А. А. Гусак

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

6-е издание

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным специальностям

Минск
«ТетраСистемс»

УДК [514.12+512.64](076.2)(075.8)
ББК 22.1я73
Г96

А в т о р
кандидат физико-математических наук, профессор *А. А. Гусак*

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета; доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного аграрного технического университета *И. В. Белько*

Гусак, А. А.
Г96 Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи : учеб. пособие / А. А. Гусак. – 6-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 288 с. : ил.

ISBN 978-985-536-229-7.

Учебное пособие включает следующие разделы: аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, векторная алгебра, определители и системы линейных алгебраических уравнений, матрицы. Пособие содержит определения основных понятий, соответствующие формулы, около 300 базовых ключевых примеров с подробными решениями. В конце каждого параграфа помещены задачи для самостоятельного решения, приведены ответы, к некоторым задачам даны указания. Будет полезным при подготовке к практическим занятиям, зачетам и экзаменам, а студентам заочных отделений поможет самостоятельно выполнить контрольные работы.

Адресуется студентам и преподавателям вузов.

УДК [514.12+512.64](076.2)(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-985-536-229-7

ВВЕДЕНИЕ

Учебные пособия к решению задач по высшей математике издаются в четырех книгах:

- **Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи.**
- **Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.**
- **Теория вероятностей. Примеры и задачи.**
- **Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. Справочное пособие.**

Данная книга посвящена решению задач **по аналитической геометрии и линейной алгебре** и включает такие разделы: аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, векторная алгебра, определители и системы линейных уравнений, матрицы.

Пособие имеет следующую структуру. В начале каждого параграфа приводятся соответствующие теоретические сведения (определения основных понятий, уравнения, формулы, правила, признаки, методы). Затем следуют примеры решения типовых задач различной степени трудности. Далее предлагаются задачи для самостоятельного решения. Ко всем задачам даны ответы, а к некоторым – и указания. Пособие снабжено иллюстративным и справочным материалом. В нем содержится система замечаний учебно-методического характера, полезных для студентов, изучающих курс высшей математики.

Рекомендуемая литература

Боревич З.И. Определители и матрицы. – М.: Наука, 1988.

Бугров С.Я., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.

Бугров С.Я., Никольский С.М. Задачник. – М.: Наука, 1984.

Высшая математика для инженеров: в 2 т. / С. А. Минюк, В. И. Булгаков, А. В. Метельский, З. М. Наркун; под общ. ред. проф. Н. А. Микулика. – Минск: Элайда, 2004. – Т. 1. – 464 с.

Гусак А.А. Высшая математика: в 2 т. – Мн.: ТетраСистемс, 1998–2004.

Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике: В 2 т. – Мн.: Выш. шк., 1988.

Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1998–2005.

Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.

Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1986.

Математика для инженеров: в 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский; под науч. ред. проф. Н. А. Микулика. – Минск: Элайда, 2006. – Т. 1. – 560 с.

Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Мн.: Выш. шк., 1976.

Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1988.

Глава 1. Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1.1. Система прямоугольных декартовых координат на плоскости. Простейшие задачи

Прямоугольными декартовыми координатами точки M на плоскости называются расстояния от этой точки $x = ML$, $y = MN$ (рис. 1.1) до координатных осей Oy и Ox, измеренные одной и той же единицей длины и взятые с соответствующими знаками. Если точка расположена справа от оси Oy, то абсцисса x данной точки положительна, если слева – отрицательна; если точка лежит выше оси Ox, ее ордината y положительна, если ниже оси Ox – отрицательна (при указанном на рис. 1.1 выборе положительных направлений осей, обозначенных стрелками). Для точек, лежащих на оси Oy, $x = 0$; для точек, лежащих на оси Ox, $y = 0$. Запись $M\,(x, y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y.

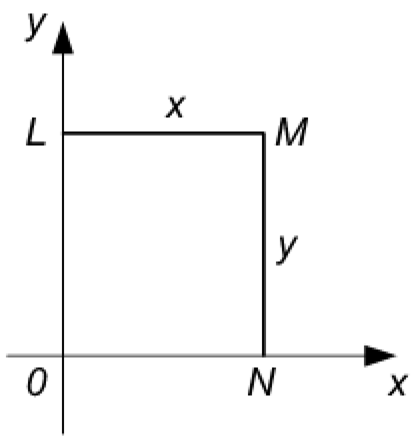


Рис. 1.1

1. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.1)$$

2. Координаты точки $M\,(x, y)$, делящей отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, в данном отношении $M_1M : MM_2 = l$ (при $l \neq -1$), определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l};\;\; y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}. \qquad (1.2)$$

3. Координаты середины отрезка M_1M_2 вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1.3}$$

4. Площадь треугольника с вершинами $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ равна

$$S = \pm\frac{1}{2}\,[\,(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\,], \tag{1.4}$$

где знак минус следует брать, когда выражение в квадратных скобках отрицательно, знак плюс – когда оно положительно.

Замечание. Формула (1.4) может быть написана в виде

$$S = \frac{1}{2}\left|\,(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\,\right|, \tag{1.4$'$}$$

где двумя вертикальными чертами обозначена абсолютная величина (арифметическое значение) выражения, стоящего в квадратных скобках. Абсолютная величина x определяется так:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|4| = 4$, $|-6| = 6$.

Пример 1. Построить точку $M(2, 3)$. Найти точки, симметричные точке M относительно координатных осей, биссектрис координатных углов и начала координат.

Замечание. Выражение «найти точки» означает найти координаты этих точек.

Решение. Построим сначала точку $M(2, 3)$. Отложив на оси Ox вправо от начала координат отрезок $OM_1 = 2$ (рис. 1.2), восставим в точке M_1 перпендикуляр к оси Ox. Отложив на оси Oy кверху от начала координат отрезок $OM_2 = 3$, восставим в точке M_2 перпендикуляр к оси Oy. Точка M пересечения указанных перпендикуляров является искомой. (Эту точку можно построить и другим способом: на перпендикуляре к оси Ox, проходящем через точку M_1, отложить отрезок $M_1M = 3$ кверху от оси Ox.)

Проводя последующие построения, пользуемся определением точек, симметричных относительно данной прямой (это точки, лежащие на одном перпендикуляре к прямой, на одинаковых расстояниях и по разные стороны от нее).

Построим точку N, симметричную точке M, относительно оси Ox.

Координаты этой точки $x_N = OM_1$, $y_N = -M_1N$ (точка N справа от оси Oy, поэтому $x > 0$ и ниже оси Ox, поэтому $y < 0$). Но $OM_1 = x_M$, $M_1N = M_1M = y_M$, следовательно, $x_N = x_M$, $y_N = -y_M$. Так как из условия $x_M = 2$, $y_M = 3$, то $N\,(2, -3)$.

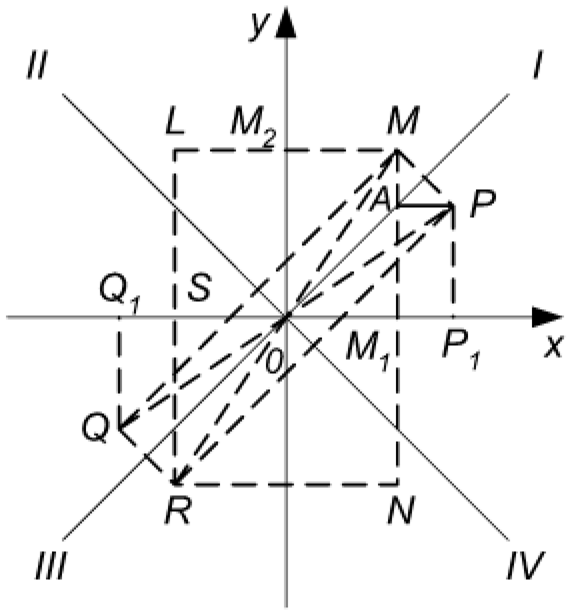


Рис. 1.2

Для точки L, симметричной точке M относительно оси Oy, находим:

$x_L = -LM_2 = -M_2M = -x_M$,

$y_L = LS = M_1M = y_M$, поэтому $L\,(-2, 3)$.

Построим теперь точку P, симметричную точке M относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Координаты ее $x_P = OP_1$ и $y_P = PP_1$ выразим через координаты точки M. С этой целью рассмотрим равнобедренные треугольники MAP и OAM_1 (A – точка пересечения M_1M и биссектрисы). Так как $OM_1 = M_1A$ и $M_1A = P_1P$, то $P_1P = OM_1$, т. е. $y_P = x_M$. Далее, поскольку $AM = AP = M_1P_1$, $M_1M = M_1A + AM$, $OP_1 = OM_1 + M_1P_1$, то $M_1M = OP_1$, т. е. $x_P = y_M$. Таким образом, получим $P\,(3, 2)$.

Построим точку Q, симметричную точке M относительно биссектрисы II и IV координатных углов. Из равных прямоугольных треугольников OQQ_1 и OPP_1 ($OQ = OP$, $\angle QOQ_1 = \angle POP_1$) находим, что $OQ_1 = OP_1$, $QQ_1 = PP_1$. Так как $OP_1 = M_1M$ и $PP_1 = OM_1$, то $OQ_1 = M_1M$, $QQ_1 = OM_1$. Следовательно, $x_Q = -y_M$, $y_Q = -x_M$ и $Q\,(-3, -2)$ (координаты точки Q отрицательны, так как она лежит ниже оси Ox и слева от оси Oy).

Построив точку R, симметричную точке M относительно начала координат, и рассмотрев равные прямоугольные треугольники ORS и OM_1M ($OR = OM$, $\angle SOR = \angle M_1OM$), получим $OS = OM_1$, $SR = M_1M$, поэтому $x_R = -x_M$, $y_R = -y_M$ и $R\,(-2, -3)$.

Ответ: $N\,(2, -3)$, $L\,(-2, 3)$, $P\,(3, 2)$, $Q\,(-3, -2)$, $R\,(-2, -3)$.

З а м е ч а н и е. Координаты точек N, L, P, Q, R, симметричных точке $M(2, 3)$ относительно соответственно оси Ox, оси Oy, биссектрисы I и III координатных углов, биссектрисы II и IV координатных углов, начала координат, можно получить с помощью следующих формальных действий:

1) для точки N – изменить знак y, оставив x прежним;
2) для точки L – изменить знак x, оставив прежним y;
3) для точки P – поменять местами x и y;
4) для точки Q – поменять местами x и y, изменив их знаки;
5) для точки R – изменить знаки x и y.

П р и м е р 2. Доказать, что треугольник с вершинами $P(-2,-1)$, $Q(6,1)$, $R(3,4)$ – прямоугольный.

Р е ш е н и е. Зная стороны a, b, c треугольника, с помощью теоремы Пифагора можно установить, является ли данный треугольник прямоугольным $(a^2+b^2=c^2)$, остроугольным $(c^2<a^2+b^2)$ или тупоугольным $(c^2>a^2+b^2)$.

Найдем длины сторон данного треугольника, пользуясь формулой (1.1). Вычислим вначале длину PQ, подставляя в формулу (1.1) координаты точек P и Q $x_1=-2$, $y_1=-1$, $x_2=6$, $y_2=1$:

$$PQ=\sqrt{[6-(-2)]^2+[1-(-1)]^2}=\sqrt{8^2+2^2}=\sqrt{68}.$$

Для вычисления PR подставим в формулу (1.1) значения $x_1=-2$, $y_1=-1$, $x_2=3$, $y_2=4$:

$$PR=\sqrt{[3-(-2)]^2+[4-(-1)]^2}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}.$$

Аналогично для 3-ей стороны $x_1=6$, $y_1=1$, $x_2=3$, $y_2=4$:

$$QR=\sqrt{(3-6)^2+(4-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}.$$

Квадраты длин сторон будут соответственно равны:

$$PQ^2=68;\ PR^2=50;\ QR^2=18,$$

откуда

$$PQ^2=PR^2+QR^2.$$

Последнее равенство означает, что треугольник прямоугольный.

З а м е ч а н и е . Формула (1.1) не изменится, если в ней поменять местами x_1 и x_2, y_1 и y_2 (так как $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$, $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$. При использовании этой формулы первой точкой (т. е. имеющей координаты x_1, y_1) можно считать любую из данных двух точек, оставшаяся точка будет второй (т. е. имеющей координаты x_2, y_2).

П р и м е р 3 . Вычислить длины медиан треугольника с вершинами $P(-3, 2)$, $Q(5, 4)$, $R(7, -2)$.

Р е ш е н и е . Найдем вначале основания медиан, являющиеся серединами сторон треугольника. Пусть L, M, N – соответственно середины сторон PQ, QR, PR. Координаты точки L определяем по формулам (1.3). В данном случае $x_1 = -3$, $y_1 = 2$, $x_2 = 5$, $y_2 = 4$. Обозначая координаты точки L через x_L и y_L, получим:

$$x_L = \frac{-3+5}{2} = 1; \quad y_L = \frac{2+4}{2} = 3; \quad L(1, 3).$$

Аналогичным образом находим:

$$x_M = \frac{5+7}{2} = 6; \quad y_M = \frac{4+(-2)}{2} = 1; \quad M(6, 1);$$

$$x_N = \frac{(-3)+7}{2} = 2; \quad y_N = \frac{2+(-2)}{2} = 0; \quad N(2, 0).$$

Вычислим длину медианы LR. Подставляя в формулу (1.1) координаты точек L и R, т. е. значения $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = -2$, получим

$$LR = \sqrt{(7-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}.$$

По формуле (1.1) находим длины медиан MP и NQ:

$$MP = \sqrt{[6-(-3)]^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82}.$$

$$NQ = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

З а м е ч а н и е . Формулы (1.3) не изменятся, если в них поменять местами x_1 и x_2, y_1 и y_2. При использовании этих формул первой точкой (т. е. имеющей координаты x_1, y_1) можно считать любую из двух данных точек.

П р и м е р 4 . Даны две смежные вершины параллелограмма

$A\,(1,-2)$, $B\,(3,2)$ и точка $N\,(5,-1)$ пересечения его диагоналей. Найти две другие вершины параллелограмма.

Решение. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то N – середина BD и середина AC, где D и C – две другие вершины. Формулы (1.3) для данного случая примут вид:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2},\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2};\ \ x_N = \frac{x_B + x_D}{2},\ y_N = \frac{y_B + y_D}{2},$$

откуда

$$x_C = 2x_N - x_A,\ y_C = 2y_N - y_A;\ \ x_D = 2x_N - x_B,\ y_D = 2y_N - y_B.$$

Подставляя в эти формулы координаты точек A, B и N найдем вершины $C\,(9,0)$, $D\,(7,-4)$.

Пример 5. В треугольнике с вершинами $P\,(2,3)$, $Q\,(6,3)$, $R\,(6,-5)$ найти длину биссектрисы QL.

Решение. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Найдем длины этих сторон. По формуле (1.1) имеем:

$$PQ = \sqrt{(6-2)^2 + (3-3)^2} = 4,$$

$$QR = \sqrt{(6-6)^2 + (-5-3)^2} = 8.$$

Следовательно,

$$PQ{:}QR = 4{:}8 = 1{:}2 \ \text{ и } \ PL{:}LR = 1{:}2,$$

где $L\,(x,y)$ – точка пересечения биссектрисы угла Q со стороной PR. Координаты точки L определим по формулам (1.2). В данном случае:

$$x_1 = 2;\ y_1 = 3;\ x_2 = 6;\ y_2 = -5;\ l = \frac{1}{2},$$

поэтому:

$$x = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3};\ \ y = \frac{3 + \frac{1}{2}(-5)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3};\ \ L\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

По формуле (1.1) вычисляем длину биссектрисы QL:

$$QL=\sqrt{\left(6-\frac{10}{3}\right)^2+\left(3-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

З а м е ч а н и е. В формулах (1.2) нумерация точек имеет существенное значение. При использовании этих формул нужно различать начало и конец отрезка. В данном примере можно было бы рассматривать отношение $RL{:}LP=2{:}1$, тогда точку R нужно считать первой (т. е. $x_1=6,\ y_1=-5$), точку P – второй $(x_2=2,\ y_2=3)$, число l в этом случае уже будет другим, а именно $l=2$. (Убедитесь в том, что постановка этих значений в формулы (1.2) дает прежний результат. Сделайте чертеж.)

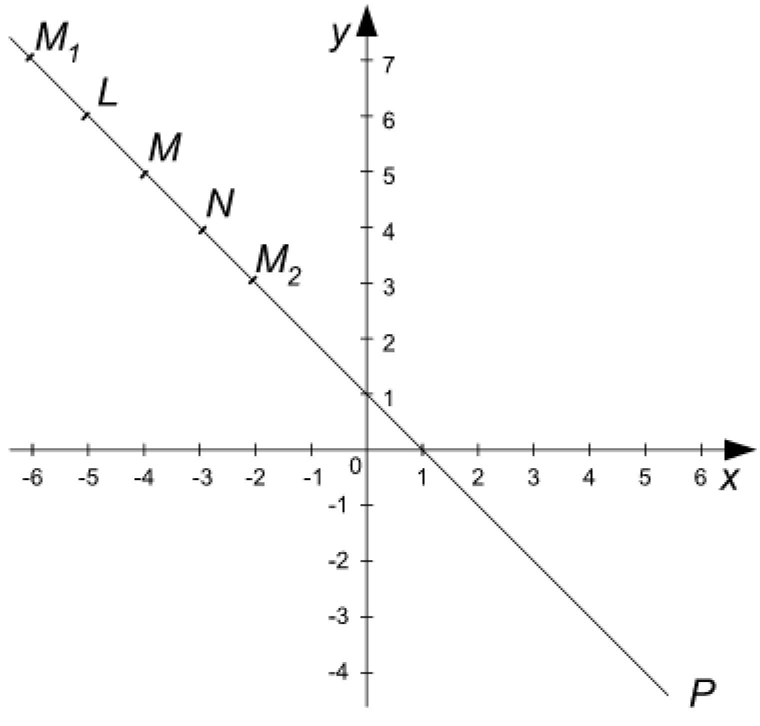


Рис. 1.3

Пример 6. Отрезок, определяемый точками $M_1(-6,7)$, $M_2(-2,3)$, разделен на 4 равные части. Найти точки деления L, M, N. До какой точки P нужно продолжить отрезок M_1M_2, чтобы его длина увеличилась в 3 раза?

Решение. По условию отношения, в которых точки L, M, N и P (рис. 1.3) делят отрезок M_1M_2, соответственно равны:

$$l_1=\frac{M_1L}{LM_2}=\frac{1}{3};\ \ l_2=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{2}{2}=1;$$

$$l_3=\frac{M_1N}{NM_2}=\frac{3}{1}=3;\ \ l_4=\frac{M_1P}{PM_2}=-\frac{3}{2}$$

(в последнем случае нужно взять знак минус, так как отрезки M_1P и PM_2 имеют противоположные направления). Координаты точек L, N и P определим по формулам (1.2), координаты точки M – по формулам (1.3).

Определяем координаты точки L. Поставив в формулы (1.2) значения $x_1 = -6,\ y_1 = 7,\ x_2 = -2,\ y_2 = 3,\ l = \frac{1}{3}$, получим:

$$x_L = \frac{-6 + \frac{1}{3}(-2)}{1 + \frac{1}{3}} = -5;\ \ y_L = \frac{7 + \frac{1}{3}\cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = 6;\ \ L(-5, 6).$$

Так как M – середина отрезка M_1M_2, то по формуле (1.3) имеем:

$$x_M = \frac{-6 + (-2)}{2} = -4;\ \ y_M = \frac{7+3}{2} = 5;\ \ M(-4, 5).$$

Подставляя в формулы (1.2) координаты точек M_1 и M_2 и $l_3 = 3$, находим точку N:

$$x_N = \frac{-6 + 3(-2)}{1+3} = -3;\ \ y_N = \frac{7 + 3\cdot 3}{1+3} = 4;\ \ N(-3, 4).$$

Аналогично находим точку P (принимая во внимание, что $l = -\frac{3}{2}$);

$$x_P = \frac{-6 + \left(-\frac{3}{2}\right)(-2)}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)} = 6;\ \ y_P = \frac{7 + \left(-\frac{3}{2}\right)3}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)} = -5;$$

$$P(6, -5).$$

Пример 7. Даны две точки $L(3, 5)$ и $M(6, -2)$. На оси Oy найти такую точку N, чтобы площадь треугольника LMN равнялась 15 квадратным единицам.

Решение. Пусть $N(0, y)$ – искомая точка ($x = 0$, так как точка лежит на оси Oy). В формулу (1.4) подставим значения

$$S = 15,\ x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 6,\ y_2 = -2,\ x_3 = 0,\ y_3 = y.$$

Получаем

$$15 = \pm\frac{1}{2}\left[(6-3)(y-5) - (0-3)(-2-5)\right] =$$

$$= \pm \frac{1}{2}(3y - 36),$$

отсюда

$$15 = \frac{1}{2}(3y - 36), \;\; 15 = -\frac{1}{2}(3y - 36).$$

Решая полученные уравнения относительно y, находим

$$y_1 = 22, \;\; y_2 = 2.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $N_1\,(0, 22)$, $N_2\,(0, 2)$.

Пример 8. Найти точку, одинаково удаленную от осей координат и от точки $M\,(1, 8)$.

Решение. Пусть $N\,(x, y)$ – искомая точка, ее координаты пока неизвестны. Так как по условию точка равноудалена от осей координат, то $y = x$ или $y = -x$ (см. определение прямоугольных декартовых координат, стр. 4).

Рассмотрим первый случай $(y = x)$. Выразим расстояние между точками $M\,(1, 8)$ и $N\,(x, y)$ через их координаты. По формуле (1.1) получаем

$$MN = \sqrt{(x-1)^2 + (x-8)^2}.$$

По условию это расстояние равно $|x|$, следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (x-8)^2} = |x|.$$

Освобождаясь от радикала, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 18x + 65 = 0,$$

корни которого $x_1 = 5, x_2 = 13$. Поскольку $y = x$, то $y_1 = 5, y_2 = 13$.

Следовательно, получены две точки, удовлетворяющие условию задачи: $N_1(5, 5)$, $N_2(13, 13)$.

Примечание. Второй случай $(y = -x)$ условию задачи не удовлетворяет.

Пример 9. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $L\,(0, 0)$, $M\,(3, -1)$, $N\,(8, 4)$.

Решение. Пусть $C\,(a, b)$ – центр окружности и R – ее радиус. Найдем неизвестные числа a, b и R. Согласно условию $CL = R$, $CM = R$, $CN = R$. Определим длины CL, CM, CN по формуле (1.1) и подставим их выражения в последние три равенства. Получим:

$$\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2} = R \text{ или } a^2+b^2 = R^2; \qquad \text{(A)}$$

$$\sqrt{(3-a)^2+(-1-b)^2} = R \text{ или } (3-a)^2+(1+b)^2 = R^2; \qquad \text{(B)}$$

$$\sqrt{(8-a)^2+(4-b)^2} = R \text{ или } (8-a)^2+(4-b)^2 = R^2. \qquad \text{(C)}$$

Раскрывая скобки в левых частях уравнений (B) и (C), используя уравнение (A), приводя подобные члены и сокращая соответственно на 2 и 8, находим:

$$\left.\begin{aligned} 5-3a+b=0;\\ 10-2a-b=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получаем: $a = 3, b = 4, C\,(3, 4)$. Из уравнения (A) находим, что $R = 5$.

Задачи

1. Построить точки: $M_1(1, 4)$, $M_2(-2, 3)$, $M_3(-4, -5)$, $M_4(2, -7)$, $M_5(0, 1)$, $M_6(4, 0)$, $M_7(0, -6)$, $M_8(-8, 0)$, $M_9(0, 0)$.

2. Найти точки, симметричные точке $M\,(-1, 5)$ относительно оси Ox, оси Oy, начала координат, биссектрис координатных углов.

3. Найти точки, симметричные точке $M\,(a, b)$ относительно координатных осей, начала координат, биссектрис координатных углов.

4. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $AD = 6$. Определить координаты вершин прямоугольника, приняв:

1) за оси координат две непараллельные стороны его и точку их пресечения за начало координат;

2) точку пересечения диагоналей за начало координат, за оси координат две прямые, параллельные сторонам прямоугольника.

5. Вычислить периметр треугольника с вершинами $A\,(3, 4)$, $B\,(3, 8)$, $C\,(6, 4)$.

6. Доказать, что треугольник с вершинами $P\,(3, 4)$, $Q\,(7, 7)$, $R\,(4, 3)$ – равнобедренный.

7. Установить, будет ли треугольник PQR с вершинами $P\,(2, 2)$, $Q\,(1, 6)$, $R(7, -1)$ остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

8. Дана середина отрезка $L\,(5, 2)$ и один из его концов $M\,(2, -1)$. Найти второй конец.

9. Даны середины сторон треугольника $L\,(-1, 5)$, $M\,(1, 1)$, $N\,(4, 3)$. Найти его вершины.

10. Отрезок, определяемый точками $M_1(-8, -9)$, $M_2(-3, -4)$ разделен на пять равных частей. Найти точки деления. До какой точки нужно продолжить отрезок M_1M_2, чтобы его длина увеличилась в 4 раза?

11. Дан треугольник с вершинами $A\,(-7, 7)$, $B\,(3, 2)$, $C\,(-1, -1)$. Найти точки, в которых сторона *AB* делится биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине *C*.

12. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершины которого $A\,(-2, 1)$, $B\,(2, -1)$, $C\,(4, 3)$.

13. Вычислить площадь треугольника с вершинами $P\,(0, -2)$, $Q\,(4, 5)$, $R\,(6, -4)$.

14. Даны вершины $A\,(2, 1)$, $B\,(-2, -2)$, $C\,(-8, 6)$ треугольника *ABC*. Найти длину высоты, опущенной из вершины В.

15. Доказать, что точки $A\,(-3, -4)$, $B\,(1, 4)$, $C\,(0, 2)$ лежат на одной прямой.

16. Даны две точки $L\,(4, 2)$, и $M\,(6, -2)$. На оси *Ox* найти такую точку *N*, чтобы площадь треугольника *LMN* была равна 8 квадратным единицам.

17. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A\,(-3, 2)$, $B\,(3, 4)$, $C\,(6, 1)$, $D\,(5, -2)$.

18. Найти центр тяжести треугольника с вершинами $A\,(1, -2)$, $B\,(4, 1)$, $C\,(7, -2)$.

19. На оси *Oy* найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $M\,(4, 5)$.

20. На координатных осях найти точки, удаленные от точки $M\,(4, 3)$ на 5 единиц.

Ответы

2. $N\,(-1, -5)$, $L\,(1, 5)$, $R\,(1, -5)$, $P\,(5, -1)$, $Q\,(-5, 1)$. Указание. См. пример 1. **3.** $N\,(a, -b)$, $L\,(-a, b)$, $R\,(-a, -b)$, $P\,(b, a)$, $Q\,(-b, -a)$. **4.** 1) $A\,(0, 0)$, $B\,(0, 2)$, $C\,(6, 2)$, $D\,(6, 0)$. В качестве положительного направления оси *Ox* взято направление от *A* к *D*, 2) $A\,(-3, -1)$, $B\,(-3, 1)$, $C\,(3, 1)$, $D\,(3, -1)$. **5.** 12. **7.** Тупой угол при вершине Р.

8. $N\,(8, 5)$. **9.** $A\,(-4, 3)$, $B\,(2, 7)$, $C\,(6, -1)$. **10.** $L_1(-7, -8)$, $L_2(-6, -7)$, $L_3(-5, -6)$, $L_4(-4, -5)$, $P\,(12, 11)$. Указание. $l_1 = \frac{1}{4}$, $l_2 = \frac{2}{3}$, $l_3 = \frac{3}{2}$, $l_4 = 4$, $l_5 = -\frac{4}{3}$. **11.** $K_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $K_2(13, -3)$. Указание. AC = 10, BC = 5, $l_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, $l_2 = -\frac{1}{2}$. **12.** $N(\frac{4}{3}, 1)$. **13.** 25 кв. ед. **14.** $h = 2\sqrt{5}$. Указание. Вычислить площадь S и длину AC. **15.** Указание. Убедиться в том, что $S_{\Delta ABC} = 0$. **16.** $N_1(1, 0)$, $N_2(9, 0)$. **17.** 26 кв. ед. **18.** $N\,(4, -1)$. Указание. Центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения медиан. **19.** $N\,(0; 4{,}1)$. **20.** $M_1(0, 0)$, $M_2(0, 6)$, $M_3(8, 0)$.

§ 1.2 Уравнение линии в прямоугольных декартовых координатах

Линия на плоскости задается как некоторое геометрическое место точек, т. е. совокупность точек, обладающих некоторым свойством, исключительно им присущим.

Уравнением линии на плоскости называется уравнение относительно переменных x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и только они.

В общем виде *уравнение линии на плоскости в прямоугольных декартовых координатах* записывается так:

$$F\,(x, y) = 0. \tag{1.5}$$

Из определения уравнения линии вытекает, что если при подстановке координат точки в данное уравнение получаем тождество, то точка лежит на соответствующей линии; если тождество не получается, то точка не лежит на этой линии.

Чтобы составить уравнение линии, как некоторого геометрического места точек, необходимо:

1) взять произвольную точку линии с текущими координатами x, y;

2) записать общее свойство точек данного геометрического места в виде равенства;

3) выразить входящие в это равенство величины с помощью координат.

Точки пересечения двух линий $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ находят из системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,\ y) = 0; \\ F_2(x,\ y) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.6)$$

Если система (1.6) имеет действительное решение, то линии пересекаются. Число точек пересечения равно числу решений системы. Если действительных решений нет, то линии общих точек не имеют.

Пример 1. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-2, 4)$, $M_2(6, 8)$.

Решение. Пусть $M\,(x,\ y)$ – произвольная точка данного геометрического места. По условию

$$M_1M = M_2M. \qquad (A)$$

С другой стороны, по формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$M_1M = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}; \;\; M_2M = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (A), находим уравнение данного геометрического места:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}.$$

Упростим полученное уравнение. Возведя в квадрат обе части уравнения и раскрывая скобки в подкоренных выражениях, находим

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64.$$

Перенося все члены в левую часть, приводя подобные и сокращая на 8, получим уравнение

$$2x + y - 10 = 0. \qquad (B)$$

Таким образом, координаты любой точки данного геометрического места удовлетворяют уравнению (B).

Покажем теперь, что если точка не принадлежит нашему геометрическому месту, то ее координаты не будут удовлетворять уравнению (B). В самом деле, пусть $N\,(x,\ y)$ – такая точка. Тогда выполняется одно из двух неравенств:

$$M_1N < M_2N; \;\; M_1N > M_2N$$

или в координатах:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} < \sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2};$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} > \sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}.$$

Первое из этих неравенств приводит к виду

$$2x+y-10<0,$$

а второе к виду

$$2x+y-10>0.$$

Следовательно, координаты точки N уравнению (В) не удовлетворяют.

Итак, уравнение данного геометрического места точек есть

$$2x+y-10=0.$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (из элементарной геометрии известно, что геометрическим местом точек, указанных в условиях задачи, будет прямая, перпендикулярная к отрезку M_1M_2 и проходящая через его середину).

З а м е ч а н и е . Если точка $N(x', y')$ не лежит на прямой $2x+y-10=0,$ то при подстановке ее координат в данное уравнение получаем либо $2x'+y'-10<0,$ либо $2x'+y'-10>0.$

П р и м е р 2 . Написать уравнение окружности радиуса $R=4$ с центром в начале координат. Лежат ли на этой окружности точки $A(4, 0)$, $B(2, 3)$, $C(4, 3)$, $D(3, -\sqrt{7})$, $E(1, 2)$, $F(0, 5)$?

Р е ш е н и е . Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данной окружности (геометрического места точек, удаленных от начала координат на 4 единицы). По определению окружности имеем $OM=4.$

Длина отрезка OM по формуле (1.1) равна

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Следовательно, уравнение окружности имеет вид

$$\sqrt{x^2+y^2}=4.$$

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим

$$x^2+y^2=16.$$

Выясним, лежат ли на данной окружности указанные точки. Подставляя координаты точки A в уравнение окружности, получаем тождество

$$4^2 + 0^2 = 16.$$

Таким образом, точка A лежит на окружности.

Для точки B получается неравенство

$$2^2 + 3^2 < 16,$$

поэтому точка B окружности не принадлежит. (Заметим, что точка B лежит внутри круга радиуса $R = 4$, ибо ее расстояние до начала координат $OB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} < 4$.)

Подстановка в уравнение координат точки $C(4, 3)$ приводит к неравенству

$$4^2 + 3^2 > 16,$$

следовательно, точка C также не лежит на окружности. (Заметим, что точка C лежит вне круга радиуса $R = 4$, так как ее расстояние до начала координат $OC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 > 4$.)

Аналогичным образом убеждаемся, что точка D лежит на окружности, а точки E и F ей не принадлежат.

Замечание 1. Если $R = a$, где a – положительное число, то уравнение окружности радиуса $R = a$ с центром в начале координат запишется так:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Замечание 2. Координаты любой точки, лежащей внутри круга радиуса $R = a$, удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < a^2,$$

для координат любой точки, лежащей вне этого круга, выполняется неравенство

$$x^2 + y^2 > a^2.$$

Пример 3. Точка M движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки $A(6, 0)$ втрое больше расстояния до точки $B\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Найти уравнение траектории движения точки M.

Решение. Текущие координаты точки M обозначим через x, y, т. е. $M(x, y)$. По условию задачи $MA = 3MB$.

Выразим расстояния MA и MB через координаты точек:

$$MA = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}; \quad MB = \sqrt{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-0)^2}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, получим уравнение траектории движения точки M:

$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 3\sqrt{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2}.$$

Упрощая это уравнение, находим

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Получено уравнение окружности радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (см. замечание 1 к примеру 2).

Пример 4. Найти геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек есть величина постоянная.

Решение. Пусть F_1 и F_2 – две данные точки (рис. 1.4). Расстояние между ними обозначим через $2a$, где a – некоторое число. Начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2, в качестве положительного направления оси Ox возьмем направление от точки F_1 к точке F_2, за ось Oy примем прямую, перпендикулярную к отрезку F_1F_2 и проходящую через его середину. При таком выборе системы координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты

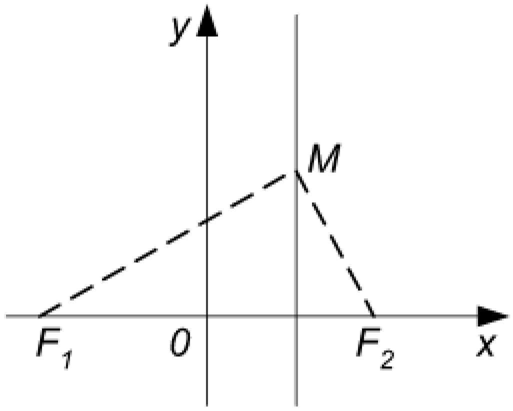


Рис. 1.4

$$x_1 = -a,\ y_1 = 0,\ x_2 = a,\ y_2 = 0, \text{ т. е. } F_1(-a, 0),\ F_2(a, 0).$$

Согласно условию, получаем

$$MF_1^{\,2} - MF_2^{\,2} = 4c,$$

где через $4c$ обозначена данная постоянная величина.

Подставляя в это равенство выражения

$$MF_1^{\,2} = (x+a)^2 + (y-0)^2; \quad MF_2^{\,2} = (x-a)^2 + (y-0)^2,$$

получим

$$(x+a)^2+y^2-[\,(x-a)^2+y^2\,]=4c,\;\; 4ax=4c,$$

т. е. $x=\dfrac{c}{a}$ или $x=b$, где $b=\dfrac{c}{a}$ – постоянная.

Замечание. Уравнение $x=b$, где b – постоянная, является уравнением прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок, равный b. В самом деле, если точка M лежит на этой прямой, то ее координата $x=b$. С другой стороны, если $x=b$, то точка лежит на указанной прямой.

Пример 5. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная a^2, где a – половина расстояния между точками F_1 и F_2. (Эта линия называется *лемнискатой Бернулли*.)

Решение. Начало координат выберем в середине отрезка F_1F_2, длина которого обозначена через $2a$. Ось Ox направим вдоль F_1F_2. Координаты точек F_1 и F_2 при указанном выборе координатной системы будут соответственно равны: $x_1=-a$, $y_1=0$, $x_2=a$, $y_2=0$, т. е. $F_1(-a,0)$, $F_2(a,0)$. Если $M\,(x,y)$ – произвольная точка геометрического места, то по условию

$$F_1M\cdot F_2M=a^2.$$

Подставляя в это равенство выражения

$$F_1M=\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2};\;\; F_2M=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2},$$

получим искомое уравнение данного геометрического места

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\,\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2.$$

Дальнейшие выкладки имеют целью получить уравнение лемнискаты Бернулли в более простом виде. Возводя в квадрат обе части уравнения и группируя члены, находим

$$[\,(x^2+y^2+a^2)+2ax\,][\,(x^2+y^2+a^2)-2ax\,]=a^4,$$

отсюда

$$[\,(x^2+y^2)+a^2\,]^2-4a^2x^2=a^4.$$

Преобразуя последнее уравнение, получаем

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(x^2+y^2)+a^4-4a^2x^2=a^4,$$

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$$

или в окончательном виде

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

Пример 6. Найти точки пересечения линий:

$$x^2+y^2=25;\ \ x+7y-25=0.$$

Решение. Решим систему уравнений данных линий. Определим x из последнего уравнения

$$x=-7y+25 \tag{A}$$

и подставим его в первое уравнение:

$$49y^2-350y+625+y^2=25.$$

После упрощения получим

$$y^2-7y+12=0,$$

откуда $y_1=4$, $y_2=3$. Подставляя эти значения в уравнение (A), найдем $x_1=-3$, $x_2=4$. Следовательно, линии пересекаются в двух точках: $M_1(-3, 4)$, $M_2(4, 3)$.

Пример 7. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=36$ с координатными осями.

Решение. Для любой точки, лежащей на оси Ox, ордината y равна нулю (по определению прямоугольных декартовых координат точки на плоскости). Обратно, если $y=0$, то точка лежит на оси Ox. Следовательно, ось Ox имеет уравнение $y=0$. Аналогично можно показать, что уравнение оси Oy есть $x=0$.

Чтобы получить точки пересечения данной окружности с осью Ox, необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2=36;\\ y=0.\end{aligned}\right\}$$

Подставляя значение y в первое уравнение, получим $x^2=36$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. Таким образом, данная окружность пересекает ось Ox в двух точках: $M_1(6, 0)$, $M_2(-6, 0)$.

Решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 36; \\ x = 0, \end{aligned}\right\}$$

получим $y_1 = 6$, $y_2 = -6$. Следовательно, точки $N_1(0, 6)$, $N_2(0, -6)$ являются точками пересечения окружности с осью Oy.

Пример 8. На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найти точки с ординатой $y = 4$ и точки с абсциссой $x = x_0$.

Решение. Подставляя значение $y = 4$ в уравнение окружности, получим

$$x^2 + 4^2 = 25 \text{ или } x^2 = 9,$$

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Таким образом, первому условию задачи удовлетворяют две точки $M_1(3, 4)$, $M_2(-3, 4)$.

Найдем точки данной окружности, для которых $x = x_0$. Подставляя это значение x в уравнение окружности, получим ${x_0}^2 + y^2 = 25$, откуда

$$y^2 = 25 - {x_0}^2, \quad y = \pm\sqrt{25 - {x_0}^2}.$$

Из последнего равенства видно, что y принимает действительные значения лишь в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. когда $25 - {x_0}^2 \geq 0$ или ${x_0}^2 \leq 25$. Это соотношение выполняется при x_0, для которых $-5 \leq x_0 \leq 5$. Следовательно, при условии $-5 \leq x_0 \leq 5$ существуют две точки:

$$N_1(x_0, \sqrt{25 - {x_0}^2}), \quad N_2(x_0, -\sqrt{25 - {x_0}^2}).$$

Задачи

1. Найти уравнение геометрического места точек, равноудаленных от начала координат и от точки $M\,(2, 6)$. Принадлежат ли этому геометрическому месту точки $A\,(7, 1)$, $B\,(2, 5)$, $C\,(1, 3)$, $D\,(-2, 4)$?

2. Определить траекторию движения точки M в каждом из следующих случаев:

1) расстояние до оси Oy равно a единицам;
2) расстояние до оси Ox равно b единицам;

3) расстояния до координатных осей равны между собой.

3. Написать уравнение линии, по которой движется точка M, оставаясь втрое дальше от оси Oy, чем от оси Ox.

4. Составить уравнение геометрического места точек, удаленных от начала координат на 6 единиц. Лежат ли на данной линии точки $A\,(6, 0)$, $B\,(3, 4)$, $C\,(7, 2)$, $D\,(5, -\sqrt{11})$?

5. Точка M движется так, что ее расстояние от точки $A\,(4, 0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B\,(16, 0)$. Найти уравнение траектории движения точки M.

6. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $A\,(8, 0)$ в четыре раза больше расстояния от точки $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

7. Найти точки пересечения линии $3x + 4y - 12 = 0$ с координатными осями.

8. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек пересечения линий:

$$x^2 + y^2 = 25,\ \ 4x - 3y = 0.$$

9. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $F\,(0, 2)$. В каких точках эта линия пересекает координатные оси?

10. Дана окружность диаметра $OA = 2a$ и касательная к ней в точке A. Через точку O проведен луч OC и на нем отложен отрезок OM, равный отрезку BC, заключенному между окружностью и касательной. Если луч OC будет вращаться около точки O, то точка M опишет кривую, называемую *циссоидой Диоклеса*. Составить уравнение этой кривой и построить ее.

Ответы

1. $x + 3y - 10 = 0$. Точки A, C и D принадлежат линии. **2.** 1) $x = a$, $x = -a$ (прямые, параллельные оси Oy); 2) $y = b$, $y = -b$ (прямые, параллельные оси Ox); 3) $y = x$ (биссектриса первого и третьего координатных углов), $y = -x$ (биссектриса второго и четвертого координатных углов). **3.** $y = \pm\frac{1}{3}x$. **4.** Окружность $x^2 + y^2 = 36$. На окружности лежат точки A и D, точка B – внутри окружности, точка C – вне ее. **5.** $x^2 + y^2 = 64$. **6.** Окружность $x^2 + y^2 = 4$. **7.** $M\,(4, 0)$, $N\,(0, 3)$. **8.** $3x + 4y = 0$.

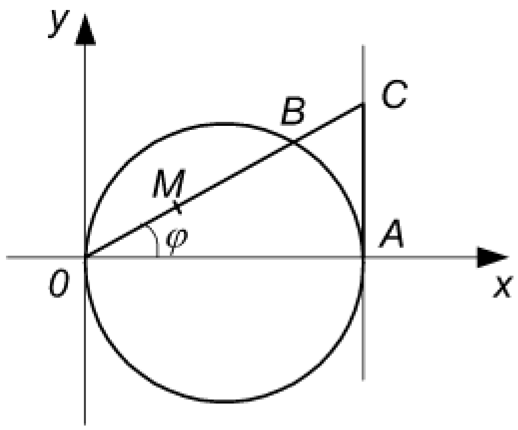


Рис. 1.5

9. $y = \dfrac{x^2}{4} + 1.$ $M\ (0, 1)$ – точка пересечения с осью Oy. Ось Ox линия не пересекает.

10. $x^3 = y^2(2a - x)$. Указание. Начало координат поместить в точку O, ось Ox направить вдоль OA (рис. 1.5), тогда $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $AC^2 = OC \cdot BC$, откуда: $BC = \dfrac{AC^2}{OC}$; $AC = 2a \operatorname{tg} \varphi = = 2a\dfrac{y}{x}$; $OC = \dfrac{2a}{\cos\varphi} = \dfrac{2a\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$. Подставить выражения OM и BC в равенство $OM = BC$.

§ 1.3 Прямая линия на плоскости

Положение прямой линии на плоскости относительно системы координат можно задать различными способами. Например, прямая однозначно определяется двумя точками, точкой и направлением, отрезками, отсекаемыми на осях координат, и т. д. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнения.

1.3.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла, образованного ею с положительным направлением оси Ox прямоугольной декартовой системой координат. (Положительные углы отсчитываются в направлении «против часовой стрелки» от оси Ox до прямой.)

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b, \tag{1.7}$$

где k – угловой коэффициент; b – отрезок, отсекаемый ею на оси Oy.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.8}$$

где A и B одновременно в нуль не обращаются (т. е. $A^2 + B^2 \neq 0$) называется *общим уравнением прямой*. Частные случаи этого уравнения:

1) $Ax + By = 0$ $(C = 0)$ – прямая, проходящая через начало координат;

2) $Ax + C = 0$ или $x = a$, где $a = -\dfrac{C}{A}$ $(B = 0, A \neq 0)$ – прямая, параллельная оси Oy;

3) $Ax = 0$ или $x = 0$ $(B = 0, C = 0)$ – ось Oy;

4) $By + C = 0$ или $y = b$, где $b = -\dfrac{C}{B}$ $(A = 0, B \neq 0)$ – прямая, параллельная оси Ox;

5) $By = 0$ или $y = 0$ $(A = 0, C = 0)$ – ось Ox.

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{1.9}$$

где a, b – длины отрезков, отсекаемых на осях координат, взятые с соответствующими знаками. Если a или b отрицательно, то это значит, что прямая пересекает соответствующую отрицательную полуось.

Если прямая не параллельна оси Oy (т. е. $B \neq 0$), то ее общее уравнение, разрешая относительно y, можно привести к уравнению с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где $k = -\dfrac{A}{B}, b = -\dfrac{C}{B}$.

Если прямая не проходит через начало координат (т. е. $C \neq 0$) и не параллельна ни одной из координатных осей, то ее общее уравнение путем деления на $-C$ можно привести к уравнению в отрезках

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -\dfrac{C}{A}, b = -\dfrac{C}{B}$.

Пример 1. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе первого координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный четырем единицам.

Решение. Искомая прямая, как и биссектриса первого координатного угла, образует с осью Ox угол $\alpha = 45^\circ$, поэтому $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Подставляя в уравнение $y = kx + b$ значения $k = 1$ и $b = 4$, получим искомое уравнение $y = x + 4$.

Пример 2. Построить прямые:

1) $y = 3x + 2$; 2) $3x - 4y = 0$; 3) $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$; 4) $2x - 3 = 0$; 5) $2y + 5 = 0$.

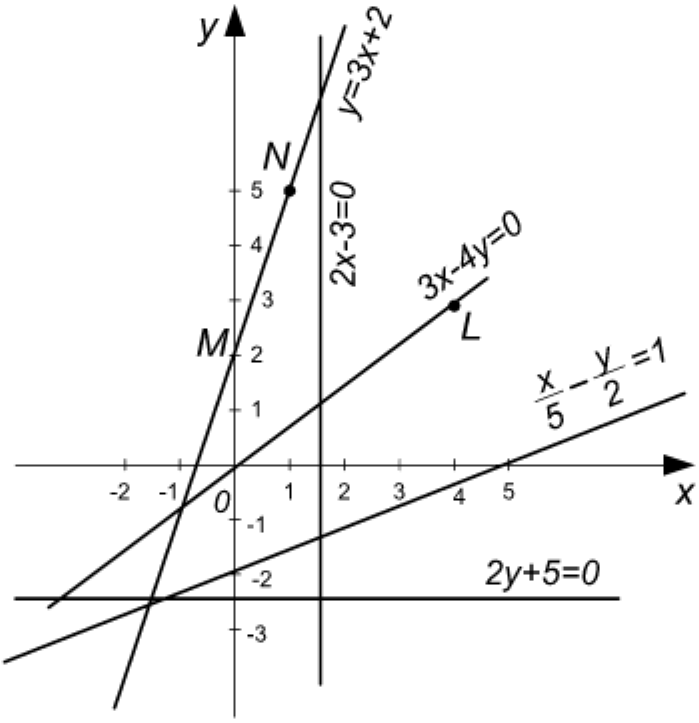


Рис. 1.6

Решение. Для построения прямой достаточно выбрать две ее произвольные точки. Координаты этих точек находят из уравнения прямой. Одной из координат приписывают любое значение, тогда другая однозначно определяется уравнением прямой.

Построим прямую $y = 3x + 2$. В уравнении прямой положим $x = 0$, тогда $y = 3 \cdot 0 + 2$, $y = 2$. Получили точку $M\ (0, 2)$. Полагая $x = 1$, получим $y = 5$. Вторая точка $N\ (1, 5)$. Строим точки M, N и через них проводим прямую (рис. 1.6).

Построим прямую $3x - 4y = 0$. Так как коэффициент $C = 0$, то прямая проходит через начало координат. Это можно получить и непосредственно: полагая $x = 0$, получаем $y = 0$. Положим $x = 4$, тогда $3 \cdot 4 - 4y = 0$, откуда $y = 3$; вторая точка $L\ (4, 3)$. Прямая, проходящая через точку L и начало координат, является искомой.

Уравнение $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$ можно переписать в виде $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$. Это уравнение прямой в отрезках, причем $a = 5, b = -2$. Откладывая эти отрезки, получим точки $P\ (5, 0)$, $Q\ (0, -2)$. Через точки P и Q проводим прямую.

Уравнение $2x-3=0$ перепишем так: $x=\frac{3}{2}$. Это прямая параллельна оси Oy и отсекает на оси Ox отрезок, равный $\frac{3}{2}$, справа от оси Oy.

Прямая $2y+5=0$ или $y=-\frac{5}{2}$ параллельна оси Ox, отсекает на оси Oy отрезок, равный $\frac{5}{2}$, книзу от оси Ox.

Замечание. Для нахождения координат точек из уравнения прямой можно придавать любые значения x или y, а потом из уравнения определить y или x. (Например, если $x=-2$, то для прямой $y=3x+2$ $y=-4$, если $y=-1$, то $x=-1$.) Геометрически это означает, что прямую можно построить по любым двум ее точкам.

Пример 3. Построить прямую $3x-4y-12=0$. Где лежат точки, для которых: 1) $3x-4y-12>0$; 2) $3x-4y-12<0$?

Решение. Чтобы построить прямую, достаточно фиксировать две ее произвольные точки. Пусть например, $x_1=0$, тогда

$$3\cdot 0-4y-12=0,\ -4y_1-12=0,\ y_1=-3.$$

Получили точку $M_1(0,-3)$. Положим $y_2=0$, тогда

$$3x_2-4\cdot 0-12=0,\ x_2=4.$$

Вторая точка $M_2(4,0)$. Построим точки M_1 и M_2 и проведем через них прямую. Прямая M_1M_2 и будет искомой (рис. 1.7).

Возьмем три точки плоскости $N_1(x_0,y_1)$, $N_2(x_0,y_2)$, $M_0(x_0,y_0)$, из которых точка M_0 лежит на прямой $3x-4y-12=0$, а точки N_1 и N_2 по разные стороны от нее. Так как все три точки имеют одну и ту же абсциссу, то они лежат на прямой, перпендикулярной оси Ox. Пусть для определенности $y_1<y_0<y_2$, т. е. N_1 лежит «ниже» прямой, а N_2 – «выше». Подставляя координаты этих точек в уравнение прямой найдем:

$$3x_0-4y_1-12>0;$$

$$3x_0-4y_2-12<0;$$

$$3x_0 - 4y_0 - 12 = 0.$$

Таким образом, если точка N_2 лежит выше прямой $3x - 4y - 12 = 0,$ то при подстановке ее координат в это уравнение получаем отрицательное число; для точки $N_1,$ лежащей ниже этой прямой, – положительное число. Обратное также верно.

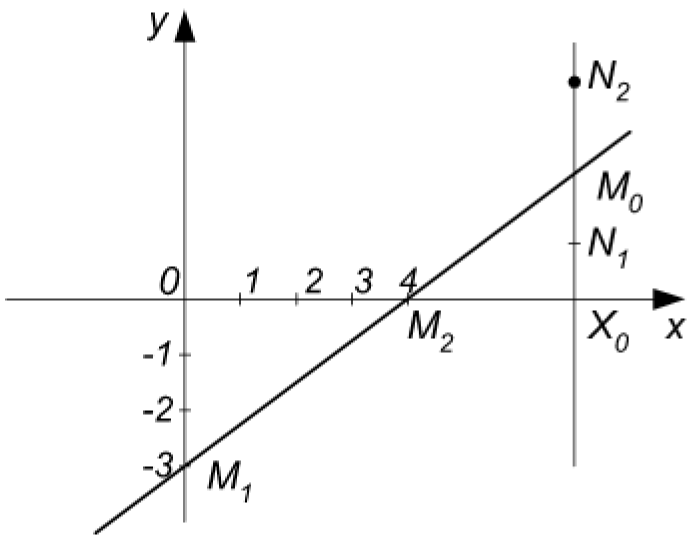


Рис. 1.7

Следовательно, для точек одной полуплоскости, определяемой прямой $3x - 4y - 12 = 0,$ имеем $3x - 4y - 12 > 0,$ для точек второй полуплоскости $3x - 4y - 12 < 0.$

З а м е ч а н и е . Последнее утверждение верно для любой прямой. Прямая $Ax + By + C = 0$ делит плоскость на две полуплоскости, для точек одной из них $Ax + By + C > 0,$ для точек другой $Ax + By + C < 0.$ Причем, если в уравнении прямой $C < 0$ и $Ax_1 + By_1 + C < 0,$ то точка $M_1(x_1, y_1)$ и начало координат лежат по одну сторону от прямой; если $C < 0$ и $Ax_2 + By_2 + C > 0,$ то точка $M_2(x_2, y_2)$ и начало координат расположены по разные стороны от прямой $Ax + By + C = 0.$

П р и м е р 4 . Определить параметры k и b прямых: $2x + 5y - 10 = 0;$ $3y + 7 = 0;$ $4x - 9y = 0.$

Р е ш е н и е . Разрешив первое уравнение относительно $y,$ получим

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{10}{5} \text{ или } y = -\frac{2}{5}x + 2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $y = kx + b,$ находим $k_1 = -\dfrac{2}{5},$ $b_1 = 2.$

Разрешив два других уравнения относительно $y,$ получим:

$$y = -\frac{7}{3}, \text{ откуда } k_2 = 0, \; b_2 = -\frac{7}{3};$$

$$y=\frac{4}{9}x,\ \text{откуда}\ k_3=\frac{4}{9},\ b_3=0.$$

Пример 5. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямыми:

$$7x+2y-14=0;\ 2x-3y-6=0;\ 4x+5y+8=0.$$

Решение. Разделим первое уравнение на 14, второе на 6, третье на – 8 и перенесем свободные члены в правые части. Сравнивая полученные уравнения с уравнением (1.9), находим соответственно:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1,\ a_1=2,\ b_1=7;\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1,\ a_2=3,\ b_2=-2;$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-\frac{8}{5}}=1,\ a_3=-2,\ b_3=-\frac{8}{5}.$$

Замечание. В последнем случае после деления на – 8 получим

$$\frac{x}{-2}+\frac{5y}{-8}-1=0.$$

Чтобы определить a и b, данное уравнение нужно привести к виду уравнения (1.9), т. е. написать его так, чтобы в правой части была единица, первое слагаемое левой части в числителе содержало только x, второе – в числителе только y.

Пример 6. Даны точки $L(-6, 0)$ и $N(0, 8)$. Через середину отрезка LN провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок втрое больший, чем на оси Oy.

Решение. Определяя координаты середины отрезка по формулам (1.3), получим точку $M(-3, 4)$. Уравнение прямой ищем в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

По условию $a=3b$. Следовательно, уравнение примет вид

$$\frac{x}{3b}+\frac{y}{b}=1.$$

Для определения b используем условие прохождения искомой прямой через точку $M(-3, 4)$. Так как точка M лежит на искомой прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$-\frac{3}{3b}+\frac{4}{b}=1,$$

откуда $b=3$. Подставляя это значение в равенство $a=3b$, получим $a=9$. Таким образом, уравнение искомой прямой запишется так:

$$\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1 \text{ или } x+3y-9=0.$$

Задачи

1. Написать уравнения прямых, параллельных биссектрисе второго координатного угла и отсекающих на оси Oy отрезки $b_1=3$, $b_2=-4$, $\mathrm{b}_3=\frac{5}{2}$.

2. Составить уравнения прямых, отсекающих на оси Oy отрезок $b=2$ и наклоненных к оси Ox соответственно под углами $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=45^\circ$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=135^\circ$.

3. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox соответственно углы $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=45^\circ$, $\alpha_3=60^\circ$, $\alpha_4=135^\circ$.

