Московский
Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова

ФОРМИРОВАНИЕ ПРИЕМОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

ТОО "Вентана-Граф"
Москва, 1995

МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

ФОРМИРОВАНИЕ ПРИЕМОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Под редакцией Н. Ф. Талызиной

ТОО «Вентана-Граф»
Москва 1995 г.

ББК 74.262.21
Ф. 79

Издание финансируется
из Президентской программы «Дети России»
(Федеральная целевая программа
«Дети Чернобыля»)

Ф 79 Формирование приемов математического мышления.

Формат 84×108 1/32. Бумага офсетная. Гарнитура тип "Петербург".
Печ. офсетная. Усл. печ. л. 7,5. Уч. изд. л. 12,62. Тир. 25000. Зак. 1593.
Отпечатано в тип. Липецкого издательства.

ISBN-5-88717-010-7

Лицензия ЛР № 063642 от 14.10.94 г.

ВВЕДЕНИЕ

Математика обычно считается самым трудным предметом школьного обучения. Причину этого видят прежде всего в абстрактности ее содержания. Такое объяснение выглядит особенно убедительным, когда речь идет об учащихся начальной школы. Известно, что интеллект детей этого возраста находится, как правило, на сенсомоторной стадии. Это означает, что действия с абстрактными объектами для них, действительно, весьма затруднительны.

Вместе с тем, трудности, испытываемые учащимися при изучении математики, имеют, по нашему мнению, другие причины. Они связаны с тем, на какую ***психологическую основу*** опирается учебный процесс: а) какое понимание природы человеческих способностей реализуется в этом процессе; б) как представляется процесс развития интеллекта и характер отношений между обучением и развитием; в) какая модель процесса усвоения лежит в основе учебного процесса.

В психологии ни по одной из названных составляющих нет единой точки зрения; следовательно, неизбежен выбор. Естественно, учитель сознательно может не делать такого выбора и вообще не задумываться над психологической основой, реализуемой им в учебном процессе. Однако в основе обучения всегда лежит то или иное понимание вышеназванных составляющих. И это понимание может быть выявлено.

Если обратимся к первой составляющей — природе человеческих способностей,— то увидим, что в психологии существует две диаметрально противоположные точки зрения. Согласно одной из них источник способностей заключен в наследственности. Это означает, что человеку «на роду написано», какие у него будут способности и каков будет уровень их развития.

Сторонники второй точки зрения также признают важную роль наследственности в развитии способностей, но видят в ней не источник их развития, а всего лишь условие этого развития. В качестве же источника развития человеческих способностей выступает социальный опыт, который и должен быть передан новому поколению в процессе обучения. Согласно первой точке зрения развитие человеческих способностей подчиняется биологическим закономерностям. Сторонники второй точки зрения ставят способности в зависимость от социальных законов, подчеркивают их социальную природу. Эта точка зрения завоевывает все большее и большее число сторонников. Если учитель математики придерживается первой точки зрения на человеческие способности, т. е. считает, что математиками родятся, то его главная задача состоит в выявлении этих способностей, в создании условий для самореализации учащихся.

При занятии второй позиции задача учителя куда трудней: он должен обеспечить формирование математических способностей у обучаемых в процессе изучения ими математических дисциплин.

К сожалению, практика показывает, что большая часть математиков — приверженцы генетической природы математических способностей. Так, довольно часто учителя математики объясняют плохую успеваемость ученика по математике тем, что у него нет математических способностей. При этом могут добавить, что и родители этого ученика не отличались большими успехами по математике. Очевидно, что эти учителя признают врожденность математических способностей и не считают возможным их формирование в процессе изучения математических дисциплин. В этом случае учитель фактически снимает с себя ответственность за успехи учащихся.

Аналогичная ситуация и с проблемой развития интеллекта в целом. Самой распространенной теорией развития интеллекта является теория Ж. Пиаже. Согласно этой теории до стадии логических операций человек доходит к подростковому возрасту. Вместе с тем, логические операции необходимы ребенку с первых шагов изучения математики. Без их использования математика не может быть ни понята, ни адекватно усвоена. Если согласиться с точкой зрения Ж. Пиаже, то надо или не изучать математики до подросткового возраста, или изучать не адекватно, мириться с плохой успеваемостью по математике. Принятие этой точки зрения предрешает и вопрос о соотношении обучения и развития: обучение должно опираться на достигнутый уровень развития, идти сзади него. Наоборот, если признать социальную природу законов развития человеческой психики, в том числе и интеллекта, то по-другому будут решаться и вопросы использования логического мышления, и соотношения обучения и развития.

Психологическую основу исследований, результаты которых изложены в данной книге, составляет следующее понимание вышеизложенных составляющих: во-первых, авторы исходят из того, что человеческие способности имеют не наследственную, а социальную детерминацию. Это означает, что человек не родится с заложенными в нем способностями, а приобретает их в процессе жизни. Источник человеческих способностей — социальный опыт. Социальный опыт пополняется индивидуальными достижениями, но эти достижения имеют место только после того, как человек усвоит определенную часть этого опыта.

При раскрытии процесса интеллектуального развития важно учитывать, что оно идет по двум линиям. Первая линия — функциональное развитие. Она связана с накоплением все новых и новых видов интеллектуальных действий, с усвоением различных видов познавательной деятельности. Это линия количественных накоплений. Вторая линия интеллектуального развития — линия качественных изменений в функционировании интеллекта,— его переход с одной стадии на другую. Эти две линии развития не изолированы друг от друга, каждая из них влияет на другую. Обучение имеет прямое отношение к первой из указанных линий развития, а через нее влияет и на вторую.

При решении вопроса о соотношении обучения и развития авторы данной книги разделяют точку зрения Л. С. Выготского: ***обучение ведет за собой развитие***. Принятие этой точки зрения ставит проблему выявления условий, при которых обучение дает наибольший эффект развития.

В силу этого одна из центральных задач — определение таких видов познавательной деятельности, усвоение которых эффективно влияет на развитие.

Результаты проведенных исследований говорят о том, что одно из главных требований к этим видам деятельности — их опора не на частные знания, а на такие, которые составляют основу значительных разделов изучаемых предметов, являются ***инвариантными***. Формирование таких видов познавательной деятельности фактически и есть путь для обеспечения обучаемых познавательными способностями. При изучении любых предметов, и прежде всего — при изучении математики, необходимы два вида приемов познавательной деятельности: общие и специфические. Среди общих видов главное место занимают логические приемы мышления. Что касается специфических, то они зависят от особенностей изучаемых предметов. Так, изучение математики связано со специфически математическими видами познавательной деятельности (математическими способностями), которые не могут быть сформированы при изучении других предметов. Аналогичная ситуация и с другими областями знаний.

В данной книге представлены как логические, так и математические виды познавательной деятельности, опирающиеся на инвариантные знания. Во всех случаях при организации усвоения этих видов деятельности была использована ***деятельностная теория усвоения***, заложенная трудами П. Я. Гальперина. Согласно данной теории усвоения, знания всегда являются элементами тех или иных видов деятельности, действий человека. Действие — это та единица, которую надо использовать при анализе любого процесса учения. Без обращения к действиям невозможно конструктивно и обоснованно построить цели обучения, проконтролировать качество усвоения знаний. В самом деле, что значит «знает» — «не знает»? Что является критерием знания? Как добиться объективности в оценке уровня знаний? Ни на один из этих вопросов нельзя дать ответа, не обращаясь к тем действиям (умениям, навыкам, способностям), в которых эти знания должны функционировать. В силу этого при обучении любому предмету должна быть не только программа предметных знаний, но и программа тех действий (умений), в которых учащиеся должны использовать эти знания. В связи с этим при организации процесса усвоения знаний большое внимание уделяется тем действиям, которые учащиеся используют в качестве средств усвоения этих знаний. Если цели обучения предполагают использование знаний в таких действиях, которыми учащиеся не владеют, то обучение должно одновременно обеспечить усвоение и этих действий, и этих знаний.

Согласно данной теории, процесс усвоения включает шесть этапов, при прохождении которых усваиваемые действия и знания постепенно превращаются из внешних, материализованных во внутренние, умственные. Изменения происходят по ряду и других характеристик: по мере обобщенности, самостоятельности, автоматизированности.

Следование требованиям данной теории усвоения позволяет ***управлять*** процессом усвоения и формировать познавательные действия и связанные с ними знания с заранее намеченными качествами[1].

Приведенные в данной книге результаты исследований показывают, что организация обучения с использованием вышеизложенной психологической основы позволяет всем учащимся, как начальной, так и средней школы, успешно усваивать математику, свободно и самостоятельно использовать полученные знания в новых условиях.

В данную книгу включены работы, выполненные на материале математики начальной школы, а также на материале разных разделов курса планиметрии.

В статье Н. Ф. Талызиной — **«Формирование математических понятий»** — рассмотрен ряд логических, психологических и дидактических аспектов, связанных с процессом усвоения математических понятий в общеобразовательной школе.

Прежде всего, автор останавливается на проблеме формализма в усвоении математических понятий и вскрывает его

---

1 Подробней о данной теории усвоения см: Гальперин П. Я. «Развитие исследований по формированию умственных действий» — В сб. «Психологическая наука в СССР». Т. 1., М., 1959; Гальперин П. Я. «Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий».— М., 1965, а также Талызина Н. Ф. «Управление процессом усвоения знаний».— М., Изд-во Моск. ун-та, 1984; Талызина Н. Ф. «Формирование познавательной деятельности младших школьников».— М., «Просвещение», 1988.

причины. В связи с этим анализируется роль определений в процессе становления понятий, показывается необходимость формирования определенных познавательных действий у обучаемых. Понятие выступает как продукт действий учащихся, направленных на объекты того класса, понятие о котором формируется у обучаемых. Показано, что процесс усвоения понятий должен быть организован как процесс решения специально подобранных задач.

Статья Н. Г. Салминой — **«Обучение математике в начальной школе»** — посвящена анализу главных условий, определяющих успех начального этапа математического образования.

Прежде всего, автор анализирует основные компоненты, которые должны войти в содержание начального курса математики. Кроме математических знаний и действий, необходимы еще две составляющие: а) знаково-символические знания и действия и б) логические. В статье показано, что без последних двух компонентов не может быть адекватного усвоения собственно математического содержания курса. В статье читатель найдет не только указание на эти компоненты, но и их конкретное раскрытие: основные знания и действия, составляющие содержание всех трех компонентов начального курса математики.

Второй аспект анализа указанного курса касается принципов построения математического содержания. Автор показывает знания и действия, составляющие основу системы счисления, причем не только десятичной, но и любой другой.

Наконец, в статье рассмотрены вопросы организации процесса усвоения. При этом автор рассматривает как общие требования, касающиеся всех трех вышеуказанных составляющих, так и специфические, отражающие особенности каждой из них.

В статье Г. Николы и Н. Ф. Талызиной — **«Формирование общих приёмов решения арифметических задач»** — анализируются причины затруднений, которые испытывают учащиеся при решении таких видов арифметических задач, которые обычно называются «задачи на бассейны», «задачи на работу», «задачи на движение» и т. д. Проведенный анализ показал, что в курсе арифметики более тридцати разновидностей задач, связанных с разного рода процессами. Каждая разновидность предстает перед учащимися как самостоятельный вид задач («на движение», «на работу» и т. д.). В силу этого, научившись решать один из этих видов задач, учащиеся нередко затрудняются с решением задач, относящихся к другой частной разновидности. Это говорит о том, что они не видят за разными сюжетами этих задач их общей основы. Общую основу всех этих разновидностей задач составляет то, что все они связаны с анализом процессов. Естественно, если ученик не понимает, что такое процесс, не знает, какие величины связаны с ним, какими отношениями эти величины связаны друг с другом, то он не может адекватно выбрать арифметические действия и их последовательность для решения поставленной перед ним задачи. В школе учащиеся изучают процессы после изучения арифметики: в курсе физики и только применительно к частным видам движения. В силу этого, многие учащиеся при изучении арифметики не имеют необходимых знаний о процессах и не могут решать задачи, связанные с анализом разного рода процессов. Таким образом, трудности в решении данного вида задач выходят за рамки арифметики. Собственно арифметических трудностей у таких учеников обычно нет: они успешно справляются с решением примеров на все четыре действия. Но в задаче главная проблема — правильный ***выбор*** действий. А это предполагает понимание той ситуации, которая описана в условиях задачи.

В данной работе описаны не только причины трудностей в решении задач данного класса, но и путь, позволяющий преодолеть эти трудности.

В экспериментальном обучении главное внимание авторов статьи было сосредоточено на вооружении учащихся общим методом анализа процессов. Учащиеся при этом ориентировались на основные величины, связанные с процессом (действующие силы, скорость, время, продукт процесса), и их отношения. Такой тип ориентировки является инвариантным, он позволяет понимать и решать любую разновидность задач данного класса.

Статья Г. А. Буткина — **«Формирование умений, лежащих в основе геометрического доказательства»** — посвящена анализу действий, слагающих один из основных приемов доказательства. Известно, что доказательство теорем является главным камнем преткновения учащихся при изучении школьного курса планиметрии. Они заучивают готовые доказательства, воспроизводят их по требованию учителя и довольно быстро забывают. Характерно, что если изменить положение чертежа, обозначить его элементы другими буквами, то, как правило, учащиеся уже не могут «доказать» теорему. Это лишний раз подтверждает, что изучение теорем у таких учеников остается на уровне простого заучивания, не приводит к формированию приемов доказательства, составляющих важную часть математического мышления.

Исследования, проведенные с вышеуказанных психологических позиций, позволили установить, что все теоремы, изучаемые в школе, могут быть доказаны с помощью трех методов:

а) метод подведения под понятие путем выделения системы необходимых и достаточных признаков, скрытых за другими понятиями;

б) метод доказательства от противного (противоположного);

в) использование дополнительных построений (примером может служить доказательство теоремы Пифагора о равенстве суммы квадратов катетов квадрату гипотенузы).

В настоящее время изучено содержание каждого из этих методов, проведено экспериментальное обучение по формированию у обучаемых действий, слагающих каждый из них. Во всех случаях после такого обучения учащиеся могли самостоятельно доказывать новые теоремы, причем нередко несколькими способами. Важно также отметить, что эти возможности учащиеся сохраняли на протяжении длительного времени. Эти результаты говорят о том, что в данных случаях учащиеся приобретают общие методы математического мышления и в силу этого обнаруживают независимость от конкретных особенностей не только чертежей и обозначений, но и содержания самих теорем.

В статье Г. А. Буткина представлены результаты формирования только первого метода доказательства. Читатель найдет описание всех действий, которые необходимо сформировать у обучаемых для овладения этим методом. Описана также методика обучения и его результаты. Полученные результаты говорят о высокой степени эффективности такого подхода к изучению геометрических теорем. Следует также отметить, что сформированный метод может использоваться не только в геометрии, но и далеко за ее пределами. В частности, он составляет основу медицинской диагностики. Возможности широкого переноса данного метода доказательства объясняются тем, что основу его содержания составляют логические операции, которые независимы от конкретного содержания материала. При использовании этого метода в новых условиях, как внутри геометрии, так и за ее пределами, общая логика рассуждения сохраняется, изменения касаются конкретной системы понятий и их признаков, которые характеризуют каждую новую ситуацию.

Статья И. А. Володарской — **«Формирование обобщенных приемов геометрического мышления»** — посвящена анализу афинных преобразований (группа движений). В принципе логика этого исследования совпадает с логикой ранее нами описанных. Прежде всего, автор проанализировал конкретные виды преобразований, которые в школе изучаются на протяжении нескольких лет. При этом каждый частный вид преобразований выступает перед учащимися как новый предмет для усвоения. В результате обучаемые не видят той общей основы, которая лежит за каждым частным случаем преобразований. Исследование И. А. Володарской показало, что эта общая основа (инвариант) состоит из четырех компонентов: 1) начальный объект преобразований; 2) объект, по отношению к которому производится преобразование; 3) действия, с помощью которых происходит преобразование; 4) конечный объект преобразований. Эти элементы инвариантны: они имеют место в любом конкретном случае преобразований данного вида. Но в каждом частном случае преобразований эти элементы представлены как варианты инвариантных составляющих. Если обратимся к инвариантным элементам, то увидим, что первый из них — начальный объект — может варьировать очень широко: им может быть любая геометрическая фигура (точка, отрезок, окружность и т. д.). Варианты второго инвариантного элемента ограничены: это может быть точка, прямая, плоскость. Аналогичная ситуация с третьим элементом: преобразование совершается с помощью поворота, переноса на вектор или путем совмещения того и другого. Последний инвариантный элемент — конечный объект преобразований — также варьирует. Конкретный вариант конечного объекта определяется специальными требованиями к нему со стороны формы, размеров и пространственного положения. В одних случаях начальный объект сохраняет и форму, и размеры, но меняет пространственное положение (поворот, например). В других — изменяется и положение, и размеры (подобие); в третьих случаях изменения касаются трех характеристик (гомотетия).

Таким образом, все множество преобразований данного вида может быть получено путем варьирования инвариантных переменных по одной или нескольким линиям.

Экспериментальное обучение показало, что вооружение учащихся инвариантными знаниями и обобщенным методом работы с ними позволяет обучаемым самостоятельно получать все частные виды преобразований, видеть их как элементы единой системы, легко устанавливать общие и отличительные характеристики при сравнении отдельных вариантов. Важно при этом отметить, что такой путь обучения позволяет учащимся глубже понять сущность геометрических преобразований.

В статье И. А. Володарской и Т. К. Никитюк — **«Формирование общего приема решения задач на построение»** — проведен анализ еще одной составляющей начального курса геометрии. Прежде всего, авторы представили результаты анализа данной проблемы как в практике обучения, так и в методической литературе. В статье показано, что методисты постоянно ведут поиск рациональных методов изучения данного раздела геометрии, в том числе — стремятся выделить общие моменты в решении задач на построение. Однако до конца эта проблема остается нерешенной, и учащиеся, как правило, акцентируют внимание на исполнительной части. Они нередко механически производят построения, не понимая, почему надо действовать так, а не иначе.

Далее авторы представляют результаты своего анализа различных задач на построение. Главная цель этого анализа — выделение инвариантной основы. Так, в статье показано, что при решении почти всех задач на построение с помощью циркуля и линейки используются аналогичные действия, варьирует лишь последовательность операций.

В статье представлено содержание общего приема решения задач на построение с помощью циркуля и линейки. Этот прием включает тринадцать компонентов. В последней части статьи авторы показывают возможности использования этого приема при решении конкретных задач на построение.

Как видим, в целом в сборнике представлен новый подход ко всем основным разделам как математики начальной школы, так и курса планиметрии.

Книга рассчитана, прежде всего, на учителей математики средней школы, но она может также представлять интерес и для преподавателей других предметов. Кроме того, ее читателями могут быть методисты, дидакты, психологи и все те, кто интересуется новыми подходами в сфере образования.

Н. Ф. Талызина

Н. Ф. Талызина

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Понятия являются одной из главных составляющих содержания любого предмета, в том числе — и предметов математического цикла.

Одно из первых математических понятий, с которым ребенок встречается в школе — понятие о числе. Если это понятие не будет усвоено адекватно — у обучаемых возникнут серьезные трудности при дальнейшем движении в системе счисления, в том числе — и в понимании самого понятия «система счисления».

С самого начала встреча с понятиями происходит у учащихся при изучении и других математических дисциплин. Так, начиная изучать геометрию, учащиеся сразу же встречаются с понятием точки, линии, угла, а далее — с целой системой понятий, связанных с видами геометрических объектов (линий, углов, треугольников и др.).

Задача учителя — обеспечить полноценное усвоение этих понятий. Если мы обратимся к школьной практике, то увидим, что эта задача решается далеко не так успешно, как того требуют цели общеобразовательной школы.

Главный недостаток школьного усвоения понятий — формализм. Суть его состоит в том, что учащиеся, правильно воспроизводя определения понятий, т. е. осознавая их содержание, не умеют пользоваться ими при ориентировке в предметной действительности, при решении задач на применение этих понятий. Приведем несколько типичных примеров. Учащиеся только что изучили понятие об окружности. Они легко и правильно воспроизводят определение окружности, указывая на то, что это замкнутая кривая линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от одной, называемой центром. После этого учащимся предлагается изображение эллипса, внутри которого поставлена точка («центр»). Учащихся спрашивают, можно ли эту замкнутую кривую назвать окружностью. Значительная часть учащихся отвечает положительно. На вопрос, почему они считают, что эта кривая является окружностью, отвечают: «У нее тоже есть центр».

Второй пример. Учащиеся изучили прямоугольные треугольники. Они уверенно говорят о том, что треугольник называется прямоугольным, если он имеет прямой угол. Тут же им предлагается прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине. Учащиеся измеряют угол, убеждаются, что он прямой, но треугольник прямоугольным назвать не соглашаются.

Еще один пример. Учащиеся дают правильное определение смежных углов. Они указывают, что это такие два угла, которые имеют общую вершину, общую сторону, а две другие их стороны продолжают друг друга. Учащиеся правильно изображают смежные углы на доске, узнают их среди множества предъявленных. Как будто бы все в порядке. Но вот учащимся дают задачу: «Даны два угла с общей вершиной. Сумма этих углов равна 180°. Будут ли эти углы смежными?» Подавляющее большинство учащихся отвечает положительно. Ответ неверный. Условия этой задачи не содержат указаний на наличие у данных углов общей стороны, но в условии в то же время нет информации и о том, что общей стороны эти углы не имеют, т. е. налицо ситуация неопределенности. В самом деле, под данные условия вполне подходят не только смежные, но и прямые вертикальные углы: общая вершина и сумма 180° имеют место. Учащиеся, если бы они умели использовать содержание определения, должны были бы дать ответ: «Неизвестно» (данные углы могут быть как смежными, так и не смежными).

Примеров неумения учащимися пользоваться математическими понятиями при работе с реальными объектами, при анализе условий задачи можно привести очень много. И все они говорят о том, что хранение определения понятия в памяти еще не говорит о том, что это понятие усвоено учеником по существу, а не формально.

Что же обеспечивает адекватное усвоение математических понятий? Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть несколько групп вопросов:

1. Что такое понятие?

2. Какова роль определения в процессе усвоения понятия?

3. Что значит усвоить понятие?

4. Каков критерий усвоения?

5. В чем состоит процесс усвоения понятия?

6. Каковы закономерности этого процесса?

7. Как учитель может управлять этим процессом?

1. Математические понятия и их виды. Логика в любом понятии различает объем и содержание. Под объемом понимается тот класс объектов, которые относятся к этому понятию, объединяются им. Так, в объем понятия «треугольник» входит все множество треугольников независимо от их конкретных характеристик (видов углов, размера сторон и др.). Под содержанием понятий понимается та система существенных свойств, по которой происходит объединение данных объектов в единый класс. В понятии «треугольник» к таким свойствам относятся следующие: замкнутая фигура, состоит из трех отрезков прямой. Совокупность свойств, по которым объединяются объекты в единый класс, называются необходимыми и достаточными признаками. Важно отметить, что отношение между этими признаками в разных понятиях разное. В одних понятиях эти признаки дополняют друг друга, образуя вместе то содержание, по которому и объединяются объекты в единый класс. Примером таких понятий может служить треугольник, угол, биссектриса, медиана и многие другие. Так у объектов, относящихся к понятию «треугольник», обязательно должны быть оба вышеуказанных признака, по отдельности ни один из них не позволяет опознать объекты этого класса. В логике понятия с такой связью признаков называются ***конъюнктивными***: признаки связаны союзом «и» (в случае с треугольниками фигура должна быть *и* замкнутой *и* состоять из трех отрезков прямой).

В других понятиях отношение между необходимыми и достаточными признаками другое: они не дополняют друг друга, а заменяют. Это означает, что один признак является эквивалентом другого. Примером такого вида отношений между признаками могут служить признаки равенства отрезков, углов. Известно, что к классу равных отрезков относятся такие отрезки, которые: а) или совпадают при наложении; б) или порознь равны третьему; в) или состоят из равновеликих частей и т. д.

В данном случае перечисленные признаки не требуются все одновременно, как это имеет место при конъюнктивном типе понятий; здесь достаточно какого-то одного признака из всех перечисленных; каждый из них эквивалентен любому из остальных. В силу этого признаки связаны союзом «или». Такая связь признаков называется дизъюнкцией, а понятия соответственно называются дизъюнктивными.

Важно также учитывать деление понятий на абсолютные и относительные. Само название понятий говорит о специфике каждой группы. Абсолютные понятия объединяют предметы в классы по определенным признакам, характеризующим суть этих предметов как таковых. Так, в понятии «угол» отражены свойства, характеризующие сущность любого угла как такового. Аналогичное положение со многими другими геометрическими понятиями: окружность, луч, ромб и т. д.

В случае относительных понятий объекты объединяются в классы по свойствам, характеризующим их отношение к другим объектам. Так, в понятии «перпендикулярные прямые» фиксируется то, что характеризует отношение двух прямых друг к другу: пересечение, образование при этом прямого угла. Аналогично в понятии «касательная» отражены определенные особенности, характеризующие отношение прямой и окружности.

Опыт показывает, что относительные понятия вызывают у учащихся более серьезные трудности, чем понятия абсолютные. Суть трудностей состоит именно в том, что ученики не учитывают ***относительность*** понятий и оперируют с ними как с понятиями абсолютными. Так, когда просишь учеников изобразить перпендикуляр, то некоторые из них изображают вертикаль. Особо стоит остановиться на понятии «число».

Число — это отношение того, что подвергается количественной оценке (длина, вес, объем и др.) к эталону, который используется для этой оценки. Очевидно, что число зависит как от измеряемой величины, так и от эталона. Чем больше измеряемая величина, тем больше будет число при одном и том же эталоне. Наоборот, чем больше будет эталон (мера), тем меньше будет число при оценке одной и той же величины. Следовательно, учащиеся с самого начала должны понять, что сравнение чисел по величине можно производить только тогда, когда за ними стоит один и тот же эталон. В самом деле, пять не всегда больше трех: если, например, пять получено при измерении длины сантиметрами, а три — при измерении метрами, то три обозначают большую величину, чем пять. Если учащиеся не усвоят относительной природы числа, то они будут испытывать серьезные трудности и при изучении системы счисления. Не понимая, что действия сложения, вычитания можно производить только с теми числами, за которыми стоит один и тот же эталон, они далеко не всегда, например, могут объяснить правила сложения «столбиком». Допустим, складывая единицы, ребенок получил тринадцать. Он правильно указывает, что три запишем внизу (под единицами), а один «заметим» наверху (над десятками). Однако на вопрос: «А почему так надо делать?» — ученики довольно часто отвечают: «Так учительница говорила». Они не понимают, что получившийся у них десяток — это уже приведение единиц к другой мере, в десять раз большей, и поэтому его складывать можно только с десятками. Непонимание учениками позиционного принципа системы счисления и отражения этого принципа при записи чисел ярко проявляется также при решении такой задачи: «У нас 111899 конфет. Выбери в этом числе цифру, которая обозначает в нем наибольшее количество конфет». Как правило, дети выбирают девятки. Это как раз и говорит о том, что для них число — понятие абсолютное, а не относительное.

Трудности в усвоении относительных понятий сохраняются у учащихся и в средних, и даже в старших классах средней школы.

Не анализируя других аспектов математических понятий, отметим лишь, что все они выступают перед учащимися как элементы социального опыта. В них зафиксированы достижения предыдущих поколений в области математики. Учащиеся должны этот социальный опыт сделать своим индивидуальным опытом, элементами своего умственного развития.

Понятие, усвоенное человеком, становится образом, но образом особым: абстрактным и обобщенным. В самом деле, человек может мыслить треугольниками, параллельными, радиусами и т. д., не представляя при этом никакого конкретного объекта, относящегося к этому понятию. Понятие конкретно представить в принципе невозможно: любое представление это образ какого-то конкретного объекта, в этом образе обязательно будут содержаться несущественные признаки. Например, если мы мысленно представим какой-то треугольник, то он будет иметь определенную длину сторон, какую-то величину углов и т. д. В понятие треугольника эти конкретные свойства не входят, но без них чувственное (наглядное) представление невозможно. В силу этого понятие не может быть наглядным, чувственным образом, это образ абстрактный, функционирующий в нашем мышлении в неразрывной связи со словом, с речью. Одновременно это образ обобщенный, вобравший в себя не особенности отдельного объекта, а особенности целого класса объектов.

Из сказанного следует, что задача учителя математики состоит в формировании у обучаемых обобщенных абстрактных образов, отражающих различные классы математических объектов. Очевидно, что простое запоминание определения понятия такого образа не дает. Становление понятия идет другим путем.

2. Роль определения понятия в процессе его усвоения. Понятие не может быть передано учащимся в готовом виде, они должны получить его сами, взаимодействуя с относящимися к нему предметами. Какова же роль определения в этом процессе взаимодействия? Определение задает как бы точку зрения — ориентировочную основу — для оценки предметов, с которыми взаимодействует обучаемый. Так, получая определение угла, ученик может теперь анализировать различные предметы с точки зрения наличия или отсутствия в них углов. Аналогично, имея определение окружности, учащийся может анализировать различные формы объектов с точки зрения тех признаков, которые содержатся в определении окружности. Такая реальная работа по оценке различных предметов с точки зрения, заданной определением, и создает постепенно в голове учащихся идеальное понятие как обобщенный и абстрактный образ предметов данного класса.

Таким образом, получение определения это не конец усвоения понятия, а лишь первый шаг на этом пути. Следующий шаг — включение определения понятия в те действия учащихся, которые они выполняют с соответствующими объектами и с помощью которых строят в своей голове понятие об этих объектах.

Естественно, встает вопрос: «Почему же в вышеприведенных примерах учащиеся, безошибочно воспроизводя определения понятий, давали ошибочные оценки объектам, не согласующиеся с содержанием определений?» Объясняется это тем, что само по себе звание определения еще недостаточно для правильной работы с предъявляемыми объектами. Следующий важный шаг состоит в том, чтобы научить учащихся ориентироваться на содержание определения при выполнении различных действий с объектами. Другими словами, надо не только задать точку зрения на вещи, но и добиться того, чтобы эта точка зрения была принята и реально использовалась учащимися. Если это не обеспечено, то в одних случаях определение может остаться в стороне: ученик будет опираться на другие свойства, которые он сам выделил в объектах. В других случаях ученики могут использовать только часть указанных свойств; в третьих — могут добавить к указанным в определении свои, что также приводит к ошибкам. Если вернемся к вышеприведенным примерам, то обнаружим в них все эти случаи. Так, признавая за перпендикуляр вертикаль, ученик опирается на признак, которого нет в определении перпендикулярных прямых. Относя эллипс к классу окружностей, ученик учитывает лишь часть признаков, указанных в определении окружности. Аналогичное имеет место и в примере с распознаванием смежных углов. При распознавании прямоугольных треугольников ученики, наоборот, привнесли дополнительный признак: пространственное положение прямого угла. С точки зрения этих учеников прямой угол не должен быть при вершине треугольника.

Итак, главная причина формализма при усвоении математических понятий состоит в том, что не уделяется должного внимания организации работы учащихся с определениями понятий. Только этим можно объяснить и такой удивительный факт, что десятилетиями в некоторых учебниках геометрии давались ошибочные определения, и этого не замечали ни учителя, ни методисты, ни ученики. В качестве примера возьмем учебник Киселева. До сих пор он считается одним из лучших, и время от времени раздаются призывы вернуться к работе по этому учебнику. Не подвергая сомнению качество этого учебника в целом, отметим, что и в нем содержится немало неправильных определений понятий. В самом деле, прилежащие углы определяются как два угла, имеющие общую вершину и общую сторону. Если согласиться с этим и на основе именно этих свойств распознавать прилежащие углы, то мы должны будем отнести к прилежащим следующие углы: *АОС* и *АОВ*, а также углы *АОС* и *ВОС* **(рис. 1)**.

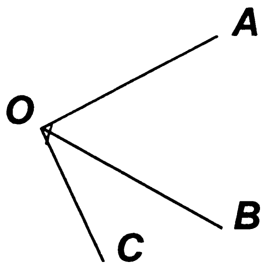


Рис. 1

В самом деле, эти углы имеют все признаки, которые указаны в определении: два угла, общая вершина (точка *О*) и общая сторона (в первом случае общей стороной является *АО*, во втором — *СО*). Но эти углы не прилежащие. Следовательно, определение Киселева не позволяет корректно выделять класс прилежащих углов.

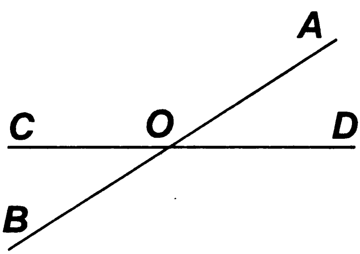


Рис. 2

Аналогичная ситуация с вертикальными углами. Они определяются как два угла, имеющие общую вершину, стороны одного угла продолжают стороны другого. Согласно данному определению, мы должны признать вертикальными **(рис. 2)** не только углы *АОД* и *СОВ*, но и углы *АОД* и угол, дополнительный к углу *СОВ*, так как он образован теми же лучами, что и угол *СОВ*, и вершина его находится в той же точке. На том же основании угол *СОВ* будет вертикален с углом, дополнительным к углу *АОД*.

Аналогичным образом можно доказать, что определение смежных углов, данное в учебнике Киселева, также является неверным. На этом перечень ошибок, содержащихся в учебнике Киселева, не заканчивается. Заметим, что многие из них были обнаружены учащимися, которых мы научили работать с определениями понятий. Когда же определение лежит мертвым грузом в памяти человека, то несостоятельность этого определения не обнаруживается.

Показав необходимость работы с определениями, перейдем к рассмотрению ее организации.

3. Виды действий, используемых при формировании математических понятий. Определения математических понятий можно использовать в разных видах действий. В силу этого сразу же встает вопрос об их выборе. Выбор действия определяется, прежде всего, ***целью*** усвоения понятия. Допустим, понятие усваивается для того, чтобы распознавать объекты, относящиеся к данному классу. В этом случае необходимо использовать действие распознавания, действие подведения под понятие. Если учащиеся не знакомы с этими действиями, то необходимо раскрыть их содержание, показать, как следует выполнять эти действия.

В вышерассмотренных примерах учащимся предлагалось выполнить ***действие подведения под понятие***. В самом деле, им предлагались определенные объекты (эллипс, прямые, пересекающиеся под прямым углом, и др.), и надо было установить, относятся ли эти объекты к соответствующим понятиям (окружности, перпендикулярным прямым и др.). Каково же содержание этого действия? Какое место должно занять в нем определение понятия? Как добиться того, чтобы определение действительно работало и помогало учащимся безошибочно распознавать объекты, относящиеся к соответствующему понятию?

Действие подведения под понятие состоит из следующих компонентов:

1. Указание системы необходимых и достаточных свойств объектов данного класса. При этом предполагается, что учащиеся уже знают особенности этих свойств и отличают их от других: существенные — не существенные; необходимые — достаточные; необходимые и одновременно достаточные. Последние обычно указываются в **определениях понятий**. Следовательно, учащиеся должны уметь выделять их из определения.

2. Установление, обладает данный объект выделенными свойствами или не обладает.

Правильное выполнение этой части действия подведения под понятие предполагает, что учащийся уже усвоил способы опознания проверяемых свойств. Так, если надо проверить, являются ли линии прямыми, то учащийся должен уметь воспользоваться линейкой. Аналогично, при проверке величины угла — транспортиром, угольником и т. д. Но практические умения помогут ученику только тогда, когда распознаваемый объект представлен в виде чертежа, рисунка, реального предмета. Если же объект задан через описание, то ученик должен уметь анализировать условие задачи, выделять в нем информацию о проверяемом свойстве.

3. Заключение о принадлежности объекта к данному понятию. Для правильного выполнения этой части действия учащиеся должны знать виды логических структур признаков: конъюнктивная, дизъюнктивная. Если учащиеся не знают этого, то они не смогут правильно оценить полученный ими результат. В самом деле, при конъюнктивной структуре признаков понятия надо руководствоваться следующим правилом:

— объект относится к данному понятию в том и только в том случае, когда он обладает всей системой необходимых и достаточных признаков;

— если объект не обладает хотя бы одним из признаков, то он не относится к данному понятию;

— если хотя бы про один признак ничего неизвестно, то при наличии всех остальных признаков неизвестно, принадлежит или не принадлежит объект к данному понятию.

Для понятий с дизъюнктивной структурой признаков правило имеет такой вид:

— объект относится к данному понятию, если он обладает хотя бы одним признаком из числа альтернативных;

— если объект не обладает ни одним из этих признаков, то он не относится к данному понятию;

— если ни про один из признаков неизвестно, есть он или его нет, то неизвестно, относится или не относится этот объект к данному понятию.

В вышеуказанных примерах понятия (окружность, перпендикуляр, смежные углы) имеют конъюнктивную структуру признаков, поэтому положительный ответ будет иметь место только при наличии всей их системы, указанной в определении.

Как видим, содержание действия подведения под понятие требует специального анализа, предполагает целую систему предварительных знаний и умений, причем не только из математики, но и из логики. Определение понятия входит в содержание ***ориентировочной основы*** этого действия. Кроме определения понятия, в нее входит также логическое правило подведения под понятие. Учащийся должен опираться и на то, и на другое при выполнении данного действия.

4. Организация процесса усвоения. Нет никакой необходимости заставлять учащихся заучивать содержание ориентировочной основы действия наизусть. Ее запоминание может происходить непроизвольно как результат использования ее при решении задач на подведение под понятие. Но как учащийся может использовать то, что он еще не запомнил? Для этого используются различные внешние формы представления необходимой информации — содержания ориентировочной основы действия. Наиболее доступная из них — учебная карта. После объяснения сути понятия и ознакомления учащихся с тем, как надо распознавать объекты, относящиеся к этому понятию, учитель или предлагает ученикам уже готовые учебные карты, или они составляют их сами с помощью учителя, что более желательно для поддержания мотивации учащихся. В данном случае карта имеет примерно такой вид (применительно к понятию «перпендикулярные прямые»):

Признаки понятия:

1. Две прямые линии.
2. Пересекаются.
3. Образуют угол 90°.

Правило распознавания перпендикуляров:

1. Проверить, есть ли у данного объекта указанные признаки.

2. Отметить результат проверки каждого признака: + (есть), — (нет), ? (неизвестно).

3. Оценить полученный результат по логическому правилу.

Логическое правило:

1. Объект относится к данному понятию только тогда, когда обладает всеми указанными свойствами.

2. Если объект не обладает хотя бы одним признаком — он не относится к данному понятию.

3. Если хотя бы про один признак неизвестно, есть он или его нет, то при наличии других признаков неизвестно, принадлежит или не принадлежит объект к данному понятию.

Схема логического правила:

№ 1

$$\left.\begin{array}{ll}1 & +\\ 2 & +\\ 3 & +\end{array}\right| \quad +$$

№ 2

$$\left.\begin{array}{ll}1 & +\\ 2 & +\\ 3 & -\end{array}\right| \quad -$$

№ 3

$$\left.\begin{array}{ll}1 & +\\ 2 & +\\ 3 & ?\end{array}\right| \quad ?$$

№ 4

$$\left.\begin{array}{ll}1 & -\\ 2 & +\\ 3 & ?\end{array}\right| \quad -$$

Используя учебную карту при решении задач на подведение под понятие, учащиеся постепенно запомнят ее содержание и перестанут обращаться к ней. После этого они будут воспроизводить содержание учебной карты в устной форме и действовать в соответствии с ним. При этом очень важно, чтобы учащиеся несколько раз полностью называли все рекомендации, указанные в карте. С этой целью надо использовать работу парами, что делает естественным проговаривание содержания учебной карты вслух. Затем ученики будут работать уже индивидуально, вспоминая необходимые указания про себя[1]. Отметим, что для работы необходимо давать задания со всеми возможными видами ответов. Только в этом случае произойдет не только полноценное формирование понятия, но и достаточная мера его обобщенности. Наконец, при такой организации работы происходит одновременно и формирование понятия, и формирование действия подведения под понятие, где последнее будет успешно функционировать.

Естественно, что для более глубокого усвоения понятий важно использовать не одно, а несколько действий: сравнение, выведение следствий, классификацию и др. Ценность и число действий, в которых функционирует данное понятие, и служит показателем качества его усвоения. Рассмотрим несколько подробней эти действия. Выведение следствия фактически

1 См. подробней об этом в нашей книге «Формирование познавательной деятельности младших школьников», М., «Просвещение», 1988.

противоположно действию подведения под понятие. В самом деле, при подведении под понятие надо по системе определенных свойств решить вопрос о принадлежности данного предмета к классу объектов, зафиксированных в понятии. При выведении же следствий с самого начала известно, что объект принадлежит к данному классу. Задача заключается в том, чтобы из этого факта принадлежности получить следствия, сделать выводы о свойствах этого объекта. Таким образом, в первом случае совершается переход от свойств объекта к принадлежности к классу, а во втором — наоборот. Например, известно, что фигура является треугольником. Что можно сказать об этой фигуре? Какие у нее свойства? Выполнение этого действия также предполагает знакомство учащихся с видами свойств. В данном случае решение задачи основано на необходимых свойствах. Каждый объект определенного класса в обязательном порядке обладает некоторой системой свойств, без которых он не может принадлежать к данному классу объектов. В случае с треугольником это, прежде всего, свойства, указанные в его определении: замкнутая фигура, состоит из трех отрезков прямой. Эти свойства не только необходимые, но одновременно и достаточные для опознавания фигуры как треугольника. Кроме них, любой треугольник имеет еще следующие необходимые свойства: сумма внутренних углов равна 180°, сумма любых двух сторон больше третьей стороны, любой внешний угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, и др. Действие выведения следствий обогащает понятие о треугольнике, делает его более содержательным.

Действие сравнения помогает учащимся понять место усваиваемого понятия среди других. Как и предыдущие действия, сравнение происходит на основе существенных свойств. Так, треугольник может быть сравнен с углом, с окружностью, с четырехугольником по свойствам, указанным в определении: замкнутость, количество отрезков, отрезки прямой линии.

Что касается классификации, то она дополнительно требует понимания родо-видовых отношений и, естественно, предполагает наличие понятий о роде и виде. Для изучения математики классификация необходима. Так, деление треугольников по углам на остроугольные, прямоугольные и тупоугольные — это уже элементарная классификация. В качестве родового понятия выступает понятие треугольник, в качестве видовых — три указанных подкласса треугольников. Следует отметить, что в учебниках математики можно найти неверные классификации, которые, естественно, ведут к алогичности мышления учащихся. Вот один из примеров.

Ученицу шестого класса просим сказать, какой треугольник называется равнобедренным. Получаем правильный ответ. Ученица правильно отвечает и на вопрос, какой треугольник называется равносторонним. После этого задаем третий вопрос: «Равносторонний треугольник можно назвать равнобедренным?» Ответ: «Нет». Продолжаем диалог:

— У равнобедренного треугольника сколько равных сторон?

— Две.

— А у равностороннего сколько?

— Три.

— Ну, если у равностороннего все три стороны равны друг другу, то среди них можно найти две стороны равные друг другу?

— Можно.

— Значит, равносторонний треугольник можно назвать равнобедренным?

— Нет.

— Почему?

— А у него и третья сторона равна.

Как видим, ученица продемонстрировала непонимание отношений между различными видами треугольников, выделяемых по соотношению сторон. Но такое же непонимание мы обнаружили и у автора учебника, по которому она обучалась. В учебнике треугольники расклассифицированы на разносторонние, равнобедренные и равносторонние. Как следствие этого у ученицы сформировалось ложное понятие о равнобедренных треугольниках как таких, у которых при равенстве двух сторон третья обязательно не равна им. Если следовать требованиям логики, то указанные виды треугольников нельзя рассматривать как виды одного и того же уровня: равносторонние треугольники являются частным случаем равнобедренных, т. е. относятся к следующему уровню классификации.

Действие классификации более сложное, чем вышерассмотренные. Классификация позволяет, с одной стороны, включать изучаемое понятие в систему других, ранее изученных, с другой — увидеть подклассы объектов, входящих в объем изучаемого понятия. Так, четырехугольник может быть рассмотрен и как один из видов многоугольников и как родовое понятие, включающее целое множество различных видов: прямоугольники, квадраты, ромбы, параллелограммы и др. Классификация включает ряд действий и требует выполнения ряда условий. Прежде всего, учащиеся должны научиться выбирать основание для классификации и сохранять его до конца работы — пока не исчерпают весь объем понятия. В качестве основания для классификации берутся, естественно, существенные признаки понятия.

Не останавливаясь на других действиях, связанных с усвоением понятий, отметим лишь, что именно действия с признаками понятий и служат средством усвоения последних. Качество усвоения понятия определяется тем, что может делать учащийся с этим понятием. Таким образом, критерием знания опять же служит действие, его ценность. Понятие неразрывно связано с действиями как в процессе своего становления, так и в процессе функционирования.

Не рассматривая подробно процесса усвоения, заметим лишь, что он идет как процесс решения задач. Действие нельзя усвоить, не выполняя его, а выполнение действия предполагает адекватную ему задачу. Таким образом, процесс усвоения постоянно носит проблемный характер. Выполняемые действия с признаками понятий и служат инструментом построения понятия, его порождения. Понятие — продукт собственных действий учащихся. Второе важное замечание касается того, что математические понятия (как и любые другие) не могут быть усвоены без усвоения целой системы начальных логических знаний и умений.

Многочисленные исследования показали, что при выполнении указанных рекомендаций усвоение научных понятий идет весьма успешно. При этом учащиеся с самого начала ориентируются только на существенные признаки, используют их осознанно и произвольно.

В заключение отметим, что современные исследования подтвердили также важность системности в усвоении знаний, в том числе — и понятий. В силу этого понятия должны усваиваться не изолированно друг от друга, а как элементы единой системы. Так при изучении видов углов в геометрии ученики обычно постепенно знакомятся с отдельными видами углов по величине (от острого до полного), затем с частными видами отношений двух углов (вертикальные, прилежащие, с параллельными и перпендикулярными сторонами и др.). Каждый раз учащиеся заучивают определения, но далеко не всегда могут сравнить эти углы, понять основу, которая соединяет множество частных вариантов.

Если же подойти к этому множеству вариантов со стороны порождающего их ***инварианта*** (основы), то, окажется, что нет необходимости изучать каждый частный случай углов отдельно: учащиеся могут получить их самостоятельно и одновременно. Для этого предметом усвоения должен быть ***инвариант*** и метод работы с ним. В данном случае в качестве инварианта выступает система переменных, без которых не может быть ни один угол: 1) наличие вершины; 2) наличие сторон; 3) пространственное положение того и другого. Варьируя эти переменные, мы и получим все разновидности углов. Так, изменяя пространственное положение сторон угла, получим углы острые, прямые, тупые, развернутые, полные. Ученики легко получают все эти частные случаи, учителю же остается лишь сказать, как они называются. Отпадает при этом и необходимость заучивания определений: ученики смогут составить их самостоятельно, если они ранее были ознакомлены с принципами построения определений, усвоили понятия о роде и виде.

Разновидности отношений двух углов получаются путем варьирования пространственного положения их вершин и сторон. Что касается вершины, то она может быть общей или не общей; стороны дают большее количество вариантов: общая, не общая; не общие стороны могут продолжать друг друга, могут быть расположены параллельно, перпендикулярно. Учащиеся с удовольствием ищут все новые и новые варианты и получают постепенно целостную систему, где они легко могут двигаться, устанавливать общие и отличительные признаки вариантов, составлять определения для частных случаев.

Системный подход к понятиям позволяет не только резко сократить время изучения понятий, но и добиться более глубокого и прочного их усвоения.

Н. Г. Салмина

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Цели изучения начального курса математики формулируются согласно объяснительной записке к программе по математике следующим образом: «обеспечить числовую грамотность учащихся и умения производить все арифметические действия в области неотрицательных целых чисел; сформировать элементарные навыки работы на микрокалькуляторе и простейших ЭВМ; дать начальное математическое развитие, включающее в себя умения наблюдать и сравнивать, сопоставлять, анализировать, проводить простейшие обобщения и интерпретировать их на новых конкретных примерах; развитую математическую память и речь»[1]. Однако, как показывает практика обучения, далеко не все учащиеся начальной школы достигают этих целей и, как известно, имеют трудности не только при решении задач, но и в вычислительной технике. Это ставит задачу выявления условий, которые сделают возможным усвоение программы на необходимом, требуемом программой начальной школы уров-

1 Объяснительная записка к программе по математике для начальной школы, 1992.

не и тем самым достижение поставленных целей всеми учащимися.

Одним из таких условий является введение базовых понятий в начало обучения. Другое — создание пропедевтических курсов, целью которых является повышение исходного уровня учащихся, приступающих к изучению начальной математики. Реализация этих условий позволяет снять основные трудности, возникающие у детей в начале изучения математики.

Рассмотрим один из возможных подходов в реализации указанных условий, обеспечивающий не только снятие трудностей, но и эффективное формирование начальных математических понятий у учащихся.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ КУРСА МАТЕМАТИКИ ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ.

Согласно проведенным исследованиям очень важно уже на первых этапах обучения вводить те теоретические положения, которые в дальнейшем обеспечивают учащимся ориентировку в курсе математики. Обладая высоким уровнем обобщенности, они открывают возможность широкого переноса, построения на их основе полноценных знаний и умений. В связи с этим стоит задача выделения с одной стороны таких общих умений, которые важны для овладения любыми знаниями, с другой — математических, определяющих формирование конкретной системы знаний данного учебного предмета.

Вопрос о составе базовых знаний и умений в разных концепциях математического образования решается по-разному. На основе фундаментальных данных, полученных в ранее проведенных исследованиях, в качестве базовых компонентов мы выделили:

1) начальные логические знания и операции;

2) необходимые виды знаково-символической деятельности;

3) простейшие математические понятия и отношения.

Эти компоненты должны быть предметом усвоения пропедевтического курса, предваряющего изучение основного курса начальной математики.

Остановимся на раскрытии содержания этих компонентов.

Логическая пропедевтика. В работах крупнейших математиков мира указывается, что большая часть математических знаний предполагает умение оперировать логическими операциями. Как показали работы, проведенные под руководством П. Я. Гальперина, Н. Ф. Талызиной, они не развиваются полноценно без целенаправленного обучения. Каким же логическим операциям необходимо научить детей 6-7-летнего возраста, приступающих к изучению математики?

Согласно Ж. Пиаже, число — это синтез сохранения, классификации и сериации, которые и должны быть сформированы предварительно у детей, приступающих к изучению математики. Теоретико-экспериментальный анализ, проведенный В. В. Давыдовым показал, что синтез этих операций не происходит без специального обучения. В основе этого синтеза лежит специфическое действие, связанное с поиском кратного отношения величин в условиях их опосредствованного уравнивания. В процессе осуществления этого действия и возникает синтез классификации и сериации и на его основе подлинное понятие числа.

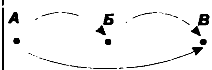
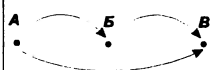
Исследования, проведенные под руководством П. Я. Гальперина, начало которым положил Л. Георгиев, показали, что в основе ошибочных решений задач на сохранение лежит неразличение свойств объекта, неумение их выделять. Обучение детей умению различать свойства объектов привело к исчезновению такого рода ошибок. Наш опыт обучения показал, что необходимо расширить набор признаков и не ограничиваться выделением длины, ширины, высоты, формы, цвета, площади и массы, а включать топологические характеристики, несущественные свойства объектов, которые дети должны уметь видеть в них.

Все это послужило основанием для отбора содержания логической пропедевтики, которая включает овладение умением выделять свойства в объектах, операциями сохранения, сериации, классификации и их синтеза в условиях опосредствованного уравнивания. Усвоение этого содержания служит основой формирования понятия числа.

