, такой, что

$$C = (AB)\vec{x} = A(B\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in U. \tag{2.29}$$

Линейность операторов **C** = **AB** очевидна.

Согласно равенствам (1.4) и (2.29), матрица произведения линейных операторов равна произведению матриц этих операторов. C = AB.

Заметим, что, вообще говоря, как и для матриц **AB ≠ BA**.

2.8.5. Обратный оператор

Если линейный оператор **A** с невырожденной матрицей [1,3.4] отображает пространство **V** в линейное пространство **W**, то существует обратный оператор оператору **A** и обозначается $\mathbf{A^{-1}}$, то есть для $\vec{x} \in V$ и $\vec{y} \in W$ $\vec{y} = A\vec{x}$, а $\vec{x} = A^{-1}$. Матрицы взаимно обратных операторов взаимно обратны, так как их произведение даёт единичную матрицу.

Множество всех линейных операторов **A,** отображающих пространство **V** в линейное пространство **W,** размерностью n и m соответственно, образуют линейное пространство размерностью n·m.

2.9. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ – линейный оператор и A – его матрица.

Определение. Собственным вектором линейного оператора A (матрицы A) называется ненулевой вектор $\vec{x}$ такой, что

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{2.30}$$

Число λ называется собственным числом, отвечающим собственному вектору $\vec{x}$. Для единичной матрицы E любой вектор $\vec{x}$ является собственным, с собственным числом, равным 1, так как $E\vec{x} = \vec{x}$.

Для определения собственных чисел и собственных векторов равенство (2.30) перепишем в виде $A\vec{x} = \lambda E\vec{x}$ или $A\vec{x} - \lambda E\vec{x} = 0$, то есть

$$(A - \lambda E)\vec{x} = 0. \tag{2.31}$$

Соотношение (2.31) представляет собой матричную запись однородной системы n уравнений с n неизвестными, определитель которой равен

$$\det(A - \lambda E)=0. \tag{2.32}$$

Для того, чтобы система (2.31) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (2.32). Соотношение (2.32) представляет собой уравнение относительно λ. Это уравнение называется характеристическим.

Характеристическое уравнение (2.32) можно записать в виде

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.33}$$

Решив это уравнение, найдём собственные числа $\lambda = \lambda_i$ матрицы A. Для каждого из λi, решая уравнение (2.31), найдём собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

Среди корней характеристического уравнения (2.32) могут быть и кратные, то есть когда $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^m Q(\lambda)$, где $Q(\lambda)$ – многочлен степени $(n - m)$ относительно λ, причём $Q(\lambda_i) \neq 0$.

Если $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots x_n)^T$, то в координатной форме систему (2.31) можно записать в виде

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases}$$

2.9.1. Свойства собственных векторов

1. Любая линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному числу, является также собственным вектором с тем же собственным числом.

2. Если собственные векторы $x_1,x_2,\ldots x_k$ отвечают попарно различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то система векторов $x_1,x_2,\ldots x_k$ линейно независима.

3. Собственные числа линейного оператора **A** : **V** → **W** не изменяются при изменении базиса.

Пример. 2.11.

Найти собственные значения и собственные векторы для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 4 & -7-\lambda & 8\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Вычисляя этот определитель, получим $(\lambda + 1)^2(\lambda - 3) = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Система для определения собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_2 = 3$ имеет вид:

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-10x_2+x_3=0,\\ 6x_1-7x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

Третье уравнение равно разности второго и первого, поэтому его можно вычеркнуть из системы. Получим систему

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 2x_1-5x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

В качестве свободной неизвестной величины можно выбрать x_3 и выразить через неё неизвестные x_1 и x_2. Получим

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3, \quad x_2 = x_3.$$

Полагая $x_3 = 2$, найдем собственный вектор $\vec{x}_2 = (1;2;2)^T$.

Аналогично найдём собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = -1$, $\vec{x}_1 = (1;2;1)^T$.

Заметим, что собственному числу $\lambda_1 = -1$ кратности 2 соответствует лишь один с точностью до постоянного множителя собственный вектор, так как в рассматриваемом примере rang(A – λT) = 2 при λ = –1. Таким образом, матрица A имеет лишь два линейно независимых собственных вектора.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти длину и направляющие косинусы вектора:

1.1. $\vec{a} = i + 2j + k - 0{,}8(i + 2j) + 0{,}6k$. **1.2.** $\vec{a} = 20i + 30j - 60k$.

2. Найти орт вектора:

2.1. $\vec{a} = i + 2j + 3k$. **2.2.** $\vec{a} = 0{,}2i + 0{,}2j - 0{,}4k$. **2.3.** $\vec{a} = 11i + 22j + 33k$.

3. Образуют ли трапецию точки A(3;–1;2), B(1;2; –1), C(–1;1; –3), D(3; –5;3)?

4. Точки A, B, C, D – вершины параллелограмма. Точка O – точка пересечения его диагоналей (его центр). Найти разложение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AO}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BO}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CO}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DO}$.

5. Вычислить скалярное произведение векторов:

5.1. $\vec{a} = i + 2j$ и $\vec{b} = 3i - 4j$. **5.2.** $\vec{a} = j + 0{,}02k$ и $\vec{b} = 2i + 10j$. **5.3**. $\vec{a} = i + 3j - 5k$ и $\vec{b} = 5i + k$.

6. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ и $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$:

6.1 . $\vec{a} = 2i + j$, $\vec{b} = i + j$. **6.2**. $\vec{a} = 2i - j$, $\vec{b} = i + 2j$. **6.3.** $\vec{a} = 4i - 3j + 2k$, $\vec{b} = i + j + k$.

7. Вычислить векторное произведение векторов:

7.1. $\vec{a} = i + 2j$ и $\vec{b} = 3k$. **7.2.** $\vec{a} = i + 2j - 2k$, $\vec{b} = 7i + 4j + 6k$. **7.3**. $\vec{a} = (0;1;2)$, $\vec{b} = (2;0;3)$.

8. Найти синус угла между векторами:

8.1. $\vec{a} = (-2;2;1)$ и $\vec{b} = (2;3;-2)$. **8.2**. $\vec{a} = 6i + k$ и $\vec{b} = i + 3j$. **8.3**. $\vec{a} = i + 2j - 3k$ и $\vec{b} = 2k$.

9. Указать левой или правой тройкой являются векторы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:

9.1. $\vec{a} = j$, $\vec{b} = i$, $\vec{c} = k$. **9.2.** $\vec{a} = i + j$, $\vec{b} = j - k$, $\vec{c} = k$. **9.3.** $\vec{a} = i + k$, $\vec{b} = j + 2k$, $\vec{c} = 2i$.

10. Компланарны ли векторы:

10.1. $\vec{a}=(1;1;1)$, $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(1;0;2)$. **10.2**. $\vec{a}=-2i-j+к$, $\vec{b}=4i-4j+k$, $\vec{c}=4i-4j+k$.

11. Найти объём тетраэдра построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

11.1. $\vec{a}=(4;-2;0)$, $\vec{b}=(-3;6;3)$, $\vec{c}=(1;4;-5)$. **11.2**. $\vec{a}=8i+3j-2к$, $\vec{b}=3j-k$, $\vec{c}=4i$.

12. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

13. Показать, что собственные векторы матрицы $S=\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$ ортогональны.

Ответы:

1.1. 1,66; 0,12; 0,24; 0,96. **1.2**. 70; 2/7;3/7;-6/7. **2.1**. $\frac{1}{\sqrt{14}}i+\frac{2}{\sqrt{14}}j+\frac{3}{\sqrt{14}}k$. **2.2**. $\frac{1}{\sqrt{6}}i+\frac{1}{\sqrt{6}}j-\frac{2}{\sqrt{6}}k$. **2.3**. 0,27i +0,53j +0,80k. **3**. Да. **4.** $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{c}$; $\overrightarrow{CD}=\vec{c}-\vec{d}$; $\overrightarrow{DA}=\vec{d}-\vec{a}$. **5.1**. –5. **5.2**. 10. **5.3**. 0. **6.1**. $пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, $пр_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{3}{\sqrt{5}}$. **6.2**. $пр_{\vec{b}}\vec{a}=0$, $пр_{\vec{a}}\vec{b}=0$. **6.3**. $пр_{\vec{b}}\vec{a}=\sqrt{3}$, $пр_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{3}{\sqrt{29}}$. **7.1**. 6i – 3j. **7.2**. 20i – 20j – 10k. **7.3**. (3;4;-2). **8.1**. 1. **13.2**. $(167/185)^{1/2}$. **8.3**. $(5/56)^{1/2}$. **9.1**. Левая. **9.2**. Правая. **9.3**. Левая. **10.1.** Нет. **10.2**. Да. **11.1**. 24 куб.ед. **11.2**. 2 куб.ед. **12.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. $\vec{x}_1=(1;1;2)^T$, $\vec{x}_2=(1;0;1)^T$, $\vec{x}_3=(1;2;2)^T$. **13.** $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$.

Вопросы для самоподготовки

1. Векторы.
2. Линейные операции над векторами и их свойства.
3. Линейные пространства. Типы линейных пространств.
4. Чему равна проекция вектора на ось?
5. Координаты вектора в декартовой прямоугольной системе координат. Длина вектора.
6. Коллинеарные векторы. Условие коллинеарности векторов.
7. Скалярное произведение векторов, его свойства.
8. Угол между векторами. Условие перпендикулярности двух векторов.

9. Скалярное произведение векторов в координатной форме.
10. Геометрический и физический смысл скалярного произведения.
11. Евклидово пространство. Норма вектора.
12. Векторное произведение двух векторов.
13. Векторное произведение векторов в координатной форме.
14. Геометрический, физический и механический смысл векторного произведения.
15. Смешанное произведение трех векторов.
16. Смешанное произведение в координатной форме.
17. Геометрический смысл смешанного произведения.
18. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского
19. Определение Линейного оператора.
20. Действия над линейными операторами.
21. Обратный оператор.
22. Собственные векторы и собственные числа.
23. Свойства собственных векторов.

Рекомендуемая литература.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. –М., Наука, 1984.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984
3. Краснов М.Л, Киселев А.И. Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И, Соболев С.К. Вся высшая математика. Т.1. –М.: Эдиториал УРСС, 2001.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М., Наука, 1983.
5. Данко Л.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для втузов в 1 т. –М., Высшая школа, 2000.
6. Клетеник Б.П. Сборник задач по аналитической геометрии. –М.: Наука, 1986.

Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч.1. – Минск, В.Ш., 1985

Оглавление