4. Уравнения прямых:

$$3x-y+2=0;\ \ 4x+2y-5=0;\ \ 2x+7y=0;$$

$$3y-8=0;\ \ 5x+9=0$$

привести к виду уравнений с угловыми коэффициентами.

5. Найти углы, образуемые прямыми:

$$x+y-2=0;\ \ x-y+5=0;\ \ 2y-3=0;\ \ 4x+7=0;$$

$$3x-2y=0$$

с осью Ox.

6. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямыми:

1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1;$ 2) $\frac{y}{5}-\frac{x}{2}=1;$

3) $2x+3y-6=0;$ 4) $3x-2y+12=0;$

5) $y=4x-2;$ 6) $y=6-3x.$

7. Построить прямые, заданные уравнениями:

$$y = -2x + 5;\ \frac{y}{3} - \frac{x}{4} = 1;\ 2x - 3y + 6 = 0;$$

$$4x + 5y - 20 = 0;\ 3x - 7y = 0;\ 4x + 5y = 0;$$

$$5x + 9 = 0;\ 3y + 5 = 0.$$

8. Вычислить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x + 7y - 14 = 0$.

9. Диагонали ромба, равные 10 и 12 единицам, приняты за оси координат. Найти уравнения сторон ромба.

10. Какая должна быть зависимость между коэффициентами a и b, чтобы прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ была наклонена к оси Ox под углом $\varphi = 45^\circ$?

11. При каких значениях C прямая $2x + 3y + C = 0$ отсекает на оси Oy отрезки $b_1 = 4$, $b_2 = -6$?

12. Найти значения B, при которых прямая $2x + By - 6 = 0$ образует с осью Ox углы $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$.

13. При каких значениях A прямая $Ax + 5y - 40 = 0$ отсекает на координатных осях равные отрезки?

14. Определить параметр b, при котором прямая $y = 2x + b$ отсекает на оси Ox отрезок $a = 3$.

Ответы

1. $y = -x + 3$, $y = -x - 4$, $y = -x + \frac{5}{2}$. **2.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$, $y = x + 2$, $y = 2$, $y = -x + 2$. **3.** $3y - \sqrt{3}x = 0$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -x$. **4.** $y = 3x + 2$, $y = -2x + \frac{5}{2}$, $y = -\frac{2}{7}x$, $y = \frac{8}{3}$, $x = -\frac{9}{5}$. **5.** $\alpha_1 = 135^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 90^\circ$, $\alpha_5 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. **6.** 1) $a = 4$, $b = 3$; 2) $a = -2$, $b = 5$; 3) $a = 3$, $b = 2$; 4) $a = -4$, $b = 6$; 5) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$; 6) $a = 2$, $b = 6$. **8.** $S = 7$ кв. ед. **9.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$, $-\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$, $-\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1$, $\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1$. **10.** $a = -b$. **11.** $C_1 = -12$, $C_2 = 18$. **12.** $B_1 = -2$, $B_2 = 2$. **13.** $A = 5$. **14.** $b = -6$.

1.3.2 Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Пересечение двух прямых

Тангенс угла между двумя прямыми:

$$y = k_1 x + b_1; \tag{A}$$

$$y = k_2 x + b_2 \tag{B}$$

определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{1.10}$$

Условие параллельности прямых (A) и (B) имеет вид

$$k_1 = k_2, \tag{1.11}$$

а условие их перпендикулярности

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \tag{1.12}$$

Если прямые заданы общими уравнениями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \tag{C}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \tag{D}$$

то тангенс угла между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \tag{1.13}$$

Условие параллельности прямых (C) и (D)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{1.14}$$

Условие их перпендикулярности

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{1.15}$$

Для нахождения общих точек прямых (C) и (D) необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

причем при

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \tag{1.17}$$

имеется единственная точка пересечения, при

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \tag{1.18}$$

прямые не имеют общей точки (они параллельны), при

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{1.19}$$

прямые имеют бесконечное множество общих точек (они совпадают).

Пример 7. Найти угол между прямыми:

$$y = -\frac{2}{5}x + 3; \;\; y = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}.$$

Решение. Подставляя в формулу (1.10) значения $k_1 = -\frac{2}{5}$, $k_2 = \frac{3}{7}$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{7} - \left(-\frac{2}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)} = \frac{\frac{29}{35}}{\frac{29}{35}} = 1, \;\; \varphi = 45^\circ.$$

Пример 8. Найти угол между прямыми:

$$6x + 8y + 5 = 0; \;\; 2x - 4y - 3 = 0.$$

Решение. Пользуемся формулой (1.13). Подставляя в нее значения $A_1 = 6$, $B_1 = 8$, $A_2 = 2$, $B_2 = -4$, находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{6\,(-4) - 2\cdot 8}{6\cdot 2 + 8\,(-4)} = \frac{-24 - 16}{12 - 32} = \frac{-40}{-20} = 2, \;\; \varphi = \operatorname{arctg} 2.$$

Замечание к примерам 7 и 8. Формулы (1.10) и (1.13) определяют тангенс одного из двух углов между прямыми, сумма которых равна 180°. Меняя нумерацию прямых, получим второе значение для тангенса угла, отличающееся от первого только знаком. Если в примере 7 считать второй прямую $y = -\frac{2}{5}x + 3$, тогда $k_1 = \frac{3}{7}$, $k_2 = -\frac{2}{5}$. По формуле (1.10) находим, что $\operatorname{tg}\varphi = -1$, откуда $\varphi = 135^\circ$. (Сделайте чертеж.)

Пример 9. Указать, какие из следующих прямых:

1) $3x - 15y + 16 = 0$; 2) $3x + 15y - 8 = 0$;

3) $6x - 30y + 13 = 0$; 4) $30x + 6y + 7 = 0$

параллельны и перпендикулярны.

Решение. Первая и третья прямые параллельны, так как выполняется условие (1.14). В самом деле: $A_1 = 3$; $B_1 = -15$; $A_2 = 6$; $B_2 = -30$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{B_1}{B_2} = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Третья и четвертая прямые перпендикулярны, ибо выполняется условие (1.15). Действительно,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 6 \cdot 30 + (-30)\,6 = 0.$$

Первая и четвертая прямые также перпендикулярны.

Замечание 1. Условие (1.14) означает, что если прямые параллельны, то коэффициенты при текущих координатах одной прямой можно получить из соответствующих коэффициентов другой путем умножения их на одно и то же число. Например, коэффициенты первой прямой получены умножением на $\frac{1}{2}$ коэффициентов третьей прямой, с другой стороны, коэффициенты третьей прямой получены из коэффициентов первой прямой умножением на 2.

Замечание 2. Из условия (1.15) вытекает, что если прямые перпендикулярны, то коэффициенты при x и y одной из них получаются из соответствующих коэффициентов другой переменой их мест и изменением знака одного из коэффициентов. Например, прямые $Ax + By + C = 0$, $Bx - Ay + C_1 = 0$ перпендикулярны.

Пример 10. Вычислить площадь треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями:

$$x - 3y + 11 = 0;\; 5x + 2y - 13 = 0;\; 9x + 7y - 3 = 0.$$

Решение. Искомую площадь вычислим по формуле (1.4), для чего вначале найдем координаты вершин треугольника.

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 11 = 0; \\ 5x + 2y - 13 = 0, \end{aligned}\right\}$$

находим вершину $P\,(1,\,4)$.

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y - 13 = 0; \\ 9x + 7y - 3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

получим вторую вершину $Q\,(5,\,-6)$.

Наконец, из системы

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 11 = 0; \\ 9x + 7y - 3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

получим третью вершину $R\,(-2,\,3)$.

С помощью формулы (1.4) находим, что $S = 17$ кв. ед.

Пример 11. Через точку $M\,(1,-2)$ провести прямую, параллельную прямой $4x + 7y - 3 = 0$, и прямую, перпендикулярную данной прямой.

Решение. Уравнение прямой, параллельной данной, ищем в виде

$$4x + 7y + C = 0,$$

где C – пока неизвестный коэффициент (см. замечание 1 к примеру 9). Так как искомая прямая проходит через точку $M\,(1,\,-2)$, то координаты последней должны удовлетворять уравнению прямой. Подставляя координаты точки в искомое уравнение, получим

$$4 \cdot 1 + 7\,(-2) + C = 0,$$

откуда $C = 10$.

Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$4x + 7y + 10 = 0.$$

Уравнение прямой, перпендикулярной данной, будем искать в виде

$$7x - 4y + C = 0$$

(см. замечание 2 к примеру 9).

Определим C из условия, что прямая проходит через точку $M\,(1,\,-2)$. Подставляя ее координаты в уравнение, получим

$$7 \cdot 1 - 4\,(-2) + C = 0,$$

откуда $C = -15$.

Таким образом, прямая, перпендикулярная данной, имеет уравнение

$$7x - 4y - 15 = 0.$$

Пример 12. Найти длины сторон треугольника и его внутренние углы, если известно, что стороны лежат на прямых:

$$x - 6y + 5 = 0;\;\; 5x - 2y - 3 = 0;\;\; x + y - 9 = 0.$$

Решение. Чтобы вычислить длины сторон треугольника, необходимо знать его вершины. Найдем их. Решая систему уравнений первых двух прямых

$$\left.\begin{aligned} x - 6y + 5 = 0;\\ 5x - 2y - 3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

получим вершину $A\,(1, 1)$.

Система уравнений первой и третьей прямой

$$\left.\begin{aligned} x - 6y + 5 = 0;\\ x + y - 9 = 0 \end{aligned}\right\}$$

определит вторую вершину $B\,(7, 2)$.

Из системы уравнений второй и третьей прямой

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y - 3 = 0;\\ x + y - 9 = 0 \end{aligned}\right\}$$

находим вершину $C\,(3, 6)$.

По формуле (1.1) вычисляем длины сторон:

$$AB = \sqrt{(7-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{37};$$

$$BC = \sqrt{(3-7)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32};$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{29}.$$

Так как

$$AB^2 < BC^2 + AC^2,$$

где AB – наибольшая сторона, то треугольник ABC остроугольный (см. пример 2 § 1.1).

Таким образом, ни один из внутренних углов треугольника не является тупым, а поэтому ни один из тангенсов этих углов не может быть отрицательным ($\operatorname{tg}\varphi < 0,$ если $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$).

Переходя к нахождению углов треугольника, заметим, что рассматривая прямые, на которых лежат его стороны, и пользуясь формулами (1.10) или (1.13), мы получаем тангенс внутреннего или внешнего угла при данной вершине (см. замечание к примерам 7 и 8 настоящего параграфа). Чтобы различить эти углы, будем руководствоваться следующими соображениями. Формулы (1.10) и (1.13) должны давать для тангенсов внутренних углов не более одного отрицательного числа (так как треугольник не может содержать более одного тупого внутреннего угла). Если тангенс одного из углов оказался отрицательным, нужно проверить является ли треугольник тупоугольным (аналитически, с помощью неравенства $c^2 > a^2 + b^2$).

По формуле (1.13) определяем тангенсы углов треугольника (внутренних или внешних пока неизвестно):

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1\,(-2) - 5\,(-6)}{1\cdot 5 + (-6)\,(-2)} = \frac{-2+30}{5+12} = \frac{28}{17};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1\cdot 1 - 1\,(-6)}{1\cdot 1 + 1\,(-6)} = \frac{1+6}{1-6} = -\frac{7}{5};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{5\cdot 1 - 1\,(-2)}{1\cdot 5 + 1\,(-2)} = \frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}.$$

Буквами φ_1, φ_2 и φ_3 обозначены внутренние или внешние углы соответственно при вершинах A, B и C. Таким образом, тангенс одного из углов оказался отрицательным. Это означает, что или треугольник тупоугольный, или угол φ_2 является внешним углом при вершине B. Поскольку выше было показано, что треугольник ABC остроугольный, то верно второе предположение. Меняя нумерацию прямых, пересекающихся в точке B (первой будем считать прямую

$x + y - 9 = 0$, второй – $x - 6y + 5 = 0$), по формуле (1.13) получаем

$$\operatorname{tg} B = \frac{1\,(-6) - 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 1\,(-6)} = \frac{-6-1}{1-6} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}.$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi_1 > 0$ $\operatorname{tg}\varphi_3 > 0$, то $\varphi_1 = \angle A$, $\varphi_3 = \angle C$. Тангенсы внутренних углов определены, величины углов можно найти по таблицам.

Ответ: $AB = \sqrt{37}$, $BC = \sqrt{32}$, $AC = \sqrt{29}$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{28}{17}$, $\operatorname{tg} B = \dfrac{7}{5}$, $\operatorname{tg} C = \dfrac{7}{3}$.

Замечание 1. При нумерации прямых, противоположных принятым здесь, мы получили бы

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{28}{17},\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{7}{5},\ \operatorname{tg}\varphi_3 = -\frac{7}{3}.$$

Этот результат не удовлетворяет условиям задачи (двух тупых внутренних углов в треугольнике быть не может).

Замечание 2. В некоторых аналогичных задачах может оказаться

$$\operatorname{tg}\varphi_1 < 0,\ \operatorname{tg}\varphi_2 < 0,\ \operatorname{tg}\varphi_3 < 0.$$

Этот случай надо отбросить (трех тупых внутренних углов в треугольнике быть не может). Нужно изменить нумерации на противоположные в каждой паре прямых.

Замечание 3. Если окажется

$$\operatorname{tg}\varphi_1 > 0,\ \operatorname{tg}\varphi_2 > 0,\ \operatorname{tg}\varphi_3 > 0,$$

то нужно проверить еще, нет ли тупого угла среди внутренних углов треугольника. Если такой угол имеется, нужно изменить нумерацию в соответствующей паре прямых (определяющих данную вершину).

Задачи

15. Найти углы между прямыми:

1) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x - 7; \\ y = 5x + 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x - 3; \\ x - 4y + 7 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{7}x - 2; \\ 7x + 3y + 5 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 4y + 9 = 0; \\ 6x - 2y - 3 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x-5y+2=0; \\ 5x+4y-3=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x-3y+5=0; \\ 2x-6y-3=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=1; \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{18}=1. \end{cases}$

16. Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат, если известно:

1) прямая параллельна прямой $2x-3y+5=0$;

2) перпендикулярна прямой $y=3x+5$;

3) образует угол 45° с прямой $y=2x-3$.

17. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых:

$$4x-3y+3=0;\ \ 3x+4y+4=0;\ \ x-7y+18=0.$$

18. Через точку пересечения прямых $3x+5y-8=0$; $4x-7y+3=0$ провести прямую, перпендикулярную первой из них, и прямую, параллельную прямой $2x+6y-2=0$.

19. Даны две стороны параллелограмма: $x-y+1=0$, $3x+2y-12=0$ и точка $E\,(6,4)$ пересечения его диагоналей. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

20. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых:

$$4x-3y+7=0;\ \ 3x+2y-16=0;\ \ x-5y+6=0.$$

Ответы

15. $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_4=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi_5=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_6=\dfrac{3}{4}\pi$, $\varphi_7=\dfrac{\pi}{4}$.

16. 1) $2x-3y=0$; 2) $y=-\dfrac{1}{3}x$; 3) $y=-3x$, $y=\dfrac{1}{3}x$. **17.** 90°, 45°, 45°. **18.** $5x-3y-2=0$, $2x+6y-8=0$. **19.** $x-y-5=0$, $3x+2y-40=0$. Указание. Определить точку пересечения двух данных сторон, являющуюся одной из вершин параллелограмма. Вторая вершина находится из условия, что точка E – середина отрезка. Через эту вершину провести прямые, параллельные данным. **20.** $AB=5$, $BC=\sqrt{13}$, $AC=\sqrt{26}$, $\operatorname{tg}A=\dfrac{17}{19}$, $\operatorname{tg}B=\dfrac{17}{6}$, $\operatorname{tg}C=\dfrac{17}{7}$.

1.3.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пучок прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ в данном направлении,

$$y - y_1 = k\,(x - x_1), \tag{1.20}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α – угол, образуемый этой прямой с осью Ox).

Если в уравнении (1.20) считать, что k принимает все действительные значения, то это уравнение будет уравнением пучка прямых, т. е. совокупности прямых, проходящих через данную точку (центр пучка). Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых

$$Ax + By + C = 0;$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

имеет вид

$$\alpha\,(Ax + By + C) + \beta\,(A_1x + B_1y + C_1) = 0, \tag{1.21}$$

где α и β принимают всевозможные действительные значения.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1,\ y_2 \neq y_1). \tag{1.22}$$

Угловой коэффициент этой прямой определяется формулой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1). \tag{1.23}$$

Замечание. Уравнение (1.20) не может выражать прямую пучка, параллельную оси Oy.

Пример 13. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(-2, 3)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

Решение. Искомая прямая, как и биссектриса второго координатного угла, образует с положительным направлением оси Ox угол $\varphi = 135^\circ$, поэтому $k = \operatorname{tg}135^\circ = -1$. Так как точка M дана, то $x_1 = -2$, $y_1 = 3$.

Уравнение (1.20) при $k=-1,\ \ x_1=-2,\ \ y_1=3$ принимает вид

$$y-3=-1\,[x-(-2)],\ \ y-3=-x-2$$

или

$$x+y-1=0.$$

Пример 14. Составить уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M\,(4,-5)$. Среди пучка прямых выбрать прямую, параллельную прямой $2x-3y+6=0$, и прямую, перпендикулярную ей.

Решение. Так как координаты точки M известны, т. е. $x_1=4,\ y_1=-5$, то уравнение

$$y+5=k\,(x-4),$$

где k может принимать любые действительные значения, является уравнением пучка прямых, проходящих через точку M.

При каждом фиксированном значении k получаем вполне определенную прямую. Среди этого множества прямых выберем ту, которая параллельна прямой $2x-3y+6=0$. Разрешив последнее уравнение относительно y, получим

$$y=\frac{2}{3}x+2,$$

откуда $k=\dfrac{2}{3}$, где k – угловой коэффициент данной прямой. Искомая прямая будет также иметь угловой коэффициент $k=\dfrac{2}{3}$.

Подставляя это значение k в уравнение пучка, находим уравнение искомой прямой:

$$y+5=\frac{2}{3}(x-4);\ \ 3y+15=2x-8$$

или окончательно

$$2x-3y-23=0.$$

Прямая, перпендикулярная прямой $2x-3y+6=0$, получается из уравнения пучка при $k=-\dfrac{3}{2}$ (это значение k найдено из условия перпендикулярности $k_1 = -\frac{1}{k_2}$). Следовательно, вторая искомая прямая определяется уравнением

$$y + 5 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

или

$$3x + 2y - 2 = 0.$$

(Решение задачи по отысканию прямых, параллельных или перпендикулярных данной прямой, сравните с решением примера 11.)

Пример 15. Составить уравнение прямых, проходящих через середины сторон треугольника с вершинами $A(3, 4)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 2)$.

Решение. Середины сторон AB, BC, CA обозначим соответственно через D, E, F. По формулам (1.3) находим, что $D(3, 3)$, $E(1, 2)$, $F(1, 3)$.

Подставляя в уравнение (1.22) координаты точек D и E, т. е. значения $x_1 = 3$, $y_1 = 3$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, получим уравнение прямой DE:

$$\frac{y-3}{2-3} = \frac{x-3}{1-3}, \quad \frac{y-3}{-1} = \frac{x-3}{-2}$$

или

$$x - 2y + 3 = 0.$$

Подстановка координат точек E и F в уравнение (1.22) приводит к соотношению

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1}{1-1},$$

лишенному смысла, так как знаменатель правой части обратился в нуль. Но в данном случае уравнение прямой, проходящей через точки E и F можно получить и непосредственно. Так как абсциссы точек E и F равны единице, то отрезок EF будет параллелен оси Oy и расположен справа от оси Oy на расстоянии $d = 1$ от нее. Уравнение прямой EF как прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $d = 1$, имеет вид

$$x = 1 \text{ или } x - 1 = 0.$$

Это уравнение формально можно получить и с помощью формулы (1.22), если считать, что соответствующий числитель также равен нулю, т. е. $x-1=0$.

Поскольку ординаты точек D и F равны трем, то отрезок DF будет параллелен оси Ox и отстоять от нее на расстоянии $d=3$. Следовательно, уравнение прямой DF, как параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок $b=3$, таково:

$$y=3 \text{ или } y-3=0.$$

Пользуясь уравнением (1.22) получаем тот же результат. В самом деле, подставляя в него координаты точек D и F, находим

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-3}{3-3},$$

откуда

$$y-3=0.$$

З а м е ч а н и е . Если при подстановке координат точек в уравнение (1.22) один из знаменателей обращается в нуль, то искомое уравнение получается приравниванием нулю соответствующего числителя. (Оба знаменателя одновременно в нуль обратиться не могут, так как это означало бы, что $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, т. е. что точки M_1 и M_2 совпадают, а их, естественно, считают различными).

П р и м е р 1 6 . Написать уравнение сторон и высот треугольника с вершинами $P(-4, 3)$, $Q(2, 5)$, $R(6, -2)$.

Р е ш е н и е . Напишем уравнение стороны PQ. Для этого подставим в уравнение (1.22) следующие значения: $x_1=-4$, $y_1=3$, $x_2=2$, $y_2=5$. Получаем

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x+4}{2+4}$$

или

$$y=\frac{x}{3}+\frac{13}{3}.$$

Из этого уравнения вытекает, что $k_{PQ}=\frac{1}{3}$, где через k_{PQ} обозначен угловой коэффициент прямой PQ.

Чтобы получить уравнение прямой QR, необходимо подставить в уравнение (1.22) значения: $x_1=2$, $y_1=5$, $x_2=6$, $y_2=-2$. Тогда получим

$$\frac{y-5}{-2-5}=\frac{x-2}{6-2}$$

или

$$y=-\frac{7}{4}x+\frac{17}{2},$$

откуда угловой коэффициент прямой $k_{QR}=-\frac{7}{4}$.

Аналогичным образом найдем уравнение прямой PR. Имеем

$$\frac{y-3}{-2-3}=\frac{x+4}{6+4},\ \ y=-\frac{1}{2}x+1,$$

откуда

$$k_{PR}=-\frac{1}{2}.$$

Высота, опущенная из точки $R\,(6,-2)$ на сторону PQ, определяется уравнением (1.20). В данном случае: $x_1=6$, $y_1=-2$, $k=-3$ (значение k получено из условия перпендикулярности двух прямых: $k_1=-\frac{1}{k_2}$, $k_2=k_{PQ}=\frac{1}{3}$). Подставляя эти значения в уравнение (1.20), получим

$$y+2=-3\,(x-6)\ \text{ или }\ 3x+y-16=0.$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины $Q\,(2,5)$, определяется следующими данными: $x_1=2$, $y_1=5$, $k=2$ (так как $k_{PR}=-\frac{1}{2}$). Подставим полученные значения в уравнение (1.20), тогда

$$y-5=2\,(x-2),\ \ 2x-y+1=0.$$

Аналогично найдем уравнение третьей высоты:

$$y-3=\frac{4}{7}(x+4),\ \ 4x-7y+37=0.$$

З а м е ч а н и е . При составлении уравнений прямой, проходящей через две данные точки, любую из них можно считать первой (т. е. имеющей координаты x_1, y_1). Убедитесь в том, что уравнение прямых PQ, QR, PR останутся прежними и для иной нумерации точек. Например, при составлении уравнений прямой PQ считайте, что $x_1 = 2,\ y_1 = 5,\ x_2 = -4,\ y_2 = 3.$

Пример 17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$, $8x + 4y + 9 = 0$, и параллельной прямой $x + 3y = 0$ (не находя точки M).

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку M, в соответствии с уравнением (1.21), имеет вид

$$\alpha\,(5x - y + 10) + \beta\,(8x + 4y + 9) = 0$$

или

$$(5\alpha + 8\beta)\,x + (4\beta - \alpha)\,y + (10\alpha + 9\beta) = 0. \qquad \text{(A)}$$

Записывая условие параллельности (формула (1.14)) для данного случая, получим

$$\frac{5\alpha + 8\beta}{1} = \frac{4\beta - \alpha}{3},$$

отсюда

$$16\alpha = -20\beta.$$

Можно взять $\alpha = -5$, $\beta = 4$. Уравнение (А) при этих значениях примет вид

$$7x + 21y - 14 = 0 \text{ или } x + 3y - 2 = 0.$$

Задачи

21. Стороны треугольника заданы уравнениями: $7x - 6y + 9 = 0$; $5x + 2y - 25 = 0$; $3x + 10y + 29 = 0$. Найти координаты вершин и уравнения высот треугольника.

22. Дан треугольник с вершинами $P\,(-4, 0)$, $Q\,(0, 4)$, $R\,(2, 2)$. Написать уравнения его медиан.

23. Даны вершины треугольника: $P\,(6, 0)$, $Q\,(0, 6)$, $R\,(-4, 4)$. Составить уравнения сторон треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

24. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $P\,(2, 1)$, $Q\,(0, 7)$, $R\,(-4, -1)$.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями: $y = 4x + 4$; $y = -x + 4$; $4y = x + 1$.

26. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек: $L\,(4, -1)$, $M\,(8, 1)$, $N\,(9, 4)$.

27. На прямой $x - 2y + 2 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $M_1(-2, 3)$, $M_2(2, -1)$.

28. Найти точку, симметричную точке $M\,(5, 5)$ относительно прямой $x + y - 3 = 0$.

29. Найти проекцию точки $M\,(-5, 4)$ на прямую $x - y - 5 = 0$.

Ответы

21. $P\,(-3, -2)$, $Q\,(3, 5)$, $R\,(7, -5)$, $6x + 7y - 7 = 0$, $2x - 5y - 4 = 0$, $10x - 3y - 15 = 0$. **22.** $3x - 5y + 12 = 0$, $3x - y + 4 = 0$, $y = 2$. **23.** $x - 2y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $2x + 5y - 21 = 0$. **24.** $N\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$. **25.** $5x - 2y = 0$. **26.** $N\,(4, 4)$. **27.** $N\,(0, 1)$. **28.** $N\,(-2, -2)$. **29.** $N\,(2, -3)$.

1.3.4. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой

Нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{1.24}$$

где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую; α – угол, образуемый этим перпендикуляром и осью Ox.

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой (1.24) вычисляется по формуле

$$d = \left| x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \right|. \tag{1.25}$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \tag{1.26}$$

умножением на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{1.27}$$

знак которого противоположен знаку C, приводится к нормальному виду

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \qquad (1.28)$$

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой (1.26) определяется формулой

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \qquad (1.29)$$

П р и м е р 1 8 . Написать уравнение прямой, если известно, что расстояние ее от начала координат равно $\sqrt{2}$ и что перпендикуляр, опущенный на нее из начала координат, составляет с осью Ox угол $\varphi = 45^\circ$.

Р е ш е н и е . По условию задачи $p = \sqrt{2},\quad \alpha = 45^\circ$, поэтому $\cos\alpha = \sin\alpha = \sqrt{2}/2$. Подставляя эти значения в уравнение (1.24), получим

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = 0,$$

откуда

$$x + y - 2 + 0.$$

П р и м е р 1 9 . Определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $x - y + 3 = 0$, и угол, образуемый этим перпендикуляром с осью Ox.

Р е ш е н и е . Уравнение прямой приведем к нормальному виду, для чего найдем нормирующий множитель. Из уравнения прямой следует, что $A = 1$, $B = -1$. По формуле (1.27) найдем

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Умножая уравнение прямой на нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\,x+\frac{1}{\sqrt{2}}\,y-\frac{3}{\sqrt{2}}=0,$$

откуда $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $p=\frac{3}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\alpha=135^\circ$, $p=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 20. Дан треугольник с вершинами $P\,(0,5)$, $Q\,(-3,1)$, $R\,(-1,-2)$. Найти длину высоты, опущенной из точки R.

Решение. Задача сводится к определению расстояния от точки R до прямой PQ. Напишем уравнение этой прямой. На основании уравнения (1.22) имеем

$$\frac{y-5}{1-5}=\frac{x-0}{-3-0},\ \ \frac{x}{-3}=\frac{y-5}{-4}$$

или

$$4x-3y+15=0.$$

Расстояние точки $R\,(1,-2)$ до этой прямой вычислим по формуле (1.29)

$$d=\left|\frac{4\cdot1-3\,(-2)+15}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=5.$$

Следовательно, длина высоты равна 5.

Замечание. Эту задачу можно было бы решить и другими способами. Например, длину искомой высоты можно вычислить, зная площадь треугольника PQR и длину основания PQ. Эта же длина определяется как расстояние между двумя точками R и M, где M – основание высоты, опущенной из точки R на основание PQ. В свою очередь координаты точки M можно найти, решая систему уравнений стороны PQ и высоты RM. (Решите задачу указанными способами и сравните с данным решением.)

Пример 21. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми:

$$A_1x+B_1y+C_1=0;\ \ A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Решение. Пусть $M_0(x_0,\,y_0)$ – фиксированная точка биссектрисы. Расстояние d_1 этой точки до первой прямой определится формулой

$$d_1 = \left| \frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right|,$$

расстояние d_2 до второй прямой – формулой

$$d_2 = \left| \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|.$$

Так как точка M_0 одинаково удалена от сторон угла, то

$$\left| \frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| = \left| \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|.$$

Это равенство имеет место для любой точки $M\,(x,\, y)$ биссектрисы, поэтому

$$\left| \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| = \left| \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|.$$

Последнее равенство можно записать так:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (1.30)$$

Полученные уравнения являются искомыми.

Пример 22 Найти точку M пересечения биссектрис внутренних углов треугольника PQR, стороны которого заданы уравнениями:

$$3x + 4y + 12 = 0 \;\; (PQ);$$

$$4x + 3y - 12 = 0 \;\; (QR);$$

$$3x - 4y - 12 = 0 \;\; (PR).$$

Решение. На основании формулы (1.30) уравнения биссектрис углов, образуемых сторонами PQ и QR, запишутся так

$$\frac{4x + 3y - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm \frac{3x + 4y + 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

или

$$4x + 3y - 12 = \pm\,(3x + 4y + 12),$$

отсюда:

$$4x + 3y - 12 - (3x + 4y + 12) = 0;$$

$$4x + 3y - 12 + (3x + 4y + 12) = 0.$$

Таким образом, уравнения биссектрис следующие:

$$x - y - 24 = 0;$$

$$x + y = 0.$$

Одно из этих уравнений будет уравнением биссектрисы внутреннего угла Q треугольника PQR, второе – уравнением биссектрисы внешнего угла. Так как вершины P и Q лежат по одну сторону от биссектрисы внешнего угла Q, то при подстановке их координат в уравнение этой биссектрисы получим числа одного знака (см. пример 3). Вершины P и R расположены по разные стороны от биссектрисы внутреннего угла Q, поэтому подстановка координат точек P и R в уравнение этой биссектрисы дает числа разных знаков. Два последних утверждения дают способ отличить биссектрису внутреннего угла от биссектрисы внешнего угла треугольника.

Найдем вершины треугольника PQR. Из уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y + 12 = 0; \\ 3x - 4y - 12 = 0 \end{aligned}\right\}$$

получаем $P\,(0, -3)$.

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y + 12 = 0; \\ 4x + 3y - 12 = 0, \end{aligned}\right\}$$

находим $Q\,(12, -12)$.

Аналогичным образом определим точку $R\,(3{,}36; -0{,}48)$.

Подставляя координаты точек $P\,(0, -3)$ и $R\,(3{,}36; -0{,}48)$ в уравнение $x - y - 24 = 0$, находим:

$$0+3-24<0;$$

$$3{,}36+0{,}48-24<0.$$

Получены числа одного знака, следовательно, уравнение $x-y-24=0$ является уравнением биссектрисы внешнего угла Q. Подставляя координаты этих же точек в уравнение $x+y=0$, получим:

$$0+(-3)<0;$$

$$3{,}36+(-0{,}48)>0.$$

Следовательно уравнение биссектрисы внутреннего угла Q треугольника PQR имеет вид

$$x+y=0.$$

Аналогичным образом найдем уравнение биссектрисы внутреннего угла R. На основании формулы (1.30) уравнения биссектрис углов, образованных прямыми PR и QR, будут

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm\frac{3x-4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}},$$

отсюда

$$4x+3y-12=\pm(3x-4y-12)$$

или

$$7x-y-24=0,\ \ x-7y=0.$$

Подставляя в первое из этих уравнений координаты двух вершин $P(0,-3)$, $Q(12,-12)$, получим:

$$7\cdot 0-(-3)-24<0;$$

$$7\cdot 12-(-12)-24>0.$$

Таким образом, уравнение

$$7x-y-24=0$$

будет уравнением биссектрисы внутреннего угла R.

Прямые PR и PQ, пересекающиеся в точке P, образуют два угла, биссектрисы которых имеют уравнения

$$\frac{3x+4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{3x-4y-12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

или

$$y+3=0,\ \ x=0.$$

Подставляя в первое из этих уравнений координаты точек $Q\,(12,\,-12)$, $R\,(3{,}36;\,-0{,}48)$, получим:

$$-12+3<0;$$

$$-0{,}48+3>0.$$

Следовательно,

$$y+3=0$$

является уравнением биссектрисы внутреннего угла P.

Чтобы определить точку M пересечения биссектрис внутренних углов треугольника PQR, достаточно найти точку пересечения двух из найденных биссектрис. Возьмем, например, биссектрисы QM и RM, уравнения которых

$$x+y=0;\ \ 7x-y-24=0.$$

Решая систему из двух последних уравнений, найдем, что точка M пересечения биссектрис имеет координаты $x=3$, $y=-3$. Задача решена. (Сделайте чертеж.)

Задачи

30. Даны уравнения прямых:

1) $5x+7y-9=0;$ 2) $\frac{1}{4}x+y-3=0;$

3) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y-6=0;$ 4) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-7=0;$

5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-2=0;$ 6) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-4=0.$

Какие из этих уравнений являются уравнениями в нормальном виде?

31. Привести к нормальному виду уравнения следующих прямых:

1) $5x+12y-26=0;$ 2) $3x-4y+10=0;$

3) $2x+2y+7=0;$ 4) $y=3x+5;$

5) $y = kx + b^2$;   6) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

32. Написать уравнение прямой, параллельной данной прямой $4x + 3y - 15 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии $d = 2$.

33. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$5x - 12y - 26 = 0;\ \ 5x - 12y - 65 = 0.$$

34. Даны уравнения оснований трапеции:

$$3x - 4y - 15 = 0;\ \ 3x - 4y - 35 = 0.$$

Вычислить длину ее высоты.

35. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1, 5)$ на расстоянии пяти единиц от начала координат.

36. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми:

$$4x - 3y - 10 = 0;\ \ 9x - 12y - 7 = 0.$$

37. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла В треугольника с вершинами: $A\,(3, 2)$, $B\,(-1, -1)$, $C\,(7, 7)$.

38. Найти точку, равноудаленную от точек $M\,(-3, 1)$, $N\,(5, 7)$ и отстоящую от прямой $3x - 4y + 38 = 0$ на расстоянии $d = 5$.

39. Даны центр квадрата $N\,(4, 3)$ и уравнение стороны $x - y - 5 = 0$. Написать уравнения остальных трех сторон.

40. Дано уравнение одной из сторон угла $4x - 3y + 9 = 0$ и уравнение его биссектрисы $x - 7y + 21 = 0$. Написать уравнение другой стороны угла.

Ответы

30 Уравнения 4), 5). **31.** 1) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$; 2) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$;

3) $-\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{7}{2\sqrt{2}} = 0$;   4) $-\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$;

5) $-\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}y - \frac{b^2}{\sqrt{k^2+1}} = 0$;   6) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y -$

$-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$ **32.** $4x + 3y - 25 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

Указание. Уравнение искать в виде $4x + 3y + C = 0$. Воспользоваться формулой (1.29). **33.** $d = 3$. Указание. Определить p_1 и p_2, взять их разность. Второй способ. Взять произвольную точку на одной прямой и определить ее расстояние до второй прямой. **34.** $h = 4$. **35.** $5x + 12y - 65 = 0$, $y - 5 = 0$. Указание. Уравнение прямой искать в виде $y - y_1 = k\,(x - x_1)$. Определить k из условия, что прямая отстоит от начала координат на $d = 5$. **36.** $3x + 3y - 23 = 0$; $21x - 21y - 37 = 0$. **37.** $7x - y + 6 = 0$. **38.** $N\,(1, 4)$, $M\,(-5, 12)$. **39.** $x - y + 3 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $x + y - 11 = 0$. **40.** $3x + 4y - 12 = 0$.

§ 1.4. Линии второго порядка

Линия называется *линией (кривой) второго порядка*, если она определяется уравнением второй степени относительно текущих координат x и y, т. е. уравнением вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{1.31}$$

При соответствующем выборе системы координат уравнение линии второго порядка можно привести к простейшему виду.

1.4.1. Окружность

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $N\,(a, b)$ имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{1.32}$$

Уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1.33}$$

путем дополнения до полных квадратов можно привести к виду

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c. \tag{1.34}$$

При $c > 0$ уравнение (1.34) определяет окружность радиуса $R = \sqrt{c}$; при $c = 0$ уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $N\,(a, b)$; при $c < 0$ уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Пример 1. Написать уравнение окружности радиуса $R = 6$ с центром в точке $N\,(2, -3)$.

Решение. После подстановки значений $a = 2, b = -3, R = 6$ в уравнение (1.32) получаем

$$(x-2)^2+(y+3)^2=36.$$

П р и м е р 2 . Найти координаты центра и радиуса окружности

$$x^2+y^2-6x+10y-15=0.$$

Р е ш е н и е . В данном уравнении выделим полные квадраты, прибавляя и вычитая соответствующие числа. Получаем

$$(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)-9-25-15=0,$$

$$(x-3)^2+(y+5)^2=49.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.32), находим

$$a=3,\ \ b=-5,\ \ R=7.$$

П р и м е р 3 . Найти координаты центра и радиус окружности

$$3x^2+3y^2-4x+9y+4=0.$$

Р е ш е н и е . Разделим обе части уравнения на 3:

$$x^3+y^2-\frac{4}{3}x+3y+\frac{4}{3}=0.$$

Дополняя до полных квадратов, находим

$$\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)+\left(y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)-\frac{4}{9}-\frac{9}{4}+\frac{4}{3}=0$$

или

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{36}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1.32), заключаем, что

$$a=\frac{2}{3},\ \ b=-\frac{3}{2},\ \ R=\frac{7}{6}.$$

П р и м е р 4 . Какое геометрическое место точек определяется уравнением

$$4x^2+4y^2+8x-12y+13=0\,?$$

Р е ш е н и е . Разделив обе части уравнения на 4, находим

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + \frac{13}{4} = 0.$$

Дополняя до полных квадратов, получим

$$(x^2 + 2x + 1) + \left(y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} y + \frac{9}{4} \right) - 1 - \frac{9}{4} + \frac{13}{4} = 0$$

или

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \right)^2 = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты лишь одной точки, а именно:

$$x = -1, \;\; y = \frac{3}{2}.$$

П р и м е р 5 . Написать уравнения касательных к окружности

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0,$$

проходящих через начало координат.

Р е ш е н и е . Уравнение касательной ищем в виде $y = kx$ ($b = 0$, так как прямая проходит через начало координат).

Касательная к окружности имеет с ней одну общую точку (две точки пересечения сливаются в одну). Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, необходимо решить систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0; \\ y = kx. \end{array} \right\}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем

$$(1 + k^2)\, x^2 + (4 - 8k)\, x + 2 = 0.$$

Это уравнение имеет два равных корня, когда дискриминант его равен нулю, т. е.

$$(4 - 8k)^2 - 8\,(1 + k^2) = 0$$

или

$$7k^2 - 8k + 1 = 0,$$

откуда $k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{7}$. Следовательно, уравнения искомых касательных запишутся в виде $y = x,\ y = \frac{1}{7}x$.

Задачи

1. Написать уравнение окружности, проходящей через точку $N\ (7, -2)$, центр которой находится в точке $S\ (3, -5)$.

2. Даны две точки $M\ (4, 2)$ и $N\ (12, 8)$. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок MN.

3. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0;$

2) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y - \frac{29}{3} = 0;$

3) $x^2 + y^2 + 7x = 0;$

4) $5x^2 + 5y^2 + 9y = 0.$

4. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $N\ (8, 9)$.

5. Найти уравнение окружности, центр которой находится в точке $N\ (2, -3)$ и которая касается прямой $4x + 3y - 19 = 0$.

6. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки $L\ (2, 1)$, $M\ (6, 3)$, $N\ (9, 2)$.

7. Определить угол между радиусами окружности $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 16 = 0$, проведенными в точки пересечения ее с осью Ox.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через центры двух окружностей:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0,\ x^2 + y^2 + 8x + 12y - 14 = 0.$$

9. Найти уравнение общей хорды окружностей:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0,\ x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0.$$

10. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox и проходящей через точки $L\ (0, 8)$, $M\ (7, 1)$.

Ответы

1. $(x-3)^2+(y+5)^2=25.$ **2.** $(x-8)^2+(y-5)^2=25.$ **3.** 1) $C(2,-4)$, $R=6$; 2) $C\left(1,-\frac{4}{3}\right)$, $R=\sqrt{6}$;

3) $C\left(-\frac{7}{2},0\right)$, $R=\frac{7}{2}$;

4) $C(0;-0{,}9)$, $R=0{,}9$.

4. $(x-5)^2+(y-5)^2=25$,

$(x-29)^2+(y-29)^2=841.$

Указание. Уравнение искать в виде $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$.

5. $(x-2)^2+(y+3)^3=16.$

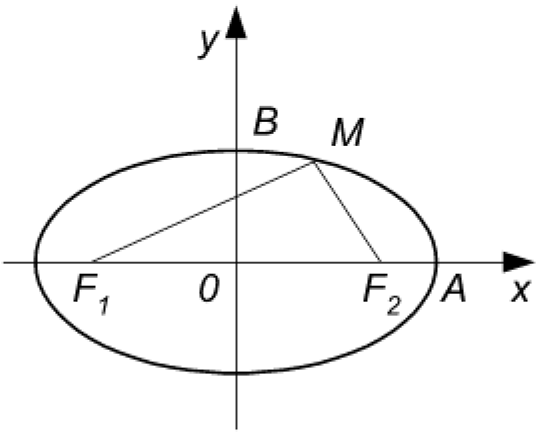


Рис. 1.8

Указание. Радиус искомой окружности равен расстоянию данной точки до прямой. **6.** $(x-6)^2+(y+2)^2=25.$ **7.** $\varphi=90^\circ$. **8.** $x-3y-14=0.$ **9.** $x+y-6=0.$ **10.** $(x-4)^2+(y-5)^2=25$; $(x-12)^2+(y-13)^2=169.$

1.4.2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек *(фокусов)* есть величина постоянная (эта постоянная больше расстояния между фокусами).

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1.35}$$

где $a=OA$ – большая; $b=OB$ – малая полуось (рис. 1.8). Координаты фокусов: $F_1(-c,0), F_2(c,0)$, где

$$c=\sqrt{a^2-b^2}. \tag{1.36}$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к большой оси $2a$:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}\ \ (\varepsilon<1, \text{ так как } c<a). \tag{1.37}$$

Расстояния точки $M(x,y)$ эллипса до фокусов *(фокальные радиусы)* определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x; \;\; r_2 = a - \varepsilon x. \qquad (1.38)$$

Директрисами эллипса называются прямые, уравнения которых $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, где ε – эксцентриситет.

Пример 6. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 16.$$

Решение. Разделив на 16 обе части уравнения, получим

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{16} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.35), находим:

$$a^2 = 4, \;\; b^2 = \frac{16}{9}, \;\; a = 2, \;\; b = \frac{4}{3}, \;\; c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9},$$

$$c = \frac{2\sqrt{5}}{3}, \;\; \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Таким образом, имеем:

$$a = 2, \;\; b = \frac{4}{3}, \;\; F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right), \;\; F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right), \;\; \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Пример 7. Написать простейшее уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей и проходящего через точки $L\,(3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $N\,(6, 0)$.

Решение. Простейшее уравнение указанного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Определим a^2 и b^2 из условия принадлежности эллипсу точек L

и N. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получим:

$$\frac{18}{a^2}+\frac{8}{b^2}=1,\ \ \frac{36}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1.$$

Из второго уравнения находим, что $a^2=36$. Подставляя найденное значение a^2 в первое уравнение, получаем

$$\frac{18}{36}+\frac{8}{b^2}=1,$$

откуда $b^2=16$.

Таким образом, искомое уравнение будет

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Пример 8. На эллипсе $16x^2+25y^2=400$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза меньше расстояния от левого фокуса.

Решение. Разделив обе части уравнения на 400, находим

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

откуда

$$a^2=25,\ b^2=16,\ a=5,\ b=4,\ c^2=25-16=9,\quad c=3,\ \varepsilon=\frac{3}{5}.$$

В силу формул (1.38) расстояние до фокусов выразятся так:

$$r_1=5+\frac{3}{5}x;\ \ r_2=5-\frac{3}{5}x.$$

По условию $r_1=4r_2$; следовательно,

$$5+\frac{3}{5}x=4\left(5-\frac{3}{5}x\right),$$

откуда $x=5$. Подставляя это значение в уравнение эллипса, получим $y=0$. Искомая точка $M\ (5,0)$.

Пример 9. Доказать, что отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

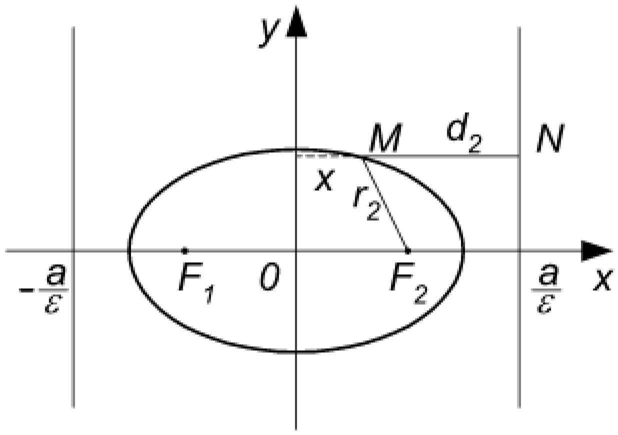


Рис. 1.9

Р е ш е н и е . Пусть $M\ (x,\, y)$ – произвольная точка эллипса (рис. 1.9). Расстояние $d_2 = MN$ точки M до директрисы $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ выразится формулой

$$d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

По второй из формул (1.38) $r_2 = a - \varepsilon x$, поэтому

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р 1 0 . Найти эксцентриситет и директрисы эллипса

$$x^2 + 3y^2 = 6.$$

Р е ш е н и е . Напишем уравнение эллипса в виде

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с каноническим уравнением (1.35), заключаем, что $a^2 = 6,\, b^2 = 2.$ Следовательно,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 2 = 4,$$

откуда $c = 2,\ \varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}.$

Уравнения директрис в общем виде:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Подставим сюда значения a^2 и c, получим $x = \pm\dfrac{6}{2} = \pm 3.$ Уравнения директрис: $x = 3$, $x = -3$.

Задачи

11. Составить простейшие уравнения эллипсов, зная что:

1) полуоси эллипса соответственно равны 7 и 6;
2) расстояние между фокусами равно 24 и большая ось 26;
3) большая полуось равна 5 и расстояние между фокусами 8.

12. Найти канонические уравнения эллипсов по следующим данным:

1) большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен 0,8;
2) малая полуось равна 12 и эксцентриситет равен $\frac{5}{13}$;
3) эксцентриситет равен 0,6, расстояние между фокусами 6;
4) сумма полуосей равна 18 и расстояние между фокусами 12.

13. Определить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситеты эллипсов, заданных уравнениями:

1) $9x^2 + 25y^2 = 225$; 2) $9x^2 + y^2 = 36$.

14. Дан эксцентриситет эллипса ε. Найти отношение его полуосей. Как величина эксцентриситета характеризует форму эллипса?

15. Известно, что прямая $x - 3y - 12 = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$. Найти точку касания.

16. Сколько касательных можно провести к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ из каждой точки $L\ (1, 2)$, $M\ (0, 4)$, $N\ (5, 3)$?

17. Написать уравнения директрис эллипса $\frac{x^2}{125} + \frac{y^2}{100} = 1$.

18. Найти длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$, направленного по биссектрисе второго координатного угла. (Диаметром эллипса называется хорда, проходящая через центр – точку пересечения его осей.)

19. Найти уравнение эллипса, расстояние между его фокусами которого равняется 8 и расстояние между директрисами – 24.

20. Дан эллипс $x^2 + 2y^2 = 8$. Через точку $M\ (1, 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

21. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Определить кривую, описываемую любой точкой M, лежащей на этом отрезке.

Ответы

11. 1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1;$ 2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1;$ 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

12. 1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1;$ 2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1;$ 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;$ 4) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$

13. 1) $a=5,\ b=3,\ c=4,\ \varepsilon=0{,}8,\ F_1(-4,0),\ F_2(4,0);$ 2) $a=2,\ b=6,$ $c=4\sqrt{2},\ F_1(0,-4\sqrt{2}),\ F_2(0,4\sqrt{2})$. Указание. Если $a<b,$ то фокусы находятся на оси Oy, при этом $c=\sqrt{b^2-a^2},\ \varepsilon=\frac{c}{b}.$ **14.** $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$ Если $\varepsilon=0,$ то $\frac{b}{a}=1, b=a$ (эллипс превращается в окружность). Если ε близко к нулю, то b незначительно отличается от a (эллипс вытянут). Если ε близко к единице , то b мало по сравнению с a (эллипс сжат). **15.** $M\ (3,-3).$ **16.** Из точки M можно провести одну касательную, из точки N – две, из точки L – ни одной. Указание. Выяснить, где лежат точки L, M, N по отношению к эллипсу. **17.** $x=25, x=-25.$ **18.** $d=4\sqrt{2}.$ **19.** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{32}=1.$ **20.** $x+2y-3=0.$ Указание. Уравнение прямой искать в виде $y-1=k\ (x-1).$ Коэффициент k определить из условия, что точка $M\ (1,1)$ является серединой отрезка LN, где L и N – точки пересечения этой прямой с эллипсом. **21.** Эллипс. Указание. За оси координат принять стороны прямого угла. Ввести в рассмотрение угол $\varphi,$ образуемый данным отрезком с осью Oy. Исключить параметр φ из полученных выражений для x и y.

1.4.3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная (указанная разность берется по абсолютному значению; требуется также, чтобы она была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля).

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1.39)$$

где $a=OA_1=OA_2$ – действительная; $b=OB_1=OB_2$ – мнимая полуось.

Фокусы гиперболы:

$$F_1(-c, 0), \ F_2(c, 0),$$

где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1.40}$$

Эксцентриситетом гиперболы (1.39) называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1, \text{ так как } \ c > a). \tag{1.41}$$

Асимптоты гиперболы (1.39):

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{1.42}$$

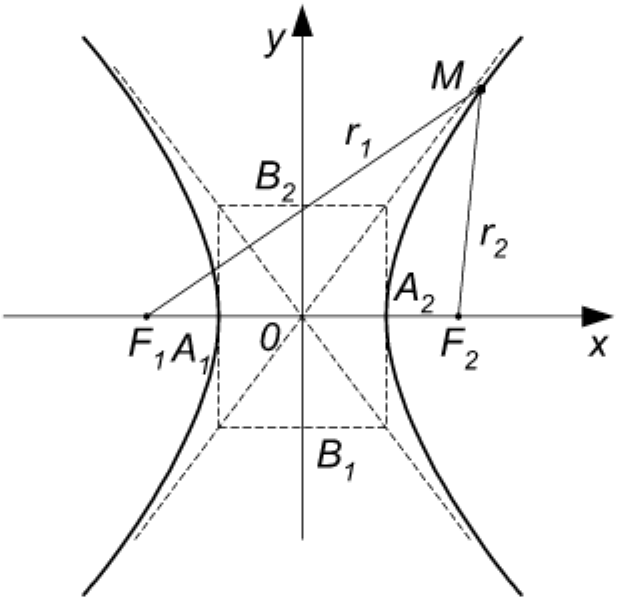


Рис. 1.10

Расстояния точки $M(x, y)$ гиперболы (рис. 1.10) до ее фокусов определяются формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x + a|; \ r_2 = |\varepsilon x - a|. \tag{1.43}$$

Прямые

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \tag{1.44}$$

называются *директрисами* гиперболы.

Гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называются *сопряженными*.

Гипербола с равными полуосями $(a = b)$ называется *равносторонней*, ее уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1.39$'$}$$

Пример 11. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Решение. Приведем данное уравнение к каноническому виду, для чего необходимо разделить обе части его на 144. Выполняя деление, получим

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1.39), заключаем, что $a^2 = 16,\ \ b^2 = 9.$ Таким образом, $a = 4$ есть действительная полуось, $b = 3$ – мнимая полуось. Далее $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = 5,$ фокусы: $F_1(-5, 0),\ \ F_2(5, 0).$ Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$ Подставляя значения a и b в формулу (1.42), получим уравнения асимптот:

$$y = \pm\frac{3}{4}x.$$

В соответствии с формулой (1.44) находим уравнение директрис:

$$x = \pm\frac{16}{5}.$$

Пример 12. Составить простейшее уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, пересекающей ось Oy и проходящей через две точки: $M\ (24, 5\sqrt{5}),\ N\ (0, 5).$ Найти фокусы этой гиперболы.

Решение. Уравнение гиперболы ищем в виде

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Так как точки M и N лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют уравнению гиперболы.

Подставляя координаты данных точек в это уравнение, получим

$$\frac{125}{b^2} - \frac{24^2}{a^2} = 1,\ \ \frac{25}{b^2} = 1.$$

Решая полученную систему, найдем:

$$b^2 = 25,\ \ a^2 = 144.$$

Таким образом,

$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1$$

есть искомое уравнение.

Определим c по формуле (1.40). Имеем $c=\sqrt{144+25}=13$. Фокусы данной гиперболы лежат на оси Oy: $F_1(0,-13)$, $F_2(0,13)$.

Пример 13. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до асимптот есть величина постоянная.

Решение. Уравнение асимптот гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

имеют вид

$$y=\pm\frac{b}{a}x \text{ или } bx\pm ay=0. \tag{A}$$

Пусть $M\,(x,\,y)$ – произвольная точка гиперболы. Ее расстояния до асимптот (A) по формуле (1.29) выразится так:

$$d_1=\left|\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|;\ d_2=\left|\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|,$$

откуда

$$d_1d_2=\left|\frac{b^2x^2-a^2y^2}{a^2+b^2}\right|=\frac{a^2b^2}{c^2},$$

что и требовалось доказать.

Задачи

22. Составить простейшие уравнения гиперболы, зная, что:

1) расстояние между фокусами равно 10, а расстояние между вершинами 8;

2) действительная полуось равна 5 и эксцентриситет 2,6.

23. Написать канонические уравнения гипербол, если известно, что:

1) расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет $\frac{5}{3}$;

2) действительная полуось равна $\sqrt{20}$ и гипербола проходит через точку $N\,(-10,\,4)$.

24. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситеты гипербол, заданных уравнениями:

1) $144x^2 - 25y^2 = 3600$; 2) $9y^2 - 16x^2 = 144$.

25. На гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 3. Вычислить фокальные радиусы этой точки.

26. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

27. Найти зависимость между эксцентриситетом гиперболы и углом между ее асимптотами. Как величина эксцентриситета влияет на форму гиперболы?

28. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее директрисами равно 4, а расстояние между фокусами 16.

29. Найти эксцентриситет гиперболы, если известно, что расстояние между ее директрисами в четыре раза меньше расстояния между фокусами.

30. Доказать, что отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию ее до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Ответы

22. 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. **23.** 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$. **24.** 1) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, $F_1(-13, 0)$, $F_2(13, 0)$, $\varepsilon = \frac{13}{5}$. **25.** $r_1 = 2$, $r_2 = 8$. **26.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$. **27.** $\varepsilon \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 1$. **28.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$. **29.** $\varepsilon = 2$. **30.** Указание. См. 1.4.2, пример 9.