Курс начинается с овладения умением выделять свойства (объекта и др.) потому, что оно необходимо для выполнения заданий во всех последующих темах (логические операции, действия над множествами, пространственная ориентировка и др.).

Тема «Выделение признаков в различных объектах» включена во все программы по обучению математике в начальной школе. Этой теме обычно уделяется в учебниках несколько заданий на начальных этапах изучения математики. Отличие введения этой темы в нашей программе от других определяется не только целями, но и типами заданий, а также способами и средствами их выполнения. Эта тема отрабатывается в течение всего первого года. Логическая пропедевтика предусматривает формирование понимания и использования некоторых аксиом для описания величин, а также логических операций.

В качестве предмета усвоения были взяты аксиомы, раскрывающие понятие «величина» через отношение сравнения, а также способы изображения этих отношений. Представим это содержание ниже.

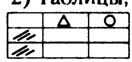
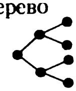
Умения	Признаки	Схемы отношений
Понимание и использование аксиом величин		
а) если А=Б, то Б=А		
б) если А=Б и Б=В, то А=В		
в) если А>Б, то Б<А		
г) если А>Б и Б>В, то А>В		

Логические операции формировались в соответствии с содержанием, необходимым для полноценного усвоения понятия числа.

Сериация — упорядочение объектов по выделенному основанию — включает в себя ряд умений, которые представлены ниже в таблице (как и признаки, выступающие в качестве основания, материал, используемый для отработки, а также символика этой операции).

Умения	Признаки	Материал	Знаки
I. Выделение признака (одного или нескольких) при изменении его в ряду предметов, фигур.	По разным признакам (одному или нескольким): форме, деталям формы, цвету, величине, пространственному положению фигуры или ее отдельных элементов и т. д.	Использование реальных предметов и графически представленных.	
II. Выстраивание ряда объектов по изменяющемуся признаку (в т. ч. и числа).	Включая все признаки, в том числе способ соединения фигур, элементов фигур, симметрию, чередование.	Варьирование числа элементов, изменяющихся у объектов в рядах.	
III. Построение фигуры в соответствии с выделенным принципом изменения фигур в рядах.			

Классификация включает сложную систему действий, освоение каждого из которых представляет нелегкую задачу для учащихся, что предполагает выстраивание усложнения заданий по разным направлениям и прежде всего по составу умений. Представим ниже в таблице состав умений, признаки, на которых они отрабатываются и схематические средства, используемые при выполнении заданий.

Умения	Признаки	Материал	Знаки
I. Умение образовывать классы объектов: а) выделение основания для объединения объектов в группы; б) нахождение обобщающего понятия для групп объектов и обозначение его символом; в) выделение существенных и несущественных признаков объектов и основания классификации;	Используются все признаки	Реальные предметы, в том числе пуговицы, различающиеся материалом, цветом, рисунком, формой, числом дырочек и др.; геометрические фигуры (плоскостные и объемные), фигуры неопределенной формы и др.; графический материал (рисунки объектов, геометрических форм).	1) Знаки объектов, знаки признаков, 2) Таблицы,  дерево  диаграммы Венна 

г) смена основания группировки, т. е. образование из одних объектов разных классов (по одному признаку); д) дихотомическая классификация, отрицание понятия; е) классификация по двум и более признакам; ж) родово-видовые отношения: ограничение понятия (нахождение видового понятия для родового), обобщение понятия, решение задач на включение классов, исключение элементов, не относящихся к классу, пересечение понятий.			

Символическая пропедевтика. Она направлена на освоение умений создавать знаки и символы для обозначения объектов, признаков и др., оперировать системами знаково-символических средств, выражать содержание (объекты, явления, признаки, отношения, действия, преобразования) в разных знаково-символических формах, переходить от одного языка к другому, от одного плана к другому (по знакам восстановить реальность и обратно), отделять содержание от формы представления.

Выдающиеся психологи Л. С. Выготский и А. Р. Лурия писали об особенностях психического развития человека: подобно тому как в процессе исторического развития человек изменяет не свои естественные органы, а орудия, так и в процессе своего психического развития человек совершенствует работу своего интеллекта главным образом за счет развития особых технических «вспомогательных средств мышления и поведения». Психическое развитие человека осуществляется через усвоение всего предшествующего опыта, культуры, включающей в том числе и различные знаково-символические системы. В психологии, начиная с Л. С. Выготского, придается исключительное значение освоению знаковых систем в психическом развитии ребенка, все большее внимание уделяется и разработке этой проблемы.

Выполнение математических заданий уже с самого начала по любым действующим программам требует использования разных знаково-символических средств (цифры, буквы, схемы), которые нигде не выступают специальным объектом усвоения с точки зрения характеристик их как знаковых систем. С целью введения детей в научную символику необходимо с нашей точки зрения, предварительно сформировать деятельность кодирования-декодирования сначала на произвольной, самостоятельно создаваемой детьми символике с постепенным переходом к социально принятой. При этом знаки и символы должны включаться в их предметную деятельность прежде всего для решения задач, близких к жизненным, а затем уже математических. Это делает более понятной и мотивированной в дальнейшем математическую символику и задания, предполагающие выполнение кодирования-декодирования.

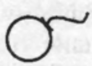
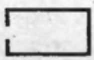
Одним из важных условий формирования полноценных знаний является использование разных языков для выражения одного и того же содержания как способа отделения содержания от формы. При этом речь идет не о единичных знаках, а о системах, существующих в науках (буквенно-цифровая символика, таблицы разного рода, графики, логическое дерево и т. п.), Так, например, при формировании логической операции классификации содержание, представленное вербально, целесообразно переводить на язык графики (диаграммы Венна, таблицы, логическое дерево), и обратно.

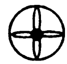
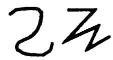
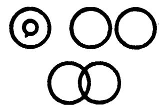
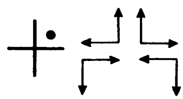
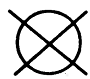
Существенным для детей, недостаточно хорошо владеющих деятельностью чтения, может стать форма представления заданий. Вербальные тексты, имеющиеся в обычных учебниках (формулировки заданий, сюжетные задачи), вызывают большие трудности у детей, приступающих к изучению начальной математики. Одной из таких причин может быть неправильное понимание текста задач, переформулирование детьми заданий, не всегда правильное. Средствами эффективного включения детей в выполнение заданий могут выступить максимальное введение символики в формулирование заданий и визуализация заданий. Представление заданий в символах и знаках на материале разного рода таблиц, схем при сохранении одной и той же системы обозначений делают задания понятными для всех, в том числе и для плохо читающих.

Формирование символических умений осуществляется на логическом материале. Удобной для отработки этого компонента оказалась тема «Выделение признаков». Она послужила основой формирования кодирования-декодирования. Выделяя признаки, учащиеся фиксировали их в знаках и символах.

Важным для усвоения этой темы является то, что в данной программе длительное время употребляется произвольная символика, создаваемая детьми, затем постепенно происходит переход к общепринятой. Вначале знаки и символы включаются в предметную деятельность детей для решения задач, хорошо им известных. Ниже в таблице приведены знаки, к которым постепенно приходят учащиеся при выполнении заданий. В дальнейшем они сменяются символикой, принятой в математике.

Содержание программы включает формирование умений, выделенных в этой теме. Опишем состав умений, признаки, на которых они отрабатываются и символику, применяемую при выполнении заданий.

Умения	Признаки	Знаки признаков и операций
I. Кодирование объектов (декодирование).	форма	
II. Выделение признаков объектов и кодирование их:	цвет	
а) в произвольной, самостоятельно созданной символике;	размер	
б) в заданной символике, социально принятых знаковых системах.	площадь	
	объем	
III. Описание объектов по совокупности признаков с фиксацией их в символике.	количество	
Сравнение объектов по признакам.	высота	
Выделение существенных и несущественных признаков.	ширина	

Умения	Признаки	Знаки признаков и операций
	длина	
	замкнутость — незамкнутость фигур	
	материал	
	функция (как используется)	
	ломаная, кривая	
	пространственные отношения фигур (внутри, вне, пересечение)	
	положение в пространстве (верх — низ, правое — левое)	
	направление	
IV. Кодирование (декодирование) операций с признаками: а) отрицание признака (круглые — НЕ круглые и др.) б) изменение признака		 

Математический компонент пропедевтического курса. П. Я. Гальперин на основе фундаментальных исследований пришел к выводу, что полноценные математические понятия могут быть сформированы только после предварительного освоения общих математических действий, понятий, отношений, в состав которых он включал: действие измерения с использованием меток для фиксации результатов измерения и последующего опосредствованного сравнения величин; владение отношениями «больше-меньше», «равно-не равно», операциями уравнивания величин. В нашем курсе еще до введения числа учащиеся осваивают общие математические отношения: «больше», «меньше», «больше-меньше на»., «равно», «не равно», «столько же» на основе установления взаимно-однозначного соотнесения (непосредственного и опосредствованного с помощью меток). Отработка этих умений необходима в дальнейшем для введения числа в действии измерения. Приведем в таблице состав умений, которые должны быть усвоены учащимися прежде чем осуществится переход к измерению.

Умения	Материал	Знаки
I. Соотнесение элементов множеств (1:1, 1:2, 1:3 и т. д.), классов; операция расстановки элементов разных множеств для определения соответствия, их упорядочивание.	при разном пространственном размещении элементов множеств и классов, использование реальных и графически представленных объектов	
II. Сравнение множеств, установление их эквивалентности с формулированием результатов сравнения: «столько же (поровну)», «больше-меньше», «больше-меньше на столько-то».	— « —	
III. Использование меток как заместителей элементов множеств или классов для сравнения их по количеству: а) понимание метки как заместителя элемента множества или класса; б) замена меткой каждого элемента множества. При этом каждое множество заменяется своим набором меток (что не позволяет смешивать элементы разных множеств); в) установление взаимно-однозначного соответствия меток; г) сравнение рядов меток; д) на основе соотнесения меток и сравнения рядов — формулирование результатов сравнения реальных множеств или классов.	— « —	

Умения	Материал	Знаки
IV. Уравнивание количества элементов разных множеств и классов 2-мя способами: а) удалением лишних элементов большего множества; б) добавлением недостающих элементов в меньшее множество.	— « —	
V. Укомплектование множеств — элементам одного множества подобрать соответствующие ему по разным признакам (функции и др.) элементы других множеств.	использование реальных и графически представленных объектов.	

В состав этих предварительных знаний входит и понятие меры, на основе которого строятся все последующие разделы, связанные с освоением числа и действий с ними. Понятие меры вводится и отрабатывается в действии измерения. На основе меры вводится понятие единицы. Единица — это отношение того, что отмерено и равно своей мере. При таком введении единицы непосредственная оценка количественных отношений, характерная для дошкольников и подкрепляемая с переходом к изучению начальной математики традиционным обучением (единица по общепринятой программе вводится через противопоставление одного предмета и ряда предметов), сменяется опосредствованным, через отношение к мере. Понятие меры действительно можно считать структурирующим, поскольку, положив его в основу единицы, мы тем самым формируем число как отношение величины к мере, что является принципиально важным при формировании понятия числа. «Тождество понятий «число» и «отношение» должно лежать в основании всякого рационального обучения счислению».

Приведем в таблице состав умений, включающих содержание измерения величин, усвоение которого как и ранее рассмотренный материал делают возможным полноценное формирование понятия числа. Еще раз подчеркнем, что отработка измерения предусматривается не с целью овладения учащимися практическими умениями, а прежде всего для введения понятия числа.

Умения	Признаки	Материал	Знаки
I. Измерение величины: а) выбор величины для измерения; б) выбор меры, соответствующей измеряемой величине: адекватность (что чем можно измерять), удобство; в) процесс отмеривания: точность, законченность действия, получение результата с остатком, без остатка; г) понимание того, что метка-заместитель одного шага измерения, равного мере; совокупность меток-заместитель измеряемой величины, число.	Длина, ширина, размер, объем, количество, высота.	Длина, ширина предметов, прямые, кривые, ломаные линии; сыпучий материал, вода. Сначала измерение реальных объектов, затем графически представленных.	
II. Сравнение величин: а) какие величины можно сравнивать; б) при любой ли мере можно проводить сравнение, (измеренные одной и той же мерой); в) понимание невозможности сравнения результатов, полученных разными мерами при разном количестве меток; г) метод сравнения через взаимно-однозначное соотнесение меток.		Сравнение величин после реального измерения и результатов измерения, проведенного другими по меткам.	$>$, $<$ $=$, $\neq$
III. Зависимость между величиной, мерой и количеством меток, полученных в результате измерения: а) при измерении одной величины разными мерами меток больше там, где измеряли меньшей мерой; б) при измерении одной величины разными мерами мера больше там, где получилось меньше меток; в) если при измерении разных величин разными мерами получено равное число меток, величина будет больше там, где мера больше;		Переливание равного количества жидкости в разные по форме, высоте, ширине сосуды.	

Умения	Признаки	Материал	Знаки
IV. Введение числа 1 как отношения величины к мере; нуль как начало измерения; нуль как численность пустого множества.		Измерение реальных объектов и графически представленных.	
V. Закон образования последующего числа a+1 и предыдущего числа a-1. Получение чисел от 0 до 9, порядковый и количественный счет.		Использование для порядкового и количественного счета числового луча. Знаки операций: +, -, символика с цветными отрезками.	

Основной курс. Содержание основного курса составляет усвоение понятия система счисления, включая и десятичную, арифметических действий, обобщенный способ решения арифметических задач и элементы геометрии.

Одним из серьезных дефектов современного обучения математике является то, что учащиеся не различают числа и цифры, реальную величину и фиксацию ее в знаках. Помимо символической пропедевтики для преодоления этих дефектов обучения может быть введено изучение систем счисления с разным основанием до десятичной системы счисления. Работа с разными системами счисления позволяет развести формальные и содержательные аспекты понятия числа, увидеть варианты символического представления величин. При этом понятие меры позволяет выделить единый принцип построения и записи чисел и рассматривать десятичную систему счисления как частный случай. Такое введение дает возможность сформировать четкие представления о числе, понять гениальную простоту десятичной системы счисления и освоить арифметические действия.

Освоение понятия системы счисления включает формирование целого ряда умений, часть из которых должна стать предметом усвоения уже в пропедевтическом курсе, где предусматривается предварительное знакомство с отдельными составляющими понятия «система счисления». В качестве составляющих понятия «система счисления» включены следующие умения:

I. Выделение меры и образование групп объектов.

1) Выделение меры счета. Определение системы счисления по указанию отдельных составляющих.

2) Образование групп объектов в соответствии с мерой. Догруппировка в соответствии с мерой.

3) Закон образования старшего разряда в любой системе, соотношение между разрядами.

II. Запись полученного числа.

1) Построение разрядной сетки в соответствии с выбранной мерой.

2) Выделение количества цифр в системе.

3) Построение числового ряда.

4) Запись числа.

III. Восстановление групп и отдельных элементов по записи в разрядной сетке и указанию меры. Раздробление сгруппированных объектов.

IV. Сравнение чисел при группировке одинакового количества предметов разными мерами.

После усвоения этих умений осуществляется постепенный переход к десятичной системе счисления. Десяток рассматривается как новая мера, в которой десять раз уложилась прежняя мера (имея в виду одно и то же основание единицы). Аналогично понимаются и другие разрядные единицы. Соотношение разрядов выступает как отношение мер. На основе понятия меры вводится и умножение, где множимое выступает как мера, а разница в произведениях смежных чисел равна величине меры. Выделение единого принципа построения системы и связанных с ней действий весьма облегчает обучение и усвоение действий с многозначными числами, снимает трудности при переходе к изучению десятичных и обыкновенных дробей и действий с ними и дает возможность широкого переноса принципа.

При изучении десятичной системы счисления мы исходим из того, что она может быть лучше всего усвоена, если не дробится на концентры, а сразу вводится как система классов, состоящих из разрядов.

Как писал А. С. Пчелко, гениальная простота десятичной системы счисления, десятичный ритм ее построения ярко и легко усваиваются только тогда, когда мир больших чисел развертывается перед нами сразу в широких масштабах. Единство принципа в построении всего многообразия чисел дает себя чувствовать с большой силой на структуре больших чисел. Частности и детали в этом вопросе можно лучше усвоить на фоне общего и целого. К сожалению, это не реализуется в преподавании. А. С. Пчелко относил эти рекомендации к обучению арифметике в третьем классе, но ведь изучение чисел и действий с ними начинается с первого.

Нельзя показать принцип десятичности, позиционный принцип на двух разрядах. Введение десятичной системы в неограниченном пределе дает возможность сразу отрабатывать общий принцип действий сложения и вычитания без выделения приемов в зависимости от величины и структуры числа.

Описанная система обучения позволяет избежать переучивания в процессе обучения нумерации и действиям, снять тот ход усвоения у учащихся, при котором частный прием выступает в качестве общей закономерности и усвоение других приемов происходит через разрушение ранее усвоенного частного приема. Обучение действиям через усвоение принципов построения систем счисления, рассмотрение действий как средств, раскрывающих особенности десятичной системы, приводит к осознанному формированию вычислительной техники. Обобщение действия, усвоение общего принципа действия может произойти в том случае, если с самого начала принципы раскрываются и осваиваются на разнообразных типах. Более позднее формирование обобщений психологически означает переучивание, потому что складываются частные обобщения.

§ 2. ОРГАНИЗАЦИЯ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ УЧАЩИМИСЯ.

Для формирования указанных составляющих была разработана обучающая программа. Не имея возможности рассмотреть здесь подробно всю программу, опишем основные направления работы с учащимися по каждой из составляющих курса. Следует также указать, что несмотря на разные задачи, стоящие в этих разделах и выделенность для каждой из них специальной системы заданий, отработка компонентов осуществлялась параллельно. Таким образом логическая и символическая пропедевтика проходила не последовательно, а одновременно. Здесь же выполнялись задания на усвоение отношений (равно, неравно и др.). Число и операции с ним вводились в измерении после достаточно хорошего овладения указанными составляющими. Число как бы аккумулирует в себе все эти знания. С переходом к усвоению понятия числа отработка логических и символических умений не прекращается, а постепенно переходит на более сложные уровни деятельности, предусмотренные заданиями на сериацию, классификацию, а также заданиями на знаково-символическую деятельность (например, перевод информации, выраженной на одном языке — в другой и др.).

Задания на формирование знаково-символической деятельности и логического компонента включают отработку вышеперечисленных умений. Усложнение заданий осуществляются не только по формальным признакам (от выделения 1-2 признаков в объекте до их комплекса, от 1-2 объектов до группы), но и по уровню анализа признаков. Вначале учащиеся учатся выделять признаки и их кодировать, в дальнейшем перед ними ставится задача анализа признаков с точки зрения их существенности для характеристики объекта. При этом отрабатывается относительность рассмотрения ряда характеристик как существенных или несущественных. Задания различаются между собой еще и тем, что является предметом анализа и кодирования: либо сами объекты или их признаки, либо явления, либо отношения, либо процессы и действия. Сложность выполнения заданий определяется также и формой его представления и соответственно решения. По мере усвоения широко используются матрицы и координатная сетка для фиксации в них признаков и отношений.

Содержание перечисленных умений диктует определенные требования к дидактическому материалу, необходимому для формирования знаний. Набор геометрических фигур, широко практикуемый при обучении выделению признаков и при усвоении начальных логических понятий не должен выступать в качестве основного дидактического средства. Дело не только в том, что геометрические блоки — это «очищенный» материал, облегчающий и нормирующий возможное число выделяемых признаков. Но сам набор форм очень ограничен (круги, квадраты, треугольники и прямоугольники). Важно включать как можно большее разнообразие форм, в том числе и необычные. Ограниченное число признаков, имеющихся в наборе геометрических фигур, ведет к тому, что анализ объектов стереотипизируется, и все логические игры на эти признаки быстро становятся формализованными, заученными. Умение выделять признаки геометрических фигур и совершать с ними логические операции не означает того, что учащийся так же легко может описывать свойства реальных объектов или другого дидактического материала. Отсюда — первая задача — расширение набора признаков, приближение к реальным объектам дидактического материала.

Кроме того важно, чтобы признаки объектов (при формировании умения выделять их) вводились не постепенно, последовательно, а одновременно, т. е. объект должен рассматриваться через совокупность признаков. Приведем примеры некоторых типов заданий.

Установление пространственных отношений.

Задание 1. Детям дается сетка (матрица) **(рис. 1)**, в которой на пересечениях линий расположены фигуры. Им говорится, что от одной фигуры нужно пройти к другой (от одного домика к другому) и при этом отмечать стрелками каждую пройденную клетку. Число стрелок должно соответствовать числу клеток, а направление стрелок — направлению движения.

Дети должны поставить стрелки сначала в матрице, а затем воспроизвести их между такими же фигурами вне матрицы. На образце показано, как должен выполнить задание ученик, двигаясь от ромба к квадрату (в матрице и затем вне нее). Следующее задание ученик выполняет сам, сначала проставляя стрелки в матрице от □ к △ (→↓↓) и от △ к ○ (↓← ←), затем воспроизводя этот путь между теми же фигурами вне матрицы.

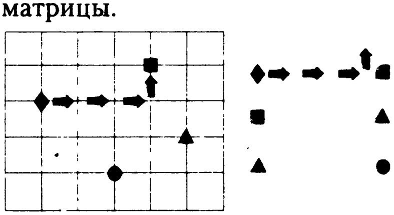


Рис. 1

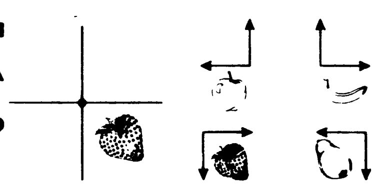


Рис. 2

Задание 2. Задания этого типа ставят целью формирование умения ориентироваться в системе координат: выделять правую верхнюю часть, правую нижнюю часть, левую верхнюю и левую нижнюю части **(рис. 2)**. Для выполнения задания используется соответствующая этим направлениям система символов (, , ,). В заданиях от детей требуется нарисовать в координатной сетке фрукты. Место каждого из них определено стрелкой, изображенной около фруктов. Дан образец выполнения задания. В результате учащийся должен нарисовать банан в правом верхнем углу, яблоко — в левом верхнем,грушу — в левом нижнем углу.

Большая часть заданий посвящена формированию умений различать замкнутые и незамкнутые фигуры, а также ломаные или кривые линии.

Задание 3. Один из типов таких заданий можно условно назвать «найди дом фигуре». **(рис. 3)**. Учащиеся должны расположить в квадраты («домики») фигуры, нарисованные одна под другой (их здесь всего пять, и для удобства объяснения они даны под номерами). Найти фигурке ее «дом» помогут обозначения, стоящие в каждом «домике» (квадрате): верхний квадрат слева — «живут» замкнутые фигуры, образованные кривыми (№ 3); верхний квадрат справа — незамкнутые фигуры, образованные ломаной (4, 5); нижний квадрат слева — незамкнутые фигуры, образованные кривой (№ 2); нижний квадрат справа — замкнутые фигуры, образованные ломаной (№ 1).

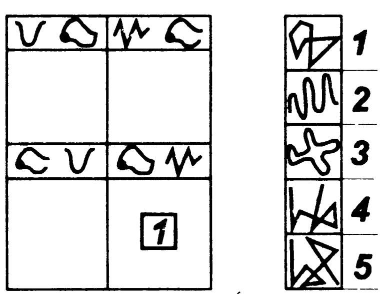


Рис. 3

Большой цикл заданий подобран на изменение признака (либо изменить в соответствии со знаком признак предмета, либо определить — какой признак изменен в предмете и поставить этот знак). Данный тип заданий наряду с целями формирования ориентировки в признаках, установления логических взаимосвязей при изменении признаков в замкнутых цепях имеет и еще одну важную цель — подготовка к введению оператора. Выделение этой функции числа обычно представляет известные трудности для детей. Усложнение заданий осуществляется сначала по линии увеличения числа признаков, которые нужно изменить. Так, учащиеся, ориентируясь на знак признака, который нужно изменить у данной фигуры (например рядом с △ стоит знак изменения цвета) должен изменить только один признак (в данном случае вместо, например, желтого должен быть треугольник такого же размера, но любого другого цвета). При знаке изменения формы меняется только форма при сохранении других признаков: цвета, размера и др. В дальнейшем изменения осуществляются по 2-3 признакам (в соответствии со знаками изменения). В качестве признаков, которые могут меняться помимо цвета, формы, размеров может выступать и пространственное положение предмета, топологические характеристики и др. Существенным при подборе этих заданий является и то, что здесь используются не только наборы геометрических фигур, оперирование с которыми достаточно быстро усваивается, а рисунки предметов, животных, каждый из которых наряду с другими признаками имеет и характеристики формы, цвета и др. После освоения умения изменять признаки у отдельных предметов, учащимся предлагаются аналогичные задания в замкнутых цепях, где прежде, чем изменить признак, поставив соответствующий знак, необходимо посмотреть, не противоречит ли он другим элементам цепи. Покажем это на примере.

Задание 4. (рис. 4). Детям предлагается задание, в котором на рисунке игрушки образуют круг с помощью стрелок определенного направления. Над каждой из стрелок стоит знак изменения. Так между черепашками (№ 1 и № 2) стоит знак изменения пространственного положения , который соответствует их различному положению в пространстве. Между черепашкой № 2 и машинкой № 3 стоит знак изменения формы (форма этих игрушек различна). Далее (№ 4) нарисована такая же машинка, которая отличается от № 3 расцветкой. Учащиеся должны поставить в пунктирном круге знак, по которому изменена игрушка (). Последнее и самое

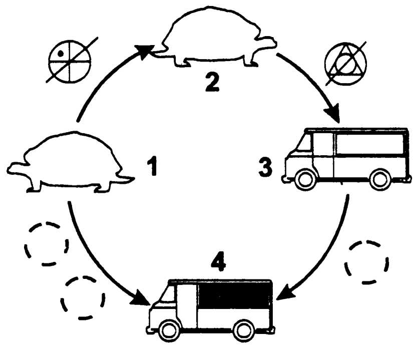


Рис. 4

сложное — нужно поставить знаки в последнем звене цепи, сравнив по каким признакам отличаются игрушки (здесь это форма и цвет).

На формирование умений выделять пространственные отношения направлены также задания, где направления стрелок между различными изображениями двусторонние. От учащихся требуется воспроизвести направление и рисунок стрелок между отдельными объектами (вразброс), опираясь на схему расположения.

Приведем в качестве примера одно из таких заданий.

Слева дана схема расположения «домов», в которых живут

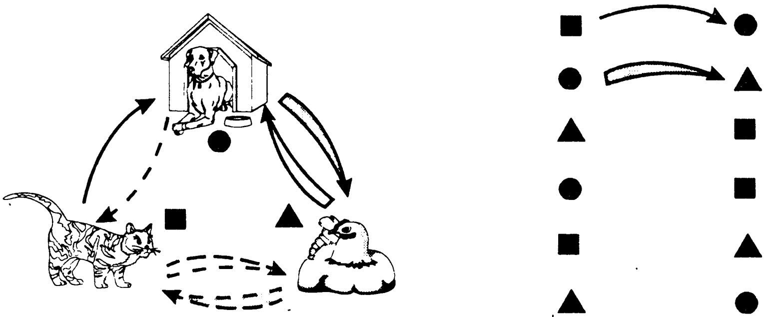


Рис. 5

кошка, собака и птичка. Между домами проложены дорожки разного цвета и направления. Справа нарисованы эти же дома парами в разном сочетании. Пользуясь схемой расположения домов, нужно провести стрелки разного цвета и направления, показывающие как пройти от одного дома к другому. Дан образец (две строчки выполнения задания. **рис. 5**).

Формирование логического компонента осуществлялось помимо организации деятельности по выделению признаков, главным образом в заданиях, предусматривающих использование аксиом и логических операций (сериации, классификации и сохранения). Задания различались между собой тем, использование какой аксиомы и операции предполагает выполнение. Их усложнение достигалось за счет увеличения количества изменяющихся признаков, а также сложности выделения признаков, выступающих в качестве основания.

Приводим пример задания на сериацию, в котором представлена серия-набор фигур (№ 1). Эти фигуры образуют ряд. Исходя из места, которое занимает каждая фигура в этом ряду

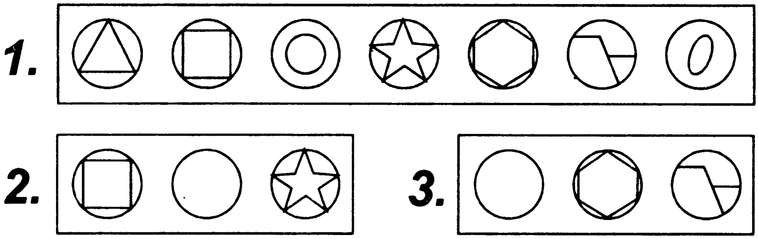


Рис. 6

нужно вставить недостающие фигуры в ряды (2 и 3), которые составляют части полной серии (№ 1) **(рис. 6)**.

Учащийся, для того, чтобы найти недостающую фигуру в ряду № 2, должен посмотреть на следующую после нее фигуру. В данном случае это звезда (перед ней пустой круг, который нужно заполнить). Он должен найти звезду в серии (ряд № 1) и посмотреть какая фигура стоит перед ней (двойной круг). Эту фигуру ученик и должен нарисовать в пустом круге. Для проверки правильности выбранной фигуры необходимо посмотреть совпадение других фигур (в данном случае — первой). Аналогично подбирается и фигура в другой ряд (№ 3 — в пустом круге должна быть звезда).

Задания на классификацию предусматривают не только формирование этой операции в полном наборе ее составляющих, но и умений решать задачи на классификацию и сериацию одновременно, умения переходить от одних средств изображения классов и отношений между ними к другим.

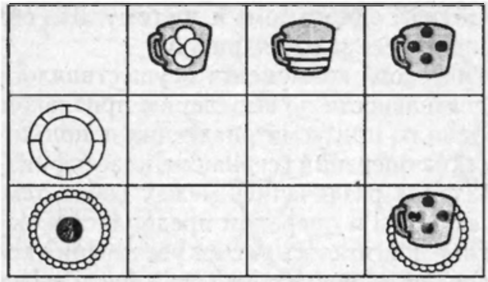


Рис. 7

Приведем в качестве примера задание на классификацию по двум признакам (используется таблица).

Учащиеся получают таблицу, по краям которой указаны признаки: вверху — кружки разной расцветки, слева — блюдца, различающиеся рисунком. Учащиеся должны заполнить клетки таблицы, поместив в каждую из них кружку и блюдце определенной расцветки. Дан образец выполнения задания, где в пересечении горизонтальной и вертикальной линий должна быть кружка в горошек и «кружевное» блюдце **(рис. 7)**.

Наряду с заданиями на классификацию и сериацию учащиеся выполняют задания и на сохранение. Эти задания направлены на формирование понимания того, что одно и тоже количество жидкости (сыпучего материала), перелитое из одного сосуда в другой, отличающийся от первого формой, сохраняет количество, меняя уровень. Аналогичные задания подобраны на сохранение площади и др. Приведем в качестве примера одно из них. Учащемуся предлагается задание, в котором два одинаковых пакета молока выливаются в разные по форме сосуды. Им нужно сравнить содержимое этих сосудов, поставить знаки сравнения, указав признаки, по которым осуществляется сравнение (количество, уровень и др.) **(рис. 8)**.

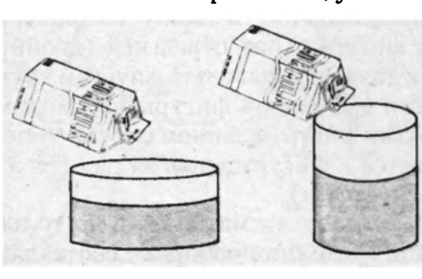


Рис. 8

Формирование общих математических знаний и умений осуществлялось в заданиях на установление взаимно-однозначного соответствия элементов, измерение величин, примеры которых мы не приводим здесь поскольку с одной стороны они мало отличаются от заданий, используемых в практике обучения, с другой стороны, они подробно описаны в наших публикациях.

Приведем в качестве примера лишь задание на сравнение двух групп объектов по разным признакам, в том числе и на сравнение количества элементов разных множеств и последующего их уравнивания.

Требуется сравнить две группы шаров, записать знаками, по каким признакам эти группы сходны (рядом со знаком =) и по каким признакам они различаются (рядом со знаком ≠). По каким признакам можно уравнять эти группы и как это сделать (**рис. 9**)?

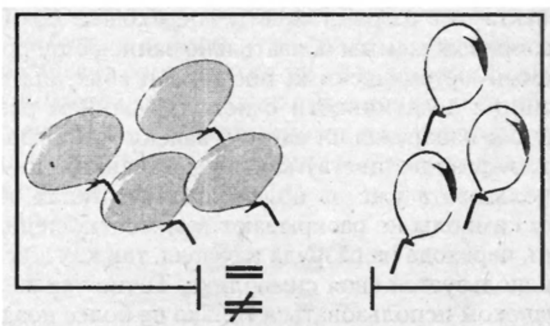


Рис. 9

Наряду с требованиями, касающимися отработки каждого компонента, организация процесса усвоения знаний подчиняется общим принципам, которые мы хотим показать на материале формирования знаний и умений основной части курса.

Процесс овладения содержанием курса опирается на психологическую теорию поэтапного формирования знаний, умений в соответствии с которой усвоение новых знаний должно начинаться с организации предметной деятельности с реальными объектами или их заместителями и последующего перевода ее через использование знаков или символов в умственный план. При этом большое значение придается отработке речи ребенка, для чего широко применяются групповые формы работы. Покажем на материале формирования понятия числа и арифметических действий организацию предметной деятельности. Требования материализации действия реализуются таким образом, что усвоение всех математических знаний осуществляется через действия с реальным материалом и моделями. Так с первого до последнего занятия при отработке принципа десятичности, состава числа, действий сложения и вычитания и других знаний учащиеся работают с реальным материалом в разрядной сетке.

Разрядная сетка не появляется эпизодически на время объяснения нового материала на доске у учителя, а имеется у каждого учащегося на парте и на каждом уроке на доске у учителя и сохраняется на весь период обучения нумерации. На разрядной сетке проводится отработка всех основных положений, связанных с нумерацией, с усвоением арифметических действий. Основное внимание уделяется работе с реальными объектами в разрядной сетке, переходам одной меры в другую, сопровождаемым обязательно записью цифрами. Рекомендуемый методическими пособиями абак для объяснения принципа десятичности с использованием различных символов для изображения единиц каждого разряда (например, кружки разного цвета) как представляется нам, лучше всего использовать уже на более поздних этапах обучения, поскольку символы не раскрывают взаимоотношения между разрядами, перехода из разряда в разряд, так как для каждого разряда используется своя символика. Точно так же и счеты могут с успехом использоваться только на более поздних этапах усвоения. Задания на состав чисел, превращение и раздробление мер и др. выполняются длительное время только с опорой на материализацию. Уделяя большое внимание отработке принципа десятичности в разрядной сетке на реальных объектах, мы тем самым способствуем осознанному усвоению действий сложения и вычитания с переходом через разряд, с изучения которых учащимися и начинается обучение действиям. Только тогда можно сформировать полноценные вычислительные навыки, когда учащиеся понимают принципы построения числа, взаимоотношение разрядов.

Материализованная форма действия существенно облегчает процесс усвоения, она наглядно раскрывает логику, содержание действия. Все условия выступают во внешнем плане, учащемуся не нужно держать в уме предмет и систему операций; не требуется для совершения действия и предварительного заучивания его содержания. Так, при сложении и вычитании чисел с переходом через разряд второе слагаемое или вычитаемое наглядно разлагается на компоненты, соответствующие последовательности операций. Все это материально фиксируется до тех пор, пока действие с переходом через десяток вызывает у детей трудности.

Например,

$$25 - \underset{5\quad 2}{\underset{\wedge}{7}} = \qquad\qquad 36 + \underset{4\ 4}{\underset{\wedge}{8}} =$$

«7» в данном случае раскладывается на составные «5», соответствующее 1-й промежуточной операции, и «2», соответствующее 2-й промежуточной операции.

В дальнейшем некоторые промежуточные операции уже не требуют материальной фиксации, например, в данном случае «8» не требуется записывать в виде его составляющих, эта операция может совершаться уже без внешних опор, а постепенно снимается материальная фиксация всех промежуточных моментов. Но сохраняется еще для некоторых учащихся одинаковое подчеркивание одних и тех же разрядов в компонентах действия.

Например,

$$\underline{\underline{3}}\,\underline{2} + \underline{\underline{2}}\,\underline{7} =$$

Такое подчеркивание в сочетании с правилом («действия могут производиться над числами, полученными одной мерой») является средством, облегчающим операции сложения и вычитания.

Одним из требований теории поэтапного формирования умственных действий является максимальная развернутость действия на первых этапах его отработки, в соответствии с уровнем подготовки учащихся.

Исследования по формированию умственных действий обнаружили, что для любого задания можно выделить и представить учащемуся систему условий, при которых задание с первого раза будет выполняться правильно. Эти условия состоят в том, что учащиеся, кроме образца действия, получают еще ориентиры, которые обеспечивают им безошибочное выполнение задания. При этом, если учащийся делает ошибки при выполнении задания, значит какая-то часть условий не включена в данную систему ориентиров.

Для этого нужно разделить действие на столько операций, чтобы ученик самостоятельно после разъяснения учителя мог его выполнить. Развернутость может затягивать процесс обучения на первых порах, но делает его осмысленным, сознательным, поскольку раскрывает объективную логику процесса. На первых порах обучения нужно особенно тщательно следить за осознанным усвоением материала, максимально развертывая для этого процесс. Так, например, групповой счет проводится обычно как последовательное называние чисел 0, 3, 6, 9 и т. д., что представляет собой уже результат совершенной операции; в нашей программе групповой счет отрабатывается через действия: 0, 3... Как получено 3? (0+3=3), то же и в обратном счете: 9, 6... Как получено 6? (9-3=6) и т. д.

Отработка группового счета происходит не в устном плане, а на модели числового ряда. По мере освоения групповой счет переводится в устный план, но вначале с сохранением развернутых арифметических действий, как основания для получения каждого следующего числа. В дальнейшем групповой счет проводится сокращенно. Возвращение к арифметическим действиям носит в дальнейшем лишь контрольный характер. Вычитание с переходом через разряд совершается в нашей экспериментальной программе с развернутым решением всех промежуточных операций и с материальной фиксацией их: вычитание свободных единиц, занимание единиц следующего разряда, перенос их и раздробление в единицы соответствующего разряда, вычитание оставшихся единиц и т. д.

Например,

$$\begin{array}{rrr} & \overset{\bullet}{10} & 10 \\ \overset{\bullet}{3} & 0 & 7 \\ -\,1 & 6 & 9 \\ \hline \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{rrr} & 14 & 15 \\ \overset{\bullet}{4} & \overset{\bullet}{5} & 5 \\ -\,2 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Такая фиксация всех промежуточных операций помогает понять принцип действия и облегчает совершение операций, позволяя не держать в уме числовые данные, а имея их перед глазами.

По мере освоения материала промежуточные операции уже не фиксируются, а только проговариваются, постепенно снимается и проговаривание, операция совершается целиком в уме, все более сокращаясь. Так в дальнейшем не следует столь развернуто проводить групповой счет, с делением на все мелкие операции проводить действия вычитания, сложения. Постепенно промежуточные операции исчезают.

При поэтапной отработке усвоения понятий необходимо учитывать следующее. Нельзя автоматизировать действие на промежуточных ступенях его усвоения, иначе может наступить нежелательная фиксация его на более низком уровне. Например, может зафиксироваться счет на палочках (этап материального действия). Необходимо вовремя переводить учащегося на следующую ступень обучения — тогда, когда действие на данном этапе выполняется легко, быстро, но не доведено до степени автоматизации.

§ 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ.

Программа в разных ее вариантах проходила экспериментальную проверку в течение многих лет в школах г.г. Москвы, Ижевска, Симферополя, Коломны и др. Пропедевтический курс последние годы широко используется в подготовительных группах детских садов г.г. Москвы, Симферополя, Коломны.

Неоднократная реализация описанной программы обучения математике в практике показала высокую ее эффективность.

Логическая пропедевтика при реализации ее на первом году обучения позволяет учащимся не только правильно выполнять задания на логические операции (сериации, классификации, сохранения величины, количества) с обоснованием выделяемых критериев, признаков, но и на хорошем уровне выполнять все задания, связанные с понятием числа, систем счисления с разным основанием.

Реализация символической пропедевтики в практике обучения показала, что у детей формируются полноценные математические знания с четким разделением плана содержания и формы его представления, с умением оперировать знаково-символическими средствами, выражать одно содержание разными языками, т. е. полимодальные знания с ориентировкой на смысл, а не формальные моменты. Важным результатом следует считать и то, что помимо математических знаний дети овладевают умением самостоятельно определять смысл задания, организовывать деятельность по его выполнению. Был получен достаточно большой эффект в интеллектуальном развитии, прежде всего по двум показателям: креативности и внутреннему плану действия, а также в формировании познавательных интересов.

В курсе начальной математики интенсивное введение символики и постоянная работа в плане «реальность — символика, ее обозначающая» были необходимы для формирования полноценных понятий, для разделения плана содержания и плана выражения, поскольку в математике, начиная с первых этапов ее изучения широко используется символика. Символическая пропедевтика и отработка семиотических закономерностей давала в дальнейшем возможность сознательно ею пользоваться, видеть за символикой реальность, математические отношения.

Реализация основного курса показала, что данная программа формирует у учащихся на высоком уровне как теоретические знания, так и вычислительную технику. Учащиеся хорошо усваивают взаимоотношения разрядов, перевод чисел, выраженных единицами одного какого-либо разряда в единицы другого; могут определить как устно, так и через запись состав любого числа, через указание разрядных единиц. Хорошо отрабатываются действия сложения и вычитания с переходом через разряд и без перехода через разряд на числах любого класса как письменно, так и устно.

В обобщенной форме усваиваются зависимости между компонентами. При этом не только нахождение компонентов, но и изменение результатов действия в зависимости от изменения данных. Учащиеся свободно оперируют формулами в буквенном виде; как обнаружилось, для них не имеет принципиального значения, в какой форме, буквенной или числовой, требуется выразить какую-либо зависимость.

Помимо приобретения вычислительных навыков, показателем чего являются действия с числами любого класса, у учащихся формируется математический подход к определению реальных количественных отношений. Поскольку основой обучения являются действия с реальными количествами или их символами, схемами учащиеся всегда могут совершить переход в любую сторону — от чисел к реальным объектам (воспроизвести предметную ситуацию, соответствующую записанным выражениям, и обратно: предметную ситуацию выразить схематически буквенной или числовой формулой).

Умение словесно обосновать выбранный способ решения является показателем высокого уровня осознанности усвоения.

И наконец, последнее, на что мы хотели бы обратить внимание, это отношение учащихся к процессу обучения, интерес к процессу учения. Когда-то А. И. Маркушевич, анализируя причины плохого усвоения математики, отмечал, что главное — это несовершенство самой организации учебно-воспитательной работы — «мобилизовать интерес учащихся — это значит решить 3/4 дела». Вопрос об организации интереса учащихся не случаен. Однородность в подборе заданий, однообразие материала, ориентировка на заучивание и отведение большого места на уроках заучиванию таблиц (сложения, умножения, деления и др.) с неизбежностью делают процесс обучения малопривлекательным для учащихся. Достаточно указать уже только на то, что в течение целого года в первом классе учащиеся решают примеры на действия в пределах 20, год — чрезвычайно важный для формирования отношения к учению, ибо впервые учащиеся сталкиваются с новыми формами деятельности, а роль первых впечатлений огромна, как показывает практика.

При существенной разнице в знаниях поступающих детей в первый класс (одни долго не могут усвоить название цифр, другие свободно считают в пределах 20 и даже 100, производят действия сложения и вычитания), при существующей системе обучения неизбежно у большей части учащихся снижается интерес к обучению. Поэтому в методических работах значительное место уделяется организации активности учащихся.

Реализация описанной программы в практике обучения показала, что у учащихся возникает стойкий интерес к выполнению заданий. Построение обучения через введение общих принципов приводит к сознательному усвоению материала. Предъявление учащимся разных заданий (а не однородно подобранных примеров) вызывает интерес у них, потому что для решения задач требуется каждый раз новый прием решения.

Большая активность учащихся на уроке, высокая продуктивность работы, самостоятельное придумывание заданий вне уроков (дома, в группе продленного дня без заданий учителя на это) являются свидетельством появления познавательного интереса учащихся к математике.

Построение учебного предмета, организация процесса обучения определяют мотивацию учения (либо возникает необходимость постоянной внешней организации мотивации учения, либо складывается устойчивый интерес к учению).

Таким образом, результаты обучения по вышеизложенной программе, дают основание считать, что уже в начальном обучении можно ввести математические понятия в полном соответствии со строгой научной логикой их и обеспечить усвоение через поэтапную организацию деятельности учащихся. Тем самым создается возможность для преодоления разрыва между начальным и последующим обучением в школе. Изменение процесса обучения не только повышает качество результатов обучения, но и меняет отношение учащихся к учению, создавая устойчивый интерес к изучаемому предмету.

§ 4. ПРОГРАММА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА I-IV)[2]

I класс (170 часов, 5 часов в неделю).

I. Выделение признаков объектов и их кодирование.

Описание объектов по совокупности признаков с фиксацией их в символике. Сравнение объектов по признакам. Выделение существенных и несущественных признаков. Кодирование (декодирование) операций с признаками (отрицание признаков, изменение признаков, установление последовательности операций).

II. Отношения между объектами, множествами объектов.

Установление отношений эквивалентности между объектами, множествами объектов (по 1 или нескольким признакам): качественные признаки (иметь ту же самую форму, цвет, др.), отношения «равно», «неравно», «больше», «меньше». Установление отношений эквивалентности между числами (3=2+1). Ориентировка в матрице. Обозначение положения объекта в ней.

Выстраивание последовательных цепей отношений между объектами. Установление отношений порядка между числами.

III. Соотнесение элементов множеств как один из способов установления эквивалентности.

2 Программа составлена совместно с Н. А. Кубасовой.

Соотнесение элементов множеств, операция расстановки элементов разных множеств для определения соответствия, их упорядочивание. Сравнение множеств, установление их эквивалентности с формулированием результатов сравнения: «столько же (поровну)», «больше-меньше», «больше-меньше на столько-то». Использование меток как заместителей элементов множеств для сравнения их по количеству: понимание метки как заместителя элемента множества; замена меткой каждого элемента множества; установление взаимооднозначного соответствия меток разных множеств; сравнение рядов меток; на основе соотнесения меток и сравнения рядов — формулирование результатов сравнения реальных множеств. Уравнивание количества элементов разных множеств 2-мя способами: удалением лишних элементов большего множества; добавлением недостающих элементов в меньшее множество. Комплектование множеств — предмету одного множества подбор соответствующих ему по разным признакам (функции и др.) предметов других множеств.

IV. Сериация.

Выделение признака (одного или нескольких) при изменении его в ряду предметов, фигур. Выстраивание ряда объектов по изменяющемуся признаку. Построение фигуры в соответствии с выделенным принципом изменения фигур в рядах.

V. Классификация.

Умение образовывать классы объектов, выделение основания для образования групп, нахождение обобщающего понятия для групп объектов и обозначение его символом; выделение существенных и несущественных признаков объектов и оснований классификации; смена основания группировки, т. е. образование из одних объектов разных классов; дихотомическая классификация, отрицание понятия; классификация по 2 и более признакам; ограничение понятия, обобщение понятия.

VI. Измерение величин.

Выбор величины для измерения; выбор меры, соответствующей измеряемой величине: адекватность (что чем можно измерять), удобство; процесс отмеривания (точность, законченность действия, получение результата с остатком, без остатка); понимание того, что метка-заместитель одного шага измерения, равного мере; совокупность меток — заместитель измеряемой величины, число. Сравнение величин: какие величины можно сравнивать; при любой ли мере можно проводить сравнение. Понимание невозможности сравнения результатов,полученных в измерении разными мерами при разном количестве меток; метод сравнения через взаимно-однозначное соотнесение меток. Зависимость между величиной, мерой и количеством меток, полученных в результате измерения: при измерении одной величины разными мерами меток больше там, где измеряли меньшей мерой; при измерении одной величины разными мерами мера больше там, где получилось меньше меток; если при измерении разных величин разными мерами получено равное число меток, величина будет больше там, где мера больше; введение числа 1 как отношения величины к мере; нуль как начало измерения.

VII. Системы счисления.

Выделение меры счета. Образование групп объектов в соответствии с мерой и запись полученного числа в разрядной сетке. Догруппировка в соответствии с мерой. Выделение количества цифр в системе. Определение системы счисления по указанию отдельных составляющих.

II КЛАСС (170 часов, 5 часов в неделю)

I. Логические отношения между объектами, множествами.

1. Описание объектов по совокупности признаков с фиксацией их в символике. Сравнение объектов по признакам. Выделение существенных и несущественных признаков. Кодирование (декодирование) операций с признаками: отрицание признака, изменение признака, последовательность операций.

2. Понимание и использование аксиом:

а) если $A = B$, то $B = A$

б) если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$

в) если $A>B$, то $B<A$

г) если $A>B$ и $B>C$, то $A>C$.

3. Решение задач на включение классов, исключение элементов, не относящихся к классу, пересечение классов. Решение задач на сериацию и классификацию одновременно. Переход от одних средств изображения к другим (схемы). Сравнение чисел при группировке одинакового количества предметов с разными мерами.

II. Число.

1. Нуль как характеристика пустого множества. Правило образования натурального ряда чисел (n±1). Предыдущее и последующее число. Построение любого предыдущего и последующего числа в общем виде. Сложение и вычитание (с использованием 0: 0 ± число, число ±0).

Образование чисел 4-10 (по правилу n±1). Установление отношений между новым и ранее известным числом. Счет порядковый и количественный, прямой и обратный от любого среднего члена ряда.

Свойства числового ряда. Единичный отрезок (мера). Числовой луч.

Состав числа (через сложение и вычитание, письменно и устно). Умножение и деление в пределах изучаемого числа. Переместительный и сочетательный законы сложения и умножения. Независимость результата счета объектов от порядка их пересчитывания. Счет поединично и группами (по 2, по 3, по 4, по 5). Понятие о четных и нечетных числах. Соотношение величины, меры и числа. Зависимость числа от величины измеряемого и меры счета. Определение количества по числу и мере.

2. Закон образования старшего разряда в любой системе счисления. Соотношение между разрядами. Построение разрядной сетки в соответствии с выбранной мерой и запись числа. Восстановление по записи в разрядной сетке и мере групп и отдельных элементов.

Принцип десятичности системы счисления. Необходимость введения новой, более крупной меры. Десяток как новая мера счета.

Позиционное значение цифры и введение разрядной сетки (понятие разряда). Число, цифра, мера (круглые сотни, круглые десятки как названия различных мер). Разъяснение названия «одно-двух-, трехзначное число».

3. Сложение и вычитание. Запись в строчку. Название компонентов сложения и вычитания. Устное сложение и вычитание двузначных чисел. Устное сложение и вычитание трехзначных чисел. Приемы округления при устном счете. Использование переместительного и сочетательного законов сложения. Сложение и вычитание с переходом через разряд на двузначных числах, на многозначных числах первого класса.

Нахождение одного из слагаемых по данным сумме и второму слагаемому. Выражение зависимости между компонентами сложения в обобщенном виде. Нахождение уменьшаемого по данным вычитаемому и разности, вычитаемого по уменьшаемому и разности. Выражение зависимости между компонентами вычитания в обобщенном виде. Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных.