1.4.4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат (рис. 1.11), имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{1.45}$$

Уравнение *директрисы*

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{1.46}$$

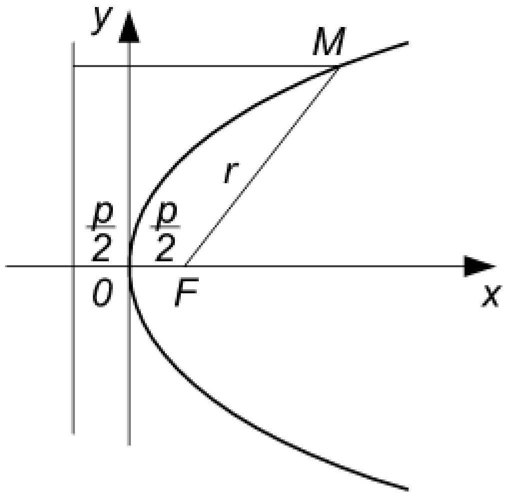


Рис. 1.11

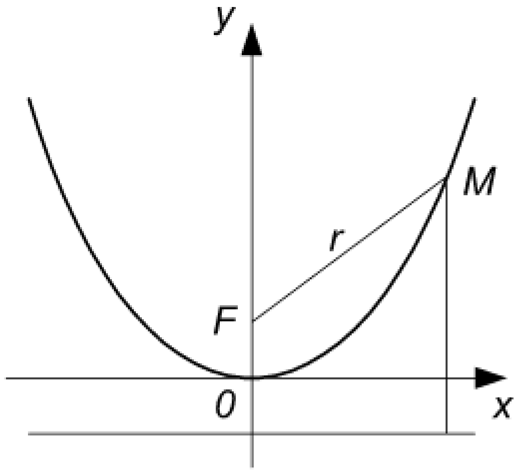


Рис. 1.12

Парабола (1.45) имеет *фокус* $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. *Фокальный радиус* точки $M\ (x,\ y)$ параболы выражается формулой

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{1.47}$$

Парабола симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 1.12), имеет уравнение

$$x^2 = 2py. \tag{1.48}$$

Уравнение *директрисы* этой параболы:

$$y = -\frac{p}{2}. \tag{1.49}$$

Фокусом параболы (1.48) является точка $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Фокальный радиус точки $M\ (x,\ y)$ параболы (1.48)

$$r = y + \frac{p}{2}. \tag{1.50}$$

Пример 14. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 12x$. Определить расстояние точки $M\ (3,\ 6)$ до фокуса.

Решение. Сравнивая уравнение $y^2 = 12x$ с уравнением (1.45), получаем $2p = 12$, откуда $p = 6, \frac{p}{2} = 3.$ Следовательно, уравнение директрисы $x = -3,$ фокус находится в точке $F(3, 0).$ Точка $M(3, 6)$ лежит на параболе $y^2 = 12x,$ так как ее координаты удовлетворяют уравнению параболы. Расстояние точки $M(3, 6)$ до фокуса определяется по формуле (1.47). Подставляя в эту формулу значения $x = 3$ и $p = 6,$ получаем $r = 3 + 3 = 6.$

Пример 15. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2 = 8y.$ Определить расстояние точки $N(4, 2)$ до фокуса.

Решение. Из уравнения (1.48) и $x^2 = 8y$ заключаем, что $2p = 8,$ $p = 4,$ $\frac{p}{2} = 2.$ Таким образом, уравнение директрисы запишется в виде $y = -2,$ фокусом является точка $F(0, 2).$ Фокальный радиус точки $N(4, 2)$ равен $r = 2 + 2 = 4.$

Пример 16. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0, 3)$ и прямой $y = -5.$ Определить точки пересечения этой кривой с осями координат.

Решение. Искомым геометрическим местом будет парабола. Напишем ее уравнение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка геометрического места. По условию $MF = MN,$ где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y = -5.$ Так как

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \text{ и } MN = \sqrt{(y-(-5))^2},$$

то

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+5)^2},$$

откуда

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 10y + 25.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение параболы

$$x^2 = 16y + 16.$$

Для определения точек пересечения с осью Ox необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 16y + 16; \\ y = 0 \quad (\text{уравнение оси } Ox). \end{array}\right\}$$

Имеем $x_1 = -4, x_2 = 4.$ Таким образом, $M_1(-4, 0)$, $M_2(4, 0)$ – две точки пересечения с осью Ox. Полагая в уравнении параболы $x = 0$ (уравнение оси Oy), получим $y = -1$. Парабола пересекает ось Oy в точке $M_3(0, -1)$.

Пример 17. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

Решение. Найдем точки пересечения прямой и окружности, для чего решим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0; \\ x^2 + y^2 + 8y = 0. \end{array}\right\}$$

Определяя x из первого уравнения и подставляя его во второе, получим

$$(-y)^2 + y^2 + 8y = 0$$

или

$$2y^2 + 8y = 0,\ \ 2y\,(y + 4) = 0,$$

откуда

$$y_1 = 0,\ \ y_2 = -4.$$

Так как $x = -y$, то $x_1 = 0, x_2 = 4.$ Следовательно, $O\,(0, 0)$, $M\,(4, -4)$ – искомые точки пересечения.

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через начало координат, имеет вид

$$x^2 = 2py.$$

Определим параметр p из условия, что парабола проходит через точку $M\,(4, -4)$. Подставляя координаты этой точки в уравнение параболы, получим

$$4^2 = 2p\,(-4),$$

откуда

$$2p = -4.$$

Следовательно, искомое уравнение параболы имеет вид

$$x^2 = -4y.$$

Пример 18. Дана парабола $y^2 = 6x$. Через точку $N\ (4, 1)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам.

Решение. Уравнение искомой хорды запишем в виде

$$y - 1 = k\ (x-4) \text{ или } y = k\ (x-4)+1.$$

Для нахождения точек пересечения хорды с параболой необходимо решить систему

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 6x; \\ y = k\ (x-4)+1. \end{array}\right\}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$k^2(x^2 - 8x + 16) + 2k\ (x-4) + 1 = 6x$$

или

$$k^2x^2 - 2\ (4k^2 - k + 3)\ x + 16k^2 - 8k + 1 = 0.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$x^2 - \frac{2\ (4k^2 - k + 3)}{k^2}\ x + \frac{16k^2 - 8k + 1}{k^2} = 0.$$

По теореме Виета для корней x_1 и x_2 этого уравнения находим

$$x_1 + x_2 = \frac{2\ (4k^2 - k + 3)}{k^2}.$$

Так как $N\ (4, 1)$ – середина хорды, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4.$$

Следовательно,

$$\frac{4k^2 - k + 3}{k^2} = 4,$$

откуда

$$k = 3.$$

Таким образом, получаем следующее уравнение искомой хорды

$$y - 1 = 3\,(x - 4)$$

или

$$3x - y - 11 = 0.$$

Пример 19. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$, проведенной через точку $N\,(-3, 2)$.

Решение. Уравнение касательной ищем в виде

$$y - 2 = k\,(x + 3)$$

или

$$y = k\,(x + 3) + 2.$$

Точки пересечения последней прямой с параболой найдем из системы:

$$\left.\begin{aligned} &y^2 = 4x; \\ &y = k\,(x + 3) + 2. \end{aligned}\right\}$$

Для касательной точки пересечения сливаются в одну, поэтому k определяется из условия, что система имеет единственное решение.

Подставляя второе уравнение системы в первое, получим

$$k^2(x^2 + 6x + 9) + 4k\,(x + 3) + 4 = 4x$$

или

$$k^2x^2 + (6k^2 + 4k - 4)\,x + 9k^2 + 12k + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет два равных корня, когда его дискриминант равен нулю, т. е.

$$(6k^2 + 4k - 4)^2 - 4k^2(9k^2 + 12k + 4) = 0.$$

Преобразуя последнее уравнение (раскрывая скобки, производя умножение и приводя подобные члены), получим

$$-48k^2 - 32k + 16 = 0$$

или

$$3k^2 + 2k - 1 = 0,$$

откуда

$$k_1 = \frac{1}{3},\ \ k_2 = -1.$$

Таким образом, уравнения касательных будут

$$y - 2 = -1(x + 3);$$

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x + 3)$$

или

$$x + y + 1 = 0;$$

$$x - 3y + 9 = 0.$$

Задачи

31. Написать уравнение параболы, зная, что:

1) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $N\,(-3, 6)$ и начало координат;

2) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $N\,(6, 3)$ и начало координат.

32. Составить уравнение параболы, зная, что:

1) фокус находится в точке $F\,(5, 0)$, директриса будет осью ординат и ось симметрии – осью абсцисс;

2) фокус находится в точке $F\,(0, 5)$, директриса служит осью абсцисс и ось симметрии – осью ординат.

33. Найти координаты фокусов и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -6x$;

3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$.

34. На параболе $y^2 = 16x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 5.

35. Написать уравнение параболы, зная, что вершина ее лежит в начале координат, направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси Oy, а параметр p равен расстоянию от фокусов гиперболы $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ до асимптот.

36. Дана парабола $x^2 = 16y$. Через точку $N\left(2, \frac{5}{2}\right)$ провести хорду, делящуюся в ней пополам.

37. Найти касательные к параболе $x^2 = 4y$, проходящие через точку $N\ (0, -1)$.

38. Дана парабола $x^2 = 4y$. Определить длину ее хорды, проходящей через точку $N\ (2, 3)$ и параллельной прямой $x - 2y + 5 = 0$.

39. Осевое сечение зеркала прожектора имеет форму параболы. Определить положение фокуса, если диаметр зеркала 80 *см*, а глубина его 40 *см*.

40. Найти уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y - x = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8x = 0$ и симметрична относительно оси Ox.

Ответы

31. 1) $y^2 = -12x$; 2) $x^2 = 12y$. **32.** 1) $y^2 = 10x - 25$; 2) $x^2 = 10y - 25$. **33.** 1) $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{3}{2}$; 2) $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $x = \frac{3}{2}$; 3) $F\ (0, 1)$, $y = -1$. **34.** $M\ (1, 4)$, $N\ (1, -4)$. **35.** $x^2 = -6y$. **36.** $x - 4y + 8 = 0$. **37.** $x + y + 1 = 0$; $x - y - 1 = 0$. **38.** $d = 3\sqrt{5}$. **39.** 10 *см* от вершины. **40.** $y^2 = -4x$.

§ 1.5. Преобразования прямоугольных координат

Координаты (x, y) точки M в прямоугольной декартовой системе координат Oxy (старой) и ее координаты (X, Y) в другой прямоугольной системе O_1XY (новой) связаны формулами:

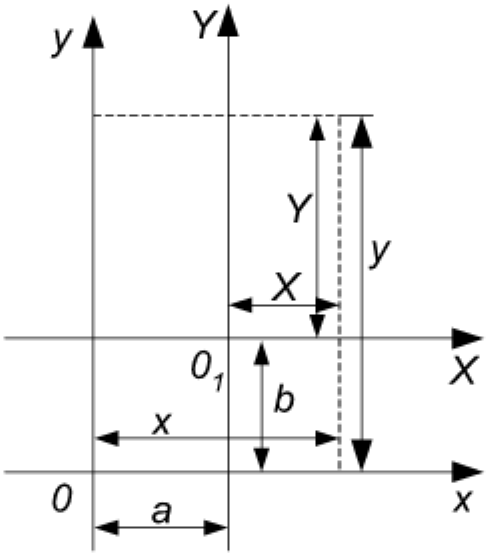


Рис. 1.13

при параллельном переносе (рис. 1.13)

$$\left.\begin{aligned} x &= X + a, \\ y &= Y + b \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} X &= x - a, \\ Y &= y - b, \end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$

где (a, b) – координаты нового начала O_1 в старой системе координат;

при повороте осей вокруг начала координат на угол α (рис. 1.14)

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.52}$$

Уравнение

$$y = Ax^2 + Bx + C \tag{1.53}$$

выделением полного квадрата приводится к уравнению

$$y = A\,(x-a)^2 + b, \tag{1.54}$$

которое с помощью преобразования (1.51) можно записать так:

$$Y = AX^2. \tag{1.54$'$}$$

Последнее уравнение является уравнением параболы с вершиной в начале новой системы координат и осью симметрии, совпадающей с осью OY.

Аналогичным образом уравнение

$$x = Ay^2 + By + C \tag{1.55}$$

преобразуется к виду

$$X = AY^2. \tag{1.55$'$}$$

Уравнения

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (1.56)$$

и

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (1.57)$$

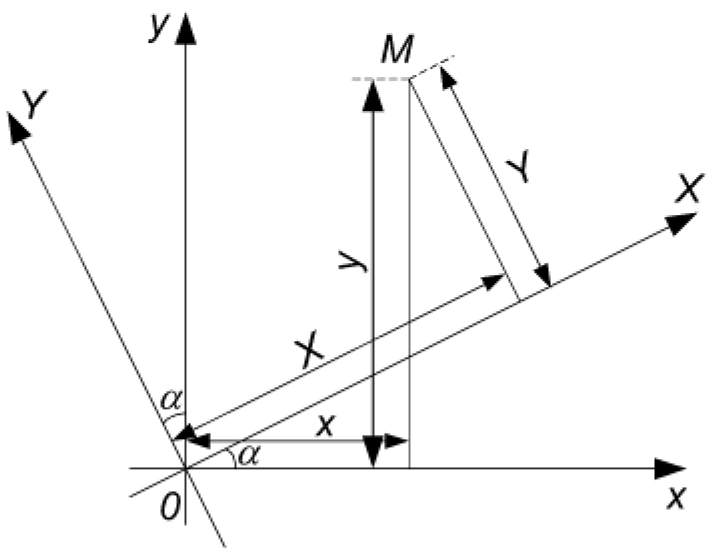


Рис. 1.14

с помощью формул (1.51) приводятся соответственно к уравнениям:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1; \qquad (1.56')$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1; \qquad (1.57')$$

Следовательно, уравнение (1.56) определяет эллипс, оси которого параллельны координатным осям и центр находится в точке $O_1(x_0, y_0)$, а уравнение (1.57) – гиперболу (с теми же особенностями расположения относительно системы координат).

Уравнение равносторонней гиперболы

$$x^2-y^2=a^2$$

с помощью преобразования (1.52) при $\alpha=45°$ приводится к виду

$$XY=c. \qquad (1.58)$$

Уравнение

$$xy+Ax+By+C=0 \qquad (1.59)$$

с помощью формул (1.51) приводится к уравнению (1.58), где

$$X=x+A,\;\; Y=y+B,\;\; c=AB-C, \qquad (1.60)$$

и, следовательно, определяет гиперболу, асимптоты которой являются координатными осями новой системы координат с началом в точке

$O_1(-A, -B)$.

Пример 1. Уравнение кривой $y = x^2 + 4x + 5$ привести к каноническому виду. Построить эту кривую.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

$$y = (x^2 + 4x + 4) + 1, \quad y = (x+2)^2 + 1.$$

Последнее уравнение можно записать так:

$$y - 1 = (x+2)^2.$$

Полагая

$$y - 1 = Y, \quad x + 2 = X,$$

получим

$$Y = X^2.$$

Это уравнение определяет параболу с вершиной в начале новой системы координат и осью симметрии, совпадающей с осью O_1Y.

Найдем координаты нового начала в старой системе. Так как новые координаты нового начала равны нулю, т. е.

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

то из формул преобразования ($X = x + 2, \ Y = y - 1$) получаем

$$x + 2 = 0, \quad y - 1 = 0,$$

откуда $x = -2, \ y = 1$. Таким образом определена точка $O_1(-2, 1)$.

Строим старую и новую системы координат и кривую относительно новой системы по ее каноническому уравнению $Y = X^2$ (рис. 1.15). Тем самым кривая построена и по отношению к старой системе координат.

Пример 2. Упростить уравнение кривой $y = 2x^2 + 8x + 12$, определить ее вид и расположение на плоскости.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

$$y = 2\,(x^2 + 4x + 6) = 2\,[\,(x^2 + 4x + 4) + 2] = 2\,[\,(x+2)^2 + 2],$$

$$y = 2\,(x+2)^2 + 4,\;\; y - 4 = 2\,(x+2)^2.$$

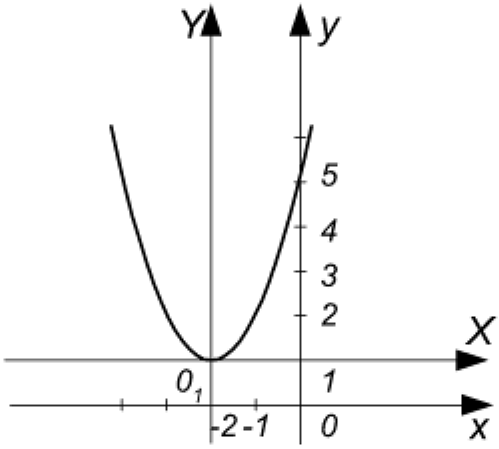


Рис. 1.15

Это уравнение можно записать в виде $Y = 2X^2$, где $Y = y - 4$, $X = x + 2$. Оно определяет параболу, симметричную относительно оси O_1Y, с вершиной в начале новой системы координат. Найдем старые координаты вершины. Подставляя ее новые координаты $(0, 0)$ в формулы преобразования: $Y = y - 4$, $X = x + 2$, получаем $0 = y - 4$, $0 = x + 2$, откуда $x = -2$, $y = 4$.

Следовательно, данная кривая является параболой, вершина которой находится в точке $O_1(-2, 4)$, а ее ось симметрии параллельна оси Oy (рис. 1.16).

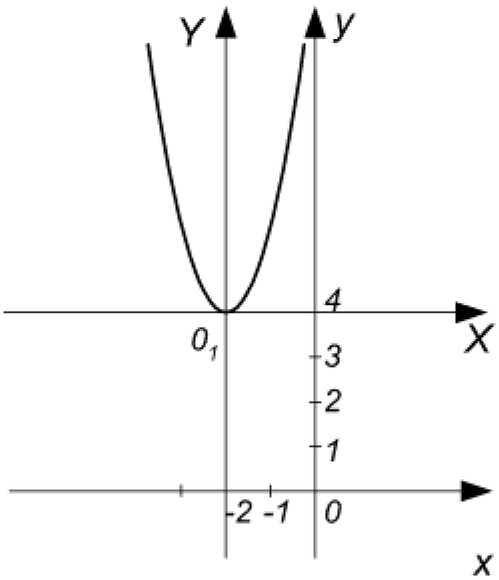


Рис. 1.16

П р и м е р 3. Уравнение кривой $x = -4y^2 + 6y - 3$ привести к простейшему виду.

Р е ш е н и е. Преобразуя правую часть уравнения, получаем

$$x = -4y^2 + 6y - 3 = -4\left(y^2 - \frac{6}{4}\,y + \frac{3}{4}\right) =$$

$$= -4\left[\left(y^2 - 2\cdot\frac{3}{4}\,y + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} + \frac{3}{4}\right] =$$

$$= -4\left[\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right] = -4\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4},$$

$$x = -4\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4},\;\; x + \frac{3}{4} = -4\left(y - \frac{3}{4}\right)^2.$$

Последнее уравнение перепишем так:

$$X = -4Y^2,$$

где $X = x + \frac{3}{4}$, $Y = y - \frac{3}{4}$. Оно определяет параболу с вершиной в точке $O_1\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ и осью симметрии, параллельной оси Ox (рис. 1.17).

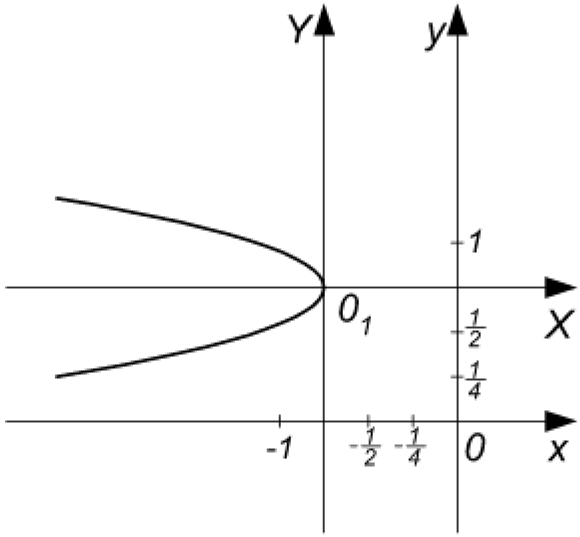


Рис. 1.17

Пример 4. Упростить уравнение кривой

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

и определить ее параметры.

Решение. Вводя новые координаты по формулам $X = x - 2$, $Y = y + 3$, получаем уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

с полуосями $a = 5$, $b = 4$.

Из формул преобразования $X = x - 2$, $Y = y + 3$ находим координаты центра эллипса: $x = 2$, $y = -3$ (рис. 1.18).

Пример 5. Определить вид кривой и ее расположение на плоскости по уравнению

$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0.$$

Решение. Выделяя полные квадраты, преобразуем левую часть уравнения:

$$9\,(x^2 - 6x + 9) + 4\,(y^2 - 8y + 16) - 81 - 64 + 109 = 0,$$

$$9\,(x-3)^2 + 4\,(y-4)^2 - 36 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 36

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

Вводя новые координаты по формулам $X = x - 3$, $Y = y - 4$, запишем уравнение в виде

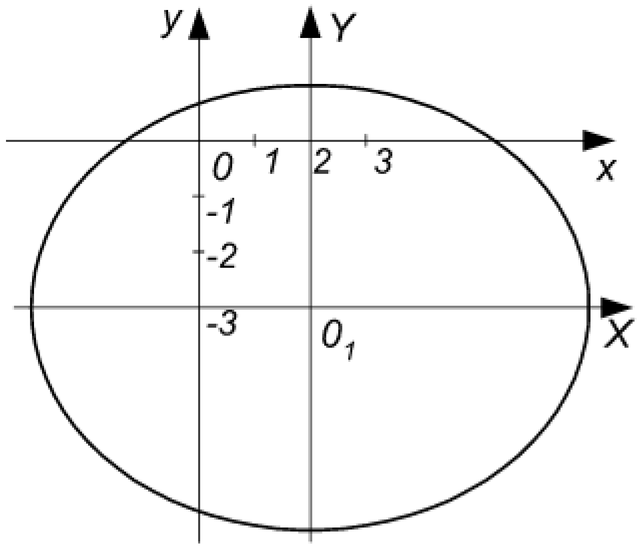


Рис. 1.18

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a=2$, $b=3$ и с центром в точке $O_1(3, 4)$.

Пример 6 Определить вид и расположение на плоскости линии

$$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделяя полные квадраты:

$$4\,(x^2-2x+1)-9\,(y^2+4y+4)-4+36-68=0,$$

$$4\,(x-1)^2-9\,(y+2)^2-36=0.$$

Разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Вводим новые координаты по формулам $X=x-1$, $Y=y+2$. Уравнение примет вид

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=1.$$

Оно определяет гиперболу с центром в точке $O_1(1,-2)$ и полуосями $a=3$, $b=2$ (рис. 1.19).

Пример 7. Определить вид и расположение линии

$$xy-2x-y+6=0.$$

Решение. Применяя тождество

$$xy+Ax+By+C=(x+B)\,(y+A)-AB+C,$$

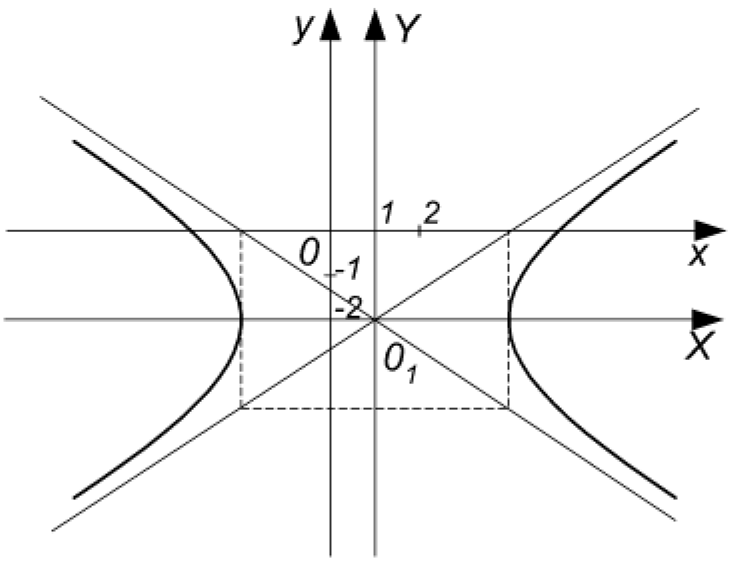


Рис. 1.19

преобразуем левую часть уравнения

$$xy - 2x - y + 6 =$$

$$= (x-1)(y-2) - 2 + 6.$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x-1)\,(y-2) = -4.$$

Вводя новые координаты по формулам $x - 1 = X$, $y - 2 = Y$, получаем уравнение $XY = -4$. Это уравнение является уравнением гиперболы, асимптоты которой служат осями новой системы координат (рис. 1.20). Центр гиперболы находится в точке $O_1(1,\,2)$.

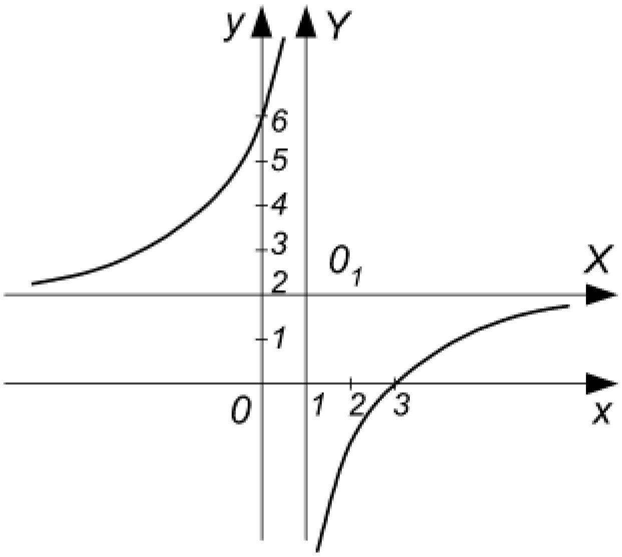


Рис. 1.20

П р и м е р 8. Определить вид и расположение линии

$$y = \frac{9-x}{x-3}.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение перепишем в виде

$$y\,(x-3) = 9 - x$$

или

$$xy - 3y + x - 9 = 0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получаем

$$xy - 3y + x - 9 = (x-3)\,(y+1) - (-3\cdot 1) - 9 =$$

$$= (x-3)\,(y+1) - 6.$$

Следовательно, уравнение линии можно записать так:

$$(x-3)\,(y+1) = 6$$

или

$$XY = 6,$$

где

$$X = x - 3, \ \ Y = y + 1.$$

Уравнение определяет гиперболу с центром в точке $O_1(3, -1)$, асимптоты ее служат осями новой системы координат.

Задачи

Уравнение линии привести к каноническому виду, построить линию:

1. $y = x^2 - 5x + 7.$

2. $y = 4x^2 + 8x + 7.$

3. $y = -3x^2 + 6x - 5.$

4. $x = y^2 + 3y + 4.$

5. $x = 5y^2 - 10y + 6.$

6. $x = -2y^2 + 8y - 3.$

7. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+4)^2}{25} = 1.$

8. $\dfrac{(x+1)^2}{36} + \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1.$

9. $\dfrac{(x-3)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1.$

10. $\dfrac{(x+5)^2}{9} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1.$

11. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0.$

12. $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0.$

13. $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0.$

14. $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0.$

15. $xy - 3y + 4x - 20 = 0.$

16. $xy + 2y - x + 2 = 0.$

17. $y = \dfrac{5-3x}{x-1}.$

18. $y = \dfrac{2x+9}{x+4}.$

Ответы

1. $Y = X^2, \quad O_1\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{4}\right).$ **2.** $Y = 4X^2, \quad O_1(-1, 3).$ **3.** $Y = -3X^2,$ $O_1(1, -2).$ **4.** $X = Y^2, \quad O_1\left(\dfrac{7}{4}, -\dfrac{3}{2}\right).$ **5.** $X = 5Y^2, \quad O_1(1, 1).$ **6.** $X = -2Y^2,$ $O_1(5, 2).$ **7.** $\dfrac{X^2}{16} + \dfrac{Y^2}{25} = 1, \quad O_1(2, -4).$ **8.** $\dfrac{X^2}{36} + \dfrac{Y^2}{25} = 1, \quad O_1(-1, 3).$ **9.** $\dfrac{X^2}{9} - \dfrac{Y^2}{16} = 1, \quad O_1(3, 2).$ **10.** $\dfrac{X^2}{9} - \dfrac{Y^2}{4} = 1, \quad O_1(-5, -2).$ **11.** $\dfrac{X^2}{4} +$

$+\dfrac{Y^2}{9}=1,\quad O_1(1,1).$ **12.** $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1,\quad O_1(-2,-1).$ **13.** $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{1}=1,$ $O_1(-3,2).$ **14.** $\dfrac{X^2}{4}-\dfrac{Y^2}{9}=1,\ O_1(-1,1).$ **15.** $XY=8,\ O_1(3,-4).$ **16.** $XY=$ $=-4,\ O_1(-2,1).$ **17.** $XY=2,\ O_1(1,-3).$ **18.** $XY=-1,\ O_1(-4,2).$

§ 1.6. Полярные координаты

Полярными координатами точки M на плоскости называются *полярный радиус* $\rho = OM$ и *полярный угол* $\varphi = \angle POM$, отсчитываемый от полярной оси OP к отрезку OM (рис. 1.21) против движения часовой стрелки.

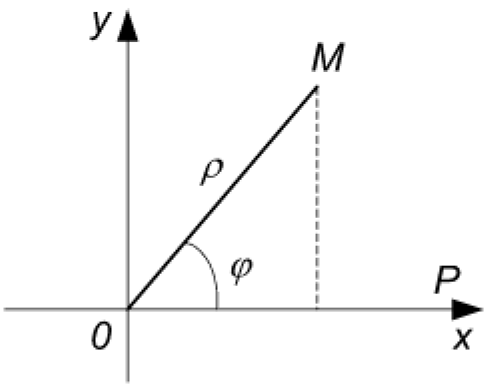


Рис. 1.21

Прямоугольные декартовы и полярные координаты точки M при соответствующем выборе координатных систем (рис. 1.21) связаны формулами:

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi; \qquad (1.61)$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2};\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \qquad (1.62)$$

Уравнение линии на плоскости в полярных координатах следующее:

$$F(\rho,\varphi)=0. \qquad (1.63)$$

П р и м е р 1. Найти уравнение окружности, проходящей через полюс, центр окружности лежит на полярной оси, а радиус равен a.

Р е ш е н и е. Соединим отрезками прямой точку M с полюсом и с конечной точкой D диаметра, проходящего через полюс O (рис. 1.22).

Координатами точки M будут угол φ и длина ρ отрезка OM. Из прямоугольного треугольника OMD получаем искомое уравнение

$$\rho=2a\cos\varphi.$$

П р и м е р 2. Точка M равномерно движется по прямой ON, равномерно вращающейся вокруг точки O. Траектория точки M называется *спиралью Архимеда.* Составить уравнение спирали Архимеда и построить ее.

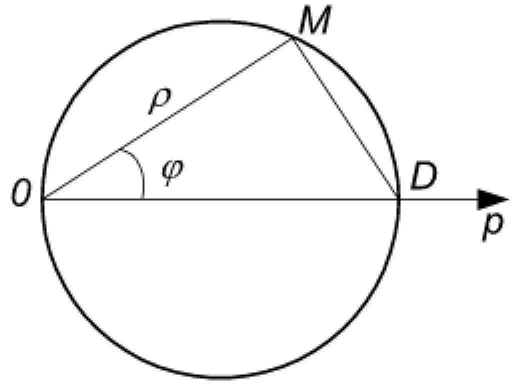


Рис. 1.22

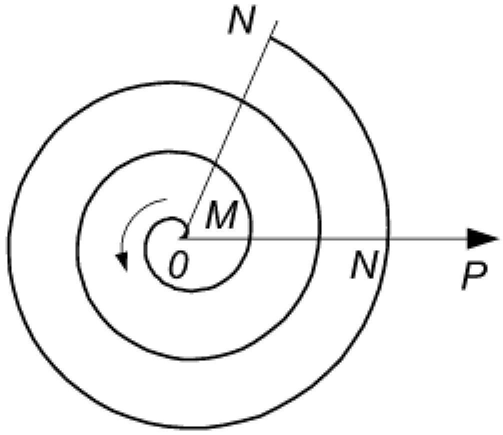


Рис. 1.23

Решение. Примем точку O (рис. 1.23) за полюс системы, начальное положение OP прямой ON – за полярную ось. Пусть в начальный момент движения точка M находится в полюсе. Расстояние $OM = \rho$, пройденное точкой M вдоль прямой ON, и полярный угол φ возрастают в силу равномерности движения пропорционально времени. Следовательно, они пропорциональны друг другу, т. е.

$$\rho = a\varphi, \tag{A}$$

где a – коэффициент пропорциональности.

Уравнение (A) и является уравнением спирали Архимеда. В декартовой системе координат:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

(Последнее уравнение получено из уравнения (A) с помощью формул (1.62).)

Построим кривую по ее уравнению (A). Придавая значения φ и определяя соответствующие значения ρ, составим таблицу:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π	…
ρ	0	$\frac{\pi}{6}a$	$\frac{\pi}{4}a$	$\frac{\pi}{3}a$	$\frac{\pi}{2}a$	$\frac{2}{3}\pi a$	$\frac{3}{4}\pi a$	$\frac{5}{6}\pi a$	πa	$\frac{5}{4}\pi a$	$\frac{4}{3}\pi a$	$\frac{3}{2}\pi a$	$\frac{7}{4}\pi a$	$2\pi a$	…

Построив соответствующие точки, получим искомую кривую (см. рис. 1.23).

Пример 3. Отрезок AB постоянной длины $2a$ своими концами скользит по осям декартовых координат. Из начала координат на AB

опущен перпендикуляр OM. Геометрическое место точек M называется *четырехлепестковой розой.* Написать ее уравнение, построить кривую.

Решение. Из треугольника OMA (рис. 1.24) определим

$$\rho = OM = OA\cos\varphi.$$

Из треугольника ABO получаем

$$OA = AB\sin\varphi = 2a\sin\varphi,$$

поэтому

$$\rho = 2a\sin\varphi\cos\varphi.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$\rho = a\sin 2\varphi.$$

Кривая изображена на рис. 1.25.

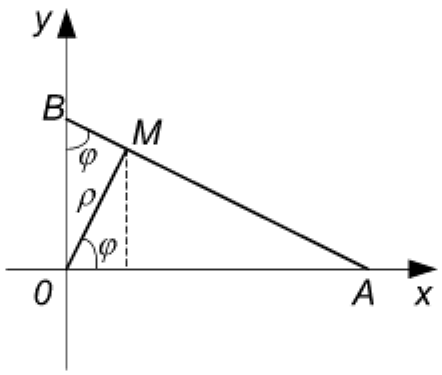


Рис. 1.24

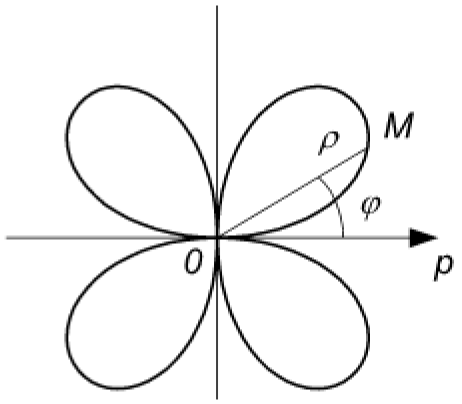


Рис. 1.25

Пример 4. Из точки O на окружность радиуса a проводится луч OK (рис. 1.26), от точки L пересечения его с окружностью откладывается отрезок $LM = 2a$ по направлению луча OK. Линия, описываемая точкой M при вращении луча, называется *кардиоидой.* Составить уравнение кардиоиды.

Решение. Выберем полярную систему координат, как показано на рис. 1.26. Непосредственно из чертежа получаем

$$\rho = OL + LM.$$

Так как

$$LM = 2a,\ OL = OB\cos\varphi = 2a\cos\varphi,$$

то

$$\rho = 2a\,(1+\cos\varphi).$$

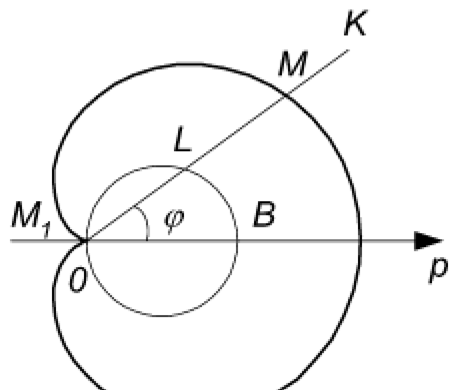


Рис. 1.26

Полученное уравнение и является искомым. Когда φ пробегает промежуток $(-\pi, \pi)$, кардиоида описывается полностью.

Пример 5. На окружности радиуса a фиксирована точка O. Луч Ox вращается около точки O, при этом он пересекает окружность в некоторой точке N. На прямой ON от точки N в направлении луча Ox откладывается отрезок $NM = b$. Когда луч Ox совершит полный оборот, точка M опишет кривую, называемую *улиткой Паскаля.* Составить уравнение этой кривой и построить ее. Показать, что при $b = 2a$ получается кардиоида (см. пример 4).

Решение. Примем точку O за полюс, а полярную ось совместим с диаметром OA (рис. 1.27). Непосредственно из чертежа находим

$$\rho = OM = ON + NM.$$

Подставляя в это равенство выражения

$$ON = 2a\cos\varphi,\ \ NM = b,$$

получим уравнение улитки Паскаля в полярных координатах

$$\rho = 2a\cos\varphi + b.$$

Исходя из определения кривой, легко построить ряд ее точек. Форма кривой зависит от соотношения между постоянными $2a$ и b. Если $b < 2a$, кривая имеет вид, изображенный на рис. 1.27. На рис. 1.28 изображена кривая для случая $b > 2a$.

Если $b = 2a$, то уравнение улитки Паскаля примет вид

$$\rho = 2a\ (1 + \cos\varphi).$$

Это уравнение кардиоиды, рассмотренной в предыдущем примере (см. рис. 1.26).

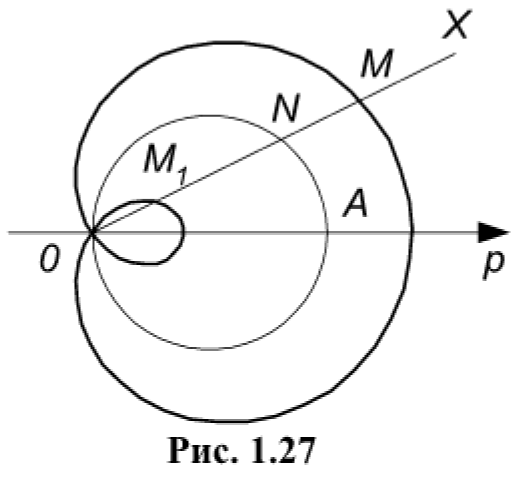


Рис. 1.27

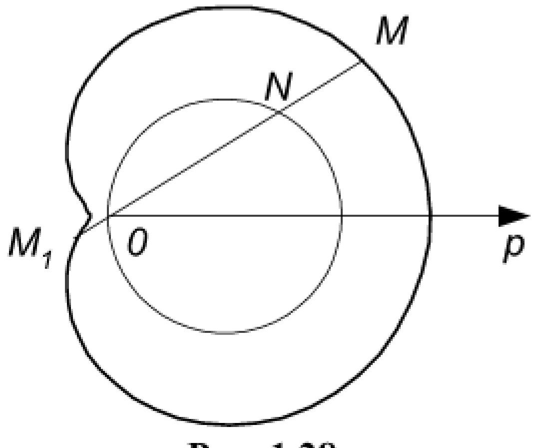


Рис. 1.28

В декартовых прямоугольных координатах уравнение улитки Паскаля таково:

$$(x^2+y^2-2ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0.$$

Следовательно, улитка Паскаля является алгебраической кривой четвертого порядка.

П р и м е ч а н и е . В области техники улитка Паскаля находит, в частности, применение в кулачковых механизмах. Она используется как линия для вычерчивания профиля эксцентрика, если требуется, чтобы скользящий по профилю стержень совершал гармоническое колебание. В самом деле, поступательное перемещение S точки M (рис. 1.29) определится по формуле

$$S=\rho=2a\cos\omega t+b=2a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+b,$$

где ω – угловая скорость эксцентрика.

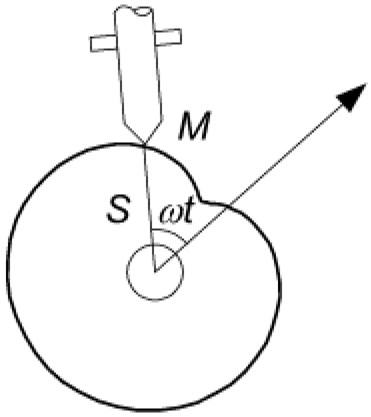


Рис. 1.29

Одна из составных частей в механизме для поднятия и опускания семафора очерчена по улитке Паскаля.

В швейной машине форму кардиоиды имеет кулачок, под воздействием которого колеблется толкатель, подающий нитку на шпульку.

П р и м е р 6 . Написать уравнение лемнискаты Бернулли в полярных координатах и построить ее.

Р е ш е н и е . В примере 5 § 1.2 было получено уравнение лемнискаты Бернулли в прямоугольных декартовых координатах:

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

Так как x и y входят в это уравнение только в четных степенях, то лемниската симметрична относительно координатных осей (если точка $M\,(x,\,y)$ принадлежит лемнискате, то точки $M_1(-x,\,y)$, $M_2(x,-y)$, $M_3(-x,-y)$ также ей принадлежит (см. замечание к примеру 1 § 1.1)).

Поскольку

$$x=\rho\cos\varphi,\;\; y=\rho\sin\varphi,\;\; x^2+y^2=\rho^2,$$

то уравнение лемнискаты в полярных координатах примет вид

$$\rho^4=2a^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$

или

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Из этого уравнения видно, что $\rho = a\sqrt{2}$ при $\varphi = 0$. Если φ увеличивается от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то ρ уменьшается от $\rho = a\sqrt{2}$ до $\rho = 0$. Если $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то ρ принимает мнимые значения, т. е. на лемнискате нет точек, для которых φ меняется в указанных пределах. Следовательно, мы можем построить часть лемнискаты, расположенную в первой четверти $\left(\text{для } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right)$, и поэтому в силу симметрии кривой всю линию.

Построение лемнискаты по точкам можно также осуществить следующим образом. Переписывая уравнение лемнискаты в виде

$$\rho^2 = c^2(2\cos^2\varphi - 1),$$

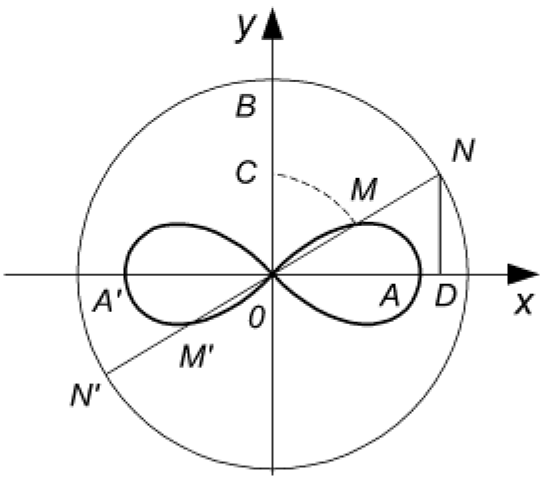


Рис. 1.30

где $c^2 = 2a^2$, заключаем, что полярный радиус ее произвольной точки является катетом прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $c\sqrt{2}\cos\varphi$, а другой катет равен c. На оси абсцисс от точки O отложим отрезки $OA = OA' = c$ (рис. 1.30), на оси ординат – отрезок $OB = c$, радиусом $AB = c\sqrt{2}$ описываем окружность с центром в начале координат. Через точку O проводим прямую под углом φ $\left(\varphi < \frac{\pi}{4}\right)$ к оси Ox, пересекающую окружность в точках N и N'. Из точки N опустим перпендикуляр ND на ось Ox, из точки A радиусом, равным OD, засекаем на OB точку C. Тогда

$$OC^2 = AC^2 - OA^2 = OD^2 - OA^2 = (ON\cos\varphi)^2 - OA^2 =$$
$$= (c\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - c^2,$$

откуда и следует, что катет OC определяет длину полярного радиуса точки лемнискаты, соответствующей углу φ. На прямой NN' из точки O радиусом OC засекаем точки M и M', принадлежащие лемнискате. Повторяя указанное построение при других значениях φ, получим вторую пару точек и т. д.

Примечание. В технике лемниската применяется, в частности, в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса, как это имеет место на железнодорожных линиях в горной местности и на трамвайных путях.

Уравнение лемнискаты встречается впервые в математической литературе в статье Я. Бернулли опубликованной в «Acta eruditorum» в 1694 г.

Пример 7. Написать уравнение конического сечения в полярных координатах. (Сечением любого круглого конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, определяется кривая, которая может быть лишь эллипсом, гиперболой или параболой.)

Решение. Пусть ABC (рис. 1.31) – дуга конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), B – вершина, F – фокус, DN – соответствующая директриса. Примем точку F за полюс, прямую BFP за полярную ось, выбрав на ней направление от фокуса F в сторону, противоположную директрисе. Пусть M_0 – точка дуги BC конического сечения, лежащая на перпендикуляре к полярной оси, проходящем через полюс F. Назовем фокальным параметром $p = FM_0$.

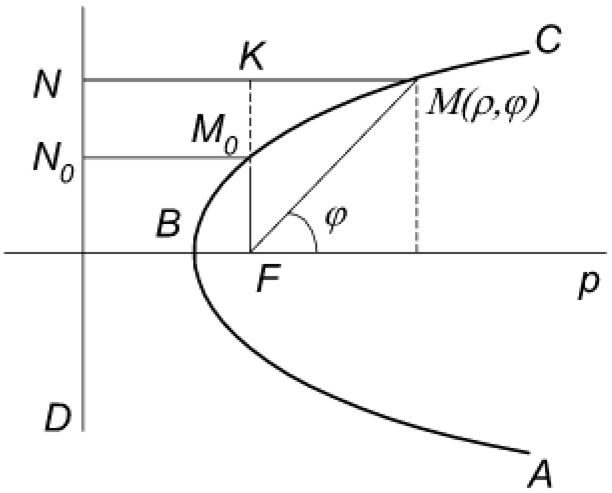


Рис. 1.31

Пусть $M\,(\rho, \varphi)$ – произвольная точка кривой. Найдем зависимость между полярными координатами ρ, φ и данными числами p и ε, где ε – эксцентриситет. По общему свойству всех точек конического сечения (см. определение параболы, пример 9 и задачу 30 §1.4) имеем

$$\frac{FM}{MN} = \varepsilon. \qquad \text{(A)}$$

Далее,

$$FM = \rho, \;\; MN = N_0 M_0 + \rho\cos\varphi.$$

Так как

$$\frac{FM_0}{N_0 M_0} = \varepsilon, \;\; FM_0 = p,$$

то

$$N_0 M_0 = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$MN = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi. \qquad \text{(B)}$$

Равенство (A) с учетом (B) перепишем в виде

$$\frac{\rho}{\dfrac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi} = \varepsilon,$$

откуда

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad \text{(C)}$$

Уравнение (C) будет определять эллипс, если $\varepsilon < 1$, параболу при $\varepsilon = 1$, гиперболу, когда $\varepsilon > 1$.

В уравнении (C) величина p для параболы имеет прежнее значение (т. е. то же, что в уравнении $y^2 = 2px$), так как $p = FM_0 = M_0N_0$ есть расстояние от фокуса до директрисы. Выразим p для эллипса и гиперболы. Подставляя координаты точки $M_0(-c, p)$ эллипса в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получаем

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1,$$

откуда

$$\frac{p^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}, \; p^2 = \frac{b^4}{a^2}, \; p = \frac{b^2}{a}.$$

Подставляя координаты точки гиперболы $M_0(c, p)$ в ее уравнение, находим

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{p^2}{b^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Таким образом, уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах (при указанном выборе полюса и полярной оси) имеют одинаковый вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi},$$

где $p = \dfrac{b^2}{a}$ для эллипса и гиперболы.

Пример 8. Прямая $x = a$ пересекает ось Ox в точке A и произвольный луч OB в точке B. На луче от точки B по обе стороны отложены отрезки BM_1 и BM_2, равные AB. Написать уравнение геометрического места точек M_1 и M_2 в полярных и прямоугольных декартовых координатах. (Кривая эта называется *строфоидой.*)

Решение. Из чертежа (рис. 1.32) получаем

$$\rho = OB \pm AB.$$

Так как

$$OB = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad AB = a \operatorname{tg}\varphi,$$

то

$$\rho = \frac{a\,(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi}.$$

В декартовых координатах это уравнение примет вид

$$y^2 = \frac{x\,(x-a)^2}{2a - x}.$$

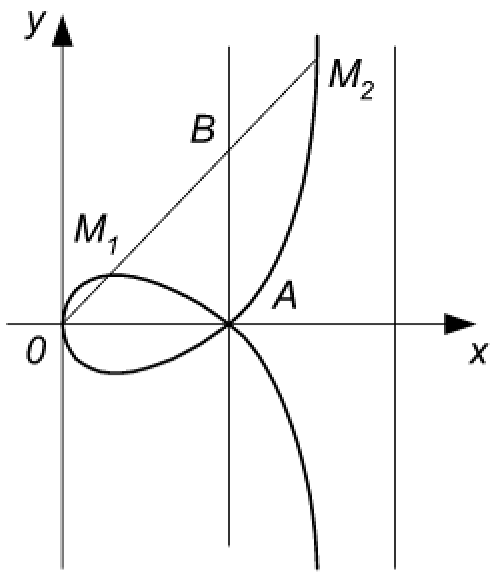


Рис. 1.32

Задачи

1. В полярной системе координат (ρ, φ) построить точки: $A\,(2, 0)$, $B\left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\,(4, \pi)$, $E\left(2, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $F\,(-2, 0)$, $G\left(-3, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $K\left(1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $L\,(4, -\pi)$, $M\left(-2, -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Написать в полярных координатах уравнения линий:

1) $xy = \dfrac{c}{2}$;

2) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$;

3) $y - 2x = 0$; 4) $x^2 + y^2 = 2ay$.

3. Построить линии:

1) $\rho = R$; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$; 3) $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$;

4) $\rho = a\,(1 - \cos\varphi)$; 5) $\rho = 2\,(1 + 2\cos\varphi)$.

4. Написать в декартовых координатах уравнения линий и построить линии:

1) $\rho\sin\varphi = b$; 2) $\rho^2\cos 2\varphi = a^2$; 3) $\rho = a\cos\varphi$.

5. Построить линии:

1) $\rho = e^{\varphi}$ (логарифмическая спираль);

2) $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);

3) $\rho = a\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);

4) $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

6. Написать канонические уравнения кривых второго порядка:

1) $\rho = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$; 2) $\rho = \dfrac{16}{3 - 5\cos\varphi}$; 3) $\rho = \dfrac{5}{1 - \cos\varphi}$.

7. Через точку $E\left(a, \dfrac{\pi}{2}\right)$ проведена прямая, параллельная полярной оси. Произвольный луч OK пересекает эту прямую в точке K. На луче по обе стороны от точки K отложены отрезки $KM_1 = KM = l$. Геометрическое место точек M и M_1 называется *конхоидой Никомеда*. Составить уравнение конхоиды и построить ее.

8. Написать уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $F_1(-b, 0)$, $F_2(b, 0)$ есть величина постоянная, равная a^2. Построить кривую (*овалы Кассини*; при $b = a$ получаем лемнискату Бернулли).

Ответы

1. Указание. Отрицательные углы φ отсчитываются по часовой стрелке, отрицательные значения ρ откладываются не на луче, наклоненном к полярной оси под углом φ, а на его продолжении за полюс (т. е. на луче, образующем с полярной осью угол $\varphi + \pi$). **3.** 1) окружность радиуса R; 2) прямая, проходящая через начало координат под углом $\varphi = 60°$ к оси Ox; 3) прямая $x = a$; 4) кардиоида; 5) улитка Паскаля. **4.** 1) $y = b$; 2) $x^2 - y^2 = a^2$; 3) $x^2 + y^2 = ax$. **5.** См. приложение. **6.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $y^2 = 10x$. **7.** $\rho = \frac{a}{\sin\varphi} + l$. См. приложение. **8.** $\rho = b\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{b^4} - 1\right)}}$; в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4$.

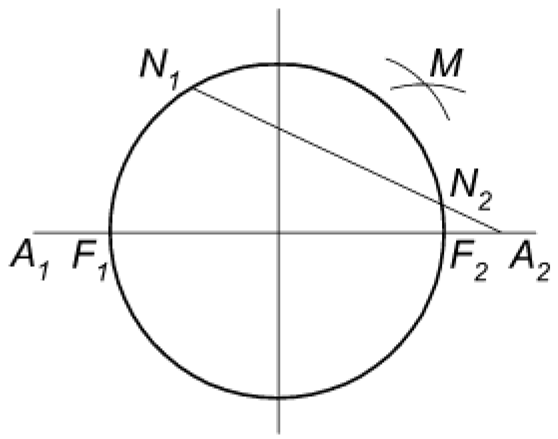


Рис. 1.33

Указания. 1. Из условия имеем $MF_1 \cdot MF_2 = a^2$, откуда $\sqrt{(x+b)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2} = a^2$.

2. Построение овалов Кассини можно осуществить следующим образом. Зная параметры a и b, находим положение фокусов F_1 и F_2 и вершин A_1 и A_2 (рис. 1.33). Проводим из точки A_2 луч, который пересечет окружность, описанную из начала координат радиусом, равным b, в точках N_1 и N_2. Если теперь из фокусов F_1 и F_2 описать окружности радиусами, равными A_2N_1 и A_2N_2, то точка M их пересечения будет принадлежать овалу. Действительно,

$MF_1 \cdot MF_2 = A_2N_1 \cdot A_2N_2 = \text{const}$ в силу известной теоремы о произведении секущей на ее внешнюю часть. Меняя направление луча $A_2N_2N_1$, можно построить любое число точек овала Кассини.

§ 1.7. Параметрические уравнения линии

Параметрическими уравнениями линии на плоскости называются уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t); \\ y &= \varphi_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – функции переменной t.

Пример 1. Написать параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат.

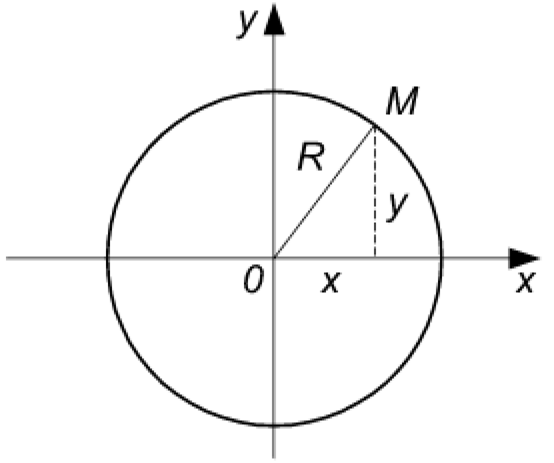


Рис. 1.34

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка окружности (рис. 1.34). Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t; \\ y &= R\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Полученные уравнения и будут искомыми. Исключая параметр t из этих уравнений (для чего нужно возвести в квадрат оба уравнения и почленно сложить), получим уравнение окружности в прямоугольных координатах:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример 2. Окружность радиуса a катится по оси абсцисс. Найти параметрические уравнения линии, описываемой при указанном движении той точки окружности, которая при начальном положении окружности находилась в начале координат. (Описываемая линия называется *циклоидой.*)

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка циклоиды (рис. 1.35). Тогда

$$x = OP = OQ - PQ = \overset{\smile}{MQ} - PQ = at - a\sin t = a\,(t - \sin t),$$

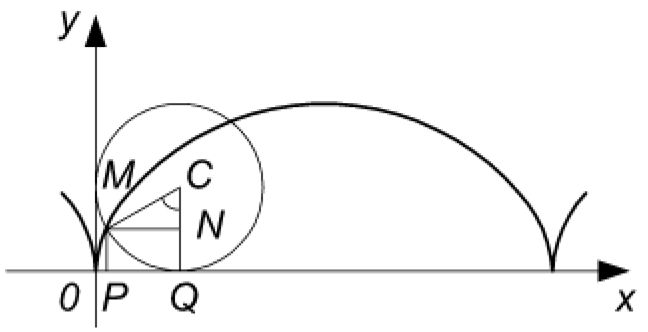


Рис. 1.35

где $t = \angle MCQ$ – угол поворота окружности,

$$y = PM = QN = QC - NC =$$

$$= a - a\cos t = a\,(1 - \cos t).$$

Итак, получены параметрические уравнения циклоиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,(t - \sin t); \\ y &= a\,(1 - \cos t). \end{aligned}\right\}$$

Пример 3. Прямоугольник, две стороны которого совпадают с осями координат, изменяется так, что его диагональ сохраняет постоянную величину a. Линия, описываемая основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямоугольника, противоположной началу координат, на его диагональ, называется *астроидой.* Найти ее уравнение.

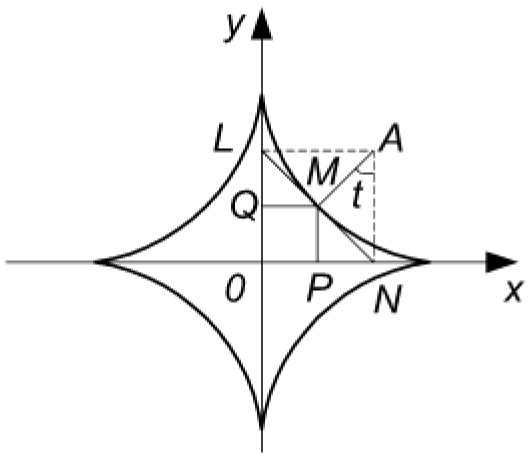


Рис. 1.36

Решение. Пусть $OLAN$ – один из прямоугольников, для которых $LN = a$ (рис. 1.36). Введем в рассмотрение угол $t = \angle ALN$, тогда $\angle MAN = t$, $\angle MNP = t$.

По определению координат имеем:

$$x = OP = QM, \; y = MP.$$

Подставляя в эти равенства выражения для QM и MP, получаемые из треугольников LQM, LMA и LAN, находим:

$$x = QM = LM\cos t = (LA\cos t)\cos t = LA\cos^2 t =$$

$$= (LN\cos t)\cos^2 t = a\cos^3 t;$$

$$y = MP = MN\sin t = (AN\sin t)\sin t = AN\sin^2 t =$$

$$= (LN\sin t)\sin^2 t = a\sin^3 t.$$

Следовательно, получены параметрические уравнения астроиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t; \\ y &= a\sin^3 t. \end{aligned}\right\}$$

Исключая параметр t (для чего нужно извлечь сначала корень кубический из обеих частей уравнения, а потом возвести их в квадрат), получим уравнение астроиды в прямоугольных декартовых координатах

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

П р и м е р 4. По окружности $x^2 + y^2 = a^2$ перемещается прямая, начальное положение которой $x = a$. Определить траекторию точки перемещающейся прямой, принимая за начальное ее положение точку $A\,(a,\,0)$. (Кривая называется *разверткой окружности.*)

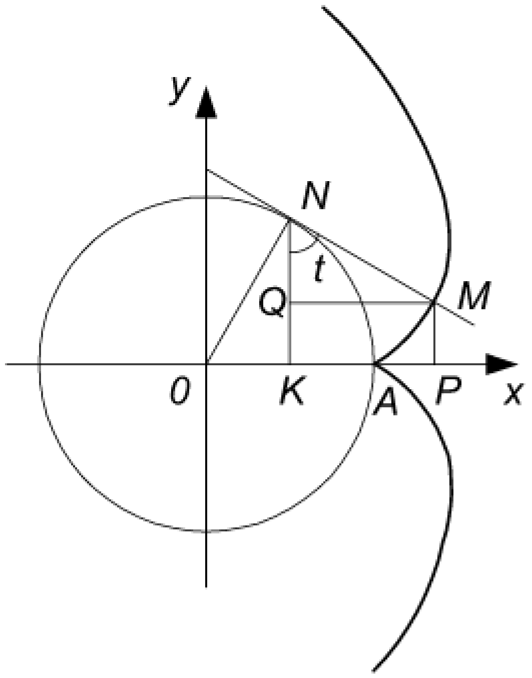


Рис. 1.37

Р е ш е н и е. Возьмем произвольную точку N данной окружности (рис. 1.37). Введем угол $t = \angle AON$. В силу условия задачи длина дуги NA равна длине отрезка NM, где M – точка искомой траектории, начальное положение которой совпадало с точкой A. Координаты точки M через угол t и радиус a выразятся следующим образом:

$$x = OP = OK + KP = OK + QM =$$
$$= a\cos t + NM\sin t =$$
$$= a\cos t + at\sin t;$$

$$y = MP = QK = NK - NQ = a\sin t -$$
$$- MN\cos t = a\sin t - at\cos t.$$

Таким образом, получены следующие параметрические уравнения развертки окружности:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,(\cos t + t\sin t); \\ y &= a\,(\sin t - t\cos t). \end{aligned}\right\}$$

П р и м е р 5. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R. Написать параметрические уравнения кривой, описанной фиксированной точкой катящейся окружности. (Эта кривая называется *эпициклоидой,* при $r = R$ эпициклоида обращается в кардиоиду, см. пример 4 §1.6.)

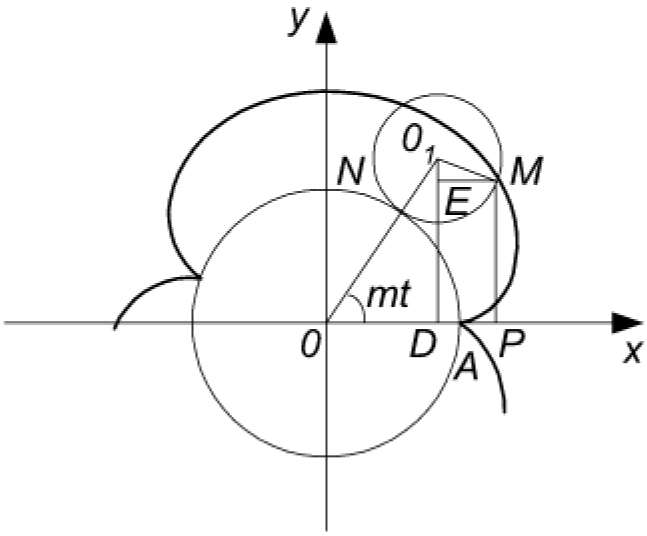


Рис. 1.38

Решение. Поместим начало координат в центр неподвижной окружности. Считаем, что в исходном положении вычерчивающая точка совпадает с точкой A, в которой производящая окружность касается неподвижной, и ось абсцисс направим через точку A (рис. 1.38).

Угол MO_1N между радиусами, проведенными в вычерчивающую точку производящей окружности и в точку касания ее с неподвижной окружностью, обозначим через t. Рассмотрим отношение радиусов окружностей $m = r : R$, которое называется их модулем. Так как качение производящей окружности предполагается совершающемся без скольжения, то $\overset{\smile}{AN} = \overset{\smile}{MN}$ или $R \cdot \angle NOA = rt$, откуда

$$\angle NOA = \frac{r}{R}\, t = mt.$$

Из чертежа получаем:

$$x = OP = OD + DP = OD + EM = (R + r)\cos mt +$$

$$+ r \sin \angle MO_1E;$$

$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r)\sin mt - r\cos \angle MO_1E.$$

Так как

$$\sin \angle MO_1E = \sin\,(t - \angle OO_1D) = \sin\left[\, t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] =$$

$$= -\cos(t+mt);$$

$$\cos\angle MO_1E = \sin(t+mt)$$

и, кроме того, $r = mR$, то параметрические уравнения эпициклоиды запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+mR)\cos mt - mR\cos(t+mt); \\ y &= (R+mR)\sin mt - mR\sin(t+mt). \end{aligned}\right\}$$

Задачи

1. Построить кривую

$$x = t^2,\ \ y = 3t.$$

2. Даны параметрические уравнения линии:

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t.$$

Написать уравнение линии в прямоугольных координатах.

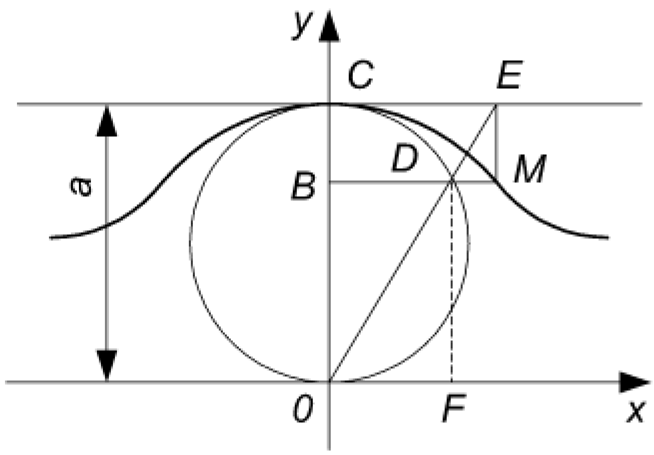


Рис. 1.39

3. Линия задана параметрическими уравнениями:

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right);\ \ y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Составить ее уравнение в прямоугольных декартовых координатах.

4. Декартовым листом называется кривая, параметрические уравнения которой имеют вид:

$$x = \frac{3at}{1+t^3};\ \ y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Написать уравнение кривой в прямоугольных координатах.

5. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса $R > r$ внутри ее. Составить параметрические уравнения кривой (*гипоциклоиды*), описанной точкой M катящейся окружности (при $R = 4r$ гипоциклоида обращается в астроиду $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, см. пример 3).

6. Дана окружность диаметра $OC = a$ и касательная в точке C. Произвольный луч OE пересекает в точках D и E окружность и касательную. Через эти точки проведены прямые, параллельные соответственно оси Ox и оси Oy до пересечения в точке M. Геометрическое место точек M называется *локоном Аньези.* Составить параметрические уравнения кривой и построить ее.

Ответы

1. $y^2 = 9x$. **2.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. **3.** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. **4.** $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.
5. $x = (R - mR)\cos tmt + mR\cos(t - mt)$; $y = (R - mR)\sin mt - mR \times$ $\times \sin(t - mt)$. **6.** $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$; $y = a\sin^2 t$; $y\,(x^2 + a^2) = a^3$. (См. рис. 1.39.)

Глава 2.
Определители и системы линейных алгебраических уравнений

§ 2.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства

Пусть задана квадратная таблица из четырех чисел a_1, a_2, b_1, b_2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется *определителем второго порядка*, соответствующим таблице (A). Этот определитель обозначается символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{2.1}$$

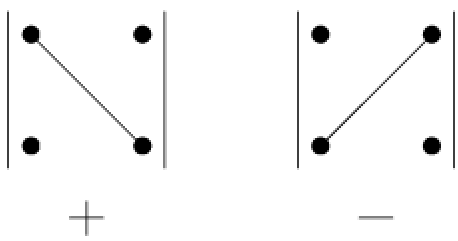


Рис. 2.1

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами* определителя (2.1). В определителе различают первый *столбец* $\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$, второй столбец $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$, а также первую *строку* $a_1\ b_1$ и вторую строку $a_2\ b_2$.

Пара чисел $a_1\ b_2$ образует *главную диагональ*, пара $a_2\ b_1$ – вторую диагональ.

Знаки перед произведениями, стоящими в правой части формулы (2.1), расставляются по схеме, указанной на рис. 2.1.

Пусть дана квадратная таблица из девяти чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 b_3, c_1, c_2, c_3

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

Определителем третьего порядка, соответствующим таблице (B), называется число, находимое по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \tag{2.2}$$

Числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ называются элементами определителя. В определителе третьего порядка различают три столбца и три строки.

Числа $a_1,\ b_2,\ c_3$ образую главную диагональ, числа $c_1,\ b_2,\ a_3$ – вторую диагональ.

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части формулы (2.2) брать со знаком $+$ и какие со знаком $-$, полезно следующее правило.

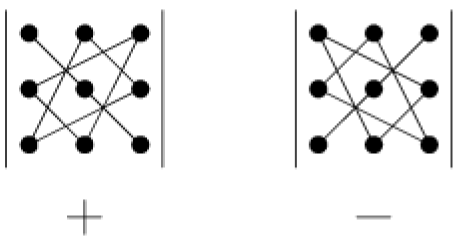


Рис. 2.2

Один из трех членов определителя, входящих в его выражение (2.2) со знаком $+$, является произведением элементов главной диагонали, два других члена – произведением элементов, стоящих на параллелях к главной диагонали, и элемента из противоположного угла. Члены, входящие со знаком $-$, строятся таким же образом, но относительно второй диагонали.

Схематически правило изображено на рис. 2.2.

Минором какого либо элемента называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

З а м е ч а н и е. В определителе второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ минором элемента a_1 является элемент b_2, его можно считать «определителем первого порядка». Элемент b_2 получается из определителя второго порядка вычеркиванием первой строки и первого столбца. Аналогично минором элемента a_2 является элемент b_1 и т. д.

Алгебраическим дополнением элемента называется его минор, взятый со своим или противоположным знаком, согласно следующему правилу: если сумма номеров столбца и строки, на пересечении которых стоит элемент, есть число четное, то минор берется со своим знаком, если нечетное – то с противоположным.

Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) определяет разложение определителя по элементам первой строки.

Свойства определителей

1. Величина определителя не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.

2. При перестановке двух столбцов (или строк) определитель меняет знак.

3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (или строками) равен нулю.

4. Множитель, общий для элементов некоторого столбца (или строки), можно выносить за знак определителя.

5. Определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца (или строки) равны нулю.

6. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

Указанные свойства позволяют упростить вычисление определителей третьего порядка, а именно, каждый определитель можно разложить по элементам любой строки (столбца), обратив в нули два элемента этой строки (столбца).

2.1.1. Некоторые приложения определителей к аналитической геометрии

1. Площадь треугольника с вершинами $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$, $C\,(x_3, y_3)$ вычисляется по формуле

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

где знак выбирается одинаковым со знаком определителя.

2. Условие, при котором три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.5)$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.6)$$

4. Условие, при котором три прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ \ A_2x+B_2y+C_2=0,\ \ A_3x+B_3y+C_3=0$$

пересекаются в одной точке:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.7)$$

Пример 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. По формуле (2.1) получим

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}=4\cdot 6-(-5)\cdot 3=39.$$

П р и м е р 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Прибавляя удвоенный второй столбец к первому, затем к третьему столбцу и применяя формулу (2.3), найдем

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 14 & 2 & 12 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 14 & 2 & 16 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 14 & 16 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,(84 - 80) = 8.$$

З а м е ч а н и е. Определитель можно было бы вычислить, разлагая его, например, по элементам третьей строки, предварительно обратив в нули два ее элемента.

Тот же результат можно получить непосредственно по формуле (2.3):

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\,(4 - 24) + 2\,(20 - 12) + 4\,(20 - 2) = -80 + 16 + 72 = 8.$$

П р и м е р 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Разложим этот определитель по элементам третьего столбца, обратив предварительно в нули два его элемента. Прибавляя к первой строке вторую, умноженную на -2, и к третьей – вторую, умноженную на $-\frac{3}{2}$, находим

$$\begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 32 & 0 \\ 5 & -35 & 2 \\ -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -7 & 32 \\ -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -7 & 32 \\ -11 & 7 \end{vmatrix} = -(-49 + 352) = -303.$$

Пример 4. Определить x из уравнения

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. По формуле (2.2) получаем

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Решим это кубическое уравнение. Разлагая на множители левую часть уравнения, находим

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x\,(x^2 - 1) - 2\,(x - 1) =$$

$$= (x - 1)\,[x\,(x + 1) - 2] = (x - 1)\,(x^2 + x - 2).$$

Следовательно,

$$(x - 1)\,(x^2 + x - 2) = 0,$$

откуда $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = -2.$

Пример 5. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A\,(1, -1),\ \ B\,(2, 3),\ \ C\,(4, 5).$

Решение. Вычислим определитель, входящий в формулу (2.4), пользуясь формулой (2.2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 10 - 12 + 2 - 5 = -6.$$

Так как $\Delta < 0$, то в формуле (2.4) нужно взять знак минус:

$$S = -\frac{1}{2}\,\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)(-6) = 3 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 6. Упростить выражение

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разлагая определитель по элементам первой строки, получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \cos(\alpha+\beta).$$

Задачи

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & x \\ 1 & \sqrt{x} \end{vmatrix}$.

Вычислить определители, разложив их по элементам первой строки:

7. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1 & -b & -1 \\ b & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители:

9. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

16. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ **17.** $\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

18. Лежат ли точки $A\,(1, 1)$, $B\,(-2, 7)$, $C\,(0, 3)$ на одной прямой?

19. Даны точки $A\,(1, -1)$, $B\,(2, 4)$. На прямой $y = 2x - 4$ выбрать точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 4 квадратным единицам.

20. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0, -2)$, $M_2(-5, 3)$. Проходит ли прямая M_1M_2 через точку пересечения прямых: $x - 3y - 2 = 0$, $2x + 5y + 7 = 0$.

Ответы

1. 3. **2.** – 4. **3.** 2. **4.** $a^2 + b^2$. **5.** 1. **6.** 0. **7.** 55. **8.** $2\,(1 - b^2)$. **9.** 6. **10.** 4. **11.** 6. **12.** – 6. **13.** 27. **14.** 0. **15.** $(x - y)\,(y - z)\,(z - x)$. **16.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **17.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **18.** Да. **19.** $M_1(-2, 8)$, $M_2\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$, **20.** $x + y + 2 = 0$. Проходит.

§ 2.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью определителей

Система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1; \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

имеет единственное решение

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2.9}$$

при условии, что определитель системы отличен от нуля, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.10}$$

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1; \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2; \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{2.12}$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \tag{2.13}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.14}$$

Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

имеет решение

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};\ \ y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix};\ \ z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (2.16)$$

где k – произвольный множитель, если хотя бы один из определителей отличен от нуля. В случае, когда все определители равны нулю система (2.15) сводится к одному уравнению.

Однородная система трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0; \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

имеет решение, отличное от нулевого ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – нулевое решение системы), когда определитель системы равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.18)$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4x + y = 5; \\ 3x - 2y = 12. \end{aligned}\right\}$$

Решение. В данном случае: $a_1 = 4$, $b_1 = 1$, $c_1 = 5$, $a_2 = 3$, $b_2 = -2$, $c_2 = 12$.

Определитель системы $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому мы можем пользоваться формулами (2.9). Получаем

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10-12}{-8-3} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}}=\frac{33}{-11}=-3.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x+4y+z&=4;\\ 3x+6y+2z&=4;\\ 4x-y-3z&=1.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Вычислим определители, входящие в формулы (2.12):

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 4 & -1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -9 & -3\end{vmatrix}=-(-9)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=9\,(4-3)=9;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}4 & 4 & 1\\ 4 & 6 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -4 & -2 & 2\\ 13 & 11 & -3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 13 & 11\end{vmatrix}=$$

$$=1\,(-44+26)=-18;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -4 & 2\\ 10 & 13 & -3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 10 & 13\end{vmatrix}=1\,(-13+40)=27;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & 4 & 4\\ 3 & 6 & 4\\ 4 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 4\\ 4 & -9 & 1\end{vmatrix}=-(-9)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{vmatrix}=9\,(8-12)=-36.$$

Так как определитель системы $\Delta\neq 0$, то подставляя полученные значения в формулы (2.12), находим

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-18}{9}=-2;\;\; y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{27}{9}=3;\;\; z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-36}{9}=-4.$$

П р и м е р 3. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 4z = 0; \\ 3x + y - 2z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Составим таблицу из коэффициентов данной системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая поочередно столбцы, получим определители:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

(во втором определителе меняем порядок столбцов).

По формулам (2.16) находим решение системы:

$$x = 2k, \;\; y = 16k, \;\; z = 11k,$$

где k – произвольный множитель.

П р и м е р 4. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z = 0; \\ 2x + 4y - 6z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Составляя таблицу из коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

и вычеркивая поочередно столбцы, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Данная система приводится к одному уравнению

$$x + 2y - 3z = 0,$$

в чем можно убедится непосредственно, сокращая на 2 второе уравнение.

Решение системы будет

$$y = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x,$$

где x и z могут принимать произвольные значения.

Пример 5. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 2z = 0; \\ x - y + z = 0; \\ 2x + y - 3z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Определитель системы

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Следовательно, данная система имеет единственное нулевое решение: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$

Пример 6. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 0; \\ 3x - y + 2z = 0; \\ x - 3y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Минор этого определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

отличен от нуля. Следовательно, третье уравнение данной системы есть следствие двух первых. Решая эти уравнения по формулам (2.16), получим

$$x = k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3k, \quad y = k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = k, \quad z = k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4k,$$

где k – произвольный множитель.

Пример 7. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0; \\ 4x + 4y - 4z &= 0; \\ 5x + 5y - 5z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры определителя Δ тоже равны нулю. Система приводится к одному уравнению, что непосредственно видно, если сократить второе уравнение на 4 и третье на 5. Чтобы найти решение системы, достаточно разрешить лишь первое уравнение, например, относительно y. Находим

$$y = z - x,$$

где x и z могут принимать любые значения.

Пример 8. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 3; \\ x + y + z &= 1; \\ x + y &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

но среди его миноров есть отличный от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Среди определителей третьего порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеется определитель, отличный от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Данная система несовместна (не имеет решения), что видно если сложить первые два уравнения и сравнить результат с третьим уравнением.

Пример 9. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+y-z=3; \\ x+y+z=1; \\ x+y=2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Определитель системы $\Delta=0$, но среди его миноров есть отличные от нуля. Определители третьего порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

все равны нулю. Данная система приводится к двум уравнениям, что становится ясным, если сложить первые два уравнения. Решая совместно, например второе и третье уравнения, получим:

$$x+y=2,\ z=-1 \text{ или } x=2-y,\ z=-1,$$

где y может принимать любые значения.

Пример 10. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z=1; \\ 2x+4y+6z=3; \\ 3x+6y+9z=2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Все его миноры также равны нулю. Среди определителей второго порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

есть отличные от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Данная система несовместна, в чем убеждаемся непосредственно, умножив первое уравнение на 2 или на 3.

Пример 11. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1; \\ 2x + 4y + 6z &= 2; \\ 3x + 6y + 9z &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Определитель системы тот же, что и в предыдущем примере, значит $\Delta = 0$. Все его миноры тоже равны нулю. Определители второго порядка таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

равны нулю. Данная система приводится к одному уравнению, в чем непосредственно убеждаемся, если сократим второе уравнение на 2, а третье на 3. Остается решить первое уравнение, чтобы получить решение данной системы. Таким образом, находим

$$x = 1 - 2y - 3z,$$

где y и z произвольны.

Задачи

Решить с помощью определителей системы уравнений:

1. $\begin{cases} 5x+3y=21; \\ 2x+7y=20. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 6x+5y=1; \\ 8x+3y=5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 9x+2y=8; \\ 4x+y=3. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x+3y=9; \\ 5x+2y=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y=4; \\ 3x+y=12. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} (1+a)\,x-ay=1+a; \\ ax+(1-a)\,y=a-1. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

7. $\begin{cases} x+2y+3z=6; \\ 4x+y+4z=9; \\ 3x+5y+2z=10. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x+y+z=0; \\ 2x-3y+4z=0; \\ 4x-11y+10z=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+y+3z=3; \\ 4x+2y+5z=5; \\ 3x+4y+7z=2. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x+y+z=0; \\ 2x-3y+4z=0; \\ 5x-7y+8z=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x+4y+2z-8=0; \\ x+5y+2z-5=0; \\ 2x+3y+4z-3=0. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x+y+z=2; \\ 2x-3y+4z=3; \\ 4x-11y+10z=5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+3y+2z-4=0; \\ 2x+6y+z=2; \\ 4x+8y-z-2=0. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x-y+z-1=0; \\ x+y-z-2=0; \\ 5x+y-z-7=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+2y-3z=0; \\ 3x-4y+z=0. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x+3y-z=0; \\ x-2y+2z=0. \end{cases}$

Ответы

1. $x=3,\quad y=2.$ **2.** $x=1,\quad y=-1.$ **3.** $x=2,\quad y=-5.$ **4.** $x=0,\quad y=3.$ **5.** $x=4,\quad y=0.$ **6.** $x=1-a,\quad y=-(1+a).$ **7.** $x=1,\quad y=1,\quad z=1.$ **8.** $x=7k,\quad y=-2k,\quad z=-5k.$ **9.** $x=1,\quad y=-2,\quad z=1.$ **10.** $x=y=z=0.$ **11.** $x=2,\quad y=1,\quad z=-1.$ **12.** $x=\frac{1}{5}(9-7z),\quad y=\frac{1}{5}(1+2z).$ **13.** $x=3,\quad y=-1,\quad z=2.$ **14.** Система несовместна. **15.** $x=-10k,\quad y=-10k,\quad z=-10k.$ **16.** $x=4k,\quad y=-5k,\quad z=-7k.$

Глава 3. Векторная алгебра

§ 3.1. Основные понятия

Различают величины векторные и скалярные. *Скалярная* величина может быть охарактеризована одним *числом*, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Примеры скалярных величин: длина, площадь, объем, время, угол, температура, плотность, сопротивление проводника, электроемкость, работа и др.

Векторная величина характеризуется *числом* и *направлением*. Примеры векторных величин: сила, скорость, ускорение, напряженность электрического или магнитного поля и др. Всякая векторная величина может быть изображена с помощью прямолинейного отрезка, у которого различают начало и конец.

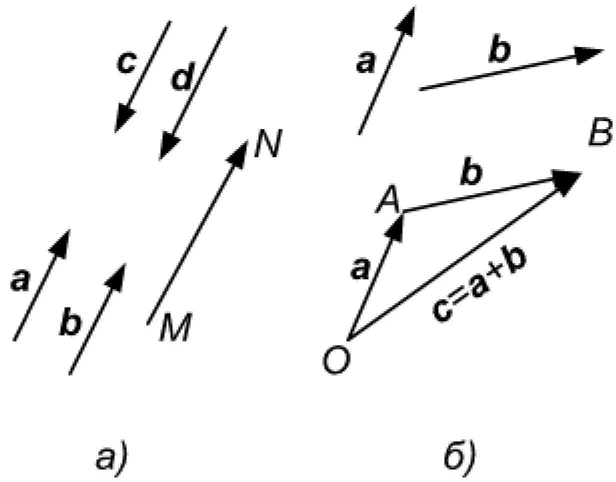


Рис. 3.1

Вектором называется направленный отрезок. Вектор вполне характеризуется следующими элементами: 1) *начальной точкой* («точкой приложения»); 2) *направлением*; 3) *длиной* («модулем вектора»). Если начало вектора есть M, а его конец N (рис. 3.1), вектор обозначается символами $\overline{MN}$ или $\overrightarrow{MN}$. Иногда вектор обозначают одной буквой жирного шрифта $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и т. д. или такой же буквой светлого шрифта с черточкой наверху $\bar{a}, \bar{b}$ и т. д.

Длина вектора $\overline{MN}$ обозначается через $\left|\overline{MN}\right|$, вектора $\bar{a}$ – через $\left|\bar{a}\right|$ или просто a.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. *Нуль-вектор* обозначается символом **0**.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (равнонаправленные векторы; рис. 3.1, *а*, векторы $\overline{a}, \overline{b}$) или противоположные направления (рис. 3.1, *а*, векторы $\overline{b}$ и $\overline{d}$, $\overline{c}$ и $\overline{b}$, $\overline{a}$ и $\overline{d}$).

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины (другими словами равными векторами называются равнонаправленные векторы с одинаковыми длинами; $\overline{a} = \overline{b}$).

Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются *противоположными* (векторы $\overline{b}$ и $\overline{d}$, векторы $\overline{MN}$ и $\overline{NM}$). Вектор, противоположный вектору $\overline{a}$, обозначается через $-\overline{a}$.

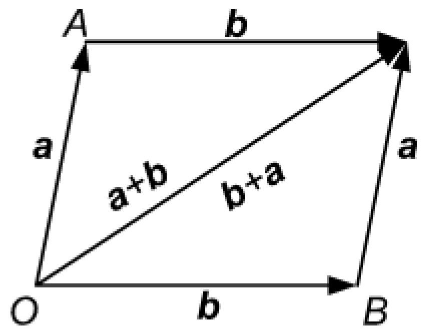


Рис. 3.2

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$, определяемый следующим построением: 1) от произвольной точки O пространства откладывается вектор $\overline{OA} = \overline{a}$; 2) от его конца A откладывается вектор $\overline{AB} = \overline{b}$; 3) начало первого вектора соединяется с концом второго; полученный вектор $\overline{OB}$ есть вектор-сумма $\overline{c}$ (см. рис. 3.1. *б*).

Сумма двух векторов обладает свойством переместительности (рис. 3.2).

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a} \qquad (3.1)$$

и свойством сочетательности (рис. 3.3)

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}). \qquad (3.2)$$

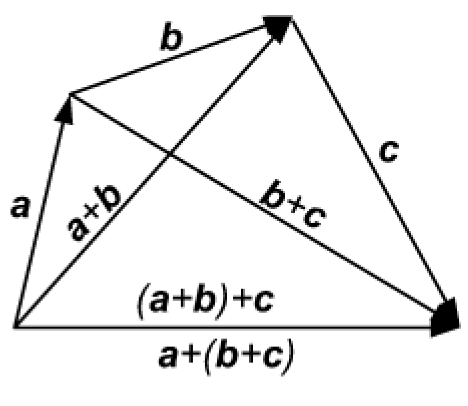


Рис. 3.3

Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору.

Суммой n векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}_1$, а конец – с концом вектора $\overline{a}_n$, при условии, что точка приложения каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего. На рис. 3.4 изображена сумма 5 векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Сумма *n* векторов обладает свойством сочетательности (слагаемые можно группировать как угодно).

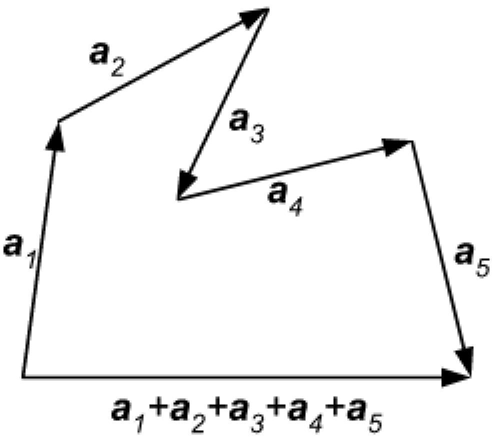


Рис. 3.4

Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{d}$, который при сложении с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$:

$$\overline{b}+\overline{d}=\overline{a},\ \overline{a}-\overline{b}=\overline{d}.$$

Построение вектора $\overline{d}$ можно осуществить следующим образом. От произвольной точки пространства O откладывается вектор $\overline{OA}=\overline{a}$ и вектор $\overline{OB}=\overline{b}$, тогда вектор $\overline{d}=\overline{BA}$, т. е. начало его совпадает с концом вычитаемого вектора $\overline{b}$, а конец его – с концом уменьшаемого вектора $\overline{a}$ (рис. 3.5). Другой способ: вектор $\overline{d}$ равен сумме двух векторов $\overline{a}$ и $-\overline{b}$ (рис. 3.5).

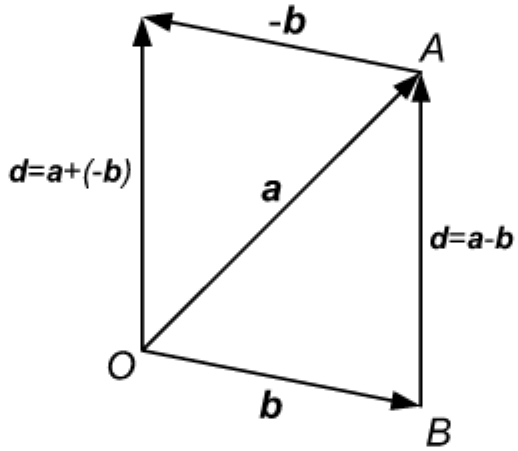


Рис. 3.5

Произведением вектора $\overline{a}$ *на число* λ называется новый вектор $\lambda\overline{a}$, длина которого равна $|\lambda||\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$ при $\lambda>0$ и противоположно ему при $\lambda<0$. На рис. 3.6 изображены векторы $\overline{a}$, $3\overline{a}$, $-2\overline{a}$.

Свойства произведения вектора на число:

1) $\lambda\,(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\,\overline{a}$;

2) $(-\lambda)\,\overline{a}=\lambda\,(-\overline{a})=-\,(\lambda\overline{a})$;

3) $(\lambda+\mu)\,\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

4) $\lambda\,(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

5) $\lambda\overline{a}=\mathbf{0}$, если $\lambda=0$ или $\overline{a}=\mathbf{0}$.

Всякий вектор $\overline{a}$ может быть представлен в виде $\overline{a}=\overline{a}_0\,|\overline{a}|$, где $\overline{a}_0$ – единичный вектор направления вектора $\overline{a}$.

Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – два коллинеарных вектора, то всегда можно найти такой скаляр λ, что

$$\overline{b} = \lambda\overline{a}. \qquad (3.3)$$

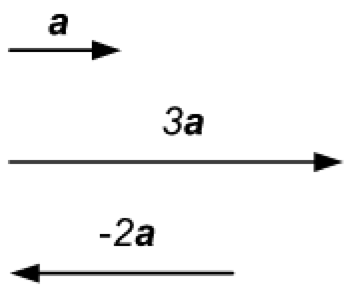


Рис. 3.6

Число λ называется *отношением вектора* $\overline{b}$ *к коллинеарному ему вектору* $\overline{a}$ $(\overline{a} \neq \mathbf{0})$:

$$\frac{\overline{b}}{\overline{a}} = \lambda \text{ или } \overline{b} : \overline{a} = \lambda.$$

Условие, необходимое и достаточное для коллинеарности двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, выражается равенством (3.3) или в более общем виде равенством

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = \mathbf{0}. \qquad (3.4)$$

Векторы, параллельные одной и той же плоскости (или лежащие в одной плоскости), называются *компланарными*. Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\overline{c}$, компланарный с векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, можно единственным образом представить в виде

$$\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}. \qquad (3.5)$$

Условие, необходимое и достаточное для компланарности трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ выражается равенством (3.5) или в более общем виде

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \mathbf{0}, \qquad (3.6)$$

где числа α, β и γ одновременно в нуль не обращаются.

Если даны три некомланарных вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, то всякий четвертый вектор $\overline{d}$ можно однозначно разложить по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}. \qquad (3.7)$$

Между любыми четырьмя векторами $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ существует *линейная зависимость*, т. е.

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \delta\overline{d} = \mathbf{0}, \qquad (3.8)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не равны нулю одновременно.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_n$ называется выражение

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\overline{a}_n, \qquad (3.9)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – произвольные числа.

К линейной комбинации векторов можно применять все правила преобразований, установленные в алгебре для многочленов первой степени.

Пример 1. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 3.7) $\overline{AB} = \overline{p}$, $\overline{AD} = \overline{q}$. Выразить векторы $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$ через $\overline{p}$ и $\overline{q}$.

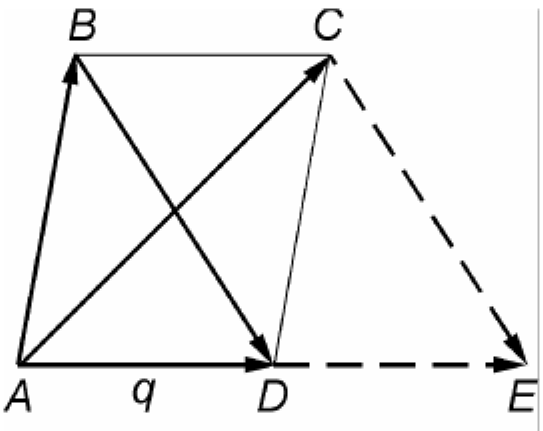


Рис. 3.7.

Решение. Коллинеарные векторы BC и AD имеют равные длины (противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны) и одинаково направлены. В соответствии с определением равенства векторов получаем $\overline{BC} = \overline{AD}$. Так как $\overline{AD} = \overline{q}$, то $\overline{BC} = \overline{q}$.

Векторы $\overline{CD}$ и $\overline{AB}$ противоположно направлены и имеют равные длины. По определению противоположных векторов получаем

$$\overline{CD} = -\overline{DC} = -\overline{AB} = -\overline{p}, \text{ т. е. } \overline{CD} = -\overline{p}.$$

Вектор $\overline{AC}$ является суммой векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, но $\overline{BC} = \overline{AD}$, поэтому $\overline{AC} = \overline{p} + \overline{q}$.

Далее, $\overline{CA} = -\overline{AC} = -(\overline{p} + \overline{q}) = -\overline{p} - \overline{q}$. (Этот результат можно получить и другим способом: $\overline{CA} = \overline{CD} + \overline{DA}$, $\overline{CD} = -\overline{DC} = -\overline{AB} = -\overline{p}$, $\overline{DA} = -\overline{AD} = -\overline{q}$, поэтому $\overline{CA} = -\overline{p} - \overline{q}$.)

По определению разности двух векторов получаем: $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$ или $\overline{BD} = \overline{q} - \overline{p}$, так как $\overline{AD} = \overline{q}$, $\overline{AB} = \overline{p}$.

Аналогичным образом находим, что $\overline{DB} = \overline{p} - \overline{q}$.

Ответ: $\overline{BC} = \overline{q}$, $\overline{CD} = -\overline{p}$, $\overline{AC} = \overline{p} + \overline{q}$, $\overline{CA} = -\overline{p} - \overline{q}$, $\overline{BD} = \overline{q} - \overline{p}$, $\overline{DB} = \overline{p} - \overline{q}$.

З а м е ч а н и е. Ели даны два неколлинеарных вектора $\overline{p}$ и $\overline{q}$, то их сумма и разность являются диагональными векторами параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}$ и $\overline{q}$.

П р и м е р 2. При каких условиях векторы $\overline{p}+\overline{q}$ и $\overline{p}-\overline{q}$ коллинеарны?

Р е ш е н и е. В силу замечания к примеру 1, если векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$ не коллинеарны, то на них можно построить параллелограмм, диагональные векторы которого $\overline{p}+\overline{q}$ и $\overline{p}-\overline{q}$ во всяком случае не коллинеарны. Следовательно, коллинеарность векторов $\overline{p}+\overline{q}$ и $\overline{p}-\overline{q}$ может иметь (и действительно имеет) место, тогда и только тогда, когда $\overline{p}$ и $\overline{q}$ коллинеарны.

П р и м е р 3. Показать на чертеже, что $(\overline{p}+\overline{q})+(\overline{q}-\overline{p})=2\overline{q}$.

Р е ш е н и е. Как известно (см. примеры 1 и 2), $\overline{p}+\overline{q}$ и $(\overline{q}-\overline{p})$ – диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}$ и $\overline{q}$. Построим $\overline{CE}=\overline{BD}$ (рис. 3.7). Так как

$$\overline{AC}=\overline{p}+\overline{q},\ \overline{CE}=\overline{BD}=\overline{q}-\overline{p},\ \overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{q}+\overline{q}=2\overline{q}$$

$$\text{и } \overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE},$$

$$\text{то } 2\overline{q}=(\overline{p}+\overline{q})+(\overline{q}-\overline{p}).$$

З а м е ч а н и е. Алгебраически равенство проверяется раскрытием скобок.

П р и м е р 4. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 3.8) $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{AD}=\overline{q}$, $\overline{AA'}=\overline{r}$. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{D'B'}$, $\overline{AC'}$, $\overline{B'C}$, $\overline{D'B}$, $\overline{DB'}$ через $\overline{p},\overline{q},\overline{r}$.

Р е ш е н и е. По определению суммы векторов получаем:

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{p}+\overline{q};$$

$$\overline{AC'}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CC'}=\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA'}=\overline{p}+\overline{q}+\overline{r}.$$

По определению разности двух векторов находим:

$$\overline{D'B'}=\overline{A'B'}-\overline{A'D'}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{p}-\overline{q};$$

$$\overline{B'C} = \overline{BC} - \overline{BB'} = \overline{AD} - \overline{AA'} = \overline{q} - \overline{r}.$$

Так как

$$\overline{D'B} = \overline{D'D} + \overline{DA} + \overline{AB} \text{ и } \overline{D'D} = -\overline{AA'} = -\overline{r},$$

$$\overline{DA} = -\overline{q}, \ \overline{AB} = \overline{p},$$

то

$$\overline{D'B} = \overline{p} - \overline{q} - \overline{r}.$$

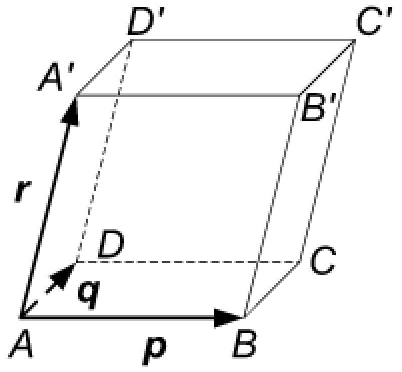


Рис. 3.8

Поскольку

$$\overline{DB'} = \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BB'} \text{ и}$$
$$\overline{DA} = -\overline{q}, \ \overline{AB} = \overline{p}, \ \overline{BB'} = \overline{r},$$

то

$$\overline{DB'} = \overline{p} - \overline{q} + \overline{r}.$$

Пример 5. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C справедлива формула $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \mathbf{0}$.

Решение. Вектор $\overline{BC}$ отложен от конца вектора $\overline{AB}$, вектор $\overline{CA}$ – от конца вектора $\overline{BC}$, тогда конец вектора $\overline{CA}$ совпадает с началом вектора $\overline{AB}$. Следовательно, сумма $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ является вектором, начало и конец которого совпадают. Такой вектор по определению есть нуль-вектор, т. е. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \mathbf{0}$.

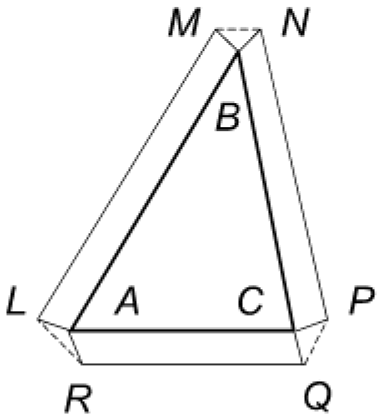


Рис. 3.9

Пример 6. На сторонах треугольника ABC построены произвольные параллелограммы $ABML$, $BCPN$, $ACQR$ (рис. 3.9). Доказать, что из отрезков RL, MN, PQ можно составить треугольник (сохраняя при этом направление каждого отрезка).

Решение. Из чертежа (рис. 3.9) непосредственно получаем

$$\overline{LM} + \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RL} = \mathbf{0};$$

с другой стороны,

$$\overline{LM}+\overline{NP}+\overline{QR}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\mathbf{0} \text{ (см. пример 5).}$$

Следовательно,

$$\overline{MN}+\overline{PQ}+\overline{RL}=\mathbf{0}.$$

Последнее равенство означает, что ломаная, построенная на трех данных векторах $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{RL}$, должна замкнуться, а это и требовалось доказать.

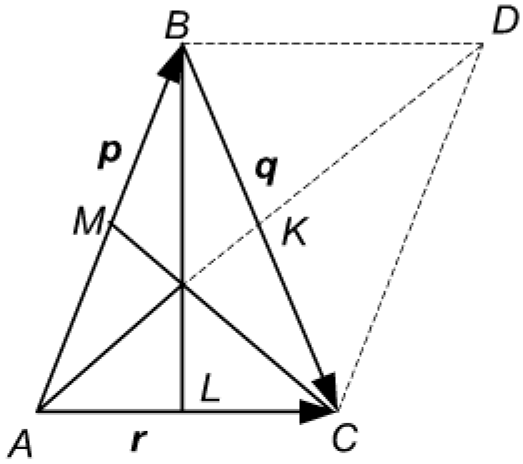


Рис. 3.10

Пример 7. Дан треугольник ABC, в котором $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{BC}=\overline{q}$ (рис. 3.10). Выразить векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$, где K, L, M – основания медиан, через векторы $\overline{p}, \overline{q}$.

Решение. Пользуясь определением суммы двух векторов, получаем

$$\overline{AK}=\overline{AB}+\overline{BK}.$$

Так как

$$\overline{BK}=\frac{1}{2}\overline{BC}$$

(это следует из определения произведения вектора на число и определения медианы) $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{BC}=\overline{q}$, то

$$\overline{AK}=\overline{p}+\frac{1}{2}\overline{q}.$$

Далее,

$$\overline{BL}=\overline{BC}+\overline{CL},\ \overline{CL}=-\frac{1}{2}\overline{AC}$$

(векторы $\overline{CL}$ и $\overline{AC}$ противоположно направлены), $\overline{AC}=\overline{p}+\overline{q}$, поэтому

$$\overline{BL}=\overline{q}-\frac{1}{2}(\overline{p}+\overline{q})=\frac{1}{2}(\overline{q}-\overline{p}).$$

Аналогично находим, что

$$\overline{CM}=\frac{1}{2}\,\overline{p}-(\overline{p}+\overline{q})=-\overline{q}-\frac{1}{2}\,\overline{p}.$$

З а м е ч а н и е . Эти выражения для $\overline{AK}$, $\overline{BL}$ и $\overline{CM}$ можно получить и по-другому. Например, достроив треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$, получим

$$\overline{AK}=\frac{1}{2}\,\overline{AD}=\frac{1}{2}\,(\overline{AB}+\overline{BD})=\frac{1}{2}\,(\overline{AB}+\overline{AC})=$$

$$=\frac{1}{2}\,[\overline{p}+(\overline{p}+\overline{q})\,]=\overline{p}+\frac{1}{2}\,\overline{q}.$$

П р и м е р 8 . Показать, что $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|\le\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$. В каком случае в этом отношении имеет место знак равенства?

Р е ш е н и е . Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, то, построив их сумму, получим треугольник, длины сторон которого соответственно равны $\left|\overline{a}\right|$, $\left|\overline{b}\right|$ и $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$. Неравенство

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|<\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$$

вытекает из того, что в треугольнике одна сторона меньше суммы двух других. Равенство

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$$

имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены.

П р и м е р 9 . В равностороннем треугольнике ABC (рис. 3.11) M есть середина стороны BC, O – центр тяжести треугольника. Имеет ли смысл каждое из выражений: 1) $\overline{AO}:\overline{AM}$, 2) $\overline{MO}:\overline{AO}$, 3) $\overline{OA}:\overline{OB}$? В случае утвердительного ответа найти значение соответствующего выражения.

Р е ш е н и е . Так как векторы $\overline{AO}$ и $\overline{AM}$ коллинеарны, то отношение $\overline{AO}:\overline{AM}$ имеет смысл. Найдем значение этого отношения. Поскольку центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан и эта точка делит каждую медиану в отношении $2:1$ (считая от

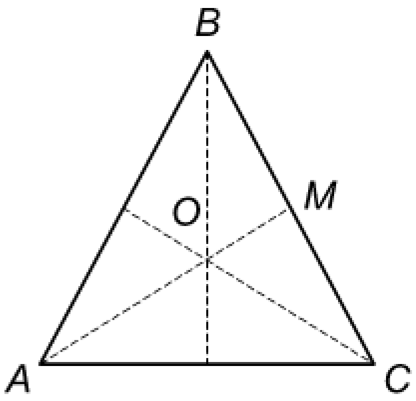


Рис. 3.11

вершины), то

$$\left|\overline{AM}\right| = 3\left|\overline{OM}\right|,\ \left|\overline{AO}\right| = 2\left|\overline{OM}\right|,$$

следовательно,

$$\overline{AO} : \overline{AM} = \frac{2\left|\overline{OM}\right|}{3\left|\overline{OM}\right|} = \frac{2}{3}.$$

Отношение $\overline{MO} : \overline{AO}$ также имеет смысл, ибо векторы $\overline{MO}$ и $\overline{AO}$ коллинеарны. Так как эти векторы противоположно направлены, то

$$\overline{MO} : \overline{AO} = -\left|\frac{\overline{MO}}{\overline{AO}}\right| = -\frac{1}{2}.$$

Отношение $\overline{OA} : \overline{OB}$ смысла не имеет, ибо векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ не коллинеарны.

Пример 10. Упростить выражение

$$\frac{4\overline{a} - 2\overline{b} + 5\overline{c}}{2} - \frac{4\overline{a} - 4\overline{b} - 3\overline{c}}{6} + \frac{2\overline{a} - 20\overline{b} + 3\overline{c}}{3}.$$

Решение. Приводим данное выражение к общему знаменателю, получим

$$\frac{4\overline{a} - 2\overline{b} + 5\overline{c}}{2} - \frac{4\overline{a} - 4\overline{b} - 3\overline{c}}{6} + \frac{2\overline{a} - 20\overline{b} + 3\overline{c}}{3} =$$

$$= \frac{12\overline{a} - 6\overline{b} + 15\overline{c} - 4\overline{a} + 4\overline{b} + 3\overline{c} + 4\overline{a} - 40\overline{b} + 6\overline{c}}{6} =$$

$$= \frac{12\overline{a} - 42\overline{b} + 24\overline{c}}{6} = 2\overline{a} - 7\overline{b} + 4\overline{c}.$$

Задачи

1. Дан прямоугольник $ABCD$. Коллинеарны ли векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$; $\overline{AD} - \overline{AB}$ и $\overline{DA} - \overline{DC}$; $\overline{DA} + \overline{AB}$ и $\overline{BC} + \overline{CD}$?

2. Даны две различные точки A и B окружности радиуса R с центром в точке O. Равны ли векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$?

3. Дан ромб $ABCD$. Равны ли векторы $\overline{AD}$ и $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?

4. В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ даны $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{b}$, $\overline{CD}=\overline{c}$, $\overline{DE}=\overline{d}$. Выразить каждый из векторов $\overline{BF}$, $\overline{BG}$, $\overline{FD}$, $\overline{DG}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{CA}$ через векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$.

5. Дана точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и векторы $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{AD}=\overline{q}$. Выразить через $\overline{p}$ и $\overline{q}$ следующие векторы: $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BO}$.

6. Проверить на рисунке следующие формулы:

$$(\overline{a}+\overline{b})-(\overline{a}-\overline{b})=2\overline{b};\ \frac{\overline{a}-\overline{b}}{2}+\overline{b}=\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}.$$

7. Показать, что

$$\left|\overline{a}_1+\overline{a}_2+\cdots+\overline{a}_n\right|\le\left|\overline{a}_1\right|+\left|\overline{a}_2\right|+\cdots+\left|\overline{a}_n\right|.$$

В каком случае в этом отношении имеет место знак равенства?

8. В треугольнике ABC $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{BC}=\overline{q}$, $\overline{CA}=\overline{r}$. Выразить через $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$, где K, L, M – середины сторон треугольника.

9. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей, M – произвольная точка, отличная от O. Можно ли выразить числом отношение $(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}):\overline{MO}$?

10. Упростить выражения:

1) $2\,(3\overline{a}-4\overline{b}+5\overline{c})-3\,(\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c})+5\,(2\overline{a}+3\overline{b}-4c)$;

2) $\dfrac{2\overline{a}-3\overline{b}+4\overline{c}}{2}-\dfrac{5\overline{a}-6\overline{b}-2\overline{c}}{3}+\dfrac{\overline{a}+2\overline{b}-6\overline{c}}{4}$.

Ответы

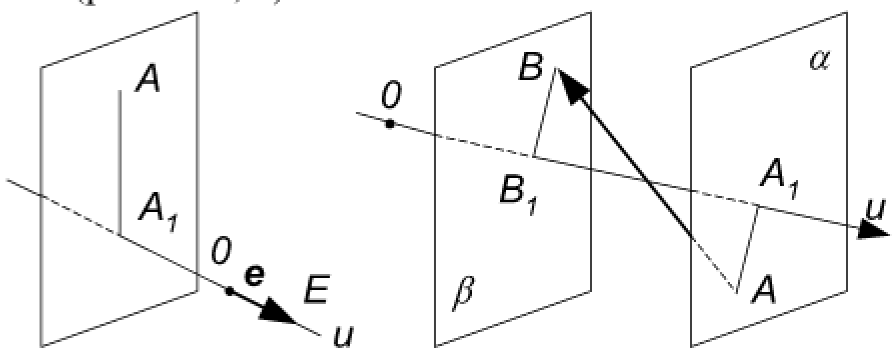
1. Векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$ коллинеарны; векторы $\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DB}$ и $\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{BD}$ также коллинеарны **2.** $\overline{OA}\ne\overline{OB}$. **3.** $\overline{AD}\ne\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AB}\ne\overline{CD}$. **4.** $\overline{BF}=\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}-\overline{a}$; $\overline{BG}=-\overline{a}+\overline{d}+\overline{c}$; $\overline{FD}=\overline{a}-\overline{d}$; $\overline{DG}=\overline{d}-\overline{a}-\overline{b}$; $\overline{DH}=\overline{d}-\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$; $\overline{CG}=\overline{c}+\overline{d}-\overline{a}-\overline{b}$; $\overline{CA}=-\overline{a}-\overline{b}$. **5.** $\overline{BC}=\overline{q}$; $\overline{CB}=-\overline{q}$; $\overline{CD}=-\overline{p}$; $\overline{AC}=\overline{p}+\overline{q}$; $\overline{BD}=-\overline{p}+\overline{q}$;

$\overline{DB} = \overline{p} - \overline{q}$; $\quad \overline{AO} = \frac{1}{2}(\overline{p} + \overline{q}) = \frac{1}{2}\overline{p} + \frac{1}{2}\overline{q}$; $\quad \overline{CO} = -\frac{1}{2}(\overline{p} + \overline{q})$; $\quad \overline{BO} =$ $= \frac{1}{2}(-\overline{p} + \overline{q})$. **7.** Указание. Отрезок прямой короче ломаной, проведенной между его концами. Знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда направления векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_n$ совпадают. **8.** $\overline{AK} = \overline{p} + \frac{1}{2}\overline{q}$, $\overline{BL} = \overline{q} + \frac{1}{2}\overline{r}$, $\quad \overline{CM} = \overline{r} + \frac{1}{2}\overline{p}$. Другие выражения: $\overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{p} - \overline{r})$, $\overline{BL} = \frac{1}{2}(\overline{q} - \overline{p})$, $\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{r} - \overline{q})$. **9.** Да, отношение равно 4. **10.** 1) $13\overline{a} +$ $+\overline{b} - \overline{c}$, 2) $-\frac{5}{12}\overline{a} + \frac{7}{6}\overline{c}$.

§ 3.2. Координаты вектора. Простейшие действия над векторами, заданными своими координатами

Осью называется прямая, на которой установлено положительное направление. Ось Ou вполне определяется единичным вектором $\overline{e} = \overline{OE}$ (рис. 3.12).

Проекцией точки A на ось Ou называется точка A_1 пересечения этой оси с плоскостью, проходящей через данную точку A перпендикулярно Ou (рис. 3.12, *а*).



а) *б)*

Рис. 3.12

Проекцией вектора AB на ось Ou называется *алгебраическая величина* отрезка A_1B_1 (рис. 3.12, *б*), где A_1, B_1 – проекции точек A и B на данную ось (т. е. длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком +, когда направление отрезка совпадает с положительным направлением оси Ou, и со знаком – в противном случае).

Если φ – угол между вектором $\overline{a}$ и осью Ou, то проекция вектора $\overline{a}$ на ось Ou равна произведению длины вектора на косинус угла φ:

$$\text{пр}_{Ou}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi. \tag{3.10}$$

Свойства проекции вектора на ось Ou:

1. $\text{пр}_{Ou}(\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \cdots + \overline{a}_n) = \text{пр}_{Ou}\overline{a}_1 + \text{пр}_{Ou}\overline{a}_2 + \cdots + \text{пр}_{Ou}\overline{a}_n$;
2. $\text{пр}_{Ou}(\alpha\overline{a}) = \alpha\,\text{пр}_{Ou}\overline{a}$.

Прямоугольными координатами точки M в пространстве называются числа x, y, z выражающие алгебраические величины отрезков OP, OQ, OR (рис. 3.13), где P, Q, R – проекции этой точки на взаимно перпендикулярные координатные оси: ось Ox (ось абсцисс), ось Oy (ось ординат), ось Oz (ось аппликат).