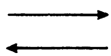
Письменная запись сложения и вычитания. Различные случаи сложения и вычитания. Сложение и вычитание именованных чисел, выраженных метрическими мерами.

III. Задачи.

Восстановление предметной ситуации. Анализ текста. Выделение компонентов задачи. Установление отношений между компонентами задачи.

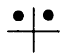
IV. Пропедевтика геометрии. 1. Выделение пространственных отношений между объектами, направления в системе координат:

а) влево, вправо



б) вверх, вниз

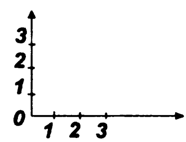
в) симметрия



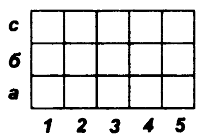
д) направление

2. Обозначение положения:

а) в системе координат



б) в прямоугольной матрице



Движение в матрице и в системе координат (прямые и обратные задачи).

3. Прямая. Отрезок. Длина отрезка. Единицы длины. Соотношение единиц длины. Ломаная. Длина ломаной. Треугольник. Периметр треугольника. Прямоугольник. Много-

угольник. Разрезание на части геометрических фигур. Равносоставленные фигуры.

4. Нестандартные задачи (танграм, пентамимо). Конструирование объектов по образцу.

III. КЛАСС (170 часов)

I. Логические отношения между объектами, множествами.

I. Эквивалентность, отношения: равно (=), не равно (≠) (по различным признакам).

2. Неравенства. Отношения: больше-меньше (>, <) по различным признакам.

3. Симметрия между элементами множества, между множествами.

4. Транзитивность: а) равенства, б) неравенства.

5. Использование транзитивности и симметрии при решении текстовых задач на отношения между объектами.

6. Сериация и классификация в текстовых задачах. Применение логических отношений.

а) Использование и самостоятельное составление схем, диаграмм, графов.

б) Использование теории множеств при решении задач на выделение класса ($\cap$, $\cup$,).

в) Нестандартные задачи.

II. Число.

1. Число как отношение величины к мере. Образование N-ряда. Свойства числового ряда. Системы счисления.

Выделение меры счета. Образование групп объектов в соответствии с мерой и запись полученного числа в разрядной сетке. Догруппировка в соответствии с мерой. Выделение количества цифр в системе, построение числового ряда. Работа с законом образования старшего разряда в любой системе, соотношением между разрядами.

2. Введение в теорию множеств:

— объединение

— пересечение

— разность

— дополнение

Простейшие примеры и задачи на действия с различными множествами (в том числе и прямоугольными матрицами).

3. Округление. Аппроксимация. Предварительная оценка результатов действия.

4. Сложение и вычитание как перенос теории множеств на действия с числами: а) в десятичной системе счисления,

б) в произвольной системе счисления.

5. Простые уравнения и неравенства

$x + 1 = 3$

$X<3$

$4<5>6$

6. Установление отношений

а) эквивалентности (=, ≠),

б) неравенства (>, <) между числами и числовыми выражениями.

Построение разрядной сетки в соответствии с выбранной мерой и запись числа. Восстановление по записи в разрядной сетке и мере групп и отдельных элементов. Определение системы счисления по указанию отдельных составляющих. Сравнение чисел при группировке одинакового количества предметов с разными мерами. Переход от записи числа в какой-либо системе к десятичной системе. Раздробление сгруппированных объектов. Сложение и вычитание с переходом через разряд.

Демонстрация позиционного принципа десятичной системы счисления на любых числах. Разряды и классы десятичной системы счисления.

Правила чтения и записи любых чисел. Упражнения на чтение и написание любых чисел. Состав чисел. Порядковый и количественный счет, прямой и обратный от любого числа. Счет группами прямой и обратный от любого числа в любом классе. Сравнение чисел. Разложение числа на разрядные слагаемые. Десятикратность смежных разрядов десятичной системы. Соотношение разрядов как соотношение мер.

Умножение и деление на единицу с нулями (на 10, 100, 1000 и т. д.). Правило умножения и деления на единицу с нулями. Письменное и устное умножение и деление.

Принцип умножения и деления. Мера как основа умножения и деления. Связь умножения со сложением. Название компонентов действий. Самостоятельное составление таблицы умножения и деления.

Связь между компонентами действий. Нахождение сомножителя по данным произведению и другому сомножителю. Нахождение делимого по данным делителю и частному. Выражение связи между компонентами умножения и между компонентами деления в обобщенном виде. Изменения результатов умножения и деления в зависимости от изменения данных. Выражение этих закономерностей в обобщенном виде. Деление с остатком (остаток как неполная мера). Связь между компонентами действия.

Письменное умножение многозначных на однозначное, многозначных на многозначное. Письменное деление на однозначное число, на многозначное число, на целое с остатком.

Законы умножения (переместительный, сочетательный, распределительный). Их выражение в обобщенном виде.

Устное умножение и деление круглых сотен и десятков.

III. Задачи.

Перевод текста на математический язык. Установление отношений между компонентами задачи, последовательности действий. Составление простых уравнений. Формирование обобщенного способа решения задач. Умение классифицировать задачи по способу решения.

IV. Пропедевтика геометрии.

1. Положение в системе координат и в прямоугольной матрице.

2. Движение в системе координат и прямоугольной матрице. Диктант в системе координат.

3. Симметрия: осевая и центральная.

4. Раскрашивание плоскости (карта, объем).

5. Нестандартные задачи.

6. Периметр геометрических фигур. Периметр равносоставленных фигур. Представление об объемных фигурах. Развертка. Построение прямоугольника по заданным сторонам, периметру и стороне. Окружность, круг, кольцо, овал.

IV. КЛАСС (204 часа)

I. Логические отношения между объектами, множествами объектов.

1. Установление отношений: эквивалентности, неравенства, симметричности, транзитивности

(типа: а=в, в<с, с=d. Сравнить d и а;

2) в<d, с=d, d<а. Сравнить а и в и др.)

2. Решение текстовых задач на установление этих отношений. Обоснование решения. Указание возможных вариантов решения. Внесение изменений в условия задачи.

Составление задач на логические отношения по отдельным данным (рисунок, схема, граф).

Задачи на сериацию и классификацию.

3. Нестандартные задачи.

II. 1. Число. Системы счисления.

2. Сложение и вычитание в различных системах счисления. Умножение и деление в десятичной системе счисления.

3. Свойства числового ряда.

4. Отрицательные числа.

5. Решение уравнений и неравенств ($x+2=1 \quad 6<x<10$

$-5<x<2$

$6-3<x<10$

6. Уравнивание ($10+4<10+a<10+6$)

7. Аппроксимация.

8. Задачи с использованием понятий теории множеств.

9. Десятичные дроби. Мера меньше единицы первого разряда. Десятичные дроби как продолжение нумерационной системы вправо. Единый принцип чтения и записи чисел в нумерационной системе счисления (включая и десятичные дроби). Чтение десятичных дробей. Свойства десятичных дробей. Сравнение десятичных дробей (больше, меньше). Умножение и деление десятичных дробей на 10, 100, 1000 и т. д. Сложение и вычитание десятичных дробей. Умножение и деление.

10. Метрическая система мер. Меры веса, длины, времени, площади, объема. Временные понятия: сутки, час, минуты, секунды, месяцы, недели, год, век, столетие.

Раздробление и превращение именованных чисел.

11. Обыкновенные дроби. Мера меньше единицы первого разряда. Изображение обыкновенной дроби. Значение числителя и знаменателя. Сравнение дробей по величине. Изменение величины дроби с изменением ее членов. Дроби правильные и неправильные. Смешанные числа. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратное преобразование. Обращение целого числа в неправильную дробь.

Основные свойства дробей. Сокращение дробей. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю.

Действия над дробными числами. Сложение и вычитание дробей. Распространение свойств сложения и вычитания на дробные числа. Умножение и деление дробей. Распространение свойств умножения и деления на дробные числа. Взаимно обратные числа. Замена деления умножением.

III. Задачи. Формирование обобщенного способа решения задач.

IV. Пропедевтика геометрии.

1. Система координат. Диктанты в системе координат (в любом направлении). Матрицы.

2. Нестандартные задачи на конструирование.

3. Представления о площади. Единицы площади. Площадь квадрата, прямоугольника. Равновеликие фигуры. Площадь равносоставленных фигур.

4. Развертка.

5. Построение прямоугольника по:

а) периметру и одной стороне,

б) площади и одной стороне.

Г. Никола, Н. Ф. Талызина

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЩИХ ПРИЕМОВ РЕШЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При постановке данного исследования мы исходили из понимания мышления не как некой готовой формальной функции, которая применяется при решении арифметических задач, а из понимания его как содержательной системы актов деятельности, формирующихся в процессе решения соответствующих задач и проходящих ряд закономерно сменяющих друг друга этапов.

Как и в случае понятий, при анализе общих приемов мышления необходимо учитывать, что может быть два пути их усвоения: стихийный и управляемый. В первом случае приемы мышления не выступают как специальные предметы усвоения, их становление идет лишь по ходу усвоения знаний, в процессе решения задач, где они занимают место средств и поэтому не осознаются. В этом случае процесс формирования методов (приемов) мышления растягивается и далеко не всегда приводит к желаемому результату. Но даже и там, где формируются приемы мышления, они остаются недостаточно осознанными, недостаточно обобщенными, и в результате этого ограниченными в своем применении теми частными условиями, в которых они возникли.

При втором пути приемы мышления выступают как предметы специального усвоения. В силу управления процесс их формирования резко сокращается во времени и приводит к усвоению заданных приемов с заранее намеченными качествами. Этим путем мы и шли.

Наконец, мы опирались на положение о том, что успешность формирования действий определяется качеством их ориентировочной основы.

Арифметические задачи привлекли наше внимание потому, что содержание ориентировочной основы действий, входящих в приемы решения этих задач, лежит вне арифметики.

Раздел задач в арифметике выступает как прикладной: ученик должен описать математическим языком приведенную в условии задачи ситуацию. Сделать это он сможет лишь в том случае, если сумеет выделить в ней основные элементы и понять их отношения. Специфические особенности ситуации, описанной в задаче, и должны выступить для него в качестве ориентировочной основы, определяющей путь решения задачи.

Так, большое место среди арифметических задач отведено задачам на «куплю-продажу». Для того чтобы успешно решать эти задачи, надо понимать, что такое цена, стоимость, отношения между ценой, стоимостью и количеством товара. Обучая учащихся решению задач, учитель обычно полагается на их житейский опыт и не уделяет должного внимания анализу той предметной ситуации, которая должна моделироваться, переводиться на язык математики.

Если для задач на «куплю-продажу» жизненный опыт учащихся оказывается более или менее достаточным, то этого нельзя сказать о таких задачах, как «задачи на бассейны», «задачи на работу», «задачи на движение» и т. д. Многие из этих разновидностей задач усваиваются в школе как самостоятельные типы. При этом главное внимание учащихся направляется на систему исполнительных операций. Анализ же ситуации, если и идет, то сугубо в конкретном виде, применительно к условиям данной задачи: корм, израсходованный за день; путь, пройденный пешеходом за час; вода, вытекшая в течение минуты и т. д. При этом негласно предполагается, что учащиеся понимают, что такое скорость, время, какие существуют отношения между этими величинами. Впервые с изучением основных элементов процесса и отношений между ними учащиеся встречаются в курсе физики, да и то в частном виде —

при изучении движения. В арифметике же задачи на процессы решаются раньше, и они связаны не только с движением, а с самыми разными процессами.

Учитывая это и понимая значение ориентировочной основы действий, мы пришли к выводу, что основная причина затруднений, которые обычно испытывают учащиеся при решении задач «на процессы», заключена не в исполнительной, арифметической части деятельности, а в ориентировочной, содержание которой лежит вне арифметики.

В силу этого в нашем исследовании, направленном на поиск и последующее формирование общих приемов решения арифметических задач «на процессы», в центр внимания была поставлена ориентировочная основа действий, составляющих искомый прием.

Первая задача исследования состояла в установлении содержания и структуры ориентировочной основы действий.

Для этого вначале надо было выделить все элементы, входящие в нее, затем — проанализировать их отношения и только на этой базе строить модель приема в целом.

Поскольку формирование искомого приема решения предполагалось с ориентировочной основой третьего типа, то надо было найти такие элементы, такие «структурные единицы», которые составляют сущность любой задачи данного класса.

Анализируя содержание арифметических задач, связанных с различными процессами — работа, движение, расход энергии, наполнение и освобождение бассейнов и др.— и применяемые частные методы их решения, мы увидели общность их ориентировочной основы. Оказалось, что более 30 видов задач, отличающихся друг от друга сюжетом, операционной системой исполнительной части приема решения, требуют для своего решения ориентировки на такие величины и их отношения, которые характеризуют любой процесс: скорость процесса *(V)*, время его протекания *(T)* и продукт (результат), к которому приводит этот процесс или который он уничтожает *(S)*. Кроме того, успешное решение задач данного класса предполагает понимание отношений между этими величинами как в условиях одного участника процесса, так и в условиях нескольких участников. Так, ученик должен понять, что величина продукта прямо пропорциональна скорости и времени; время, необходимое для получения заданного продукта, прямо пропорционально величине продукта и обратно пропорционально скорости и т. д. Далее, ученик должен усвоить, что по двум из этих элементов всегда можно найти третий. Наконец, если создают продукт несколько участников, то в этом случае появляется новая система отношений — отношения между частными и общими значениями величин, определяемые характером участия отдельных сил: помогают участники друг другу или противодействуют, одновременно или разновременно участвуют в процессе и т. д.

Например, общая скорость процесса (V_0) выступает не только как функция от общего времени (T_0) и общего продукта (результата) этого процесса (S_0), но и как функция от скоростей отдельных участников: $V_0 = V_1 \pm V_2 \pm \ldots V_i$.

Указанные элементы и их отношения составляют сущность всех названных задач, поэтому рассмотрение их как самостоятельных типов ничем не оправдано. Так, например, задачи «на встречное движение», «на бассейны», «на работу» и многие другие представляют собой всего лишь частные случаи ситуаций «совместного действия».

В самом деле, сравним следующие задачи:

Задача 1. В одном колхозе для корма коров и лошадей заготовлено 2400 центнеров сена. На сколько дней хватит сена, если в день расходуется по 8 центнеров на коров и по 4 центнера на лошадей?

Задача 2. Из двух городов, расстояние между которыми 760 км, одновременно отправляются навстречу друг другу два поезда, один со скоростью 50 км в час, а другой — 45 км в час. Через сколько часов они встретятся?

Задача 3. Двум слесарям, которые работают одновременно, дано задание изготовить 120 деталей. Через сколько времени это задание будет выполнено, если один слесарь изготовляет 7 деталей в час, а другой — 5 деталей в час?

Задача 4. Одновременно открыты 3 крана, каждый из них пропускает по 150 л нефти в час. Через сколько времени надо закрыть краны, если нужно набрать 1350 л нефти?

Во всех этих задачах требуется узнать время (T) протекания какого-то процесса — расходование сена, прохождение пути, выполнение заказа и др.— в ситуации «совместного действия».

Время (T) есть функция от «общего продукта» (S_0) и суммы скоростей участников $(V_1 + V_2 + \ldots V_i)$. Характер функциональной зависимости во всех задачах одинаков, а в силу этого у них один и тот же способ решения.

Поскольку способ решения задачи определяется характером функциональных отношений, описанных в задаче, поэтому успешное решение задач «на процессы» предполагает усвоение основных понятий, связанных с процессом, и их функциональных отношений.

После усвоения этих понятий и их отношений учащиеся должны усвоить общий метод анализа, позволяющий устанавливать систему величин и их отношений в условиях любой конкретной задачи «на процессы».

Таким образом, рассматривая обучение решению задач как формирование у учащихся определенного вида умственной деятельности, мы пришли к заключению, что в центре внимания обучающегося должна быть ориентировочная основа этой деятельности. Учащийся, освоив основные элементы, слагающие ориентировочную основу, их отношения и метод составления ее в условиях конкретной задачи, сможет самостоятельно решить любую задачу данного класса. Одновременно это означает, что в основу классификации арифметических задач надо класть не сюжет задачи («на бассейны», «на работу» и т. д.) и не конкретную систему арифметических действий, используемых при ее решении, а содержание и структуру ориентировочной основы деятельности учащихся, необходимой для решения задачи.

Итак, скорость процесса, его время и «продукт», к которому процесс приводит или который разрушает, а также функциональные отношения между этими величинами в ситуации изолированного и совместного действия и составили содержание первой части нашей обучающей программы. Вторую ее часть составил общий метод анализа этих величин и их отношений в условиях любой конкретной задачи данного типа (задачи «на процессы»).

Кроме обучающей серии, была проведена также констатирующая и контрольная.

I. КОНСТАТИРУЮЩИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В качестве испытуемых были взяты 20 учащихся III-IV классов, отстающих по арифметике; почти у всех было резко отрицательное отношение к решению задач.

Цель констатирующей серии эксперимента состояла в установлении исходного уровня знаний и умений, необходимых для усвоения общего приема решения задач «на процессы». Проверке были подвергнуты следующие понятия и умения:

1. Понятие скорости, способы ее определения, единицы измерения.

2. Понятие о времени процесса, умение отличать временной интервал от момента времени.

3. Понятие о «продукте» (результате) процесса и единицах его измерения (на примере задач «на работу», «встречное движение»).

Эксперименты проводились индивидуально.

Раскрыть содержание понятия скорости не смог ни один испытуемый. Все учащиеся дали ответы такого типа: «Скорость у машин имеется»; «Скорость... у машин, когда идут».

На вопрос, как узнать скорость, 15 испытуемых III класса ответили: «Не проходили», или «Нас не учили», а учащиеся IV класса попытались ответить, но дали неправильные ответы. Вот примеры этих ответов:

Испытуемый Саша Г.

Экспериментатор. Как узнать скорость?
Испытуемый. Умножим на часы.
Экспериментатор. Что умножим?
Испытуемый. Путь.

Испытуемый Толя Л.

Экспериментатор. Как узнать скорость?
Испытуемый. Делением.
Экспериментатор. Что надо делить на что?
Испытуемый. Часы на скорость.

Один из испытуемых ответил на указанный вопрос экспериментатора так: «Приборы показывают».

Об единицах измерения скорости у испытуемых также не было правильного представления («Измеряется часами», «Приборами»).

Ни один из испытуемых не смог решить простых задач на определение скорости. Вот одна из них: «За 30 дней была построена дорога длиной 10 км. Как узнать, сколько километров строилось за 1 день?» Ни один из испытуемых не решил этой задачи.

Поиск решения шел хаотично, наугад. Например, испытуемый Юра М. (IV кл.) осуществлял его так: «Умножим 30 на 10... Или вначале прибавим...». Остальные действовали аналогично.

Учащиеся не владели понятием и о времени процесса.

Чтобы определить, дифференцируют ли учащиеся интервал времени от момента времени, мы задавали им ряд вопросов и предлагали решить несколько задач.

На первый вопрос: «Сколько часов Вы спите?» — ответили правильно два ученика IV класса и один ученик III класса, все остальные учащиеся ответили неправильно. Так, один из испытуемых ответил, что спит 7 часов. Когда его попросили объяснить, почему он думает, что спит 7 часов, ученик ответил: «В 7 часов утра нас будят».

На второй вопрос: «Сколько часов от 12 часов дня до 9 часов вечера?» — большинство испытуемых ответило: «3 часа». Только два ученика III класса ответили на этот вопрос правильно. Аналогичные результаты были получены и при решении задач, требующих применения понятия о времени процесса. Примером может служить решение следующей задачи:

«Поезд со скоростью 65 км/час отправился в путь в 6 часов утра. Когда завершит он путь в 650 км?» Все испытуемые «решали» путем умножения 65 на 6. Они механически применили известное им из школьного обучения правило: «Для нахождения пути надо умножить количество часов на столько, «сколько за 1 час». В качестве количества часов они взяли момент отправления поезда («в 6 часов утра»).

Не владели учащиеся и третьим понятием — «продукт» (результат) процесса. Анализ попыток решить эти задачи показывает, что испытуемые совершенно не понимают отношений между скоростью, временем и результатом («продуктом») процесса. В силу этого они не знают, что им надо найти, чтобы ответить на вопрос задачи. Среди простых задач была одна и более сложная: «Из двух городов, расстояние между которыми 800 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда со скоростью 60 км в час и 84 км в час. Какой путь проделал первый поезд к моменту встречи?»

Самое главное, что выступило как типичное при решении данной задачи, заключается в том, что ни один испытуемый не смог сказать, что ему надо знать, чтобы ответить на вопрос задачи. Учащиеся были абсолютно беспомощны, и поиск решения у них свелся к механическому перебору всех арифметических действий с числами, данными в условии задачи: «Умножим 800 на 60... правильно? Тогда умножим на 84... Нет? Делим 800 на 60?» и т. д.

Это был типичный случай поиска решения путем «слепых проб и ошибок».

Констатирующий эксперимент, с одной стороны, подтвердил наше предположение о том, что источник затруднений учащихся при решении задач «на процессы» лежит не в исполнительной (арифметической) части действий, а в ориентировочной, включающей систему физических величин, характеризующих процесс, и их отношений.

С другой стороны, констатирующий эксперимент показал, что у всех наших испытуемых не сформирован ни прием решения задач «на процессы», ни система предварительных понятий, лежащих в основе ориентировочной основы этого приема. Таким образом, все эти учащиеся могли быть взяты для экспериментального обучения.

II. ОБУЧАЮЩИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Как было указано, первая часть обучающей программы включала всю ту систему объективных условий, связанных со спецификой ситуации, описанной в задаче, на которые необходимо ориентироваться при решении арифметических задач «на процессы». Вторую часть программы составлял общий метод моделирования любой ситуации, описываемой в арифметических задачах «на процессы», как частного случая процесса.

Таким образом, наше внимание было сосредоточено на тех знаниях и умениях, которые необходимы для адекватного применения арифметических действий и, следовательно, для правильного решения задачи. Сами же арифметические действия и последовательность их применения не включались в программу обучения: содержание арифметических действий известно учащимся III-IV класса, а последовательность их применения в условиях конкретных задач они должны были установить самостоятельно. Другими словами, наша программа обучения была направлена на формирование у учащихся обобщенного метода составления ориентировочной основы приема решения, на базе которой учащиеся могли самостоятельно определить его исполнительную часть, соответствующую данным конкретным условиям задачи. Следовательно, способ решения, понимаемый как последовательность арифметических действий, должен был определяться учащимися самостоятельно.

Обучение проводилось в следующем порядке:

1. Формирование обобщенных понятий о трех основных величинах, составляющих специфику всех ситуаций, описываемых в задачах «на процессы»:

А. Результат («продукт») протекания какого-то процесса (количество продуктов труда, пройденный путь и т. д.) или то, что должно быть уничтожено этим процессом (объем воды, которая должна вытечь; корм, который должен быть скормлен, и т. д.). (Эту величину мы в дальнейшем будем обозначать S).

Б. Время протекания процесса (T).

В. Скорость протекания процесса, т. е. та часть S, которая получается (уничтожается) в единицу времени. (Эту величину в дальнейшем будем обозначать V).

2. Усвоение отношений, существующих между указанными величинами (каждая из них является функцией от двух других).

А. Результат любого процесса (S) является функцией от времени (T) и от скорости (V), т. е. $S = V \times T$.

Б. Время протекания процесса зависит от величины продукта процесса и от скорости процесса: $T = S : V$.

В. Скорость протекания процесса (V) определяется как $S : T$.

3. Усвоение отношений между частным (ч) и общим (о) значениями каждой величины: в ситуации, где действуют несколько участников процесса, каждая величина выступает не только как зависимая, функция (f), от других величин процесса $(S=f\,(V,T)$ и т. д.), но и как функция от частных (общего) значений той же величины: $[S_0=f\,(S_ч);\ S_ч=f(S_о)]$.

4. Формирование общего метода моделирования любой ситуации, описываемой в задачах «на процессы».

При формировании у учащихся системы основных понятий $(S$, T и $V)$ и организации усвоения отношений между ними мы вводили только такие ситуации, где был один участник процесса. После этого испытуемые переходили к анализу ситуаций с несколькими участниками. На этих задачах испытуемые усваивали отношения между общим и частным значениями каждой величины и общий прием решения задач «на процессы».

В ситуации «совместного действия» все три указанных величины приобретают новые признаки: каждая из них должна быть оценена с точки зрения того, является ли она «частной» или «общей», т. е. относится к какому-то одному «участнику» или ко всем.

Таким образом, в ситуации «совместного действия» происходило расширение содержания как самих основных величин, так и их функциональных отношений.

Обучающая программа была построена в соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина, обучение проводилось индивидуально.

Формирование понятий об основных величинах процесса, их отношениях доводилось до умственной формы; формирование метода моделирования проблемных ситуаций, описанных в задачах, заканчивалось в материализованной форме.

Обобщение всех указанных понятий и действий планировалось в пределах процессов с постоянной скоростью протекания.

1. ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЙ ОБ ОСНОВНЫХ ВЕЛИЧИНАХ ПРОЦЕССА И ИХ ОТНОШЕНИЯХ

Формирование понятия о времени протекания процесса

Формирование данного понятия включало следующие аспекты: выделение начала и конца отсчета времени; дифференцировка момента времени от временного интервала; выделение единиц времени как определенных временных интервалов (время измеряется временем); измерение времени.

С целью материализации действий учащихся использовались пространственные модели, где время изображалось в виде отрезка прямой. Это позволяло учащимся моделировать временные интервалы, выделять порядковые номера единиц времени, подсчитывать их количество и т. д.

Например, изображая один час в виде отрезка длиной в 1 см, экспериментатор предлагал учащимся изобразить 4 часа, показать затем на модели первый час, второй, последний, первые два часа, начало измерения времени, конец и т. д. Эти модели особенно были эффективны для дифференцировки временного интервала (количество времени) от момента времени и от порядкового номера единицы времени.

При измерении времени специально отрабатывались временные интервалы с переходом через 12 часов дня, 12 часов ночи.

Учащиеся получали задания такого типа: «Изобразите время, в течение которого вы спите»... Это был период от 9 часов вечера до 7 часов утра. Испытуемые, принимая за один час определенную длину отрезка, последовательно откладывали каждый час в заданном интервале, фиксируя начало, конец отсчета и границы каждого часа. После этого они считали количество получившихся единиц времени. Постепенно действие сокращалось: испытуемые изображали начало, переход через 12 часов и конец измерения. Подсчет времени производился теперь уже не по отдельным единицам, а по интервалам: от начала отсчета до 12 часов, затем от 12 часов до конца измерения. Например, при выполнении задания «Определить, сколько часов от 5 часов утра до 10 часов вечера» — учащиеся моделировали условие задачи следующим образом:

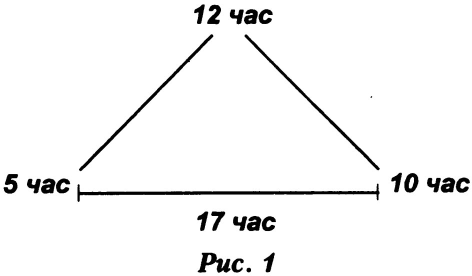


Рис. 1

Счет производился вначале от 5 до 12, потом от 12 до 10; результаты складывались, и полученное число записывалось под отрезком, моделирующим интервал времени между 5 часами утра и 10 часами вечера.

Действие измерения времени, умение различать момент времени и количество времени успешно и быстро были усвоены и доведены до речевой формы. В материализованной форме выполнялось 6-7 заданий; после этого учащиеся переходили к речевой форме: выполняли задания устно, без опоры на модели, без указания пальцем или карандашом на единицы времени. Вот как протекало решение в этой форме.

Испытуемый Женя К.

Экспериментатор. Сколько часов от 9 утра до 12 дня?
Испытуемый. С 9 до 12? Здесь нет перехода через 12. Сколько нехватает у 9 до 12... Ответ — 3 часа.
Экспериментатор. Сколько часов от 7 вечера до 3 утра?
Испытуемый. Здесь имеем переход через 12 ночи. С 7 до 12 имеем 5 часов: с 12 до 3 имеем 3 часа, всего будет... 5 прибавить 3, будет 8 часов».

В речевой форме решалось 5-6 задач, среди которых были и сюжетные, где время выступало как время течения какого-то процесса.

Дальнейшее формирование понятия времени происходило при работе с понятиями «продукт процесса» *(S)*, скорость *(V)*, где оно и доводилось до умственной формы.

Формирование понятия о продукте (результате) процесса (*S*) и скорости (*V*)

Для материализации продукта (результата) процесса использовались полоски бумаги, а также изображение в виде отрезков прямой.

При работе с этим понятием внимание учащихся обращалось на процесс, который приводит к тому или иному результату (продукту), на дифференцировку самого процесса и времени его протекания; на выделение участников процесса (действующих сил), на установление принадлежности продукта и времени его получения одной и той же действующей силе.

Получая задание, учащиеся моделировали отдельно продукт (результат) процесса и время его протекания. Например, условие задачи, где говорилось, что бригада за 21 день построила 3 здания, моделировалось в виде двух отрезков прямой. Верхний обозначался символом *S*, а нижний — *T*; при этом он был разделен на 21 равную часть. Учащимся предлагалось показать на моделях время работы; ее начало, конец; результат работы и т.д. Для выделения времени и продукта, относящихся к одному участнику процесса, отрезки, изображающие эти величины, соединялись стрелками. Например, если какой-то продукт участником процесса получался за 3 единицы времени, то учащийся изображал такую модель:

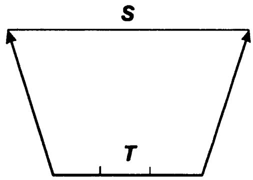


Рис. 2

Она получалась в результате ответов учащихся на следующие вопросы экспериментатора: 1. Кто действует? 2. Сколько он выполняет? 3. За сколько времени?

После отработки указанных сторон «продукта процесса» в материализованной форме экспериментатор переходил к формированию понятия скорости процесса, где одновременно происходило дальнейшее усвоение понятий «продукт» (результат) и время процесса.

Понятие «скорость процесса» раскрывалось и усваивалось на первых этапах также с помощью моделей: использовались полоски бумаги, изображение в виде отрезка прямой, а также условное изображение предметов в виде «кружочков» и «крестиков».

Вначале понятие скорости формировалось с использованием указанных видов изображений. Однако оказалось, что в данном случае это недостаточно эффективный способ моделирования, поэтому в дальнейшем в качестве моделей использовались полоски бумаги. Работа с ними протекала у всех испытуемых примерно так, как у Игоря Б. Дается очередная задача:

«Поезд прошел 180 км за 3 часа. Сколько километров проделал поезд за час?»

Экспериментатор предложил учащемуся узкую полоску бумаги, пояснив, что она изображает всю длину пути, и попросил написать на ней: «S=180 км». Испытуемый написал.

Экспериментатор. Дай мне скорость.

Испытуемый *(торопливо разделил полоску на три части, взял одну и написал на ней «V»).* Вот, возьмите!

Экспериментатор. Правильно. Сколько километров обозначает этот кусок?

Испытуемый. Сколько километров? Сейчас... всего было 180 (*решает письменно:* 180 км:3=60 км)... 60 км.

Экспериментатор. Скажи, если твои товарищи попросят тебя объяснить, что такое скорость, как ты на это ответишь?

Испытуемый. Скорость — вот *(показывает один кусок)* кусок «работы»; получаем его делением работы на часы... этот кусок сделан за один час. Не ясно?

Экспериментатор. Ясно.

Очень быстро испытуемые усвоили, что скорость — это «кусок продукта» и что она получается делением «продукта» на количество единиц времени. Трудней усваивалось то, что этот «продукт» получен «за 1 единицу времени». Это проявлялось и в записи результата: вначале учащиеся не писали «за час»

Для выделения того, что эта часть «продукта» относится к одной единице времени, пришлось ввести задачи такого типа:

«Я изобразил работу, сделанную за 5 единиц времени, и выделил часть ее: можно обозначить ее *V*? (Выделен «кусок», сделанный за 2 часа).

При решении первой задачи 13 испытуемых ответили: «Да,

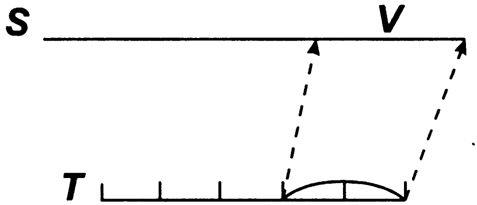


Рис. 3

можно». Мы предложили им прочитать на карточке признаки скорости, после чего они сразу же поправились: «Нет! — это то, что сделано за 1 ед. времени, а тут за 2 часа; неправильно». После решения таких задач понятие скорости стало точным, и испытуемые уже больше не писали ответ: V=50 км, а всегда писали V=50 км/час.

Для того чтобы проверить, насколько осознанно учащиеся оперируют моделями, на те ли признаки ориентируются в условии задачи, выделяя скорость, мы предлагали им задачи с таким подбором числовых данных, которые могли провоцировать неверные действия. Вот одна из них:

«За 21 день бригада строителей построила три здания. Сколько строила бригада за один день?»

«Продукт» процесса (3 здания) и время (21 день) моделировались в виде отрезков прямой. Особенность этой задачи состоит в том, что числовое выражение скорости в ней затруднено, так как «продукт» не делится на время нацело, а дроби большинству испытуемых были еще не знакомы. Вместе с тем легко может быть выполнено деление времени на «продукт».

Учитывая это, мы считали правильное решение этих задач весьма показательным. Оно проходило примерно так:

Экспериментатор. Кто действует?

Учащийся. Бригада.

Экспериментатор. Сколько она выполнила?

Учащийся. 3 здания.

Экспериментатор. Покажи на рисунке весь продукт работы.

Учащийся *(показывает отрезок S).*

Экспериментатор. За сколько времени это выполнено?

Учащийся. За 21 день.

Экспериментатор. Покажи!

Учащийся *(показывает изображение T).*

Экспериментатор. О чем спрашивается в задаче?

Учащийся. Сколько выполнялось за каждую единицу времени?

Сразу правильно ответили 12 испытуемых:

«Делим это... *(показывает отрезок S)* на 21».

Экспериментатор. Раздели работу (отрезок) на 21 часть.

Учащийся *(медленно, на глаз, делит отрезок, изображающий работу, на 21 равную часть).*

Экспериментатор. Покажи, сколько сделано за 1 день.

Учащийся *(показывает первый кусок).*

Экспериментатор. Как это обозначить? Напиши там, где показал.

Учащийся *(вписывает «V»).*

Экспериментатор. В другом месте можешь показать V?

Учащийся *(показывает другие полученные части).*

Все 15 испытуемых, не изучавших дробей, правильно составили буквенную формулу. При подстановке в нее чисел 10 человек заявили, что их еще не учили делить 3 на 21, а 5 человек вписали числа неверно (21:3), но легко исправили свою ошибку.

На этапе материализованных действий испытуемым предлагалось не только решать готовые задачи, но и составлять их.

Экспериментатор при этом предлагал два отрезка, один из которых изображал «продукт» *(S)*, а другой — некоторое число единиц времени *(T)*.

Испытуемый должен был пройти обратный путь: от абстрактной модели к конкретной ситуации задачи. Все испытуемые справлялись с такими задачами.

Вот отрывок из протокола Сережи П.

Испытуемый. Здесь дано 5 единиц времени, 5 часов, здесь дана работа *(показывает отрезок S)*. Придумать работу?
Экспериментатор. Придумай вначале, кто действует.
Испытуемый. Колхозники.
Экспериментатор. Какую работу они выполняют?
Испытуемый. Собирают картошку.
Экспериментатор. Сколько? Обозначь на рисунке.
Испытуемый. 50 кг *(пишет над отрезком S 50 кг)*.
Экспериментатор. Правильно. За сколько времени это сделано?
Испытуемый. За 5 часов, вот *(показывает T)*.
Экспериментатор. Какой вопрос твоей задачи?
Испытуемый. Найти *V*; делим *S* вот *(показывает соответствующий отрезок)* на 5; сейчас... *(выполняет деление на отрезке, помечает одну полученную часть буквой V)*.
Экспериментатор. Очень хорошо. За сколько времени сделан такой кусок работы?
Испытуемый. За 1 час.
Экспериментатор. Конечно, поэтому и обозначил ты *V*. А сейчас скажи, как велик этот кусок или другой такой кусок?
Испытуемый. Вот (*показывает отрезок V*).
Экспериментатор. Сколько килограмм приходится на такой кусок, если вся работа равна 50 кг?
Испытуемый *(дает правильный ответ)*.

Материализованный этап отработки скорости и других связанных с ним понятий заканчивался введением учебной карточки, содержащей необходимые указания для анализа условий задачи.

Вводилась она следующим образом:

Испытуемый *(читает вслух задачу)*. Машина за 7 часов прошла 300 км пути. С какой скоростью шла машина?
Экспериментатор. Запиши данные задачи!
Испытуемый. Как записать?
Экспериментатор. Возьми эту карточку, она поможет тебе: читай по очереди каждый ее вопрос и к каждому из них ищи ответ в задаче.

Учащемуся предъявлялась следующая карточка:

Карточка №1

Определить в задаче:
1. Кто действует?
2. Что выполняет тот, кто действует *(S)*?
3. Сколько времени выполняет *(T)*?
4. Сколько выполняет за одну единицу времени *(V)*?

Учащиеся читали поочередно каждый вопрос, искали на него ответ в условии задачи и под соответствующим номером записывали ответ в тетради. В результате они получали краткую запись условий и вопроса. Работа по поиску элементов, указанных в карточке, шла в строгом соответствии с указаниями экспериментатора: 1) прочитай условие задачи; 2) прочитай на карточке то, что записано под номером один; 3) найди это в условии задачи; 4) запиши найденное в тетрадь.

Операции 2,3,4 испытуемый повторял по отношению к каждому пункту карточки. Содержание этого предписания не давалось испытуемым в письменном виде: его пункты последовательно называл экспериментатор.

В учебной карточке спрашивается об основных элементах задач «на процессы» в общей, абстрактной форме. В условии конкретной задачи они могут иметь самый разный вид в силу варьирования природы процесса, действующих сил, единиц измерения и т. д., но они каждый раз осознаются учащимися со стороны того общего, что характеризует любой процесс — скорость, время, результат. Пониманию этих конкретных данных как проявлению общих характеристик процесса помогали символы, которые с первых же заданий заставляли учащихся видеть частное, конкретное в свете общего, типичного.

После записи данных текст задачи убирался, и испытуемому предлагалось рассказать задачу, пользуясь сделанной им записью и вопросами, выписанными на карточке. Рассказ учащихся выглядел примерно так: «Действует машина, ее «работа»= 300 км и т. д.». После этого экспериментатор предлагал изобразить данные на пространственной модели и «сконструировать» решение; затем предлагалось способ получения неизвестного выразить формулой, прочитать эту формулу и по ней найти числовой результат, подставляя данные в условии задачи числа.

С помощью карточки на материализованном этапе решалось еще 2-3 задачи.

Однако, прежде чем перейти на внешнеречевой этап формирования понятий об основных величинах процесса, мы формировали у испытуемых в материализованной форме понятия об отношениях этих величин.

Организация усвоения отношений между скоростью, временем и «продуктом» процесса

Поскольку скорость является понятием относительным, воплощающим в себе отношение между *S* и *T*, то при формировании именно этого понятия надо было научить испытуемых устанавливать отношения между основными величинами, характеризующими процесс.

Естественно, что при организации усвоения соотношений между *S*, *V* и *T*, мы намеренно избегали формального выведения этих величин по формулам. Мы хотели, чтобы учащиеся работали с самими величинами, получали искомую величину вначале на моделях. Без этого не могут быть поняты и полноценно усвоены отношения между указанными величинами, характеризующими любой процесс.

Прежде всего испытуемые должны были усвоить, что скорость можно определить только при наличии «продукта», полученного данной действующей силой, и времени, затраченного на его получение. С этой целью предъявлялось несколько задач с лишними и недостающими условиями. Вот пример задачи с недостающими данными: «Пешеход отправился в путь в 5 часов утра. С какой скоростью он шел, если проделал 20 км пути?» Приведем одно из решений этой задачи.

Испытуемая Лена Р. читает задачу, записывает с помощью карточки условие и получает два неизвестных: изображает на модели путь (*S*) и хочет его делить, но не находит *T*, молчит.

Экспериментатор. Что требуется узнать?
Испытуемая. Скорость.
Экспериментатор. Что для этого нужно знать?
Испытуемая. *S* и *T*.
Экспериментатор. Чего недостает у тебя?

Испытуемая. Почему в задаче не дано Т? Дано только, когда отправился.

Экспериментатор. Можно решить задачу, если не знаем...

Испытуемая. Нет, не можем решить, не знаем, сколько времени пешеход шел.

Экспериментатор. Правильно. Напиши вывод: «Задачу нельзя решить».

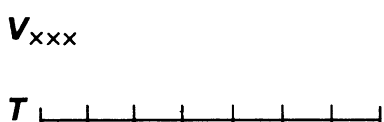
Задачи с лишними условиями давали возможность показать не только необходимость наличия двух величин (*S* и *T*, например) для получения третьей *(V)*, но и принадлежность при этом всех величин одной и той же действующей силе. Кроме того, в таких задачах особенно рельефно выступала роль вопроса задачи как направляющего поиск необходимых данных. Так, при решении задачи: «Бригада из трех трактористов вспахала 38 гектаров. Тракторист Ваня, член этой бригады, вспахал 12 гектаров за 6 часов. С какой скоростью пахал Ваня?» 14 испытуемых начали писать все данные, имеющиеся в условии задачи. На вопрос «Кто действует?» отвечали: «Бригада». На вопрос «Что выполняет...?» отвечали: «*S*=38 га». А это лишние данные.

Четверо испытуемых с первого же раза начали искать данные, касающиеся Вани, о скорости работы которого спрашивается в задаче. Сделанная ими запись условия имела такой вид: 1) Ваня; *2)* *S*=12 га; 3) *T*=6 ч; 4) *V*=?

В дальнейшем с помощью таких задач у всех испытуемых воспитывалась установка на вопрос как направляющее начало в поиске необходимых данных.

На материальном этапе испытуемые решали 6-7 задач на нахождение скорости. Когда учащиеся могли точно определить понятие «скорость» и описать способ его получения (формулу), мы переходили к величине «продукта» процесса *(S)* как отношения между *V* и *T*.

Вначале испытуемые конструировали «продукт» процесса по данной скорости и времени. Предъявлялась следующая задача: «Сколько деревьев посадили ученики за 7 часов, если за один час они сажали 3 дерева?» К задаче давалась следующая модель:



Испытуемый читал задачу и объяснял, что изображено на модели. Все испытуемые легко с этим справились. После этого они переходили к краткой записи данных с помощью вышеприведенной карточки №1. Пять испытуемых допустили при записи ошибку: скорость работы (3 дерева в час) приняли за всю работу и записали «S=3 д», но после указания экспериментатором ошибки — исправили.

На схеме, расположенной под текстом задачи, испытуемые моделировали S. Вот протокол испытуемого Сережи П.:

Экспериментатор. Покажи первый час работы.
Испытуемый *(показывает)*.
Экспериментатор. Сколько посадили ученики за этот час?
Испытуемый. ... 3 дерева.
Экспериментатор. А за второй час?
Испытуемый. 6 деревьев *(неправильно)*.
Экспериментатор. Покажи второй час!
Испытуемый. Вот *(показывает)*.
Экспериментатор. Сколько они посадили деревьев за этот второй час?
Испытуемый. Тоже 3 дерева.
Экспериментатор. А за третий час?
Испытуемый. Тоже 3.
Экспериментатор. Построй всю работу, которую ученики сделали за 7 часов; каждый час они сажали по 3 дерева. Как нарисовать все посаженные ими деревья?
Испытуемый *(на каждый час намечает по 3 точки и получает ряд S)*.
Экспериментатор. Получил ты S? Чему оно равно?
Испытуемый *(считает)*. 21 дерево.
Экспериментатор. Напиши формулу нахождения S.

Пять испытуемых при построении S зачеркивали последовательно по одной единице времени и изображали по 3 дерева. Все эти испытуемые затруднялись в записи формулы («Я отнял время... Нет, делил T»). Этот факт показывает, что материальное действие должно быть построено так, чтобы то свойство или преобразование, которое хотим выявить, выступило ясно. При данной организации действия ученики одновременно и брали по 3 дерева 7 раз и при этом отнимали единицы времени. Запись формулы как сжатой речевой характеристики должна отражать однозначно действие учащегося. Поэтому при работе с остальными испытуемыми мы конструировали S без зачеркивания использованных единиц времени.

Для соотнесения единиц времени с работой, которая выполняется за каждую единицу, можно использовать стрелки: ученик выделяет очередную единицу времени на модели и изображает соответствующую ей работу:

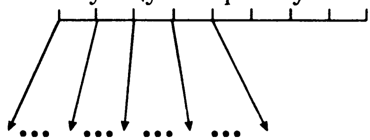


Рис. 4

Учащиеся решали еще 5-6 задач разных видов (с недостающим условием, с лишними условиями и т. д.), получая «продукт» процесса в материализованной форме. Когда учащиеся точно определяли понятие «результат процесса» и решали задачи уже без опоры на карточку, мы переходили к организации усвоения времени протекания процесса, как отношения между «результатом» процесса и скоростью.

Обучение также проходило вначале на материализованных моделях: отдельно изображались скорость и «продукт» процесса. Так, например, к задаче: «Бригада посадила 24 дерева. Известно, что за час бригада сажала 4 дерева. Сколько времени работала бригада по выполнению этой работы?» — давалась такая схема:

S oooooooooooooooooooooooo

V oooo

Рис. 5

После анализа данных по ранее приведенному предписанию, испытуемый определяет время *T* путем деления *S* на *V*. Испытуемому экспериментатор ставил следующие вопросы:

1. Что указывает *V*? (что за час посажено 4 дерева).

2. Отметь первые 4 дерева в *S*, выдели их!

3. За сколько времени они посажены? (за 1 час).

4. Выдели еще 4 дерева; сколько еще прошло времени, пока сажали эти 4 дерева? (еще 1 час).

5. Отметь эти два часа, изобрази их ниже.

6. Выдели еще 4 дерева. На сколько единиц увеличилось время работы? (на 1). Дальше испытуемый продолжал выделять единицы времени самостоятельно; получалась такая схема:

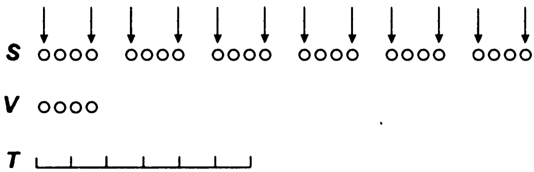


Рис. 6

В последующих 5-6 задачах на нахождение времени данные материализовались с помощью полосок бумаги; задачи были как с числовыми данными, так и без чисел.

Завершающей ступенью материализованного этапа действий было решение задач на абстрактных моделях, без числовых данных или лишь с некоторыми из них. Мы считали это важным для перевода действия в речевую форму. Экспериментатор предлагал испытуемым задания такого типа.

Экспериментатор. Возьми какую-то работу, только изображение!

Испытуемый *(изображает и обозначает отрезок S).*

Экспериментатор. Допустим, что эта работа выполнена за 6 часов.

Испытуемый *(изображает 6 часов).*

Экспериментатор. Определим, «сколько» за один час выполнено.

Испытуемый *(делит отрезок S на 6 равных частей и одну из них обозначает буквой V).*

Задачи без числовых данных решались также на нахождение времени и скорости, употреблялись при этом разные модели: отрезки, полоски бумаги. После каждого решения мы требовали выразить совершенное действие формулой.

Следует отметить, что учащиеся очень любили работать с такими задачами и успешно решали их.

Этап предварительного представления об основных понятиях (*S*, *T*, *V*) и их отношениях и этап материализованных действий потребовали в среднем 10 занятий на испытуемого продолжительностью по 30 минут. На этих занятиях каждый испытуемый решал 20-24 задачи.

На громкоречевом этапе формирования основных величин учащиеся решали задачи на нахождение величин, характеризующих процесс, без использования моделей этих величин и без использования карточки с указанием порядка анализа задачи. Вот как происходил переход на новый этап:

Испытуемый *(читает задачу)*. Расстояние между двумя городами 200 км. Велосипедист проехал это расстояние за 10 часов. Сколько километров проезжал велосипедист за один час?

Экспериментатор. Запиши данные.

Испытуемый. А где карточка?

Экспериментатор. Я не взял карточку с собой, так как заметил, что ты и без нее можешь хорошо работать.

Испытуемый. Сейчас... Первое «Кто действует?» — Велосипедист *(записывает в тетрадь под номером 1)*; второе: «Работа — *S*» *(ищет в задаче)*, *S* — 200 км *(вписывает)*; третье: «За сколько времени — *T*» *(ищет в тексте задачи)*. У нас 10 час., T=10 час.; четвертое: «Сколько за один час?» — Об этом спрашивается; вопросительный знак пишу.

Экспериментатор. Очень хорошо! Повтори задачу по данным.

Испытуемый. Действует велосипедист, он проделал S=200 км за время T=10 час.; надо найти скорость.

Экспериментатор. Какую формулу будем применять, чтобы решить задачу?

Испытуемый. Формулу V *(записывает)*: *V=S:T (после этого подставляет числа в формулу и получает результат)*.

Особую проблему на громкоречевом этапе составил анализ условия задачи. Основные величины, характеризующие процесс, теперь задавались уже не в виде пространственных моделей, а с помощью словесного описания. И было необходимо научить учащихся выделять их в этой форме.

В соответствии с предписанием учащимся предлагалось выделить, кто действует, что он делает, с какой скоростью, в течение какого времени.

После чтения текста задачи учащиеся называли по порядку то, что требует каждый пункт предписания. Экспериментатор предлагал найти это в условии задачи, выделить скобками, написать над данными словами текста соответствующий символ. Если выделенная величина была известна, то символ ставился в кружок из сплошной линии; если же выделенная величина была неизвестна — символ обводился кружком из пунктирной линии. После этого следовала запись выделенных величин (в символах) в тетради.

На этом этапе экспериментатору не надо было повторять предписания по анализу задачи: его содержание было усвоено испытуемыми на материализованном этапе. При решении уже второй задачи на громкоречевом этапе испытуемые выполняли все, что требует предписание, без напоминаний экспериментатора.

Вначале процесс выделения величин в условии задачи шел медленно и в порядке, который был предусмотрен предписанием. В конце этого этапа учащиеся работали гораздо быстрее и более свободно обращались с предписанием, выделяя часто величины в порядке следования их в тексте задачи, а не в предписании.

Экспериментатор на этом этапе выполнял в основном контрольные функции.

Приведем пример решения задачи на этом этапе.

Испытуемая Лена Л. читает задачу: «В 13 часов из города *А* в город *Б*, расположенный в 350 км, отправляется поезд со скоростью 70 км в час. Когда будет поезд в городе *Б*?»

> **Испытуемая.** Расстояние между городами — 350 км, это *S (выделяет в тексте и обозначает символом)*... со скоростью 70 км в час *(выделяет)*. «Когда будет поезд в городе Б» ... спрашивается о времени действия. Это есть *Т (обводит пунктирной линией и обозначает символом Т)*.

Особое внимание мы уделяли точному выделению величин в тексте задачи: неправильное выделение хотя бы одной величины приводит к ошибочному решению задачи. Так, например, в указанной задаче ошибочное выделение ... [70 км] в час, ведет к тому, что «70 км» мыслится как *S* вместо *V*. Всего на громкоречевом этапе решалось каждым испытуемым 12-14 задач, которые потребовали 4 занятия продолжительностью по 30 минут.

Внешнеречевой этап формирования основных величин процесса сочетался с материализованной формой усвоения основных «блоков» общего приема решения задач «на процессы». Эти «блоки» фиксировали основные отношения между «продуктом» процесса, его скоростью и временем протекания.

На предыдущем этапе испытуемые «практически» усвоили, что по любым двум величинам может быть получена третья. На этом этапе эти отношения материализовались в виде схем. Формулы, отражающие эти отношения, показывают не только то, какие величины необходимы для получения искомого, но и способ получения его. На схемах же, материализующих эти отношения, фиксировались только сами величины, а конкретный вид отношений между величинами на схемах не был представлен.

Вот как выглядели схемы:

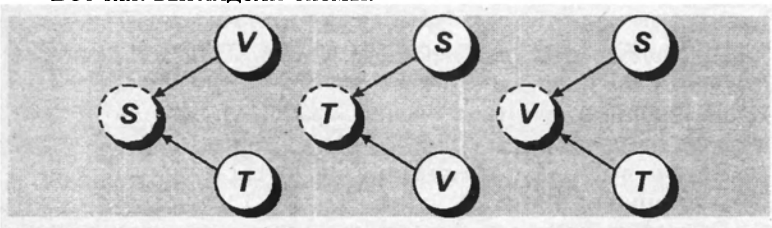


Рис. 7

Эти схемы отношений между S, V и T составляют основные «блоки» решения сложных задач «на процессы».

Схемы вводились следующим образом: испытуемому давалась задача на нахождение скорости. После того как испытуемый записал с помощью символов условия задачи, экспериментатор ставил ряд вопросов.

Экспериментатор. О чем спрашивается?
Испытуемый *Игорь Б.* Спрашивается о V.
Экспериментатор. Что нужно для нахождения V?
Испытуемый. Нужно S и T.
Экспериментатор. Это можно так изобразить: неизвестное обводим кружочком из пунктирной линии; к нему направляем две стрелки, которые означают, что нам надо найти две «вещи». Какие они?
Испытуемый. S и T.
Экспериментатор. Обозначь их.
Испытуемый *(обозначает.* **См. рис. 8***)*.
Экспериментатор. Теперь посмотрим, известны ли S и T.
В задаче известно, что S равно 400 кг. Известное обведем сплошной линией и рядом запишем его величину. То же самое сделаем по отношению к T.
Схема приняла такой вид **(рис. 9)**.
Экспериментатор. Как узнать V, если известны S и T?
Испытуемый. Делим S на T *(решает)*.

Учащиеся охотно приняли эти схемы и сразу же стали ими пользоваться.

Они их использовали не только для решения предложенных им задач, но и для составления новых; так, когда мы попросили придумать задачу на нахождение времени протекания какого-нибудь процесса, то большинство испытуемых без всякой рекомендации экспериментатора начали с составления схемы, а потом вписали в нее придуманные данные. Вот как

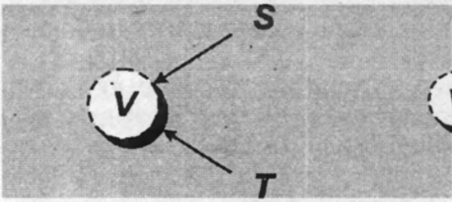


Рис. 8

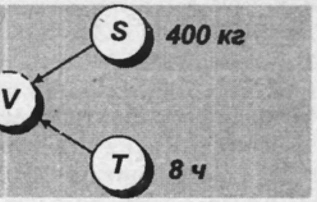


Рис. 9

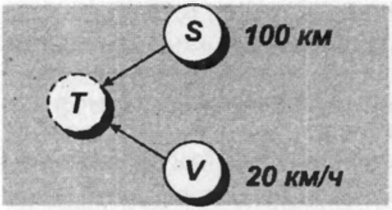


Рис. 10

выглядела задача, составленная учащимся Игорем Б. (**рис. 10**).

Эта схема ставит в центр внимания искомое *T*, поэтому после применения схем полностью снялись ошибки, которые до этого делали некоторые испытуемые, придумывая числовые данные и для искомого.

Отношения между «продуктом» процесса, скоростью и временем его протекания, входящими в качестве основных элементов в общий прием решения задач на «процессы», оставались в материализованной форме до конца экспериментального обучения.

Завершающий этап формирования — умственный этап работы с основными величинами — характеризовался тем, что испытуемый только читал задачу или слушал ее, когда она давалась устно, и решал ее в уме. Вот как протекало решение у Веры С.

Экспериментатор. Сколько часов надо держать кран открытым, если нужно вылить 400 л воды, а кран пропускает 50 л в час?
Испытуемая. 400 л воды... 50 л в час... 400 л... надо... всего 8 часов.

Другие испытуемые решали примерно также.

Испытуемым были предъявлены задачи с лишними условиями, с недостающими, с разными формами выражения данных (числовой, символической, речевой), предлагались задания придумать задачи на нахождение «продукта» процесса, скорости, времени, а также сравнить два или несколько процессов по одной из характеризующих их величин.

Например: «Два человека выполняют одинаковое задание.

У кого скорость больше: кто завершает эту работу за 6 часов или кто завершает за 8 часов?»

Все испытуемые ответили правильно и быстро, что у первого скорость больше. Испытуемые уверенно доказывали правильность своих ответов: они брали отрезок S и делили его вначале на 6, потом на 8 частей; естественно, что каждая часть (V) оказывается большей в первом случае.

Как и на предыдущих этапах, наблюдалось постепенное сокращение времени выполнения заданий; в течение трех занятий (по 30 минут) каждый ученик выполнил 22-26 заданий.

Быстрота и точность решения и составления задач, основанных на понятиях «продукта» процесса, скорости и времени его протекания, были для нас показателем усвоения этих понятий.

После этого мы считали возможным перейти к задачам «на совместное действие», где несколько участников процесса.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ

Второй уровень сложности задач «на процессы» связан с ситуацией «совместного действия». Решение этих задач осложнено следующими факторами:

1. Числом «участников»: действует не одна сила, а две и более.

2. Характером взаимодействия сил: помогают друг другу или противодействуют.

3. Временем включения действующих сил: одновременно или в разное время включились участники в совместное действие.

4. Дополнительными отношениями основных величин: кроме отношений величины с двумя другими величинами, связанными с данной действующей силой, появляются отношения между общими и частными значениями каждой величины. Так, общая скорость (V_0) теперь является не только функцией общего времени (T_0) и суммарного (общего) «продукта» (S_0), но и функцией частных значений скоростей (V_i): представляет собой алгебраическую сумму частных скоростей.

Эти факторы входят в состав условий, которые необходимо учитывать при решении задачи. Это значит, что все они должны стать ориентирами для учащихся, войти в содержание ориентировочной основы общего приема решения.

Для этого надо было организовать усвоение этих условий.

Методика работы с данной системой отношений была в принципе той же, что и при формировании понятий об основных величинах и их отношениях в ситуации одного участника процесса.

Вначале мы организовали усвоение отношений между суммарным «продуктом» как результатом действия всех участников и частными «продуктами», получаемыми отдельными участниками процесса. Особое внимание при этом уделялось характеру участия: помогает другим участникам процесса или противодействует им.

На этапе материализованных действий использовались, как и раньше, полоски бумаги и отрезки прямой, которые удобны для моделирования усваиваемых отношений. Так, например, при решении задачи — «В колхозе работали три бригады. Две бригады собирали фрукты, а третья продавала их. Известно, что первая бригада собрала 800 кг, вторая 700 кг, а третья продала 900 кг. Сколько фруктов осталось в колхозе?» — учащиеся последовательно откладывали на полоске бумаги результаты действий первой и второй бригады (в определенном масштабе), обозначали их числовую величину, а затем отрывали часть полоски, моделирующую «продукт» действий третьей бригады.

На этапе материализованных действий одновременно готовился переход на внешнеречевой этап. С этой целью учащимся предлагалось работать не только с моделями, но и записывать данные в речевой форме с использованием символов для обозначения основных величин. Анализ условия задачи они вели в соответствии с данным им планом (**карточка №2**), который имел следующий вид:

Карточка №2

Определить:

1. Сколько участников действует?
2. Начинают и кончают они вместе или нет?
3. Как они действуют:

а) помогают?

б) противодействуют?

4. Что известно в задаче об общих величинах (S_o, T_o, V_o)?
5. Что известно о частных величинах (S_i, T_i, V_i)?
6. Что требуется узнать в задаче?

Учащиеся записывали под соответствующими номерами ответы на все эти вопросы и в результате получали краткую запись задачи. Так, вышеприведенная задача была записана следующим образом:

1) 3 уч.
2) Вместе (т. е. одновременно)
3) I и II помогают, III против
4) Ничего
5) S_1=800 кг, S_2=700 кг, S_3=900 кг
6) S_0=?

После решения нескольких задач на нахождение общего и частных «продуктов» с использованием моделей учащиеся переходили на этап внешнеречевых действий и работали с опорой только на записи.

В таком виде было решено еще несколько задач, после этого мы переходили к задачам, требующим понимания отношений между общей и частными скоростями. Мы не ставили себе цели довести все действия до умственной формы, поэтому обучение закончили на внешнеречевом этапе.

При формировании понятия об отношении скоростей отдельных участников процесса и общей скорости специальное внимание уделялось не только характеру взаимодействия участников (помогают или мешают друг другу), но и временным отношениям их действий: участники действуют одновременно или разновременно.

Учащиеся должны были понять, что общая скорость на том или ином временном интервале может быть получена путем суммирования частных скоростей только при условии одновременности действия участников процесса. Для этого мы предлагали задачи такого типа:

«Тремя бригадами дорога построена за 10 дней. Первая бригада работала только первые 3 дня и строила по 200 м/день. После этого приступили к работе вторая и третья бригады. Вторая бригада строила 300м/день, а третья — 350 м/день. С какой скоростью строилась дорога после того, как приступили к работе вторая и третья бригады?»

На материализованном этапе усвоения мы в обязательном порядке требовали от учащихся изображения всех данных на схеме. Вот одна из схем к приведенной задаче:

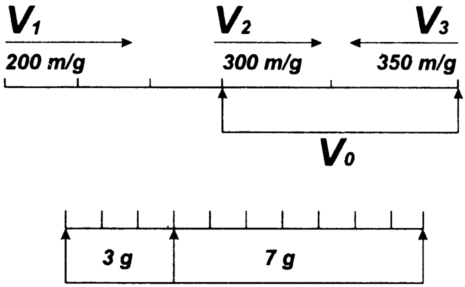


Рис. 11

На схеме, составленной испытуемыми, легко видеть, что в первые три дня дорога строится со скоростью, равной 200 м/день, а в следующие 7 дней дорога строится со скоростью 650 м/день.

Виды взаимодействия участников были усвоены учащимися фактически при анализе отношений между общим и частными «продуктами» процесса, поэтому при работе со скоростями это не вызывало у них никаких затруднений.

Испытуемые легко дифференцировали случаи, когда скорости следует суммировать, а когда вычитать одну из другой. Например, ситуации: а) движение парохода против течения и б) движение двух поездов навстречу друг другу.

Отношения между скоростями формировались также на уровне внешнеречевого этапа действия.

Последними отрабатывались отношения между общим временем процесса и временем действия отдельных участников. Под общим временем (T_0) понималось время, необходимое для всего «продукта» (S_0), когда участники действуют одновременно.

В этом случае общее время равно времени действия каждого участника. При разновременном действии участников время, затраченное на изготовление продукта, мы назвали суммарным (T_c). Его отношение к общему продукту позволяет получить не общую, а среднюю скорость[1]. Например, допустим, известно, что в изготовлении деталей приняли участие три бригады. Первая бригада работала 5 часов со скоростью 10 деталей в час;

1 Понятие средней скорости мы не вводили и задач на его применение не предлагали.

вторая работала 10 часов со скоростью 20 деталей в час; третья бригада работала 5 часов со скоростью 20 деталей в час. В данном случае общая скорость равна 50 деталям в час ($Vo = V_1 + V_2 + V_3 = 10$ *д/ч* $+ 20$ *д/ч* $+ 20$ *д/ч* $= 50$ *д/ч*).

Суммарное время (T_c) изготовления деталей равно 20 ч

$$T_c = T_1 + T_2 + T_3 \ .$$

Для получения общего времени (T_0) нам надо предварительно узнать величину общего продукта (S_0) и поделить его на общую скорость (V_0). В данном случае общий «продукт» может быть получен как сумма частных «продуктов», которые, в свою очередь, могут быть получены как произведения соответствующих частных скоростей на соответствующее частное время $(V_1 \times T_1) + (V_2 \times T_2) + (V_3 \times T_3) = 50\,\partial + 200\,\partial + 100\,\partial = 350\,\partial$. Общее время, следовательно, равно 7 часам ($T_0 = S_0 : V_0 = 350\,\partial : 50\,\partial = 7$). Это означает, что если бы все три бригады работали одновременно, то они затратили бы на изготовление деталей 7 часов. Средняя скорость (V_c) равна 17,5 д/час ($V_c = S_0 : T_c = 350\,\partial : 20$ *ч*).

Понятие общего времени и времени суммарного дифференцируется не так легко: испытуемые пытаются получить его по аналогии с общей скоростью и общим «продуктом», т. е. путем суммирования частных затрат времени. Только моделирование величин и их отношений позволяет показать, что общее время имеет место только тогда, когда «продукт» изготовляется с общей скоростью, т. е. одновременно всеми участниками процесса.

Не все учащиеся смогли сразу перенести понятие об отношениях между основными величинами процесса, усвоенное на задачах с одним участником, на ситуацию «совместного действия». Но достаточно было испытуемым один раз поработать на моделях, чтобы понять идентичность отношений между величинами, относящимися или к одному из участников совместного действия, или ко всем вместе.

Для обобщения отношений в ситуации совместного действия мы в конце обучения предлагали учащимся абстрактные качественные задачи типа: «Имеется какое-то совместное действие двух «участников». По каким данным можно узнать V_2?»

На этом этапе обучения все испытуемые справлялись с такими задачами легко. Вот обычно как протекало их решение:

Испытуемый. По S_2 и T_2 делением, вот *(пишет)*: $V_2=S_2:T_2$.

Экспериментатор. А если этих данных нет, то можно ли по другим данным узнать V_2?

Испытуемый. По V_0 и V_1... вот *(пишет)*: $V_2=V_0-V_1$.

Отработка понятий, связанных с ситуацией совместного действия, заканчивалась на внешнеречевом этапе. Испытуемые не только успешно решали задачи, но и сами составляли их, причем про себя. Это говорит о том, что они уже могли действовать в умственной форме. Всего на речевом этапе каждый испытуемый выполнил 10-13 заданий разного вида.

В результате проведенного обучения учащиеся усвоили таким образом все элементы и все отношения между ними, которые составляют основное содержание общего приема решения задач на «процессы». Мы полагали, что после этого он не вызовет у наших испытуемых затруднений, что впоследствии полностью подтвердилось.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ОБЩЕГО ПРИЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА «ПРОЦЕССЫ»

Для усвоения общего приема решения данных задач дополнительно к ранее сформированным понятиям и умениям необходимо было научить учащихся строить схему проблемной ситуации и схему решения, составлять план решения и выбирать способ решения.

Составление схемы ситуации представляет собой «перевод» текста задачи на язык наглядной абстрактной модели, где все отношения выступают перед испытуемым одновременно. Этот перевод должен основываться, естественно, на определенных правилах соотнесения элементов ситуации, их отношений со структурой схемы. Как и символы, схема позволяет абстрагироваться от конкретных данных ситуации и увидеть данную задачу как частный случай отношений между основными величинами, характеризующими любой процесс. Учащихся было необходимо научить самостоятельно составлять такие схемы. В случае простых задач мы уже показали, как испытуемые составляли схемы и работали с ними.

Формирование умения изображать схему сложной ситуации мы начали с предъявления абстрактных моделей, на которых испытуемые должны были установить данную систему величин. Вот пример такой модели:

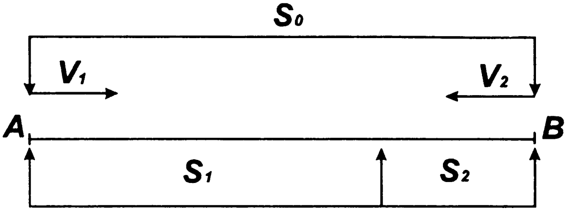


Рис. 12

Эту модель можно интерпретировать или как встречу двух поездов, или как работу двух «участников» (людей, машин, кранов и т. п.), но во всех случаях отрезок АВ моделирует результат совместного действия (путь, пройденный двумя поездами, идущими навстречу друг другу, работу, выполненную двумя рабочими, и т. д.). На этой схеме нет количества времени; его можно рядом представить в известной нам форме или просто обозначить символом *T*.

Данная схема моделирует совместное действие двух участников как в случае содействия, так и в случае противодействия. Это обстоятельство учитывалось испытуемыми, так как при анализе они ставили все те вопросы, которые когда-то «ставила» им карточка; среди них есть вопрос: «Как они действуют?» Однако на такой схеме легко может быть отражен и характер действия: содействие может обозначаться знаком «+» над стрелкой, обозначающей скорость данного участника, а противодействие — знаком «—». После этого испытуемым предлагалось самим составлять схемы различных проблемных ситуаций.

Например: «Известны скорости двух пешеходов, которые отправились навстречу друг другу одновременно. Найти, какое расстояние прошли они до встречи, если они шли 5 часов?»

Испытуемый изображает такую схему ситуации: S_0 обозначает искомое

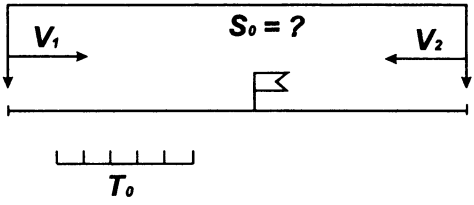


Рис. 13

T_0 означает, что участники начали движение одновременно. Всего испытуемые составили по 6-7 схем каждый. После этого мы учили учащихся составлять схему решения задачи, которая была в виде «дерева рассуждения» и начиналась с вопроса задачи, определяющего и выбор данных, и выбор формул.

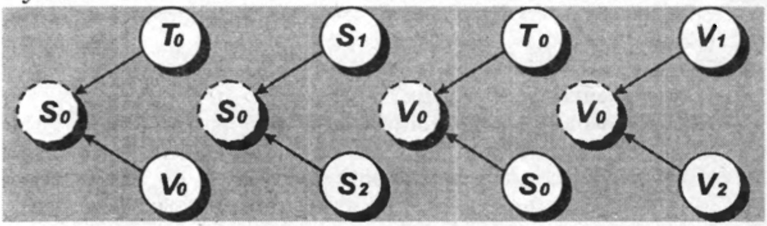


Рис. 14

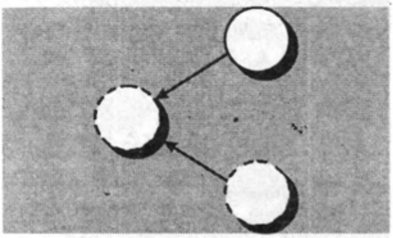


Рис. 15

Основные «блоки» схемы рассуждения испытуемые хорошо уже знали (**рис. 14**); знали они также и схемы нерешаемых задач (**рис. 15**).

Теперь нам предстояло научить их соединять эти блоки в самые различные схемы.

Вначале экспериментатор предъявил испытуемым нижеследующую абстрактную схему и попросил объяснить, что она обозначает (**рис. 16**).

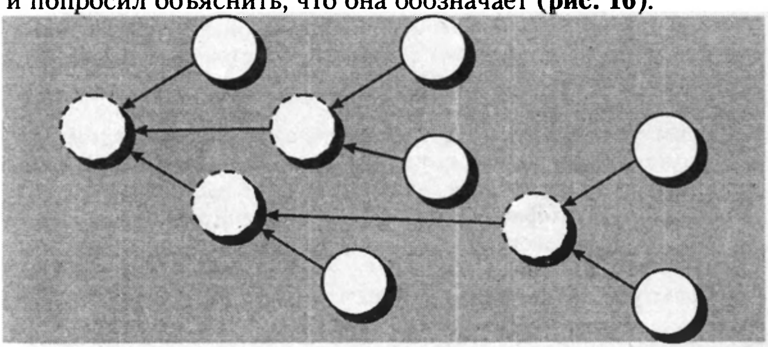


Рис. 16

Все испытуемые поняли ее и дали правильное объяснение. Вот как объяснил ее Юра М.

Экспериментатор. Объясни, что нарисовано?

Испытуемый. Это схема задачи.

Экспериментатор. Какой задачи?

Испытуемый. Ну, какой-нибудь.

Экспериментатор. Правильно. Что обозначает первый кружочек слева?

Испытуемый. Вопрос задачи.

Экспериментатор. А дальше?

Испытуемый. Чтобы ответить на вопрос, нам нужны два данных... нет: три данных — одно есть (*показывает кружочек из сплошной линии*), двух нет; чтобы найти эту (*показывает первый пунктирный кружочек сверху*) нужны два данных, они даны в задаче, вот они (*показывает кружочки из сплошной линии, от которых идут две стрелки*); чтобы узнать эту (*показывает пунктирный кружочек внизу*) нужны два данных — одно есть, другого нет, но узнать его можно (*показывает кружочки из сплошной линии, от которых идут стрелки к этому неизвестному*). Интересно! Покажите эту задачу!

Экспериментатор. Мы будем решать такие задачи, но я хочу вначале узнать, насколько ты подготовлен к этому. Скажи, во сколько действий эта задача?

Испытуемый. В шесть действий (*неправильно*).

(*Счет действий по схеме неправильно произвели еще 12 испытуемых*).

Экспериментатор. Покажи первое действие! Что надо найти прежде всего?

Испытуемый. Вот (*показывает неправильно первый пунктирный кружочек слева*).

Экспериментатор. Все необходимое для этого имеется?

Испытуемый. Нет! А, вот (*показывает верхний пунктирный кружочек во втором вертикальном ряду*).

Экспериментатор. Правильно! Или?

Испытуемый. Вот! (*показывает второй пунктирный кружочек в этом же ряду*). А, нет, вот какой будет! (*показывает правильный пунктирный кружочек в третьем вертикальном ряду*).

Экспериментатор. Сосчитай, сколько вопросов по схеме и значит, сколько действий в этой задаче? Поставь порядковые номера.

Испытуемый (*правильно намечает в схеме 4 действия*).

В последующих заданиях учащиеся должны были сами составить схемы решения. Давались задания без числовых данных. Например:

Экспериментатор. Требуется найти S_0 трех «участников», которые работают «дружно»; известны результаты работы каждого. Составить схему решения!

Испытуемая *Вера С.* Значит известны S_1, S_2, S_3... Вот *(рисует)*. Ставим в кружочках то, что известно **(рис. 17)**.

Экспериментатор. Можно решить задачу?

Испытуемая. Конечно, прибавим к $S_1+S_2+S_3$ и получим S_0.

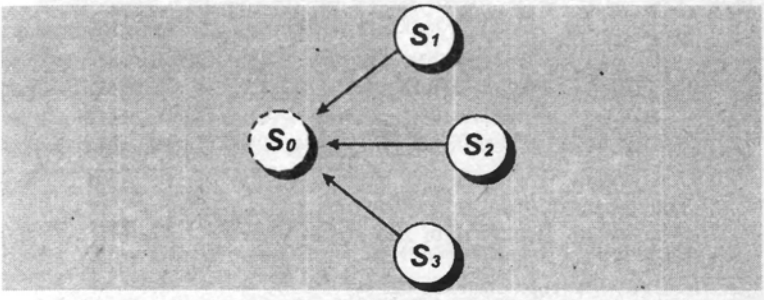


Рис. 17

Так примерно решали эту задачу все учащиеся.

Другой вид заданий состоял в том, что испытуемым давалась готовая схема, по которой они придумывали сюжетные задачи. Например, к изображенной ниже схеме испытуемая Лена Г. составила задачу: «Работали две бригады; первая собрала 100 кг картошки, а вторая 150 кг. Работали 3 часа вместе. Сколько собирали они за каждый час?»

Каждый испытуемый выполнил 3-6 заданий.

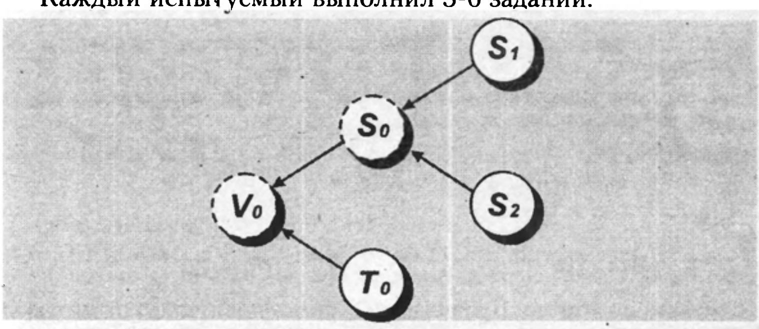


Рис. 18

Следующий компонент, формируемый у учащихся, — выбор способа решения, который имеет место при решении даже простой задачи. Это обусловлено тем, что как мы видели, искомое может быть одновременно в нескольких функциональных связях. Поскольку наши испытуемые уже усвоили все системы связей, в которых могут быть время, скорость и «продукт» процесса, нам оставалось лишь научить их выбрать тот вид отношений, который в условиях данной задачи ведет к решению. Обучение начиналось со следующей задачи: «Открыты два крана. Найти количество воды, которое налилось в бассейн, если известно, что первый кран был открыт в течение времени T_1 и «работал» со скоростью V_1, а второй был открыт в течение времени T_2 и «работал» со скоростью V_2?» Вот как протекало решение у испытуемого Саши М.:

Испытуемый. Что требуется в задаче? Повторите, пожалуйста.

Экспериментатор. Количество воды в бассейне...

Испытуемый. И работали два крана? Значит *(пишет)*: S_0? Известно T_1, V_1, T_2, V_2.

Экспериментатор. Составь схему.

Испытуемый *(в кружочке из пунктирной линии пишет So и к нему направляет 3 стрелки: от T_1, V_1, T_2* **(рис. 19)**. *Хочет еще вести одну стрелку, но полученная схема не удовлетворяет его).*

Испытуемый. Как из T_1 и V_1 и получить S_0. Есть T_2... V_2; нет, из T_1 и V_1 можно получить S_1, а не S_0 *(изображает другую схему)* **(рис. 20)**.

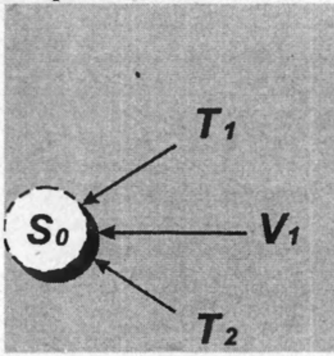


Рис. 19

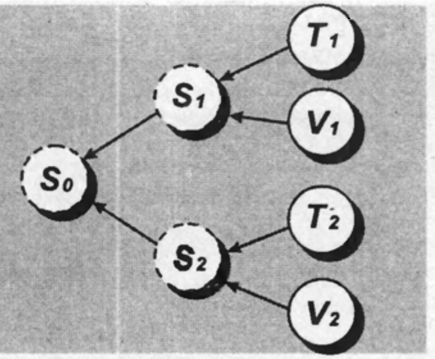


Рис. 20

Экспериментатор. Правильно. Очень хорошо. Во сколько действий эта задача? Наметь их.

Испытуемый. В три действия *(намечает их в схеме)*.

Некоторым испытуемым мы предлагали к этой схеме задачи с числовыми данными. Они очень легко их решили.

Хотя учащиеся достаточно хорошо знали все формулы, выбор необходимой вначале производился трудно. Поэтому мы дали им карточку с записью всех основных формул.

Как правило, решение протекало следующим образом: испытуемые выделяли величины в задаче, подчеркивали вопрос, ставили (в тексте задачи) числовые данные в прямоугольник из сплошной линии и обозначали соответствующим символом, затем записывали данные в тетрадь, повторяли по ним задачу и приступали к составлению схемы; намечали в ней порядок действий и выполняли их, пользуясь формулами и известной им из работы в классе записью «решения с вопросами». Вот как выглядела одна из задач после анализа ее условий:

[«Три машины] израсходовали за [$\overset{T_0}{\boxed{10}}$ часов] [$\overset{S_0}{\boxed{250}}$ л] горючего. Известно, что за это время первая машина израсходовала [$\overset{S_1}{\boxed{60}}$ л], а вторая [$\overset{S_2}{\boxed{100}}$ л]. Найдите, сколько расходовала третья машина за час?» V_3

Вот запись данных: $T_0=10$ ч
$S_0=350$ л
$S_1=60$ л
$S_2=110$ л
$V_3=?$

Вначале у учащихся наблюдалась тенденция приступать к преобразованию данных до установления их отношений. Исполнительная часть, не обеспеченная адекватной ориентировочной основой, естественно, может вести только по пути «проб и ошибок».

Построение схемы (дерева рассуждения) является материализованной формой представления ориентировочной основы, объективирующей содержащиеся в условии задачи данные и их отношения.

Поскольку мы решительно пресекали эти тенденции, учащиеся очень скоро привыкли переходить после записи условий к составлению схемы.

Испытуемые знали необходимые отношения между основными элементами ситуации, поэтому они понимали, какие возможны гипотезы в условиях каждой конкретной задачи.

Так, при решении только что приведенной задачи искомое (V_3) может быть найдено только двумя путями: или как функция S_3 и T_3, или как функция V_0, V_1, V_2.

При проведении данной серии опытов мы позволяли испытуемым проверять эти гипотезы поочередно. В дальнейшем мы пришли к выводу, что для обобщения функциональных отношений между величинами и для выбора наиболее рационального пути решения целесообразно с самого начала моделировать на схеме все возможные пути поиска.

При последовательном выдвижении возможных гипотез большинство испытуемых, решая данную задачу, вначале пыталось получить скорость третьего участника, используя его «продукт» (S_3) и время участия. Пытаясь воспользоваться соответствующей формулой ($V_3 = S_3 : T_3$), испытуемые обнаружили, что для этого надо найти S_3. Оно также может быть получено двумя путями: а) как функция скорости и времени третьего участника процесса; б) как функция «общего продукта» и «продуктов» других участников, т. е. как часть целого. Первая гипотеза была быстро отвергнута, так как скорость данного участника процесса является искомой. Проверка второй гипотезы привела к решению. Вот пример протокола:

Вариант А

I. $V_3 = S_3 : T_3$

II. $S_3 = ?\quad S_3 = V_3 \times T_3$

III. $V_3 = ?$ V_3— искомое, его нет. Схема зачеркивается (рис. 21).

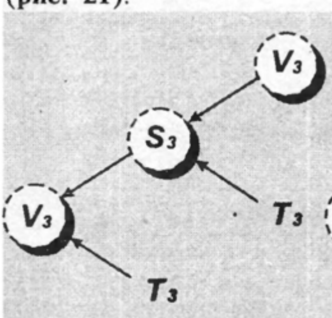


Рис. 21

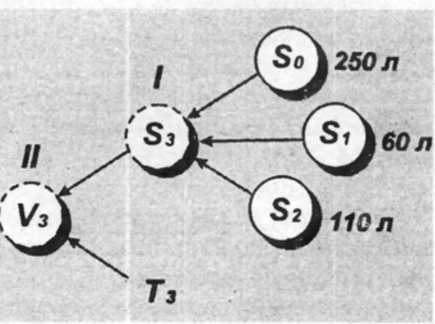


Рис. 22

Вариант Б

I. $V_3 = S_3 : T_3$

II. $S_3 = ?$ $\quad S_3 = S_0 - S_1 - S_2$

III. $T_3 = ?$ $\quad T_3 = T_0$

Вывод: Задача в 2 действия (помечены на схеме — **рис. 22** — I и II). Приступает к решению. Остальные испытуемые пошли по второму пути, т. е. решили найти скорость третьего участника процесса как функцию общей скорости и скоростей других участников. В этих случаях учащиеся делали примерно такую запись и изображали такую схему (**рис. 23**).

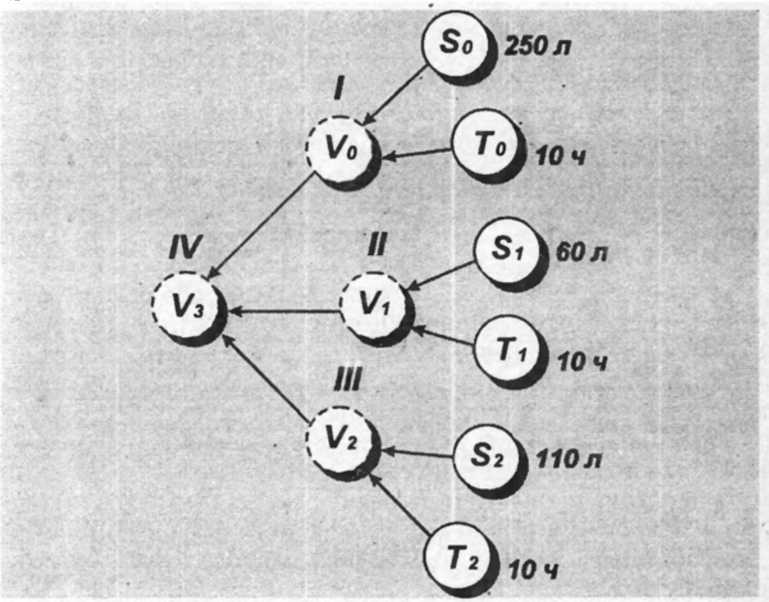


Рис. 23

Вариант В

I. $V_3 = V_0 - V_1 \; V_2$

II. $V_0 = ?$ $\quad V_0 = S_0 : T_0$

III. $V_1 = ?$ $\quad V_1 = S_1 : T_1$

IV. $T_1 = ?$ $T_1 = T_0$ (одновременно)

V. $V_2 = ?$ $V_2 = S_2 : T_2$

VI. $T_2 = ?$ $T_2 = T_0$ (одновременно)

Вывод: Задача в 4 действия (помечены на схеме I, II, III и IV), испытуемая приступает к решению.

Как видим, этот путь не рационален, так как для нахождения искомого требуется вдвое больше действий, чем в первом случае. Но поскольку испытуемые опробовали этот путь первым, и он привел их к решению задачи, они не моделировали на схеме второго пути и, следовательно, не могли выбрать наиболее рационального из них.

При одновременном моделировании на схеме всех возможных путей решения учащиеся легко научатся выбирать наилучший из них. Так, при решении данной задачи учащийся, выделив искомое (скорость третьего участника процесса), сразу же должен обозначить оба возможных пути (**рис. 24**).

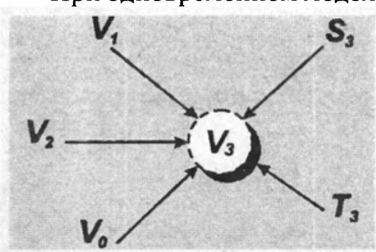


Рис. 24

Дальше, анализируя условия задачи и обозначая возможные пути нахождения нужных ему величин, он приходит к следующей схеме (**рис. 25**).

На этой схеме легко увидеть, что путь, изображенный справа от искомого, короче изображенного слева.

В дальнейшем, когда учащийся усвоит общий прием решения и научится пользоваться им в уме, он сможет, очевидно, находить рациональный путь очень быстро, не проходя мысленно всех возможных путей. Но для этого на этапе материализованных действий он должен моделировать их развернуто, изображать все полностью.

Эффективность данной схемы решения объясняется тем, что она одновременно моделирует и конкретную проблемную ситуацию и общие отношения той области действительности, к которой относится задача. Материализуя отношения, схема позволяет учащемуся любую конкретную систему отношений наглядно представить как частный случай общих отношений, составляющих сущность данной области.

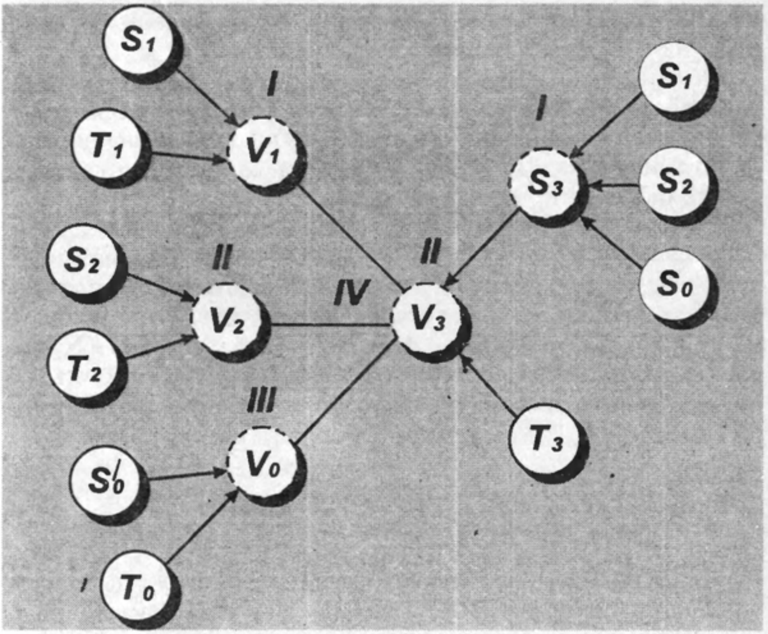


Рис. 25

Эта схема не содержит исполнительных операций, но они известны испытуемым и сами по себе никаких трудностей для них не представляют.

Постепенно схема как материальная опора может быть снята. Ту же судьбу должны иметь и формулы: запись формул и подстановка чисел в формулы должны уступить место непосредственному преобразованию данных. Но мы не ставили перед собой цели достичь такого уровня решения задач.

С опорой же на схемы испытуемые легко решали довольно сложные задачи, уверенно выделяя нужную систему отношений и выполняя соответствующие им преобразования. Поскольку усвоение общего метода составления схемы решения не вызвало у испытуемых затруднений, то дальнейшая работа, бесспорно, привела бы к еще более уверенному и быстрому составлению схем и использованию их для решения.

Усвоение основных понятий, связанных с ситуацией «совместного действия», и общего приема решения задач «на процессы» заняло 11-12 занятий (по 30 минут). Основное число занятий было потрачено на усвоение новых отношений, возникающих в ситуации совместного действия.

Общий же метод решения сложных задач (составление «дерева рассуждения») был усвоен на материализованном уровне довольно быстро: учащиеся, как правило, решали только по три задачи. Путь данного метода до этапа умственных действий мы не прослеживали.

На этом обучение учащихся заканчивалось. Мы полагали, что учащиеся, усвоив основные величины, характеризующие процессы, и их отношения, а также научившись моделировать эти отношения в условиях конкретных задач (составлять в материализованной форме ориентировочную основу) и совершать соответствующие им преобразования (осуществлять исполнительные действия), теперь смогут решать любые задачи на «процессы».

III. КОНТРОЛЬНЫЙ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Мы объявили нашим учащимся, что они будут сдавать письменный экзамен. При этом 12 испытуемым сказали, что он проводится с целью отбора — самые лучшие будут продолжать занятия с нами; остальным было просто сообщено, что им будут поставлены оценки (при обучении мы не ставили оценок).

Контрольные задания были такого вида: написать формулы для некоторых из величин в заданных условиях; проверить ряд предъявленных формул; решить две задачи на «совместное действие».

Вот пример задания первого вида:

«Напишите формулу для нахождения общей скорости двух «участников», когда они «работают» одновременно и в сотрудничестве». Всего было дано 10 таких заданий каждому испытуемому, которые охватывали почти все отношения между величинами как в ситуации одного участника процесса, так и в ситуации совместного действия; было составлено несколько вариантов заданий данного типа. В одном из вариантов испытуемые должны были написать следующие формулы:

1) $V_0 = V_1 + V_2$

2) $T_1 = S_1 : V_1$

3) $T_0 = S_0 : V_0$

4) $S_0 = T_0 \times V_0$
5) $S_1 = S_0 - S_2$
6) $S_0 = S_1 - S_2 + S_3$
7) $T_1 = T_2 = T_3 = T_0$
8) $V_1 = V_0 - V_2$
9) $T_0 = T_1 = T_2$
10) $V_4 = S_4 : T_4$

Теперь приведем задания второго вида:

«Проверить следующие формулы (неправильные зачеркнуть и написать рядом правильные):

1) $S_1 = S_0 + S_2$ (когда работают дружно)
(должно быть: $S_1 = S_0 - S_2$)
2) $V_2 = S_2 : T_2$
3) $T_0 = T_1$ (когда работают одновременно)
4) $V_0 = T_0 : S_0$ (должно быть: $V_0 = S_0 : T_0$)
5) $S_1 = T \times V_1$ (должно быть: $S_1 = T_1 \times V_1$)
6) $S_0 = V_0 : T_0$ (должно быть: $S_0 = V_0 \times T_0$)
7) $S_2 = S_0 - S_1$»

Задачи на «совместное действие» были даны следующие:

Задача 1. Из двух городов, расстояние между которыми 540 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Один из них шел со скоростью 40 км в час. Через 6 часов поезда встретились. Определите скорость второго поезда.

Задача 2. Надо посадить 60 деревьев. Если будет работать только III класс, то работа будет выполнена за 3 часа; если будет работать только IV класс, то работа будет выполнена за 6 часов. За сколько времени будет выполнена работа, если оба класса будут работать вместе?

Все задания были выполнены весьма успешно. При выполнении первой группы заданий было допущено только 6 ошибок, что составляет 3% от общего числа заданий данного вида. Следует при этом отметить, что ошибки были исправлены самими учащимися, когда экспериментатор указал на них. Примерно такая же картина была получена и при выполнении заданий второго вида.

Первую задачу решили все испытуемые, причем примерно половина испытуемых начала поиск с формулы $V_2 = S_2 : T_2$ и решила задачу в три действия (вначале нашли путь первого поезда, затем путь второго и, наконец, искомую скорость). Остальные испытуемые начали с формулы $V_2 = V_0 - V_1$ и решили задачу в два действия (нашли общую скорость, а затем вычли из нее скорость первого поезда). После выполнения контрольной работы экспериментатор каждому испытуемому предложил решить задачу другим путем. Все испытуемые справились с этим заданием.

Никаких указаний относительно построения и использования схемы ситуации и схемы решения экспериментатор не давал. (Учащимся было сказано: «Решайте так, как вам легче».) Тем не менее, 4 испытуемых строили схему ситуации, 15 испытуемых строили схему решения, в которой указывали все данные условий задачи. Испытуемые выписывали также формулы, которые были им нужны по ходу решения.

При решении второй задачи у ряда испытуемых возникли затруднения при распознавании «60 деревьев»; это данное выступает в условии задачи в трех функциях: а) «продукт» действий учащихся III класса; б) «продукт» действий учащихся IV класса; в) их общий «продукт». Эта задача существенно отличается от задач обучающей серии еще одной особенностью: в задаче дано время действия каждого участника процесса в ситуации изолированного действия, а требуется найти время в ситуации «совместного действия», т. е. общее время. Такого типа задач в обучающей серии также не было.

Все испытуемые обозначили данные в условии задачи следующим образом: 60 деревьев как общий «продукт», 3 часа как время действия первого участника, 6 часов как время действия второго участника, а искомое как общее время. Без колебаний все начали поиск решения с формулы $T_0 = S_0 : V_0$. Никто из испытуемых не совершил ошибки, характерной для многих учащихся не только начальной, но и средней школы: для получения общего времени складывают время каждого участника процесса.

Однако 7 испытуемых не смогли построить схему решения задачи, пока экспериментатор не помог им представить картину трех ситуаций, разделенных во времени.

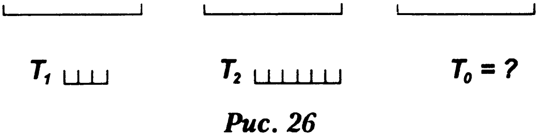


Рис. 26

Это подсказало испытуемым, что первые две ситуации позволяют узнать скорости участников процесса, а следовательно, и общую скорость. Дальше задача решалась легко. Остальные испытуемые справились с задачей успешно. Им потребовался лишь один наводящий вопрос экспериментатора: «Ты все установил об участниках?» До этого испытуемые уже установили, что S_1=60 д. и S_2=60 д. Имея перед собой S_1 и T_1, S_2 и T_2, они тут же принимали решение узнать скорости участников процесса и сложить их, чтобы получить общую скорость.

Выполнение заданий первой и второй группы показало, что основные понятия (*S, T* и V) и их отношения усвоены учащимися в умственном плане. При решении же задач учащиеся прибегали к частичной материализации (составляли схему проблемной ситуации, описанной в задаче, и схему решения) и внешнеречевым действиям.

Так, план решения намечался или на схеме решения или обозначался с помощью записи ряда формул, или, наконец, указывался с помощью устной речи.

Таким образом, общий прием решения был усвоен в основном только на уровне материализованных действий, но и в этом случае учащиеся работали уверенно, и в целом справились с задачами успешно.

Сравнительный эксперимент мы провели на 72 учениках среднего уровня успеваемости, взяв по 18 учащихся из IV, V, VI и VIII классов, предложив им задания третьей группы, т. е. две вышеприведенные задачи. Учащимся IV и V классов были даны дополнительно задания на определение времени протекания известных им процессов (движение, работа), результата процесса и скорости. Индивидуально был проведен эксперимент с 5 учениками IV класса и 8 учениками V класса. Остальные учащиеся выполняли задания письменно, как контрольную работу в классе. Из тех учащихся, с которыми мы проводили работу индивидуально, только один ученик V класса решил задачу №1. Он аргументировал каждое действие и приступил к решению сразу, без всяких проб.

Сводные данные по всем испытуемым приведены в таблице (см. таблицу на стр. 114).

Как видим, подавляющее большинство учащихся с задачами не справилось.

Ученикам VI и VIII классов мы позволяли решать и алгебраическими способами. Но только один ученик VIII класса решил задачу №2 с помощью уравнения:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

К задаче №1 мы начертили на доске схему ситуации; ученикам, с которыми эксперимент проводился индивидуально, в случае затруднений мы ставили те же вспомогательные вопросы, что и нашим испытуемым, но это очень мало помогало.

Задания	Предъявлено заданий на класс	Выполнено правильно								Всего	
		IV кл.		V кл.		VI кл.		VIII кл.			
Задача 1	18	4	22%	7	39%	8	44%	4	22%	23	16%
Задача 2	18	4	22%	6	33%	10	50%	3	17%	23	16%
Задание 3 (определение основных величин)	54	16	30%	27	50%		—		—	43	40%

Учащиеся совершали разные пробы по преобразованию чисел, не имея никакого плана поиска. Вот некоторые из них:

Задача №1:
— 540 км:40
— 40 кмx6=240 км; 540:240 км и т. д.

Задача №2:
— 3 ч + 6 ч = 9 ч; 60:9 ч и т. п.

Учащимся IV и V классов, как указывалось, было дано задание определить, что такое скорость, в частности скорость движения; как находить скорость; по каким данным вычисляется пройденный путь и потраченное время. Хотя в школе задачи на движение они решали, начиная с III класса, определить эти понятия затруднялись. Как видно из таблицы, правильные ответы были лишь в 43 случаях из 108.

Таким образом, сравнительная серия опытов показала, что большинство учащихся средних и даже старших классов при существующей методике обучения арифметическим задачам на «процессы» не овладевают соответствующим умением с достаточной степенью сознательности и обобщенности. Предложенная нами методика позволила овладеть общим приемом по решению задач данного класса даже слабоуспевающим ученикам III класса.

* * *

Наша гипотеза о возможности сформировать общее умение решать задачи данного класса, обеспечив полную и обобщенную ориентировочную основу действий и их поэтапное формирование, подтвердилась. Все испытуемые овладели выделенным нами приемом решения задач на «процессы» и успешно применяли его в различных частных ситуациях. Необходимые знания при этом наши учащиеся получили в результате выполнения адекватных действий мышления: они не заучивали ни одной формулы, ни одного правила по нахождению данных величин, но в любое время могли определить эти понятия и раскрыть систему их отношений.

Важно также отметить следующее обстоятельство: у большинства наших испытуемых до эксперимента было отрицательное отношение к решению задач, они не любили решать их. Обучение по нашей методике вызвало большой интерес у детей к арифметике. На каждом занятии они хотели как можно больше решить задач. Уже после первых 2-3 занятий исчезли отвлекаемость, рассеянность, невнимательное чтение условий задачи.

После «экзамена» (контрольный эксперимент) мы сообщили испытуемым, что форма наших занятий меняется: они будут сами искать и решать задачи из учебников старших классов и предъявлять нам решения для проверки. Все ученики экспериментальной группы предъявили экспериментатору задачи, решенные самостоятельно и верно. Схему решения некоторые учащиеся не составляли, намечали формулами ход решения, что представляет собой уже свернутый способ составления плана решения и определенный переход от материализованной формы к форме речевой.

Дополнительные решения учащихся — показатель бескорыстного интереса к решению задач: их никто не обязывал это делать, никаких оценок им за это не ставили, никто не напоминал им о задачах, никто не контролировал процесс их выполнения. Усвоение метода составления полной ориентировочной основы, необходимой для нахождения правильного решения задач данного класса, позволило учащимся успешно и самостоятельно решить даже наиболее трудные из них.

В существующей практике обучения состав ориентировочной основы исполнительных операций не выделяется, учащихся не учат ориентироваться на входящие в нее условия. Самостоятельное выделение и усвоение этих условий оказываются доступными лишь отдельным ученикам. В результате — большинство учащихся не овладевает общим приемом решения данных арифметических задач.

Имеет большое значение для усвоения общего приема решения схема, которая моделирует отношения между величинами, помогает легко составить план решения и выбрать наиболее рациональный путь.

Заметим, что методика преподавания арифметики предлагает использовать схемы решения только в случае нетиповых задач[2]. Однако и в этих случаях схемы в школьной практике не получили должного признания, так как рекомендуемые схемы дублируют само решение, являются ненужным и сложным изображением уже найденного решения, а не пути его нахождения. Вот, например, схема, предлагаемая Е. М. Семеновым для решения задач на нахождение суммы. (Например, имеем такую задачу: «На одной полке 7 книг, на другой на 5 больше. Сколько книг на второй полке?»). Нетрудно видеть, что составить нижеприведенную схему можно лишь после того, когда уже найдено решение: надо прибавить к одному числу другое, чтобы получить ответ на вопрос задачи[3].

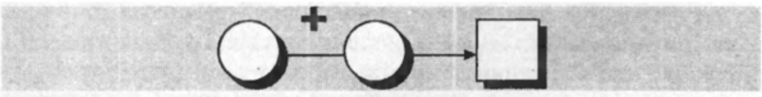


Рис. 27

Мы в обучающем эксперименте пользовались схемой как средством установления зависимостей между величинами, которые, в свою очередь, указывали и способ решения.

2 См. Н. С. Попова. Методика преподавания арифметики. М., 1954.

3 См. Е. М. Семенов. Математика. I класс. Методич. пособие для учителей. Свердловск, 1963.

Покажем на примере разные возможности в решении задачи двух схем.

Задача: «Если давать корове по 10 кг сена в день, то заготовленного сена хватит на 120 дней. На сколько дней хватит этого сена, если давать в день на 2 кг больше?»[4].

Автор книги предлагает следующую схему (по Л. М. Фридману) (рис.28). Автор утверждает, что после составления такой схемы ученик может решать задачу. А как составить схему — указаний нет.