Координатами вектора $\overline{a}$ относительно прямоугольной системы координат $Oxyz$ называются проекции X, Y, Z вектора $\overline{a}$ на оси координат. Обозначение:

$$\overline{a} = \{X, Y, Z\} \text{ или } \overline{a}\ \{X, Y, Z\}. \tag{3.11}$$

Если $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – орты координатных осей Ox, Oy, Oz, то вектор $\overline{a}\ \{X, Y, Z\}$ можно представить в виде

$$\overline{a} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}. \tag{3.12}$$

Векторы

$$\overline{a}_x = X\overline{i},\ \overline{a}_y = Y\overline{j},\ \overline{a}_z = Z\overline{k} \tag{3.13}$$

называются *составляющими* или *компонентами* вектора $\overline{a} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$.

Координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых. Если $\overline{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\overline{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \ldots$, $\overline{a}_n = \{X_n, Y_n, Z_n\}$, и $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \cdots + \overline{a}_n = \overline{a}$, где $\overline{a}\ \{X, Y, Z\}$, то $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$,

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n. \tag{3.14}$$

Координаты разности векторов равны разностям соответствующих координат. Если $\overline{a}_1 - \overline{a}_2 = \overline{a}$ и $\overline{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\overline{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\overline{a}\ \{X, Y, Z\}$, то

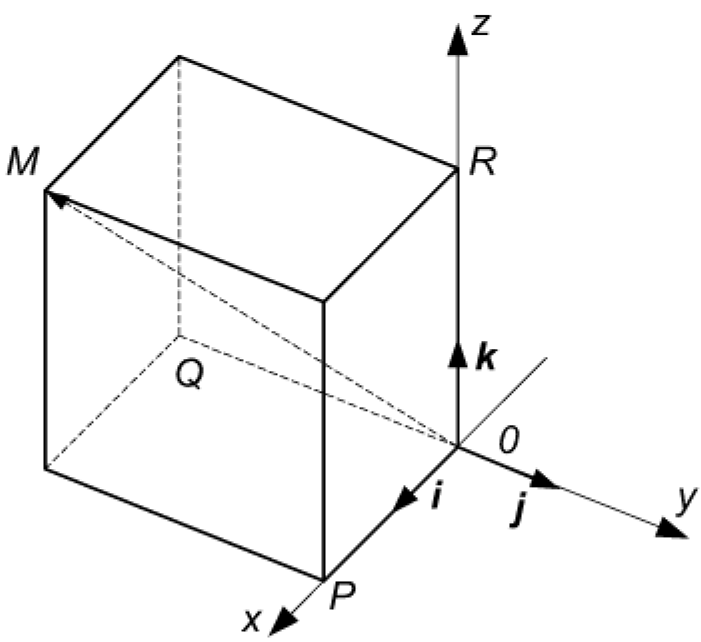


Рис. 3.13

$$X = X_1 - X_2,$$
$$Y = Y_1 - Y_2, \qquad (3.15)$$
$$Z = Z_1 - Z_2.$$

Координаты произведения вектора $\bar{a}$ на число λ раны произведениям соответствующих координат вектора $\bar{a}$ на λ. Если $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ и $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то

$$X_2 = \lambda X_1,$$
$$Y_2 = \lambda Y_1, \qquad (3.16)$$
$$Z_2 = \lambda Z_1.$$

Равенства (3.16) выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Радиус-вектором точки M называется вектор $\overline{OM}$, идущий от начала координат к данной точке M (см. рис. 3.13).

Если $\bar{r}_1 = \overline{OA_1}$ и $\bar{r}_2 = \overline{OA_2}$ – радиус-векторы точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overline{A_1A_2} = \{X, Y, Z\}$ выражается формулой

$$\overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \qquad (3.17)$$

т. е. всякий вектор равен радиус-вектору конца минус радиус-вектор начала (рис. 3.14). Равенство (3.17) в координатах записывается так:

$$X = x_2 - x_1;\ \ Y = y_2 - y_1;\ \ Z = z_2 - z_1, \qquad (3.17')$$

т. е. координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

Длина вектора $\overline{A_1A_2} = \{X, Y, Z\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ вычисляется по формуле

$$d = \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (3.18)$$

или

$$d = \left| \overline{A_1 A_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3.19)$$

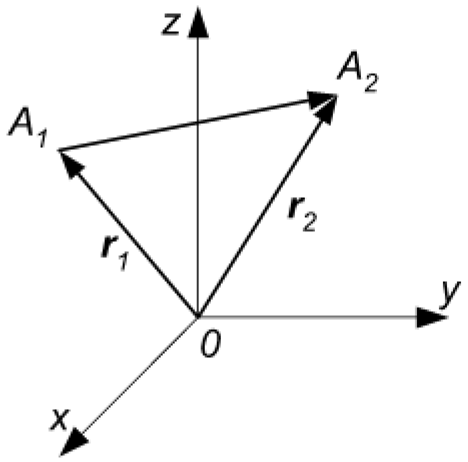


Рис. 3.14

Формулой (3.19) определяется также расстояние между двумя точками пространства $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Направляющими косинусами вектора $\overline{A_1 A_2} = \{X, Y, Z\}$ или $\overline{A_1 A_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ называются косинусы углов α, β, γ, образованных этим вектором с осями координат Ox, Oy, Oz:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \qquad (3.20)$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \qquad (3.21)$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \qquad (3.22)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (3.23)$$

Координаты всякого вектора $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$ через направляющие косинусы выражаются формулами:

$$X = \left|\,\overline{a}\,\right| \cos\alpha;\;\; Y = \left|\,\overline{a}\,\right| \cos\beta;\;\; Z = \left|\,\overline{a}\,\right| \cos\gamma. \qquad (3.24)$$

Координаты единичного вектора $\overline{e}$ равны его направляющим косинусам:

$$\overline{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}. \qquad (3.25)$$

В частности координаты единичных векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ координатных осей выражаются следующим образом:

$$\overline{i} = \{1, 0, 0\},\;\; \overline{j} = \{0, 1, 0\},\;\; \overline{k} = \{0, 0, 1\}. \qquad (3.26)$$

Радиус-вектор точки $M\,(x, y, z)$, делящей данный отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в данном отношении $\lambda = m_1 : m_2$ выражается формулой

$$\overline{r} = \frac{m_2\overline{r}_1 + m_1\overline{r}_2}{m_1 + m_2} \;\text{ или }\; \overline{r} = \frac{\overline{r}_1 + \lambda\overline{r}_2}{1+\lambda}, \qquad (3.27)$$

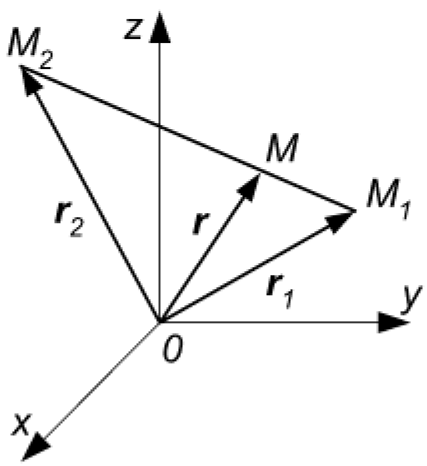


Рис. 3.15

где $\overline{r}_1 = \overline{OM_1}$, $\overline{r}_2 = \overline{OM_2}$ (рис. 3.15). Координаты точки M находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};$$
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad (3.28)$$
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если M – середина отрезка M_1M_2, то:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\;\; y = \frac{y_1 + y_2}{2};\;\; z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (3.29)$$

Пример 1. Дан вектор $\overline{a}$, образующий с осью Ou угол $\varphi_1 = 60°$, и вектор $\overline{b}$, образующий с той же осью угол $\varphi_2 = 120°$. Найти проекцию суммы $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, где $\overline{c} = 3\overline{a}$, на ось Ou, если известно, что $\left|\,\overline{a}\,\right| = 6$, $\left|\,\overline{b}\,\right| = 4$.

Решение. Так как проекция суммы векторов равна сумме их проекций, необходимо найти проекцию каждого слагаемого на ось Ou. В соотвествии с формулой (3.10) получаем:

$$\text{пр}_{Ou}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi_1 = 6\cos 60° = 6\cdot\frac{1}{2} = 3;$$

$$\text{пр}_{Ou}\overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cos\varphi_2 = 4\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

По свойству 2 находим проекцию вектора $\overline{c} = 3\overline{a}$:

$$\text{пр}_{Ou}\overline{c} = \text{пр}_{Ou}(3\overline{a}) = 3\,\text{пр}_{Ou}\overline{a} = 3\cdot 3 = 9.$$

По свойству 1 находим:

$$\text{пр}_{Ou}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = \text{пр}_{Ou}\overline{a} + \text{пр}_{Ou}\overline{b} + \text{пр}_{Ou}\overline{c} = 3 + (-2) + 9 = 10.$$

Пример 2. Дан вектор $\overline{a} = \{3, -4, 5\}$. Написать разложение вектора $\overline{a}$ по координатным ортам. Чему равны составляющие вектора $\overline{a}$?
Решение. В соответствии с формулами (3.11) и (3.12) разложение вектора $\overline{a}$ по координатным ортам имеет вид

$$\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}.$$

По формулам (3.13) находим составляющие вектора $\overline{a}$:

$$\overline{a}_x = 3\overline{i},\ \overline{a}_y = -4\overline{j},\ \overline{a}_z = 5\overline{k}.$$

Пример 3. Найти координаты и составляющие вектора

$$\overline{a} = 2\overline{i} + 6\overline{j} - 7\overline{k}.$$

Решение. Вектор $\overline{a}$ имеет следующие координаты:

$$X = 2,\ Y = 6,\ Z = -7$$

и составляющие (или компоненты):

$$\overline{a}_x = 2\overline{i},\ \overline{a}_y = 6\overline{j},\ \overline{a}_z = -7\overline{k}.$$

Пример 4. Даны векторы $\overline{a} = \{1, -2, 3\}$, $\overline{b} = \{2, 1, -4\}$. Найти векторы: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{p} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{q} = 5\overline{a} - 4\overline{b}$.

Р е ш е н и е . Пользуемся формулами (3.14), (3.15). В данном случае имеем:

$$X_1 = 1,\ Y_1 = -2,\ Z_1 = 3,\ X_2 = 2,\ Y_2 = 1,\ Z_2 = -4.$$

По формулам (3.14) получаем координаты вектора $\overline{c}$:

$$X = 1 + 2 = 3;\ Y = -2 + 1 = -1;\ Z = 3 + (-4) = -1;\quad \overline{c} = \{3, -1, -1\}.$$

С помощью формул (3.15) находим координаты вектора $\overline{d}$:

$$X = 1 - 2 = -1;\ Y = -2 - 1 = -3;\ Z = 3 - (-4) = 7;\quad \overline{d} = \{-1, -3, 7\}.$$

Координаты векторов $3\overline{a}$ и $2\overline{b}$ определяем по формулам (3.16):

$$3\overline{a} = \{3 \cdot 1, 3\,(-2), 3 \cdot 3\} = \{3, -6, 9\};$$

$$2\overline{b} = \{2 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2\,(-4)\,\} = \{4, 2, -8\}.$$

Снова используя формулы (3.14), получаем координаты вектора $\overline{p}$:

$$X = 3 + 4 = 7;\ Y = -6 + 2 = -4;\ Z = 9 + (-8) = 1;\quad \overline{p} = \{7, -4, 1\}.$$

Аналогичным образом находим координаты вектора $\overline{q}$:

$$X = 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -3;\ Y = 5\,(-2) - 4 \cdot 1 = -14;$$

$$Z = 5 \cdot 3 - 4\,(-4) = 31;\ \overline{q} = \{-3, -14, 31\}.$$

П р и м е р 5 . Даны векторы: $\overline{a}_1 = \{2, 4, -6\}$, $\overline{a}_2 = \{-1, -2, 3\}$, $\overline{a}_3 = \{4, 8, -12\}$, $\overline{a}_4 = \{6, 0, 0\}$, $\overline{a}_5 = \{0, -5, 0\}$, $\overline{a}_6 = \{0, 0, 2\}$, $\overline{a}_7 = \{0, 1, 3\}$, $\overline{a}_8 = \ = \{2, 0, -1\}$, $\overline{a}_9 = \{3, -4, 0\}$. Какие из этих векторов коллинеарны, параллельны координатным осям, параллельны координатным плоскостям?

Р е ш е н и е . Так как координаты векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ пропорциональны, т. е.

$$-1 = \left(-\frac{1}{2}\right) 2,\ -2 = \left(-\frac{1}{2}\right) 4,\ 3 = \left(-\frac{1}{2}\right) (-6),$$

то векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ коллинеарны. Поскольку $\overline{a}_2 = -\dfrac{1}{2}\,\overline{a}_1$, то векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ противоположно направлены. Векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_3$ также коллинеарны, ибо

$$4 = 2 \cdot 2,\ \ 8 = 2 \cdot 4,\ \ -12 = 2\,(-6).$$

Векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_3$ одного направления, так как $\overline{a}_3 = 2\overline{a}_1$.

Сравнивая координаты векторов $\overline{a}_4$, $\overline{a}_5$, $\overline{a}_6$ с координатами векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ (формулы (3.26)), заключаем, что вектор $\overline{a}_4$ параллелен оси *Ox*, вектор $\overline{a}_5$ – оси *Oy*, вектор $\overline{a}_6$ – оси *Oz* ($\overline{a}_4$ и $\overline{i}$ коллинеарны, так как $\overline{a}_4 = 6\overline{i}$; $\overline{a}_5$ и $\overline{j}$ коллинеарны, ибо $\overline{a}_5 = -5\overline{j}$; $\overline{a}_6$ и $\overline{k}$ также коллинеарны, ибо $\overline{a}_6 = 2\overline{k}$).

Поскольку у вектора $\overline{a}_7$ координата $x = 0$, т. е. проекция на ось *Ox* равна нулю, то вектор $\overline{a}_7$ перпендикулярен оси *Ox* и, следовательно, параллелен плоскости Oyz. Аналогичным образом заключаем, что вектор $\overline{a}_8$ параллелен плоскости Oxz, а вектор $\overline{a}_9$ – плоскости Oxy.

Замечание 1. Если одна из координат вектора равна нулю, то вектор перпендикулярен соответствующей координатной оси.

Замечание 2. Если вектор имеет только одну отличную от нуля координату, то он параллелен соответствующей координатной оси.

Пример 6. Даны две точки $A_1(2, -5, 1)$, $A_2(3, 4, -6)$. Найти координаты и компоненты вектора $\overline{a} = \overline{A_1A_2}$.

Решение. Искомые координаты находим по формулам (3.17′). В данном случае имеем: $x_1 = 2$, $y_1 = -5$, $z_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$, $z_2 = -6$. Подставляя эти значения в указанные формулы находим:

$$X = 3 - 2 = 1,\ \ Y = 4 - (-5) = 9,\ \ Z = -6 - 1 = -7.$$

Следовательно, $\overline{a} = \{1, 9, -7\}$; компоненты $\overline{a}_x = \overline{i}$, $\overline{a}_y = 9\overline{j}$, $\overline{a}_z = -7\overline{k}$.

Пример 7. Даны проекции силы F на координатные оси: $X = 4$, $Y = 4$, $Z = -4\sqrt{2}$. Найти величину силы F и направление ее действия.

Решение. Вектор $\overline{AB} = \overline{F}$ по условию имеет координаты $X = 4$, $Y = 4$, $Z = -4\sqrt{2}$. Величина силы F равна модулю вектора $\overline{F}$, который можно вычислить по формуле (3.18):

$$\left|\overline{F}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 8.$$

Направляющие косинусы вектора $\overline{F}$ определим по формулам

(3.20) – (3.22):

$$\cos\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\ \cos\beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\ \cos\gamma = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, сила $F = 8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы: $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 135°$.

Пример 8. Вычислить периметр треугольника ABC с вершинами $A\,(8, 0, 7)$, $B\,(10, 2, 8)$, $C\,(10, -2, 8)$.

Решение. Найдем длины сторон треугольника по формуле (3.19). Подставляя координаты соответствующих точек в эту формулу, получим:

$$AB = \sqrt{(10-8)^2 + (2-0)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3;$$

$$BC = \sqrt{(10-10)^2 + (-2-2)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4;$$

$$AC = \sqrt{(10-8)^2 + (-2-0)^2 + (8-7)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

Следовательно, периметр треугольника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Пример 9. Вектор $\overline{a}$ составляет с осью ординат и осью аппликат углы в $60°$. Найти угол между вектором $\overline{a}$ и осью абсцисс.

Решение. Воспользуемся формулой (3.23). В данном случае $\beta = \gamma = 60°$, поэтому $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в формулу (3.23), получим

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \text{ или } \cos^2\alpha = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = 135°$.

Пример 10. Даны вершины $A\,(2, 2, 2)$, $B\,(6, 5, 0)$, $C\,(0, 3, 8)$ параллелограмма $ABCD$. Найти вершину D.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Так как O – середина отрезка AC, то по формулам (3.29) получим:

$$x = \frac{2+0}{2} = 1,\ \ y = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2},\ \ z = \frac{2+8}{2} = 5,\ \ O\left(1, \frac{5}{2}, 5\right).$$

С другой стороны, O – середина BD. Координаты точек B и O известны, координаты точки D определим по тем же формулам (3.29).

Имеем:

$$1 = \frac{6+x}{2};\ \ \frac{5}{2} = \frac{5+y}{2};\ \ 5 = \frac{0+z}{2},$$

откуда $x = -4$, $y = 0$, $z = 10$. Следовательно, $D\,(-4, 0, 10)$.

Пример 11. Отрезок AB, где $A\,(3, -5, 2)$, $B\,(5, -3, 1)$, точками C и D разделен на три равные части. Найти координаты точек C и D.

Решение. По условию $AC : CB = 1 : 2$, $AD : DB = 2 : 1$. Подставляя в формулы (3.28) значения $x_1 = 3$, $y_1 = -5$, $z_1 = 2$, $x_2 = 5$, $y_2 = -3$, $z_2 = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, получим координаты точки C:

$$x = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{3};\ \ y = \frac{-5 + \frac{1}{2}\,(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{13}{3};\ \ \ z = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}.$$

Координаты точки D находятся с помощью тех же формул при $\lambda = 2$:

$$x = \frac{3 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{13}{3},\ \ y = \frac{-5 + 2\,(-3)}{1+2} = -\frac{11}{3},$$

$$z = \frac{2 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, $C\left(\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$, $D\left(\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Задачи

1. Даны векторы $\overline{a} = \{2, -5, 3\}$, $\overline{b} = \{1, 3, -7\}$. Найти векторы $\overline{c} = 4\overline{a} + 3\overline{b}$, $\overline{d} = 5\overline{a} - 2\overline{b}$.

2. Сила $F = 6_н$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = \beta = 120°$, $\gamma = 45°$. Найти проекции вектора силы и его составляющие.

3. Даны точки $A(1, -3, -2)$, $B(8, 0, -4)$, $C(4, 8, -3)$. Найти такую точку D, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

4. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(2, 0, 4)$, $B(7, -15, 16)$, $C(-1, -1, 11)$, $D(-14, 28, -6)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция.

5. Найти координаты концов отрезка, который точками $C(7, 0, 3)$ и $D(-5, 0, 0)$ разделен на три равные части.

Ответы

1. $\overline{c} = \{11, -11, -9\}$, $\overline{d} = \{8, -31, 29\}$. **2.** $x = -3$, $y = -3$, $z = 3\sqrt{2}$; $\overline{F}_x = -3\overline{i}$, $\overline{F}_y = -3\overline{j}$, $\overline{F}_z = 3\sqrt{2}\overline{k}$. **3.** $D(-3, 5, -1)$. **4.** Указание. Убедиться в том, что среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ есть два коллинеарных. **5.** $A(19, 0, 6)$, $B(-17, 0, -3)$.

§ 3.3. Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается одним из символов $\overline{a}\overline{b}$, или $\overline{a} \cdot \overline{b}$, или $(\overline{a}\overline{b})$:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos(\widehat{\overline{a}\overline{b}}). \tag{3.30}$$

Учитывая равенство (3.10), формулу (3.30) можно записать так:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \text{ пр}_{\overline{a}}\overline{b} \text{ или } \overline{a}\overline{b} = |\overline{b}| \text{ пр}_{\overline{b}}\overline{a}. \tag{3.31}$$

Из формулы (3.30) следует, что $\overline{a}\overline{b} > 0$, если угол $\varphi = (\widehat{\overline{a}\overline{b}})$ – острый; $\overline{a}\overline{b} < 0$, если угол φ – тупой; $\overline{a}\overline{b} = 0$, если угол φ – прямой или один из векторов равен нулю.

Свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$ (свойство переместительности);
2. $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$ (свойство распределительности);

3. $\lambda\,(\overline{a}\overline{b}) = (\lambda\overline{a})\,\overline{b} = \overline{a}\,(\lambda\overline{b})$ (свойство сочетательности).

Скалярное произведение $\overline{a}\overline{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\overline{a}$ и обозначается символом $\overline{a}^2$. Из формулы (3.30) следует, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т. е.

$$\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2. \tag{3.32}$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами

$$\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\},\ \overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то их скалярное произведение выразится формулой

$$\overline{a}\overline{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \tag{3.33}$$

угол между ними – формулой

$$\cos(\widehat{\overline{a}\overline{b}}) = \frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}, \tag{3.34}$$

а необходимое и достаточное условие их перпендикулярности примет вид

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{3.35}$$

П р и м е р 1. Найти скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, для которых $\left|\overline{a}\right| = 8$, $\left|\overline{b}\right| = 5$ в каждом их следующих случаев: $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 90°$, $\varphi_3 = 120°$, $\varphi_4 = 180°$, где $\varphi = (\widehat{\overline{a}\overline{b}})$.

Р е ш е н и е. По формуле (3.30) находим:

1) $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi_1 = 8\cdot 5\cos 60° = 20;$

2) $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi_2 = 8\cdot 5\cos 90° = 0;$

3) $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi_3 = 8\cdot 5\cos 120° = -20;$

4) $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi_4 = 8\cdot 5\cos 180° = -40.$

П р и м е р 2. Доказать, что вектор $\overline{p} = \overline{a} - \dfrac{\overline{b}\,(\overline{b}\overline{a})}{\overline{b}^2}$ перпендикулярен вектору $\overline{b}$.

Решение. Умножая скалярно вектор $\overline{b}$ на вектор $\overline{p}$, получим

$$\overline{b}\overline{p} = \overline{b}\,\overline{a} - \frac{\overline{b}\,\overline{b}\,(\overline{b}\,\overline{a})}{\overline{b}^2} = (\overline{b}\,\overline{a}) - \frac{\overline{b}^2(\overline{b}\,\overline{a})}{\overline{b}^2} = (\overline{b}\,\overline{a}) - \frac{\left|\overline{b}\right|^2(\overline{b}\,\overline{a})}{\left|\overline{b}\right|^2} =$$

$$(\overline{b}\,\overline{a}) - (\overline{b}\,\overline{a}) = 0.$$

Так как $\overline{b}\overline{p} = 0$, то $\overline{b} \perp \overline{p}$.

Пример 3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$, чтобы вектор $\overline{p} + \overline{q}$ был перпендикулярен вектору $\overline{p} - \overline{q}$?

Решение. Если $(\overline{p} + \overline{q}) \perp (\overline{p} - \overline{q})$, то $(\overline{p} + \overline{q})\,(\overline{p} - \overline{q}) = 0$. Раскрывая скобки в последнем равенстве (что можно сделать в силу свойства 2), получим

$$(\overline{p} + \overline{q})\,(\overline{p} - \overline{q}) = \overline{p}\overline{p} - \overline{p}\overline{q} + \overline{q}\overline{p} - \overline{q}\,\overline{q} = 0.$$

Принимая во внимание свойство 1, формулу (3.32), находим

$$\left|\overline{p}\right|^2 - \left|\overline{q}\right|^2 = 0,$$

откуда $\left|\overline{p}\right| = \left|\overline{q}\right|$.

Обратное также верно. Если $\left|\overline{p}\right| = \left|\overline{q}\right|$, то $(\overline{p} + \overline{q}) \perp (\overline{p} - \overline{q})$. Какой геометрический смысл имеет данное условие? (См. замечание к примеру 1 § 3.1.)

Пример 4. Даны три вектора: $\overline{a} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$, $\overline{b} = 12\overline{i} - 4\overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$. Вычислить выражение $5\overline{a}^2 - \overline{b}^2 + 7\overline{c}^2$.

Решение. Найдем вначале скалярные квадраты данных векторов. Если $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, то из формул (3.18) и (3.32) следует, что

$$\overline{a}^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2. \tag{3.33$'$}$$

Подставляя координаты данных векторов в формулу (3.33′), получим:

$$\overline{a}^2 = 4^2 + (-3)^2 + 0^2 = 25;\ \overline{b}^2 = 12^2 + 0^2 + (-4)^2 = 160;$$

$$\overline{c}^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9.$$

Следовательно, $5\overline{a}^2 - \overline{b}^2 + 7\overline{c}^2 = 5 \cdot 25 - 160 + 7 \cdot 9 = 28$.

Пример 5. Даны два вектора: $\overline{a} = \{1, -2, 2\}$, $\overline{b} = \{2, -2, -1\}$. Найти их скалярное произведение и угол между ними. Чему равно выражение $2\overline{a}^2 - 4\overline{a}\overline{b} + 5\overline{b}^2$?

Решение. Подставляя в формулу (3.33) координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, находим

$$\overline{a}\overline{b} = 1 \cdot 2 + (-2)(-2) + 2(-1) = 4.$$

Так как

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \text{ и } \left|\overline{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3,$$

то по формуле (3.34) получим

$$\cos(\widehat{\overline{a}\overline{b}}) = \frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}.$$

Поскольку $\overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2 = 3^2 = 9$ и $\overline{b}^2 = \left|\overline{b}\right|^2 = 3^2 = 9$, то

$$2\overline{a}^2 - 4\overline{a}\overline{b} + 5\overline{b}^2 = 2 \cdot 9 - 4 \cdot 4 + 5 \cdot 9 = 47.$$

Пример 6. Вычислить, какую работу производит сила $\overline{F} = \{2, -1, -4\}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1, -2, 3)$ в положение $N(5, -6, 1)$.

Решение. В соответствии с определением работы и скалярного произведения получаем

$$A = \overline{F}\overline{s},$$

где A – работа; $\overline{F}$ – вектор действующей силы; $\overline{s}$ – вектор пути.

Найдем вектор $\overline{s} = \overline{MN}$. По формулам $(3.17')$ получаем:

$$\overline{s} = \{5-1, -6-(-2), 1-3\}, \ \overline{s} = \{4, -4, -2\}.$$

С помощью формулы (3.33) находим

$$A = \overline{F}\overline{s} = 2 \cdot 4 + (-1)(-4) + (-2)(-4) = 20 \text{ (ед. работы)}.$$

Пример 7. Дан треугольник с вершинами $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

Решение. Внутренний угол треугольника при вершине A равен углу между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а внешний угол при вершине C равен углу между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{AC}$ (сделайте чертеж).

По формулам $(3.17')$ находим координаты указанных векторов:

$$\overline{AB} = \{4, -10, 1\}, \ \overline{AC} = \{11, -8, -7\}, \quad \overline{CB} = \{-7, -2, 8\}.$$

С помощью формулы (3.34) находим косинусы углов:

$$\cos\varphi_1 = \cos(\overline{AB} \hat{\cdot} \overline{AC}) = \frac{4 \cdot 11 + (-10)(-8) + 1(-7)}{\sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2}\sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} =$$

$$= \frac{117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\varphi_2 = \cos(\overline{CB} \hat{\cdot} \overline{AC}) = \frac{(-7)\,11 + (-2)(-8) + 8(-7)}{\sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 8^2}\sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} =$$

$$= \frac{-117}{\sqrt{117}\sqrt{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi_1 = 45°$, $\varphi_2 = 135°$.

Пример 8. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5, 3, 4)$, $B(-1, -7, 5)$, $C(6, -5, -3)$, $D(2, 5, -4)$ есть квадрат.

Решение. По формулам $(3.17')$ находим векторы

$$\overline{AB} = \{4, -10, 1\}, \ \overline{BC} = \{7, 2, -8\}, \ \overline{DC} = \{4, -10, 1\}, \ \overline{AD} = \{7, 2, -8\}.$$

Сравнивая координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$, заключаем, что

$$\overline{AB} = \overline{DC}, \ \overline{BC} = \overline{AD}.$$

Так как

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117}, \quad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117},$$

то

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{DC}\right| = \left|\overline{AD}\right|.$$

Поскольку

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 4\cdot 7 + (-10)\,2 + 1\,(-8) = 0,$$

то $\overline{AB} \perp \overline{BC}.$

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ есть квадрат.

Пример 9. При каком значении λ векторы $\overline{a} = 4\overline{i} + \lambda\overline{j} + 5\overline{k}$ и $\overline{b} = \lambda\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k}$ взаимно перпендикулярны?

Решение. Условие перпендикулярности (3.35) в данном случае запишется так:

$$4\lambda + 2\lambda + 5\,(-6) = 0 \text{ или } 6\lambda - 30 = 0,$$

откуда $\lambda = 5.$

Пример 10. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{1, 2, -3\}$ и удовлетворяющий условию $\overline{x}\overline{a} = 28.$

Решение. Принимая во внимание условие коллинеарности двух векторов (3.16), заключаем, что

$$\overline{x} = \{\lambda, 2\lambda, -3\lambda\},$$

где λ – пока неизвестный коэффициент. Так как $\overline{x}\,\overline{a} = 28,$ то в соответствии с формулой (3.33) находим

$$1\cdot\lambda + 2\cdot 2\lambda + (-3)\,(-3\lambda) = 28 \text{ или } 14\lambda = 28, \text{ откуда } \lambda = 2.$$

Следовательно, $\overline{x} = \{2, 4, -6\}.$

Пример 11. Даны три вектора $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = 10\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$. Найти $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$, $\text{пр}_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c})$, $\text{пр}_{\overline{a}+\overline{b}}\overline{c}$, $\text{пр}_{\overline{b}}(2\overline{a} - 3\overline{c})$.

Решение. Применим формулу

$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|}, \qquad (3.31')$$

получающуюся из первой формулы (3.31): $\overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}.$

Подставляя условия примера в формулу (3.31′), получим

$$\text{пр}_{\bar a}\bar b=\frac{\bar a\bar b}{|\bar a|}=\frac{1\cdot 2+(-2)\,1+2\,(-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{4}{3}.$$

Для нахождения остальных проекций определим векторы:

$$\bar b+\bar c=(2\bar i+\bar j-2\bar k)+(10\bar i+4\bar j+2\bar k)=12\bar i+5\bar j;$$

$$\bar a+\bar b=(\bar i-2\bar j+2\bar k)+(2\bar i+\bar j-2\bar k)=3\bar i-\bar j;$$

$$2\bar a-3\bar c=2\,(\bar i-2\bar j+2\bar k)-3\,(10\bar i+4\bar j+2\bar k)=-28\bar i-16\bar j-2\bar k.$$

В соответствии с формулой $(3.31')$ находим:

$$\text{пр}_{\bar a}(\bar b+\bar c)=\frac{\bar a\,(\bar b+\bar c)}{|\bar a|}=\frac{1\cdot 12+(-2)\,5+2\cdot 0}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3};$$

$$\text{пр}_{\bar a+\bar b}\,\bar c=\frac{(\bar a+\bar b)\,\bar c}{|\bar a+\bar b|}=\frac{3\cdot 10+(-1)\,4+0\cdot 2}{\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{26}{\sqrt{10}};$$

$$\text{пр}_{\bar b}(2\bar a-3\bar c)=\frac{\bar b\,(2\bar a-3\bar c)}{|\bar b|}=\frac{2\,(-28)+1\,(-16)+(-2)\,(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=$$

$$=-\frac{68}{3}.$$

З а м е ч а н и е. Проекцию вектора $\bar b$ на вектор $\bar a$ можно найти и по формуле

$$\text{пр}_{\bar a}\bar b=\bar b\cdot\bar a_0,$$

где $\bar a_0=\dfrac{\bar a}{|\bar a|}$ – единичный вектор направления $\bar a$. В данном случае $\bar a_0=\left\{\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$, поэтому $\text{пр}_{\bar a}\bar b=\bar b\cdot\bar a_0=-\dfrac{4}{3}$.

Задачи

1. Известно, что $\left|\overline{a}\right| = 6$, $\left|\overline{b}\right| = \sqrt{2}$. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в каждом из следующих случаев:

$$\cos\varphi_1 = 45°,\ \cos\varphi_2 = 90°,\ \cos\varphi_3 = 135°,\ \cos\varphi_4 = 180°.$$

2. Доказать, что вектор $\overline{p} = \overline{c}\,(\overline{b}\,\overline{a}) - \overline{a}\,(\overline{b}\,\overline{c})$ перпендикулярен вектору $\overline{b}$.

3. Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданных своими координатами, и углы между ними:

1) $\overline{a} = \{3, -4\}$, $\overline{b} = \{5, 12\}$;

2) $\overline{a} = \{2, -3, 2\}$, $\overline{b} = \{4, 2, -1\}$.

4. Даны три силы: $\overline{F_1} = \{2, -5, 1\}$, $\overline{F_2} = \{1, 2, -6\}$, $\overline{F_3} = \{-4, -3, 3\}$, приложенные в одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M\,(4, 2, -8)$ в точку $N\,(3, -2, -5)$.

5. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A\,(5, 2, -4)$, $B\,(9, -8, -3)$, $C\,(16, -6, -11)$.

6. Даны два вектора: $\overline{a} = \{1, -2, 4\}$, $\overline{b} = \{3, 1, -5\}$. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен оси Oy и удовлетворяет условиям: $\overline{x}\,\overline{a} = -3$, $\overline{x}\overline{b} = 8$.

7. Даны три вектора: $\overline{a} = \{2, -1, 3\}$, $\overline{b} = \{4, 3, -5\}$, $\overline{c} = \{7, -2, -6\}$. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий условиям: $\overline{x}\,\overline{a} = 8$, $\overline{x}\overline{b} = 0$, $\overline{x}\,\overline{c} = 10$.

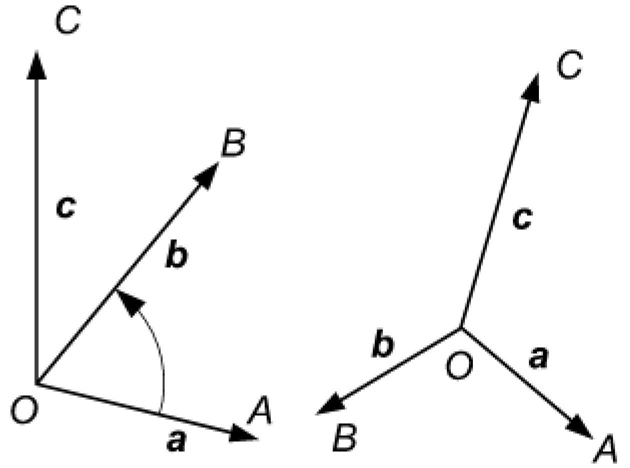
8. Найти проекцию вектора $\overline{a} = \{4, 3, -7\}$ на ось вектора $\overline{b} = \{1, -2, -2\}$.

Ответы

1. 6; 0; -6; $-6\sqrt{2}$. **3.** 1) $\overline{a}\overline{b} = -33$, $\cos\varphi = -\dfrac{33}{65}$; 2) $\overline{a}\overline{b} = 0$. **4.** 19. **5.** $\varphi_1 = \varphi_2$; $\varphi_3 = 90°$. **6.** $\overline{x} = \{1, 0, -1\}$. **7.** $\overline{x} = \{2, -1, 1\}$. **8.** 4.

§ 3.4. Векторное произведение

Пространственным базисом называется совокупность трех *некомпланарных* векторов, приложенных в одной точке и заданных в определенном порядке.



а) *б)*

Рис. 3.16

Базис $\overline{a}=\overline{OA}$, $\overline{b}=\overline{OB}$, $\overline{c}=\overline{OC}$ называется *правым* (рис. 3.16, *а*), если кратчайший поворот вектора $\overline{OA}$ к вектору $\overline{OB}$ совершается против часовой стрелки для наблюдателя, глаз которого находится в точке C.

Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке (рис. 3.16, *б*), то базис называется *левым*.

Если даны два базиса и каждый из них правый или каждый левый, то говорят, что эти базисы имеют *одинаковую ориентацию*; если же один базис правый, а другой – левый, то базисы имеют *противоположную ориентацию*.

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$ (рис. 3.17), удовлетворяющий условиям:

1) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) модуль вектора $\overline{c}$ равен произведению модулей векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на синус угла между ними, т. е.

$$\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\,(\widehat{\overline{a}\overline{b}}); \qquad (3.36)$$

3) базисы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ и $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ ($\overline{i},\overline{j},\overline{k}$ – координатные орты) имеют одинаковую ориентацию.

Векторное произведение $\overline{c}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается одним из символов:

$$\overline{c}=[\overline{a}\overline{b}] \text{ или } \overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}. \qquad (3.37)$$

Из формулы (3.36) следует, что модуль векторного произведения

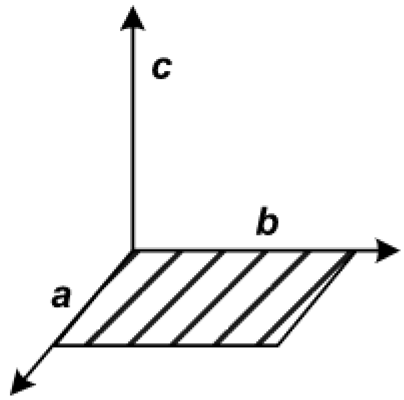


Рис. 3.17

$[\bar a \bar b]$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$:

$$\left|[\bar a \bar b]\right| = S. \tag{3.38}$$

Векторное произведение может быть выражено формулой

$$[\bar a \bar b] = S\bar e, \tag{3.39}$$

где $\bar e$ – орт направления $[\bar a \bar b]$.

Векторное произведение ненулевых векторов ровно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar a$ и $\bar b$ коллинеарны:

$$[\bar a \bar b] = \mathbf{0}, \text{ или } \bar a = \lambda \bar b. \tag{3.40}$$

В частности

$$[\bar a\, \bar a] = \mathbf{0}. \tag{3.40$'$}$$

Свойства векторного произведения:

1. $[\bar a \bar b] = -[\bar b \bar a]$,
2. $[\bar a + \bar b, \bar d] = [\bar a \bar d] + [\bar b \bar d]$,
3. $[\lambda \bar a, \bar b] = [\bar a, \lambda \bar b] = \lambda\, [\bar a \bar b]$.

Если векторы $\bar a$ и $\bar b$ заданы своими координатами

$$\bar a = \{X_1, Y_1, Z_1\},\ \bar b = \{X_2, Y_2, Z_2\},$$

то

$$[\bar a \bar b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

или

$$[\bar a \bar b] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}. \tag{3.42}$$

Площадь треугольника, построенного на этих векторах, выражается формулой

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overline{a}\overline{b}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}, \quad (3.43)$$

а синус угла между ними – формулой

$$\sin(\widehat{\overline{a}\overline{b}})=\frac{\left|[\overline{a}\overline{b}]\right|}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \quad (3.44)$$

З а м е ч а н и е . Формула (3.42) означает, что координаты векторного произведения можно получить следующим образом. Выписываем таблицу из координат векторов (соблюдая порядок):

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}.$$

Закрывая первый столбец этой таблицы, получаем определить, являющейся первой координатой. Закрывая второй столбец и беря полученный определитель со знаком минус, найдем вторую координату. Закрывая третий столбец, получим определитель, являющийся третьей координатой векторного произведения $[\overline{a}\overline{b}]$.

П р и м е р 1 . Найти векторные произведения

$$[\overline{i}\overline{j}],\ [\overline{j}\overline{k}],\ [\overline{k}\overline{i}],\ [\overline{j}\overline{i}],\ [\overline{k}\overline{j}],\ [\overline{i}\overline{k}],$$

где $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – орты правой системы координат.

Р е ш е н и е . Найдем вначале $[\overline{i}\overline{j}]$. Пользуясь определением векторного произведения, заключаем:

1) вектор $[\overline{i}\overline{j}]$ коллинеарен $\overline{k}$, так как он перпендикулярен векторам $\overline{i}$ и $\overline{j}$;

2) вектор $[\overline{i}\overline{j}]$ является единичным, так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{i}$ и $\overline{j}$, равна единице (параллелограмм в данном случае представляет собой квадрат $AOBD$ со стороной, равной единице, см. рис. 3.18).

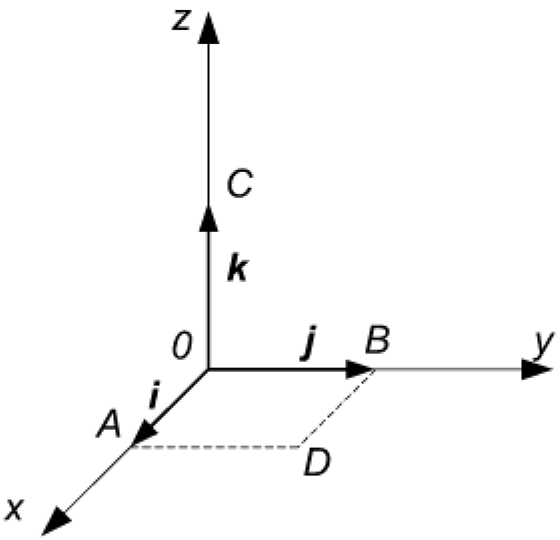


Рис. 3.18

Из полученных утверждений следует, что вектор $[\bar{i}\bar{j}]$ равен либо $\bar{k}$, либо $-\bar{k}$. Вторую возможность нужно отбросить, так как репер $\bar{i}, \bar{j}, -\bar{k}$ является левым. Следовательно, $[\bar{i}\bar{j}] = \bar{k}$.

Аналогичным образом находим, что $[\bar{j}\bar{k}] = \bar{i}$, $[\bar{k}\bar{i}] = \bar{j}$.

При нахождении вектора $[\bar{j}\bar{i}]$ утверждения 1) и 2) остаются верными. Заключение будет другим: так как репер $\bar{j}, \bar{i}, -\bar{k}$ является правым, то $[\bar{j}\bar{i}] = -\bar{k}$. Аналогично получаем $[\bar{k}\bar{j}] = -\bar{i}$ и $[\bar{i}\bar{k}] = -\bar{j}$.

Замечание. Три последних результата можно получить из трех первых, пользуясь свойством 1.

Пример 2. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 4$. Найти векторные произведения в каждом из следующих случаев: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 30°$, $\varphi_3 = 90°$, $\varphi_4 = 150°$, где $\varphi = (\widehat{\bar{a}\bar{b}})$.

По формуле (3.36) находим модули векторных произведений:

1) $\left|[\bar{a}\bar{b}]\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin 0 = 0$; 2) $\left|[\bar{a}\bar{b}]\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin 30° = 6\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 12$;

3) $\left|[\bar{a}\bar{b}]\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin 90° = 6\cdot 4 = 24$; 4) $\left|[\bar{a}\bar{b}]\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin 150° = 6\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 12$.

Решение. По формуле (3.39) получаем:

1) $[\bar{a}\bar{b}] = 0$; 2) $[\bar{a}\bar{b}] = 12\bar{e}$; 3) $[\bar{a}\bar{b}] = 24\bar{e}$; 4) $[\bar{a}\bar{b}] = 12\bar{e}$, где $\bar{e}$ – единичный вектор направления $[\bar{a}\bar{b}]$.

Пример 3. Найти векторное произведение векторов

$$\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k},\ \bar{b} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}.$$

Решение. Пользуясь формулой (3.40′), свойствами векторного произведения и результатами примера 1, получаем

$$[\bar a\bar b]=[\,(2\bar i-3\bar j+5\bar k)\times$$
$$\times(4\bar i+2\bar j-6\bar k)]=8\,[\bar i\bar i]+4\,[\bar i\bar j]-12[\bar i\bar k]-12[\bar j\bar i]-6[\bar j\bar j]+18\,[\bar j\bar k]+20\,[\bar k\bar i]+$$
$$+10\,[\bar k\bar j]-30\,[\bar k\bar k]=4\,[\bar i\bar j]-12\,[\bar i\bar k]-12\,[\bar j\bar i]+18\,[\bar j\bar k]+20\,[\bar k\bar i]+10\,[\bar k\bar j]=$$
$$=16\,[\bar i\bar j]-8\,[\bar k\bar j]+32\,[\bar k\bar i]=8\bar i+32\bar j+16\bar k.$$

Пример 4. Упростить выражение $[\,(3\bar a-2\bar b)\,(2\bar a+5\bar b)\,]$.

Решение. Пользуясь формулой (3.40′) и свойствами векторного произведения, получаем

$$[\,(3\bar a-2\bar b)\,(2\bar a+5\bar b)\,]=[3\bar a2\bar a]+[3\bar a5\bar b]+[\,(-2\bar b)\,2\bar a]+[\,(-2\bar b)\,5\bar b]=$$
$$=6\,[\bar a\bar a]+15\,[\bar a\bar b]-4\,[\bar b\bar a]-10\,[\bar b\bar b]=15\,[\bar a b]+4\,[\bar a\bar b]=19\,[\bar a\bar b].$$

Пример 5. Показать, что векторы $[\bar a\bar b]$ и $[2\bar a\,(3\bar a-5\bar b)\,]$ коллинеарны.

Решение. Упростим второе векторное произведение:

$$[2\bar a\,(3\bar a-5\bar b)\,]=[2\bar a3\bar a]+[2\bar a\,(-5\bar b)\,]=6\,[\bar a\bar a]-10\,[\bar a\bar b]=$$

$$=-10\,[\bar a\bar b].$$

Векторы $[\bar a\bar b]$ и $-10\,[\bar a\bar b]$ коллинеарны.

Пример 6. Даны векторы $\bar a,\bar b,\bar c,$ удовлетворяющие условию $\bar a+\bar b+\ \ +\bar c=\mathbf{0}$. Доказать, что $[\bar a\bar b]=[\bar b\bar c]=[\bar c\bar a]$.

Решение. Умножим векторно $\bar a$ на $\bar a+\bar b+\bar c=\mathbf{0}$. Получим

$$[\bar a\,\bar a]+[\bar a\bar b]+[\bar a\,\bar c]=\mathbf{0}\ \text{ или }\ [\bar a\bar b]=-[\bar a\,\bar c]=[\bar c\,\bar a].$$

Умножая векторно $\bar a+\bar b+\bar c=\mathbf{0}$ на $\bar b$, находим

$$[\bar a b]+[\bar b\,\bar b]+[\bar c\bar b]=\mathbf{0}\ \text{ или }\ [\bar a\bar b]=-[\bar c\bar b]=[\bar b\bar c].$$

Из двух равенств $[\bar a\bar b]=[\bar c\bar a]$ и $[\bar a\bar b]=[\bar b\bar c]$ следует доказываемое равенство.

Замечание. Векторы $\bar a,\bar b,\bar c$ образуют треугольник. Все векторы $[\bar a\bar b]$, $[\bar b\bar c]$, $[\bar c\bar a]$ направлены в одну сторону, а модуль каждого из них равен удвоенной площади треугольника, построенного на векторах $\bar a,\bar b,\bar c$.

Пример 7. Доказать, что

$$[\overline{a}\overline{b}]^2 + (\overline{a}\overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2.$$

Решение. По определению векторного и скалярного произведения имеем:

$$\left|[\overline{a}\overline{b}]\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin(\widehat{\overline{a}\overline{b}}), \quad \overline{a}\overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos(\widehat{\overline{a}\overline{b}}).$$

Возводя в квадрат обе части каждого равенства и складывая почленно, получим

$$\left|[\overline{a}\overline{b}]\right|^2 + (\overline{a}\overline{b})^2 = \left|\overline{a}\right|^2 \cdot \left|\overline{b}\right|^2.$$

Так как квадрат длины вектора равен его скалярному квадрату, то полученному равенству можно придать вид

$$[\overline{a}\overline{b}]^2 + (\overline{a}\overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2.$$

Пример 8. Даны векторы

$$\overline{a} = \{1, -2, 2\}, \ \overline{b} = \{3, 0, -4\}.$$

Найти их векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Решение. Составим таблицу из координат векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Закрывая поочередно первый, второй, третий столбцы и рассматривая полученные определители (причем второй – со знаком минус), получаем

$$[\overline{a}\overline{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right\} \text{ или } [\overline{a}\overline{b}] = \{8, 10, 6\}.$$

По формуле (3.38) находим площадь параллелограмма

$$S = \left|[\overline{a}\overline{b}]\right| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

С помощью формулы (3.44) определяем синус угла между данными векторами

$$\sin(\widehat{\overline{a}\overline{b}}) = \frac{\left|[\overline{a}\overline{b}]\right|}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{\sqrt{8^2+10^2+6^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\,\sqrt{3^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{3\cdot 5} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 9. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1, 0, 2)$, $B(1, -2, 5)$, $C(3, 0, -4)$.

Решение. Находим сначала координаты векторов $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$:

$$\overline{a} = \{2, -2, 3\},\ \overline{b} = \{4, 0, -6\}.$$

Координаты векторного произведения $[\overline{a}\overline{b}]$ определяем по формуле (3.42), предварительно выписав таблицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$[\overline{a}\overline{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\text{или } [\overline{a}\overline{b}] = \{12, 24, 8\}.$$

С помощью формулы (3.43) находим площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\left|[\overline{a}\overline{b}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{784} =$$

$$= \frac{28}{2} = 14 \ \text{(кв. ед.)}.$$

Пример 10. Три силы $\overline{F_1} = \{2, 4, 6\}$, $\overline{F_2} = \{1, -2, 3\}$, $\overline{F_3} = \{1, 1, -7\}$ приложены в точке $A(3, -4, 8)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(4, -2, 6)$.

Решение. Если вектор $\overline{F}$ изображает силу, приложенную в точке M, а вектор $\overline{a}=\overline{NM}$, то вектор $[\overline{a}\overline{F}]$ представляет собой момент силы $\overline{F}$ относительно точки N.

Найдем сначала равнодействующую трех данных ил

$$\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}.$$

Так как координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, то

$$\overline{F}=\{2+1+1,\,4+(-2)+1,\,6+3+(-7)\},\ \ \overline{F}=\{4,\,3,\,2\}.$$

По координатам конца и начала определяем координаты вектора $\overline{a}$:

$$\overline{a}=\overline{BA}=\{3-4,\,-4-(-2),\,8-6\},\ \ \overline{a}=\{-1,\,-2,\,2\}.$$

С помощью формулы (3.42) находим координаты $[\overline{a}\overline{F}]$:

$$[\overline{a}\overline{F}]=\left\{\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 4 & 3\end{vmatrix}\right\},$$

$$[\overline{a}\overline{F}]=\{-10,\,10,\,5\}.$$

Следовательно, величина момента равнодействующей равна

$$\left|[\overline{a}\overline{F}]\right|=\sqrt{(-10)^2+10^2+5^2}=\sqrt{225}=15.$$

Направляющие косинусы момента силы определим по формулам (3.20) – (3.22):

$$\cos\alpha=\frac{-10}{15}=-\frac{2}{3},\ \ \cos\beta=\frac{10}{15}=\frac{2}{3},\ \ \cos\gamma=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

Задачи

1. Найти векторное произведение векторов $\overline{a}=\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=6\overline{i}+5\overline{j}-4\overline{k}$.

2. Показать, что векторы $[\overline{b}\,\overline{a}]$ и $[3\overline{b}\ (4\overline{a}+5\overline{b})\ ]$ коллинеарны.

3. Упростить выражения: 1) $[\,(2\overline{a}-3\overline{b})\,(\overline{a}+4\overline{b})\,]$, 2) $[\,(4\overline{a}-\overline{b}+2\overline{c})\,(\overline{a}+3\overline{b}-2\overline{c})\,]$, 3) $[\,(3\overline{i}-4\overline{j}-5\overline{k})\,(2\overline{i}+6\overline{j}-\overline{k})\,]$.

4. Векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}$ связаны соотношениями $[\overline{a}\overline{b}]=[\overline{c}\overline{d}]$, $[\overline{a}\overline{d}]=[\overline{b}\overline{d}]$. Доказать, что векторы $(\overline{a}-\overline{d})$ и $(\overline{b}-\overline{c})$ коллинеарны.

5. Даны векторы $\overline{a} = \{-4, -8, 8\}$, $\overline{b} = \{4, 3, 2\}$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

6. Дан треугольник с вершинами $A(4, -14, 8)$, $B(2, -18, 12)$, $C(12, -8, 12)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

7. Даны две силы $\overline{F_1} = \{4, 1, 3\}$, $\overline{F_2} = \{-2, 2, 1\}$, приложенные в точке $A(6, -6, -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно: 1) начала координат; 2) точки $B(5, -8, -5)$.

8. Доказать «тождество Лагранжа»:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

9. Даны векторы $\overline{a} = \{3, 1, 2\}$, $\overline{b} = \{2, 7, 4\}$, $\overline{c} = \{1, 2, 1\}$. Найти $[[\overline{a}\overline{b}]\overline{c}]$ и $[\overline{a}[\overline{b}\overline{c}]]$.

Ответы

1. $[\overline{a}\overline{b}] = 2\overline{i} + 16\overline{j} + 23\overline{k}$. **3.** 1) $11[\overline{a}\overline{b}]$; 2) $13[\overline{a}\overline{b}] - 10[\overline{a}\overline{c}] - 4[\overline{b}\overline{c}]$; 3) $34\overline{i} - 7\overline{j} + 26\overline{k}$. **5.** $[\overline{a}\overline{b}] = \{-40, 40, 20\}$, $S = 60$, $\sin\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$. **6.** $h = 10$. **7.** 1) $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = \{2, 3, 4\}$, $\overline{a} = \overline{OA} = \{6, -6, -3\}$, $\left|[\overline{a}\overline{F}]\right| = 45$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$; 2) $\overline{F} = \{2, 3, 4\}$, $\overline{a} = \overline{BA} = \{1, 2, 2\}$, $\left|[\overline{a}\overline{F}]\right| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$.
8. Указание. Воспользоваться тождеством примера 7.
9. $[[\overline{a}\overline{b}], \overline{c}] = \{-46, 29, -12\}$, $[\overline{a}[\overline{b}\overline{c}]] = \{-7, 7, 7\}$.

§ 3.5. Смешанное произведение. Двойное векторное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное векторному произведению $[\overline{a}\overline{b}]$, умноженному скалярно на вектор $\overline{c}$. Смешанное произведение векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ обозначается символом $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Верны следующие равенства:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = [\overline{a}\overline{b}]\,\overline{c} = \overline{a}\,[\overline{b}\overline{c}]. \tag{3.45}$$

Смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, взятому со знаком плюс, когда реперы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ имеют одинаковую ориентацию, и со знаком минус – в противном случае. Равенство

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \tag{3.46}$$

является необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\overline{b}$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}) = -(\overline{c}\overline{b}\overline{a}) = -(\overline{a}\,\overline{c}\overline{b})$;
2. $\overline{a}\,(\overline{b} + \overline{d})\,\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{d}\overline{c}$, $\overline{a}\overline{b}\,(\overline{c} + \overline{d}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{d}$;
3. $\overline{a}\,(\lambda\overline{b})\,\overline{c} = \overline{a}\overline{b}\,(\lambda\overline{c}) = \lambda\,(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$.

Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ заданы своими координатами

$$\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\},\ \overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},\ \overline{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{3.47}$$

а объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, определяется формулой

$$V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \pm \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{3.48}$$

в которой знак берется одинаковым со знаком определителя.

Двойным векторным произведением $[[\overline{a}\overline{b}]\,\overline{c}]$ называется векторное произведение вектора $[\overline{a}\overline{b}]$ на вектор $\overline{c}$. Умножая вектор $\overline{a}$ векторно на $[\overline{b}\overline{c}]$, получим двойное векторное произведение $[\overline{a}\,[\overline{b}\overline{c}]]$. В общем случае

$$[\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}\,]] \neq [[\overline{a}b]\,\overline{c}\,]. \tag{3.49}$$

П р и м е р 1 . Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ удовлетворяют условию $[\overline{a}\overline{b}\,]+[\overline{b}\,\overline{c}\,]+[\overline{c}\,\overline{a}\,]=\mathbf{0}$. Доказать, что эти векторы компланарны.