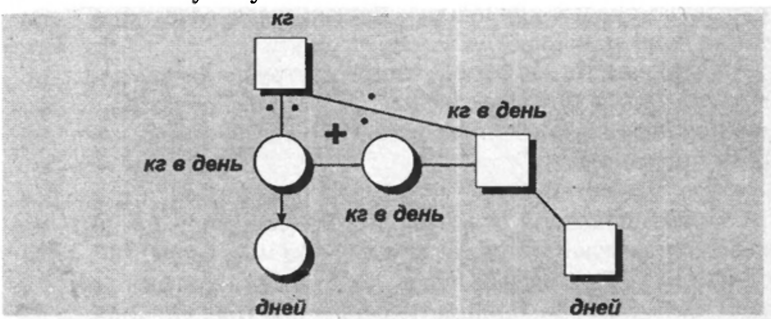


Рис. 28

(В схеме кружочки обозначают известное, квадраты — неизвестное). А вот схема, составленная по нашему методу:

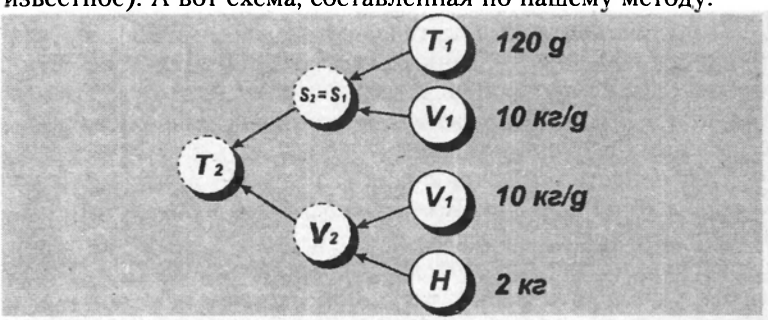


Рис. 29

4 Задача взята из книги Е. М. Семенова «Арифметические упражнения как средство воспитания логического мышления учащихся восьмилетней школы» (Решение арифметических задач I-VI кл.). Методич. пособие для учителей. Свердловск, 1963.

Схема составлена по функциональному принципу: искомое представлено как функция от некоторых аргументов.

Такую схему наши учащиеся могли составить, а на ее основе найти решение задачи.

В схеме Л. М Фридмана не выступают отношения между элементами ситуации, а главное — учащихся не учат понимать эти отношения и использовать их при решении задачи.

Наконец, в этой схеме указаны конкретные данные, имеющие место в данной задаче. Следовательно, эта схема не может служить моделью для анализа других задач, связанных с анализом других конкретных процессов.

Мы с самого начала обучения употребляли символы, которые выступали в качестве носителей общих значений, стоящих за ними, и позволяли ориентироваться при анализе любого процесса.

Преимущество обучения через формирование прежде всего ориентировочной основы действий состоит в том, что оно обеспечивает понимание заданной системы отношений, и следовательно, адекватный перевод их на язык арифметических действий. Сами же арифметические действия (исполнительная часть) не представляют труда для учащихся при решении сложных задач, так как они те же самые. Трудность решения задач не в выполнении арифметических действий, а в адекватности их применения.

Полученные данные заставляют нас усомниться в правомерности поисков оснований для классификации арифметических задач в исполнительных действиях. Логика исполнительных действий определяется логикой отношений, представленных в условии задачи.

Особенности этих отношений (а не сюжет и не арифметические действия) и должны быть положены в основу типизации арифметических задач.

Главная задача обучения должна заключаться в раскрытии ученику этих отношений, в формировании у него полной и адекватной ориентировочной основы выполняемых действий, а не в тренировке исполнительной лишь части их.

В настоящее время мы ведем исследование по дальнейшему обобщению рассмотренного приема. Предварительный анализ показал, что задачи на «процессы» и задачи на «куплю-продажу» имеют идентичную систему отношений, что разница лишь в конкретно-предметном плане, что в данном случае не является существенным. Думаем, что может быть найден способ анализа, позволяющий учащимся подходить к этим двум большим классам арифметических задач как к разновидностям одного и того же типа.

С другой стороны, открывается возможность перенести рассмотренный прием в курс физики, где он успешно может быть применен не только при изучении движения, но и при анализе давления, удельного веса.

Г. А. Буткин

ФОРМИРОВАНИЕ УМЕНИЙ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Настоящая работа принадлежит к циклу исследований, проведенных на основе методических принципов теории формирования умственных действий и понятий П. Я. Гальперина.

Предметом нашего исследования являлась проблема доказательства в начальном курсе геометрии.

Усвоение геометрии предполагает не только овладение системой геометрических понятий, но и целым рядом различных умений, среди которых наиболее важным является умение доказывать.

Общеизвестно, что учащиеся средней школы, как правило, не владеют данным умением. Они не только не умеют самостоятельно решать задачи на доказательство и доказывать теоремы, но часто оказываются не в состоянии осуществить простое воспроизведение доказательства уже известной им теоремы, если к ней дан чертеж с другими буквенными обозначениями или если чертеж расположен иначе.

В проведенном нами исследовании была предпринята попытка на основе анализа умения доказывать раскрыть его содержание, выделить составляющие данное умение компоненты и организовать их усвоение.

Интересующая нас проблема является объектом внимания не только преподавателей геометрии, математиков-методистов, но и психологов. Однако ни в методической, ни в психологической литературе мы не находим исследований, авторы которых подходили бы к данной проблеме со стороны анализа умения доказывать, выделения составляющих его содержание действий и операций. С другой стороны, в этих исследованиях остается нераскрытым также и содержание того процесса, результатом которого является усвоение умения доказывать.

Выполнение геометрического доказательства возможно лишь при условии владения учащимися некоторой предварительной системой геометрических знаний и умений.

Отсутствие необходимых для решения задачи знаний или же их плохое качество вызывает у учащихся различного рода затруднения. Этот факт неоднократно отмечался в методической литературе по геометрии. В работах В. И. Зыковой и Е. Н. Кабановой-Меллер он был подвергнут специальному исследованию. Авторами, в частности, было убедительно показано, что неумение решать задачи может быть связано, например, с тем, что у учащихся сформировано слишком широкое или слишком узкое понятие о той или иной геометрической фигуре [8], с недостаточно обобщенным усвоением теоремы [10], с отсутствием систематизированности понятий [7] и т. д.

Формирование полноценной системы начальных геометрических понятий является, таким образом, очень важным, однако лишь предварительным условием успешности решения задач на доказательство. Умение решать задачи — это умение применять уже имеющиеся у учащихся знания в соответствии с конкретными условиями задачи или теоремы.

В этой связи большого внимания заслуживает высказанная рядом математиков и методистов идея регулирования мыслительной деятельности в процессе доказательства посредством системы правил, указаний, советов и т. д. (Ж. Адамар [1], Д. Пойа [12], Н. Н. Иовлев [9], А. Сонцов [13] и др.).

Наиболее полное отражение указанная точка зрения нашла в исследованиях Л. Н. Ланды [11]. Автором было показано, что затруднения учащихся при доказательстве могут быть связаны не только с отсутствием необходимых для доказательства знаний или с их плохим качеством, но и с неумением правильно применять эти знания, правильно анализировать задачу.

В связи с этим он предлагает вооружить учащихся «методом рассуждения» в процессе решения задач на доказательство. Чтобы обеспечить формирование указанного метода, Л. Н. Ланда рекомендует учащимся пользоваться специальным правилом, раскрывающим содержание и последовательность анализа условия задачи. Правило включает в себя следующие рекомендации: посмотреть, что дано и что требуется доказать; сделать выводы из того, что дано; вспомнить все известные признаки фигур и сопоставить их с тем, что дано, а также и с чертежом; выделяя на чертеже элементы, выяснить, чем они могут еще являться, и т. д. Говоря о содержании отдельных пунктов правила, необходимо отметить, что учащимся в них рекомендуется выполнять действия, представляющие собой довольно сложные умения. Формирование таких умений требует применения особой методики и специальной системы заданий.

Естественно, что это ставит под сомнение целесообразность формирования у учащихся «метода рассуждения» без предварительной отработки с ними таких, например, действий, как выведение следствий из того, что дано в условии, или подведение заданных в условии геометрических явлений под системы признаков искомых понятий и т. д.

Применение подобных правил безусловно необходимо и целесообразно, но лишь в качестве способа регулирования процесса применения уже сформированных действий. У Л. Н. Ланды, как мы видим, формирование таких действий вообще не предусмотрено.

Таким образом, в исследованиях, посвященных проблеме доказательства, действия, составляющие содержание умения доказывать, или вообще не выделяются, или же выделяются, но при этом не выступают в качестве специального предмета усвоения.

Доказательство теоремы (или решение задачи на доказательство) состоит, как известно, в обосновании положения данной теоремы посредством аксиом, определений понятий или ранее доказанных геометрических предложений. Однако для выяснения того, что из себя представляет умение доказывать, необходимо выяснить, какие действия и операции ученик должен выполнить, чтобы указанное обоснование произошло.

Как известно, геометрическая теорема (как и задача на доказательство) состоит из условия и заключения. Существует довольно большая категория теорем, доказательство которых сводится к обоснованию наличия в условиях этих теорем того или иного геометрического понятия. Доказать такого рода теорему — это значит подвести заданные в ее условии геометрические явления под искомое понятие, т. е. проверить, обладают ли геометрические явления, заданные в условии, всеми необходимыми и достаточными признаками искомого понятия, содержащегося в заключении. Характер операций проверки зависит от множества различных условий, в том числе и от логической структуры признаков искомого понятия[1]. При конъюнктивной структуре признаков для доказательства должны быть обнаружены все необходимые и достаточные его признаки. Наоборот, при дизъюнктивной их структуре операция проверки ограничивается обнаружением хотя бы одного из признаков.

Естественно, что подведение под один из признаков требует предварительного установления того, какой именно признак искомого геометрического понятия должен быть использован в каждом отдельном случае.

При дизъюнктивной структуре признаков искомого геометрического понятия действие подведения, таким образом, опосредуется действием выбора. Причем последнее в структуре процесса доказательства выступает в качестве необходимого предварительного условия выполнения основного действия — подведения.

Искомые геометрические понятия могут иметь не одну, а несколько систем необходимых и достаточных признаков, каждая из которых дает возможность проверить наличие в условии теоремы (или задачи на доказательство) искомого геометрического понятия. Естественно, что без знания этих систем действие подведения, а следовательно, и сам процесс до-

1 Под логической структурой признаков понятия мы понимаем внутренние отношения между этими признаками, определяемые логическим союзом, посредством которого они связаны между собой.

казательства не могут быть осуществлены. Владение действием подведения (а при дизъюнктивной структуре признаков также и действием выбора), знание систем признаков искомых геометрических понятий — необходимые условия успешного проведения геометрического доказательства.

Однако указанные два условия не являются достаточными. Признаки искомого геометрического понятия содержатся в условии в опосредованном виде, т. е. заданы через системы других понятий. Причем степень опосредованности может быть разной, что и является одним из главных показателей сложности теоремы.

Следовательно, даже хорошо владея действием подведения под понятие и зная необходимые и достаточные признаки искомого понятия, ученик может не знать, как их найти, т. е. как за системой одних понятий обнаружить систему других. Например, чтобы доказать, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, надо выяснить, скрываются ли за понятиями «смежные углы», «биссектриса» признаки перпендикулярных прямых (две прямые; образуют прямой угол). А для этого надо «развернуть» эти понятия, т. е. из понятий «биссектриса» и «смежные углы» вывести все необходимые следствия. Проделанный анализ позволяет нам говорить о следующих компонентах, входящих в умение доказывать.

1. Действие подведения геометрических явлений под понятие. Доказать — это значит установить, обладают ли заданные в условии геометрические явления необходимыми и достаточными признаками искомого понятия.

2. Знание систем, необходимых и достаточных признаков искомых геометрических понятий.

3. Умение развернуть условие, получить систему его следствий, обнаружить за содержащимися в нем понятиями признаки искомого понятия.

Выделенные нами действия — результат логического анализа умения доказывать. Овладение данным умением предполагает усвоение этих действий учащимися.

Следует отметить, что действие подведения под понятие использовалось и в ранее проводившихся исследованиях, основывающихся на методике поэтапного формирования умственных действий. Однако это действие выступало лишь как средство формирования различных понятий [2], [3], [5]. В частности, в исследованиях, посвященных формированию начальных геометрических понятий [6], [14], проблема доказательства не выступала в качестве специального предмета исследования. Тем не менее среди этих работ есть две, которые имеют непосредственное отношение к интересующей нас проблеме.

В них была показана возможность переноса действия подведения под понятие в осложненные условия. Следовательно, результаты данных исследований говорят о существовании тесной связи между умением учащихся опираться на совокупность существенных признаков при подведении под понятие того или иного геометрического явления и умением решать задачи на доказательство.

В свете результатов проведенного нами анализа умения доказывать становится понятным содержание этой связи.

Вооружение учащихся знанием существенных признаков искомых геометрических понятий и умением подводить различные геометрические явления под понятие есть в то же время вооружение их компонентами умения доказывать. Следовательно, при встрече с задачами на доказательство испытуемые уже частично владели умением доказывать: они знали, что доказать — это значит установить, обладают ли данные фигуры системой необходимых и достаточных признаков искомых понятий.

Можно предположить, что задачи были бы решены еще более успешно (особенно во втором из изложенных исследований), если бы был отработан также и третий компонент умения доказывать. Чтобы проверить, правильно ли мы выделили основные компоненты умений доказывать, надо установить, будут ли способны учащиеся, овладевшие ими, самостоятельно доказывать теоремы и решать задачи на доказательство. Для этого, в свою очередь, необходимо обеспечить полноценное усвоение указанных компонентов.

Все это мы и сделали предметом нашего экспериментального исследования.

Методика

При составлении методики мы исходили из основных положений теории формирования умственных действий и понятий, разработанной П. Я. Гальпериным и его сотрудниками.

В ряде конкретных исследований, посвященных формированию арифметических, грамматических и других знаний, было показано, что реализация методических принципов данной теории в обучении обеспечивает возможность управления процессом усвоения, т. е. позволяет целенаправленно и планомерно формировать знания в том их качестве, которое заранее намечено [4], [5] и др.

В качестве экспериментального материала мы взяли начальные геометрические задачи и теоремы на равенство.

В соответствии с изложенным выше нам необходимо было обеспечить:

1) усвоение учащимися действия подведения под понятие равенства и понимание ими того, что доказать — это и значит осуществить подведение под понятие равенство;

2) усвоение признаков равенства геометрических фигур;

3) овладение действием развертывания условий и умением находить в них необходимые и достаточные признаки равенства искомых фигур.

Испытуемыми в нашем эксперименте были 20 учащихся пятых классов средней школы (не знакомых с геометрией). По успеваемости состав испытуемых был следующим: 18 среднеуспевающих, один слабоуспевающий и один отличник.

Содержание обучающей части эксперимента и состояло в формировании этих компонентов умения доказывать. Но, чтобы подойти к их формированию, необходимо было предварительно сформировать у учащихся строго определенную систему начальных геометрических знаний и умений, на которых основываются выбранные нами теоремы и задачи. Содержание этой системы сводилось к формированию у учащихся следующих знаний и умений.

1. Учащиеся должны были усвоить начальные геометрические понятия: прямая линия, угол, треугольник, биссектриса угла, перпендикулярные прямые, прилежащие, смежные и вертикальные углы, а также углы накрест лежащие, соответственные и односторонние[2].

---

2 Формирование понятий о накрест лежащих, соответственных и односторонних углах было связано с некоторыми дополнительными задачами, поставленными в данном эксперименте. Подробно об этом будет сказано ниже.

2. Испытуемых было необходимо познакомить со свойствами смежных углов (равенство суммы смежных углов 180°) и свойствами прямой линии (прямая — кратчайшее расстояние между двумя точками, через две точки можно провести прямую линию, и притом только одну).

3. Учащихся обучали действию с отрезками и углами.

Система предварительных знаний и умений отрабатывалась у учащихся также по методике формирования умственных действий. Так как эта методика подробно изложена в исследованиях П. Я. Гальперина и Н. Ф. Талызиной [6], [14], то мы не будем давать ее описания. Укажем лишь на главные моменты, обеспечивающие управление процессом формирования понятий.

1. Выбор адекватного действия.

В нашем исследовании, как и в ранее проведенных, таким действием было действие подведения геометрических явлений под формируемое понятие.

2. Нахождение исходной материальной (или материализованной) формы данного действия и построение действия в этой форме.

3. Раскрытие ученику состава операций данного действия, порядка их выполнения и правила оценки результатов полученных после выполнения действия.

4. Поэтапная отработка действия с целью перенесения его во внутренний (умственный) план.

5. Осуществление пооперационного контроля за действием на всех этапах его выполнения.

6. Специальный подбор материала, к которому должны применяться признаки формируемого понятия, а также установление последовательности предъявления этого материала учащимся.

После отработки системы предварительных геометрических знаний мы приступили к обучению учащихся умению доказывать. Обучение начиналось с формирования понятия геометрического равенства.

Средством формирования данного понятия (как и предварительных) являлось действие подведения различных фигур под понятие геометрического равенства. Все компоненты действия вначале задавались в материализованной форме, затем действие выполнялось в громкоречевой форме и, наконец, во внутреннем, умственном плане.

На всех этапах отработки данного действия контролировалось выполнение каждой отдельной его операции.

В качестве признаков равенства мы взяли следующие.

1. Две фигуры равны между собой, если при наложении они могут быть полностью совмещены.

2. Две фигуры, состоящие из равного количества отрезков, равны между собой, если при наложении все концы отрезков одной фигуры могут быть полностью совмещены с концами отрезков второй фигуры.

3. Две фигуры равны между собой, если каждая из них равна третьей геометрической фигуре.

4. Если из двух равных отрезков (или углов) вычесть по равному отрезку (или углу), то получатся два равных отрезка (или угла).

5. Если к двум равным отрезкам (или углам) прибавить по равному отрезку (или углу), то и получатся два равных отрезка (или угла).

При составлении системы признаков равенства мы стремились придать им такую форму, которая допускала бы возможность их применения к различным классам фигур.

Следует отметить, что в школьных учебниках геометрии целый ряд признаков равенства вообще не указывается, хотя доказательство очень многих теорем начального курса геометрии требует их знания и применения. К числу таких признаков можно отнести, например, следующие: две фигуры равны, если они порознь равны третьей фигуре; если к двум равным отрезкам (или углам) прибавить по равному отрезку (или углу), то получатся два равных отрезка (или угла). С другой стороны, некоторые признаки равенства вводятся лишь применительно к одному частному классу фигур, в то время как они применимы к нескольким. Например, такой признак, как совпадение концов отрезков, используется лишь для определения равенства отрезков, однако он может быть использован для определения равенства треугольников и многоугольников вообще. Введение обобщенных признаков исключает необходимость запоминания учащимися большого количества конкретных признаков равенства. Один и тот же признак равенства, заданный в обобщенной форме, может быть использован для доказательства разных по своему содержанию теорем, относящихся к совершенно различным разделам курса геометрии. Кроме выделения признаков геометрического равенства мы детально раскрывали учащимся также и операционную структуру действия подведения. Учащиеся получали четкие указания относительно того, какие операции и в какой последовательности они должны выполнять. Соответствующие указания давались также и относительно того, как нужно оценивать результаты действия с признаками равенства.

В ранее проведенных исследованиях, посвященных формированию начальных геометрических понятий, и при формировании системы предварительных понятий в данном исследовании испытуемые имели дело с конъюнктивной структурой признаков формируемых понятий. Испытуемые должны были при подведении того или иного геометрического явления под искомое понятие опираться всякий раз на всю совокупность его признаков.

Понятие геометрического равенства имеет дизъюнктивную структуру. Следовательно, чтобы определить, равны или нет заданные в условии фигуры, надо обнаружить в них хотя бы один из признаков равенства. Для этого необходимо осуществить последовательную проверку каждого признака с точки зрения возможности его применения к условиям той или иной теоремы.

В нашем исследовании испытуемым все признаки равенства предлагались одновременно. В связи с этим применению признака к условиям теоремы (или задачи) должен был предшествовать его выбор из системы эквивалентных признаков равенства. Действие выбора предполагает наличие специальной системы ориентиров, обеспечивающих успешность его осуществления. Однако при формировании понятия геометрического равенства нами подобного рода ориентиры не выделялись. Само действие выбора специально не формировалось.

Действие подведения, как и при формировании системы начальных геометрических знаний, вначале строилось во внешней (материализованной) форме. Признаки равенства столбиком и под соответствующими номерами выписывались на карточку. На отдельной карточке было выписано также и правило их применения. Что касается заданий, то их материализация имела аналогичный характер. На каждой карточке было написано одно задание, к которому был дан также чертеж.

Перенос действия подведения под понятие во внутренний (умственный) план осуществлялся посредством его поэтапной отработки. Последняя состояла в переводе действий из материализованной формы в громкоречевую, затем в план внешней речи про себя и, наконец, во внутренний (умственный) план.

На всех этапах усвоения действия подведения экспериментатором осуществлялся контроль за выполнением как отдельных его операций, так и действия в целом.

Формирование понятия геометрического равенства происходило на основе действия с признаками данного понятия. При этом выполнение операций по применению этих признаков к специально подобранным заданиям регулировалось специальным правилом.

При формировании данного понятия в нашем эксперименте испытуемые выполняли до 72 заданий.

Кроме заданий с полным составом условий учащимся были предложены задания с избыточным и неполным составом условий, а также такие, где избыток одних условий сочетался с недостатком других. В среднем учащимся было предложено от 12 до 15 заданий на применение каждого признака равенства. Примером таких заданий могут быть следующие: «Даны два равных отрезка: *AB* и *CD*. Из отрезка *AB* вычли отрезок *KB*, а из отрезка *CD* — отрезок *ED*, равный отрезку *KB*. Будут ли оставшиеся отрезки *AK* и *CE* равны между собой?», или: «Даны два угла: *CEK* и *MOB*. К углу *CEK* прибавили угол *KEH*, а к углу *MOB* — угол *AOB*, равный углу *MOB*. Будут ли полученные углы *CEH* и *MOA* равны между собой?» В среднем учащимся было предложено 12-15 заданий на применение каждого признака равенства. Отработка понятия геометрического равенства велась одновременно на отрезках и углах.

Формирование понятия геометрического равенства имело своим результатом усвоение учащимися двух компонентов умения доказывать: действия подведения под понятие равенства и системы конкретных признаков равенства.

Что касается третьего компонента умения доказывать — действия развертывания условий, то он формировался отдельно. Формирование его происходило по той же самой методике. Конкретное воплощение ее имело некоторое своеобразие, делающее необходимым более подробное описание методики формирования данного компонента.

Строя методику, мы исходим из следующих соображений.

Доказательство теоремы (или решение задачи на доказательство) в принципе может быть осуществлено путем последовательного развертывания условий, т. е. исчерпывающего выведения из него всех возможных следствий. Однако такой путь является слишком громоздким. Более того, строгое его проведение возможно скорее теоретически, чем практически, так как следствий из условия можно выводить почти бесконечное количество. Умение доказывать теоремы (или задачи) требует не только умения развертывать все подряд, но и вести поиск в определенном направлении, которое определяется спецификой содержания условия задачи или теоремы. Развертывание условий должно приводить учащегося к выявлению признаков искомого понятия наиболее коротким и экономным путем. В нашем эксперименте мы исходим из необходимости формирования у учащихся как умения вообще выводить следствия из условий, так и умения осуществлять дифференцированное, направленное их развертывание.

Вначале действие развертывания формировалось в общем виде. Анализ данного действия позволил нам выделить правило его выполнения. Оно представляло собой некоторую систему указаний, раскрывающую содержание и последовательность выполнения операций действия развертывания условий. Вот некоторые из этих указаний: укажи фигуры, о которых говорится в условии; перечисли все, что о них сказано; укажи, какие новые фигуры получаются из данных фигур; перечисли все, что ты еще о них знаешь.

Правило было выписано на карточку, где каждый его пункт имел соответствующий порядковый номер. На этапе материализованного действия учащиеся должны были пользоваться данной карточкой, выполняя развертывание в строгом соответствии с расположением и содержанием каждого пункта правила. Выполнение каждого пункта правила жестко контролировалось экспериментатором. На данном этапе в распоряжении учащихся также находилась карточка с перечнем всех известных им фигур и отношений между ними.

Выполняя развертывание, учащиеся должны были осуществлять последовательную проверку наличия или отсутствия в условии задания фигур и отношений между ними, указанных на карточке. Последнее также тщательно контролировалось экспериментатором. На этапе громкой речи содержание действия оставалось тем же самым, однако форма его менялась. Теперь оно выполнялось в плане громкой речи и без опоры на карточки с правилом и перечнем фигур и их отношений.

Правильность выполнения каждого пункта правила и на данном этапе жестко контролировалась экспериментатором. На этапе «внешней речи про себя» мы лишь называли учащемуся номер пункта правила, требуя вспомнить его содержание и «про себя» применить к условиям задачи. Вслух учащийся должен был назвать только результат применения, по которому и осуществлялся контроль.

Этап «внутренней речи» характеризовался тем, что учащиеся «про себя» применяли все пункты правила, произнося вслух лишь окончательный результат. Контроль, таким образом, здесь осуществляется только по конечному результату выполнения действия развертывания.

Отработка данного действия велась в процессе выполнения учащимися специально подобранных заданий. Главная особенность этих заданий состояла в том, что в них признаки искомых понятий были заданы «скрыто», т. е. через систему других понятий. Например, предлагались такие задания: «Даны два равных смежных угла: *COD* и *DOK*. Что нам тем самым еще дано?»; «Из точки *O* исходят два луча: *OB* и *OC*. Лучи пересечены прямой *AD* в точках *E* и *K*. Известно, что образовавшиеся при этом углы *AEB* и *CKD* равны между собой. Что нам еще тем самым дано?». Решение такого рода задач всякий раз требовало выявления скрытых данных, т. е. развертывания условий. Последнее составляло главное содержание выполнения подобного рода заданий, что и приводило к формированию действия развертывания.

Нами предъявлялись задания двух категорий в соответствии с двумя способами получения «скрытых» в их условиях данных:

1) Задания, в которых «скрытые» данные получаются как результат наличия в их условиях тех или иных геометрических фигур, обладающих (или не обладающих) частными особенностями (иллюстрацией такого рода заданий может являться первый из приведенных нами примеров).

2) Задания, в которых образование «скрытых» данных происходит как за счет наличия, так и за счет отношений фигур (или их элементов), данных в условиях. (Иллюстрацией может служить второй из приведенных нами примеров, в кото-

ром смежные, вертикальные углы и т. д. образуются в результате пересечения прямой *AD* лучей *OB* и *OC*).

В большей части заданий требовалось определить, какие вообще фигуры (и их отношения) заданы при данных условиях. Искомым, таким образом, явились все известные учащимся фигуры, их свойства и отношения. И лишь в незначительной части заданий, которая предлагалась на начальных этапах обучения, нужно было установить наличие в условии задания только той или иной конкретной фигуры. (Например: «Дан треугольник *EOM*. Из вершины *E* выходит луч *EB*, пересекающий сторону *OM* в точке *K*. Образовались ли при точке *K* смежные углы?»). В процессе выполнения заданий на развертывание учащиеся должны были не только указать наличие «скрытых» в условии фигур (а также их свойств и отношений), но и дать полное обоснование своего ответа. Последнее являлось одним из существенных критериев оценки степени правильности выполнения задания. В тех случаях, когда ответ был ошибочным или же когда он был правильным, но отсутствовала его аргументация, мы считали задание выполненным неправильно. Если же имело место лишь частичное развертывание условий или же ответ давался правильный, но какая-то часть его оставалась неаргументированной, то решение считалось неполным. Умение выполнять общее, недифференцированное развертывание считалось сформулированным тогда, когда учащиеся начинали как бы непосредственно усматривать «скрытое» содержание условий. Внешне это проявилось в том, что, едва закончив чтение условий, учащиеся сразу давали четкий и аргументированный ответ. Тогда мы переходили к формированию умения осуществлять дифференцированное развертывание, т. е. вести поиск искомого избирательно, а не путем последовательного выявления всего скрытого содержания условий. Строя методику, мы учитывали, что осуществление подобного рода поиска возможно лишь в том случае, если учащийся будет всякий раз руководствоваться некоторым представлением о том, где искать, т. е. образом поисковой ситуации. Естественно, что образы подобного рода должны быть у учащихся сформированы. Для формирования этих образов, а также самого умения осуществлять направленный поиск искомого мы выделили наборы «поисковых областей». Каждая поисковая область представляла собой некоторую типичную «геометрическую ситуацию», развертывание которой обязательно приводит к выявлению признаков искомого понятия. Так, например, в условие задания в «явной форме» могут входить такие понятия, как «прямой угол», «равные смежные углы» или «биссектриса развернутого угла». Каждое из указанных понятий содержит в себе наряду с другими понятиями понятие «перпендикулярные прямые». Указанные три понятия, таким образом, могут выступать в качестве поисковых областей, т. е. типичных геометрических ситуаций, ориентирующих поиск понятия «перпендикулярные прямые». В приведенном примере «прямой угол», «равные смежные углы» и т. д. — отдельные фигуры, развертывание которых обязательно приводит к выявлению признаков перпендикулярных прямых. Разумеется, «поисковой областью» может являться и группа фигур, связанных определенным отношением друг с другом.

«Поисковые области» учащиеся выделяли самостоятельно. Это достигалось постановкой перед ними системы задач-вопросов, в которых требовалось задать ту или иную фигуру таким образом, чтобы не было названия этой фигуры и ничего не говорилось бы «в явной форме» о ее признаках. (Например: «Как можно задать угол, чтобы ничего не говорилось о признаках угла, а также отсутствовало бы само слово «угол»?)

Решение этих задач сводилось, таким образом, не к выведению следствий из заданных по условию понятий (как это было в заданиях на «развертывание»), а, наоборот, к выбору оснований, т. е. фигур, из которых заданные по условию фигуры вытекали бы в качестве их следствий.

Принцип выбора был следующим: искать такую фигуру (или группу фигур, находящихся в определенном отношении), которая содержала бы в себе признаки искомой фигуры.

Мы требовали от учащихся объяснения того, почему «развертывание» поисковых областей, которые они выделяли, действительно приводит к обнаружению признаков искомых понятий. Знание того, в каких «геометрических ситуациях» содержатся те или иные фигуры, делает эти ситуации своего рода признаками, по которым учащиеся могут быстро установить наличие в условии задания искомой геометрической фигуры.

Так, например, при развертывании они могли уже не давать всякий раз полное объяснение того, почему в условии задания содержатся признаки искомой геометрической фигуры. Вместо этого теперь достаточно простого указания на наличие в условии задания «геометрической ситуации», соответствующей искомому понятию. Естественно, что все это не могло не привести к резкому сокращению всего процесса развертывания. Последнее явилось следствием, с одной стороны, невыполнения учащимися целого ряда операций данного действия, которые теперь только имелись в виду, с другой — того, что процесс развертывания приобретал избирательный характер. Так как методика формирования умения осуществлять избирательное «развертывание» оставалась той же самой, мы опускаем ее описание. Отметим только, что «поисковые области» для каждого понятия выписывались на отдельных карточках. «Развертывание» на этапе «материализованного» действия осуществлялось учащимися с опорой на эти карточки. Задания, на материале которых формировалось умение развертывать условия с опорой на «поисковые области», были несколько осложнены по сравнению с теми заданиями, которые учащимися предъявлялись при формировании умения «развертывать» условия в общем виде. Осложнение этих заданий было осуществлено не за счет увеличения степени опосредованности признаков искомых понятий, а за счет увеличения количества скрытых данных в условиях этих заданий.

Для отработки действия «развертывания» учащиеся должны были выполнить в общей сложности 18-20 заданий. Усвоение учащимися всех трех компонентов должно было дать нам ответ на вопрос, действительно ли выделенные нами компоненты являются основными компонентами умения доказывать. Если это так, то усвоившие их учащиеся должны были самостоятельно решать задачи на доказательство равенства и доказывать теоремы на равенство.

С целью проверки данного предположения в контрольной серии эксперимента испытуемым для самостоятельного доказательства были предложены следующие теоремы: 1) теорема о равенстве двух треугольников по двум сторонам и углу между ними; 2) теорема о равенстве треугольников по стороне и прилежащим к ней углам; 3) теорема о равенстве углов с соответственно перпендикулярными сторонами; 4) теорема о равенстве вертикальных углов.

Кроме перечисленных испытуемым была предложена также теорема о перпендикулярности биссектрис двух смежных углов и задача на доказательство: «Даны смежные углы *AOB* и *BOC*. Внутри угла *AOB* проведена биссектриса *OH*. Из вершины смежных углов к биссектрисе *OH* восстановлен перпендикуляр *OK*. Будет ли перпендикуляр *OK* биссектрисой угла *BOC*?» Выполнение двух последних контрольных заданий (теоремы о перпендикулярности биссектрис смежных углов и задачи на доказательство) также требовало установления равенства. Однако равенство фигур в них не являлось искомым. Оно выступало здесь в качестве средства нахождения искомого.

Отметим, что все предъявленные нашим испытуемым теоремы, а также задача до этого известны им не были. Организуя усвоение трех компонентов умения доказывать, мы исходили из того, что указанные компоненты представляют собой действия и знания, входящие в умение доказывать. Однако реальный процесс доказательства требует, чтобы содержание этих компонентов применялось в строго определенной последовательности, т. е. в соответствии со структурой самого процесса доказательства. Исходя из этого, мы предложили нашим испытуемым руководствоваться в процессе выполнения контрольных заданий специальным правилом, которое состояло из следующих пунктов: 1) выдели то, что дано в условии; 2) укажи, что требуется доказать; 3) назови все признаки, по которым можно доказать то, что требуется; 4) укажи, как еще эти признаки могут быть заданы («скрыты») в условии; 5) сравни каждый из признаков с условием и выбери тот из них, который будет использован при доказательстве; 6) назови признак, который нужно использовать для доказательства; 7) объясни, почему ты считаешь, что он есть в условии.

Пункты правила представляли собой, таким образом, некоторую систему указаний о действиях, которые должны выполнять учащиеся.

Результаты обучающей серии

Результаты формирования системы предварительных понятий в целом совпадают с теми, которые были получены в ранее проведенных исследованиях, посвященных формированию начальных геометрических понятий [6], [14].

Подавляющее большинство предложенных испытуемым задач было решено правильно.

Результаты формирования понятия «геометрическое равенство», которое было в нашем исследовании основным, были следующими.

С решением задач на определение равенства испытуемые справились успешно. Из 1440 предложенных задач 1371 задача, т. е. 95%, были решены абсолютно правильно и лишь при решении 69 задач, что составляет 4,8%, были допущены ошибки.

Приведем примеры, иллюстрирующие типичный ход решения задач.

Задача № 3: «Два отрезка *AB* и *CD* равны между собой. Из отрезка *AB* вычли отрезок *KB*, а из отрезка *CD* вычли отрезок *OD*, равный отрезку *KB*. Будут ли оставшиеся отрезки равны между собой?» (К задаче дан адекватный условию чертеж.)

Испытуемый Р. И. *читает вслух условие задачи, первый признак равенства, а затем говорит*: «Здесь не подходит первый признак, так как здесь нет наложения *(после прочтения второго признака)*: второй тоже не подходит».

Экспериментатор «Почему ты так считаешь?»

Испытуемый *читает вслух второй признак равенства, затем говорит:* «В нем сказано, что фигуры равны, если концы отрезков совпадают при наложении. В условии про наложение не сказано. В нем отрезки вычитаются». *Затем говорит*: «Две геометрические фигуры равны, если каждая равна третьей геометрической фигуре, а в условии об этом ничего не говорится. Тут нет третьей геометрической фигуры». *Читает четвертый признак вслух, затем говорит:* «В условии говорится, что два отрезка *AB* и *CD* равны между собой и из них вычли по равному отрезку, значит, остались равные. Здесь подходит четвертый признак. Отрезки *AK* и *CO* будут равны».

Как видно из приведенного примера, решение задачи сводилось к подведению заданного в условии конкретного случая равенства под один из признаков равенства. Чтобы осуществить это подведение, испытуемый должен был вначале выбрать из системы признаков тот, который может быть использован в данном конкретном случае. Поиск признака, как это видно из приведенного примера, протекал в максимально развернутой форме. Он имел вид последовательной и систематической проверки условия на наличие в нем хотя бы одного из необходимых и достаточных признаков равенства.

Следует отметить, что испытуемые довольно быстро (после решения трех-четырех задач) запоминали признаки, а также усваивали принцип действия с ними. Действие приобретало большую самостоятельность. Сам процесс решения приобретал все более сокращенный характер.

Задача № 11: «На прямой линии *МК* отложены два равных отрезка: *МО* и *СК*. Отрезок *СК* отложен так, что точка *С* расположена между точками *М* и *О* отрезка *МО*. Будут ли отрезки *МС* и *ОК* равны между собой?» (К задаче дан чертеж, не адекватный условию: отрезок *СК* был больше отрезка *МО*.)

Испытуемый Б. Н. *читает условие задачи, затем говорит:* «Здесь решать по четвертому признаку надо (вслух читает четвертый признак равенства). От отрезка *МК* надо отнять отрезок *СК* и останется отрезок *МС*. Потом от того же отрезка *МК* отнять отрезок *МО*, равный отрезку *СК*, и останется отрезок *ОК*. Отрезки *МС* и *ОК* будут равны, потому что мы от одного и того же отрезка отнимали два равных отрезка и остались равные». Затем испытуемый говорит: «Здесь можно и по-другому решать». Экспериментатор спрашивает: «Как же?» На это ученик отвечает: «Тоже по четвертому признаку, только другие отрезки брать. От отрезка *МО* отнять отрезок *СО*, а затем от *СК* отнять тот же отрезок *СО*. Получатся равные отрезки — *МС* и *СК*. От двух равных мы отнимали один и тот же, остаются равные».

Таким образом, процесс поиска теперь уже носит сокращенный характер. Как видно из приведенного примера, испытуемый сразу же после прочтения условия правильно указывает признак, под который нужно подвести условие, после чего следует само подведение.

Что касается третьего компонента — действия получения следствий (действия «развертывания» условий), то результаты формирования умения развертывать условия у испытуемых были следующими.

Из 200 задач, предложенных испытуемым, правильно решено 192, т. е. 96%. В восьми случаях (которые составляют 4%) испытуемые дали неполные решения. Не было случая, когда испытуемые вообще не справлялись с развертыванием условий.

Приведем наиболее типичные примеры решений задач на развертывание условий.

Задача № 2. «Даны два равных смежных угла: *СОВ* и *BOD*. Что нам тем самым еще дано?»

Испытуемый М. Т. *читает условие задачи, затем первый пункт* *правила развертывания (укажи фигуры, о которых говорится в условии).* Затем говорит: «Здесь говорится о смежных углах: *COB* и *BOD*». *После этого читает второй пункт правила (назови все, что о них сказано) и говорит*: «Сказано, что эти смежные углы равны между собой». *Читает третий пункт правила (укажи, какие новые фигуры получаются из данных фигур). Испытуемый берет перечень известных ему фигур и по порядку проверяет, содержатся они или нет в условии данной задачи:* «Прямая линия есть. *CD* — прямая линия. Это смежные углы, а у них необщие стороны образуют прямую линию. Еще луч *OB* есть, а он часть прямой, значит, еще одна прямая дана нам».

Затем диалог развертывается так:

Экспериментатор. Дальше.
Испытуемый. Луч дан. Целых три луча. *OC*, *OB* и *OD*. Отрезков прямой нет. Здесь только лучи. Углов здесь много дано.
Экспериментатор. Какие?
Испытуемый. Развернутый угол есть *COD*. Их два.
Экспериментатор. Почему они развернутые?
Испытуемый. Потому что это смежные углы, а они в сумме составляют 180°. Два прямых угла даны: *COB* и *BOD*, они будут прямые, так как сказано, что даны равные смежные углы... *(пауза)*. Здесь даже будут четыре прямых угла.
Экспериментатор. Какие?
Испытуемый. *OB* — луч, но если мы прямую продолжим и поставим здесь, например, букву *X*, то получатся еще прямые углы: *COX* и *XOD*. Треугольников здесь нет.
Экспериментатор. Почему?
Испытуемый. Треугольник — замкнутая фигура, а здесь углы, они не замкнуты. Еще есть перпендикуляр, так как прямые *CD* и *BX* перпендикулярны друг другу. Они пересекаются под углом 90°. Смежные углы нам также даны, о них в условии сказано.
Экспериментатор. Дальше.
Испытуемый. Прилежащие углы даны, так как все смежные есть прилежащие. Вертикальных углов здесь нет... *(пауза)*. Вообще-то и вертикальные даны, если продлить прямую сюда (*показывает на чертеже прямую, частью которой является луч OB*), то получатся вертикальные углы: *COB* и *XOD* и еще *BOD* и *XOC*.
Экспериментатор. Почему они будут вертикальными?
Испытуемый. Потому что *COB* и *XOD* — два угла, у них общая вершина есть и общий смежный угол *XOC* или угол *BOD* можно взять. Для углов *COX* и *BOD* общим смежным углом будет угол *XOD* или *COB*.

Что касается других фигур (а также свойств и отношений между ними), то на этапе «материализованного» действия выявление их наличия (или отсутствия) в условии осуществлялось испытуемым аналогичным образом.

Приведенный нами протокол свидетельствует о том, что процесс выведения следствий протекал очень развернуто. Однако такой характер он носил лишь на первоначальных этапах отработки данного действия, когда от испытуемых мы требовали всякий раз полного обоснования наличия тех или иных «скрытых» условий[3]. В дальнейшем, однако, это требование постепенно снималось. Вначале оно распространялось лишь на те понятия, в отношении которых у нас не было полной уверенности в том, что испытуемые сумеют их наличие в условии правильно обосновать, а затем устранялось полностью. Возможность такого устранения основывалась на том, что понятия, с которыми испытуемые сталкивались в процессе развертывания, уже ранее многократно ими выявлялись в самых различных геометрических ситуациях. Испытуемые, таким образом, могли теперь ограничиваться простым перечислением «скрытых данных» условия без какого-либо обоснования их наличия в нем. Естественно, что все это не могло не привести к значительному преобразованию действия развертывания, которое на заключительном этапе его формирования приобретало вид сокращенного, обобщенного и автоматизированного умственного действия.

Примером того, как протекало «развертывание» на этапе умственного действия, является следующий протокол решения.

Задача № 9. «Дан треугольник *CHB*. Угол при вершине *C* прямой. Из вершины *C* выходит луч *CK*, составляющий одну прямую линию со стороной *CB* данного треугольника. Перечислить все, что нам еще тем самым дано?» (К задаче дан адекватный условию чертеж.)

Испытуемый А. К. *читает условие задачи, затем говорит:* «Отрезки, лучи, прямые линии даны. Еще два прямых угла даны: угол *HCB*, он по условию прямой, и угол *HCK*. Смежные углы:

3 Не следует смешивать действие «развертывания» с развернутой формой его протекания. В нашем исследовании под «развертыванием» мы понимаем действие, содержанием которого является выведение следствий из условий. Однако любое действие, в том числе и действие «развертывания условий», может протекать в развернутой (или свернутой) форме. Развернутость — свойство любого действия, характеризующееся полнотой выполнения его операций.

КСН и *НСВ*, биссектриса, потому что смежные углы равны».
Экспериментатор «Что будет биссектрисой?»
Испытуемый. «*СН*. Вертикальные углы, если продлить эту сторону *(показывает на чертеже сторону СН)*. Поставим здесь букву *X*, тогда вертикальными будут углы *КСН* и *ХСВ* или *НСВ* и *КСХ*. Смежных тогда тоже будет больше. Если все стороны треугольника продлить, то много получится вертикальных и смежных углов. Да, еще забыл сказать про перпендикулярные прямые. Угол *НСВ* — прямой, значит, *НС*⊥*КВ*».

Аналогичным образом протекало выявление испытуемым и других «скрытых» условий.

При переходе испытуемых к «развертыванию» с ориентировкой на поисковые области вначале мы также требовали обоснования наличия тех понятий, которые испытуемые выявляли в условиях.

Протокол, который мы ниже приводим, является типичным примером хода процесса развертывания в этих случаях.

Задача № 9. «Из точки *O* исходят четыре луча: *OA*, *OB*, *OC* и *OD*. Лучи пересекает прямая *EX* в точках *H*, *K*, *M*, и *P*. Известно, что $\angle AOB = \angle DCO$, $HM = KP$. Перечислить все, что нам еще дано?» (К задаче дан адекватный условию чертеж.)

Испытуемый С. М. *читает условие задачи, затем говорит:* «Вертикальные углы даны, т. е. прямые пересекаются. Тут много вертикальных углов. Называть их?»

Затем происходит следующий диалог:

Экспериментатор. Нет, не нужно.
Испытуемый. Смежные углы. Если есть вертикальные, то смежные тоже есть. Треугольник дан. Их здесь целых четыре.
Экспериментатор. Почему ты считаешь, что даны треугольники? Назови.
Испытуемый. Если два луча исходят из одной точки и пересекаются прямой линией, то треугольник всегда будет.
Экспериментатор. Назови их.
Испытуемый *(правильно называет)*. Не четыре, а шесть треугольников дано, я вот эти забыла *(показывает на чертеже треугольники НОМ и КОР)*. Еще отрезки равны будут.
Экспериментатор. Какие?
Испытуемый. *НМ* равно *КР* по условию, отрезки *НК* и *РМ* будут также равны по четвертому признаку, так как здесь в состав двух равных отрезков входят два равные. Еще углы *АОВ* и *COD* равны, значит, угол *АОС* будет равен углу *BOD*. Здесь пятый признак. Эти углы состоят из равных углов.

Выявление испытуемыми других «скрытых» условий протекало аналогично.

«Развертывая» условие с опорой на поисковые области, испытуемые, таким образом, обосновывали наличие в условии в «скрытой» форме целого ряда геометрических понятий. Как это видно из приведенного примера, обоснование теперь сводилось к простому указанию на наличие в условии задачи «геометрических ситуаций», соответствующих искомым понятиям. В дальнейшем, однако, мы постепенно переставали требовать от испытуемых указания этих ситуаций сначала по отношению к некоторым, а затем и ко всем «скрытым» в условиях понятиям.

В целом же успешное выполнение подавляющего большинства заданий, предложенных в обучающей серии, дает нам основание предполагать, что основная цель данной серии эксперимента достигнута: наши испытуемые усвоили все три компонента умения решать задачи на доказательство, а также научились доказывать теоремы, основным содержанием которых является установление равенства фигур.

КОНТРОЛЬНАЯ СЕРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Данная серия эксперимента была предпринята с целью выяснения, насколько правильно были нами выделены основные компоненты умения доказывать. Контрольные задания испытуемым предъявлялись вместе с готовыми чертежами. Это устраняло те трудности, которые могли быть связаны у испытуемых с построением чертежа. В основе построения лежат специальные умения, которые мы у наших испытуемых не формировали.

Контрольные задания, предложенные испытуемым состояли в доказательстве трех следующих теорем: 1) теорема о равенстве двух треугольников по двум сторонам и углу, заключенному между ними; 2) теорема о равенстве углов с соответственно перпендикулярными сторонами; 3) теорема о равенстве вертикальных углов.

Результаты выполнения контрольных заданий

Количественная сторона результатов выполнения контрольных заданий испытуемыми была следующей.

Было предложено 50 теорем и 10 задач. Все теоремы были доказаны правильно. Все задачи были решены верно.

Приведем протокольные записи, отражающие типичный ход решения контрольных задач и доказательство теорем испытуемыми этой группы.

Предлагается доказать теорему о равенстве треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Теорема формулируется следующим образом: «Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны между собой» **(рис.1)**.

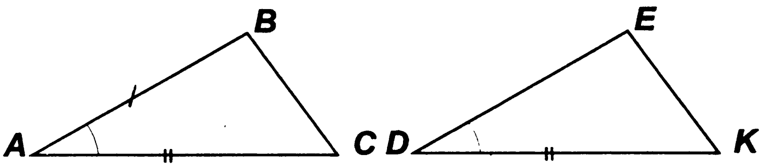


Рис. 1

Испытуемый Ш. Л. *(читает условие теоремы и первый пункт правила: «Выдели то, что дано в условии»)*[4]. Даны два треугольника и еще сказано, что у них соответственно равны стороны.

Экспериментатор. Какие?

Испытуемый. AB равно DE, а AC равно DK, и углы между ними равны: угол BAC равен углу EDK *(читает второй пункт правила: «Укажи, что требуется доказать»)* Доказать надо, что треугольники равны.

Экспериментатор. Дальше.

Испытуемый *(читает третий пункт правила: «Назови все признаки, по которым можно доказать то, что требуется». Перечисляет признаки равенства)*. Здесь накладывать надо треугольники по первому или по второму признаку.

Экспериментатор. Прочти следующий пункт правила.

Испытуемый *(читает четвертый пункт правила: «Укажи, как еще эти признаки могут быть заданы («скрыты» в условии»)*. Здесь первый признак и второй. Они даны, если равны какие-нибудь элементы фигур, равенство которых требуется установить, а здесь у треугольников равны стороны и углы.

4 - Содержание пунктов данного правила изложено на стр. 136.

Экспериментатор. Все стороны равны?

Испытуемый. Нет, только две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника. Еще углы между этими сторонами равны. Здесь не сказано только про BC и EK, но они тоже будут равны, так как между двумя точками можно провести только одну прямую линию.

Экспериментатор. Читай следующий пункт.

Испытуемый *(читает шестой пункт правила: «Назови тот признак, который нужно использовать для доказательства»)* Здесь по первому и по второму признаку решать.

Экспериментатор. Дальше.

Испытуемый *(читает седьмой пункт правила: «Объясни, почему ты считаешь, что этот признак есть в условии»)*. Эти треугольники надо наложить друг на друга так, чтобы равные стороны и углы у них совпали: AB совпадет полностью с DE, значит, точка B совпадет с точкой E, точка A с точкой D, угол BAC совпадет с углом EDK, AC совпадет с DK.

Экспериментатор. Почему?

Испытуемый. Так как AC равно DK. Точки C и K совпадут. У треугольников совпали все вершины, значит, и все стороны будут равны.

Экспериментатор. Будут ли равны стороны BC и EK?

Испытуемый. Они тоже совпадут по второму признаку равенства, так как у этих отрезков совпали конечные точки, а между двумя точками можно провести только одну прямую. Эти треугольники полностью совпали между собой, значит, они равны.

Приведем пример решения задачи испытуемым М. Ш. Особенность этой задачи заключалась в том, что установление равенства выступало в качестве средства ее решения.

Испытуемый (*читает условие задачи, затем первый пункт правила)*. В условии даны смежные углы. Сказано, что внутри угла BOC проведена биссектриса OH, значит, углы BOH и HOC равны между собой. Еще дан перпендикуляр OK, который восстановлен к биссектрисе OH. Ясно, значит, у нас угол KOH — прямой. Если OH продлить и поставить букву X, то получится еще один прямой угол XOK *(читает второй пункт правила)*. Доказать нужно, что перпендикуляр OK является биссектрисой угла AOB, значит, углы AOK и KOB должны быть равны.

Экспериментатор. Дальше.

Испытуемый (*читает третий пункт правила)*. Здесь по признакам равенства надо решать *(называет признаки равенства)*. Пожалуй, здесь четвертый признак будет, надо еще подумать.

Экспериментатор. Прочти следующий пункт правила.

Испытуемый *(читает четвертый пункт и выполняет действия,* *соответствующие его содержанию)*. Ну, правильно, здесь четвертый признак.

Экспериментатор. Почему?

Испытуемый. Вот смотрите, если мы продлим *OH*, то у нас получатся два прямых угла, а в состав их входят еще два равных угла.

Экспериментатор. Какие?

Испытуемый *(пауза)*. Здесь не только по четвертому признаку надо решать: по двум признакам решать надо.

Экспериментатор. Объясни.

Испытуемый. Если *OH* мы продлим и поставим букву *X*, то получится угол *XOA*, он будет равен углу *BOH*.

Экспериментатор. Почему?

Испытуемый. Углы *HOC* и *BOH* равны между собой, а углы *HOC* и *XOA* тоже будут равны как вертикальные, значит, будут равны также и углы *BOH* и *XOA*. Это по третьему признаку равенства. Теперь от двух равных (прямых) углов *XOK* и *KOH* отнимаем по равному углу *XOA* и *BOH* и остаются два равных угла: *KOB* и *KOA*. Значит, *KO* будет биссектрисой угла *AOB*.

Экспериментатор. Правильно. А нельзя ли решить эту задачу без продолжения *OH*?

Испытуемый *(пауза)*. Можно, тоже по четвертому признаку. Только я не знаю, где взять второй угол прямой (пауза). Тут нужно вычитать из суммы двух углов. Углы *AOK* и *HOC* составляют в сумме 90°.

Экспериментатор. Почему?

Испытуемый. Угол *KOH* — прямой. Он входит в развернутый угол *AOC*. Из угла *AOC* вычитаем угол *KOH*, получаются два угла: *KOA* и *HOC*. В сумме они равны 90°. Теперь решать по четвертому признаку: от *KOH* отнять угол *BOH* и останется угол *KOB*, потом от суммы углов *AOK* и *HOC* отнять угол *HOC*, останется угол *AOK*. От двух равных мы отнимаем по два равных и остаются два равных угла.

Приведем пример доказательства теоремы о равенстве вертикальных углов.

Теорема формулируется так: «Вертикальные углы равны между собой».

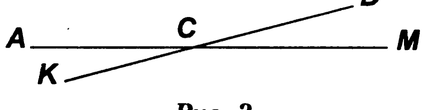


Рис. 2

Испытуемый *(читает условие теоремы, затем первый пункт правила)*. Вертикальные углы даны. Еще «скрыто» даны развер-

нутые и смежные углы ***(показывает на чертеже, затем читает второй пункт правила).*** **Надо доказать равенство вертикальных углов, например:** ACK **и** DCM**, по признакам равенства надо решать. Можно скажу?**

Экспериментатор. Пожалуйста.

Испытуемый. **От угла** KCD **мы отнимаем угол** ACD **и остается угол** DCM**. Тут четвертый признак. От двух равных (развернутых) мы отнимаем один и тот же угол и остаются равные углы.**

Как видно из приведенных примеров, наличие правила решения, а также овладение умением развертывать позволяло испытуемым осуществлять последовательный и планомерный анализ условий теорем и задач. Как видно из приведенных примеров, этот анализ носил при доказательстве некоторых теорем очень развернутый характер. Испытуемые строго последовательно, в определенном порядке выполняли действия, указанные в пунктах правила. Однако в некоторых случаях, как это видно из приведенных примеров, наши испытуемые осуществляли доказательство, не выполняя всех действий, предусмотренных правилом доказательства. Более того, иногда они сразу же после прочтения условий, не обращаясь к правилу, давали верное доказательство. Интересно отметить, что испытуемые не просто правильно выполняли контрольные задания, но в ряде случаев предлагали два варианта доказательства. Так было, например, при доказательстве теоремы о равенстве углов с соответственно перпендикулярными сторонами, а также при решении задачи на доказательство. Причем в последнем случае, как это видно из приведенного примера, был дан вариант доказательства, связанный с использованием дополнительного построения, которому мы испытуемых не обучали.

Как видно из приведенных примеров, «пробы и ошибки» при выполнении контрольных заданий отсутствовали. Испытуемые действовали уверенно. Процесс доказательства носил сознательный характер и на всех этапах протекал фактически безошибочно.

Результаты данной части контрольного эксперимента свидетельствуют о достаточности формирования указанных компонентов умения для доказательства теорем, представленных и в форме задач, и в тех формулировках, в которых они обычно даются в школьных учебниках геометрии.

Следует отметить, однако, что сформированное умение применялось лишь к теоремам и задачам на доказательство равенства. В связи с этим необходимо было выяснить возможность более широкого переноса умения доказывать, в частности на теоремы и задачи на доказательство какого-либо другого вида. В известной мере решение этого вопроса подготовлено результатами, полученными в исследованиях, посвященных формированию начальных геометрических понятий. Как известно, усвоение геометрических понятий состоит прежде всего в усвоении соответствующих действий и операций с признаками данного понятия. В исследовании Н. Ф. Талызиной [14] было показано, что при формировании системы однородных геометрических понятий вместе с овладением первыми понятиями данной системы учащиеся овладевают также и определенными операциями мышления, которые затем используются при усвоении последующих понятий этой же системы. Причем перенос этих операций в зависимости от ряда условий может происходить на разном уровне, однако он всегда есть и его наличие приводит к ускоренному усвоению последующих понятий этой системы. В результате достигается более быстрое по сравнению с обычным обучением формирование системы геометрических понятий. Результаты данного исследования давали нам основание предполагать, что подобного рода перенос может иметь место также и при доказательстве теорем. Мы проверили возможность переноса умения доказывать теоремы и задачи, сформированные при доказательстве равенства, на теоремы и задачи на доказательство параллельности.

После выполнения контрольных заданий на равенство испытуемым разъяснили, что доказанные ими теоремы на равенство треугольников, а также вертикальных углов и углов с соответственно перпендикулярными сторонами они могут рассматривать теперь как особые признаки равенства треугольников и углов.

С целью выяснения возможности переноса умения доказывать теоремы на равенство на теоремы и задачи другого вида испытуемым, без дополнительного обучения, были предложены следующие теоремы на параллельность: 1) теорема о равенстве острых и тупых углов с соответственно параллельными сторонами; 2) теорема о равенстве углов с соответственно параллельными сторонами $2d$, если один из них острый, а другой тупой; 3) теорема о параллельности биссектрис двух острых углов с соответственно параллельными сторонами.

Кроме указанных теорем испытуемым было предложено еще четыре задачи на доказательство. Установление параллельности прямых в них явилось или целью решения или его средством. Следует отметить, что отдельные из этих задач требовали для своего решения использование ранее доказанных теорем на равенство.

Напомним, что у испытуемых специально формировались понятия о накрест лежащих углах, соответственных и односторонних. Кроме этого, им давалось также определение параллельности прямых: две прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и при своем продолжении не пересекаются.

Перед выполнением данного вида контрольных заданий испытуемые получали карточку с признаками параллельности.

В качестве признаков параллельности нами были взяты следующие: 1) две прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и при своем продолжении не пересекаются; 2) две прямые параллельны, если при пересечении их третьей прямой накрест лежащие углы равны; 3) две прямые параллельны, если при пересечении их третьей прямой соответственные углы равны; 4) две прямые параллельны, если односторонние углы в сумме составляют 180°; 5) две прямые параллельны, если они перпендикулярны с третьей прямой.

Результаты выполнения испытуемыми второй группы контрольных заданий на определение параллельности были следующими.

Испытуемые в целом довольно успешно справились с контрольными теоремами и задачами на установление параллельности прямых линий: в 63 случаях из 70 ими было дано правильное доказательство и лишь в семи случаях испытуемые с доказательством теорем и решением задач не справились.

Приведем протокол, отражающий типичный ход выполнения контрольных заданий данного вида.

Была предложена задача: «Даны два прямоугольных треугольника *OCD* и *MOK*, имеющие общую вершину *O*. Известно, что катет *OC* треугольника *OCD* вместе с катетом *OK* треугольника *MOK* образуют одну прямую линию. Доказать, что катеты *CD* и *MK* параллельны между собой».

Испытуемый Б. Т. *(читает условие задачи)*. **Здесь будут катеты *CD* и *MK* параллельны. Решать можно по второму признаку. Здесь накрест лежащие углы будут равны.**

Экспериментатор. Какие?

Испытуемый. Углы *DCO* и *OKM* — накрест лежащие. За секущую мы берем *CK*. Сказано, что *CO* и *OK* составляют одну прямую линию. Накрест лежащие углы будут равны, так как они оба прямые. Значит, *CD* будет параллельна *MK*. Еще можно по четвертому признаку решать.

Экспериментатор. Пожалуйста.

Испытуемый. Тут *CD* и *MK* будут параллельны, если продолжить, например, *CD* и поставить букву *X*. Тогда получаются односторонние углы: *XCO* и *MKO*, они в сумме составляют 180°.

Экспериментатор. Правильно. А как еще можно решить задачу?

Испытуемый. Еще? Если только по пятому признаку, больше я не знаю.

Экспериментатор. Попробуй.

Испытуемый. *CK* — секущая и она образует прямые углы с *CD* и *MK*, значит, она к ним перпендикулярна. *CD* будет параллельна *MK*.

Как видно из приведенного примера, к выполнению контрольных заданий на параллельность испытуемые подходили так же уверенно, как и к заданиям на равенство.

В целом ряде случаев ими были даны не один, а два и более вариантов доказательства.

Выполняя доказательство, испытуемые все время ориентировались на признаки параллельности, используя их в качестве критерия наличия параллельных прямых. Теоремы и задачи, в которых параллельность выступала не в качестве искомого, а как средство его обнаружения, тоже затруднений у испытуемых не вызывали. Важно отметить, что их не смущали задания, выполнение которых требовало использования ранее доказанных теорем на равенство. Теоремы такого рода испытуемые теперь рассматривали как дополнительные признаки равенства, истинность которых уже не требует повторного доказательства.

Хорошие результаты выполнения испытуемыми второй группы заданий на параллельность дают основание рассматривать их как следствие переноса умения доказывать с теорем на равенство на теоремы и задачи другого вида, основным содержанием которых являлось установление параллельности прямых линий.

Следует, однако, отметить, что выполнение контрольных заданий на параллельность не всегда протекало легко и гладко. В ряде случаев доказательство теорем и решение задач вызывало у испытуемых известные затруднения.

Анализ ошибочных доказательств показал, что причина невыполнения заданий отдельными испытуемыми связана главным образом с некоторой недоработкой у них понятия геометрического равенства. Так, в частности, у этих испытуемых было обнаружено не только отсутствие умения заменять ту или иную фигуру другой, равной ей фигурой, но и непонимание возможности такой замены.

Ошибочное выполнение контрольных заданий в семи случаях можно объяснить также тем, что доказательство некоторых теорем требовало использования таких признаков равенства, которые нами не выделялись и не отрабатывались специально.

С испытуемыми, не выполнившими контрольные задания, были проведены дополнительные занятия, направленные на формирование недостающих у них знаний и умений. Затем им снова были предложены те контрольные задания, которые ранее вызывали у них затруднения. При повторном предъявлении испытуемые справились с ними успешно.

Как указывалось выше, все задачи и теоремы, которые испытуемые выполняли в контрольной серии опытов, были затем для сравнения предъявлены учащимся VI и VII классов. Результаты выполнения контрольных заданий учащимися VI и VII классов представлены в **табл. 1**.

Таблица № 1

Испытуемые	Виды контрольных заданий	Количество контрольных заданий, предложенных испытуемым	Количество правильно выполненных контрольных заданий	% правильного выполнения контрольных заданий	Количество ошибочно выполненных контрольных заданий	% ошибочно выполненных контрольных заданий
VI кл. (сравнительная группа)	равенство параллельн.	60 70	15 35	25 50	45 37	75 50
VII кл. (сравнительная группа)	равенство параллельн.	60 70	21 32	35 45,7	39 38	65 54

Как видно из таблицы, учащиеся VI класса лишь в 15 случаях из 60 правильно выполнили контрольные задания на равенство и в 35 случаях из 70 справились с теоремами и задачами на параллельность.

Напомним, что испытуемые экспериментальной группы задания на равенство выполнили правильно в 60 случаях из 60, а задания на параллельность — в 63 из 70. Что касается учащихся VII класса, то, как видно из табл. 4, результаты выполнения ими контрольных заданий того и другого вида примерно такие же, как и у учащихся VI класса.

С заданиями на параллельность учащиеся VII и особенно VI класса справились несколько успешнее, чем с контрольными заданиями на определение равенства фигур. Объяснить это можно, с одной стороны, тем, что тема «параллельные прямые» в курсе геометрии VI класса изучается в конце учебного года и, следовательно, все знания, связанные с данной темой, еще не были учащимися забыты. С другой стороны, это может быть объяснено и тем, что в курсе геометрии выделяются признаки параллельности. И хотя они специально не отрабатываются, однако при доказательстве конкретных теорем на параллельность и решении задач на доказательство они используются.

Результаты проведенного эксперимента говорят, таким образом, о преимуществе нашей методики перед школьной. Это нашло свое выражение не только в том, что с доказательством теорем и решением задач наши испытуемые справились значительно успешнее учащихся VI и даже VII класса, но и в том, что для формирования у наших испытуемых умения доказывать теоремы на равенство и на параллельность потребовалось затратить примерно в два раза меньше времени, чем это предусмотрено школьными программами при изучении соответствующих разделов.

Результаты, полученные в данном эксперименте, дают нам также основание считать, что выделенные нами компоненты действительно составляют содержание умения доказывать.

В данном исследовании были выделены компоненты умения доказывать теоремы и решать задачи на доказательство только одного вида. Анализ других разделов геометрии позволит выделить в каждом из них аналогичные компоненты. А это значит, что можно научить всех учащихся самостоятельно доказывать большинство геометрических теорем.

Как показало исследование, полная отработка таких компонентов не является всегда необходимой. Усвоение испытуемыми названных компонентов умения доказывать теоремы на определение равенства фигур оказалось достаточным, чтобы испытуемые затем без дополнительного обучения успешно справились с теоремами и задачами на установление параллельности прямых линий. Имевший место в нашем эксперименте перенос умения доказывать теоремы одного вида на теоремы и задачи другого вида объясняется общностью логической структуры признаков понятий, которые являются основой выделения данных теорем и задач в отдельные виды. Содержание понятий «равенство» и «параллельность» совершенно различно, однако логическая структура действия подведения под эти понятия одинакова. Чтобы установить, равны или нет те или иные геометрические фигуры, нужно проверить, обладают ли они хотя бы одним из признаков равенства. Аналогично, чтобы определить, параллельны или нет две прямые линии, надо также проверить, обладают ли данные прямые хотя бы одним из признаков параллельности. Соответственно одинаковыми были метод развертывания условий, а также последовательность их анализа.

Общность структуры умений, которые использовались при доказательстве теорем того и другого вида, и обусловила, таким образом, описанный нами выше перенос.

При изучении геометрии школьниками очень важно сформировать у них общие приемы доказательства геометрических теорем. Однако формированию такого рода приемов в школьной практике не уделяется почти никакого внимания. Учащиеся не видят ничего общего в доказательстве различных теорем. Каждая теорема воспринимается ими как новая, доказательство которой нужно только заучить. Именно этим и объясняется то, что при изменении чертежа теоремы или введении новых буквенных обозначений учащиеся затрудняются воспроизвести ранее заученное доказательство.

Проведенный эксперимент показал возможность формирования у учащихся общих приемов геометрического доказательства. Выделение общих признаков равенства, формирование действия подведения под понятие «равенство», а также действия «развертывания» условий обеспечивают свободную ориентировку испытуемым в теоремах на установление равенства геометрических фигур. Теоремы данного вида наши испытуемые воспринимали как простые задачи на применение признаков равенства. В школьной же практике общие признаки равенства не только не отрабатываются, но даже и не выделяются. Если учесть также и то обстоятельство, что многие теоремы на равенство относятся в учебниках к различным разделам курса геометрии, то станет ясно, почему учащиеся воспринимают различные теоремы указанного вида как не имеющие друг с другом ничего общего.

Естественно, что в результате многократного столкновения с теоремами того или иного вида у учащихся стихийно формируются приемы доказательства теорем. Однако возникают они при таком способе формирования очень медленно, чаще всего оказываются неполноценными и, как показало данное исследование, формируются далеко не у всех учащихся.

Поскольку в условиях теорем и задач на доказательство признаки искомых геометрических явлений задаются в «скрытом» виде, большое значение приобретает овладение учащимися третьим компонентом умения доказывать действием «развертывания» условий, благодаря которому достигается выявление искомых признаков. Полнота и тщательность отработки данного компонента значительно повышает качество выполнения геометрического доказательства.

Исследование показало необходимость формирования у учащихся не только умения «развертывать» условия в общем виде, но и вести поиск в определенном направлении.

В эксперименте была показана возможность формирования у учащихся умения вести «направленный» поиск в процессе осуществления геометрического доказательства. Последнее достигалось путем отработки действия «развертывания» с опорой на «поисковые области». Такая отработка позволяет рационализировать процесс «развертывания», что приводит к значительному уменьшению времени поиска искомых признаков.

Успех в проведении геометрического доказательства зависит, таким образом, не только от того, насколько правильно раскрыто действительное содержание умения доказывать, но и от того, насколько полно это содержание усвоено. Так, успешное выполнение нашими испытуемыми контрольных заданий объясняется прежде всего тем, что, выделив три основных компонента умения доказывать, мы сделали в то же время каждый из них специальным объектом усвоения.

Взаимосвязь и последовательность применения отдельных компонентов в процессе доказательства задавалась в нашем эксперименте специальным правилом, которым испытуемые руководствовались, выполняя контрольные задания.

В ходе дальнейшего исследования это правило должно быть раскрыто более полно.

Основной же задачей нашей последующей работы является выделение условий формирования более общих приемов, обеспечивающих самостоятельный подход учащихся к более широким классам геометрических теорем и задач на доказательство.

Несомненно, что решение этой задачи позволит повысить уровень геометрического мышления учащихся, а также даст возможность получить больший эффект как в отношении качества обучения, так и в смысле сокращения времени, необходимого для обучения геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. I. Планиметрия. М., 1936.
2. Гальперин П. Я. Развитие исследований по формированию умственных действий. «Психологическая наука в СССР», т. I. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959.
3. Гальперин П. Я. О формировании чувственных образов и понятий. Сб. «Материалы совещания по психологии (1955 г.)». М., Изд-во АПН РСФСР, 1957.
4. Гальперин П. Я. и Георгиев Л. С. К вопросу о формировании начальных математических понятий. «Доклады АПН РСФСР» 1960, № 1, 3, 4, 5, 6.
5. Гальперин П. Я. и Дубровина А. Н. Типы ориентировки в задании и формирование грамматических понятий. «Доклады АПН РСФСР», 1957, № 3.
6. Гальперин П. Я. и Талызина Н. Ф. О формировании начальных геометрических понятий на основе организованных действий учащихся. «Вопросы психологии», 1957, № 1.
7. Зыкова В. И. Оперирование понятиями при решении геометрических задач. «Известия АПН РСФСР», 1950, вып. 28.
8. Зыкова В. И. Очерки психологии усвоения начальных геометрических понятий. М., Учпедгиз, 1953.
9. Иовлев Н. Н. Общие методы математики и ее преподавания (Методология и методика математики). Курс лекций, ч. I. Баку, 1925.
10. Кабанова-Меллер Е. Н. Роль чертежа в применении геометрических теорем. «Известия АПН РСФСР», 1950, вып. 28.

11. Ланда Л. Н. О формировании у учащихся общего метода мыслительной деятельности при решении задач. «Вопросы психологии», 1959, № 3.
12. Пойа Д. Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1961.
13. Сонцов А. Как обучать сознательному нахождению доказательств. «Известия Горского педагогического института», 1929.
14. Талызина Н. Ф. К вопросу об усвоении начальных геометрических понятий. Сб. «Материалы совещания по психологии (1955 г.)». М., Изд-во АПН РСФСР, 1957.

И. А. Володарская

ФОРМИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ПРИЕМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Настоящая работа принадлежит к циклу исследований, проведенных на основе принципов теории поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина; в частности, она реализует третий тип ориентировки при организации обучения.

Предмет нашего исследования — формирование обобщенных умений по выполнению элементарных геометрических преобразований, изучаемых в школьном курсе геометрии (преобразования группы движения — вращение вокруг точки, центральная и осевая симметрия, параллельный перенос, а также преобразования — подобие и гомотетия). При выборе данного материала мы исходили из следующих соображений:

Во-первых, геометрические преобразования являются не чем иным, как обобщением понятия о функции, и поэтому они позволяют «обозреть с одной точки зрения как отдельные части геометрии, так и их взаимные связи»[1]. Это значит, что изучение геометрических преобразований открывает возможность подчи-

1 Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.-Л., 1934.

нить единой идее — идее функциональной зависимости — всю школьную геометрию.

Во-вторых, большая общность этих преобразований дает возможность значительно упростить доказательство многих теорем.

В-третьих, изучение преобразований вооружает учащихся способами (методами) решения задач на построение, которые являются одним из средств развития геометрического мышления учащихся.

В преподавании геометрии до сих пор не уделяется должного внимания геометрическим преобразованиям, в то время как развитие геометрической науки давно показало, что преобразования являются одной из важнейших областей научной геометрии.

Анализ учебников, учебных пособий и многочисленных методических исследований по проблеме изучения геометрических преобразований в средней школе показал, что эти знания и умения представлены не как система, а как ряд частных явлений и их изучение растянуто на несколько лет. При этом каждое преобразование дается обособленно, вне связи с другими, несмотря на то, что эта связь существует.

Свойства, которыми обладают преобразования, рассматриваются отдельно для каждого конкретного вида. В то же время многие свойства, например, преобразований группы движения, аналогичны.

Далее, для каждого преобразования дается частный прием его совершения. Причем главным в действиях учащихся является исполнительная часть: ученики механически производят построения, не имея полной и адекватной ориентировочной основы. Ориентировка учащихся происходит лишь на некоторые частные признаки каждого из преобразований; это объясняется тем, что условия, позволяющие понять логику построения, не раскрываются учащимся.

Нерациональный способ изложения геометрических преобразований приводит к трудностям, с которыми сталкиваются учителя при преподавании, а ученики — при усвоении этого раздела курса.

Обучение идет по первому типу ориентировки с использованием элементов второго типа[2].

В нашей работе сделана попытка построить изучение элементарных геометрических преобразований по третьему типу ориентировки, который характеризуется, во-первых, выделением в начало обучения основных единиц материала данной области знаний и правил их сочетания в конкретные явления. Основными единицами материала являются все те объективные элементы и условия, которые существенны для любого явления намеченной области знаний и которые раскрывают специфические особенности изучаемого предмета.

Во-вторых, для III типа ориентировки характерно вооружение обучаемого методом анализа нового явления этой области. Метод состоит в самостоятельном нахождении для любого явления конкретного сочетания основных единиц материала. Зная основные единицы материала и применяя сознательно метод анализа, обучаемый самостоятельно составляет полную ориентировочную основу действий, адекватных не только любым известным явлениям данной области знаний, но и новым, практически еще неизвестным, но теоретически возможным явлениям.

От типа ориентировочной основы действия зависит характер процесса формирования этого действия, а также качество его конечного продукта, которым являются определенные знания и умения. Следовательно, тип ориентировочной основы определяет тип обучения. Третьему типу ориентировочной основы отвечает третий тип обучения, для которого характерно:

1) формирование метода анализа материала — формирование умения выделять основные единицы материала и правила их сочетания;

2) формирование умения применять этот метод к любому явлению данной области знаний — формирование умения самостоятельно строить полную ориентировочную основу для каждого из этих явлений.

2 См. П. Я. Гальперин. Развитие исследований по формированию умственных действий. В сб.: «Психологическая наука в СССР», т. 1. М., Изд-во АПН РСФСР, 1959; П. Я. Гальперин. Типы ориентировки и типы формирования действий и понятий. «Доклады АПН РСФСР», 1959, № 2; П. Я. Гальперин. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий. В сб.: «Исследования мышления в советской психологии» М., «Наука», 1966.

В зависимости от целей обучения деятельность учащихся может быть направлена или на анализ всех частных явлений данной области знаний, или на воссоздание множества частных явлений, неизвестных ранее ученику, или на создание новых. В каждом из этих случаев процесс самостоятельного построения полной ориентировочной основы действия, адекватного каждому явлению, совершается разными путями.

В случае, когда ученику необходимо проанализировать все частные явления данной области знаний, процесс самостоятельного составления полной ориентировочной основы действия для каждого явления совершается следующим образом. Ученику описывается явление, и он должен выделить в этом явлении известные ему основные единицы, дать характеристику сочетания последних и построить полную ориентировочную основу действия, позволяющего или получить продукт по заданному образцу, или провести категоризацию данного для анализа явления. Так, при обучении написанию букв различных алфавитов[3] ученик, получив образец нового контура букв, прежде чем воспроизвести его, разбивал контур на части, не меняющие своего направления (кривизны), т. е. выделял в нем основные единицы. Затем давал характеристику положения каждой из «единиц» на линейках листа бумаги, то есть указывал правила сочетания этих единиц. Таким образом ученик составлял полную ориентировочную основу для воссоздания данного контура — для правильного написания этой буквы. Второклассники, работавшие по экспериментальной программе Л. Н. Айдаровой[4], открыв зависимость сообщения (значения) от «анатомии» слова — определенных значащих частиц слова (морфем) и овладев таким образом методом работы с языковым материалом, составляли полную ориентировочную основу действия по анализу не только слов родного языка, но и

3 См. Н. С. Пантина. Формирование двигательного навыка письма в зависимости от типа ориентировки в задании.— Вопросы психологии, 1957, № 4.

4 См. А. И. Айдарова. Формирование некоторых понятий грамматики по третьему типу ориентировки в слове.— Зависимость обучения от типа ориентировочной деятельности. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1968.

искусственного языка, по выделению морфологического строения ряда слов на незнакомых детям иностранных языках (английском, немецком, французском), по выяснению строения древнерусских слов и т. п.

При указанном построении обучения ученик анализирует данное ему явление, но не воссоздает неизвестных ему явлений, а тем более не создает новых.

Возможен другой путь, когда ученик создает новые, ранее ему неизвестные явления. В этом случае также возможны различные варианты самостоятельного построения полной ориентировочной основы для получения новых явлений: а) путем непосредственного варьирования основных единиц, характеристики которых принадлежат той же области знаний, что и изучаемые явления; б) опосредованным путем — через основные единицы продуктов, для которых предназначены воссоздаваемые явления. При этом знания, на которые опирается ученик при воссоздании явлений по их основным единицам не исчерпываются только областью, к которой принадлежат эти явления. Так, учащиеся, обучающиеся по программам, разработанным И. П. Калошиной[5], самостоятельно создавали металлорежущие станки и инструменты для изготовления деталей любой формы. При разработке этих новых объектов учитывалась специфическая природа станков и инструментов — в своих функциях отражать свойства изготовляемых продуктов, уподобляться им. В связи с этим базой для создания новых станков и инструментов служили знания, во-первых, об основных единицах продуктов (деталей разных форм, получаемых с помощью станков и инструментов) и правилах их сочетания; во-вторых, о функциональных зависимостях (законах уподобления) основных единиц и правил их сочетания в станках и инструментах от основных единиц и правил их сочетания в деталях. При этом необходимые знания о деталях ученик получал не из техники, а из математики: основными единицами деталей, которые представляют из себя геометрические фигуры различной формы, являются производящие линии в количестве не менее двух, а правила

5 См. И. П. Калошина. Проблемы формирования технического мышления. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1974.

их сочетания задаются функцией линий (одна из них — образующая — реальная линия, которая должна двигаться; другая — направляющая — идеальная линия, которая задает направление движению образующей); углом (образующая должна располагаться под определенным углом к плоскости направляющей); формой (линии могут быть разной формы).

Применительно к геометрическим преобразованиям требования третьего типа ориентировки сводятся к следующим: а) учащиеся с самого начала должны усвоить те общие элементы, те основные единицы, которые характерны для всех изучаемых в школьном курсе геометрических преобразований; б) усвоить метод работы с этими единицами, позволяющий получать все виды данных преобразований. Учащиеся должны усвоить, следовательно, обобщенное умение по выполнению данных преобразований.

Общими элементами всех изучаемых в школе преобразований являются следующие:

1. Начальный объект преобразования, т. е. то, что надо преобразовать (прообраз); начальным объектом может быть любая геометрическая фигура.

2. Конечный объект преобразования (образ), т. е. фигура, которая получается в результате преобразования.

3. Объект, относительно которого ведется преобразование; этим объектом является или точка, или прямая, или плоскость.

4. Для всех рассматриваемых преобразований характерны следующие свойства:

а) точечность, т. е. все преобразования переводят точку в точку — каждой точке A плоскости соответствует определенная точка A', в которую преобразуется A;

б) взаимно-однозначность, т. е. все преобразования переводят точку в одну и только одну точку, а две различные точки переводятся в две различные точки;

в) сохранение строго определенного отношения расстояний между любыми двумя точками:

$$\rho(A', B') = K \rho(A, B),$$

где точки A' и B' являются образами точек соответственно A и B. K — коэффициент пропорциональности.

Значение K зависит лишь от вида преобразования, но не от выбора точек A и B; для всех преобразований движения $|K| = 1$, в случае подобия (гомотетии) $|K| \neq 1$.

5. Для выполнения любого из этих преобразований необходимо совершить одно из следующих действий: или повернуть начальный объект вокруг точки (оси, плоскости) или перенести его на вектор (при разных коэффициентах пропорциональности), или выполнить оба эти действия — одно за другим.

Указанные общие положения в совокупности составляют адекватную и полную ориентировочную основу приема по выполнению геометрических преобразований. В качестве основных единиц материала, вариация которых дает все многообразие изучаемых в школе преобразований, были выделены следующие: 1) объект, относительно которого ведется преобразование; 2) действие: поворот и перенос. Правила их сочетания задаются углом поворота и вектором переноса.

В зависимости от различных сочетаний этих факторов можно получить все виды преобразований, изучаемых в средней школе. Так, взяв в качестве объекта, относительно которого выполняется преобразование, точку и действие поворота, можно получить различные преобразования, изменяя значение угла поворота: при $\alpha \neq 180°$ — поворот вокруг точки, при $\alpha = 180°$ — центральная симметрия. Следовательно, при всех равных прочих условиях варьирование угла поворота может привести к изменению вида преобразования. Аналогично, изменение вектора переноса при одном и том же объекте, относительно которого ведется преобразование (точка), действие переноса позволяет получить два разных вида преобразований: если вектор дан — параллельный перенос, если вектор определяется в результате анализа данного коэффициента пропорциональности — гомотетия.

Далее, смена объекта, относительно которого выполняется преобразование, при неизменном действии тоже приводит к изменению вида преобразования. Так, если действием будет поворот, $\alpha = 180°$, а объектом, относительно которого ведется преобразование, точка или прямая, то в первом случае имеем центральную симметрию, а во втором — осевую симметрию.

Выделенные общие элементы и правила их сочетания определяют состав деятельности учеников по выполнению преобразований. Эта деятельность включает в себя следующие компоненты.

А. Анализ начального объекта преобразования, который заключается в выделении так называемых определяющих точек данного объекта. Под определяющими точками понимаем то конечное множество точек, по которым может быть восстановлен данный объект. Так, отрезок имеет две определяющие точки, это его граничные точки; для треугольника определяющими точками служат его вершины; определяющими точками окружности будут центр и любая точка, взятая на окружности, и т. д.

Б. Выбор объекта, по отношению к которому выполняется преобразование. Как уже указывалось, такими объектами в рассматриваемых преобразованиях являются точка, прямая, плоскость.

Объект, относительно которого выполняется преобразование, может занимать по отношению к преобразуемому объекту любое положение. Например, при преобразовании треугольника с помощью центральной симметрии центр симметрии может находиться или вне треугольника, или внутри треугольника, например, совпадать с точкой пересечения медиан или лежать на одной из его сторон. При построении четырехугольника, симметричного данному относительно заданной оси, в качестве последней может служить или одна из сторон четырехугольника, или какая-либо из его диагоналей, или биссектриса одного из углов (внешнего или внутреннего) и т. д.

В. Выбор действия. Как показал анализ элементарных преобразований, их выполнение сводится к таким действиям: повороту (вокруг точки, оси, плоскости), переносу на вектор или последовательному выполнению обоих действий. В самом деле, так как центральная симметрия является частным случаем вращения вокруг точки при угле поворота 180°, а осевая симметрия это вращение вокруг оси на 180°, то для выполнения таких преобразований, как вращение вокруг точки и оси, центральной и осевой симметрии достаточно совершить поворот вокруг точки или оси.

Для выполнения параллельного переноса и гомотетии необходимо перенести начальный объект на определенный вектор. Причем в случае параллельного переноса величина вектора задается, а в случае гомотетии — определяется с помощью коэффициента гомотетии. Получение подобных фигур сводится к выполнению преобразования гомотетии и одного из видов движения (вращения около точки или оси, центральной или осевой симметрии, параллельного переноса).

Г. Выполнение выбранного действия.

Д. Анализ конечного объекта.

В соответствии с составом деятельности было выделено общее предписание для выполнения преобразований, которое дает общий метод их совершения, порядок действий:

1. Укажите начальный объект преобразования.
2. Укажите объект, относительно которого совершается преобразование.
3. Выберите определяющие точки начального объекта.
4. Укажите действия, с помощью которых можно совершить преобразования.
5. Выберите действие, нужное для решения данной задачи.
6. Совершите выбранное действие.
7. Укажите конечный объект преобразования.
8. Сравните начальный и конечный объекты.

Таким образом, обобщенное умение совершать геометрические преобразования состоит из небольшого числа компонентов, адекватных совокупности объективных условий, обеспечивающих безошибочное выполнение любого элементарного преобразования. Каждое конкретное преобразование при этом выступает как частный случай реализации этих общих компонентов. Учащиеся, усвоив обобщенное умение, самостоятельно получают каждое частное преобразование данной группы. Учитель же только лишь сообщает соответствующее математическое название.

Каждый из компонентов указанного умения был сделан предметом специального усвоения. Для этого было необходимо выделить состав действий, связанных с каждым из компонентов: определить входящие в них операции (ориентировочные и исполнительные), составить предписание по применению действия к решению конкретных задач. Так, при формировании действия по выделению определяющих точек преобразуемого объекта в ориентировочную часть этого действия входят знания о том, какие точки необходимо выделить в объекте, чтобы потом, имея эти точки, построить его. Например, как было указано, отрезок вполне определяется своими граничными точками, треугольник — тремя вершинами и т. д.

Управление процессом усвоения обобщенного умения по выполнению элементарных геометрических преобразований достигалось в результате поэтапной отработки как действий, входящих в каждый из выделенных компонентов, так и всего умения. В связи с этим заранее планировалось, до какого уровня должно быть доведено формирование всех действий и умения в целом. Так, действия: «выделение начального объекта преобразования», «выбор объекта, относительно которого выполняется преобразование», «выбор действий» — доводились до умственного уровня (ориентировочная и исполнительная части этих действий). В действиях «выделение определяющих точек», «выполнение выбранного действия» только ориентировочная часть доводилась до умственного уровня. Исполнительная часть оставалась всегда во внешней материализованной форме: ученик на бумаге отмечал определяющие точки начального объекта и получаемые в результате выбранного действия соответствующие им точки, по которым строил конечный объект.

Организация формирования обобщенного умения потребовала усвоения учащимися системы понятий и действий, которые ранее ими не изучались: понятие об ориентированной фигуре, векторе, направленном угле, их равенстве и правилах построения; понятие расстояния между фигурами, понятие коэффициента подобия (гомотетии) и др. Все эти предварительные понятия и действия формировались до изучения преобразований.

Экспериментальная программа была проверена на 10 учениках путем индивидуального обучения, а также на 40 учениках в условиях группового эксперимента: одна группа — 16 человек, другая — 24. Испытуемыми были учащиеся VII классов: два ученика хорошо успевали по математике, остальные были слабо- и среднеуспевающими.

Исследование включало следующие серии эксперимента:

I. Констатирующая, целью которой было определение исходного уровня имеющихся у учащихся знаний и умений.

II. Обучающая, которая включала: 1) формирование предварительных знаний и умений, необходимых для усвоения обобщенного умения по выполнению геометрических преобразований, и 2) формирование обобщенного умения по выполнению преобразований.

III. Контрольная серия эксперимента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДНОГО УРОВНЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

Прежде чем приступить к отбору материала, подлежащего усвоению, составлению программы деятельности ученика по его усвоению и реализации этой программы, необходимо выявить реальные возможности обучаемого, установить его исходный уровень знаний и умений.

Определение исходного уровня знаний и умений учащихся, принимавших участие в обучающем эксперименте, проходило по трем направлениям. Во-первых, поскольку экспериментальное обучение проводилось с учащимися, которые, согласно школьной программе по математике, уже знакомились с такими геометрическими преобразованиями, как центральная и осевая симметрия, то до начала обучения было необходимо проверить степень осведомленности учащихся в этом материале. Во-вторых, устанавливалось наличие у них тех математических знаний и умений, которые были необходимы для усвоения новых знаний и умений. Так, у испытуемых проверялось знание начальных геометрических понятий, их свойств, умение пользоваться циркулем, линейкой, угольником. В-третьих, проверялось, располагают ли учащиеся теми познавательными действиями, которые будут использоваться в качестве средств усвоения новых знаний. В частности, устанавливалось, могут ли учащиеся пользоваться действием распознавания как средством усвоения понятий.

Для выявления исходного уровня знаний и умений по всем трем указанным направлениям испытуемым предлагалась контрольная работа, состоящая из 11 заданий. Задания были разбиты на две группы: первая группа (5 заданий) — задания, предусматривающие проверку знаний необходимых и достаточных признаков фигур (треугольник, отрезок, точка и т. д.), симметричных относительно точки (оси), и умения пользоваться действием распознавания; вторая группа (6 заданий) — задания, предназначенные для проверки умения выполнять преобразования фигур с помощью осевой и центральной симметрии, знания свойств этих преобразований. Выполнение заданий как первой, так и второй группы одновременно означало также проверку знания начальных геометрических понятий, их свойств, умения пользоваться чертежными инструментами — линейкой, угольником, циркулем.

При выполнении каждого из одиннадцати заданий внимание обращалось не только на конечный результат, но и на то, как ученик решал эту задачу, на что при этом ориентировался. Учитывалось также, может ли он обосновать выполняемые действия.

Для проверки знания признаков понятий центрально-симметричных фигур и фигур, симметричных относительно оси, а также для установления, располагают ли испытуемые действием распознавания как средством усвоения понятий, давались задания двух видов: а) задания, в которых признаки проверяемых понятий были представлены в опосредованном виде; б) задания, в которых признаки были заданы в явном виде.

К первому виду заданий относятся задания 1 и 2.

Задание 1. «В параллелограмме *CDEF* диагонали *CE* и *DF* пересекаются в точке *O*. Симметричны ли точки *D* и *F* относительно точки *O*? Симметричны ли точки *D* и *F* относительно прямой *CE*? Запишите подробно ответ» (чертеж не давался).

Задание 2. «Дана окружность с центром в точке *O*; *AB* и *MN* — два различных диаметра этой окружности. Подробно запишите свой ответ на следующие три вопроса: 1. Будут ли точки *A* и *B* симметричными относительно точки *O*? 2. Будут ли точки *A* и *B* симметричными относительно прямой *MN*? 3. При каком взаимном расположении диаметров *AB* и *MN* данной окружности отрезки *OA* и *OB* можно назвать симметричными относительно прямой *MN*?» (чертеж не давался).

Ко второму виду относятся, например, задания 3 и 4.

Задание 3. «Даны прямая *l*, две точки *C* и *C'*, расположенные по разные стороны от этой прямой, и точка *O*, принадлежащая прямой *l*. Известно, что *OC* = *OC'* и отрезок *CO* перпендикулярен прямой *l*. Можно ли точки *C* и *C'* назвать симметричными относительно данной прямой *l*?»(чертеж не давался).

Задание 4. «Симметричны ли друг другу изображенные на чертеже треугольники *ABC* и *MNP* относительно прямой*EF*, если известно, что прямая *EF* перпендикулярна каждому из отрезков *AM*, *BP* и *CN* и делит эти отрезки пополам?» К задаче давался следующий чертеж:

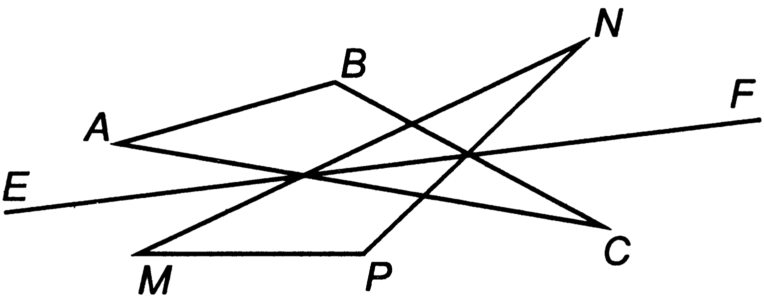


Рис. 1

Порядок предъявления заданий был следующим: вначале давались задания первого вида, затем — задания второго вида. При этом мы исходили из того, что если испытуемый правильно выполняет задания, в которых признаки понятий заданы в опосредованном виде (под правильным выполнением мы понимаем не только наличие безошибочного ответа, но и его полную аргументацию), то это свидетельствует о сформированности у него понятий фигур, симметричных относительно точки (оси) и действия распознавания, и тогда выполнение заданий второго вида становятся не столь необходимым. Если же задания первого вида вызывают у ученика затруднения, то ему предлагаются задачи, в которых признаки понятий заданы в явном виде, и сформированность интересующих нас знаний и умений проверяется в ходе решения этих задач.

Результаты выполнения первой группы заданий представлены в **табл. 1**.

Как видно из табл. 1, процент правильно выполненных заданий очень низкий. Так, при выполнении вышеприведенного задания 1 из 50 испытуемых только 4 (8%) человека дали безошибочный и аргументированный ответ на первый вопрос задачи и трое (6%) — на второй вопрос, причем двое из них были испытуемые, правильно ответившие на первый вопрос. Ответы остальных учеников или не содержали ошибок, но отсутствовало их обоснование, или были неправильными. Часть учащихся отказалась выполнять задание, мотивируя свой отказ тем, что они «забыли», «не помнят».

Неправильные ответы учащихся могли быть за счет непол-

Таблица № 1

	Знание признаков фигур, симметричных относительно		Умение пользоваться действием распознавания
	оси	точки	
Количество предъявленных заданий	200	150	250
Процент правильно выполненных заданий от числа предъявленных	6 %	9,3 %	3,5 %

ноценного усвоения ранее изучаемого математического материала, например незнания свойства диагоналей параллелограмма: «Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам». Но, как показали ответы учащихся на дополнительные вопросы, почти все испытуемые знали это свойство, однако они не обнаруживали связи между ним и понятием центрально-симметричных точек. Когда испытуемым была указана эта связь, некоторые из них откровенно заявили: «Нам и в голову не приходило, что точки D и F можно рассматривать не только как вершины параллелограмма, но и как точки, симметричные относительно точки O».

Характерная ошибка при ответе на второй вопрос задачи 1 состояла в том, что учащиеся на основании только свойства диагоналей параллелограмма делали неправильный вывод о симметричности точек D и F относительно прямой CE. Испытуемые, давая такой ответ, учитывали только один существенный признак понятия точек, симметричных относительно оси, а именно, равенство расстояний от точек D и F до оси CE. Другие существенные признаки этого понятия (по разные стороны от оси, на одном перпендикуляре к оси) ими не учитывались. Это говорит о несформированности у учащихся всей совокупности необходимых и достаточных признаков понятия точек, симметричных относительно оси.

Результаты выполнения задания 2 также низкие: на первый вопрос задачи правильно ответило 5 учащихся (10%); при ответе на второй вопрос задачи ни один из учащихся не сделал правильного вывода («неизвестно») о симметричности точек *A* и *B* относительно оси *MN*; ни одного правильного ответа не было при ответе и на третий вопрос задачи. Анализ письменных ответов на второй и третий вопросы, а также беседы с учащимися показали, что при ответе на второй вопрос испытуемые рассматривали в основном только одно из возможных взаимных расположений диаметров *AB* и *MN*, а именно тот случай, когда диаметр *AB* перпендикулярен *MN*. Поэтому 6 человек написали, что точки *A* и *B* будут симметричными относительно прямой *MN*, но не дали никакого обоснования своего ответа. При беседе с этими учениками трое из них дали полную аргументацию ответа; «обоснования» других трех учеников сводились к тому, что заданное положение точек *A* и *B* «похоже на то, какое проходили». Отвечая на третий вопрос, испытуемые писали: «Нельзя найти такого положения диаметров *AB* и *MN*, чтобы отрезки *OA* и *OB* были симметричными»; были ответы и такого рода: «Мы этого не проходили».

Аналогичную картину мы наблюдали, анализируя результаты выполнения задания 3: только один испытуемый (2%) правильно ответил на вопрос задания: «Здесь нельзя ответить ни да, ни нет, для этого надо знать, будет ли отрезок *C'O* перпендикулярен *MN*». Остальные испытуемые выполнили задание 3 неправильно. Среди ответов был всего лишь один отрицательный, что свидетельствует о том, что у остальных учащихся даже не возникло мысли, что при положении точек *C* и *C'*, заданном в условии, эти точки не могут быть не симметричными относительно прямой *MN*. Поэтому из 50 испытуемых 48 при ответе на вопрос задания 4 написали: «Да», а некоторые пытались аргументировать свой ответ тем, что «отрезки *OC* и *OC'* равны». Такого рода объяснения учащихся говорят о непонимании ими того, какие признаки являются существенными для понятия точек, симметричных относительно оси. При ответах испытуемые ориентировались только на один признак этого понятия, а другие необходимые и достаточные признаки принадлежности к понятию (по разные стороны от оси, на одном перпендикуляре к оси), ими не учитывались. Правильный ответ («неизвестно») в таких заданиях возможен только в том случае, если ориентировка учащихся осуществляется на всю совокупность существенных признаков.

Выводы испытуемых при выполнении заданий 1, 2, 3, а также при ответе на вопросы других заданий первой группы сделаны на основании совокупности признаков, недостаточных для установления принадлежности к понятию фигур, симметричных относительно точки (оси). Это свидетельствует о плохом усвоении учащимися действия распознавания: ориентировка учащихся на отдельные признаки понятий говорит о неразумности выполнения этого действия, а неумение обосновать свои ответы — о неосознанности его.

При выполнении задания 4 все испытуемые пытались определить симметричность треугольников *ABC* и *MNP* относительно прямой *EF* при помощи «перегибания листа бумаги», и никто не ориентировался на данные условия, исходя из которых можно было сразу дать положительный ответ, не прибегая к перегибанию.

Задание 4 было предложено учащимся после задания 3, в котором говорилось о симметричности точек относительно оси. У нас была опасность, что ответ на вопрос задания 3 будет своеобразной подсказкой для выполнения задания 4. Но, как показали результаты, понятия точек и треугольников, симметричных относительно оси, выступают для учащихся обособленно, никакой связи между ними испытуемые не обнаруживали. Если при выполнении задания 3 ученики пытались вспомнить совокупность признаков понятия точек, симметричных относительно оси, то, отвечая на вопрос задания 4, испытуемые забывали об этом понятии и судили о симметричности треугольников на основании их совпадения при перегибании чертежа по оси симметрии. Это говорит о несформированности у учащихся понятия фигур, симметричных друг другу относительно оси, как о таких фигурах, одна из которых образована точками, симметричными точкам другой фигуры относительно данной оси.

Применяя способ «перегибания», многие учащиеся не были уверены в своих ответах; они писали: «Кажется эти треугольники будут симметричными. Надо перегнуть лист по *EF*. Но здесь трудно это сделать, так как один треугольник заходит на другой». Такие ответы вызваны тем, что данное на чертеже положение симметричных друг другу треугольников «не похоже» на то, к которому «привыкли» ученики, изучая осевую симметрию в школе. В школьных курсах геометрии, где при изучении осевой симметрии большое внимание уделяется «перегибанию листа бумаги», среди многочисленных примеров (с рыбами, кляксами, листьями), на которых показывается этот способ, нет такого, в котором каждая из симметричных друг другу (но не самой себе) фигур лежала бы по обе стороны оси симметрии (как указано на чертеже к задаче 4). Неумение испытуемых применять способ перегибания при различных взаимных расположениях преобразуемой фигуры и оси симметрии указывает на его необобщенность. Следует при этом добавить, что сам по себе этот способ имеет ограниченное применение при решении задач на построение и доказательстве теорем.

Надо отметить, что чертежи ни к одному из заданий первой группы (за исключением задания 4) не давались и для их выполнения они не были необходимы. Но многие испытуемые просили разрешить сделать чертеж, объясняя это тем, что «заданную только словами задачу решать труднее, а с чертежом легче». Некоторые испытуемые говорили, что они «вспоминают чертеж», данный в учебнике, сравнивают со своим, а потом пишут ответ.

Использование чертежей при выполнении заданий несколько повысило процент правильных ответов. Так, после выполнения чертежа к заданию 2 двое испытуемых сделали правильный вывод («неизвестно») о симметричности точек *A* и *B* относительно прямой *MN*. При этом они начертили несколько вариантов взаимного расположения двух диаметров *AB* и *MN* данной окружности и исходя из чертежей правильно ответили на второй вопрос задачи. Основная масса испытуемых выполнила чертеж, на котором диагонали были взаимно перпендикулярными, и, следовательно, их утвердительный ответ на этот вопрос задачи был неправильным: выводы они делали, ориентируясь не на словесно заданное условие задачи, а только на выполненный ими чертеж. Это свидетельствует о низком уровне усвоения учащимися понятия фигур, симметричных относительно точки (оси). Во-первых, деятельность учащихся по применению этого понятия ограничена только материальной формой: испытуемые, прежде чем ответить на вопрос о принадлежности заданного объекта к понятию, обязательно выполняли соответствующий чертеж. Во-вторых, отсутствовало обобщение этой деятельности: учащиеся на выполненных ими чертежах старались найти такое положение фигур, симметричных относительно точки (оси), которое было бы «похоже» на положение, данное в школьном учебнике геометрии.

Таким образом, результаты выполнения заданий первой группы показали, что проверяемые с их помощью знания и умения оказались у наших испытуемых несформированными.

Для проверки степени сформированности умения выполнять преобразования фигур с помощью осевой и центральной симметрии учащимся предлагались задания, в которых требовалось построить фигуру (отрезок, треугольник, параллелограмм, окружность, фигуру, ограниченную замкнутой кривой линией), симметричную данной относительно центра (оси). Положение центра (оси) по отношению к преобразуемой фигуре было различным: 1. Центр располагался во внутренней области преобразуемой фигуры (ось пересекала внутреннюю область). При этом объектом, относительно которого ведется преобразование, служил или один из основных элементов преобразуемой фигуры (вершина угла, центр окружности, сторона многоугольника и т. д.), или какой-то другой ее элемент (точка пересечения медиан, биссектриса одного из углов, диаметр окружности и т. д.). 2. Центр (ось) была расположена во внешней области преобразуемой фигуры. Например, давались задания следующего типа.

Задание 6. «На плоскости дан параллелограмм *ABCD*. Построить параллелограмм, симметричный данному относительно середины *E* стороны *CD*. Запишите, какая фигура получилась в результате преобразования и почему?»

Или такое, как **задание 10**: «На плоскости дана геометрическая фигура *F*, ограниченная замкнутой кривой линией, и прямая *MN* вне фигуры *F*. Построить фигуру, симметричную данной относительно прямой *MN*».

Результаты выполнения второй группы заданий представлены в **табл. 2**.

Как видно из табл. 2, результаты выполнения заданий второй группы несколько выше результатов выполнения заданий первой группы (см. табл. 1). Это объясняется тем, что в школе при изучении осевой и центральной симметрий основное внимание уделяется исполнительной части действия по выполнению преобразований.