Р е ш е н и е . Умножим скалярно вектор $\overline{a}$ на вектор $[\overline{a}\overline{b}\,]+[\overline{b}\,\overline{c}\,]+[\overline{c}\,\overline{a}\,]=\mathbf{0}$. Получим

$$\overline{a}\,[\overline{a}\overline{b}\,]+\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}\,]+\overline{a}\,[\overline{c}\overline{a}\,]=0 \text{ или } \overline{a}\,\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{b}\,\overline{c}+\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{a}=0. \tag{A}$$

Так как векторы $\overline{a}, \overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{a}, \overline{c}, \overline{a}$ компланарны, то в силу условия (3.46) заключаем, что

$$\overline{a}\overline{a}\overline{b}=0,\ \ \overline{a}\overline{c}\overline{a}=0. \tag{B}$$

Равенство (A) с учетом равенств (B) принимает вид

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0.$$

В силу того же условия (3.46) заключаем, что векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны.

З а м е ч а н и е . Смешанное произведение трех векторов, среди которых имеется два равных, равно нулю.

П р и м е р 2 . Доказать тождество $\overline{a}\overline{b}\,(\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}\,)=\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, где α и β – произвольные числа.

Р е ш е н и е . Принимая во внимание свойства смешанного произведения и замечание к примеру 1, получаем

$$\overline{a}\overline{b}\,(\overline{c}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}\,)=\overline{a}\overline{b}\,\overline{c}+\alpha\overline{a}\overline{b}\,\overline{a}+\beta\overline{a}\overline{b}\,\overline{b}=\overline{a}\overline{b}\,\overline{c}.$$

П р и м е р 3 . Найти смешанное произведение трех векторов $\overline{a}=\{1,1,2\}$, $\overline{b}=\{2,1,1\}$, $\overline{c}=\{1,-2,3\}$. Какой репер образуют векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$? (Координатный репер – правый.)

Р е ш е н и е . По формуле (3.47) находим

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-10.$$

Так как смешанное произведение отрицательно, то реперы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

и $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеют противоположную ориентацию, т. е. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левый репер.

Пример 4. Доказать, что векторы $\bar{a} = \{1, 2, -2\}$, $\bar{b} = \{1, -2, 1\}$, $\bar{c} = \{5, -2, -1\}$ компланарны.

Решение. Найдем смешанное произведение этих векторов по формуле (3.47):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, выполнено условие (3.46). Это и означает, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

Пример 5. Найти объем V_1 тетраэдра $ABCD$ с вершинами в точках $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, $C\,(x_3, y_3, z_3)$, $D\,(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Найдем векторы трех ребер тетраэдра, исходящих из какой-либо его вершины, например вершины D:

$$\bar{a} = \overline{DA} = \{x_1 - x_0,\, y_1 - y_0,\, z_1 - z_0\},\ \bar{b} = \overline{DB} = \{x_2 - x_0,\, y_2 - y_0,\, z_2 - z_0\},$$

$$\bar{c} = \overline{DC} = \{x_3 - x_0,\, y_3 - y_0,\, z_3 - z_0\}. \tag{A}$$

Построив параллелепипед на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, примем за его основание параллелограмм $ABCL$, построенный на векторах $\bar{a} = \overline{DA}$ и $\bar{b} = \overline{DB}$. За основание тетраэдра примем грань ABC. Площадь этой грани равна половине площади S параллелограмма $ABCL$:

$$S_1 = \frac{1}{2} S. \tag{B}$$

Так как высота у параллелограмма и тетраэдра одна и та же, то обозначив ее через h, получим:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 h; \tag{C}$$

$$V = Sh, \tag{D}$$

где V – объем параллелепипеда.

Из формул (B) – (D) следует, что

$$V_1 = \frac{1}{6} V. \tag{E}$$

Принимая во внимание равенство (A) и формулу (3.48), получим

$$V_1 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}. \tag{3.50}$$

Пример 6. Даны вершины тетраэдра: $A\,(0, -2, 5)$, $B\,(6, 6, 0)$, $C\,(3, -3, 6)$, $D\,(2, -1, 3)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины C.

Решение. Найдем сначала объем тетраэдра $ABCD$. По формуле (3.50) получаем

$$V_1 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0-2 & -2-(-1) & 5-3 \\ 6-2 & 6-(-1) & 0-3 \\ 3-2 & -3-(-1) & 6-3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 11 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Так как определитель равен отрицательному числу, то в данном случае перед формулой нужно взять знак минус. Следовательно,

$$V_1 = -\frac{1}{6}(-1 - 4 \cdot 11) = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}.$$

Искомую величину h определим из формулы $V = \frac{1}{3} Sh$, где S – площадь основания. Определим площадь S:

$$S = \frac{1}{2}\left|[\bar{a}\bar{b}]\right|,$$

где $\bar{a} = \overline{DA} = \{-2, -1, 2\}$; $\bar{b} = \overline{DB} = \{4, 7, -3\}$.

Поскольку

$$[\overline{a}\overline{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \right\};$$

$$[\overline{a}\overline{b}] = \{-11, 2, -10\},$$

то

$$S = \frac{1}{2}\left|[\overline{a}\overline{b}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{225} = \frac{15}{2}.$$

Подставляя в формулу $V = \frac{1}{3}Sh$ значения $V = \frac{15}{2}$ и $S = \frac{15}{2}$, получим $h = 3$.

Пример 7. Показать, что точки $A\,(3, -4, 1)$, $B\,(2, -3, 7)$, $C\,(1, -4, 3)$, $D\,(4, -3, 5)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Если точки $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, $C\,(x_3, y_3, z_3)$, $D\,(x_0, y_0, z_0)$ лежат в одной плоскости, то объем тетраэдра $ABCD$ равен нулю. Из формулы (3.50) получаем необходимое и достаточное условие компланарности четырех точек:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.51)$$

Подставляя координаты точек A, B, C, D в определитель, стоящий в правой части формулы (3.50), получаем

$$\begin{vmatrix} 3-4 & -4-(-3) & 1-5 \\ 2-4 & -3-(-3) & 7-5 \\ 1-4 & -4-(-3) & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

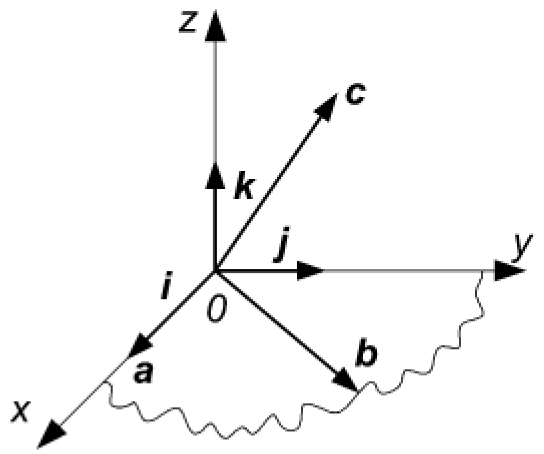


Рис. 3.19

П р и м е р 8. Доказать тождество $[[\overline{a}\overline{b}]\,\overline{c}] = \overline{b}\,(\overline{a}\overline{c}) - \overline{a}\,(\overline{b}\overline{c})$.

Р е ш е н и е. Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ приведем к общему началу. Введем прямоугольную систему координат следующим образом. Начало координат поместим в точке приложения векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (рис. 3.19). Вектор $\overline{i}$ направим вдоль вектора $\overline{a}$, вектор $\overline{j}$ выберем в плоскости векторов $\overline{a}, \overline{b}$, тогда вектор $\overline{k}$ определится условием, что репер $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – правый. При таком выборе системы координат имеем:

$$\overline{a} = \{x_1, 0, 0\};\ \overline{b} = \{x_2, y_2, 0\};\ \overline{c} = \{x_3, y_3, z_3\}. \tag{A}$$

По формуле (3.42) получаем

$$[\overline{a}\overline{b}] = \{0, 0, x_1 y_2\} \text{ и } [[\overline{a}\overline{b}]\,\overline{c}] = \{-x_1 y_2 y_3, x_1 y_2 x_3, 0\}. \tag{B}$$

С другой стороны:

$$\overline{a}\overline{c} = x_1 x_3,\ \overline{b}\,(\overline{a}\overline{c}) = \{x_1 x_2 x_3, x_1 y_2 x_3, 0\},$$

$$\overline{b}\overline{c} = x_2 x_3 + y_2 y_3,\ \overline{a}\,(\overline{b}\overline{c}) = \{x_1 x_2 x_3 + x_1 y_2 y_3, 0, 0\},$$

откуда

$$\overline{b}\,(\overline{a}\overline{c}) - \overline{a}\,(\overline{b}\overline{c}) = \{-x_1 y_2 y_3, x_1 y_2 x_3, 0\}. \tag{C}$$

Сравнивая формулы (B) и (C), получим

$$[[\overline{a}\overline{b}]\,\overline{c}] = \overline{b}\,(\overline{a}\overline{c}) - \overline{a}\,(\overline{b}\overline{c}). \tag{3.52}$$

П р и м е р 9. Доказать тождество

$$[\overline{a}\,[\overline{b}\overline{c}]] = \overline{b}\,(\overline{a}\overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{a}\overline{b}). \tag{3.53}$$

Р е ш е н и е. Для доказательства используем свойства векторного произведения и формулу (3.52), полученную в примере 8:

$$[\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}\,]] = -[[\overline{b}\,\overline{c}\,]\,\overline{a}\,] = -\{\overline{c}\,(\overline{a}\,\overline{b}\,) - \overline{b}\,(\overline{a}\,\overline{c}\,)\} = \overline{b}\,(\overline{a}\,\overline{c}\,) - \overline{c}\,(\overline{a}\,\overline{b}\,).$$

З а м е ч а н и е . Результатам, содержащимся в формулах (3.52) и (3.53) можно дать следующую формулировку: двойное векторное произведение равно среднему (по занимаемому месту) вектору, умноженному на скалярное произведение двух крайних, минус другой вектор внутренней скобки, умноженный на скалярное произведение двух остальных.

П р и м е р 1 0 . Доказать тождество

$$[\overline{a}\,\overline{b}\,]\,[\overline{c}\,\overline{d}\,] = \begin{vmatrix} \overline{a}\,\overline{c} & \overline{a}\,\overline{d} \\ \overline{b}\,\overline{c} & \overline{b}\,\overline{d} \end{vmatrix}. \qquad (3.54)$$

Р е ш е н и е . Скалярное произведение векторных произведений $[\overline{a}\,\overline{b}\,]$ и $[\overline{c}\,\overline{d}\,]$ можно рассматривать как смешанное произведение трех векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $[\overline{c}\,\overline{d}\,]$. Принимая во внимание формулу (3.45), получим

$$[\overline{a}\,\overline{b}\,]\,[\overline{c}\,\overline{d}\,] = \overline{a}\,\overline{b}\,[\overline{c}\,\overline{d}\,] = \overline{a}\,[\overline{b}\,[\overline{c}\,\overline{d}\,]]. \qquad (A)$$

В силу замечания к примеру 9 имеем

$$[\overline{b}\,[\overline{c}\,\overline{d}\,]] = \overline{c}\,(\overline{b}\,\overline{d}\,) - \overline{d}\,(\overline{b}\,\overline{c}\,),$$

поэтому

$$\begin{aligned} &\overline{a}\,[\overline{b}\,[\overline{c}\,\overline{d}\,]] = \overline{a}\,\{\overline{c}\,(\overline{b}\,\overline{d}\,) - \overline{d}\,(\overline{b}\,\overline{c}\,)\} = \\ &= (\overline{a}\,\overline{c}\,)\,(\overline{b}\,\overline{d}\,) - (\overline{a}\,\overline{d}\,)\,(\overline{b}\,\overline{c}\,) = \begin{vmatrix} \overline{a}\,\overline{c} & \overline{a}\,\overline{d} \\ \overline{b}\,\overline{c} & \overline{b}\,\overline{d} \end{vmatrix}. \end{aligned} \qquad (B)$$

Из равенств (A) и (B) получаем соотношение (3.54).

З а м е ч а н и е . В случае, когда $\overline{a} = \overline{c}$, $\overline{b} = \overline{d}$, получаем тождество примера 7 § 3.4, или в координатах «тождество Лагранжа» (см. задачу 8 § 3.4).

Задачи

1. Доказать тождество $(\overline{a} + \overline{b}\,)\,(\overline{b} + \overline{c}\,)\,(\overline{c} + \overline{a}\,) = 2\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

2. Найти смешанное произведение трех векторов: $\overline{a} = \{7, -1, 4\}$, $\overline{b} = \{-4, 5, -6\}$, $\overline{c} = \{6, 8, -3\}$. Какой репер образуют векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$?

3. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = \{3, 4, 6\}$, $\overline{b} = \{4, 1, 1\}$, $\overline{c} = \{2, 0, 3\}$.

4. Показать, что векторы $\overline{a} = \{1, 5, 4\}$, $\overline{b} = \{6, -4, 4\}$, $\overline{c} = \{10, -1, 10\}$ компланарны.

5. Проверить, что точки $A(5,-1,-1)$, $B(4,2,2)$, $C(5,3,1)$, $D(8,0,-5)$ лежат в одной плоскости.

6. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(5,2,2)$, $B(-8,-2,5)$, $C(6,3,0)$, $D(9,3,2)$.

7. Даны вершины тетраэдра $A(4,5,-3)$, $B(6,3,0)$, $C(8,5,-9)$, $D(-3,-2,-10)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

8. При каких условиях $[[\overline{a}\overline{b}]\,\overline{c}] = [\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}]]$.

9. Показать, что $[\overline{a}\,[\overline{b}\,\overline{c}]] + [\overline{b}\,[\overline{c}\,\overline{a}]] + [\overline{c}\,[\overline{a}\,\overline{b}]] = \mathbf{0}$.

10. Доказать тождество $[\overline{a}\overline{b}][\overline{c}\overline{d}] + [\overline{a}\overline{c}][\overline{d}\overline{b}] + [\overline{a}\overline{d}][\overline{b}\overline{c}] = 0$.

Ответы

2. 31. Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правый репер. **3.** 43. **6.** 0,5. **7.** $h = 11$. **8.** Векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ должны быть коллинеарны или вектор $\overline{b}$ должен быть перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{c}$. **9.** У к а з а н и е . Воспользоваться замечанием к примеру 9. **10.** У к а з а н и е . К каждому слагаемому применить формулу (3.54).

Глава 4. Аналитическая геометрия в пространстве

§ 4.1. Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве относительно прямоугольной системы координат может быть задана различными способами. Например, плоскость однозначно определяется точкой и вектором, ей перпендикулярным; тремя точками; отрезками, отсекаемыми на осях координат и т. п. В зависимости от способа задания плоскости рассматривают различные виды ее уравнения.

4.1.1. Общее уравнение плоскости. Уравнение в отрезках. Составление уравнения плоскости по различным ее заданиям

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n} = \{A, B, C\}$, в векторном виде записывается так:

$$\overline{n}\,(\overline{r} - \overline{r}_0) = 0, \tag{4.1}$$

где $\overline{r}_0$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $\overline{r}$ – радиус-вектор произвольной точки $M\,(x, y, z)$ данной плоскости. Уравнение (4.1) выражает условие перпендикулярности векторов $\overline{n}$ и $\overline{r} - \overline{r}_0 = \overline{M_0 M}$ (рис. 4.1), имеющее место для любой точки плоскости. Это уравнение можно записать в виде

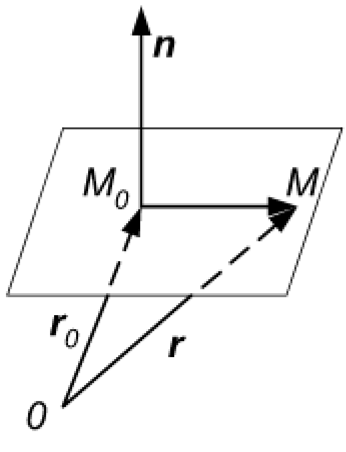


Рис. 4.1

$$\overline{n}\overline{r} + D = 0, \text{ где } D = -(\overline{n}\overline{r}_0). \tag{4.2}$$

Так как $\overline{n} = \{A, B, C\}$ и $\overline{r} - \overline{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, то в соответствии с формулой (3.33) уравнение (4.1) примет вид

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0 \tag{4.3}$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.4}$$

где

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Уравнение (4.3) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку,* а уравнение (4.4) – *общим уравнением плоскости.*

Замечание. В уравнениях (4.3) и (4.4) коэффициенты A, B, C одновременно в нуль не обращаются (так как вектор $\overline{n}$ не является нуль-вектором).

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Свободный член равен нулю, т. е. $D = 0$:

$Ax + By + Cz = 0$ (плоскость проходит через начало координат). (4.5)

2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен нулю и

а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:

$A = 0$, $By + Cz + D = 0$ (плоскость параллельна оси Ox); (4.6)

$B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ (плоскость параллельна оси Oy); (4.7)

$C = 0$, $Ax + By + D = 0$ (плоскость параллельна оси Oz); (4.8)

б) $D = 0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:

$A = 0$, $By + Cz = 0$ (плоскость проходит через ось Ox); (4.9)

$B = 0$, $Ax + Cz = 0$ (плоскость проходит через ось Oy); (4.10)

$C = 0$, $Ax + By = 0$ (плоскость проходит через ось Oz). (4.11)

3. Два коэффициента при текущих координатах равны нулю и

а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:

$B = 0, C = 0, Ax + D = 0$ (плоскость параллельна плоскости Oyz); (4.12)

$A = 0, C = 0, By + D = 0$ (плоскость параллельна плоскости Oxz); (4.13)

$A = 0, B = 0, Cz + D = 0$ (плоскость параллельна плоскости Oxy); (4.14)

б) $D = 0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:

$B = 0$, $C = 0$, $Ax = 0$ или $x = 0$ (уравнение плоскости Oyz); (4.15)

$A = 0$, $C = 0$, $By = 0$ или $y = 0$ (уравнение плоскости Oxz); (4.16)

$A = 0$, $B = 0$, $Cz = 0$ или $z = 0$ (уравнение плоскости Oxy). (4.17)

Если ни один из коэффициентов общего уравнения (4.4) не равен нулю, то оно может быть преобразовано к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{4.18}$$

где $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$ – алгебраические величины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Уравнение (4.18) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{n}=\{2,-1,4\}$ и проходящей через точку $M_0(5,2,-3)$. Лежат ли на этой плоскости точки $P(1,2,-1)$, $Q(4,5,1)$ и $R(-6,2,-3)$?

Решение. Подставляя в уравнение (4.3) значения $A=2$, $B=-1$, $C=4$, $x_0=5$, $y_0=2$, $z_0=-3$, получим

$$2(x-5)-(y-2)+4(z+3)=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим искомое уравнение плоскости

$$2x-y+4z+4=0.$$

Выясним, лежат ли точки P, Q и R на данной плоскости. Подставляя последовательно координаты этих точек в левую часть последнего уравнения, получим:

$$2\cdot1-1\cdot2+4(-1)+4=0; \quad 2\cdot4-1\cdot5+4\cdot1+4>0;$$

$$2(-6)-1\cdot2+4(-3)+4<0.$$

Следовательно, точка P лежит на данной плоскости. Точки Q и R плоскости не принадлежат. Они находятся по разные стороны от нее (в результате подстановки их координат в уравнение плоскости получены числа разных знаков).

Замечание. Плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ разбивает пространство на два полупространства, для точек одного из них $Ax+By+Cz+D<0$, для точек другого $Ax+By+Cz+D>0$.

Пример 2. Составить уравнения плоскостей по следующим данным:

1) плоскость перпендикулярна оси Oz и проходит через точку $P(1,-2,3)$;

2) плоскость проходит через ось Oy и точку $Q(4,2,-5)$;

3) плоскость параллельна оси Ox и проходит через две точки

$R\,(1, 1, 2)$ и $S\,(5, 3, -2)$.

Решение.

1) Плоскость, перпендикулярная оси Oz, параллельна координатной плоскости Oxy и ее уравнение (см. уравнение (4.14)) имеет вид

$$Cz + D = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки P, получим $C \cdot 3 + D = 0$, откуда $D = -3C$. Следовательно, $Cz - 3C = 0$, $C\,(z - 3) = 0$, но $C \neq 0$, значит получим уравнение $z - 3 = 0$ или $z = 3$.

2) Так как плоскость проходит через ось Oy, то ее уравнение (см. уравнение (4.10)) ищем в таком виде:

$$Ax + Cz = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки Q, получим $A \cdot 4 + C\,(-5) = 0$, откуда $A = \dfrac{5}{4}C$. Таким образом, плоскость имеет уравнение $\dfrac{5}{4}Cx + Cz = 0$ или $C\left(\dfrac{5}{4}x + z\right) = 0$, но $C \neq 0$, значит $5x + 4z = 0$.

3) Поскольку плоскость параллельна оси Ox, то ее уравнение не содержит члена с x (см. уравнение (4.6)), т. е. имеет вид

$$By + Cz + D = 0.$$

Так как плоскость проходит через две точки R и S, то их координаты удовлетворяют уравнению. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получим

$$B + 2C + D = 0; \quad 3B - 2C + D = 0,$$

откуда $B = -\dfrac{D}{2}$, $C = -\dfrac{D}{4}$. Следовательно, уравнение принимает вид

$$-\frac{D}{2}y - \frac{D}{4}z + D = 0 \text{ или } 2y + z - 4 = 0.$$

Пример 3. Определить отрезки, отсекаемые плоскостью $2x - 3y + 8z - 4 = 0$ на осях координат.

Решение. Переписав уравнение в виде $2x - 3y + 8z = 4$ и разделив обе части его на 4, получим

$$\frac{x}{2}-\frac{3}{4}y+2z=1 \text{ или } \frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{4}{3}}+\frac{z}{\frac{1}{2}}=1.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (4.18), находим:

$$a=2,\ b=-\frac{4}{3},\ c=\frac{1}{2}.$$

П р и м е р 4 . Построить плоскости:

$$1)\ 3x+4y-6z-12=0;\ 2)\ z+y-2=0;$$

$$3)\ z+y=0;\ 4)\ 3y-7=0.$$

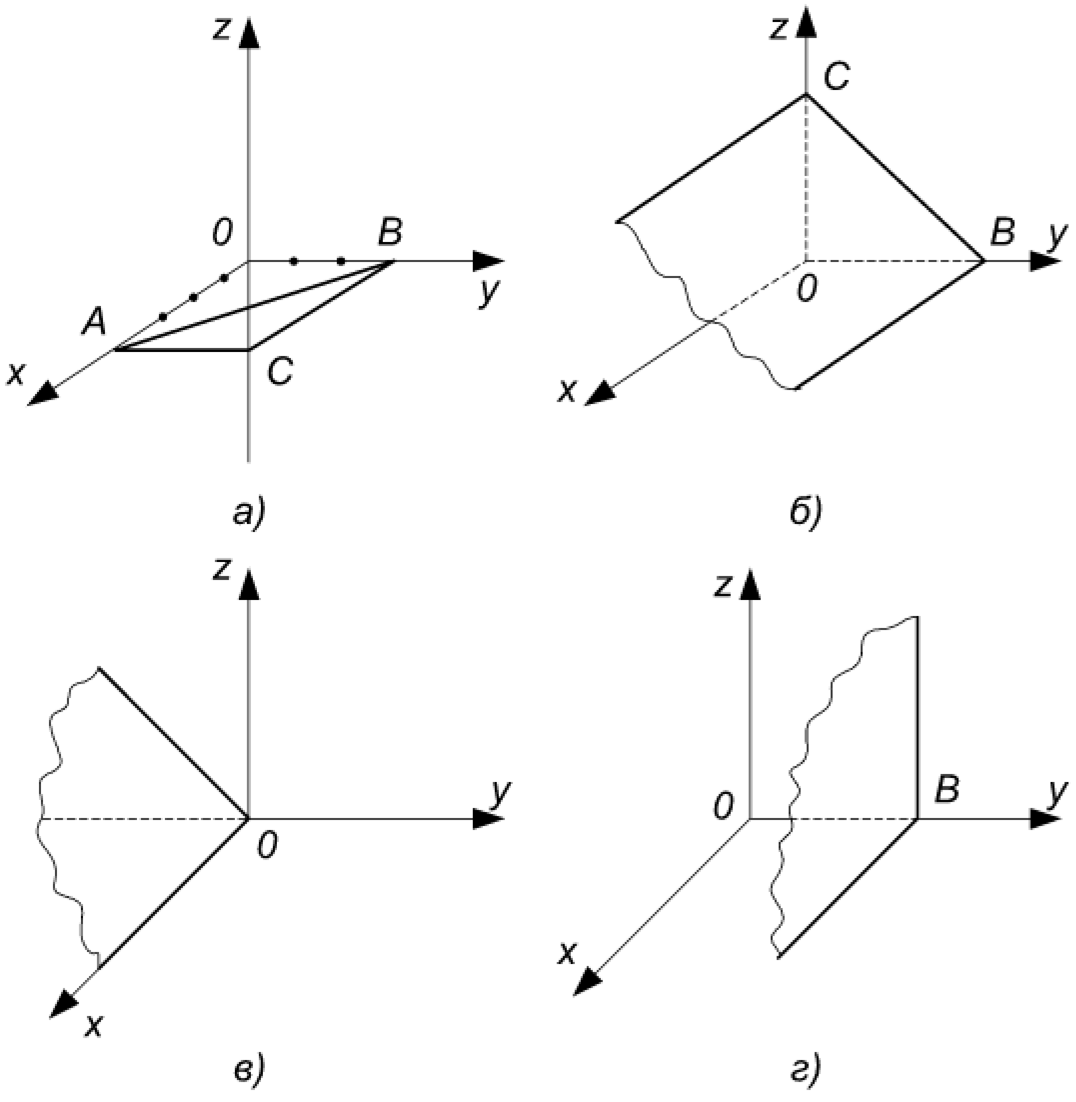


Рис. 4.2

Р е ш е н и е . 1) Определив отрезки $a = 4$, $b = 3$, $c = -2$, осекаемые на осях координат, получим три точки $A\,(4, 0, 0)$, $B\,(0, 3, 0)$, $C\,(0, 0, -2)$, в которых плоскость пересекает координатные оси (рис. 4.2, *а*).

2) Вторая плоскость параллельна оси Ox (см. уравнение (4.6)). Полагая $y = 0$, из уравнения $z + y - 2 = 0$ получим $z = 2$. Следовательно, плоскость пересекает ось Oz в точке $C\,(0, 0, 2)$. Аналогично находим, что точка $B\,(0, 2, 0)$ есть точка пересечения с осью Oy (рис. 4.2, *б*).

3) Плоскость $z + y = 0$ проходит через ось Ox (см. уравнение (4.9)). Она делит пополам угол между координатными плоскостями Oxz и Oxy (рис. 4.2, *в*).

4) Плоскость $3y - 7 = 0$ параллельна плоскости Oxz (см. уравнение (4.13). Она отсекает на оси Oy отрезок $b = \dfrac{7}{3}$ (рис. 4.2, *г*) (значение b получено из уравнения $y = \dfrac{7}{3}$).

П р и м е р 5 . Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Написать уравнение для случая $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$, $M_3(-3, 1, 2)$.

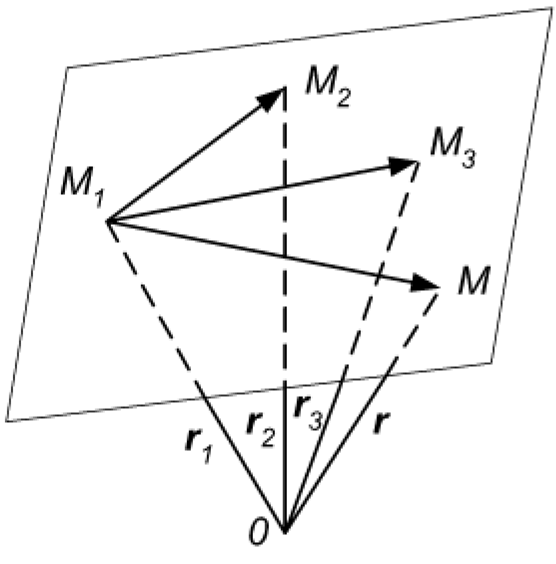


Рис. 4.3

Р е ш е н и е . Пусть M – произвольная точка плоскости (рис. 4.3) и $\bar{r}_1 = \overline{OM_1}$, $\bar{r}_2 = \overline{OM_2}$, $\bar{r}_3 = \overline{OM_3}$, $\bar{r} = \overline{OM}$ – радиус-векторы точек M_1, M_2, M_3, M. Введем в рассмотрение векторы:

$$\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1,\ \overline{M_1M_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1,$$
$$\overline{M_1M} = \bar{r} - \bar{r}_1.$$

Поскольку эти три вектора лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$(\bar{r} - \bar{r}_1)\,(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\,(\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0. \qquad (4.19)$$

Уравнение (4.19) является искомым. В координатной форме оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.20)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$, $M_3(-3, 1, 2)$ в соответствии с (4.20), запишется так:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 4-1 & -5-3 & 6+2 \\ -3-1 & 1-3 & 2+2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая последний определитель по элементам первой строки, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$8x + 22y + 19z - 36 = 0.$$

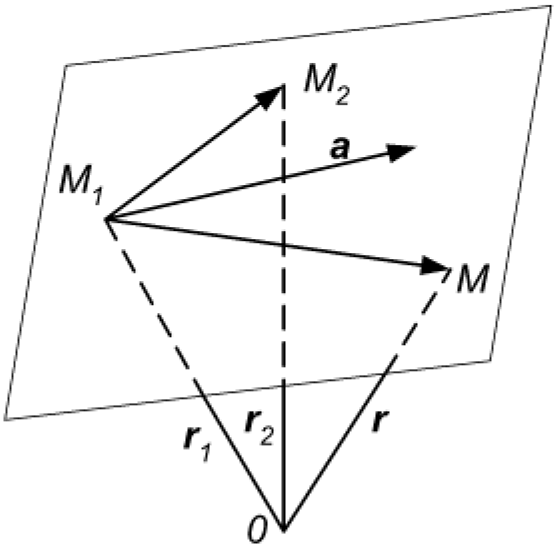


Рис. 4.4

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно данному вектору $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Векторы a и $\overline{M_1M_2}$ – неколлинеарны.

Решение. Отложим вектор $\overline{a}$ от точки M_1 (рис. 4.4). Пусть $M\ (x, y, z)$ произвольная точка плоскости и $\overline{r}_1 = \overline{OM_1}$, $\overline{r}_2 = \overline{OM_2}$, $\overline{r} = \overline{OM}$ – радиус-векторы точек M_1, M_2, M. Введем в рассмотрение векторы

$$\overline{M_1M_2} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1,\ \ \overline{M_1M} = \overline{r} - \overline{r}_1.$$

Векторы $\overline{a}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M}$ лежат в одной плоскости, поэтому их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$(\bar{r}-\bar{r}_1)(\bar{r}_2-\bar{r}_1)\,\bar{a}=0. \tag{4.21}$$

В координатной форме это уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0. \tag{4.22}$$

Пример 7. Показать, что плоскости $5x-3y-26z-3=0$, $10x+3y+11z-42=0$, $20x-39y-23z+96=0$, $10x+21y+2z+21=0$ образуют тетраэдр. Лежит ли внутри этого тетраэдра точка $E\,(1,1,2)$?

Решение. Четыре плоскости образуют тетраэдр, если каждая тройка их пересекается в одной точке и среди четырех точек пересечения нет совпадающих.

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x-3y-26z-3&=0;\\ 10x+3y+11z-42&=0;\\ 20x-39y-23z+96&=0, \end{aligned}\right\}$$

получим точку $A\,(3,4,0)$.

Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x-3y-26z-3&=0;\\ 10x+3y+11z-42&=0;\\ 10x+21y+2z+21&=0 \end{aligned}\right\}$$

получим вторую точку $B\,(4,-3,1)$.

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x-3y-26z-3&=0;\\ 20x-39y-23z+96&=0;\\ 10x+21y+2z+21&=0 \end{aligned}\right\}$$

дает третью точку $C\,(-4,1,-1)$.

Наконец, решая систему

$$\left.\begin{aligned} 10x+3y+11z-42=0;\\ 20x-39y-23z+96=0;\\ 10x+21y+2z+21=0, \end{aligned}\right\}$$

получим четвертую точку $D\,(-1,-1,5)$.

Так как полученные точки различны, то данные плоскости образуют тетраэдр, вершинами которого являются точки A, B, C, D.

Выясним теперь, лежит ли точка E внутри тетраэдра $ABCD$. Если E лежит внутри тетраэдра, то она и каждая вершина его располагаются по одну сторону от противоположной грани. Далее, если две точки пространства находятся по одну сторону плоскости, то при подстановке их координат в левую часть уравнения этой плоскости получаем числа одного знака (см. замечание к примеру 1). Рассмотрим точки A и E. Для точки A противоположной является грань, лежащая в плоскости $10x+21y+2z+21=0$. Подставляя координаты точек A и E в левую часть уравнения этой плоскости, получим

$$10\cdot 3+21\cdot 4+2\cdot 0+21>0,\ \ 10\cdot 1+21\cdot 1+2\cdot 2+21>0.$$

Следовательно, точки A и E лежат по одну сторону от грани BCD.

Для точки C противоположной будет грань, лежащая в плоскости $10x+3y+11z-42=0$. Подставляя координаты точек C и E в левую часть последнего уравнения, получим

$$10\,(-4)+3\cdot 1+11\,(-1)-42<0,\quad 10\cdot 1+3\cdot 1+11\cdot 2-42<0.$$

Таким образом, точки C и E лежат по одну сторону от грани ABD.

Так как

$$20\cdot 4-39\,(-3)-23\cdot 1+96>0,\quad 20\cdot 1-39\cdot 1-23\cdot 2+96>0,$$

то точки B и E находятся по одну сторону от грани ACD. Аналогичным образом убеждаемся, что точки D и E лежат по одну сторону от грани ABC.

Следовательно, точка E лежит внутри тетраэдра $ABCD$.

Пример 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-2,6)$, $M_2(5,-4,-2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy.

Р е ш е н и е . Уравнение плоскости ищем в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

По условию $a=b,$ поэтому уравнение можно записать так:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1.$$

Подставляя координаты точек M_1 и M_2 в последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{a}+\frac{-2}{a}+\frac{6}{c}=1,\ \frac{5}{a}+\frac{-4}{a}+\frac{-2}{c}=1 \quad \text{или} \quad -\frac{1}{a}+\frac{6}{c}=1,\ \frac{1}{a}-\frac{2}{c}=1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим $c=2,\ \ a=\frac{1}{2}.$ Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{2}=1$$

или

$$4x+4y+z-2=0.$$

Задачи

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\,(2,-1,-4)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n}=\{3,-6,1\},$ в векторной и координатной формах.

2. Написать уравнение плоскости в каждом из следующих случаев:

1) плоскость перпендикулярна оси Ox и проходит через точку $P\,(4,-7,6);$

2) плоскость параллельна оси Oy и проходит через точки $Q\,(1,2,-1),\ \ R\,(2,-3,-4);$

3) плоскость проходит через точку $S\,(6,-7,5)$ и ось $Oz.$

3. Определить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостями:

1) $2x-3y+4z-24=0;$ 2) $4x+y-3z-2=0.$

4. Построить плоскости:

1) $2x+3y-4z-12=0$; 2) $2x-3y-6=0$;

3) $4x+5y=0$; 4) $4x+9=0$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (4,\ -3,\ 5)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки: $L\ (-2,\ 4,\ 1)$, $M\ (0,\ 2,\ -1)$, $N\ (2,\ 0,\ -1)$.

7. Грани тетраэдра лежат в плоскостях: $x+y+z-1=0$; $x-y-$ $-1=0$; $x-z-1=0$; $z-2=0$. Лежит ли начало координат внутри этого тетраэдра?

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\overline{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\overline{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$. Написать уравнение в случае, когда $M_1(2,\ -1,\ 3)$, $\overline{a}=\{1,\ -1,\ 2\}$, $\overline{b}=\{2,\ 1,\ -3\}$.

Ответы

1. $\overline{n}\overline{r}-8=0$; $3x-6y+z-8=0$. **2.** 1) $x-4=0$; 2) $3x+z-2=0$; 3) $7x+6y=0$. **3.** 1) $a=12$, $b=-8$, $c=6$; 2) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$, $c=-\dfrac{2}{3}$. **5.** $x+y+z-6=0$. **6.** $x+y-2=0$. **7.** Не лежит. **8.** $(\overline{r}-\overline{r}_1)\,\overline{a}\overline{b}=0$,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

или $x+7y+3z-4=0$.

4.1.2. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Нормальным уравнением плоскости называется уравнение вида

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{4.23}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость, а p – его длина.

Общее уравнение плоскости (4.4) умножением на *нормирующий множитель*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{4.24}$$

знак которого противоположен знаку D, можно привести к нормальному виду (4.23).

Расстояние точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости (4.23) вычисляется по формуле

$$d = \left| x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p \right|, \tag{4.25}$$

а до плоскости (4.4) – по формуле

$$d = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.26}$$

Отклонением точки от плоскости называется число $(+d)$, если эта точка и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, и число $(-d)$, если они лежат по одну сторону от данной плоскости.

Отклонение δ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости (4.23) определяется формулой

$$\delta = \pm(x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p), \tag{4.27}$$

а от плоскости (4.4) – формулой

$$\delta = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{4.28}$$

где знак следует выбрать противоположным знаку D.

Очевидно,

$$d = |\delta|. \tag{4.29}$$

П р и м е р 9. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость

$$10x - 2y - 11z + 45 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости приведем к нормальному виду. Найдем сначала нормирующий множитель. В данном случае $A = 10$, $B = -2$, $C = -11$, $D = 45$. Поскольку $D > 0$, то в формуле (4.24) нужно взять знак минус. Получаем

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{10^2 + (-2)^2 + (-11)^2}} = -\frac{1}{15}.$$

Умножая обе части данного уравнения плоскости на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение

$$-\frac{10}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - \frac{45}{15} = 0$$

или

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - 3 = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (4.23), находим:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{15},\ \cos\gamma = \frac{11}{15},\ p = 3.$$

П р и м е р 10. Вычислить расстояние точек $M_1(3, 4, -7)$, $M_2(2, 4, 9)$, $M_3(5, 1, 0)$ до плоскости $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Р е ш е н и е. По формуле (4.26) получаем:

$$d_1 = \frac{|2 \cdot 3 - 4 + 2\,(-7) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-21|}{3} = 7;$$

$$d_2 = \frac{|2 \cdot 2 - 4 + 2 \cdot 9 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{3} = 3,\ d_3 = \frac{|2 \cdot 5 - 1 + 2 \cdot 0 - 9|}{3} = 0.$$

Следовательно, точка M_3 лежит на данной плоскости.

Пример 11. Дан тетраэдр с вершинами $A(2,-1,3)$, $B(1,-3,5)$, $C(6,2,5)$, $D(3,-2,-5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение. Искомая высота равна расстоянию от точки D до плоскости, проходящей через точки A, B, C. Составим уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1-2 & -3+1 & 5-3 \\ 6-2 & 2+1 & 5-3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$2x - 2y - z - 3 = 0.$$

По формуле (4.26) находим расстояние точки D до плоскости:

$$d = \frac{|2\cdot 3 - 2(-2) - (-5) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|12|}{3} = 4.$$

Пример 12. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(9,-2,2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Пусть $M(x,0,0)$ – искомая точка ($y=0, z=0,$ так как точка лежит на оси Ox). Находим расстояние этой точки до данной плоскости и точки A:

$$d_1 = \frac{|3\cdot x - 6\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x-3|}{7};$$

$$d_2 = MA = \sqrt{(9-x)^2 + (-2)^2 + 2^2}.$$

В соответствии с условием имеем $d_1 = d_2$, поэтому

$$\sqrt{(9-x)^2 + 8} = \frac{|3x-3|}{7} \text{ или } 7\sqrt{x^2 - 18x + 89} = 3|x-1|.$$

Возведя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получим

$$5x^2 - 108x + 544 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $x_1 = 8$, $x_2 = 13{,}6$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки:

$$M_1(8, 0, 0) \text{ и } M_2(13{,}6; 0; 0).$$

Пример 13. На оси Oz найти точку, равноудаленную от двух плоскостей:

$$2x - 2y + z - 3 = 0; \; x + 2y - 2z + 12 = 0.$$

Решение. Пусть $M(0, 0, z)$ – искомая точка. Расстояние этой точки до данных плоскостей определяется соответственно формулами:

$$d_1 = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + z - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|z - 3|}{3};$$

$$d_2 = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2z + 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2z + 12|}{3}.$$

По условию $d_1 = d_2$, поэтому

$$\frac{|z - 3|}{3} = \frac{|-2z + 12|}{3}, \text{ откуда } z - 3 = \pm(-2z + 12).$$

Решая уравнения

$$z - 3 = -2z + 12 \text{ и } z - 3 = -(-2z + 12),$$

получим $z_1 = 5, z_2 = 9$. Таким образом, условию удовлетворяют две точки $M_1(0, 0, 5)$ и $M_2(0, 0, 9)$.

Пример 14. Составить уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы между пересекающимися плоскостями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Решение. Каждая из искомых плоскостей является геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных плоскостей. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка искомой плоскости, тогда:

$$d_1 = \frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}; \; d_2 = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Так как по условию $d_1 = d_2$, то

$$\frac{\left| A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \right|}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2}} = \frac{\left| A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \right|}{\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}},$$

откуда получаем уравнения искомых плоскостей:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}.$$

В частности, если даны плоскости $5x - 10y + 10z - 6 = 0$, $10x + 2y - 11z + 4 = 0$, то уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между ними, запишутся следующим образом:

$$\frac{5x - 10y + 10z - 6}{\sqrt{5^2 + (-10)^2 + 10^2}} = \pm \frac{10x + 2y - 11z + 4}{\sqrt{10^2 + 2^2 + (-11)^2}}.$$

Следовательно,

$$5x - 10y + 10z - 6 = \pm (10x + 2y - 11z + 4),$$

откуда

1) $5x - 10y + 10z - 6 = (10x + 2y - 11z + 4)$

или $5x + 12y - 21z + 10 = 0$;

2) $5x - 10y + 10z - 6 = -(10x + 2y - 11z + 4)$

или $15x - 8y - z - 2 = 0$.

Пример 15. Определить, лежат ли точка $M\ (1, 1, -9)$ и начало координат по одну или по разные стороны от плоскости $2x - 2y + z + 12 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости приведем к нормальному виду. Так как $D > 0$, то в формуле (4.24) нужно взять знак минус, т. е.

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = -\frac{1}{3}.$$

Умножая обе части уравнения на нормирующий множитель, получим

$$-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-4=0.$$

Подставляя координаты точки M в последнее уравнение, находим отклонение δ

$$\delta=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(-9)-4<0.$$

Поскольку $\delta<0,$ то точка M и начало координат лежат по одну сторону от данной плоскости.

Пример 16. Определить, лежат ли точки $M(1,-1,2)$ и $N(-2,1,-3)$ в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных при пересечении двух плоскостей:

1) $3x-2y+4z-10=0, x+3y-5z+6=0;$
2) $2x+4y-z-5=0, x-y-z-3=0;$
3) $5x-6y+2z+7=0, x+y-3z+8=0.$

Решение. Если две точки лежат в одном двугранном углу, образованном двумя плоскостями, то они расположены по одну сторону от каждой плоскости.

Если две точки находятся в двух смежных углах, то они расположены по разные стороны от одной из них и по одну сторону от другой.

Если точки находятся в вертикальных углах, то они расположены по разные стороны каждой из данных плоскостей. Для каждого из этих трех утверждений обратное также верно.

1) Найдем отклонения точек M и N от первой плоскости

$$\delta_1=\frac{3\cdot1-2(-1)+4\cdot2-10}{\sqrt{9+4+16}}>0;\quad \delta_2=\frac{3(-2)-2\cdot1+4(-3)-10}{\sqrt{9+4+16}}<0$$

и от второй плоскости

$$\delta_1'=\frac{1+3(-1)-5\cdot2+6}{-\sqrt{1+9+25}}>0;$$

$$\delta_2'=\frac{-2+3\cdot1-5(-3)+6}{-\sqrt{1+9+25}}<0.$$

Так как δ_1 и δ_2 разных знаков, то точки M и N расположены по разные стороны от первой плоскости, по той же причине они находятся по разные стороны и от второй плоскости. Следовательно, точки M и N

лежат в вертикальных углах.

2) Находим отклонения точек M и N от первой плоскости

$$\delta_1 = \frac{2\cdot 1 + 4\,(-1) - 2 - 5}{\sqrt{4+16+1}} < 0;\ \ \delta_2 = \frac{2\,(-2) + 4\cdot 1 - (-3) - 5}{\sqrt{4+16+1}} < 0$$

и от второй плоскости

$$\delta_1' = \frac{1 - (-1) - 2 - 3}{\sqrt{1+1+1}} < 0;\ \ \delta_2' = \frac{-2 - 1 - (-3) - 3}{\sqrt{1+1+1}} < 0.$$

Следовательно, точки M и N находятся в одном углу.

3) Поскольку

$$\delta_1 = \frac{5\cdot 1 - 6\,(-1) + 2\cdot 2 + 7}{-\sqrt{25+36+4}} < 0;\quad \delta_2 = \frac{5\,(-2) - 6\cdot 1 + 2\,(-3) + 7}{-\sqrt{25+36+4}} > 0;$$

$$\delta_1' = \frac{1 + (-1) - 3\cdot 2 + 8}{-\sqrt{1+1+9}} < 0;\ \ \delta_2' = \frac{1\,(-2) + 1 - 3\,(-3) + 8}{-\sqrt{1+1+9}} < 0,$$

то точки M и N лежат по разные стороны от первой плоскости и по одну сторону от второй. Следовательно, они расположены в смежных двугранных углах.

Задачи

9. Определить, какие из уравнений являются нормальными:

$$1)\ \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0;\ \ 2)\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y +$$

$$+\frac{1}{3}z - 2 = 0;\ \ 3)\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

10. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $2x - 3y - 6z - 14 = 0$.

11. Определить расстояния точек $P\,(4, 3, -2)$, $Q\,(0, 6, 0)$ и $R\,(15, 0, 0)$ до плоскости $2x + 10y - 11z - 15 = 0$.

12. Дан тетраэдр с вершинами $A\,(3, 4, 0)$, $B\,(4, -3, 1)$, $C\,(-4, 1, -1)$, $D\,(-1, -1, 5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D.

13. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей

$$x + y - z + 1 = 0,\ \ x - y + z - 5 = 0.$$

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $P\,(5, 2, 0)$ и удаленной от точки $Q\,(6, 1, -1)$ на расстояние 1 и от точки $R\,(0, 5, 4)$ на расстояние 3.

15. Составить уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x + 2y - 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z - 9 = 0$.

16. Доказать, что плоскость $5x - 3y + 4z - 2 = 0$ пересекает отрезок, соединяющий начало координат с точкой $M\,(1, 2, 3)$.

Ответы

9. Уравнение 3. Указание. Если уравнение является нормальным, то выполняются два условия: 1) свободный член отрицателен; 2) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице. **10.** $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = -\frac{3}{7}$, $\cos\gamma = -\frac{6}{7}$; $p = 2$. **11.** $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$. **12.** $h = \frac{135}{\sqrt{710}}$. **13.** $M\,(0, -3, 0)$. **14.** $x + 2y + 2z - 9 = 0$, $y - 2 = 0$. **15.** $x - 3y + 4z - 6 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. **16.** Указание. Показать, что $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0$.

4.1.3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Угол между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{4.30}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{4.31}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{4.32}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей (4.30) и (4.31):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \tag{4.33}$$

или

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,\ D_2 \neq \lambda D_1$$

(коэффициенты при текущих координатах пропорциональны).

Необходимое и достаточное условие совпадения плоскостей (4.30) и (4.31)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{4.34}$$

(все соответствующие коэффициенты пропорциональны).

Условие перпендикулярности плоскостей (4.30) и (4.31):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \tag{4.35}$$

Пример 17. Найти угол между двумя плоскостями

$$11x - 8y - 7z + 5 = 0,\ 7x + 2y - 8z - 3 = 0.$$

Решение. Подставляя в формулу (4.32) значения $A_1 = 11$, $B_1 = -8$, $C_1 = -7$, $A_2 = 7$, $B_2 = 2$, $C_2 = -8$, получим

$$\cos\varphi = \frac{11\cdot 7 + (-8)\,2 + (-7)\,(-8)}{\sqrt{121+64+49}\,\sqrt{49+4+64}} = \frac{117}{\sqrt{234}\,\sqrt{117}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 45^\circ$.

Замечание. Формула (4.32) определяет один из двух неравных между собой углов, сумма которых равна 180°. Если уравнение второй плоскости написать в виде $-7x - 2y + 8z + 3 = 0$, то по формуле (4.32) получим $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\varphi = 135^\circ$.

Пример 18. Через точку $N\,(2, -1, -3)$ провести плоскость, параллельную плоскости $5x - 4y + 6z - 3 = 0$.

Решение. В соответствии с условием (4.33) уравнение плоскости ищем в виде

$$5\lambda x - 4\lambda y + 6\lambda z + D = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки N, находим

$$5\lambda\cdot 2 - 4\lambda\,(-1) + 6\lambda\,(-3) + D = 0 \text{ или } -4\lambda = -D,$$

откуда $D = 4\lambda$. Подставляя значение D в искомое уравнение и полагая

$\lambda = 1,$ получим

$$5x - 4y + 6z + 4 = 0.$$

З а м е ч а н и е. Уравнение плоскости, параллельной плоскости $Ax + By + Cz + D_1 = 0,$ можно искать в виде $Ax + By + Cz + D = 0.$

П р и м е р 19. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x - 4y + 2z - 3 = 0$ и отстоящей от нее на 5 единиц.

Р е ш е н и е. Уравнение искомой плоскости запишем так:

$$4x - 4y + 2z + D = 0.$$

Найдем расстояние между плоскостями, для чего возьмем произвольную точку первой плоскости и определим ее расстояние до второй. Положив $x = 0, y = 0,$ из уравнения $4x - 4y + 2z - 3 = 0$ найдем $z = \frac{3}{2};$ получим точку $M\left(0, 0, \frac{3}{2}\right).$ Расстояние этой точки до плоскости $4x - 4y + 2z + D = 0$ определяется формулой

$$d = \frac{\left|4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + D\right|}{\sqrt{16 + 16 + 4}} = \frac{|3 + D|}{6}.$$

Так как по условию $d = 5,$ то для определения D имеем уравнение

$$5 = \frac{|3 + D|}{6} \text{ или } 30 = \pm\,(3 + D),$$

откуда

$$D_1 = 27, \;\; D_2 = -33.$$

Подставляя в искомое уравнение найденные значения D получим две плоскости:

$$4x - 4y + 2z + 27 = 0 \text{ и } 4x - 4y + 2z - 33 = 0.$$

П р и м е р 20. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x + 2y - 2z + 7 = 0$ и удаленной от точки $M\,(4, 3, -2)$ на расстояние $d = 7.$

Решение. Уравнение искомой плоскости ищем в виде

$$x + 2y - 2z + D = 0.$$

Расстояние точки M до этой плоскости выразится формулой

$$d = \frac{\left|4 + 2\cdot 3 - 2\,(-2) + D\right|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\left|14 + D\right|}{3}.$$

Так как по условию $d = 7,$ то для определения D получим уравнение

$$7 = \frac{\left|14 + D\right|}{3} \text{ или } 21 = \pm\,(14 + D),$$

откуда $D_1 = 7, D_2 = -35.$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две плоскости

$$x + 2y - 2z + 7 = 0,\ x + 2y - 2z - 35 = 0.$$

Первая плоскость совпадает с данной плоскостью.

Пример 21. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующую с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол $\varphi = 45^\circ$.

Решение. Поскольку искомая плоскость проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Коэффициенты A, B, C одновременно в нуль не обращаются (это координаты вектора, перпендикулярного плоскости). Предполагая, что $A \neq 0,$ уравнение перепишем в виде

$$x + by + cz = 0,$$

где

$$b = \frac{B}{A},\ c = \frac{C}{A}.$$

Условие перпендикулярности (4.35) для плоскостей $x + by + cz = 0$ и $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ запишется так:

$$5 - 2b + 5c = 0. \qquad \text{(A)}$$

Угол между плоскостями $x-4y-8z+12=0$ и $x+by+cz=0$ определится формулой (4.32):

$$\cos\varphi=\frac{1-4b-8c}{\sqrt{1+16+64}\,\sqrt{1+b^2+c^2}}.$$

Так как $\varphi=45^\circ$, то для определения коэффициентов b и c имеем второе уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1-4b-8c}{\sqrt{81}\,\sqrt{1+b^2+c^2}}. \qquad \text{(B)}$$

Решим систему уравнений (A) и (B). Определяя b из уравнения (A), подставляя полученное выражение $b=\frac{5\,(1+c)}{2}$ в уравнение (B) и освобождаясь от радикалов, находим

$$81\left[1+\frac{25\,(1+c)^2}{4}+c^2\right]=2\,[1-10\,(1+c)-8c]^2$$

или

$$\frac{81}{4}\,(29c^2+50c+29)=2\cdot 9^2\,(-1-2c)^2,$$

откуда

$$29c^2+50c+29=8+32c+32c^2.$$

Приводя подобные члены и сокращая на 3, получим квадратное уравнение

$$c^2-6c-7=0,$$

его корни $c_1=7,\ c_2=-1.$ По формуле $b=\frac{5\,(1+c)}{2}$ находим $b_1=20,$ $b_2=0.$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две плоскости $x+20y+7z=0$ и $x-z=0.$

Замечание. При решении задачи был исключен случай $A=0.$ Это исключение оправдано, так как предположение $A=0$ приводит к несовместной системе уравнений относительно B и C.

Пример 22. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к двум пересекающимся плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Написать уравнение плоскости для случая, когда $M\,(2, -3, 1)$ и плоскости заданы уравнениями $3x - y + 2z - 1 = 0$, $4x + 5y - 3z + 2 = 0$.

Решение. В общем уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты при x, y и z – координаты вектора $\overline{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярного к плоскости.

Так как вектор $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ перпендикулярен плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а вектор $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ перпендикулярен плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то задача сводится к составлению уравнения плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум неколлинеарным векторам (см. задачу 8).

Пусть $M\,(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости, $\overline{r} = \overline{OM}$ ее радиус-вектор, $\overline{r}_0 = \overline{OM_0}$ – радиус-вектор данной точки M_0, тогда векторы $\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ компланарны и их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overline{r} - \overline{r}_0)\,\overline{n}_1\,\overline{n}_2 = 0.$$

Это уравнение и является искомым векторным уравнением плоскости. В координатах оно принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Для данного конкретного случая, когда $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $z_0 = 1$, $A_1 = 3$, $B_1 = -1$, $C_1 = 2$, $A_2 = 4$, $B_2 = 5$, $C_2 = -3$, последнее уравнение запишется так:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$7x - 17y - 19z - 46 = 0.$$

Пример 23. Доказать, что параллелепипед, грани которого лежат в плоскостях $7x-11y+9z-14=0$, $4x+5y+3z+6=0$, $78x-15y-79z+3=0$, является прямоугольным.

Решение. Составляем выражение $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$ для каждого случая:

$$1)\ 7\cdot 4+(-11)\,5+9\cdot 3=0;\ 2)\ 4\cdot 78+5\,(-15)+3\,(-79)=0;$$

$$3)\ 7\cdot 78+(-11)\,(-15)+9\,(-79)=0.$$

Так как выполняется условие (4.35) для каждой пары плоскостей, то плоскости попарно перпендикулярны. Это и означает, что параллелепипед является прямоугольным.

Задачи

17. Найти угол между двумя плоскостями:

1) $4x-10y+z-3=0$, $\quad -11x+8y+7z+5=0$;

2) $2x+6y+5z-9=0$, $\quad 4x-3y+2z+7=0$;

3) $x+2y-3z-6=0$, $\quad 3x+6y-9z-2=0$;

4) $2x-3y+6z+8=0$, $\quad x+2y+2z-4=0$.

18. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $K\,(1,5,2)$ параллельно плоскости, проходящей через три точки $L\,(4,-3,1)$, $M\,(3,4,0)$, $N\,(-1,-1,5)$.

19. Дана вершина параллелепипеда $P\,(3,2,4)$ и уравнения плоскостей, в которых лежат его три непараллельные грани:

$$x+2y+3z-12=0,\ 3x-y+2z-6=0,\quad 2x+3y-z-18=0.$$

Написать уравнения плоскостей, в которых лежат три другие грани.

20. Составить уравнение плоскости, проведенной через точки $P\,(1,-1,2)$, $Q\,(3,1,2)$ перпендикулярно к плоскости $4x-5y+3z-2=0$.

21. Написать уравнение плоскости, проведенной через точку $P\,(2,1,-3)$ перпендикулярно к двум плоскостям:

$$2x-3y+z-5=0;\ x+4y-2z+3=0.$$

22. Найти плоскость, параллельную плоскости $x-2y+2z-7=0$ и отстоящую от точки $P\,(4,1,-3)$ на расстоянии $d=2$.

23. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0.$

Ответы

17. $\varphi_1 = 135^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 0^\circ$, $\varphi_4 = 78^\circ 28'$. **18.** $10x + 3y + 11z - 47 = 0.$ **19.** $x + 2y + 3z - 19 = 0,$ $3x - y + 2z - 15 = 0,$ $2x + 3y - z - 8 = 0.$ **20.** $7x + 11y + 9z - 14 = 0.$ **21.** $2x + 5y + 11z + 24 = 0.$ **22.** $x - 2y + 2z + 10 = 0,$ $x - 2y + 2z - 2 = 0.$

23. $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$

§ 4.2. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве относительно прямоугольной декартовой системы координат может быть задана различными способами. Например, прямая однозначно определяется точкой и параллельным ей вектором, двумя точками и т. п. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнений.

4.2.1. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\overline{a} = \{l, m, n\}$, в векторном виде записывается так

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{a}t, \qquad (4.36)$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор любой точки $M\,(x, y, z)$ прямой (рис. 4.5), $\overline{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0, t – параметр, принимающий всевозможные действительные значения. Вектор $\overline{a}$ называется *направляющим вектором* прямой. Его координаты пропорциональны *направляющим косинусам* прямой.

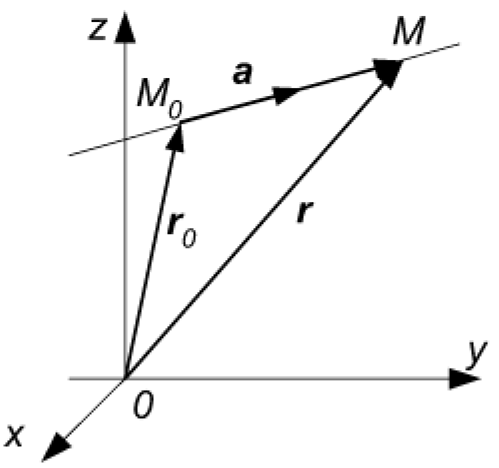


Рис. 4.5

Уравнение (4.36) в координатах примет вид:

$$x = x_0 + lt;\ y = y_0 + mt;\ z = z_0 + nt. \tag{4.37}$$

Уравнения (4.37) называются *параметрическими* уравнениями прямой. Если параметр t рассматривать как время, а уравнения (4.37) как уравнения движения точки M, то эти уравнения будут определять прямолинейное и равномерное движение точки M. При $t = 0$ точка M совпадает с точкой M_0. Скорость точки M постоянна и определяется формулой

$$v = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}. \tag{4.38}$$

Исключая из уравнений (4.37) параметр t, получим *канонические* уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{t} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{4.39}$$

Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.40}$$

Пример 1. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, -2, 3)$ и параллельной вектору $\overline{a} = \{2, 4, -5\}$. Найти точку P прямой, которой соответствует значение $t = 2$.

Решение. Пользуемся формулами (4.37). Так как в данном случае $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = 3$, $l = 2$, $m = 4$, $n = -5$, то параметрические уравнения прямой имеют вид

$$x = 1 + 2t,\ y = -2 + 4t,\ z = 3 - 5t.$$

При $t = 2$ получаем

$$x = 1 + 2 \cdot 2 = 5;\ y = -2 + 4 \cdot 2 = 6;\ z = 3 - 5 \cdot 2 = -7.$$

На прямой фиксированная точка $P\,(5, 6, -7)$.

Пример 2. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(5, -1, -4)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$;
2) прямая параллельна оси Ox;
3) прямая перпендикулярна плоскости $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

Р е ш е н и е . 1) Так как прямая параллельна прямой $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\overline{a} = \{6, -4, -1\}$. Подставляя значения $x_0 = 5$, $y_0 = -1$, $z_0 = -4$ и координаты вектора $\overline{a}$ в формулы (4.37), получим параметрические уравнения прямой

$$x = 5 + 6t,\ y = -1 - 4t,\ z = -4 - t.$$

2) Вектор, параллельный оси Ox, имеет координаты $y = 0$, $z = 0$ (координата x равна длине вектора, взятой с соответствующим знаком). В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{a} = \{1, 0, 0\}$, совпадающий с ортом $\overline{i}$, поэтому $x = 5 + t$, $y = -1$, $z = -4$.

3) Поскольку вектор $\overline{n} = \{1, 2, 3\}$ перпендикулярен плоскости $x + 2y + 3z - 5 = 0$, то в силу условия он будет параллелен прямой. Следовательно, параметрические уравнения прямой примут вид

$$x = 5 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = -4 + 3t.$$

П р и м е р 3 . Написать параметрические уравнения прямой, проведенной через начало координат перпендикулярно плоскости $4x - 3y + 5z - 7 = 0$.

Р е ш е н и е . Вектор $\overline{n} = \{4, -3, 5\}$ нормали к плоскости является направляющим вектором прямой. Так как прямая проходит через начало координат, то $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Таким образом,

$$x = 4t,\ y = -3t,\ z = 5t.$$

П р и м е р 4 . Составить канонические уравнения прямой, проведенной через точку $M_0(6, 2, -3)$ параллельно вектору $\overline{a} = \{4, -5, 7\}$. Лежат ли на этой прямой точки $P\,(2, 7, -10)$, $Q\,(10, -3, 5)$, $R\,(3, 4, 7)$?

Р е ш е н и е . Применяем формулы (4.39). Так как $x_0 = 6$, $y_0 = 2$, $z_0 = -3$, $l = 4$, $m = -5$, $n = 7$, то канонические уравнения примут вид

$$\frac{x-6}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{7}.$$

Подставляя в эти уравнения координаты точек P, Q, R, соответственно находим

$$\frac{2-6}{4}=\frac{7-2}{-5}=\frac{-10+3}{7}=-1,\ \frac{10-6}{4}=\frac{-3-2}{-5}\neq\frac{5+3}{7},$$

$$\frac{3-6}{4}\neq\frac{4-2}{-5}\neq\frac{7+3}{7}.$$

Следовательно, точка P лежит на прямой, а точки Q и R на прямой не лежат.

Пример 5. Составить канонические уравнения диагоналей параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A\,(2, 4, 6)$, $B\,(-3, 5, 4)$, $C\,(8, -6, 2)$.

Решение. Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через две точки. Напишем уравнение диагонали AC. По формуле (4.40) получаем

$$\frac{x-2}{8-2}=\frac{y-4}{-6-4}=\frac{z-6}{2-6},\ \frac{x-2}{6}=\frac{y-4}{-10}=\frac{z-6}{-4}\ \text{или}$$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-6}{-2}.$$

Поскольку точка D не дана, то уравнения диагонали BD напишем как уравнения прямой, проходящей через точки B и S, где S – точка пересечения диагоналей. Так как S является серединой отрезка AC, то ее координаты равны полусуммам соответствующих координат концов, т. е. $S\,(5, -1, 4)$. Уравнения диагонали BD принимают вид

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-5}{-1-5}=\frac{z-4}{4-4}\ \text{или}\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-3},\ z-4=0.$$

Замечание. Если при подстановке координат точек в уравнения (4.40) один или два знаменателя обращаются в нуль, то нужно приравнять нулю соответствующий числитель. (Все три знаменателя не могут быть равны нулю одновременно, так как точки M_1 и M_2 различны.)

Пример 6. Даны вершины треугольника $P\,(6, -2, 2)$, $Q\,(4, -5, -4)$, $R\,(-2, -17, 0)$. Составить параметрические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине Q.

Решение. Найдем вначале точку N пересечения биссектрисы со стороной PR. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Так как

$$QP = \sqrt{(4-6)^2 + (-2+5)^2 + (2+4)^2} = 7;$$

$$QR = \sqrt{(-2-4)^2 + (-17+5)^2 + 4^2} = 14,$$

то $l = PN : NR = QP : QR = 7 : 14$, т. е. $l = \dfrac{1}{2}$.

По формулам (3.28) находим точку N:

$$x = \frac{6 + \frac{1}{2}(-2)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}; \;\; y = \frac{-2 + \frac{1}{2}(-17)}{1 + \frac{1}{2}} = -7;$$

$$z = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 0}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}; \;\; N\left(\frac{10}{3}, -7, \frac{4}{3}\right).$$

Напишем канонические уравнения прямой, проходящей через точки Q и N:

$$\frac{x-4}{\frac{10}{3} - 4} = \frac{y+5}{-7+5} = \frac{z+4}{\frac{4}{3} + 4} \;\; \text{или} \;\; \frac{x-4}{-\frac{2}{3}} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+4}{\frac{16}{3}}.$$

Умножая все знаменатели на $\dfrac{3}{2}$, получим канонические уравнения биссектрисы внутреннего угла при вершине Q:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+4}{8}.$$

Обозначая буквой t равные отношения и выражая x, y, z через t, получим параметрические уравнения той же биссектрисы:

$$x = 4 - t, \;\; y = -5 - 3t, \;\; z = -4 + 8t.$$

Пример 7. Даны уравнения движения точки $M(x, y, z)$: $x = 3 + 6t$, $y = 5 - 2t$, $z = -8 + 3t$. Определить ее скорость.

Решение. В соответствии с формулой (4.38) получаем

$$v = \sqrt{36+4+9} = 7.$$

Пример 8. Даны уравнения движения точки $M\,(x, y, z)$: $x = 2+2t$, $y = -2-2t$, $z = 1+t$. Вычислить расстояние, пройденное точкой M за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = 6$.

Решение. Определим начало и конец прямолинейного пути точки M. При $t = 1$ находим

$$x = 2+2\cdot 1 = 4,\ y = -2-2\cdot 1 = -4,\ z = 1+1 = 2.$$

Итак, получили точку $M_1(4, -4, 2)$. При $t = 6$ получаем вторую точку $M_2(14, -14, 7)$.

Пройденное расстояние равно длине отрезка M_1M_2:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(14-4)^2+(-14+4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Пример 9. Точка $M\,(x, y, z)$ движется равномерно и прямолинейно из начального положения $M_0(2, 12, -5)$ в направлении, противоположном вектору $\overline{b} = \{-1, 2, -2\}$ со скоростью $v = 12$. Составить уравнения движения точки M и определить точку, с которой она совпадет в момент времени $t = 4$.

Решение. Определим сначала координаты направляющего вектора $\overline{a}$. По условию $\overline{a} = -\lambda\overline{b}$, $\lambda > 0$, т. е. $\overline{a} = \{\lambda, -2\lambda, 2\lambda\}$. Далее, $|\overline{a}| = v = 12$, поэтому $\sqrt{\lambda^2+(-2\lambda)^2+(2\lambda)^2} = 12$ или $3\lambda = 12$, откуда $\lambda = 4$. Следовательно, $\overline{a} = \{4, -8, 8\}$. Уравнения движения точки M примут вид

$$x = 2+4t,\ y = 12-8t,\ z = -5+8t.$$

Полагая в этих уравнениях $t = 4$, получим точку $N\,(18, -20, 27)$.

Задачи

1. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(5, -3, 8)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $x = 1-3t$, $y = 4+2t$, $z = 5-6t$;
2) прямая параллельна оси Oy;
3) прямая параллельна оси Oz;
4) прямая перпендикулярна плоскости $4x+7y-8z-3 = 0$.

2. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(5, -3, \sqrt{2})$ и параллельной вектору, образующему с координатными ортами углы $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Лежат ли на этой прямой точки $P(1, -2, 3)$, $Q(4, -4, 0)$?

3. Составить канонические уравнения сторон треугольника с вершинами $P(2, -4, 3)$, $Q(4, 6, 7)$, $R(5, 2, -8)$ и уравнения его медианы, проведенной из вершины R.

4. Дан треугольник с вершинами $A(4, 1, -1)$, $B(7, 4, -5)$, $C(-5, 13, 8)$. Написать параметрические уравнения биссектрисы внешнего угла при вершине A.

5. Составить уравнения траектории точки $M(x, y, z)$, движущейся прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\overline{b} = \{2, -2, 1\}$ из начального положения $M_0(4, 6, -7)$ со скоростью $v = 15$.

6. Написать уравнения траектории точки $M(x, y, z)$, которая, двигаясь прямолинейно и равномерно, прошла расстояние от точки $M_1(1, 7, -5)$ до точки $M_2(21, -48, 45)$ за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$.

Ответы

1. 1) $x = 5 - 3t$, $y = -3 + 2t$, $z = 8 - 6t$; 2) $x = 5$, $y = -3 + t$, $z = 8$; 3) $x = 5$, $y = -3$, $z = 8 + t$; 4) $x = 5 + 4t$, $y = -3 + 7t$, $z = 8 - 8t$. **2.** $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. На прямой лежит точка Q. **3.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{2}$; $\frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-7}{-15}$; $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-3}{-11}$; $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+18}{13}$. **4.** $\frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{7}$. **5.** $x = 4 + 10t$, $y = 6 - 10t$, $z = -7 + 5t$. **6.** $x = 1 + 4t$, $y = 7 - 11t$, $z = -5 + 10t$.

4.2.2. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Прямая как линия пересечения двух плоскостей определяется совместным заданием двух уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{aligned}\right\} \qquad (4.41)$$

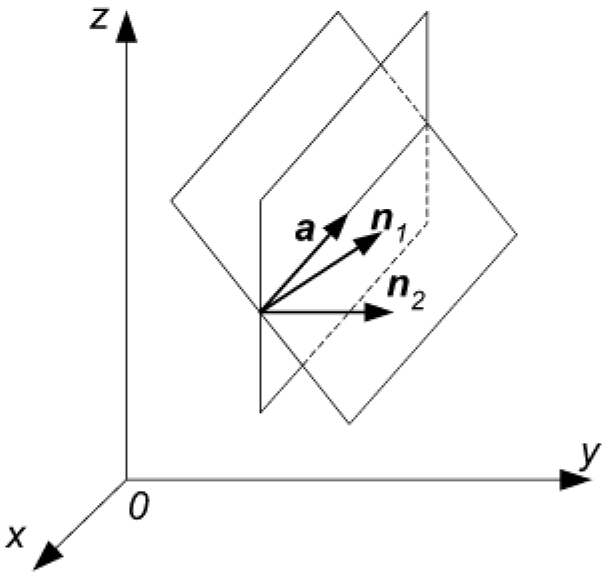


Рис. 4.6

при условии, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 первого не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 второго

За направляющий вектор прямой (4.41) можно принять векторное произведение $\overline{a}=[\overline{n}_1\overline{n}_2]$, где $\overline{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ – векторы нормалей к соответствующим плоскостям (рис. 4.6):

$$\overline{a}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ или } \overline{a}=\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}. \qquad (4.42)$$

Канонические уравнения прямой (4.41) имеют вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad (4.43)$$

а ее параметрические уравнения запишутся так:

$$x=x_0+\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}t;\ y=y_0-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}t;\ z=z_0+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}t. \qquad (4.44)$$

Даны две прямые своими параметрическими уравнениями:

$$x=x_1+l_1t,\ y=y_1+m_1t,\ z=z_1+n_1t; \qquad (4.45)$$

$$x=x_2+l_2t,\ y=y_2+m_2t,\ z=z_2+n_2t. \qquad (4.46)$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}, \qquad (4.47)$$

составленный из коэффициентов, входящих в уравнения (4.45), (4.46).

I. Равенство

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых одной плоскости.

1. Если в определителе (4.47) все строки пропорциональны, т. е.

$$l_2 = \lambda l_1,\ m_2 = \lambda m_1,\ n_2 = \lambda n_1,\ x_2 - x_1 = \mu l_1,\ y_2 - y_1 = \mu m_1,$$

$$z_2 - z_1 = \mu n_1, \qquad (4.48)$$

то прямые (4.45) и (4.46) *совпадают*.

2. Если пропорциональны только первые две строки, т. е.

$$l_2 = \lambda l_1,\ m_2 = \lambda m_1,\ n_2 = \lambda n_1 \qquad (4.49)$$

то прямые (4.45) и (4.46) *параллельны*.

3. Если $\Delta = 0$, но условие (4.49) не выполнено, то прямые (4.45) и (4.46) *пересекаются*.

II. Если $\Delta \neq 0$, то прямые (4.45) и (4.46) *скрещиваются*.

Пример 10. Написать канонические и параметрические уравнения прямой:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y + 5z - 10 = 0; \\ 6x - 5y + z - 17 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулами (4.43) и (4.44) необходимо найти координаты направляющего вектора $\overline{a}$. Для этого удобно поступить следующим образом. Составим таблицу из коэффициентов при текущих координатах в данных уравнениях:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Закрывая поочередно один столбец этой таблицы, вычислим полученные определители и возьмем второй определитель со знаком минус. Получим координаты направляющего вектора $\overline{a}$:

$$l = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 21;\ m = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 27;\ n = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 9.$$

Возьмем теперь какую-нибудь точку данной прямой. Для этого нужно придать конкретное значение одной из координат, значение двух других определятся системой уравнений. Положим, например, $z = 0,$ тогда исходные уравнения примут вид:

$$3x - 4y - 10 = 0;\ 6x - 5y - 17 = 0.$$

Решая эту систему, получим $x_0 = 2,\ y_0 = -1.$ Следовательно на прямой фиксирована точка $M_0(2, -1, 0).$ Уравнения (4.43) запишем так:

$$\frac{x-2}{21} = \frac{y+1}{27} = \frac{z}{9} \text{ или } \frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{3}.$$

Параметрические уравнения (4.44) принимают вид:

$$x = 2 + 7t;\ y = -1 + 9t;\ z = 3t.$$

З а м е ч а н и е . Точку M_0 на прямой можно выбрать произвольно, поэтому в уравнениях (4.43) и (4.44) при разных выборах M_0 окажутся различные числа x_0, y_0, z_0 для одной и той же прямой. Координаты направляющего вектора определяются с точностью до постоянного множителя.

П р и м е р 1 1 . Составить уравнения оси *Ox*.

Р е ш е н и е . Ось *Ox* можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей *Oxz* и *Oxy*. Уравнение плоскости *Oxz* есть $y = 0,$ а уравнение плоскости *Oxy* – $z = 0,$ поэтому ось *Ox* имеет следующие уравнения:

$$y = 0;\ z = 0.$$

П р и м е р 12. Привести уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 2z - 5 = 0; \\ 2x + y - 4z - 7 = 0 \end{aligned}\right\}$$

к уравнениям в проекциях на координатные плоскости Oxz, Oyz.

Р е ш е н и е. Одну и ту же прямую можно представить множеством разных систем двух уравнений первой степени. В частности, прямую (4.41) можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, проходящих через нее и перпендикулярных двум координатным плоскостям.

Представим данную прямую как линию пересечения двух плоскостей, проходящих через нее и перпендикулярных плоскостям Oxz и Oyz. Плоскость, перпендикулярная плоскости Oxz, параллельна оси Oy, поэтому в ее уравнении коэффициент при y равен нулю. Исключая y путем почленного сложения двух данных уравнений, получим

$$4x - 2z - 12 = 0 \text{ или } z = 2x - 6.$$

Исключая x путем почленного вычитания второго уравнения из первого, получим

$$-2y + 6z + 2 = 0 \text{ или } z = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}.$$

Следовательно, уравнения прямой в проекциях на плоскости Oxz и Oyz, имеют вид:

$$z = 2x - 6; \; z = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}.$$

П р и м е р 13. Найти уравнение проекции прямой

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{4}$$

на плоскость

$$x - 3y + 2z - 7 = 0.$$

Р е ш е н и е. Проекция прямой на плоскость представляет собой линию пересечения этой плоскости и плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости.

Составим уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-5}{4}$$

перпендикулярно плоскости $x-3y+2z-7=0$. Пусть $M\,(x, y, z)$ – произвольная точка искомой плоскости, $M_0(2, -1, 5)$ – принадлежащая ей точка прямой, тогда векторы $\overline{M_0M}=\{x-2, y+1, z-5\}$, $\overline{a}=\{6, -5, 4\}$, $\overline{n}=\{1, -3, 2\}$ лежат в одной плоскости, поэтому их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\overline{M_0M}\cdot\overline{a}\cdot\overline{n}=0$ или в координатах

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 6 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Упрощая это уравнение, получим $2x-8y-13z+53=0$. Таким образом, искомая проекция определяется уравнениями:

$$x-3y+2z-7=0; \quad 2x-8y-13z+53=0.$$

Пример 14. Исследовать взаимное расположение двух прямых в каждом из следующих случаев:

$$1)\ x=1-2t,\ y=2+5t,\ z=-3+4t \ \text{ и}$$

$$x=-4+3t,\ y=2-t,\ z=5-2t;$$

$$2)\ x=2+t,\ y=-3-2t,\ z=4-2t \ \text{ и}$$

$$x=7+5t,\ y=8-10t,\ z=9-10t;$$

$$3)\ x=6+2t,\ y=5-t,\ z=3+2t \ \text{ и}$$

$$x=10+4t,\ y=3-2t,\ z=7+4t;$$

$$4)\ x=1+2t,\ y=7+t,\ z=3+4t \ \text{ и}$$

$$x=6+3t,\ y=-1-2t,\ z=-2+t.$$

Если прямые пересекаются, найти их точку пересечения.

Р е ш е н и е .

1) Определитель (4.47) в данном случае принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -4-1 & 2-2 & 5-(-3) \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 13 & -6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = -74.$$

Так как $\Delta \neq 0,$ то прямые скрещиваются.

2) Определитель (4.47) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & -10 & -10 \\ 7-2 & 8+3 & 9-4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 5 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Delta = 0$ и только первые две строки пропорциональны, то прямые параллельны.

3) Так как в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 10-6 & 3-5 & 7-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

все строки пропорциональны, то прямые совпадают.

4) Так как определитель равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6-1 & -1-7 & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 9 \\ 21 & -8 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 21 & 27 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

и первые две его строки не пропорциональны, то прямые пересекаются.

Найдем общую точку этих прямых. Уравнение второй прямой запишем в виде:

$$x = 6 + 3s;\ \ y = -1 - 2s;\ \ z = -2 + s,$$

где s – параметр. Приравнивая соответствующие координаты, получим систему уравнений

$$1 + 2t = 6 + 3s,\ \ 7 + t = -1 - 2s,\ \ 3 + 4t = -2 + s.$$

Исключая t из первых двух уравнений, получим $7s = -21$, откуда $s = -3$. Из первого уравнения находим $t = -2$. (Третье уравнение системы при найденных значениях t и s обращается в тождество.) Подставляя значение t в уравнения первой прямой или значение s в уравнения второй прямой, получим точку пересечения $N\,(-3, 5, -5)$.

З а м е ч а н и е . Одни и те же координаты точки пересечения двух прямых получаются, как правило, при различных значениях параметра, входящего в их уравнения. При отыскании общей точки пересекающихся прямых целесообразно обозначить параметры в их уравнениях различными буквами.

Задачи

7. Составить параметрические уравнения прямых:

1) $\left.\begin{aligned} x + y - 6z - 4 = 0; \\ 3x - y - 5z - 8 = 0; \end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z - 7 = 0; \\ 4x + 5y - 6z - 10 = 0. \end{aligned}\right\}$

8. Привести уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z - 10 = 0; \\ 2x - y - z - 6 = 0 \end{aligned}\right\}$$

к уравнениям в проекциях на координатные плоскости Oxy, Oyz.

9. Составить уравнения проекции прямой

$$x = x_0 + lt,\ \ y = y_0 + mt,\ \ z = z_0 + nt$$

на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

10. Написать уравнения проекции прямой

$$x = 2 + 4t,\ \ y = 1 - t,\ \ z = 3 - 2t$$

на плоскость $3x - y + 2z - 7 = 0$.

11. Составить уравнения: 1) оси Oy; 2) оси Oz.

12. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых в пространстве; если прямые параллельны, написать уравнение плоскости, проходящей через них; если прямые пересекаются, найти их общую точку и написать уравнение содержащей их плоскости:

1) $x = 9t,\ y = 5t,\ z = -3 + t$ и $x = 27 - 9t,\ y = 15 - 5t,\ z = -t$;

2) $x = t,\ y = 8 - 4t,\ z = -3 - 3t$ и $x + y - z = 0,\ 2x - y + 2z = 0$;

3) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y = 0; \\ z - 4 = 0 \end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} x + z - 8 = 0; \\ 2y + 3z - 7 = 0; \end{aligned}\right\}$

4) $\left.\begin{aligned} x + z - 1 = 0; \\ x - 2y + 3 = 0 \end{aligned}\right\}$ и $\left.\begin{aligned} 3x + y - z + 13 = 0; \\ y + 2z - 8 = 0. \end{aligned}\right\}$

Ответы

7. 1) $x = 3 + 11t, \quad y = 1 + 13t, \quad z = 4t$; 2) $x = -9t, \quad y = 8, \quad z = 5 + 14t$.

8. $y = x - 4, \quad y = z - 2$. **9.** $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0, \quad Ax + By + Cz + D = 0$. **10.** $4x + 14y + z - 25 = 0, \quad 3x - y + 2z - 7 = 0$. **11.** 1) $x = 0, \quad z = 0$; 2) $x = 0, \quad y = 0$. **12.** 1) совпадают; 2) параллельны и лежат в плоскости $12x - 3y + 8z = 0$; 3) скрещиваются; 4) пересекаются в точке $N(-3, 0, 4)$ и лежат в плоскости $3x + 4y + 5z - 11 = 0$.

4.2.3. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Углом между прямой и координатной осью называется угол между направляющим вектором прямой и ортом оси.

Углом между двумя прямыми называется угол между направляющими векторами этих прямых.

Косинус угла между двумя прямыми

$$x = x_1 + l_1 t,\ y = y_1 + m_1 t,\ z = z_1 + n_1 t; \tag{4.50}$$

$$x = x_2 + l_2 t,\ y = y_2 + m_2 t,\ z = z_2 + n_2 t; \tag{4.51}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{4.52}$$

Условие перпендикулярности прямых (4.50) и (4.51):

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{4.53}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой (4.50) вычисляется по формуле

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^{\,2} + m_1^{\,2} + n_1^{\,2}}} \tag{4.54}$$

или в векторной форме

$$d = \frac{\sqrt{[\,(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)\,\bar{a}\,]^2}}{\sqrt{\bar{a}^2}}, \tag{4.55}$$

где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_0$ – радиус-векторы точек M_1 и M_0; $\bar{a}$ – направляющий вектор (рис. 4.7).

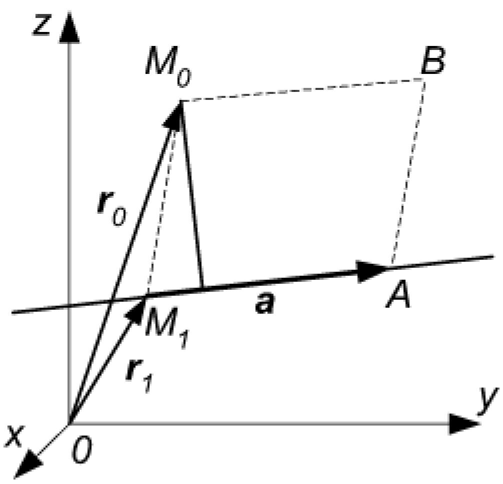


Рис. 4.7

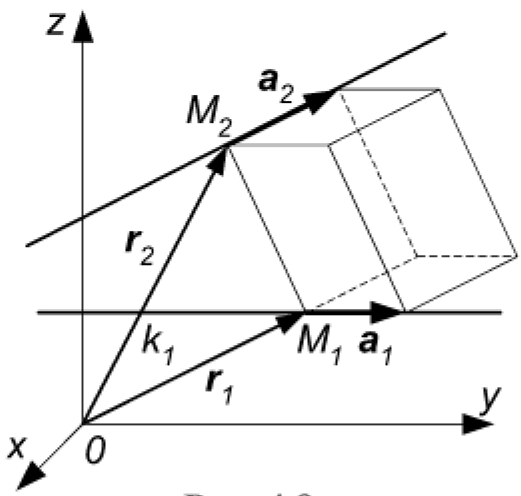


Рис. 4.8

Кратчайшее расстояние между прямыми (рис. 4.8)

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t,\ \ \bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2 t$$

определяется формулой

$$d = \frac{\left|\, (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\,\bar{a}_1\,\bar{a}_2 \,\right|}{\left|\,[\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,]\,\right|} \tag{4.56}$$

или в координатной форме

$$d = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}. \qquad (4.57)$$

где знак плюс берется в случае, когда определитель третьего порядка положителен и знак минус – в противном случае.

П р и м е р 15. Найти углы между координатными осями и прямой, проходящей через две точки $M_1(3, -4, \sqrt{2})$, $M_2(4, -5, 2\sqrt{2})$.

Р е ш е н и е. В качестве направляющего вектора можно взять вектор

$$\overline{a} = \overline{M_1 M_2} = \{4 - 3, -5 - (-4), 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\} =$$

$$= \{1, -1, \sqrt{2}\}.$$

Направляющие косинусы этого вектора определяются формулами (3.20) – (3.22):

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2},\ \cos\beta = -\frac{1}{2},\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, прямая образует с координатными осями углы

$$\alpha = 60^\circ;\ \beta = 120^\circ;\ \gamma = 45^\circ.$$

З а м е ч а н и е. В качестве направляющего вектора можно взять и вектор $\overline{M_2 M_1} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$, тогда получим углы $\alpha_1 = 120^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 135^\circ$, дополняющие углы α, β, γ до 180°.

П р и м е р 16. Определить направляющие косинусы прямой

$$x = 4 + 2t,\ y = -3 - t,\ z = 5 - 2t.$$

Р е ш е н и е. Направляющий вектор прямой есть вектор $\overline{a} = \{2, -1, -2\}$. По формулам (3.20) – (3.22) получаем направляющие косинусы прямой:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3};\ \cos\beta = -\frac{1}{3};\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Пример 17. Найти угол между двумя прямыми:

$$\frac{x-5}{7}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-6}{-8};\ \frac{x-2}{11}=\frac{y-4}{-8}=\frac{z+1}{-7}.$$

Решение. Первая прямая имеет направляющий вектор $\overline{a}_1=\{7,2,-8\}$, а вторая $\overline{a}_2=\{11,-8,-7\}$. В соответствии с формулой (4.52) получаем

$$\cos\varphi=\frac{7\cdot 11+2\,(-8)+(-8)\,(-7)}{\sqrt{49+4+64}\,\sqrt{121+64+49}}=\frac{117}{\sqrt{117}\,\sqrt{234}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi=45^{\circ}$.

Пример 18. Составить уравнение прямой, проведенной через точку $M_0(2,-3,5)$ перпендикулярно двум данным прямым:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{2};\ \frac{z-2}{6}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+7}{-2}.$$

Решение. Уравнение прямой ищем в виде

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+3}{m}=\frac{z-5}{n}.$$

Коэффициенты l, m, n, определяемые с точностью до постоянного множителя, в силу условия (4.53) должны удовлетворять системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(-1)\,l+2m+2n=0;\\ 6l+3m-2n=0.\end{aligned}\right\}$$

Складывая и вычитая почленно эти уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned}5l+5m=0;\\ 3l-2n=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда $l=-m, l=\dfrac{2}{3}n$. Полагая, например, $n=3$, получим $l=2,\ m=-2$.

Следовательно, уравнение прямой принимает вид

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}.$$

П р и м е р 19. Найти расстояние от точки $M_0(1,-2,3)$ до прямой $x=9-2t,\ \ y=4-4t,\ \ z=7+4t$.

Р е ш е н и е. Пользуемся формулой (4.54). Так как $x_0=1,\ \ y_0=-2,$ $z_0=3,\ \ x_1=9,\ \ y_1=4,\ \ z_1=7,\ \ l_1=-2,\ \ m_1=-4,\ \ n_1=4,$ то

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}4-(-2) & 7-3\\ -4 & 4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}9-1 & 7-3\\ -2 & 4\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}9-1 & 4-(-2)\\ -2 & -4\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{40^2+40^2+(-20)^2}}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{\sqrt{3600}}{\sqrt{36}}=10.$$

Итак, расстояние равно 10.

П р и м е р 20. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми

$$x=3+2t,\ \ y=7-2t,\ \ z=1+3t;$$

$$x=5+4t,\ \ y=8,\ \ z=2-6t.$$

Р е ш е н и е. Прежде всего можно убедиться, что прямые являются скрещивающимися. В самом деле, определитель (4.47) отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix}5-3 & 8-7 & 2-1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 6 & 0 & 5\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=56.$$

Так как определитель положителен, то по формуле (4.57) нужно взять знак плюс. Подставляя соответствующие значения в эту формулу, получим

$$d=\frac{\begin{vmatrix}5-3 & 8-7 & 2-1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}^2}}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}}{\sqrt{12^2+(-24)^2+8^2}}=$$

$$= \frac{56}{28} = 2.$$

Задачи

13. Найти направляющие косинусы прямых

1) $\frac{x-5}{6} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{3}$; 2) $\left.\begin{array}{l} 2x-2z+3=0; \\ 10x-12y+4z-5=0. \end{array}\right\}$

14. Определить углы между осями координат и каждой из следующих прямых:

1) $\frac{x-4}{\sqrt{2}} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-7}{-1}$; 2) $\left.\begin{array}{l} 3x-4y=0; \\ 5x-3z=0. \end{array}\right\}$

15. Найти угол между двумя прямыми в каждом из следующих случаев:

1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-10} = \frac{z-7}{1}$ и $\frac{x-4}{-11} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-6}{7}$;

2) $\left.\begin{array}{l} x+y-4=0; \\ \sqrt{2}y-z-1=0 \end{array}\right\}$ и $\left.\begin{array}{l} x-y=0; \\ \sqrt{2}y-z-\sqrt{2}=0. \end{array}\right\}$

16. Вычислить расстояние от точки $M_0(7,-2,3)$ до каждой из следующих прямых:

1) $x=3-t$, $y=-5-2t$, $z=1+2t$;

2) $x=6+10t$, $y=-3+11t$, $z=2+2t$.

17. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

1) $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $y-4=0$;

2) $x=3+t$, $y=1-t$, $z=2+2t$ и $x=-t$, $y=2+3t$, $z=3t$.

18. Найти расстояние между параллельными прямыми:

1) $x=5-4t$, $y=2+7t$, $z=1+4t$ и $x=8t$, $y=3-14t$, $z=4-8t$;

2) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

19. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

20. Составить уравнение прямой, проведенной через точку $M_0(4,7,-5)$ перпендикулярно двум данным прямым

$$x=3+2t,\ y=8-t,\ z=-1+4t \text{ и } x=1+3t,\ y=-5+t,\ z=6+t.$$

21. Составить уравнение общего перпендикуляра к двум непараллельным прямым

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t,\ \bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2 t.$$

Ответы

13. 1) $\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = -\frac{2}{7}$, $\cos\gamma = \frac{3}{7}$; 2) $\cos\alpha = \frac{6}{11}$, $\cos\beta = \frac{7}{11}$, $\cos\gamma = \frac{6}{11}$. **14.** 1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 118^\circ 41'$, $\beta = 68^\circ 54'$, $\gamma = 36^\circ 52'$. **15.** 1) $\varphi = 135^\circ$; 2) $\varphi = 60^\circ$. **16.** 1) $d = 5$; 2) $d = \frac{\sqrt{86}}{15}$. **17.** 1) $\frac{31}{13}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{110}}$. **18.** 1) $\frac{1}{3}\sqrt{146}$; 2) 3. **19.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **20.** $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+5}{1}$.
21. $(\bar{r} - \bar{r}_1)\,\bar{a}_1\bar{a} = 0$, $(\bar{r} - \bar{r}_2)\,\bar{a}_2\bar{a} = 0$, где $\bar{a} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$.

§ 4.3. Прямая и плоскость в пространстве

Угол между прямой

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt \tag{4.58}$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.59}$$

определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{4.60}$$

Координаты точки пересечения прямой (4.58) и плоскости (4.59) находится из системы уравнений (4.58) и (4.59).

Условие параллельности прямой (4.58) и плоскости (4.59):

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{4.61}$$

Условие, при котором прямая (4.58) лежит на плоскости (4.59):

$$Al + Bm + Cn = 0,\ \ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{4.62}$$

Условие перпендикулярности прямой (4.58) и плоскости (4.59):

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \text{ или } A=\lambda l,\ B=\lambda m,\ C=\lambda n,\ \lambda\neq 0. \qquad (4.63)$$

Пучком плоскостей называется совокупность плоскостей, проходящих через данную прямую.

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0;\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.64)$$

имеет вид

$$\alpha\,(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (4.65)$$

где α и β принимают всевозможные действительные значения $(\alpha^2+\beta^2\neq 0)$.

Уравнение (4.65) можно записать так:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (4.65')$$

где $\lambda=\dfrac{\beta}{\alpha},\ \alpha\neq 0.$

Пример 1. Найти угол между прямой $x=5+t,\ y=-3+t,\ z=4-2t$ и плоскостью $4x-2y-2z+7=0.$

Решение. Применяем формулу (4.60). Так как l=1, m=1, $n=-2$, $A=4,\ B=-2,\ C=-2,$ то

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot 1+(-2)\,1+(-2)\,(-2)|}{\sqrt{1+1+4}\,\sqrt{16+4+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}\,\sqrt{24}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi=30^\circ$.

Пример 2. Найти точку пересечения плоскости $3x-4y+5z+16=0$ и прямой $x=-6+2t,\ y=7-t,\ z=8-3t.$

Решение. Решим совместно систему уравнений прямой и плоскости. Подставим выражение для x, y, z в уравнение плоскости

$$3\,(-6+2t)-4\,(7-t)+5\,(8-3t)+16=0.$$

После упрощения получим

$$-5t+10=0,$$

откуда $t=2$. Из уравнения прямой при $t=2$ находим координаты точки пересечения $x=-2,\ y=5,\ z=2.$

Таким образом, искомой точкой пересечения является точка $N\,(-2, 5, 2)$.

Пример 3. Найти проекцию точки $P\,(3, 2, -1)$ на плоскость

$$x-5y+4z-31=0.$$

Решение. Задача сводится к отысканию основания перпендикуляра, опущенного из точки P на данную плоскость. Напишем уравнение этого перпендикуляра (см. § 4.2, пример 3):

$$x=3+t,\ y=2-5t,\ z=-1+4t.$$

Находим точку пересечения перпендикуляра и данной плоскости:

$$(3+t)-5\,(2-5t)+4\,(-1+4t)-31=0,\ 42t-42=0,\ t=1.$$

Следовательно, проекцией точки P на плоскость является точка $Q\,(4, -3, 3)$.

Пример 4. Найти проекцию точки $P\,(5, -6, 7)$ на прямую $x=7-2t,\ \ y=1+3t,\ \ z=4+t.$

Решение. Искомая проекция является точкой пересечения данной прямой и плоскости, проведенной через точку P перпендикулярно этой прямой. Составим уравнение указанной плоскости (см. § 4.1, пример 1):

$$-2\,(x-5)+3\,(y+6)+(z-7)=0 \text{ или } 2x-3y-z-21=0.$$

Находим точку пересечения данной прямой и полученной плоскости:

$$2\,(7-2t)-3\,(1+3t)-(4+t)-21=0,\ -14t-14=0,$$

$$t=-1.$$

Итак, точка $Q\,(9, -2, 3)$ является проекцией точки P на данную плоскость.

Пример 5. Найти точку, симметричную точке $P\,(2, 7, 1)$ относительно плоскости $x-4y+z+7=0.$

Решение. Искомая точка Q является вторым концом отрезка PQ, для которого серединой будет точка R – проекция точки P на данную плоскость. Найдем точку R. Уравнение перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку P, имеет вид

$$x = 2 + t,\ y = 7 - 4t,\ z = 1 + t.$$

Решим совместно систему уравнений перпендикуляра и данной плоскости

$$(2 + t) - 4\,(7 - 4t) + (1 + t) + 7 = 0 \text{ или } 18t - 18 = 0,\ t = 1.$$

Следовательно, $R\,(3, 3, 2)$ – точка пересечения. По формулам (3.29), которые в данном случае целесообразно представить в виде

$$x_2 = 2x - x_1,\ y_2 = 2y - y_1,\ z_2 = 2z - z_1,$$

находим точку $Q\,(4, -1, 3)$.

Пример 6. При каком значении n прямая $x = 2 + 5t,\ y = -3 + 2t,\ z = 5 + nt$ параллельна плоскости $2x + 4y - 6z + 7 = 0$.

Решение. Обращаемся к условию (4.61) параллельности прямой и плоскости. Подставляя соответствующие значения в это уравнение, получим

$$2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (-6)\,n = 0 \text{ или } 18 - 6n = 0,$$

откуда $n = 3$.

Пример 7. При каких значениях B и D прямая

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{7}$$

лежит в плоскости $4x + By - 2z + D = 0$?

Решение. Подставляя в уравнения (4.62) соответствующие значения, получим систему уравнений

$$4 \cdot 5 + B\,(-3) + (-2)\,7 = 0,\ 4 \cdot 1 + B\,(-2) + (-2)\,4 + D = 0,$$

из которой определяем $B = 2$ и $D = 8$.

Пример 8. При каких значениях m и A прямая $x = 3 + 2t,\ y = -5 + mt,\ z = 1 + 6t$ перпендикулярна плоскости $Ax - 2y + 3z - 5 = 0$?

Решение. Условие (4.63) в данном случае примет вид

$$\frac{A}{2} = \frac{-2}{m} = \frac{3}{6},$$

т. е $\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{-2}{m}=\dfrac{1}{2}$, откуда $A=1$, $m=-4$.

Пример 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(4,-1,1)$ и прямую

$$\left.\begin{aligned}2x-3y+5z-7=0;\\4x+2y-6z-5=0.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Напишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую. В соответствии с уравнением (4.65′) получаем

$$(2x-3y+5z-7)+\lambda\,(4x+2y-6z-5)=0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки P, будем иметь

$$[2\cdot 4-3\,(-1)+5\cdot 1-7]+\lambda\,[4\cdot 4+2\,(-1)-6\cdot 1-5]=0,$$

$$9+3\lambda=0,\ \lambda=-3.$$

Из уравнения пучка при $\lambda=-3$ находим уравнение искомой плоскости

$$10x+9y-23z-8=0.$$

Задачи

1. Найти угол между прямой

$$x=8-2t,\ y=7-2t,\ z=9+4t$$

и плоскостью

$$6x-3y-3z+1=0.$$

2. Найти проекцию точки $P(1,2,-3)$ на плоскость $6x-y+3z-41=0$.

3. Найти точку, симметричную точке $P(2,-4,5)$ относительно прямой

$$x=1-3t,\ y=-3+t,\ z=3-4t.$$

4. Провести через точку пересечения плоскости $x+y+z-1=0$ с прямой $y=1$, $z+1=0$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную данной прямой.

5. При каком значении l прямая

$$\frac{x-3}{l}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-5}{6}$$

параллельна плоскости $2x-5y+3z-7=0$.

6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую

$$3x-y+2z+9=0,\ x+z-3=0 \text{ и:}$$

1) через точку $N\,(4,-2,-3)$;
2) параллельно оси Ox;
3) параллельно оси Oy;
4) параллельно оси Oz.

Ответы

1. $\varphi=30^\circ$. **2.** $Q\,(7,1,0)$. **3.** $Q\left(\frac{36}{13},-\frac{38}{13},\frac{61}{13}\right)$. **4.** $x+y+z-1=0$, $x-1=0$. **5.** $l=1$. **6.** 1) $23x-2y+21z-33=0$; 2) $y+z-18=0$; 3) $x+z-3=0$; 4) $x-y+15=0$.

Глава 5. Матрицы и их применение

§ 5.1. Матрицы, основные действия над ними

Матрицей называется система mn величин, расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов. Величины, из которых составлена матрица, называются её *элементами*. Элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером k (номера считаются сверху вниз) и столбца с номером l (номера считаются слева направо) обозначается через a_{kl}. Числа k, l называются *индексами* элемента.

Матрица обозначается одним из символов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \quad (5.1)$$

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица, имеющая n строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Определителем квадратной матрицы называется такой определитель, у которого элементы те же, что и у матрицы и стоят на тех же местах.

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ ее, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Симметрической матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу, т. е.

$$a_{kl} = a_{lk}. \quad (5.3)$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не находящиеся на главной диагонали, равны нулю.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой каждый элемент, находящийся на главной диагонали, равен единице.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Суммой матриц A и B, имеющих одинаковое число строк и одинаковое число столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

называется третья матрица C

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, т. е.

$$c_{kl} = a_{kl} + b_{kl} \quad (k = 1, 2, \ldots, m; l = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.6}$$

Сумма матриц A и B обозначается так:

$$C = A + B. \tag{5.7}$$

Аналогично определяется *разность* матриц A и B

$$C = A - B, \tag{5.8}$$

где

$$c_{kl} = a_{kl} - b_{kl}. \tag{5.9}$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица B, которая получается из матрицы A умножением всех ее элементов на λ:

$$b_{kl} = \lambda a_{kl}. \tag{5.10}$$

Обозначение:

$$B = \lambda A. \tag{5.11}$$

Матрицы A и B называются *равными*

$$A = B, \tag{5.12}$$

если они имеют одно и то же число строк и одно и то же число столбцов и если при этом каждый элемент a_{kl} матрицы A равен соответствующему элементу b_{kl} матрицы B.

Произведением AB *двух квадратных матриц* A *и* B одного порядка называется третья квадратная матрица C того же порядка, составленная по следующему правилу: элемент c_{kl}, стоящий в матрице C на пересечении k-й строки с l-м столбцом, есть сумма произведений элементов k-й сроки матрицы A на соответствующие элементы l-го столбца матрицы B:

$$c_{kl} = a_{k1}b_{1l} + a_{k2}b_{2l} + a_{k3}b_{3l} + \ldots + a_{kn}b_{nl}. \tag{5.13}$$

Определитель произведения AB квадратных матриц A и B равен произведению их определителей:

$$D_{AB} = D_A \cdot D_B. \tag{5.14}$$

Определение произведения можно распространить и на неквадратные матрицы, у которых число *столбцов* матрицы множимого A равно числу *строк* матрицы множителя B. При соблюдении этого условия множимое A может иметь любое число (m) строк, а матрица B – любое число (n) столбцов. Матрица $C = AB$ будет иметь m строк и n столбцов, ее элементы вычисляются по формуле (5.13).

Основные свойства действий над матрицами:

1. $A + B = B + A$;

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3. $\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

4. $(\lambda + \mu)\,A = \lambda A + \mu A$;

5. $A\,(BC) = (AB)\,C$;

6. $A\,(B + C) = AB + AC$.

Пример 1. Найти сумму матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -5 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обе матрицы имеют одинаковое число строк (три) и одинаковое число столбцов (три). Такие матрицы можно складывать. По формуле (5.6) получаем

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2+(-1) & -3+3 & 4+(-4) \\ 7+(-7) & 6+(-5) & -5+5 \\ -1+1 & 8+(-8) & 9+(-8) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма матриц оказалась единичной матрицей.

Пример 2. Даны три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $3A+4B-2C$.

Решение. По определению произведения матрицы на число, получаем:

$$3A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 9 & -12 & 15 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix},\ 4B=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 8 & 12 & 16 \\ 4 & -20 & 24 \end{pmatrix},$$

$$2C=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 2 & -6 & 4 \\ 16 & 12 & -14 \end{pmatrix}.$$

На основании формул (5.6) и (5.9) находим

$$3A+4B-2C=\begin{pmatrix} 3+4-6 & 0-4-8 & 6+0-10 \\ 9+8-2 & -12+12-(-6) & 15+16-4 \\ 6+4-16 & 3+(-20)-12 & -9+24-(-14) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -12 & -4 \\ 15 & 6 & 27 \\ -6 & -29 & 29 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти произведение AB двух квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обе матрицы являются квадратными матрицами второго порядка. Такие матрицы можно умножать. Применим формулу (5.13). Эта формула имеет следующий смысл: чтобы получить элемент матрицы произведения AB, стоящий на пересечении строки *k* и столбца *l*, нужно взять сумму произведений элементов строки *k* матрицы A на соответственные элементы столбца *l* матрицы B («скалярное произведение» строки *k* матрицы A на столбец *l* матрицы B).

В соответствии с формулой (5.13) элемент c_{11} получается как сумма произведений элементов первой строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B, элемент c_{21} - как сумма произведений элементов второй строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B:

$$c_{11}=1\cdot 3+2\cdot 7=17,\ c_{21}=5\cdot 3+(-6)\,7=-27.$$

Аналогично определяются элементы c_{12} и c_{22}:

$$c_{12}=1\,(-4)+2\cdot 8=12,\ c_{22}=(-4)\,5+(-6)\,8=-68.$$

Следовательно,

$$C=\begin{pmatrix} 17 & 12 \\ -27 & -68 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 4. Найти произведения AB и BA матриц

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. По формуле (5.13) получаем элементы c_{kl} матрицы AB:

$$c_{11}=5\cdot 4+3\cdot 4+(-7)\,2=18;\quad c_{21}=(-1)\,4+6\cdot 4+(-3)\,2=14;$$

$$c_{31}=2\cdot 4+(-4)\,4+1\cdot 2=-6;$$

$$c_{12}=5\,(-1)+3\,(-2)+(-7)\,0=-11;\ c_{22}=(-1)\,(-1)+$$

$$+6\,(-2)+(-3)\,0=-11;\ c_{32}=2\,(-1)+(-4)\,(-2)+1\cdot 0=6;$$

$$c_{13}=5\cdot 3+3\,(-6)+(-7)\,3=-24;\ c_{23}=(-1)\,3+6\,(-6)+$$

$$+(-3)\,3=-48;\ c_{33}=2\cdot 3+(-4)\,(-6)+1\cdot 3=33.$$

Итак,

$$AB=\begin{pmatrix} 18 & -11 & -24 \\ 14 & -11 & -48 \\ -6 & 6 & 33 \end{pmatrix}.$$

По той же формуле (5.13) находим элементы c_{kl} матрицы BA. Меняя местами матрицы A и B, умножая последовательно первую, вторую, третью строки матрицы B на первый столбец матрицы A, получим элементы первого столбца матрицы BA:

$$c'_{11}=4\cdot 5+(-1)\,(-1)+3\cdot 2=27;\ c'_{21}=4\cdot 5+(-2)\,(-1)+$$

$$+(-6)\,2=10;\ c'_{31}=2\cdot 5+0\,(-1)+3\cdot 2=16.$$

Аналогично вычисляются элементы второго столбца:

$$c'_{12}=4\cdot 3+(-1)\,6+3\,(-4)=-6;\ c'_{22}=4\cdot 3+(-2)\,6+$$

$$+(-6)(-4)=24;\ c'_{32}=2\cdot 3+0\cdot 6+3(-4)=-6$$

и элементы третьего столбца матрицы BA:

$$c'_{13}=4(-7)+(-1)(-3)+3\cdot 1=-22;\ c'_{23}=4(-7)+(-2)(-3)+$$

$$+(-6)1=-28;\ c'_{33}=2(-7)+0(-3)+3\cdot 1=-11.$$

Следовательно,

$$BA=\begin{pmatrix} 27 & -6 & -22 \\ 10 & 24 & -28 \\ 16 & -6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая матрицы AB и BA и пользуясь определением равенства матриц, заключаем, что $AB \neq BA$.

Замечание 1. Умножение матриц не подчиняется закону переместительности.

Замечание 2. Для проверки правильности результатов, полученных при умножении квадратных матриц, можно воспользоваться равенством (5.14).

Так как

$$D_A=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=11,\ D_B=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=12,$$

$$D_{AB}=\begin{vmatrix} 18 & -11 & -24 \\ 14 & -11 & -48 \\ -6 & 6 & 33 \end{vmatrix}=132,$$

то равенство (5.14) действительно выполняется.

Замечание 3. Из формулы (5.14) следует равенство

$$D_{BA}=D_A\cdot D_B.$$

В данном примере можно непосредственно убедиться, что $D_{BA}=132$, следовательно, указанное равенство выполняется.

Пример 5. Найти произведения AB и BA двух матриц

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, поэтому можно умножать матрицу A на матрицу B. По формуле (5.13) находим:

$$c_{11} = 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2\cdot 3 + (-1)\,4 = 4;$$

$$c_{21} = 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 2\cdot 4 = 15;$$

$$c_{12} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2\,(-2) + (-1)\,(-1) = -2;$$

$$c_{22} = 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\,(-2) + 2\,(-1) = 1.$$

Следовательно,

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A, поэтому можно умножать матрицу B на матрицу A:

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= -5; \\ 7x_1 - 4x_2 &= 26 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

записать в матричном виде.

Решение. Систему эту можно представить так:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 7x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 26 \end{pmatrix}. \qquad \text{(B)}$$

Действительно, согласно определению, равенство двух матриц имеет место в том и только в том случае, когда их соответственные элементы равны. Поэтому последнее равенство имеет тот же смысл, что и исходная система. Матрицу, стоящую в левой части равенства (B), можно представить в виде произведения AX двух матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ и } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (А) принимает вид

$$AX=B, \text{ где } B=\begin{pmatrix} -5 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Задачи

1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить матрицу $3A+2B$.

2. Найти произведения AB и BA двух квадратных матриц

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение AB двух матриц

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислить определитель матрицы произведения двух матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти произведение AB двух матриц

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно ли умножать матрицу B на матрицу A?

6. Записать в матричной форме систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 11; \\ 7x_1 - 6x_2 &= 9. \end{aligned}\right\}$$

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 \\ 18 & -4 & -5 \\ 19 & 28 & -9 \end{pmatrix}$. **2.** $AB = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 47 & -8 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 26 & -13 \\ 24 & -31 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $D_{AB} = 396$. **5.** $AB = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 10 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицу B на матрицу A умножать нельзя, так как число столбцов B не равно числу строк A.

6. $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$.

§ 5.2. Линейные преобразования на плоскости и в пространстве. Аффинные преобразования. Собственные векторы матрицы

Если каждой точке M плоскости (пространства) поставлена в соответствие определенная точка M' той же плоскости (пространства), то говорят, что задано *преобразование* плоскости (пространства).

Если плоскость (пространство) подвергнуть некоторому преобразованию A, потом преобразованию B, то в результате возникает новое преобразование, которое называется *произведением* преобразования A на преобразование B и обозначается символом BA.

Преобразование, которое каждой точке M ставит в соответствие точку M', совпадающую с M, называется *тождественным*.

Если произведение BA преобразования A на преобразование B является тождественным, то преобразование B называется *обратным* по отношению к A.

Преобразование плоскости, выражаемое формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}; \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

называется *линейным*.

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

составленная из коэффициентов при x и y, называется матрицей линейного преобразования (5.15), а ее определитель – определителем указанного преобразования.

Линейное преобразование плоскости (5.15) называется *аффинным*, если его определитель отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.17}$$

Аффинное преобразование плоскости вполне определяется заданием трех неколлинеарных точек, в которые должны перейти три данные неколлинеарные точки.

Линейное преобразование пространства определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}; \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}; \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Линейное преобразование (5.18) называется *аффинным* преобразованием пространства, если его определитель отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.19}$$

Аффинное преобразование пространства вполне определяется заданием четырех некомпланарных точек, в которые должны перейти четыре данные некомпланарные точки.

При аффинных преобразованиях плоскости:

1) прямые линии переходят в прямые;

2) параллельные прямые преобразуются в параллельные прямые;

3) сохраняется простое отношение трех точек;

4) линии второго порядка преобразуются в линии второго порядка (причем эллипс переходит в эллипс, гипербола – в гиперболу, парабола – в параболу);

5) сохраняется отношение ориентированных площадей соответст-

венных фигур, это отношение равно определителю преобразования (5.17).

При аффинных преобразованиях пространства:

1) прямые переходят в прямые, плоскости – в плоскости;

2) сохраняется параллельность прямых и плоскостей;

3) сохраняется простое отношение трех точек;

4) поверхности второго порядка преобразуются в поверхности второго порядка (причем сохраняется тип поверхности);

5) сохраняется отношение ориентированных объемов соответственных тел, это отношение равно определителю преобразования (5.19).

Ненулевой вектор $\overline{p}$ называется *собственным вектором* квадратной матрицы A, если линейное преобразование с матрицей A переводит вектор $\overline{p}$ в коллинеарный ему вектор $\overline{p}'$, т. е.

$$\overline{p}' = \lambda\overline{p}. \tag{5.20}$$

Число λ называется *собственным числом* (или «собственным значением») матрицы A, соответствующим собственному вектору $\overline{p}$.

Координаты l, m собственных векторов матрицы (5.16) находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda l &= a_{11}l + a_{12}m; \\ \lambda m &= a_{21}l + a_{22}m \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\, l + a_{12}m &= 0; \\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)\, m &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

где λ – корень характеристического уравнения для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.23}$$

Собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\, l + a_{12}m + a_{13}n = 0; \\ a_{21}l + (a_{22}-\lambda)\, m + a_{23}n = 0; \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33}-\lambda)\, n = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5.25)$$

где λ – корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.26)$$

Если матрица A – симметрическая, то все корни ее характеристического уравнения действительны.

Собственные векторы, соответствующие двум различным корням характеристического уравнения, взаимно перпендикулярны.

Для всякой симметрической матрицы (5.24) существует тройка взаимно перпендикулярных векторов.

Пример 1. Найти преобразование, переводящее точки $M_1(0,1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(1,1)$ в точки $M_1'(2,-1)$, $M_2'(1,4)$, $M_3'(5,6)$. В какую точку переходит при этом преобразовании точка $N(-1,2)$? Какая точка преобразуется в точку $L'(-2,-3)$?

Решение. Задача сводится к определению коэффициентов линейного преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}; \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Подставляя координаты соответственных точек M_1 и M_1' в эти уравнения, получим

$$2 = a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 + a_{13},\ -1 = a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 + a_{23}.$$

Подстановка координат точек M_2 и M_2' приводит к уравнениям

$$1 = a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13},\ 4 = a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}.$$

Подставляя координаты точек M_3 и M_3' в уравнения (А), находим

$$5 = a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 1 + a_{13},\ 6 = a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 1 + a_{23}.$$

Итак, для определения шести неизвестных коэффициентов получено шесть уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{12}+a_{13}=2;\ a_{22}+a_{23}=-1;\ a_{11}+a_{13}=1;\ a_{21}+a_{23}=4; \\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=5;\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=6. \end{array}\right\} \qquad (\text{B})$$

Решая эту систему (для чего можно, например, из первого и пятого уравнения вычесть третье, из шестого – второе и четвертое), получим

$$a_{11}=3,\ a_{12}=4,\ a_{13}=-2,\ a_{21}=7,\ a_{22}=2,\ a_{23}=-3.$$

Следовательно, формулы данного преобразования имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} x'=3x+4y-2; \\ y'=7x+2y-3. \end{array}\right\}$$

Это преобразование является аффинным, так как его определитель отличен от нуля.

Найдем, в какую точку переходит при данном преобразовании точка $N(-1, 2)$. Подставляя ее координаты в формулы преобразования, находим:

$$x'=3(-1)+4\cdot 2-2=3;\ y'=7(-1)+2\cdot 2-3=-6.$$

Итак, точка $N(-1, 2)$ переходит в точку $N'(3, -6)$.

Подставляя координаты точки L' в эти формулы, получим:

$$-2=3x+4y-2;\ -3=7x+2y-3;$$

$$3x+4y=0;\ 7x+2y=0,$$

откуда $x=0$, $y=0$. Следовательно, в точку $L'(-2, -3)$ переходит точка $L(0, 0)$.

Пример 2 Найти преобразование, обратное линейному преобразованию

$$\left.\begin{array}{l} x'=2x+3y-7; \\ y'=3x+5y-9. \end{array}\right\} \qquad (\text{A})$$

Решение. Это преобразование является аффинным, так как его определитель отличен от нуля. Если данное преобразование переводит точку $M(x, y)$ в точку $M'(x', y')$, то обратное ему преобразование переводит точку $M'(x', y')$ в точку $M(x, y)$. Чтобы решить задачу, нужно выразить x и y через x', y'. Так как определитель преобразования отличен от нуля, то система (А) разрешима относительно x и y. Решение можно найти с помощью определителей или способом исключения одного из неизвестных.

Умножая первое уравнение на 5, второе на -3, складывая почленно, получим $5x'-3y'=x-8$, откуда $x=5x'-3y'+8$.

Умножая первое уравнение на -3, второе на 2 и складывая почленно, получим $-3x'+2y'=y+3$, откуда $y=-3x'+2y'-3$.

Следовательно, обратное преобразование имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= 5x'-3y'+8;\\ y &= -3x'+2y'-3. \end{aligned}\right\}$$

Пример 3 Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2\\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение (5.23) в данном случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\lambda^2-13\lambda+36=0,$$

откуда

$$\lambda_1=4,\ \lambda_2=9.$$

Система уравнений (5.22) для определения координат собственных векторов при $\lambda_1=4$ запишется так:

$$\left.\begin{aligned} (5-4)\,l+2m&=0;\\ 2l+(8-4)\,m&=0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} l+2m&=0;\\ 2l+4m&=0. \end{aligned}\right\}$$

Второе уравнение является следствием первого. Из первого уравнения находим отношение координат собственного вектора $l:m=2:-1$. Получен собственный вектор $\overline{p}_1=\{2,-1\}$.

При $\lambda_2 = 9$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}(5-9)\,l+2m=0;\\ 2l+(8-9)\,m=0\end{array}\right\}\text{ или }\left.\begin{array}{l}-4l+2m=0;\\ 2l-m=0,\end{array}\right\}$$

откуда находим второй собственный вектор $\overline{p}_2 = \{1, 2\}$.

Как и следовало ожидать, $\overline{p}_1 \perp \overline{p}_2$, ибо $\overline{p}_1\overline{p}_2 = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = 0$.

З а м е ч а н и е . Зная один собственный вектор, мы тем самым знаем бесчисленное множество других, ибо всякий вектор, коллинеарный с собственным, сам является собственным и имеет то же самое собственное число. Например, при $\lambda_1 = 4$ собственными являются векторы $\overline{q}_1 = \{20, 10\}$, $\bar{l}_1 = \left\{ \dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \right\}$, $\bar{r}_1 = \{-2, 1\}$.

П р и м е р 4 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е . Характеристическое уравнение (5.26) в данном случае запишется так:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Применяя правило, определяемое формулой (2.2), находим $(1-\lambda)\,(5-\lambda)\,(1-\lambda)+3+3-9\,(5-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)=0$.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим кубическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0. \qquad \text{(A)}$$

Чтобы решить это уравнение, поступим следующим образом. Методом проб найдем один из корней уравнения λ_1, разделив потом левую часть уравнения на $\lambda - \lambda_1$ и приравняв к нулю результат, получим квадратное уравнение, Корень λ_1 ищем среди делителей свободного члена уравнения (A). Для уравнения третьей степени имеет место теорема Виета, в соответствии с которой произведение корней равно свободному члену. Нетрудно убедиться, что $\lambda_1 = 3$ есть корень уравнения (А). Так как

$$(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36) : (\lambda - 3) = \lambda^2 - 4\lambda - 12,$$

то для определения двух других корней получим квадратное уравнение $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$, откуда $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$.

Найдём собственный вектор $\overline{p}_1$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 3$. Система уравнений (5.25) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &(1-3)\,l + m + 3n = 0;\\ &l + (5-3)\,m + n = 0;\\ &3l + m + (1-3)\,n = 0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} -2l + m + 3n &= 0;\\ l + 2m + n &= 0;\\ 3l + m - 2n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Из последней системы находим

$$l : m : n = 1 : -1 : 1,\ \overline{p}_1 = \{1, -1, 1\}.$$

Аналогично определяем

$$\overline{p}_2 = \{1, 2, 1\},\ \overline{p}_3 = \{1, 0, -1\}.$$

Легко видеть, что

$$\overline{p}_1 \perp \overline{p}_2,\ \overline{p}_2 \perp \overline{p}_3,\ \overline{p}_1 \perp \overline{p}_3.$$

Пример 5 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0,$$

$$\text{т. е. } \lambda\,(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = 0,$$

имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$.

Система уравнений (5.25) при $\lambda_3 = 0$ запишется так:

$$\left.\begin{array}{l} 5l - 2m - n = 0; \\ -2l + 2m - 2n = 0; \\ -l - 2m + 5n = 0. \end{array}\right\}$$

Отсюда находим отношение координат собственного вектора

$$l : m : n = 1 : 2 : 1, \ \overline{p}_1 = \{1, 2, 1\}.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} (5-6)\, l - 2m - n = 0; \\ -2l + (2-6)\, m - 2n = 0; \\ -l - 2m + (5-6)\, n = 0 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{r} -l - 2m - n = 0; \\ -2l - 4m - 2n = 0; \\ -l - 2m - n = 0 \end{array}\right\}$$

сводится к одному уравнению $l + 2m + n = 0,$ поэтому отношение координат собственных векторов однозначно определить нельзя. Собственному значению $\lambda = 6$ соответствует бесчисленное множество *неколлинеарных* собственных векторов, перпендикулярных к вектору $\overline{p}_1 = \{1, 2, 1\}$. Из этих векторов можно произвольным образом выбрать два ортогональных вектора. Например, в качестве $\overline{p}_2$ возьмем вектор с координатами $l_2 = 1,\ m_2 = -1,\ n_2 = 1$ (они удовлетворяют уравнению $l + 2m + n = 0$). Тогда координаты собственного вектора $\overline{p}_3 = \{l_3, m_3, n_3\}$, ортогонального $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$, определятся уравнениями

$$l_3 + 2m_3 + n_3 = 0, \ l_3 \cdot 1 + m_3(-1) + n_3 \cdot 1 = 0,$$

откуда

$$l_3 = 1, \ m_3 = 0, \ n_3 = -1.$$

Итак, получено три взаимно перпендикулярных собственных вектора:

$$\overline{p}_1 = \{1, 2, 1\}, \ \overline{p}_2 = \{1, -1, 1\}, \ \overline{p}_3 = \{1, 0, -1\}.$$

Задачи

1. Найти преобразование, переводящее точки $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 0, 0)$, $M_3(0, 1, 0)$, $M_4(0, 0, 1)$ в точки $M_1'(6, -5, 2)$, $M_2'(8, -1, 3)$, $M_3'(4, -2, 5)$, $M_4'(1, -3, -5)$. В какую точку перейдет при этом точка $N\,(2, 3, 1)$? Какая точка преобразуется в точку $L'\,(1, 4, -1)$?

2. Найти преобразование, обратное данному преобразованию:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + 2y - 5; \\ y' &= 2x + 3y - 4. \end{aligned}\right\}$$

В задачах 3 – 9 определить собственные значения и собственные векторы матрицы:

3. $A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$. **4.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. **6.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **8.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. $x' = 2x - 2y - 5z + 6$, $y' = 4x + 3y + 2z - 5$, $z' = x + 3y - 7z + 2$; $N(-1, 14, 6)$, $L(1, 1, 1)$. **2.** $x = 2y' - 3x' - 7$, $y = 2x' - y' + 6$. **3.** $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 18$, $\overline{p}_1 = \{1, -1\}$, $\overline{p}_2 = \{1, 1\}$. **4.** $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$, $\overline{p}_1 = \{1, 3\}$, $\overline{p}_2 = \{3, -1\}$. **5.** Нет собственных значений. **6.** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$, $\overline{p}_1 = \{1, 1, -2\}$, $\overline{p}_2 = \{1, 1, 1\}$, $\overline{p}_3 = \{1, -1, 0\}$. **7.** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$, $\overline{p}_1 = \{1, 1, -1\}$, $\overline{p}_2 = \{1, -2, -1\}$, $\overline{p}_3 = \{1, 0, 1\}$. **8.** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, $\overline{p}_1 = \{1, 2, 2\}$, $\overline{p}_2 = \{2, 1, -2\}$, $\overline{p}_3 = \{2, -2, 1\}$. **9.** $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = -9$, $\overline{p}_1 = \{1, 2, 2\}$, $\overline{p}_2 = \{-2, 2, -1\}$, $\overline{p}_3 = \{2, 1, -2\}$.

§ 5.3. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение второго порядка относительно x и y

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{5.27}$$

с помощью преобразований прямоугольной системы координат

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\}(5.28) \text{ и } \left.\begin{aligned} X &= x' - x_0; \\ Y &= y' - y_0 \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

приводится к одному из канонических уравнений:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(эллипс)}; \tag{5.30}$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(гипербола)}; \tag{5.31}$$

$$Y^2 = 2pX \quad \text{(парабола)}; \tag{5.32}$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \quad \text{(две пересекающиеся прямые)}; \tag{5.33}$$

$$X^2 = a^2 \quad \text{(две параллельные прямые)}; \tag{5.34}$$

$$X^2 = 0 \quad \text{(две совпадающие прямые)}; \tag{5.35}$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1 \quad \text{(мнимый эллипс)}; \tag{5.36}$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0 \quad \text{(две мнимые пересекающиеся прямые)}; \tag{5.37}$$

$$X^2 = -a^2 \quad \text{(две мнимые параллельные прямые)}. \tag{5.38}$$

Если координатные оси новой системы $Ox'y'$ направить по двум взаимно перпендикулярным собственным векторам матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; a_{21} = a_{12}, \tag{5.39}$$

составленной из коэффициентов уравнения (5.27), то члены второго порядка

$$\Phi\,(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \tag{5.40}$$

преобразуются в члены второго порядка

$$\Phi'\,(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2, \tag{5.41}$$

где λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения этой матрицы.

Полученное уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \qquad (5.42)$$

с помощью преобразования параллельного переноса (5.29) приводится к каноническому виду, т. е. к одному из уравнений (5.30) – (5.38).

Пример 1. Определить вид, параметры и расположение линии по ее уравнению

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 - 72 = 0.$$

Решение. Выпишем коэффициенты уравнения: $a_{11} = 13$, $2a_{12} = 10$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 13$, $a_{33} = -72$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$ и составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 18$ и собственные векторы $\overline{p}_1 = \{1, -1\}$, $\overline{p}_2 = \{1, 1\}$. Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами (см. 3. 20):

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\alpha = -45°$. Повернем систему Oxy вокруг начала на угол $\alpha = -45°$ (т. е. направим ось Ox' по вектору $\overline{p}_1$, ось Oy' – по $\overline{p}_2$). В новой системе $Ox'y'$ уравнение линии в соответствии с формулой (5.41) принимает вид

$$8x'^2 + 18y'^2 = 72.$$

Разделив обе части уравнения на 72, получим

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 2$.

Пример 2. Определить вид, параметры и расположение линии

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Решение. Матрица A, составленная из коэффициентов при старших членах и ее характеристическое уравнение соответственно примут вид

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$.

Находим собственные векторы: $\overline{p}_1 = \{2, -1\},\ \overline{p}_2 = \{1, 2\}$. Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \qquad \text{(A)}$$

Повернем систему Oxy на данный угол α, т. е. совершим преобразование координат (5.28):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'; \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

В соответствии с формулой (5.41) члены второй степени преобразуются следующим образом:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 = 4x'^2 + 9y'^2.$$

Подставляя выражения для x и y из формулы (B) в оставшиеся члены уравнения, получим

$$-32x - 56y + 80 = -32\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 56\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = -\frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80.$$

Следовательно, исходное уравнение примет вид

$$4x'^2+9y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}x'-\frac{144}{\sqrt{5}}y'+80=0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$4\left(x'^2-2\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{5}\right)+9\left(y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}y'+\frac{64}{5}\right)-\frac{4}{5}-$$

$$-\frac{9\cdot 64}{5}+80=0,\ 4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=36. \qquad \text{(C)}$$

Совершим теперь преобразование параллельного переноса по формулам

$$\left.\begin{aligned} X&=x'-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ Y&=y'-\frac{8}{\sqrt{5}}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(D)}$$

Уравнение (C) перепишем в виде

$$4X^2+9Y^2=36 \text{ или } \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1. \qquad \text{(E)}$$

Следовательно, исходное уравнение является уравнением эллипса с полуосями $a=3,\ b=2$.

Вид кривой и ее параметры a и b определены. Чтобы выяснить расположение линии, найдем точку, в которой находится начало новой системы координат $O'XY$. Так как для точки O' (начало системы $O'XY$) $X=0,\ Y=0,$ то из формул (D) определим $x'=\frac{1}{\sqrt{5}},\ y'=\frac{8}{\sqrt{5}},$ а из формул (B) найдем $x=2,\ \ y=3.$ Итак, началом системы $O'XY$ служит точка $O'(2,3)$.

Построив в старой системе координат Oxy точку $O'(2,3),$ отложив от нее векторы $\overline{p}_1=\{2,-1\},\ \overline{p}_2=\{1,2\}$ и направив по ним координатные оси $O'X,\ O'Y,$ построим эллипс (E) в новой системе $O'XY$. Тем самым определено расположение эллипса относительно старой системы координат Oxy.

Пример 3. Определить вид, параметры и расположение линии

$$7x^2-24xy-38x+24y+175=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы A, составленной из коэффициентов при старших членах,

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 \\ -12 & 0-\lambda \end{vmatrix}=0$$

имеет корни $\lambda_1=-9$, $\lambda_2=16$. Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы $\overline{p}_1=\{3,4\}$, $\overline{p}_2=\{4,-3\}$. Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha=\frac{3}{5};\ \sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

Повернем систему координат Oxy на угол α. Формулы преобразования (5.28) запишутся так:

$$x=\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y';\ y=\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'. \tag{A}$$

Исходное уравнение линии примет вид

$$-9x'^2+16y'^2-38\left(\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'\right)+24\left(\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'\right)+175=0$$

или

$$-9x'^2+16y'^2-\frac{18}{5}x'+\frac{224}{5}y'+175=0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$-9\left(x'^2+\frac{2}{5}x'+\frac{1}{25}\right)+16\left(y'^2+\frac{14}{5}y'+\frac{49}{25}\right)+9\cdot\frac{1}{25}-$$

$$-16\cdot\frac{49}{25}+175=0$$

или

$$-9\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2+16\left(y'+\frac{7}{5}\right)^2+144=0. \tag{B}$$

После преобразования параллельного переноса

$$X=x'+\frac{1}{5},\ Y=y'+\frac{7}{5} \tag{C}$$

уравнение (B) запишется так

$$-9X^2+16Y^2+144=0 \text{ или } 9X^2-16Y^2-144=0,$$

откуда

$$\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1. \tag{D}$$

Уравнение (D) определяет гиперболу с полуосями $a=4$, $b=3$. Найдем точку, в которой находится начало системы $O'XY$. Так как для этой точки $X=0$, $Y=0$, то из формул (C) и (A) находим $x=1$, $y=-1$. Построив точку $O'\ (1,-1)$ относительно старой системы Oxy, отложив из этой точки векторы $\overline{p}_1=\{3,4\}$, $\overline{p}_2=\{4,-3\}$ и направив по ним координатные оси $O'X$, $O'Y$, построим гиперболу (D) в новой системе $O'XY$.

Пример 4. Определить вид, параметры и расположение линии

$$x^2+2xy+y^2-8x+4=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } (1-\lambda)^2-1=0$$

имеет корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$. Им соответствуют собственные векторы $\overline{p}_1=\{1,1\}$, $\overline{p}_2=\{-1,1\}$. Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{A}$$

Повернем систему Oxy на угол α, т. е. совершим преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\,y'; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y'. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

В новой системе $Ox'y'$ уравнение кривой примет вид

$$2x'^2 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\,y'\right) + 4 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$2\left(x'^2 - 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\,x' + 2\right) + \frac{8}{\sqrt{2}}\,y' - 4 + 4 = 0,$$

$$2\left(x' - \sqrt{2}\right)^2 = -\frac{8}{\sqrt{2}}\,y'.$$

С помощью преобразования параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} X &= x' - \sqrt{2}; \\ Y &= y' \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

последнее уравнение приводится к каноническому виду

$$X^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,Y. \qquad (D)$$

Уравнение (D) определяет параболу с параметром $p = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$ Из уравнений (C) и (B) находим точку $O'\,(1, 1)$ – начало новой системы координат $O'XY$. В этой точке находится вершина параболы.

Пример 5. Определить форму и расположение линии

$$x^2 + y^2 - 2xy - x + y - 2 = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы $\overline{p}_1 = \{1, -1\}$, $\overline{p}_2 = \{1, 1\}$. Вектор $\overline{p}_1$ образует с осью Ox угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Формулы преобразования координат при повороте осей на угол α запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Уравнение линии в новой системе координат примет вид

$$2x'^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) - 2 = 0,$$

$$2x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - 2 = 0, \ x'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x' - 1 = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$\left(x'^2 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}x' + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8} - 1 = 0, \ \left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{9}{8} = 0$$

или

$$X^2 = \frac{9}{8}, \qquad (B)$$

где

$$X = x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}. \qquad (C)$$

Уравнение (B) определяет пару прямых $X = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $X = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$, параллельных новой координатной оси $O'X$.

Напишем уравнения этих прямых в старой системе координат

Oxy. Из уравнений (A) находим

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y); \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y). \end{aligned}\right\} \tag{D}$$

Из формул (C) и (D) получаем

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-y-\frac{1}{2}\right). \tag{E}$$

Уравнение (B) приводится к виду

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-y-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{9}{8},\ \left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0,$$

$$\left[\left(x-y-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]\left[\left(x-y-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right] = 0,$$

$$(x-y-2)\,(x-y+1) = 0,$$

откуда получаем уравнения прямых:

$$x-y-2=0;\ \ x-y+1=0.$$

Замечание 1. Линия второго порядка, состоящая из двух прямых, называется *распадающейся*. Необходимое и достаточное условие распадения линии (5.27) выражается равенством $\Delta = 0$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание 2. Установив, что линия распадающаяся, уравнения составляющих ее прямых можно найти приведением многочлена к сумме квадратов по способу Лагранжа. Применим этот способ к данному уравнению. Выпишем все члены, содержащие x, дополним их до полного квадрата, прибавляя и вычитая соответствующие члены:

$$x^2+y^2-2xy-x+y-2=\left[x^2-2x\left(y+\frac{1}{2}\right)+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right]-$$

$$-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+y-2=\left[x-\left(y+\frac{1}{2}\right)\right]^2-y^2-y-\frac{1}{4}+y^2+y-2=$$

$$=\left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=\left(x-y-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x-y-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=0,$$

откуда $x-y-2=0,\ x-y+1=0.$

Пример 6. Доказать, что линия $2x^2-4y^2-2xy-x-4y-1=0$ распадается на пару пересекающихся прямых. Найти уравнения этих прямых с помощью способа Лагранжа.

Решение. Выпишем коэффициенты данного уравнения $a_{11}=2,\ a_{12}=-1,\ a_{22}=-4,\ a_{13}=-\frac{1}{2},\ a_{23}=-2,\ \ a_{33}=-1$ и составим определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta=0$ (вторая и третья строки пропорциональны), то данная линия распадается на пару прямых (см. замечание 1).

Найдем уравнения этих прямых с помощью способа Лагранжа:

$$2x^2-4y^2-2xy-x-4y-1=2\left[x^2-xy-\frac{1}{2}x\right]-4y^2-$$

$$-4y-1=2\left[x^2-2x\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)^2\right]-2\left(\frac{1}{2}y+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\right)^2-4y^2-4y-1=2\left[x-\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)\right]^2-2\left(\frac{1}{4}y^2+\right.$$

$$+\frac{1}{4}y+\frac{1}{16}\Bigg)-4y^2-4y-1=2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{2}y^2-$$

$$-\frac{9}{2}y-\frac{1}{8}-1=2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{2}\Bigg(y^2+2\cdot\frac{1}{2}y+$$

$$+\frac{1}{4}\Bigg)+\frac{9}{8}-\frac{1}{8}-1=2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0,$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)^2-9\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0,$$

$$\left[2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)-3\left(y+\frac{1}{2}\right)\right]\left[2\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\right)+3\left(y+\frac{1}{2}\right)\right]=0,$$

$$\left(2x-y-\frac{1}{2}-3y-\frac{3}{2}\right)\left(2x-y-\frac{1}{2}+3y+\frac{3}{2}\right)=0,$$

$$(2x-4y-2)\,(2x+2y+1)=0,$$

$$2x-4y-2=0,\ \ 2x+2y+1=0.$$

Итак, уравнения прямых имеют вид

$$x-2y-1=0,\ \ 2x+2y+1=0.$$

Пример 7. Доказать, что уравнение

$$x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=0$$

определяет пару совпадающих прямых. С помощью способа Лагранжа найти уравнения прямых.

Решение. Так как

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

то линия – распадающаяся.

Найдем уравнения прямых с помощью способа Лагранжа:

$$x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=[x^2+2x\,(2y-1)+(2y-1)^2\,]-$$

$$-(2y-1)^2+4y^2-4y+1=[x+(2y-1)\,]^2-(4y^2-4y+1)+$$

$$+4y^2-4y+1=(x+2y-1)^2=0.$$

Следовательно, прямые определяются уравнениями:

$$x+2y-1=0,\;\; x+2y-1=0.$$

Замечание. С помощью способа Лагранжа можно определить вид любой кривой второго порядка.

Пример 8. Пользуясь приведением многочлена второй степени к сумме квадратов по способу Лагранжа, определить вид кривой

$$4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0.$$

Решение. Преобразуя левую часть уравнения, получим

$$4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=4\,(x^2-xy-2x)+y^2+6y-2=$$

$$=4\left[x^2-2x\left(\frac{1}{2}y+1\right)+\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2\right]-4\left(\frac{1}{2}y+1\right)^2+y^2+6y-$$

$$-2=4\left[x-\left(\frac{1}{2}y+1\right)\right]^2-4\left(\frac{1}{4}y^2+y+1\right)+y^2+6y-$$

$$-2=4\left(x-\frac{1}{2}y-1\right)^2+2y-6=0,$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}y-1\right)^2=-2\,(y-3),$$

$$\left(x-\frac{1}{2}y-1\right)^2=-\frac{1}{2}\,(y-3). \qquad \text{(A)}$$

Вводя новые переменные по формулам

$$\left.\begin{aligned} X &= x - \frac{1}{2}y - 1; \\ Y &= y - 3, \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

уравнение (A) перепишем в виде

$$X^2 = -\frac{1}{2}Y. \tag{C}$$

Уравнение (C) является уравнением параболы. Формулы (B) определяют аффинное преобразование. При аффинном преобразовании парабола переходит в параболу. Следовательно, исходное уравнение также определяет параболу.

Задачи

Определить вид линии, пользуясь приведением многочлена второй степени к сумме квадратов по способу Лагранжа:

1. $x^2 + 5y^2 - 2xy + 2x + 14y + 13 = 0.$

2. $x^2 - 3y^2 - 2xy + 2x - 18y - 19 = 0.$

3. $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 8y + 7 = 0.$

4. $5x^2 + 5y^2 - 26xy - 10x + 26y + 5 = 0.$

5. $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0.$

6. $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 1 = 0.$

7. $5x^2 + 5y^2 - 26xy - 10x + 26y - 41 = 0.$

8. $x^2 + 5y^2 - 2xy + 2x + 14y + 17 = 0.$

9. $13x^2 + 13y^2 - 10xy - 26x + 10y + 49 = 0.$

10. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x + 2y + 5 = 0.$

Определить вид, параметры, расположение линий второго порядка и построить их:

11. $17x^2 + 17y^2 - 16xy = 250.$

12. $3x^2 + 3y^2 + 10xy = 8.$

13. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 120x - 90y = 0.$

14. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$

15. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$

16. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$

17. $x^2 - 2y^2 - xy + 3y - 1 = 0.$

18. $4x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0.$

Ответы

1. Эллипс. **2.** Гипербола. **3.** Парабола. **4.** Пара пересекающихся прямых. **5.** Пара параллельных прямых. **6.** Пара совпадающих прямых. **7.** Гипербола. **8.** Пара мнимых пересекающихся прямых. **9.** Мнимый эллипс. **10.** Пара мнимых параллельных прямых. **11.** Эллипс $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$, $O'\,(0, 0)$, $\operatorname{tg}\alpha = 1.$ **12.** Гипербола $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$, $O'\,(0, 0)$, $\operatorname{tg}\alpha = 1.$ **13.** Парабола; $p = 3$, $O'\,(0, 0)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. **14.** Эллипс $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{4} = 1$, $O'\,(1, 1)$, $\operatorname{tg}\alpha = -1.$ **15.** Гипербола $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$, $O'\,(1, 1)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. **16.** Парабола; $p = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $O'\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\alpha = 2.$ **17.** Пара прямых $x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0.$ **18.** Пара совпадающих прямых $2x - y + 1 = 0.$

§ 5.4. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение второго порядка относительно x, y, z

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y +$$

$$+2a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{5.43}$$

с помощью преобразований прямоугольной декартовой системы координат (4. 97) и (4. 99) можно привести к каноническому виду, т. е. к одному из уравнений (4. 76) – (4. 92).

Если новые координатные оси Ox', Oy', Oz' направить по трем взаимно перпендикулярным собственным векторам симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{5.44}$$

составленной из соответствующих коэффициентов уравнения (5.43), то члены второго порядка

$$\Phi\,(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad (5.45)$$

преобразуются в члены второго порядка

$$\Phi'\,(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \qquad (5.46)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – корни характеристического уравнения данной матрицы.

Уравнение (5.43) преобразуется при этом в уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0, \quad (5.47)$$

коэффициенты a'_{14}, a'_{24}, a'_{34} которого определяются с помощью формул (4. 99).

Уравнение (5.47) с помощью преобразования параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} X &= x' - a; \\ Y &= y' - b; \\ Z &= z' - c \end{aligned}\right\} \qquad (5.48)$$

приводится к каноническому виду.

Пример 1. Определить вид, параметры и расположение поверхности по её уравнению

$$5x^2 + 11y^2 + 2z^2 - 16xy + 20xz + 4yz = 18.$$

Решение. Данное уравнение не содержит членов с первой степенью x, y, z, поэтому для его упрощения достаточно найти собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A, составленной из коэффициентов при членах второго порядка: $a_{11} = 5$, $a_{22} = 11$, $a_{33} = 2$, $a_{12} = -8$, $a_{13} = 10$, $a_{23} = 2$.

Матрица A и ее характеристическое уравнение примут вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 & 10 \\ -8 & 11-\lambda & 2 \\ 10 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(при составлении матрицы принято во внимание, что $a_{21} = a_{12}$,

$a_{31}=a_{13}$, $a_{32}=a_{23}$). Характеристическое уравнение $\lambda^3-18\lambda^2-$ $-81\lambda+18\cdot 81=0$ имеет корни $\lambda_1=18$, $\lambda_2=9$, $\lambda_3=-9$. Найдем собственные векторы, соответствующие данным собственным значениям. При $\lambda_1=18$ система (5.25) запишется так:

$$\left.\begin{aligned}&(5-18)\,l-8m+10n=0;\\ &-8l+(11-18)\,m+2n=0;\\ &10l+2m+(2-18)\,n=0\end{aligned}\right\}\ \text{или}\ \left.\begin{aligned}-13l-8m+10n&=0;\\ -8l-7m+2n&=0;\\ 10l+2m-16n&=0.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим $\overline{p}_1=\{-2,2,-1\}$. Аналогично получаем собственные векторы $\overline{p}_2=\{1,2,2\}$, $\overline{p}_3=\{2,1,-2\}$.

Перейдем к новой системе координат $Ox'y'z'$ с началом в той же точке, оси которой Ox', Oy', Oz' направлены соответственно по векторам $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$. В соответствии с формулами (5.45) и (5.46) все члены второго порядка исходного уравнения преобразуются в члены второго порядка $18x'^2+9y'^2-9z'^2$, а уравнение (5.47) примет вид $18x'^2+9y'^2-9z'^2=18$.

Разделив обе части этого уравнения на 18, получим

$$x'^2+\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{2}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (4. 77), заключаем, что данная поверхность является однополостным гиперболоидом с параметрами $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}$.

Пример 2. Определить вид, параметры и расположение поверхности

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0.$$

Решение. Матрица A, составленная из коэффициентов при старших членах уравнения $a_{11}=7$, $a_{22}=6$, $a_{33}=5$, $a_{12}=-2$, $a_{13}=0$, $a_{23}=-2$, и ее характеристическое уравнение запишутся так:

$$A=\begin{pmatrix}7&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&5\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}7-\lambda&-2&0\\-2&6-\lambda&-2\\0&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9.$ Им соответствуют собственные векторы матрицы $\overline{p}_1 = \{1, 2, 2\},\ \overline{p}_2 = \{2, 1, -2\},\ \overline{p}_3 = \{2, -2, 1\}$.

Перейдем к новой системе координат $Ox'y'z'$, оси которой направлены по векторам $\overline{p}_1,\ \overline{p}_2,\ \overline{p}_3$, а начало остается прежним. Формулы преобразования координат (4. 99) примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z'; \\ y &= \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'; \\ z &= \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z'); \\ y &= \frac{1}{3}(2x' + y' - 2z'); \\ z &= \frac{1}{3}(2x' - 2y' + z') \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

(так как $\cos\alpha_1 = \dfrac{1}{3},\ \cos\beta_1 = \dfrac{2}{3},\ \cos\gamma_1 = \dfrac{2}{3}$ – направляющие косинусы вектора $\overline{p}_1$; $\cos\alpha_2 = \dfrac{2}{3},\ \cos\beta_2 = \dfrac{1}{3},\ \cos\gamma_2 = -\dfrac{2}{3}$ – направляющие косинусы $\overline{p}_2$; $\cos\alpha_3 = \dfrac{2}{3},\ \cos\beta_3 = -\dfrac{2}{3},\ \cos\gamma_3 = \dfrac{1}{3}$ – направляющие косинусы вектора $\overline{p}_3$). Исходное уравнение с учетом значений $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ и формул (A) запишется в виде

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 6\cdot\frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z') - 24\cdot\frac{1}{3}(2x' + y' - 2z') +$$

$$+ 18\cdot\frac{1}{3}(2x' - 2y' + z') + 30 = 0$$

или

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 6x' - 24y' + 18z' + 30 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$3(x'^2 - 2x' + 1) + 6(y'^2 - 4y' + 4) + 9(z'^2 + 2z' + 1) - 3 - 24 - 9 + 30 = 0$$

или

$$3\,(x'-1)^2+6\,(y'-2)^2+9\,(z'+1)^2-6=0. \qquad \text{(B)}$$

Применяя еще одно преобразование координат, а именно, преобразование параллельного переноса

$$\left.\begin{aligned} X&=x'-1;\\ Y&=y'-2;\\ Z&=z'+1, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$

уравнение (B) приведём к виду

$$3X^2+6Y^2+9Z^2=6 \text{ или } \frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{1}+\frac{Z^2}{\frac{2}{3}}=1. \qquad \text{(D)}$$

Уравнение (D) определяет эллипсоид с параметрами

$$a=\sqrt{2},\ b=1,\ c=\sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

Чтобы определить расположение эллипсоида относительно старой системы координат, необходимо найти точку O' – начало системы $O'XYZ$. Новые координаты этой точки равны нулю, т.е. $X=0,\ Y=0,\ Z=0.$ Из формул (C) и (A) находим координаты этой точки в старой системе: $x=1,\ y=2,\ z=-1.$

Пример 3. Определить каноническое уравнение и расположение поверхности

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0.$$

Решение. Составим матрицу A и ее характеристическое уравнение

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1\\ 2 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0 \text{ или } \lambda\,(\lambda^2-7\lambda+10)=0,$$

имеет корни $\lambda_1=2,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=0,$ которым соответствуют собственные векторы $\overline{p}_1 = \{1, 1, -2\}$, $\overline{p}_2 = \{1, 1, 1\}$, $\overline{p}_3 = \{1, -1, 0\}$. Введем новую систему координат $Ox'y'z'$, направив оси Ox', Oy', Oz' по векторам $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$.

Формулы преобразования координат при повороте осей примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'; \\ z &= -\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Уравнение поверхности с учетом значений λ_1, λ_2, λ_3 и формул (A) преобразуется следующим образом:

$$2x'^2 + 5y'^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 2\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y'\right) + 3 = 0,$$

$$2x'^2 + 5y'^2 + \frac{6}{\sqrt{6}}x' - \frac{10}{\sqrt{2}}z' + 3 = 0. \qquad \text{(B)}$$

Уравнение (B) приведем к каноническому виду:

$$2\left(x'^2 + \frac{3}{\sqrt{6}}x' + \frac{9}{24}\right) + 5y'^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}z' - \frac{9}{12} + 3 = 0,$$

$$2\left(x' + \frac{3}{2\sqrt{6}}\right)^2 + 5y'^2 = \frac{10}{\sqrt{2}}\left(z' - \frac{9\sqrt{2}}{4\cdot 10}\right),$$

$$2X^2 + 5Y^2 = \frac{10}{\sqrt{2}}Z \text{ или } \frac{X^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2Z, \qquad \text{(C)}$$

где $$X = x' + \frac{3}{2\sqrt{6}},\ Y = y',\ Z = z' - \frac{9\sqrt{2}}{40}. \qquad \text{(D)}$$

Уравнение (C) определяет эллиптический параболоид, для которого $a^2 = \frac{5}{2\sqrt{2}}$, $b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Началом новой системы $O'XYZ$ является точка $O'\left(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2}\right)$, ее координаты определяются из равенств $X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$ и из формул (D), (A). В этой точке находится вершина эллиптического параболоида.

Пример 4. Определить каноническое уравнение и расположение поверхности

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4xz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$$

Решение. Составим матрицу A и ее характеристическое уравнение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 0,$ которым соответствуют собственные векторы

$$\overline{p}_1 = \{1, 1, -1\},\ \overline{p}_2 = \{1, -2, -1\},\ \overline{p}_3 = \{1, 0, 1\}.$$

Оси новой системы $Ox'y'z'$ направим по векторам $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$. Формулы преобразования координат при повороте осей примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y'; \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Уравнение поверхности с учетом значений λ_1, λ_2, λ_3 и формул (A) преобразуется следующим образом:

$$3x'^2 + 6y'^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 10\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x' -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sqrt{6}}y'\right) - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 1 = 0$$

$$\text{или } 3x'^2 + 6y'^2 - \frac{6}{\sqrt{3}}x' + \frac{24}{\sqrt{6}}y' - 1 = 0. \qquad \text{(B)}$$

Уравнение (B) приводим к каноническому виду:

$$3\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{3}\right) + 6\left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}y' + \frac{4}{6}\right) - 1 - 4 - 1 = 0,$$

$$3\left(x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 6,$$

$$3X^2 + 6Y^2 = 6 \text{ или } \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} = 1, \qquad \text{(C)}$$

где $X = x' - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $Y = y' + \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Следовательно, данное уравнение определяет эллиптический цилиндр с параметрами $a = \sqrt{2}$, $b = 1$. Ось цилиндра коллинеарна вектору $\overline{p}_3 = \{1, 0, 1\}$.

Пример 5. Определить вид поверхности

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - x + 2y - 3z - 6 = 0.$$

Решение. Составим матрицу A и ее характеристическое уравнение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & 4-\lambda & -6 \\ 3 & -6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 14\lambda^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Корню $\lambda_1 = 14$ соответствует собственный вектор $\overline{p}_1 = \{1, -2, 3\}$. Двойному корню $\lambda = 0$ соответствует бесчисленное множество собственных неколлинеарных векторов, ортогональных вектору $\overline{p}_1$. Среди них выберем два взаимно перпендикулярных, например, $\overline{p}_2 = \{1, -1, -1\}$, $\overline{p}_3 = \{5, 4, 1\}$. Перейдем к новой системе координат $Ox'y'z'$, оси которой коллинеарны векторам $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$.

Формулы преобразования при повороте осей примут вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{14}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{5}{\sqrt{42}}\,z'; \\ y &= -\frac{2}{\sqrt{14}}\,x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{4}{\sqrt{42}}\,z'; \\ z &= \frac{3}{\sqrt{14}}\,x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{42}}\,z'. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Уравнение поверхности с учетом значений λ_1, λ_2, λ_3 и формул (A) преобразуется следующим образом:

$$14x'^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{5}{\sqrt{42}}\,z'\right) + 2\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\,x' -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{4}{\sqrt{42}}\,z'\right) - 3\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\,x' - \frac{1}{\sqrt{3}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{42}}\,z'\right) - 6 = 0,$$

$$14x'^2 - \frac{14}{\sqrt{14}}\,x' - 6 = 0. \qquad (B)$$

Приведем к каноническому виду уравнение (B):

$$14\left(x'^2 - \frac{1}{\sqrt{14}}\,x' + \frac{1}{56}\right) - 14\cdot\frac{1}{56} - 6 = 0,\ 14\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{14}}\right)^2 -$$

$$-\frac{25}{4}=0,\ 14X^2-\frac{25}{4}=0,\ X^2=\frac{25}{56},$$

где $X=x'-\frac{1}{2\sqrt{14}}$. Уравнение $X^2=\frac{25}{56}$ определяет пару параллельных плоскостей. Уравнения этих плоскостей в старой системе координат можно найти с помощью способа Лагранжа. Выписывая вначале все члены уравнения поверхности, содержащие x, дополняя их до полного квадрата, получим:

$$x^2-4xy+6xz-x+4y^2+9z^2-12yz+2y-3z-6=\Big[x^2-$$

$$-2x\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)+\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)^2\Big]-\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)^2+4y^2+$$

$$+9z^2-12yz+2y-3z-6=\left[x-\left(2y-3z+\frac{1}{2}\right)\right]^2-\Big(4y^2+$$

$$+9z^2+\frac{1}{4}-12yz+2y-3z\Big)+4y^2+9z^2-12yz+2y-3z-$$

$$-6=\left(x-2y+3z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0,$$

$$\left[\left(x-2y+3z-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}\right]\left[\left(x-2y+3z-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\right]=0,$$

$$(x-2y+3z-3)\,(x-2y+3z+2)=0.$$

Следовательно, уравнения плоскостей:

$$x-2y+3z-3=0,\ x-2y+3z+2=0.$$

З а м е ч а н и е . Уравнения этих плоскостей можно было найти и другим способом. Разрешая уравнения (А) относительно x' и y', выражая $X=x'-$

$-\dfrac{1}{2\sqrt{14}}$ через x и y и подставляя в уравнение $X^2 = \dfrac{25}{56}$, получим $\dfrac{1}{14}\left(x - 2y + 3z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{56}$, откуда и следуют уравнения плоскостей.

Пример 6. Пользуясь приведением левой части уравнения к сумме квадратов по способу Лагранжа, определить вид поверхности

$$x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0.$$

Решение. Преобразуя левую часть уравнения, получим

$$x^2 - 2xy - 6xz + 2x + y^2 - 3z^2 - 6yz + 2y + 4z = \Big[x^2 - 2x\,(y +$$

$$+ 3z - 1) + (y + 3z - 1)^2\ \Big] - (y + 3z - 1)^2 + y^2 - 3z^2 - 6yz +$$

$$+ 2y + 4z = [x - (y + 3z - 1)\ ]^2 - \Big(y^2 + 9z^2 + 1 + 6yz - 2y -$$

$$- 6z) + y^2 - 3z^2 - 6yz + 2y + 4z = (x - y - 3z + 1)^2 - 12z^2 -$$

$$- 12yz + 10z + 4y - 1 = (x - y - 3z + 1)^2 - 12\left[z^2 + 2z\left(\ \frac{1}{2}y -\right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{5}{12}\right) + \left(\ \frac{1}{2}y - \frac{5}{12}\right)^2\ \right] + 12\left(\ \frac{1}{2}y - \frac{5}{12}\right)^2 + 4y - 1 = (x - y -$$

$$- 3z + 1)^2 - 12\left(z + \frac{1}{2}y - \frac{5}{12}\right)^2 + 12\left(\ \frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{12}y + \frac{25}{144}\right) +$$

$$+ 4y - 1 = (x - y - 3z + 1)^2 - 12\left(z + \frac{1}{2}y - \frac{5}{12}\right)^2 + 3y^2 - y +$$

$$+ \frac{13}{12} = (x - y - 3z + 1)^2 - 12\left(z + \frac{1}{2}y - \frac{5}{12}\right)^2 + 3\left(y^2 - \frac{1}{3}y +\right.$$

$$+\frac{1}{36}\Big)-\frac{3}{36}+\frac{13}{12}.$$

Следовательно, уравнение приведено к виду

$$(x-y-3z+1)^2-12\left(z+\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{6}\right)^2+1=0. \qquad \text{(A)}$$

Введем новые координаты по формулам

$$\left.\begin{aligned} &X=x-y-3z+1;\\ &Y=y-\frac{1}{6};\\ &Z=z+\frac{1}{2}y-\frac{5}{12}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

Уравнение (A) перепишется так:

$$X^2+3Y^2-12Z^2=-1 \text{ или } \frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{\frac{1}{3}}-\frac{Z^2}{\frac{1}{12}}=-1. \qquad \text{(C)}$$

Полученное уравнение определяет двуполостный гиперболоид.

Линейное преобразование (B) является аффинным (его определитель отличен от нуля). Так как при аффинном преобразовании двуполостный гиперболоид переходит в двуполостный гиперболоид, то исходное уравнение тоже определяет двуполостный гиперболоид.

Пример 7. С помощью способа Лагранжа определить вид поверхности

$$4xy+2x+4y-6z-3=0.$$

Решение. Левая часть уравнения не содержит членов с квадратами координат. Положим $x=x'+y'$, $y=x'-y'$, $z=z'$, тогда уравнение перепишется так

$$4(x'+y')\,(x'-y')+2\,(x'+y')+4\,(x'-y')-6z'-3=0$$

или

$$4x'^2-4y'^2+6x'-2y'-6z'-3=0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$4\left(x'^2+\frac{6}{4}x'+\frac{9}{16}\right)-4\left(y'^2+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{16}\right)-\frac{9}{4}+\frac{1}{4}-3-\ 6z=0$$

или

$$4\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2-4\left(y'+\frac{1}{4}\right)^2=6\left(z+\frac{5}{6}\right).$$

Вводя новые координаты по формулам

$$X=x'+\frac{3}{4};\,Y=y'+\frac{1}{4};\,Z=z+\frac{5}{6},$$

получим уравнение гиперболического параболоида

$$4X^2-4Y^2=6Z;\ \ \frac{X^2}{\frac{3}{4}}-\frac{Y^2}{\frac{3}{4}}=2Z.$$

Пример 8. Определить вид поверхности

$$y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$y^2+2xy+2yz-2y+4xz-4x=\Big[y^2+2y\,(x+z-1)+(x+$$

$$+z-1)^2\ \Big]-(x+z-1)^2+4xz-4x=[y+(x+z-1)\,]^2-$$

$$-\left(x^2+z^2+1+2xz-2x-2z\right)+4xz-4x=(y+x+z-1)^2-$$

$$-x^2+2xz-z^2-2x+2z-1=(y+x+z-1)^2-(x-z+$$

$$+1)^2=[\,(y+x+z-1)-(x-z+1)\,][\,(y+x+z-1)+(x-$$

$$-z+1)\,]=(y+2z-2)\,(y+2x)=0.$$

Следовательно, уравнение определяет две пересекающиеся плоскости

$$y + 2z - 2 = 0,\ \ 2x + y = 0.$$

Задачи

Определить вид поверхности, пользуясь приведением левой части ее уравнения к сумме квадратов по способу Лагранжа:

1. $2x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 4xy + 4yz - 8z + 1 = 0.$

2. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 2xy + 4yz + 8z - 2 = 0.$

3. $8x^2 + 9y^2 - 12z^2 - 16xy + 4yz + 12z - 4 = 0.$

4. $2x^2 + y^2 - 12z^2 - 4xy - 4yz + 8z - 3 = 0.$

5. $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 2z + 2 = 0.$

6. $xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0.$

7. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0.$

8. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0.$

9. $4x^2 + 49y^2 + z^2 - 28xy + 4xz - 14yz + 8x - 28y + 4z + 3 = 0$

10. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

Определить каноническое уравнение и расположение поверхности:

11. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$

12. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$

13. $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$

14. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0.$

15. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0.$

16. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0.$

Ответы

1. Эллипсоид. **2.** Конус. **3.** Однополостный гиперболоид. **4.** Двуполостный гиперболоид. **5**. Эллиптический параболоид. **6.** Однополостный гиперболоид. **7.** Гиперболический цилиндр. **8.** Параболический цилиндр. **9.** Пара параллельных плоскостей. **10.** Пара совпадающих плоскостей. **11.** Конус $X^2 + Y^2 - 9Z^2 = 0.$ Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = -3,$ $\lambda_3 = 6,$ вершина в точке $O'\,(1, 1, -1);$ ось конуса коллинеарна вектору

$\overline{p}_3 = \{2, 1, -2\}$. **12.** Двуполостный гиперболоид $\dfrac{X^2}{\frac{4}{5}} + \dfrac{Y^2}{\frac{4}{15}} - \dfrac{Z^2}{\frac{4}{25}} = -1$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -5$. Ось коллинеарна вектору $\overline{p}_3 = \{0, 0, 1\}$. **13.** Гиперболический параболоид $7X^2 - 2Y^2 - 2\sqrt{\dfrac{16}{14}}\,Z = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Собственные векторы $\overline{p}_1 = \{4, 1, 2\}$, $\overline{p}_2 = \{-1, 2, 1\}$, $\overline{p}_3 = \{1, 2, -3\}$, вершина находится в точке $O'\left(-\dfrac{23}{24}, \dfrac{73}{28}, -\dfrac{123}{56}\right)$. **14.** Эллиптический цилиндр $\dfrac{X^2}{\frac{3}{2}} + \dfrac{Y^2}{1} = 1$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$. Собственные векторы $\overline{p}_1 = \{-1, 1, 1\}$, $\overline{p}_2 = \{1, 0, 1\}$, $\overline{p}_3 = \{1, 2, -1\}$. **15.** Гиперболический цилиндр $X^2 - Y^2 = \dfrac{1}{3}$. **16.** Параболический цилиндр $Y = \sqrt{3}\,X^2$.

Приложение

Некоторые кривые

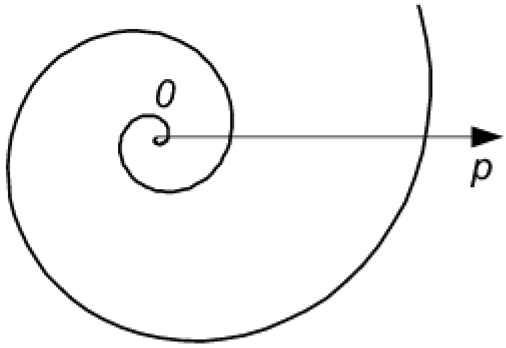


Рис. 1. Логарифмическая спираль

$\rho = ae^{k\varphi}$

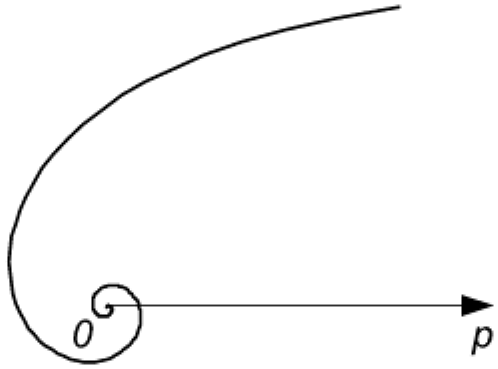


Рис. 2. Гиперболическая спираль

$\rho = \frac{a}{\varphi}$

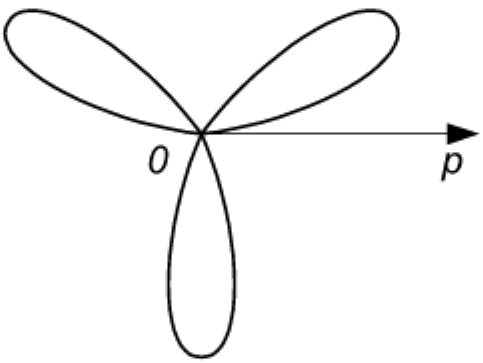


Рис. 3. Трехлепестковая роза

$\rho = a\sin 3\varphi$

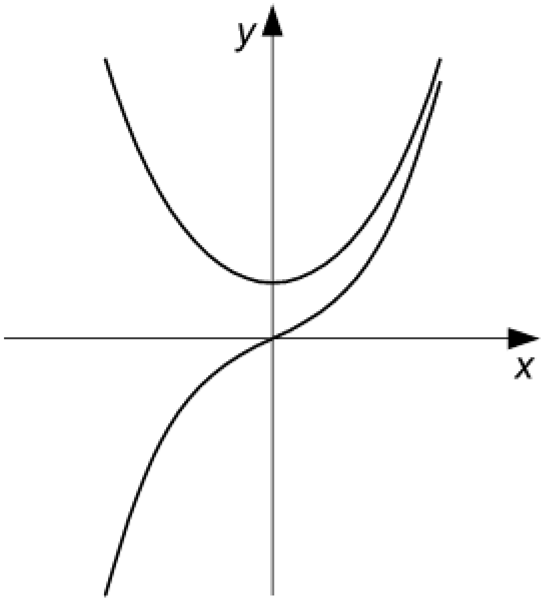


Рис. 4. Графики гиперболических функций:

$y = \text{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$y = \text{ch}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

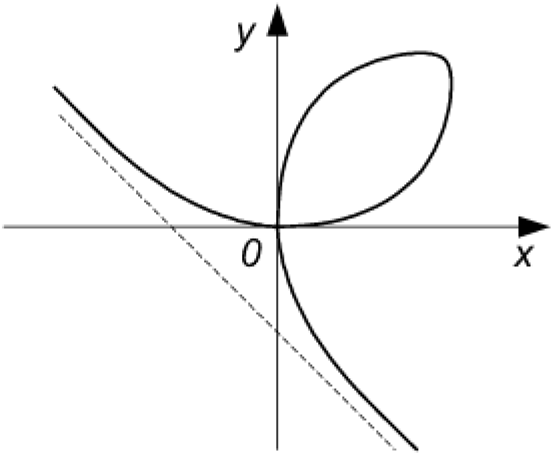


Рис. 5. Декартов лист

$x^3+y^3-3axy = 0$

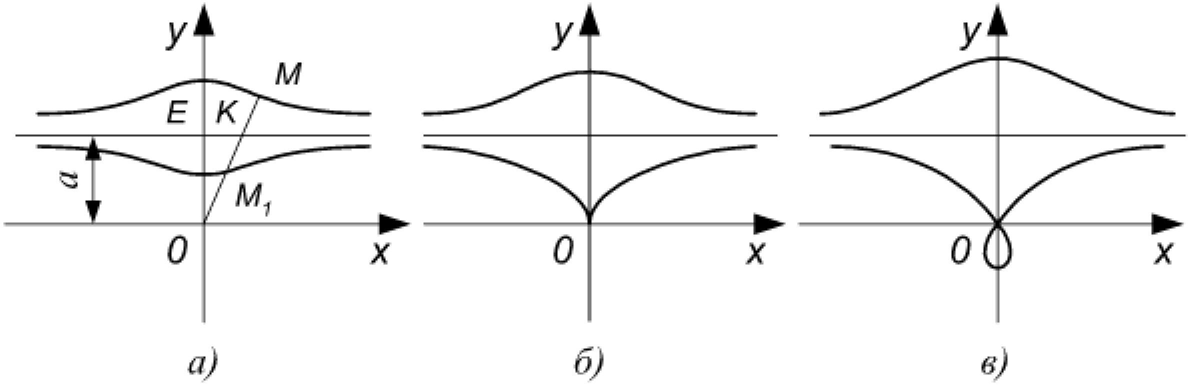


Рис. 6. Конхоида Никомеда

$\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi} + l$: а) $l < a$; б) $l = a$; в) $l > a$.

Оглавление

Учебное издание

Гусак Алексей Адамович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Примеры и задачи

6-е издание

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *С. В. Процко*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 23.06.2011.
Формат 60 × 84 $^1/_{16}$. Бумага для офсетной печати. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,74. Уч.-изд. л. 14,4. Тираж 1500 экз.
Заказ

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью «ТетраСистемс».
ЛИ № 02330/0494056 от 03.02.2009.
Удостоверение о государственной гигиенической регистрации
№ 08-33-2.79451 от 14.10.2008.
Ул. Железнодорожная, 9, 220014, г. Минск. Тел. 219-74-01,
e-mail: rtsminsk@mail.ru, http://www.ts.by.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство “Белорусский Дом печати”».
ЛП № 02330/0494179 от 03.04.2009.
Пр. Независимости, 79, 220013, г. Минск.