Чтобы выявить, на какие условия ориентируются ученики при выполнении преобразований, т. е., чтобы проверить сте-

Таблица № 2

	Выполнение преобразований					
	осевая симметрия			центральная симметрия		
	отрезок	окружность	другие фигуры	треугольник	окружность	другие фигуры
Количество предъявленных заданий	50	50	50	50	50	50
Процент правильно выполненных заданий от числа предъявленных	16%	14%	12%	14%	12%	10%

пень сформированности у них ориентировочной основы этого действия, после выполнения всех заданий на построение им было предложено ответить на ряд вопросов, среди которых были такие:

1. Можно ли выполнить преобразование всей фигуры, если известно, как выполнить преобразование ее одной точки?

2. Почему при преобразовании отрезка с помощью симметрии относительно оси из концов отрезка надо опускать перпендикуляры на ось?

3. Почему при построении отрезков, симметричных относительно центра, вы строите точки, симметричные только концам отрезка? и т. д.

Несмотря на то, что значительная часть учащихся правильно построила фигуры, симметричные данным относительно центра (оси), никто из них не ответил правильно на все поставленные вопросы, что свидетельствует о недостаточной сформированности у них ориентировочной основы действий по выполнению преобразований — осевой и центральной симметрий. Это говорит о том, что учащиеся часто выполняют преобразования механически, не понимая смысла совершаемых операций; действия учащихся не обладают должной разумностью, необходимой сознательностью.

Несформированностью ориентировочной основы действия по выполнению преобразований можно объяснить и те типичные ошибки, которые совершали испытуемые при выполнении заданий второй группы. Так, при построении фигуры, симметричной данной относительно оси, они соединяли определяющие точки фигуры с осью не по перпендикуляру, а по наклонной. Кроме того, затруднения вызывали задачи, в которых центр (ось) совпадал с одним из элементов преобразуемой фигуры. Так, при построении окружности, симметричной данной относительно ее диаметра, только пять учеников правильно выполнили построение, указав, что данная и симметричная ей фигуры совпадают, т. е. окружность в этом случае переходит сама в себя. Аналогичными были результаты выполнения **задания 7**: «В равностороннем треугольнике *MNK* проведена высота *ME*. Построить треугольник, симметричный данному относительно прямой *ME*. Запишите, какой треугольник получился в результате построения и почему?» Среди ответов учащихся (за исключением 6) мы не нашли таких, в которых было бы указано, что данный треугольник преобразовался сам в себя, что в результате преобразования получается снова равносторонний треугольник.

Неумение учащихся объяснить свои построения были связаны как с несформированностью ориентировочной основы действия по выполнению осевой и центральной симметрий, так и просто с незнанием свойств этих преобразований. Например, при выполнении задания 7 учащиеся не могли объяснить, почему точка *M*, которая принадлежит высоте *ME* — оси симметрии равностороннего треугольника *MNK* — в результате преобразования не изменила своего положения, почему отрезок *MN* после выполнения преобразования совпал с отрезком *MK*.

Выполняя задание 6, учащиеся не знали, почему полученная в результате преобразования фигура будет параллелограммом. Далее, испытуемые не знали такого свойства осевой симметрии, как изменение ориентации фигур в результате этого преобразования.

Были сопоставлены результаты выполнения учащимися заданий на знание понятий фигур, симметричных относительно центра (оси) (задания первой группы), с результатами выполнения этими же учащимися заданий на преобразование фигур (задания второй группы). Оказалось, что некоторые учащиеся, давая правильное определение фигуры (отрезка, многоугольника и т. д.), симметричной относительно центра (оси), не справились с заданиями на преобразование этих фигур с помощью центральной (осевой) симметрии; и наоборот, некоторые учащиеся, давая некорректное определение, правильно выполнили построение. Это еще раз подтверждает несформированность у учащихся ориентировочной основы действия по выполнению преобразований: учащиеся механически заучивают отдельно определение фигур, симметричных относительно центра (оси), и способ преобразования этих фигур, не связывая их друг с другом.

Таким образом, результаты выполнения заданий второй группы дают основания считать, что, во-первых, у учащихся не была сформирована ориентировочная основа действия по выполнению преобразований осевой и центральной симметрии; во-вторых, свойства этих преобразований не были усвоены учащимися в должном объеме и качестве; а те свойства, которые они знали, не выступали для них как средство, способствующее не только правильному выполнению заданий, но и помогающее понять и объяснить это выполнение.

Как было указано выше, выполнение заданий первой и второй групп означало одновременно и проверку знаний начальных геометрических понятий, их свойств, умения пользоваться чертежными инструментами для геометрических построений (угольником, линейкой, циркулем). Итоги выполнения заданий показали, что учащиеся владеют этим материалом в том объеме, который необходим для усвоения намеченных нами новых знаний и умений. Исключение составило понятие расстояния между фигурами, а также понятие ориентации фигур, поэтому этот материал был включен в обучающий эксперимент в качестве предварительного и был сделан предметом специального усвоения.

Таким образом, результаты выполнения проверочных заданий показали, что несмотря на то, что осевая и центральная симметрия изучались учащимися, отобранными для экспериментального обучения, соответствующие знания и умения не были у них удовлетворительными, поэтому мы могли их включить в обучающий эксперимент.

ОБУЧАЮЩИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

I. Формирование предварительных знаний и умений

Предварительный анализ содержания материала, отобранного для усвоения, а также результаты определения исходного уровня познавательной деятельности учащихся позволили выявить знания и умения, которые необходимо было сформировать до организации усвоения обобщенного умения по выполнению элементарных геометрических преобразований. Система предварительных знаний и умений включала в себя:

1. Понятие ориентированной фигуры, вектора, направленного угла, понятие о их равенстве и умение их построить.

2. Понятие расстояния между фигурами.

3. Понятие коэффициента гомотетии (подобия).

4. Действие распознавания.

Без знания этой системы предварительных понятий и действий невозможно было обеспечить усвоение основного раздела экспериментальной программы — умения выполнять преобразования. Так, понятие вектора, равенства векторов и умение их построить необходимо для совершения параллельного переноса, понятие направленного угла — для выполнения преобразования вращения вокруг точки и оси; умение анализировать коэффициент гомотетии (подобия) необходимо для построения гомотетичных (подобных) фигур и т. д. В качестве основного средства усвоения этих знаний использовалось действие распознавания, которым учащиеся не владели. В силу этого оно было сделано предметом специального усвоения.

В ходе формирования отобранного предварительного материала учащиеся усваивали не только неизвестные им математические понятия (вектор, направленный угол и т. д.), но и знакомились с новым для них методом работы — поэтапной отработкой каждого понятия. Она предполагала в данном случае формирование специфической части ориентировочной основы действия распознавания для каждого понятия (формирование необходимых и достаточных признаков понятия) и логической (общей всем понятиям) части ориентировочной основы, т. е. приема установления принадлежности (или непринадлежности) данного объекта соответствующему понятию. Наряду с этим, учащихся обучали различным методам контроля по выполнению заданий: парному контролю и методу декодирования химических шифровок[6]. Такая предварительно проведенная работа исключала необходимость отработки этих действий при изучении основного материала — умения выполнять геометрические преобразования.

Все предварительные знания и умения отрабатывались у учащихся по методике формирования умственных действий и понятий. Как указывалось выше, средством формирования предварительных понятий являлось действие распознавания. Вначале это действие строилось в материальной или материализованной форме. На карточку столбиком выписывались признаки формируемого понятия. Имелись карточки, на которых было выписано предписание по распознаванию этих признаков. Например, предписание по распознаванию признаков понятия «вектор» (имеющего два признака, соединенных между собой конъюнктивно) на материальном этапе имело следующий вид:

Карточка № 1

1. Прочтите задание.
2. Возьмите карточку с признаками вектора.

I.
3. Прочтите вслух первый признак.
4. Найдите, что об этом признаке говорится в условии.
5. Отметьте результат в схеме знаками +, –, ?[7].
6. Проверьте с помощью шифровки этот признак.

II.
7. Прочтите вслух второй признак.
8. Найдите, что об этом признаке говорится в условии.
9. Отметьте результат в схеме знаками +, –, ?
10. Проверьте с помощью шифровки этот признак.

III.
11. Сравните полученные в схеме результаты с логическим правилом (карточка № 2).

---

6 См. З. А. Решетова, И. П. Калошина. Программированное обучение производственным навыкам. Сообщение III. Организация пооперационного контроля при формировании производственных умений и профессиональных знаний без применения обучающих машин. «Новые исследования в педагогических науках». Вып. IV. М., «Просвещение», 1965.

7 Для каждого из заданий заранее заготавливалась схема, где были указаны только номера признаков формируемого понятия. Все схемы с соответствующими номерами заданий помещались на одном листе с шифровкой.

12. Отметьте ответ в схеме знаками +, –, ?
13. Проверьте ответ с помощью шифровки.

На карточке № 2 была дана обобщенная схема логического правила распознавания:

Карточка № 2

1. Если все признаки «+», ответ «+»

$$+\begin{cases}1 & +\\ 2 & +\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n & +\end{cases}$$

2. Если хотя бы один признак«–», ответ«–»

$$-\begin{cases}1 & +\\ 2 & -\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n & +\end{cases} \qquad -\begin{cases}1 & +\\ 2 & ?\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n & -\end{cases}$$

3. Если хотя бы один признак «?» и нет признаков «–», ответ «?»

$$?\begin{cases}1 & +\\ 2 & ?\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n & +\end{cases}$$

Каждый ученик имел карточки с признаками формируемых понятий, предписаниями и логическим правилом, а также напечатанные задания.

Кроме карточек и заданий учащимся давались модели (модель вектора — отрезок со стрелкой; циферблат с нанесенной на нем градусной сеткой, на котором отрабатывались признаки направленного угла, и т. д.), чертежи.

На одном-двух примерах учащимся объяснялось и показывалось, как пользоваться карточками с признаками, логическим правилом работы с ними, предписаниями. Учащимся также объяснялось, какие операции и в какой последовательности они должны выполнять. Кроме того, объяснялся принцип работы с шифровкой. Затем учащиеся приступали к самостоятельному выполнению заданий, пользуясь карточками.

При этом в условиях индивидуального эксперимента первые 2-3 задания выполнялись при непосредственном контроле и корректировке со стороны экспериментатора каждой операции, выполняемой каждым испытуемым. В условиях группового обучения эти задания выполнялись совместно с учителем одним учащимся на доске, а остальными в их тетрадях. Последующие задания учащиеся выполняли самостоятельно.

После выполнения 5-8 заданий учащиеся, как правило, запоминали и систему необходимых и достаточных признаков формируемого понятия (число признаков не превышало трех, связь между признаками во всех предварительных понятиях была конъюнктивная), и логическое правило, и предписание по распознаванию признаков, осваивали и метод работы с шифровками.

Работая на материальном (материализованном) этапе, учащиеся читали вслух (в условиях группового эксперимента прочитывали шепотом) каждый пункт предписания и выполняли его, причем выполнение следовало непосредственно за прочтением. Такой метод работы готовил перевод действия в следующую форму — в форму «громкой речи».

На этапе «громкой речи» карточки с признаками и логическим правилом убирались.

Предписание по выполнению заданий менялось: вместо пункта «прочти вслух первый (второй) признак» появлялся пункт «запиши (проговори) первый (второй) признак». (В условиях индивидуального эксперимента на этом этапе работы с понятиями использовалось проговаривание, а в условиях группового обучения эта форма действия была заменена другой формой внешней речи — прописыванием. Кроме того, происходило сокращение действия распознавания: снимались указания относительно отметки результатов наличия (отсутствия или неизвестности) признаков в схеме с помощью знаков +, –, ? Учащиеся, проговорив (прописав) требуемые признаки, сразу же отмечали свои результаты в шифровке по каждому признаку и окончательный ответ.

Если при выполнении 1-2 заданий кто-либо из учащихся забывал какой-то из пунктов предписания или один из признаков, то ему разрешалось взять соответствующую карточку и посмотреть. Следующие 2-3 задания каждый из учащихся выполнял самостоятельно, не пользуясь карточками с признаками и логическим правилом.

Таким образом, и на этапе громкой речи процесс выполнения задания был пооперационным.

Успешное выполнение заданий на этапе громкой речи позволяло переходить к следующему этапу — внешняя речь про себя. На этом этапе работы правильность выполнения каждой операции и конечного ответа контролировались также с помощью шифровки.

Учащиеся выполняли задания (3-4 задачи), ничего не проговаривая вслух и не прописывая; в предписании по выполнению заданий имелось указание: «Назови про себя первый (второй) признак». Затем это требование снималось, и все действие выполнялось в умственном плане. Пооперационный контроль по выполнению действия полностью снимался. Теперь, в соответствии с новым предписанием, учащиеся не должны были отмечать в шифровке результаты проверки каждого признака формируемого понятия. Выполнение заданий (4-6) проходило следующим образом: учащиеся про себя читали задание и сразу же отмечали окончательный ответ в шифровке. Если учащиеся на этом этапе работали безошибочно, то мы считали, что данное понятие усвоено.

Таким образом, в процессе формирования предварительных понятий учащиеся усваивали как специфическую часть, так и логическую часть ориентировочной основы действия распознавания. Логическая часть была усвоена уже при поэтапной отработке понятия «вектор» параллельно с поэтапной отработкой специфической части — необходимых и достаточных признаков этого понятия. При формировании последующих предварительных понятий (равенство векторов, направленные углы, расстояние между фигурами и т. д.) поэтапную обработку проходила только специфическая часть ориентировочной основы действия распознавания, логическая часть была та же самая и выполнялась сразу в умственной форме.

О сформированности действия распознавания (особенно его логической части) говорят также те задания, которые составляли сами учащиеся. Так, им предлагалось составить такое задание «на вектор», когда имеется первый признак этого понятия, а о втором ничего неизвестно. Задания учащихся отмечались разнообразием, интересным содержанием и некоторые из них в дальнейшем были включены в обучающую программу.

При организации усвоения каждого из предварительных понятий и действий еще до начала обучения экспериментатором намечались группы заданий, имеющие своей целью отработку этих знаний на соответствующем этапе их формирования.

Указание относительно выполнения заданий на определенном этапе давалось ученику письменно. Оно было включено в предписание по выполнению этих заданий, где наряду с такими указаниями, как «найдите, что об этом признаке говорится в условии задачи», или «проверьте с помощью шифровки этот признак», было и специальное указание, касающееся этапа обработки. Например, указание «прочтите вслух первый признак понятия» давалось на материальном (материализованном) этапе, «назовите вслух (запишите) первый признак» — на громкоречевом и т. д.

Количество заданий, которые должны были выполнить испытуемые на каждом этапе отработки, заранее планировалось экспериментатором. С этой целью им использовались данные о количестве заданий, полученные в ранее проведенных исследованиях, построенных на основании теории формирования умственных действий. Кроме того, при проведении второго индивидуального и последующих двух групповых экспериментов каждому из испытуемых давалась анкета. В ней для вновь формируемого понятия и действия он должен был записать, достаточно ли (недостаточно, избыточно и на сколько) предлагаемое количество заданий на каждом этапе отработки (этапы перечислялись).

Анализ анкет показал, что количество заданий на каждом из этапов зависит от многих факторов: от сложности формируемых понятий и действий, в частности от количества необходимых и достаточных признаков, их логической структуры, от степени сформированности логической части действия распознавания, от индивидуальных способностей испытуемых и т. д. Например, при формировании понятия «вектор», которое отрабатывалось одним из первых (учащиеся знакомились с новым для них методом работы) на материальном (материализованном) этапе потребовалось в среднем 12-13 заданий. При формировании понятия направленного угла, когда у учащихся была отработана логическая часть действия распознавания, на этом этапе потребовалось 7-9 заданий.

После обработки анкет для поэтапной отработки каждого формируемого понятия и действия выбиралось среднее количество заданий. При проведении индивидуальных экспериментов количество заданий, необходимых для формирования всей системы предварительных знаний, составляло 150. Анализ хода обучения и анкет показал, что число заданий надо увеличить, и каждый из испытуемых следующих двух групповых экспериментов выполнил по 157 заданий.

Со всеми предложенными заданиями, использованными для усвоения системы предварительных знаний и умений, учащиеся справились успешно. Из 7780 заданий, предъявленных всем 50 испытуемым, 7583, т. е. 97,5%, были выполнены правильно, лишь при решении 197 задач, что составляет 2,5%, были допущены ошибки. Основное количество ошибок падает на начальный этап обучения, когда испытуемые осваивали новый для них метод работы.

Для проверки сформированности системы предварительных знаний и умений испытуемым была дана контрольная работа: каждый ученик должен был выполнить по 8 заданий. Результаты следующие: из 400 предложенных задач 395 (98,5%) были решены абсолютно правильно, т. е. учащиеся давали не только безошибочное решение, но и подробно обосновывали его. В пяти случаях (1,5%) решения также не содержали ошибок, но их аргументация была неполной. Не было ни одного случая, в котором наши испытуемые дали бы неверное решение.

Изложенные результаты свидетельствуют, таким образом, о том, что все намеченные предварительные знания и умения были сформированы, и это давало нам возможность перейти к основной части обучающего эксперимента — формированию обобщенного умения по выполнению элементарных геометрических преобразований.

2. Формирование обобщенного умения по выполнению элементарных геометрических преобразований

Формирование обобщенного умения по выполнению преобразований включало в себя следующее:

1. Выделение и усвоение компонентов умения.

2. Самостоятельное составление учащимися ориентировочной основы для выполнения каждого из видов преобразований.

Выделение компонентов умения происходило в ходе выполнения учащимися различного рода практических заданий. Они работали с орнаментами, которые включали в себя одинаковый по форме рисунок, занимающий различные положения. Учащимся предлагалось выделить в орнаментах рисунок и затем записать, как с его помощью образовать весь орнамент. Каждому из испытуемых давалась модель, которая была получена следующим образом: на плотную бумагу с обеих сторон наклеивался рисунок и вырезался по контуру. Работая с моделью рисунка и орнаментами, учащиеся сами устанавливали, что последние можно получить различными способами. Испытуемые замечали, что одни орнаменты можно создать, не изменяя ни формы, ни размеров рисунка-модели и при этом модель должна перемещаться так, что в одном случае она как бы «скользит» по какой-либо прямой, в другом — поворачивается около точки или прямой. Другие орнаменты образуются в результате «растяжения» или «сжатия» рисунка-модели, т. е. в результате сохранения формы, но увеличения (уменьшения) размеров. Ученики в этом случае писали:«Рисунок сам по себе остается такой же, но его надо увеличить», некоторые поясняли — «как при фотографировании».

Выполняя практические задания, учащиеся убеждались, что, во-первых, одна фигура (в данном случае рисунок-модель) может быть сопоставлена с другой (орнаментом), во-вторых, эта другая фигура может быть получена из первой по определенному правилу.

Учащимся сообщалось, что сопоставление одной фигуры с другой, получаемой из нее по определенному правилу, называется преобразованием первой фигуры во вторую.

Наряду с указанными выше заданиями испытуемым давались задания, в которых объектом действия были геометрические фигуры (плоскостные и пространственные). Например, каждому из испытуемых предлагались два плаката, на которых изображены пары равных фигур (на одном плакате треугольники, на другом — четырехугольники). Обращалось внимание учащихся на то, что две фигуры могут находиться в различных взаимных положениях на плоскости. Испытуемые должны были проверить равенство данных на каждом плакате фигур и записать способ, с помощью которого они это делали. Каждому ученику давались модели фигур, равные изображенным на плакате — треугольник и четырехугольник, сделанные из картона. Лицевая и обратная стороны каждой модели были окрашены в разные цвета — зеленый и желтый.

Учащиеся прикладывали модель к одной из двух равных фигур и перемещали по плакату до совмещения с другой. На плакатах задавалось такое положение пар равных фигур, чтобы для проверки их равенства необходимо было или повернуть модель вокруг точки или прямой на разные углы, или перенести ее на определенное расстояние и в определенном направлении.

Так, в своих протоколах по выполнению заданий с плакатами, когда для проверки равенства пары треугольников надо было совершить вращение вокруг точки, учащиеся писали: «Я повернул картонный треугольник вокруг вершины вправо (или по часовой стрелке), пока он не слился с другим начертанным треугольником».

В случае, когда необходимо было выполнить осевую симметрию, учащаяся писала: «Наложила бумажный треугольник зеленой стороной на первый начерченный треугольник. Затем перевернула модель на желтую сторону и наложила на чертеж второго треугольника. Модель и чертеж совпали, они равны».

Кроме заданий для работы с плакатами и моделями треугольников (четырехугольников), учащимся предлагались задания типа: «На чертеже (**рис. 2**) даны два равных угла *ABC* и *MHP*. Можно ли совместить их так, чтобы совпали стороны *BA* и *HP*? Что пришлось делать с одним из углов для такого совмещения?» Или задание: «Даны два вертикальных угла *AOB* и *COP* (**рис. 3**). Можно ли совместить эти углы, не выходя из плоскости чертежа, так, чтобы совпали лучи *OA* и *OC*? Что пришлось делать с одним из углов для такого совмещения?»

И в первом и во втором заданиях с углами давались модели угла *ABC* (для первого задания) и угла *AOB* (для второго задания).

Таким образом, проверяя равенство двух геометрических фигур (углов, треугольников, четырехугольников), учащиеся сопоставляли одну фигуру с другой, и это совершалось различными способами, т. е. ученики выполняли разные преобразования одной фигуры в другую.

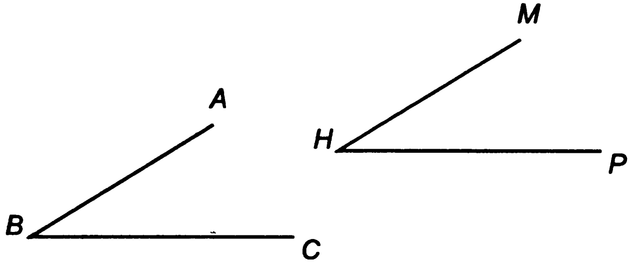


Рис. 2

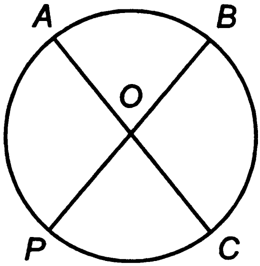


Рис. 3

В результате выполнения указанных выше заданий, а также ряда других, учащиеся, во-первых, убеждались, что преобразование одной фигуры в другую можно выполнять различными способами, во-вторых, обнаруживали, что в результате одних преобразований данная фигура переходит в равную ей, т. е. сохраняется форма и размеры фигуры, в результате других — в подобную ей, т. е. сохраняется форма, но изменяются размеры.

Кроме того, учащиеся устанавливали зависимость между: а) способом преобразования, б) сохранением (изменением) формы и размеров фигур, в) сохранением (изменением) отношения расстояний между точками данной фигуры и соответствующими точками фигуры, получающейся в результате преобразования.

Для этого учащиеся вновь возвращались к заданиям, предусматривающим работу с плакатами, орнаментами, геометрическими фигурами, моделями и чертежами. Теперь испытуемые для каждого конкретного задания должны были выполнить следующие операции: 1) выделить на модели две произвольные точки; 2) с помощью линейки измерить расстояние l_1 между этими точками; 3) на фигуре, полученной в результате выполнения преобразования, отметить соответствующие точки; 4) с помощью линейки измерить расстояние l_2 между этими точками; 5) найти отношение расстояний $l_1 : l_2$.

После выполнения этих операций испытуемые констатировали, например, что при вращении вокруг точки (прямой) на любой угол или при перенесении на вектор данная фигура преобразуется в фигуру, равную заданной по форме и размерам; при этом отношение расстояний между точками данной фигуры и соответствующими точками полученной фигуры равно единице, т. е. эти расстояния сохраняются. В случае же гомотетии преобразуемая фигура сопоставляется с другой фигурой, имеющей с данной одинаковую форму, но разные размеры. При этом происходит изменение расстояний между соответствующими точками данной и полученной фигуры в одном и том же отношении.

Далее, анализируя рассмотренные ранее задания, в ходе беседы с экспериментатором учащиеся приходили к выводу о необходимости наличия фигуры, имея которую, можно получить различными способами другие фигуры. Эту фигуру мы назвали начальным объектом преобразования или преобразуемой фигурой, или прообразом. Выполненные задания убеждают испытуемых в том, что прообразом может быть любая фигура. Ту фигуру, которая получается в результате различных преобразований, назвали конечным объектом преобразования, результатом преобразования, или образом.

Для выделения объекта, относительно которого совершается преобразование, перед испытуемыми ставились задачи следующего типа: «Имеем одну половину чертежа детали (чертеж давался в готовом виде). Как получить целый чертеж?» Кроме чертежей различных деталей, испытуемым давались также модели пропеллера, цветка ромашки и т. д. Выполняя задания такого типа, а также возвращаясь к уже рассмотренным задачам, предусматривающим работу с орнаментами, плакатами, учащиеся убеждались в необходимости наличия объекта, относительно которого ведется преобразование, причем объектом может быть не любая геометрическая фигура, а только или точка, или прямая, или плоскость.

Уже при выполнении первых практических заданий, работая с моделями, испытуемые обнаружили, что для получения по данной фигуре новой необходимо совершить определенные действия: или повернуть на угол вокруг точки (или прямой) или перенести на определенное расстояние и в определенном направлении. Выполнение каждого действия предусматривает выполнение входящих в него операций. Испытуемые сами, отвечая на вопросы экспериментатора, выделяли операции, составляющие содержание каждого из этих действий, и записывали их на карточку.

Кроме того, при выполнении указанных выше заданий испытуемые сами установили, что, например, для проверки равенства пары треугольников (четырехугольников), взаимное положение которых задано на плакате, при наложении достаточно совпадение их соответствующих вершин. Эти точки были названы определяющими точками. Для выделения определяющих точек фигур давались также задания такого типа: «На доске был начерчен квадрат. Потом его стерли. Расположение каких точек надо знать, чтобы по ним мог быть восстановлен весь квадрат?»

Для наглядного представления перемещения плоскости и того, что плоскость при этом отображается сама на себя, учащиеся работали с моделью двуслойной плоскости: плоскость представлялась в виде двух совмещенных слоев прозрачной бумаги.

Двуслойное представление плоскости открывает большие возможности при изучении геометрических преобразований. Во-первых, такая модель позволяет выделить законы перемещения точек плоскости: перенос на вектор, поворот вокруг точки (прямой) на данный угол. Кроме того, модель дает возможность применить выделенные законы к различным точкам плоскости. Во-вторых, при работе с моделью материализуются как условия, обеспечивающие получение различных видов перемещений, так и связи между этими видами: центральная (осевая) симметрия есть поворот вокруг точки (оси) на угол 180° и т. д. В-третьих, при перемещении одного слоя относительно другого фиксируется и то положение точки (фигуры), которое она занимала до перемещения, и новое ее положение. В-четвертых, в ходе различных перемещений плоскости могут быть «открыты» такие инварианты преобразований, как равенство данных и получившихя в результате преобразования фигур (отрезков, углов и т. д.).

Известно, что при решении конкретной задачи, когда необходимо выполнить геометрическое преобразование данной фигуры, определенный закон перемещение плоскости применяется не ко всем ее точкам, а только к определяющим (концам отрезка, вершинам треугольника и т. д.). Модель двуслойной плоскости позволяет материализовать деятельность учащихся по выделению определяющих точек фигуры, а также по воссозданию фигуры, заданной этими точками.

Таким образом, решая вместе с учителем различные практические задачи, работая с геометрическими моделями и чертежами, учащиеся постепенно выделяли основные компоненты, необходимые для выполнения преобразований. Компоненты записывались в виде следующей таблицы:

Таблица № 3

1	2	3	4	5	6	
Начальный объект преобразования	Объект, относительно которого выполняется преобразование	Количество определяющих точек начального объекта	Выбранное действие	Конечный объект преобразования	Сравнение начального и конечного объектов	
					сходства	различия

Все компоненты умения по выполнению преобразований отрабатывались одновременно. На материальном этапе учащимся на нескольких примерах показывалось, как надо заполнять таблицу и как выполнять действия, составляющие умение совершать преобразования.

У каждого испытуемого имелась табл. 3, карточки, на которых были выписаны предписание по выполнению заданий, предписание по получению конечного объекта преобразования, составленное в виде следующей схемы (**рис. 4**).

Объектами действия испытуемых на материальном этапе были модели геометрических фигур, выполненные из дерева и картона.

Покажем на примере, как протекало выполнение заданий на этом этапе отработки. Задание № 17: «Дан треугольник ABC и точка O вне его. Какое положение займет данный треугольник после поворота его вокруг точки O на угол $-40°$» Испы-

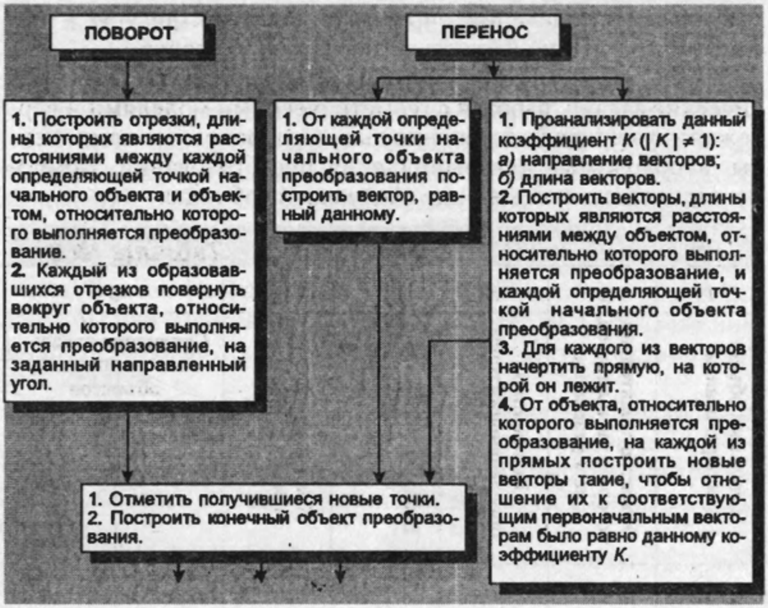


Рис. 4

туемым говорилось, что это задание, а также ряд аналогичных, они будут выполнять, используя модели. Для выполнения указанного задания учащимся давалась вырезанная из дерева модель треугольника, в вершинах которого были просверлены отверстия. Моделью точки служил вырезанный из пенопласта небольшой цилиндр (высота 1,5 см). Угол вращения определялся с помощью транспортира, который был вмонтирован в модель точки так, что эта «точка» помещалась в риске отсчета транспортира. Испытуемый читает про себя условие задания и вслух первый пункт предписания по выполнению заданий: «Укажите начальный объект преобразования». Затем он говорит: «Начальным объектом преобразования здесь будет треугольник *ABC*». Экспериментатор предлагает прочесть вслух название первой графы таблицы и заполнить ее. Испытуемый читает и записывает в первой графе: «Треугольник *ABC*».

Далее ученик читает вслух следующие пункты предписания и соответствующие графы таблицы и последовательно заполняет их. Так, в графе «объект, относительно которого выполняется преобразование», он пишет — «точка *O*»; в графе «количество определяющих точек начального объекта преобразования» записывает: «Три точки — вершины *A*, *B*, *C*»; в графе «выбранное действие» — «поворот вокруг точки».

Затем для получения конечного объекта преобразования испытуемый должен выполнить выбранное действие. Для этого он берет карточку с предписанием-схемой и находит ту ее часть, в которой перечислены операции, необходимые для выполнения поворота. Потом ученик читает вслух каждую операцию этого действия и, работая с моделями, выполняет ее. Так, испытуемый с помощью спиц находит расстояние между каждой вершиной треугольника *ABC* и точкой *O*. Каждую из спиц вращает вокруг точки *O* на заданный угол (-40°) и концы повернутых спиц последовательно соединяет проволокой, получая, таким образом, конечный объект преобразования.

После выполнения 2-3 заданий на моделях ученик переходил к материализованной форме действия. Преобразуемая фигура и объект, относительно которого выполняется преобразование, задавались в виде чертежа. Так же, как на материальном этапе, испытуемый вслух читал каждый пункт предписания по выполнению заданий, затем каждую графу таблицы и заполнял последнюю. При совершении выбранного действия составляющие его операции прочитывались вслух и выполнялись на листе бумаги с помощью чертежных инструментов (линейки, угольника, транспортира). На материальном и материализованном этапах в основном усваивалось предписание по выполнению заданий, а также предписание-схема по совершению выбранного действия.

На внешнеречевом этапе содержание действия по формированию умений совершать преобразования оставалось тем же самым, но менялась его форма. При выполнении действия на этом этапе мы применяли две формы внешней речи — громкоречевую и письменную. Получив задание, ученик заполнял таблицу, в которой отсутствовали названия граф: он сам записывал их названия (письменная форма внешней речи). При выполнении же выбранного действия для получения конечного объекта преобразований испытуемый проговаривал вслух каждый пункт этого действия (громкоречевая форма внешней речи). Карточки с предписанием по выполнению заданий и предписанием-схемой на этом этапе убирались. Если учащиеся при выполнении заданий (для некоторых учеников это было одно или два задания) на этом этапе встречали затруднения (забывали название какой-либо графы таблицы или операцию выбранного действия), то им разрешалось посмотреть соответствующую карточку. Выполнение следующих 3-4 заданий шло уже полностью без карточек.

На этапе «внешней речи про себя» испытуемый, прочитав задание, заполнял «немую» таблицу: про себя он называл каждую ее графу и записывал, согласно условию задания, какая фигура будет начальным объектом преобразования, объектом, относительно которого совершается преобразование, и т. д. Ученик также проговаривал про себя каждую операцию выбранного действия и выполнял ее.

Решая последующие задачи, ученик уже не расписывал их в таблицу, а сразу строил конечный объект, выполняя выбранное действие (умственный этап).

При выполнении заданий на каждом из этих этапов испытуемый сравнивал начальный и конечный объекты преобразования, выявлял их сходство и различия. Это значительно облегчало выделение и изучение свойств преобразований, помогало увидеть их общность. При этом обращалось внимание на изменение ориентации фигур в результате выполнения осевой симметрии; на свойство объекта, относительно которого совершается преобразование: все его точки переходят сами в себя; на наличие других неподвижных точек и прямых для каждого преобразования; на инволютивность осевой и центральной симметрий и на то, что такие преобразования, как вращение вокруг точки (прямой), параллельный перенос и гомотетия, этим свойством не обладают, и т. д.

На всех этапах формирования умения совершать геометрические преобразования осуществлялся контроль за выполнением как отдельных операций, так и действия в целом. Умение совершать геометрические преобразования является сложным, состоящим из нескольких компонентов. Контроль за пооперационным выполнением действия в целом носил смешанный характер: мы применяли и метод декодирования химических шифровок, и парный контроль. Так, для контроля за правильностью выполнения таких компонентов умения (исполнительной и ориентировочной частью этих действий), как выделение начального объекта преобразования, его определяющих точек, объекта, относительно которого ведется преобразование, и ориентировочной части действия, выбранного для получения конечного объекта, применялся парный контроль.

Один из испытуемых был исполнителем, другой — контролером, потом они менялись ролями (в течение всего эксперимента учащиеся работали парами). И исполнитель, и контролер получали задание под одним номером, причем у исполнителя это было обычное учебное задание, а у контролера кроме задания имелся подробно расписанный вариант правильного выполнения этого задания. Кроме того, контролеру заранее разъяснялись его функции. Например, на материальном и громкоречевом этапе парный контроль осуществлялся следующим образом: один ученик (исполнитель) шепотом рассказывал весь ход действия и совершал его, а другой (контролер) контролировал, как выполняется каждая операция, и в случае ее неправильного исполнения требовал исправления.

Применялся и такой вид взаимоконтроля: учащиеся одновременно выполняли задание, а потом сверяли полученный результат, шепотом обсуждая его друг с другом.

Для контролирования исполнительной части действия, выбранного для преобразования, применялись химические шифровки. В заданиях, требующих выполнения одного из выбранных действий, задавался чертеж, включающий в себя изображение начального объекта преобразования и объекта, относительно которого совершается преобразование. Результаты выполнения каждой из операций действия по получению конечного объекта (прообраза) и сам этот объект были зашифрованы. Учащиеся выполняли построения ручкой, заряженной специальным составом. В результате правильно выполненного построения проведенные линии окрашивались в оранжевый цвет, при неправильном построении — приобретали красный цвет.

Организованный таким образом контроль создавал возможность и экспериментатору и самому испытуемому проверять правильность выполнения заданий не только по конечному результату, но и по каждой операции, входящей в состав данного действия. Это обеспечивало также возможность немедленного выявления и корректировки совершенных ошибок.

После отработки всех компонентов умения по выполнению преобразований рассматривались конкретные виды преобразований, представленные в **таблице 4**.

Таблица № 4

Объект, относительно которого выполняется преобразование	Действия преобразований			
	ПОВОРОТ		ПЕРЕНОС	
	угол поворота произвольный	угол поворота равен 180°	вектор задан	вектор определяется в результате анализа заданного коэффициента K ($\lvert K \rvert \neq 1$)
Точка	Поворот вокруг точки	Центральная симметрия	Параллельный перенос	Гомотетия
Прямая	Поворот вокруг прямой	Осевая симметрия		

Эта таблица составлялась самими испытуемыми совместно с экспериментатором. Также самостоятельно, отвечая на вопросы, учащиеся выделяли признаки каждого из видов преобразований; экспериментатор только сообщал соответствующее математическое название преобразования[8].

Признаки каждого из видов преобразований выписывались на отдельную карточку, а затем поэтапно обрабатывались. Причем усвоение признаков каждого из преобразований и выполнение этих преобразований шло быстро и почти безошибочно. Ведь испытуемые сами были «открывателями» и признаков преобразований, и способов совершения их. Кроме того, они были уже знакомы с методом работы, а также владели действием распознавания как средством усвоения понятий. На формирование каждого из видов преобразований потребовалось в среднем 1,5-2 урока. За это время ученик выполнял по 15-22 задания, причем сюда относятся задания не только на усвоение признаков того или иного вида преобразования, но и задания на выполнение этого преобразования и на доказательство ряда положений с использованием формируемого преобразования.

---

8 В экспериментальную программу преобразования поворот вокруг оси и симметрия относительно плоскости не включались из-за незнакомства испытуемых с элементами стереометрии. На материальном этапе давалось лишь представление об этих преобразованиях.

Число заданий, предложенных каждому из испытуемых для выделения и отработки всех компонентов умения совершать преобразования, а также для формирования указанных видов преобразований, было различным при индивидуальных и групповых экспериментах. При проведении индивидуальных экспериментов каждый ученик выполнил по 212 заданий. Некоторая доработка программы, которая была проведена после анализа хода обучения, а также заполненных испытуемыми анкет, позволила сократить количество заданий. При проведении последующих двух групповых экспериментов каждый из испытуемых выполнил по 135 заданий. Выполнение учащимися предложенных заданий осуществлялось практически безошибочно. Из 7520 заданий 7237, т. е. 96,1%, были выполнены абсолютно правильно. Число ошибочных ответов составляет 3,9%, причем почти все они исправлялись самими учащимися.

Анализ ошибок показал, что они были вызваны или недоработкой некоторых знаний и умений, ранее изучаемых испытуемыми в школе, или невнимательным чтением условия заданий и носили, следовательно, случайный характер.

Наряду с количественной оценкой результатов, полученных при формировании как системы предварительных знаний и умений, так и обобщенного умения по выполнению геометрических преобразований, была проведена их качественная оценка. При этом мы исходили из тех независимых характеристик, которые выделяются для действий и знаний в теории П. Я. Гальперина: форма действия, степень обобщения, мера развернутости и мера освоения, а также из тех характеристик, которые являются производными от них: разумность выполнения, сознательность, прочность и т. д.

Как мы и планировали, в умении по выполнению геометрических преобразований до умственной формы доводилась лишь ориентировочная часть; исполнительная часть оставалась материализованной.

Кроме того, как указывалось выше, каждый из компонентов умения переносился в идеальный план или целиком (ориентировочная и исполнительная части), или частично в их ориентировочной части. Так, действие по «выделению начального объекта (прообраза)», «выбор объекта, относительно которого совершается преобразование», «выбор действия преобразования» целиком выполнялись в умственной форме. В действиях «выделение определяющих точек» и «выполнение выбранного действия» ориентировочная часть доводилась до умственного уровня. Исполнительная часть этих компонентов осуществлялась внешне, материализованно.

Как известно, формирование отдельных действий, понятий может доводиться до заданного уровня не сразу, а постепенно, наряду с формированием других знаний и умений, иногда в их составе. Так, понятие одинаково (противоположно) направленных векторов входит в качестве составной части в понятие «равные векторы» и в действие построения равных векторов. Поэтому при обучении усвоение понятия одинаково (противоположно) направленных векторов мы доводили только до материализованной формы. На таком уровне оно было включено в состав действия по усвоению понятия равные векторы и построение вектора, равного данному. В процессе формирования эти понятия вместе с другими были доведены до умственного уровня.

Известно, что материальная форма действия является исходной и от того, как организовано формирование действия на этом уровне, зависит качество сформированности действия в целом. Кроме того, исходная форма действия может быть не только материальной (объект действия представлен в виде реальных предметов), но и материализованной (объектом действия служат схемы, модели, чертежи). Иногда действие необходимо представить раньше в материальной, а затем в материализованной форме. Так, при формировании предварительных понятий «вектор» и «направленный угол», а также действий для получения конечного объекта преобразования испытуемые раньше работали с реальными предметами, а затем только переходили к чертежам. Например, при формировании понятия направленного угла ученики вначале работали с циферблатами, на которых была нанесена градусная сетка: с помощью стрелок откладывали положительные и отрицательные углы. Они выполняли задания типа: «На циферблате с помощью стрелок отложить следующие углы: +30°, -70°, +145°, -195°». После работы с циферблатами они переходили к выполнению заданий на чертежах. Задания имели вид: «Дан угол *AOB* (давался чертеж острого угла). Отметить дугой со стрелкой следующие углы: положительный угол *AOB*; отрицательный угол *AOB*; положительный угол *BOA*, отрицательный угол

ВОА». Или же задание: «Построить и обозначить: 1) угол *CED*, равный -45°; 2) угол *CED*, равный +45°» и т. д.

Работа с циферблатом значительно ускоряла формирование понятия «направленного угла». При проведении индивидуального эксперимента это понятие вначале отрабатывалось без использования циферблатов, учащиеся сразу должны были выполнять задания на чертежах, т. е. форма действия была материализованной. Это затрудняло и затягивало формирование понятия: ученики постоянно путались при выделении положительных и отрицательных углов. Для отработки на материализованном этапе для каждого учащегося потребовалось в среднем по 11 заданий. Чтобы снять это затруднение, в дальнейшем были введены циферблаты. После выполнения 3-4 заданий с циферблатами ученики почти безошибочно справлялись с заданиями, предусматривающими работу с чертежами (4-5 задания).

Аналогично, при формировании действий по получению конечного объекта преобразования ученики раньше работали с реальными предметами: геометрическими фигурами, вырезанными из дерева, картона, спицами, транспортиром. А затем действие переводилось в материализованную форму, когда все построения проводились на бумаге с помощью карандаша и чертежных инструментов (преобразуемая фигура и объект, относительно которого ведется преобразование, были заданы на чертеже).

Другой независимой характеристикой действия является ***обобщенность***. При составлении экспериментальной программы мы планировали обобщение как предметной части в пределах данного понятия, так и логической части в пределах всех понятий с данной логической структурой признаков. Для того чтобы была обобщена предметная часть формируемых предварительных понятий, а также умения по совершению преобразований при составлении заданий, необходимо было учесть все типичные случаи, с которыми может встретиться ученик, работая с этими понятиями или совершая преобразования. Например, в заданиях, требующих выполнения преобразования вращение вокруг точки, значения углов поворота брались от $-\infty$ до $+\infty$ и показывалось, что углы, отличающиеся на полный угол, определяют одно и то же вращение. Кроме того, объект, относительно которого совершалось то или иное преобразование, занимал по отношению к начальному объекту всевозможные положения. Так, при преобразовании треугольника с помощью осевой симметрии ось находилась или вне треугольника, или совпадала с одной из его сторон, или служила высотой или медианой и т. д. Для обобщения логической части задания подбирались так, чтобы они отражали все случаи, предусмотренные логическим правилом распознавания, т. е. задания с наличием всех признаков, с отсутствием какого-либо признака, с неопределенными условиями.

Показателем степени обобщения действия служит широта «переноса» его. Так, логическая часть ориентировочной основы действия распознавания была сформирована в обобщенном виде уже при работе с первым предварительным понятием «вектор». В дальнейшем обучение при формировании понятий направленный угол, расстояние между объектами и т. д., которые имели ту же логическую структуру, что и понятие «вектор», логическая часть действия успешно применялась без дополнительного обучения.

Об обобщенности умений по совершению преобразований свидетельствует тот факт, что учащиеся самостоятельно выделяли признаки и выполняли такое преобразование, как сжатие (растяжение) к прямой. Испытуемым назывался объект, относительно которого будет выполняться преобразование — прямая, а также указывалось, что отношение расстояний между любыми двумя отрезками, принадлежащими одной прямой, равно фиксированному числу K ($|K| \neq 1$). Надо отметить, что учащиеся самостоятельно обнаруживали общность этого преобразования с гомотетией (они говорили: «Ведь это то же самое, что при гомотетии, только вместо точки берем прямую»). Далее, рассматривая это преобразование при различных значениях K, учащиеся находили, что при $K = -1$ сжатие к прямой представляет собой симметрию относительно прямой.

Для того чтобы действие было ***развернутым***, необходимо, чтобы все операции, первоначально вошедшие в состав действия, выполнялись учеником. Так, при формировании умения совершать преобразования экспериментатор следил за строгим и последовательным выполнением всех операций, составляющих содержание этого действия: выделение начального объекта, объекта, относительно которого совершается преобразование, и т. д. По мере формирования этого действия, при переходе с этапа на этап состав реально выполняемых операций уменьшается, действие становится сокращенным, свернутым: получая задание, ученики, отметив на начальном объекте преобразования его определяющие точки, сразу выполняют необходимое для получения конечного объекта действие.

Следующей независимой характеристикой действия является ***мера освоения***, которая включает в себя такие показатели, как быстроту выполнения действия и степень автоматизированности. Так, время выполнения задач менялось при переходе с этапа на этап. На материализованном этапе учащиеся на выполнение одного задания при отработке компонентов умения по совершению преобразований тратили в среднем 8-12 минут. На умственном этапе, когда ориентировочная часть действия выполнялась в уме, построение занимало 1-3 минуты.

Обучение по нашей программе должно было обеспечить усвоение с ориентировкой во всех случаях только на существенные условия, т. е. должно было быть ***разумным***. Мы судили о разумности действия на основании того, как успешно справляются учащиеся с такими заданиями, в которых правильный ответ может быть получен лишь тогда, когда ученик ориентируется только на существенные признаки. С целью проверки разумности выполняемого действия ученикам давались задания с неполным составом условий. Такие задания могут быть выполнены только при ориентировке на существенные признаки и логическое правило распознавания. И правильные ответы испытуемых: «неизвестно, будет ли этот объект вектором», или «неизвестно, можно ли это преобразование назвать центральной симметрией»,— являются достаточными показателями разумности их действий.

При решении задач учащиеся не только правильно действовали, но и правильно аргументировали свои действия, т. е. усвоение было не только разумным, но и ***сознательным***. Так, при выполнении заданий на этапе громкой речи испытуемые не только отмечали в шифровке результаты выполнения каждой операции и окончательный ответ, но и давали подробное обоснование своего ответа: письменное — в условиях группового эксперимента, устное — при индивидуальном обучении.

Проверка ***прочности*** сформированных понятий и действий была проведена по истечении 6 месяцев (включая летние каникулы) на испытуемых, принимавших участие во втором групповом эксперименте. Каждому из 24 испытуемых было предложено по 8 заданий, включающих в себя задание на знание признаков некоторых предварительных понятий, преобразований, а также совершение построений с помощью определенных преобразований. Причем в заданиях помимо ответа требовалась его аргументация. По сложности задания были того же типа, что и те, которые предъявлялись при обучении.

Результаты получены следующие: из 192 заданий 182 задания (94,8%) были выполнены правильно, с 10 заданиями (5,2%) ученики не справились, причем невыполненными мы считали те задания, в которых, несмотря на наличие безошибочного ответа, не было дано подробного обоснования его.

Проверка прочности усвоения системы предварительных понятий и действий осуществлялась в ходе формирования умения по выполнению преобразований. Так, знания понятий вектор, равенство векторов, умение строить вектор, равный данному, которые формировались в самом начале обучения, потом применялись при совершении параллельного переноса, т. е. через 2-2,5 месяца обучения. Как показывают результаты выполнения заданий, ошибок за счет незнания этих понятий почти не было.

Таким образом, сформированные при экспериментальном обучении знания и умения удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к умственным действиям и знаниям.

Для проверки того, насколько разработанная экспериментальная программа и методика организации ее усвоения обеспечивает формирование обобщенного умения выполнять элементарные геометрические преобразования, была предложена контрольная серия заданий. Она включала в себя задания четырех типов: 1) на проверку признаков преобразований и умения пользоваться действием распознавания с опорой на эти признаки; 2) на выполнение преобразований не только одного определенного вида, но и двух — одного за другим; 3) на доказательство возможности получения одной фигуры из другой с помощью соответствующего вида преобразования; 4) на выбор вида преобразования. По своему содержанию контрольные задания были сложнее тех, которые предлагались при обучении. Так, в ходе экспериментального обучения испытуемые выполняли задания, требующие применения только одного из известных им преобразований. Выполняя контрольные задания (третий тип), учащиеся должны были совершить два преобразования — одно за другим.

Каждому из испытуемых было предложено по 8 заданий. При выполнении заданий учащиеся должны были подробно аргументировать свой ответ. С контрольными заданиями испытуемые справились успешно: из 400 заданий 372, т. е. 93%, были выполнены абсолютно правильно. В 28 случаях (что составляет 7%) ученики дали безошибочные решения, но не смогли их полностью аргументировать. Не было ни одного случая, когда испытуемые не справились бы с заданиями.

Таким образом, вместо изучения частных видов геометрических преобразований, разбросанных по всему школьному курсу геометрии, можно дать обобщенный метод, который позволяет разумно и сознательно выполнять все преобразования, предусмотренные школьной программой.

Построенная нами программа обеспечивает формирование обобщенного умения по выполнению геометрических преобразований и управление этим процессом, о чем свидетельствуют результаты как обучающей, так и контрольной серии эксперимента.

Результаты проведенного исследования говорят о преимуществах нашей методики перед школьной, что нашло свое выражение в получении более высоких показателей усвоения, а также в сокращении вдвое срока изучения данного материала по сравнению с существующими в школе.

И. А. Володарская, Т. К. Никитюк

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЩЕГО ПРИЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Трудно переоценить роль задач на построение в формировании математического мышления школьников. С древних времен геометрические построения способствовали развитию не только самой геометрии, но и других разделов математики. Задачи на построение циркулем и линейкой и сегодня считаются математически весьма интересными, и вот уже более 100 лет это традиционный материал школьного курса геометрии. Они по своей постановке и методам решения объективно призваны развивать способность отчетливо представлять себе ту или иную геометрическую фигуру и, более того, уметь мысленно оперировать элементами этой фигуры. Задачи на построение могут способствовать пониманию учащимися происхождения различных геометрических фигур, возможности их преобразования — все это является важной предпосылкой становления пространственного мышления школьников, исследовательских и творческих умений, геометрической интуиции. План решения любой задачи на построение — цепочку основных построений, приводящих к цели, можно рассматривать как некоторый алгоритм и, следовательно, их можно использовать и в старших классах как содержательный материал курса информатики и вычислительной техники. В процессе решения задач на построение учитель может эффективно формировать элементы алгоритмической культуры школьников, систематически требуя от них четкой последовательности основных построений. Задачи на построение развивают поисковые навыки решения практических проблем, приобщают к посильным самостоятельным исследованиям, что очень важно в формировании умений и навыков умственного труда. Посредством задач на построение, и даже самых простейших из них, более глубоко осознаются теоретические сведения об основных геометрических фигурах, так как в процессе решения этих задач ученик создает наглядную модель изучаемых свойств и отношений и работает с этой моделью. Задачи на построение успешно могут быть связаны с такими идеями школьного курса геометрии как преобразования, векторы, координатный метод.

Задачи на построение изучаются в школе в течение трех лет — в 7, 8, 9 классе. Согласно требованиям к математической подготовке учащихся 7-9 классов (11) в результате изучения курса «Геометрия» учащиеся должны овладеть следующими умениями, представляющими обязательный минимум:

— изображать геометрические фигуры, указанные в условиях теорем и задач, и выделять известные фигуры на чертежах и моделях;

— проводить доказательные рассуждения в ходе решения типичных задач;

— вычислять значения геометрических величин (длин, углов, площадей), применяя изученные свойства и формулы;

— выполнять основные построения циркулем и линейкой, решать несложные комбинированные задачи, сводящиеся к выполнению основных построений;

— применять аппарат алгебры и тригонометрии в ходе решения геометрических задач;

— использовать векторы и координаты для решения стандартных задач (вычисление длин и углов, сложение векторов и умножение вектора на число).

На изучение раздела «Основные задачи на построение. Решение задач на построение с помощью циркуля и линейки» учебным планом предусмотрено следующее количество часов:

Класс	Тема	§§	Кол-во часов
7	Равенство треугольников	Гл. II	17
	Задачи на построение	§ 4	3
	Решение задач по теме «Треугольники» (в составе этой темы — задачи на построение)		3
	Соотношения между сторонами и углами треугольника	Гл. IV	16
	Построение треугольника по трем элементам. Задачи на построение	§ 4	3
8	Четырехугольники	Гл. V	15
	Параллелограмм и трапеция (в составе этой темы — задачи на построение)	§ 2	6
	Прямоугольник, ромб, квадрат (в составе этой темы — задачи на построение)	§ 3	4
	Подобные треугольники	Гл. VII	22
	Применение подобия к доказательству теорем и решению задач (в составе этой темы — задачи на построение)	§ 3	3+4
	Окружность	Гл. VIII	16
	Касательная к окружности (в составе этой темы — задачи на построение)	§ 1	3
	Четыре замечательные точки треугольника (в составе этой темы — задачи на построение)	§ 3	3
9	Длина окружности и площадь круга	Гл. XII	10
	Построение правильных многоугольников	§1	1

Примечание: Указания глав и параграфов соответствуют учебнику геометрии (1).

По сетке часов видно, какое место в структуре отдельных тем и даже разделов занимают задачи на построение. Причем, начиная с 7 класса задачи на построение отдельно не рассматриваются, они идут в составе изучаемых тем. Тем самым учителю дается возможность самостоятельно распределять часы внутри темы в зависимости от поставленной задачи и от уровня подготовленности учащихся класса.

Анализ учебников и пособий по геометрии (1, 9) показал, что авторы используют в основном индуктивный путь в изложении материала, относящегося к геометрическим построениям. Учащиеся сначала изучают конкретные виды построений: откладывание на данном луче от его начала отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла; построение перпендикулярных прямых; построение середины отрезка; построение треугольника по трем элементам. Только после этого учащиеся знакомятся с общей идеей геометрического построения в разделе: «Задачи повышенной трудности», где предлагается схема, по которой обычно решают задачи на построение циркулем и линейкой.

Эта схема состоит из четырех частей:

I. Анализ.

II. Построение.

III. Доказательство.

IV. Исследование.

Раскроем их содержание.

I. Анализ — это подготовительный и в то же время наиболее важный этап решения задачи. Целью анализа является установление таких зависимостей между элементами искомой фигуры и данными задачи, которые позволили бы построить эту фигуру. Как правило, анализ задачи состоит в том, что предполагаем ее уже решенной и находим различные следствия (или предпосылки) этого предположения, а затем, в зависимости от вида этих следствий, пытаемся найти путь отыскания решения поставленной задачи. Иначе говоря, «рецепт» проведения анализа состоит в последовательном проведении трех этапов рассуждений:

1) Предположим, что задача решена.

2) Посмотрим, какие из этого следует извлечь выводы.

3) Теперь, сопоставляя полученные выводы, попытаемся найти путь для действительного решения задачи.

II. Построение по намеченному плану.

III. Доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

IV. Исследование задачи, т. е. выяснение вопроса о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений.

Данная схема имеет свернутый характер. Ее придерживались еще в Древней Греции (IV-III вв до н. э.).

В. С. Крамор (7) предлагает использовать в качестве полной схемы решения задач на построение следующую:

1) рассмотрение практической ситуации;

2) формулировка задачи;

3) анализ задачи;

4) составление общего плана решения задачи (указание последовательности решаемых элементарных задач);

5) построение фигуры данными инструментами;

6) проверка построения фигуры. Доказательство того, что построенная фигура искомая;

7) исследование обобщением задачи. В исследование входит поиск условий, при которых задача имеет решение, их количество в каждом из выделенных случаев. Запись условий, при которых задача имеет решение, осуществляется на алгебраическом языке (посредством составления соотношения между заданными элементами);

8) решение задачи для каждого из выделенных случаев при исследовании;

9) поиск других способов решения, выделение рационального;

10) составление других задач, решаемых данным методом. Рассмотрение обобщенных и аналогичных задач.

При составлении плана решения задачи (п. 4) возможны различные способы поиска неизвестных точек и линий, в частности: метод сведения данной задачи к более простой или известной, метод геометрических преобразований и т. д. Для поиска отрезков и углов применяется алгебраический способ. Общий подход к составлению плана действий (наиболее рациональный) следующий: сначала припоминаем все, что известно о данных и искомых элементах фигуры, какие из них можно построить; затем, если их построение не приводит к цели, строим дополнительные элементы (которые могут быть построены при помощи данных) и, наконец, снова анализируем возможности построения искомых элементов. Процесс рассуждения продолжаем до тех пор, пока не получим плана построения фигуры.

Данная схема является, по существу, детализацией традиционной и может быть полезна при обучении решению рассматриваемого вида задач.

В сложившейся практике обучения существуют различные мнения относительно необходимости каждого из четырех этапов (анализ, построение, доказательство, исследование) при решении всех задач на построение, а также формы реализации этих этапов. Так, в соответствии с программой по математике для общеобразовательной школы, в седьмом классе, когда учащиеся впервые начинают знакомиться с умениями решать задачи на построение, анализ и доказательство рекомендуется проводить устно, а элементы исследования могут присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи (11). С другой стороны, в учебнике геометрии (1) указывается, что при решении простейших задач на построение (именно эти задачи изучаются в седьмом классе) отдельные этапы, например, анализ или исследование опускаются: ученикам дается готовый способ построения и готовое доказательство его правомерности. Не все этапы можно соблюдать и при решении задач в восьмом и девятом классах.

Л. А. Черных (15) также считает, что с указанными этапами решения задач на построение учащихся следует знакомить постепенно. При решении несложных задач она рекомендует записывать только построение и доказательство. В более сложных случаях построению должны предшествовать рабочий рисунок и план построения, который следует из анализа. Анализ лучше проводить устно. Устно, под руководством учителя, можно делать и исследование, если в этом есть необходимость.

Мы считаем, что исключение таких этапов как анализ и исследование из процесса решения задач на построение приводит к механическому заучиванию данного в готовом виде способа решения, что значительно снижает качество усвоения.

Необходимо отметить, что в методической литературе есть работы, авторы которых пытаются решить проблему эффективного обучения решению задач на построение. Так, обращается внимание на необходимость показать учащимся отличие задач на построение от других видов задач — задача на построение имеет особую структуру: в ней даны геометрические фигуры и условия, связывающие их между собой; требования такой задачи можно разделить на две части: а) построить новую фигуру, связанную с данными фигурами некоторыми условиями, и б) построить определенным набором инструментов (10). При этом в некоторых задачах инструменты указываются (например, построение параллельных прямых с помощью угольника и линейки), а в задачах, где инструменты не указаны, подразумеваются циркуль и линейка. Для более осознанного восприятия содержания задачи рекомендуется обучать учащихся краткой записи того, что дано и что требуется построить. Часть краткой записи «Дано» может быть представлена в разном виде. Так, если даны вид и расположение фигур относительно друг друга, то в «Дано» можно записать только обозначение этих фигур и с помощью имеющихся значков отношения между ними, а сами фигуры изобразить позднее, когда будут выполняться построения. Например, для задачи: «Даны две параллельные прямые и точка на одной из них. Построить окружность, касающуюся этих прямых и проходящую через данную точку»,— краткая запись может иметь следующий вид:

Дано: прямые a, b, точка A

A — на a

$a \parallel b$

Построить: окружность O так, чтобы

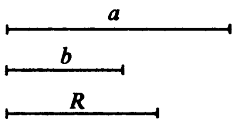
1) a касалась O

2) b касалась O

3) A находилась на O

В задачах, где даны вид и размеры фигур, без учета их взаимного расположения, в «Дано» следует изобразить и обозначить фигуры. Например, краткая запись задачи «Построить треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности» может выглядеть так:

Дано:



Построить: ΔABC так, чтобы 1) $BC = a$

2) $AC = b$

3) A, B, C — на окружности (O, R)

Некоторые авторы (3, 16), рассматривая приемы решения задач на построение как практические приемы, выделяют четыре этапа их формирования: подготовительный, ознакомительный, формирующий и этап совершенствования умения.

Так, Л. С. Чистякова считает, что учителю первоначально необходимо выявить систему условий, на которую должен опираться ученик для успешного овладения практическим действием. Например, для того чтобы научиться строить с помощью циркуля и линейки угол, равный данному, ученикам необходимо иметь знания о следующих фактах: о данных геометрических фигурах — полупрямой, полуплоскости и угле; о цели действия, в данном случае об угле, равном данному, который требуется построить; о каждой из конструктивных операций и о последовательности их выполнения. Учащиеся должны быть также подготовлены к обоснованиям возможности каждого шага построения и доказательству правильности построения (аксиомы откладывания отрезков и углов, определение равных треугольников, признаках равенства треугольников). Нельзя обойтись и без навыков в выполнении элементарных конструктивных операций: построении окружности произвольного или указанного радиуса с центром в некоторой точке, построение полупрямой, имеющей данное начало и проходящей через данную точку.

Подготовительный этап необходим для актуализации у учащихся указанных предварительных знаний.

На ознакомительном этапе учащиеся должны выделить, что дано, что требуется сделать и какими инструментами, какие операции для этого необходимо выполнить. План рекомендуется показать с помощью рисунков и текста. Например, сначала с помощью кодоскопа на экран проецируется данный угол BAC, дуга окружности с центром A и полупрямая с началом в точке O (**рис. 1**). На следующих кадрах показывается,

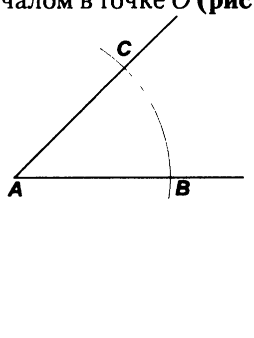


Рис. 1

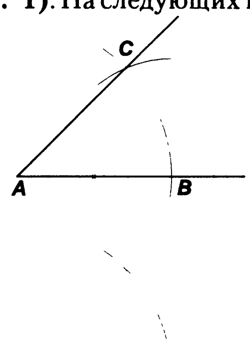


Рис. 2

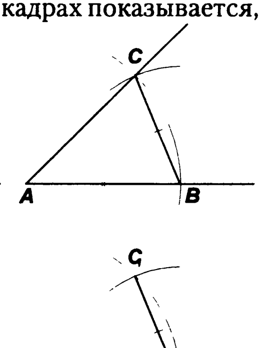


Рис. 3

как на полупрямой появляется точка B_1 **(рис. 2)**, а на окружности с центром O радиусом OB_1 $(OB_1 = AB)$ – точка C_1 **(рис. 3)**. На заключительном кадре (он здесь не приводится) представлены два треугольника – один $(\Delta\ ABC)$ с данным углом CAB, другой $(\Delta\ OB_1C_1)$ с углом C_1OB_1, равным данному.

Далее автор говорит о том, что на ознакомительном этапе должна происходить подготовка к выполнению практического действия с помощью инструментов. Поэтому учащиеся с самого начала не только наблюдают действия учителя, но и выполняют все то, что делает учитель.

На этапе, формирующем умение, учащиеся должны научиться правильно и без посторонней помощи выполнять практическое действие в знакомых условиях, т. е. по образцу. Руководство деятельностью учащихся осуществляется с помощью указанного выше плана **(см. рис. 1-3)**. При этом вначале заданию сопутствует полный план в виде рисунков и текста-предписания. Затем к заданию прилагается только текстовое предписание. Последние задания учащиеся выполняют полностью самостоятельно.

На последнем этапе – этапе совершенствования практического умения углубляется осознанность умения, отрабатывается автоматизм.

Л. И. Боженкова (3), которая исследовала решение задач на построение методом подобия, так формирует дидактическую целв подготовительного этапа – сформировать у учащихся умения: выделять данные, определяющие единственную фигуру; выделять данные, определяющие форму фигуры, множество пар подобных между собой фигур; строить фигуру по данным, определяющим форму; переходить от построенной фигуры к искомой. После изучения каждого признака подобия автор предлагает набор заданий, обращая внимание на то, что при переходе от одного признака к следующему вопросы несколько усложняются, а именно: расположение треугольников на рисунках меняется, удаляясь от стандартного, варьируется выбор элемента, определяющего единственную фигуру. Ознакомительный этап предназначен для того, чтобы разъяснить учащимся структуру процесса построения методом подобия, назначение каждой операции, составляющей эту структуру. Объяснение она предлагает начать с задачи, в ходе анализа которой учитель предлагает задания-вопросы, ответы на которые кратко фиксируются на доске. Далее составляется план построения и выполняется само построение. После этого учитель обращает внимание учащихся на то, что, выполняя построения, они фактически реализовывали алгоритмическое предписание, которое и предъявляется учащимся в виде следующей блок-схемы:

1. Выделить из условия задачи данные, определяющие форму фигуры.

2. Выделить данные, определяющие размеры фигуры (линейный элемент).

3. Построить фигуру указанной формы, подобную искомой.

4. Построить (выделить) отрезок, определяющий размеры фигуры.

5. Построить фигуру указанной формы и размеров, используя подобную.

6. Полученная фигура является искомой.

Последующая работа направлена на организацию усвоения данного алгоритма как средства решения задач на построение методом подобия.

Попытка выделения общего приема решения задач на построение была предпринята О. Б. Епишевой и В. И. Крупич (6) на примере выполнения построений методом геометрических мест (методом пересечения фигур). Приемы решения задач на построение методом геометрических мест основаны на понятии геометрического места точек. Для решения задач методом геометрических мест необходимо знать основные геометрические места точек.

Материал планиметрии позволяет познакомить учащихся с геометрическим местом точек, удаленных на данное расстояние от точки и прямой; равноудаленных от двух данных точек, от сторон угла, от двух пересекающихся прямых, от двух параллельных прямых и т. д.

Сущность метода геометрических мест при решении задач на построение состоит в следующем.

Пусть, решая задачу, мы должны построить точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющее второму условию, есть фигура F_2. Искомая точка X принадлежит и F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения.

Задачи на геометрические места точек можно разделить на два вида. К первому виду относят задачи, в которых дана некоторая фигура и на ней требуется найти точку, удовлетворяющую определенным условиям:

1) принадлежит указанной в условии задачи геометрической фигуре;

2) принадлежит фигуре, все точки которой обладают определенным свойством.

Ко второму виду относятся задачи, в которых требуется найти точку, удовлетворяющую одновременно двум условиям:

1) принадлежит фигуре F_1, все точки которой обладают определенным свойством;

2) принадлежит фигуре F_2, все точки которой обладают определенным свойством.

Далее авторами рассматриваются задачи, относящиеся к каждому из двух видов и после этого строится обобщенный прием решения задач каждого из указанных видов.

Так, обобщенный прием решения задач первого вида методом геометрических мест состоит в следующем:

1) изобразить геометрическую фигуру, которой принадлежит искомая точка X;

2) сформулировать, исходя из текста задачи, условие, которому удовлетворит искомая точка X;

3) назвать геометрическое место точек, удовлетворяющих этому условию;

4) построить названное геометрическое место точек;

5) найти точку (точки) пересечения данной фигуры и геометрического места точек.

Использование понятия геометрического места точек, обладающих определенными свойствами, должно помочь учащимся при нахождении способа решения задач на построение. Так, при анализе двух (на первый взгляд разных) задач: «среди всех точек, равноудаленных от сторон данного угла, найти точку, находящуюся на равных расстояниях от двух данных точек» и «построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся сторон данного угла», учащиеся должны обнаружить, что эти задачи, по существу, не отличаются друг от друга. Различие между ними состоит в том, что тексты этих задач дают в различной мере указания на те геометрические места точек, с помощью которых данная задача может быть решена. В первой задаче условия, определяющие искомую точку, даны явно в тексте, а во второй задаче их нужно получить, переосмысливая текст задачи.

Таким образом, как показал анализ, делаются попытки найти более рациональный путь обучения решению задач на построение вообще и с помощью конкретных методов — метода геометрических мест, подобия — в частности. Авторы стремятся выделить общие моменты построения. Однако на основной вопрос — почему именно так необходимо выполнять построение — ответа не дается.

В существующих учебниках каждая задача на построение дается обособленно, вне связи с другими, несмотря на то, что авторами задается продуманная последовательность этих задач. Поскольку при решении каждой последующей задачи в большинстве случаев нет опоры на уже решенную, качество выполнения задач на построение не улучшается. Для каждого построения дается частный прием его совершения. Причем главным в действиях учащихся является исполнительная часть: ученики механически производят построения, не имея полной и адекватной ориентировочной основы.

Учащиеся часто не понимают, что при решении почти всех основных задач на построение с помощью циркуля и линейки, предусмотренных школьной программой, используется деятельность с аналогичным содержанием, но с измененной последовательностью операций. Сравним, например, последовательность операций, выполненных учениками при решении следующих трех задач **(рис. 4)**:

Задача I: деление отрезка пополам.

Задача II: построение перпендикуляра к прямой, проходящего через точку, данную на этой прямой.

Задача III: построение перпендикуляра к прямой, проходящего через точку, данную вне этой прямой.

Из таблицы (рис. 4) видно, что первая операция в задачах II и III необходима для выделения определенного отрезка на данной прямой a: во второй задаче путем откладывания от данной точки O равных отрезков OA и OC, в задаче III — через построение окружности с центром в данной точке B, пересекающей прямую a в двух точках A и C. Далее задачи II и III фактически свелись к задаче I. Поэтому для этих задач вторая операция совпадает с первой операцией задачи I, когда строят две окружности с центрами в точках A и C, радиусом AC и находят точки пересечения B и D этих окружностей. Третья

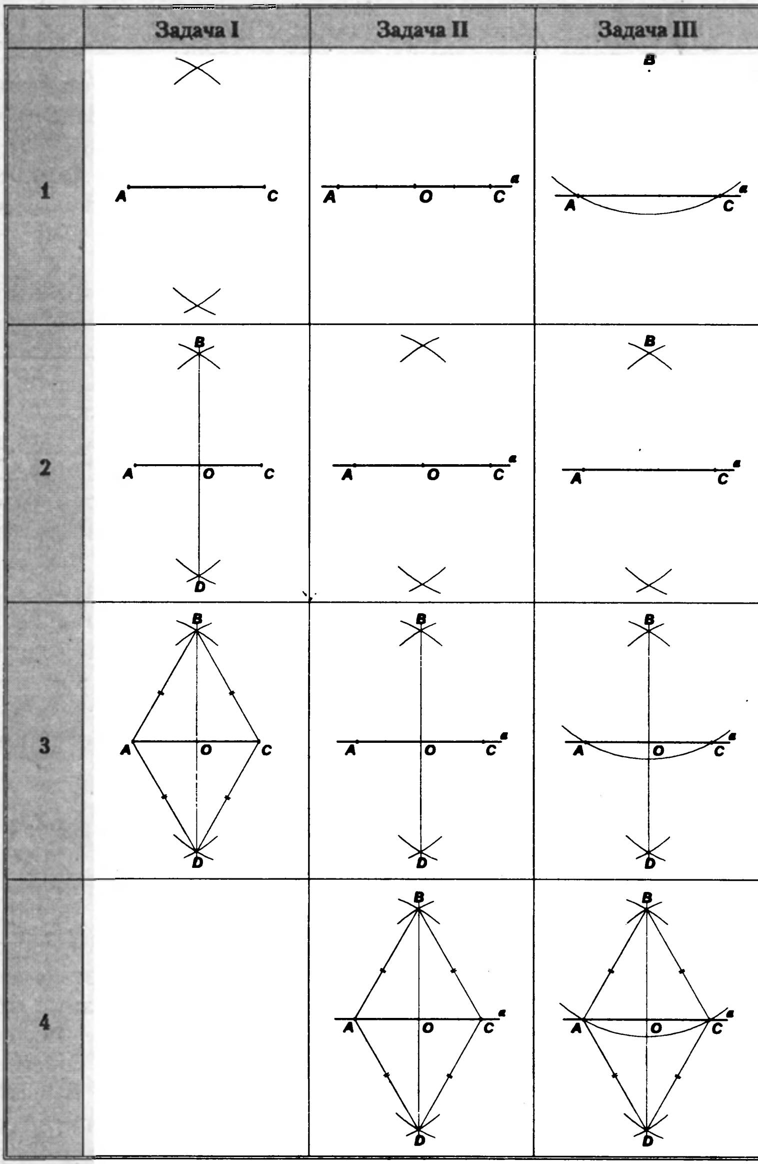


Рис. 4

операция задач II и III аналогична второй операции задачи I, когда проводят прямую *ВД*, пересекающую данную прямую (данный отрезок) в точке *О*. Операции три для задачи I и четыре для задач II и III идентичны и необходимы для доказательства правомерности выбранного метода построения.

В сложившейся практике обучения каждая из указанных выше задач воспринимается учениками как самостоятельная.

Приведем еще один пример: научившись строить биссектрису данного угла и переходя к задаче построения перпендикуляра к прямой, проходящего через точку, данную на прямой, учащиеся рассматривают вторую задачу как новую, не замечая, что она сводится к первой, так как перпендикуляр в этой задаче можно рассматривать как биссектрису развернутого угла с вершиной в данной точке прямой.

Хотя многие методисты и учителя отмечают, что самым важным и трудным этапом решения является анализ, учащимся не раскрывается полная система ориентиров, реализация которых помогла бы им найти «ключ» к решению конкретной задачи, в чем и состоит цель этого этапа. Анализ рекомендуется начинать с того, что ученик делает рисунок согласно условию задачи, а затем по этому рисунку ищет путь решения задачи. Однако от ученика остается скрытым, почему он должен делать именно такой рисунок, на что он должен ориентироваться, когда при построении той или иной фигуры строит те точки, которые указаны в учебнике, и т. д. Другими словами, анализа как нахождения элементов искомой фигуры по заданным элементам данной фигуры не осуществляется. Как уже было отмечено выше, в большинстве учебников при решении основных задач на построение с помощью циркуля и линейки (их часто называют простейшими задачами) авторы вообще не рекомендуют проводить анализ. Вот, например, как излагается способ решения первой из задач на построение: «на данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному» (1).

«Изобразим фигуры, данные в условии задачи: луч *ОС* и отрезок *АВ* **(рис. 5, а)**. Затем циркулем построим окружность радиусом *АВ* с центром *О* **(рис. 5, б)**. Эта окружность пересечет луч *ОС* в некоторой точке *Д*. Отрезок *ОД* — искомый» (1, стр. 43).

Ученику таким образом показывается, что нужно построить (конечный результат действия) и ряд последовательных

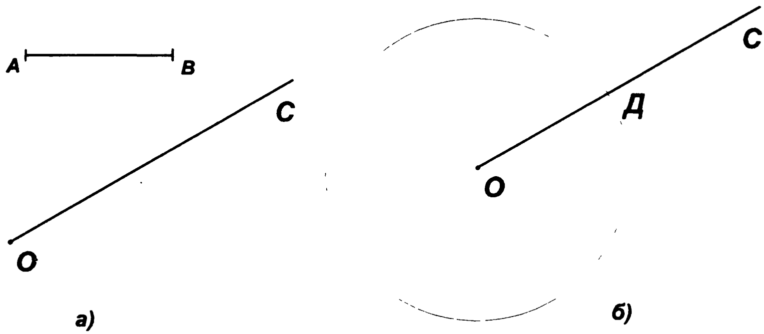


Рис. 5

операций, с помощью которых этот результат получается, т. е. только исполнительная часть действия. Ученику остается только запомнить эту последовательность. Потом ученик воспроизводит предлагаемый способ, но не может ответить на вопросы: сколько точек необходимо построить, чтобы воссоздать данный отрезок; почему для построения отрезка, равного данному, достаточно построить две точки — его граничные точки; почему для нахождения расположения одной из точек строим окружность, радиус которой равен данному отрезку, и т. п. Это свидетельствует о том, что воспроизведение исполнительных операций не сопровождается осознанием оснований для выполнения этих действий.

Не отрицая необходимости и значимости анализа, исследования и доказательства как этапов решения задач на построение, мы попытались выделить общую ориентировочную основу, помогающую ученику разумно и осознанно проводить такой теоретический анализ и исследование задачи, которые открывали бы путь к самостоятельному нахождению рационального способа решения ее в противовес заучиванию и воспроизведению готового, данного в учебнике.

Анализ показал, что все задачи на построение с помощью циркуля и линейки сводятся в конечном счете к построению ограниченного числа фигур: точки, отрезка и окружности. В свою очередь, для построения отрезка и окружности достаточно выделить точки, их определяющие. С другой стороны, построение фигуры, обладающей заданными свойствами (это является требованием любой задачи на построение), также сводится к построению определяющих ее точек (характеристических точек этой фигуры). При этом для всех задач сам способ построения точки как геометрической фигуры идентичен: необходимо найти пересечение двух линий — прямой и прямой, прямой и окружности, двух окружностей. Ученик должен понимать, какие точки и сколько необходимо выделить для искомой фигуры, чтобы потом, построив эти точки, можно было воссоздать требуемую фигуру в целом.

Нам представляется, что важным моментом нахождения способа решения задачи на построение является обязательное выполнение анализа задачи, независимо от степени ее сложности. При этом форма проведения анализа может быть различной: теоретическое рассуждение в форме устной или письменной речи или рассуждение, сопровождаемое чертежом. Основное назначение анализа — выявить, «открыть» те знания и умения, которые могут быть в явном виде не заданы в условии задачи, но которые необходимы для осознанной разработки плана построения.

По нашему мнению, анализ должен сочетаться с исследованием, включающим в себя ответы на следующие вопросы:

1) всегда ли возможно построение при данных условиях,

2) является ли данное решение единственным или возможно несколько решений,

3) какие из ранее изученных задач на построение могут быть использованы в качестве промежуточных построений,

4) к какой из ранее изученных задач на построение может быть сведена данная задача.

Включение в исследование, кроме пунктов 1 и 2, которые традиционно составляют содержание этого этапа решения задач на построение, пунктов 3 и 4 будет способствовать пониманию эквивалентности ряда задач, обеспечению преемственности изучаемых знаний, повышению качества их усвоения, а главное, разумному решению задачи. Так, например, необходимо обратить внимание учащихся на эквивалентность таких задач, как «разделить данный угол пополам» и «построить биссектрису данного угла»; «построить перпендикуляр к данной прямой, проходящий через точку, заданную на этой прямой» и «построить биссектрису развернутого угла с вершиной в данной точке»; «разделить отрезок пополам» и «построить серединный перпендикуляр к данному отрезку» и т. д.

В сложившейся практике обучения исследование если и рекомендуется проводить, то после уже выполненного построения и причем по отношению не ко всем задачам. Мы считаем, что исследование, как и анализ, должны быть одними из начальных неотъемлемых компонентов деятельности по решению задач на построение.

Учитывая все вышесказанное было выделено содержание общего приема решения задач на построение с помощью циркуля и линейки, включающее следующие компоненты:

1. Выделить геометрические фигуры, данные в условии задачи, и отношения между ними.

2. Выделить геометрическую фигуру, которую необходимо построить (искомая фигура).

3. Выделить из условия задачи, какими свойствами должна обладать искомая фигура.

4. Дать определение искомой фигуры (назвать необходимые и достаточные признаки соответствующего понятия).

5. Выделить точки, необходимые и достаточные для построения искомой фигуры (определяющие точки).

6. Перечислить знания, с помощью которых можно обеспечить требуемые условием задачи свойства искомой фигуры.

7. Установить достаточность или недостаточность данных условий для построения искомой фигуры.

8. Установить, за какими знаниями могут быть «скрыты» те, которые необходимы для построения искомой фигуры.

9. Выбрать знания, которые будут использованы для построения искомой фигуры и объяснить правомерность такого выбора.

10. Установить возможность построения искомой фигуры по данным условиям задачи:

а) всегда ли возможно построение при данных условиях,

б) является ли выбранный способ решения задачи единственным или возможно несколько решений,

в) какие из ранее известных задач на построение могут быть использованы в качестве промежуточных построений,

г) к какой из ранее изученных задач на построение может быть сведена данная задача.

11. Выбрать способ построения каждой из определяющих точек искомой фигуры: пересечение или двух прямых, или прямой и окружности, или двух окружностей.

12. Построить каждую из определяющих точек искомой фигуры и по ним фигуру в целом.

13. Доказать, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

Предлагаемый прием включает общие, базовые действия. Естественно, что при решении конкретных задач некоторые из этих компонентов будут опускаться. Так, например, решение первых задач на построение не требует исследования на возможность сведения их к ранее изученным. Не всегда необходим анализ условия задачи с целью выявления «скрытых» за ним нужных знаний и умений — заданной в явном виде информации вполне достаточно для составления плана решения и его реализации.

Покажем реализацию общего приема на примере конкретных задач. Для сравнения приведем изложение соответствующего материала в одном из принятых в школе учебников геометрии (1). В качестве примера рассмотрим первую из задач на построение, с которой знакомятся учащиеся средней школы: «на данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному». Содержание способа выполнения этого построения, предлагаемое в учебнике, приведено выше (см. стр. 215). Опишем, как учитель может организовать работу учащихся по решению указанной задачи, используя предлагаемый нами общий прием.

1. Выделить геометрические фигуры, данные в условии задачи, и отношения между ними.

Учитель: Что дано в условии задачи?

Ученик: Две геометрические фигуры: отрезок и луч.

Учитель: Указаны ли в условии задачи длина отрезка, расположение отрезка и луча?

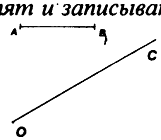
Ученик: Нет, не указаны.

Учитель: Как по-вашему, можем ли мы взять отрезок произвольной длины и расположить отрезок и луч на плоскости листа бумаги также произвольно?

Ученик: Да, можем.

Учитель: Запишем, что дано в данной задаче. *(Учитель на доске, а ученики в тетрадях чертят и записывают).*

Дано:
отрезок AB
луч OC



2. Выделить геометрическую фигуру, которую необходимо построить (искомая фигура).

Учитель: Какую фигуру требуется построить?
Ученик: Отрезок.
(Учитель сообщает, что фигуру, которую требуется построить, называют «искомой» фигурой).

3. Выделить из условия задачи, какими свойствами должна обладать искомая фигура.

Учитель: Какими свойствами должен обладать отрезок, который надо построить?
Ученик: Этот отрезок должен обладать двумя свойствами: 1) быть равным данному отрезку *АВ* и 2) отрезок должен быть отложен от начала *О* данного луча *ОС*.
Учитель: Правильно, теперь можем записать, что требуется построить. *(Учитель на доске, а ученики в тетрадях записывают).*

Построить: отрезок *ОД* так, чтобы
1) *ОД* = *АВ*,
2) точки *О* и *А* совпадали,
3) точка *Д* находилась на луче *ОС*.

4. Дать определение искомой фигуры (назвать необходимые и достаточные признаки соответствующего понятия).

Учитель: Какими существенными свойствами должна обладать геометрическая фигура, чтобы ее можно было назвать отрезком?
Ученик: Эта фигура должна обладать двумя существенными свойствами: 1) быть частью прямой и 2) эта часть прямой должна быть ограничена с двух сторон, то есть иметь две граничные точки.
Учитель: Правильно.

5. Выделить точки, необходимые и достаточные для построения искомой фигуры (определяющие точки).

Учитель: Сколько точек и какие надо построить, чтобы по ним можно было построить требуемый отрезок?
Ученик: Для построения данного отрезка достаточно построить две точки — его граничные точки, а потом соединить их прямой линией.
Учитель: Почему достаточно только этих точек?
Ученик: Отрезок — это часть прямой линии. Для построения прямой надо построить любые две точки и через них провести линию, т. к. через две точки проходит одна и только одна прямая. Значит, и для отрезка достаточно двух точек, но эти точки будут не любые, а определенные — начало и конец отрезка.

6. Перечислить знания, с помощью которых можно обеспечить требуемые условием задачи свойства искомой фигуры.

7. Установить достаточность или недостаточность данных условия для построения искомой фигуры (в данной задаче эти два компонента целесообразнее объединить).

Учитель: Имеются ли в условии задачи все данные, необходимые для построения отрезка, равного данному?
Ученик: Часть прямой дана, потому что дан луч *OC*, который сам является частью прямой, имеющей одну граничную точку *O*. Также можно построить одну из точек искомого отрезка — это будет точка, которая совпадает с началом луча *O*, так как по условию отрезок надо откладывать от начала луча. Осталось найти способ построения второй граничной точки искомого отрезка.

8. Установить, за какими знаниями могут быть «скрыты» те, которые необходимы для построения искомого отрезка.

Учитель: Какое условие задачи «помогает» найти способ построения второй граничной точки?
Ученик: Условие, что искомый отрезок должен быть равен данному.

9. Выбрать знания, которые будут использованы для построения искомой фигуры и объяснить правомерность такого выбора.

Учитель: Что означает, что один отрезок равен другому?
Ученик: Это означает, что эти отрезки имеют равные длины, что они совмещаются при наложении...
Учитель: Как проверить, что два отрезка имеют равные длины; с помощью какого инструмента мы можем в этом убедиться?
Ученик: С помощью циркуля.
Учитель: Почему мы не можем использовать линейку?
Ученик: Как Вы уже нам объясняли, линейка может служить для выполнения разных задач. Например, с помощью линейки можно проводить прямые и ломаные линии, строить треугольники, четырехугольники и другие геометрические фигуры, состоящие из отрезков. С другой стороны, если на линейке нанесены меры длины, то она может служить для измерения отрезков. В задачах на построение мы используем линейку без масштабных делений, то есть с помощью такой линейки мы можем только проводить прямые линии, но не измерять. Поэтому для построения равных отрезков надо использовать циркуль.
Учитель: Почему именно циркуль?
Ученик: Потому что с помощью циркуля мы можем построить окружность или ее часть — дугу.

Учитель: Какое свойство окружности помогает найти положение второй граничной точки искомого отрезка?

Ученик: Только у этой фигуры все точки находятся на одинаковом расстоянии от центра. Поэтому, если мы пересечем окружностью с центром в точке O и радиусом AB луч OC, то получим вторую граничную точку.

Учитель: Как вы считаете, какую фигуру — окружность или дугу лучше использовать в данной задаче при построении равных отрезков?

Ученик: Поскольку луч в данной задаче выбран произвольно, то он может занимать различное положение: быть направлен вверх или вниз, вправо или влево. Вот почему в этой задаче для выделения равных отрезков, независимо от положения луча, следует проводить окружность, чтобы учесть всевозможные положениия его. Если бы положение луча было строго определено, то достаточно было бы провести часть этой окружности — дугу, пересекающуюся с данным лучом. Конечно, и здесь мы могли бы построить окружность, но строим дугу с единственной целью — чтобы не загромождать чертеж.

10. Установить возможность построения искомой фигуры по данным условиям задачи.

Учитель: Всегда ли можно построить отрезок, равный данному, исходя из условия этой задачи?

Ученик: Построение всегда возможно.

11. Выбрать способ построения каждой из определяющих точек искомой фигуры.

Учитель: Итак, какой из известных вам способов построения точки — пересечение прямой и прямой, прямой и окружности, двух окружностей — выбирается для построения второй граничной точки искомого отрезка?

Ученик: Вторую граничную точку находим путем пересечения луча OC (прямой) окружностью.

Учитель: Правильно. Выполните и опишите построение.

12. Построить каждую из определяющих точек искомой фигуры и по ним фигуру в целом.

Ученик: 1) Раствором циркуля измеряем длину данного отрезка AB. Ножки циркуля будут как бы «границами» искомого отрезка. 2) Одну ножку циркуля ставим в точку O, потому что по условию задачи искомый отрезок должен откладываться от начала данного луча OC. 3) Проводим окружность с центром в точке O и радиусом, равным длине данного отрезка AB. 4) Точку пересечения окружности и луча обозначим $Д$. Отрезок $OД$ будет искомым.

13. Доказать, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

Учитель: Почему именно отрезок *ОД* будет той геометрической фигурой, которую необходимо было построить?

Ученик: Фигура *ОД* будет искомым отрезком потому, что

а) это часть прямой и двумя граничными точками *О* и *Д*,

б) длина отрезка *ОД* равна длине данного отрезка *АВ*.

Учитель: Правильно, решение задачи закончено.

Приведем еще один пример решения задачи на построение с помощью общего приема.

ЗАДАЧА: Построить биссектрису данного угла.

В учебнике геометрии решение данной задачи излагается в следующем виде (1, стр. 44-45).

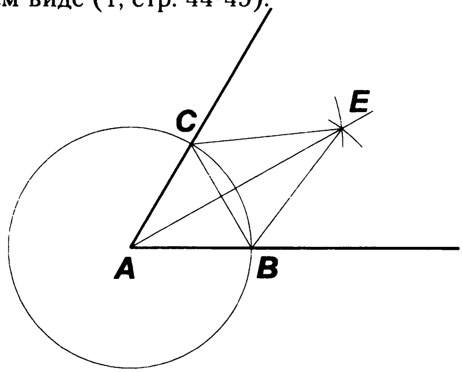


Рис. 6

«Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине *А* данного угла. Она пересечет стороны угла в точках *В* и *С* **(рис. 6)**. Затем проведем две окружности одинакового радиуса *ВС* с центром в точках *В* и *С* (на рисунке изображены лишь части этих окружностей). Они пересекутся в двух точках. Ту из этих точек, которая лежит внутри угла *ВАС*, обозначим буквой *Е*. Докажем, что луч *АЕ* является биссектрисой данного угла.

Рассмотрим треугольники *АСЕ* и *АВЕ*. Они равны по трем сторонам. В самом деле, *АЕ* — общая сторона; *АС* и *АВ* равны, как радиусы одной и той же окружности; *СЕ* = *ВЕ* по построению. Из равенства треугольников *АСЕ* и *АВЕ* следует, что $\angle CAE = \angle BAE$, т. е. луч *АЕ* — биссектриса данного угла».

Не акцентируя внимания на анализе предлагаемого пути обучения решению рассматриваемой задачи, покажем, как выглядит ход ее решения при использовании общего приема (будем указывать лишь номера компонентов приема и их реализацию).

1. Дан угол *BAC*

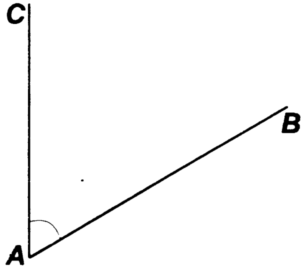


Рис. 7

2. Надо построить биссектрису.

3. Биссектриса **данного** угла ВАС.

4. Биссектриса — это

а) луч, исходящий из вершины угла, и

б) делящий его на два равных угла.

5. Биссектриса как геометрическая фигура имеет две определяющие точки: одна — вершина угла, другая — любая точка внутри угла на луче, выходящем из вершины угла.

6. Из определения биссектрисы следует, что для ее построения необходимо построить два равных угла, имеющих общую вершину и общую сторону.

1) Два угла называются равными, если их можно совместить наложением.

2) В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

3) Признаки равенства треугольников:

а) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

б) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

в) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

7. Недостаточно, т. к. в явном виде не дается информация, необходимая для выполнения построения.

8; 9. Для построения будем использовать знания 6.2 и 6.3 в, т. к. при сопоставлении с условием задачи и свойствами той фигуры, которую необходимо построить, выделенные знания подсказывают путь решения через построение равных треугольников по трем сторонам с одной общей стороной и общей вершиной.

Выбираем третий признак равенства треугольников потому, что его реализация предусматривает построение соответственно равных отрезков. Способ построения равных отрезков был изучен ранее.

10. Построение возможно по данным условия задачи. При решении данной задачи могут быть использованы знания о построении равных отрезков.

11. Для построения определяющих точек как геометрических фигур применимы способы пересечения прямой и окружности и двух окружностей.

12. Для построения двух равных углов с общей вершиной и общей стороной надо построить два равных треугольника с общей стороной и общей вершиной, в состав которых будут

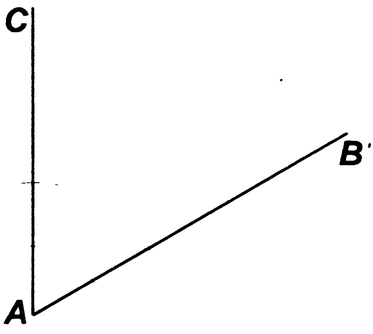


Рис. 8

входить эти углы. Поскольку величины сторон этих треугольников нам не даны, их можно выбирать произвольно. Построение будем выполнять следующим образом:

1) На сторонах AC и AB данного угла BAC от вершины A откладываем равные отрезки AM и AE. Для этого проводим окружность произвольного радиуса с центром в точке A **(рис. 8)**.

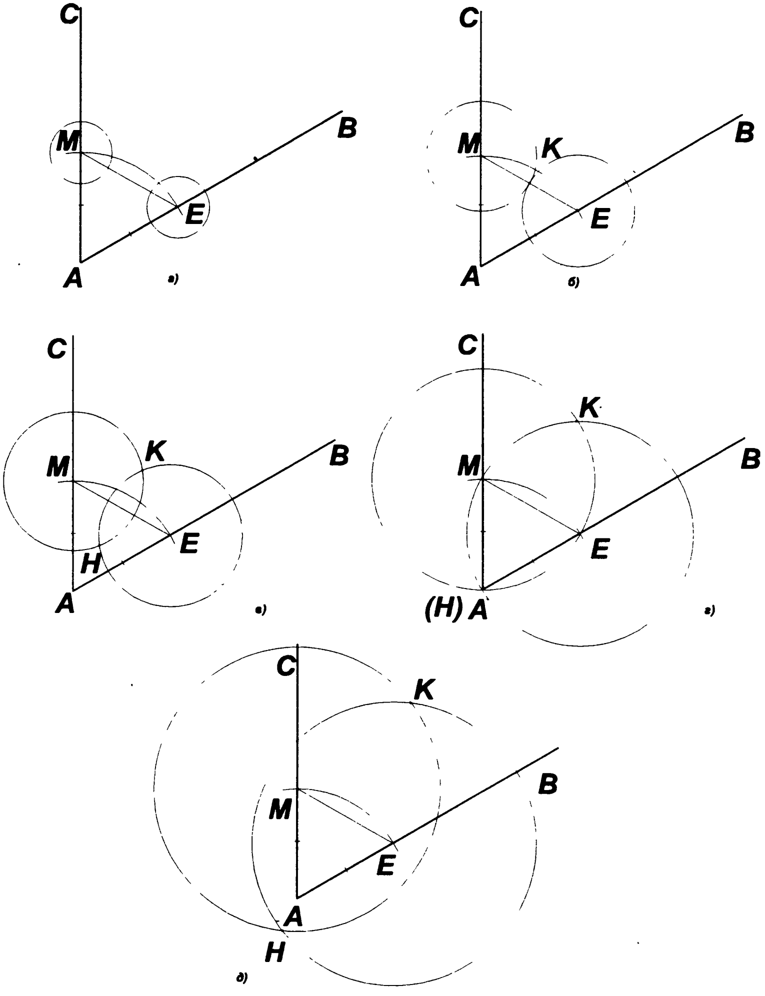


Рис. 9

Таким образом получили по одной паре соответственно равных сторон строящихся треугольников и тем самым определили положение двух вершин каждого из треугольников — *A* и *M*, *A* и *E*.

2) Для получения еще одной пары соответственно равных сторон и тем самым определения положения третьей вершины треугольников должны отложить равные отрезки от точек *M* и *E*.

Для этого с центром в точках *M* и *E* проводим окружности одинакового радиуса. Установление положения третьей вершины строящихся треугольников зависит от взаимного расположения проводимых окружностей, которое определяется выбранной величиной радиуса.

Если радиусы будут меньше половины отрезка *ME*, то окружности не пересекутся друг с другом и построение невозможно **(рис. 9, а)**.

Если радиус будет равен половине отрезка *ME*, то две окружности будут касаться **(рис. 9, б)**. Точка касания *K* этих окружностей будет третьей вершиной строящихся треугольников.

Если радиус окружностей будет больше половины отрезка *ME*, но меньше *AM* = *AE*, то окружности будут пересекаться в двух точках *K* и *H*, лежащих внутри угла *CAB* **(рис. 9, в)**. За третью вершину строящихся треугольников можно выбрать любую из этих точек. Решение задачи возможно.

Если радиус окружностей будет равен *AM* = *AE*, то окружности также будут пересекаться в двух точках *K* и *H*, при этом точка *K* лежит внутри угла *CAB*, а точка *H* совпадает с вершиной *A* угла *CAB* **(рис. 9, г)**. Третьей вершиной треугольников будет точка К. Решение задачи возможно.

И, наконец, если радиус окружностей будет больше *AM* = *AE*, то окружности будут пересекаться в двух точках *K* и *H*, при этом точка *K* лежит внутри угла *CAB*, а точка *H* — вне угла *CAB* **(рис. 9, д)**. В качестве третьей вершины строящихся треугольников берем точку *K*, т. к. по определению биссектриса угла должна лежать внутри данного угла. Решение задачи возможно.

Таким образом, для построения второй пары соответственно равных сторон треугольников и определения положения их третьей вершины возможно использование различных вариантов. Выбираем последний вариант **(рис. 9, д)**.

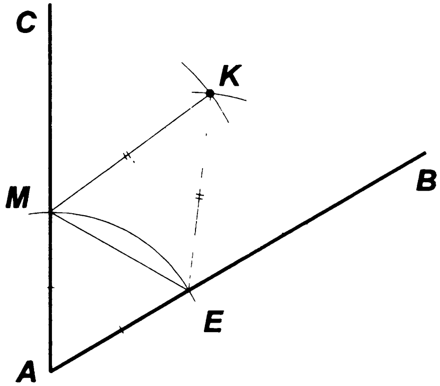


Рис. 10

3) В соответствии с выбранным вариантом строим *MK* = *EK* **(рис. 10)**.

4) Из вершины *A* через точку *K* проводим луч *AK* **(рис. 11)**.

Таким образом, построили два равных треугольника *MAK* и *KAE* с общей вершиной *A* и общей стороной *AK*. Следовательно, ∠MAK = ∠*KAE* как углы, лежащие против равных сторон. Значит, *AK* – биссектриса угла *CAB*.

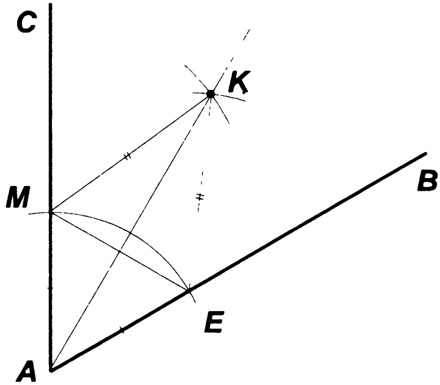


Рис. 11

13. Построенная фигура *AK* будет искомой фигурой – биссектрисой данного угла *CAB*, так как а) это луч *AK*, выходящий из вершины угла *CAB*, и б) этот луч делит угол *CAB* на два равных угла.

Усвоение умения строить биссектрису данного угла открывает учащимся возможность для самостоятельного решения следующих задач на построение: построить прямой угол; в данной точке прямой провести перпендикуляр к ней. Действительно, способ построения биссектрисы угла не зависит от величины этого угла, от годится для любых видов углов, в том числе и развернутого. С другой стороны, перпендикуляром к прямой называется луч, проведенный из точки на прямой и образующий с ней прямые углы, т. е. углы, равные половине развернутого угла.

В связи с этим было бы целесообразно при решении задачи на построение биссектрисы данного угла предлагать учащимся углы различной величины. Это способствовало бы обобщению усваиваемого метода решения, установлению связей между различными задачами на построение, по своей формулировке не совпадающих с исходной задачей, но имеющих один и тот же путь решения.

Таким образом, как видно из приведенных выше примеров, использование общего приема решения задач на построение позволяет научить учащихся осуществлять анализ условия задачи, выявлять знания, необходимые для построения искомой фигуры, выбирать рациональный способ построения каждой определяющей точки фигуры и по ним фигуры в целом, доказывать правомерность предлагаемого пути решения задачи.

На примере нескольких задач учитель может разъяснить учащимся содержание общего приема, назначение каждого из компонентов и процедуру использования этого приема. Затем организовать усвоение содержания этого приема в соответствии с принципами деятельностной теории учения (4, 14).

Овладение общим приемом решения задач на построение будет способствовать разумному, сознательному и самостоятельному нахождению учащимися способа построения требуемой геометрической фигуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г., Юдина И. И. Геометрия: Учебник для 7-9 кл. сред. шк.—М.: Просвещение, 1990.
2. Болтянский В. Г. Анализ — поиск решения задачи. // Математика в школе. 1974. № 1.
3. Боженкова Л. И. Алгоритмический подход к задачам на построение методом подобия. // Математика в школе. 1991. № 2.

4. Гальперин П. Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка. М.: Изд. Московского ун-та, 1985.
5. Геометрические построения: Методическая разработка.— М.: 1987.
6. Епишева О. Б., Крупич В. И. Учить школьников учиться математике.— М.: Просвещение, 1990.
7. Крамор В. С. О совершенствовании методов обучения математике.— М.: Просвещение, 1989.
8. Мехтиев М. Г. Задачи на построение циркулем и линейкой. Часть 1.— Махачкала.: Дагучпедгиз, 1990.
9. Погорелов А. В. Геометрия: Учебник для 7-11 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1990.
10. Построение и преобразования в курсе геометрии средней школы: Методическое пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов.— Сыктывкар.: Коми ГПИ, 1992.
11. Программа средней общеобразовательной школы. Математика.— М.: Просвещение, 1991.
12. Рыжик В. И. Система задач школьного курса геометрии. Дис... докт. пед. наук.— Санкт-Петербург, 1993.
13. Старовойтова Т. С., Шляхтер Г. Е. Готовым знаниям к применению.//Математика в школе. 1990. № 3.
14. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний.— М.: Изд-во Московского ун-та. 1984.
15. Черных Л. А. Использование классной доски на уроках геометрии. // Математика в школе.— М.: 1989. №2.
16. Чистякова Л. С. Приемы формирования практических умений и навыков при обучении геометрии. // Математика в школе.— М.: 1987. № 4.

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК