Российская Академия Наук
*Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова*

М.В. ГУБКО, Д.А. НОВИКОВ

ТЕОРИЯ ИГР В УПРАВЛЕНИИ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

(2-е издание, переработанное и дополненное)

Рекомендовано в качестве учебного пособия Методическим советом ФРТК Московского физико-технического института по специальности № 010300 «Прикладные математика и физика», специализация «Прикладные информационные технологии в управлении и бизнесе»

Москва – 2005

УДК 519
ББК 22.18
Г 93

Г 93 **Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами**. Издание 2, М.: 2005.

В настоящем учебном пособии излагаются основные понятия и результаты теории игр применительно к задачам управления организационными системами. В том числе, рассматриваются: модель управления в организационных системах, игры с полной и неполной информированностью, кооперативные, иерархические, рефлексивные игры, а также игры формирования сетей.

Учебное пособие предназначено для студентов ВУЗов, аспирантов и специалистов в области управления социально-экономическими системами.

*Рецензенты: д.т.н., проф. В.Н. Бурков,
д.т.н., проф. А.В. Щепкин*

УДК 519
ББК 22.18
Г 93

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная книга посвящена описанию подходов и результатов *теории игр*[1] к постановке и решению задач управления организационными системами. Теория игр – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*[2]), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [19].

Среди литературы по теории игр можно выделить: монографии [1, 3, 5, 18, 19, 21, 20, 23, 26, 33, 35, 41, 42, 48, 62, 63, 74, 81, 82, 87 и др.], содержащие изложение фундаментальных результатов; малочисленные, к сожалению, учебные пособия [20, 24, 35, 37, 47, 46, 62, 65, 74, 79, 82] и сборники задач и упражнений [30, 45]. Основной акцент при описании прикладных результатов обычно делается на применении теоретико-игровых моделей в социальных, экономических системах и в военном деле. Наряду с этим, аппарат теории игр широко используют многочисленные математические модели управления *организационными системами* [9-14, 21, 29, 37, 49-58, 79, 80, 83, 85], многие из которых изучаются в ВУЗах при подготовке специалистов по управлению. Конечно, в рамках учебного пособия невозможно, да и нецелесообразно, привести детальную картину современного состояния теория игр (так, ниже, например, практически не рассматриваются дифференциальные [1, 28, 32, 33] и повторяющиеся [21, 33, 52, 58, 74, 82] игры). Такая задача и не ставится. Цель данной книги – дать общее представление о подходах и результатах теории игр, которые используются в моделях управления именно организационными системами. Многочисленные ссылки дают возможность

[1] *Под* <u>*игрой*</u> *будем понимать взаимодействие сторон, интересы которых не совпадают. Возможны и другие определения игры – см.* [*5, 6, 19, 20, 21, 48, 62, 65*]. *В частности, в* [*67, С.475*] *приводится следующее определение: «Игра – вид непродуктивной деятельности, мотив которой заключается не в ее результатах, а в самом процессе».*

[2] *Понятия, вводимые впервые, выделены курсивом. Основные определения выделены рубленым шрифтом.*

заинтересованному читателю получить более полное представление о вопросах, не рассмотренных подробно.

Изложение имеет следующую структуру. В первой и второй главах вводится *модель принятия управленческих решений*, выявляется роль и место теории игр в формулировке и решении задач управления организационными системами, приводится *классификация игр*, а также примеры игровых моделей и задач управления.

В третьей главе рассматриваются некооперативные *игры с полной информированностью* игроков о параметрах игры. Рассматриваются наиболее популярные теоретико-игровые концепции решения, проводится их сравнительный анализ.

Четвертая глава вкратце рассказывает о более сложных моделях игр – *играх с неполной информированностью*, в которых игроки неточно знают предпочтения своих партнеров. Для этих моделей приводятся две концепции решения – принцип максимального гарантированного результата (МГР) и равновесие Байеса.

Пятая глава рассматривает *кооперативные игры* и посвящена исследованию сотрудничества игроков в процессе игрового конфликта. Вводится модель игры в форме характеристической функции, и на этой модели рассматриваются различные концепции решения – *С*-ядро, НМ-решения и некоторые другие.

Заключительная шестая глава посвящена *иерархическим играм* (играм Ю.Б. Гермейера). Рассматриваемая в ней проблематика имеет самое непосредственное отношение к задачам управления в организационных системах.

Как свидетельствует преподавательский опыт авторов, материал настоящего учебного пособия может служить либо основой семестрового курса лекций, либо, совместно с моделями управления, излагаемыми в учебном пособии [55], содержанием годового курса[3].

[3] *В этом случае слушателям можно рекомендовать использовать параллельно пособия по приложениям теории графов и теории нечетких множеств в управлении организационными системами* [*12*].

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность рецензентам д.т.н. В.Н. Буркову и д.т.н. А.В. Щепкину, а также к.ф-м.н. Р.П. Агаеву, д.т.н. Ф.Т. Алескерову, к.ф-м.н. М.А. Горелову, М.Б. Искакову, А.П. Караваеву, Н.А. Коргину, С.Н. Петракову, к.ф.-м.н. А.Д. Халезову, к.ф.-м.н. А.Г. Чхартишвили, Т.Е. Шохиной за внимание к настоящей работе и конструктивные замечания и предложения.

ГЛАВА 1. УПРАВЛЕНЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В настоящей главе рассматривается модель принятия решений участниками организационных систем (модели индивидуального и коллективного поведения), в рамках которой определяется понятие управления и выделяются его основные типы; описывается технология управления, что позволяет выявить роль и место в ней теории игр; приводится ряд примеров теоретико-игровых задач управления.

1.1. Модель принятия решений

Рассмотрим *организационную систему* (ОС), состоящую из двух участников – *центра* и *агента*[4], обладающих свойством *активности*, то есть собственными предпочтениями и способностью самостоятельно предпринимать некоторые действия. Системы, элементы которых активны, получили название *активных систем* (АС) [9, 13, 14, 55].

[4] *В соответствии с подходами теории иерархических игр* [*21*] *и теории активных систем* [*14, 55*] *центром будем называть игрока, делающего ход первым* (*то есть метаигрока, обладающего правом устанавливать правила игры для других игроков*)*, а агентом – игрока, делающего ход вторым при известном ему выборе первого игрока. В моделях управления социально-экономическими системами центр играет роль управляющего органа, агент – роль управляемого субъекта, причем первоначально распределение «ролей» может не быть фиксированным* (*см. модели сетевого взаимодействия в* [*51, 57*])*.*

Опишем модель принятия решений агентом. Для того чтобы определить, как задаются предпочтения агента (и центра), введем следующее описание взаимодействия агента с его *обстановкой*, в которую могут входить другие агенты, управляющие органы и прочие объекты и субъекты (как принадлежащие рассматриваемой ОС, так и являющиеся элементами внешней среды – четкое выделение границ ОС не принципиально – см. ниже).

Пусть агент способен выбирать *действия* (стратегии, состояния и т.д.) из множества A допустимых действий данного агента. Действие будем обозначать y ($y \in A$). В результате выбора действия $y \in A$ под влиянием обстановки реализуется *результат деятельности* агента, который будем обозначать $z \in A_0$, где A_0 – множество возможных результатов деятельности. Возможное несовпадение действия агента и результата его деятельности может быть обусловлено влиянием обстановки – внешней среды, действий других участников ОС и т.д.

Связь между действием агента $y \in A$ и результатом $z \in A_0$ его деятельности может иметь сложную природу и описываться распределениями вероятности, нечеткими информационными функциями и др. (см. ниже).

Будем считать, что агент обладает *предпочтениями* на множестве результатов $z \in A_0$, то есть имеет возможность сравнивать различные результаты деятельности. Предпочтения агента обозначим R_{A_0}, множество возможных предпочтений – $\Re_{A_0}$.

Часто предпочтения из множества $\Re_{A_0}$ можно параметризовать переменной r, принимающей значения из подмножества Ω действительной оси, $\Omega \subseteq \Re^1$. То есть каждому возможному предпочтению агента $R_{A_0} \in \Re_{A_0}$ ставится во взаимно однозначное соответствие значение параметра $r \in \Omega$, называемого *типом* агента.

При выборе действия $y \in A$ агент руководствуется своими предпочтениями и тем, как выбираемое действие влияет на результат деятельности $z \in A_0$, то есть некоторым законом $W_I(\cdot)$ изменения результата деятельности в зависимости от действия и обстановки, информация о которой отражена переменной I. Выбор действия агентом определяется *правилом индивидуального рационального выбора* $P^{W_I}(\Re_{A_0}, A, I) \subseteq A$, которое выделяет множество наиболее предпочтительных с точки зрения агента действий.

Правило индивидуального рационального выбора определим следующим образом. Примем две гипотезы [49, 55]:

- *гипотеза рационального поведения*, заключающаяся в том, что агент с учетом всей имеющейся у него информации выбирает действия, которые приводят к наиболее предпочтительным результатам деятельности;
- *гипотеза детерминизма*, заключающаяся в том, что агент стремится устранить с учетом всей имеющейся у него информации существующую неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности (другими словами, окончательный критерий, которым руководствуется *лицо, принимающее решения* (ЛПР), не должен содержать неопределенных параметров).

Пояснений требуют два понятия – «использование всей имеющейся информации» и «наиболее предпочтительные результаты деятельности».

Начнем со второго понятия. Существуют несколько способов задания индивидуальных предпочтений. Наиболее распространены два из них – *отношения предпочтения* (бинарные [61, 66, 68, 69], метризованные [12, 55] и др.) и *функции полезности* (см. раздел 2.2) [48, 62, 68]. Бинарное отношение определяет для пары альтернатив, какая из них является «лучше», функция полезности каждой альтернативе ставит в соответствие действительное число – *полезность* этой альтернативы. В соответствии с гипотезой рационального поведения агент выбирает альтернативу из множества «лучших» альтернатив. В случае функций полезности это множество является множеством альтернатив, на которых достигается максимум функции полезности, в случае отношений предпочтения множество выбора определяется более сложным образом (см. [2, 69]), зависящим от свойств отношения предпочтения. Обсуждать подробно (за исключением раздела 2.2) взаимосвязь между различными представлениями индивидуальных предпочтений мы не будем, отослав заинтересованного читателя к [68].

Выше речь шла о «наилучшей» альтернативе. Но, если предпочтения агента определены на множестве результатов деятельности, зависящих, помимо его действий, от обстановки, то в общем случае не существует однозначной связи между действием агента и результатом его деятельности. Поэтому, принимая решение о выбираемом действии, агент должен предсказывать, к каким результатам могут привести те или иные действия (здесь существенна та информация, которую он имеет относительно обстановки) и анализировать предпочтительность соответствующих результатов деятельности. Процесс перехода от предпочтений R_{A_0} на множестве A_0 к *индуцированным предпочтениям*[5] R_A на множестве A, основывающийся на законе $W_I(\cdot)$, называется *устранением неопределенности*. В случае, когда предпочтения агента исходно описывались функцией полезности, его индуцированные предпочтения будут описываться *целевой функцией*, которая каждому действию агента ставит в соответствие некоторое действительное число (которое может интерпретироваться как его «выигрыш» от выбора этого действия).

При рассмотрении математических моделей принятия решений будем различать[6] (основание классификации – объекты и субъекты, относительно которых имеется недостаточная информация) *объективную неопределенность* (неполная информированность относительно параметров обстановки) и *субъективную не-*

---

[5] *Термин «индуцированные предпочтения» обусловлен тем, что предпочтения на множестве действий порождаются (индуцируются) предпочтениями на множестве результатов деятельности и законом взаимосвязи между действиями и результатами.*

[6] *В литературе описаны несколько классификаций неопределенностей [14, 34, 55, 61]. Например, в [61] предлагалось выделять «неопределенности природы» (факторы, которые неизвестны ЛПР, и/или исследователю операций, в том числе – относительно взаимосвязи между действиями и результатами деятельности), «неопределенности противника» (отражающие невозможность полного учета и предсказания действий других активных участников системы) и «неопределенности целей» (отражающие, в том числе, многокритериальность задач принятия решений).*

определенность (неполную информированность о принципах поведения других субъектов). Неопределенность относительно параметров, описывающих участников ОС, называется *внутренней неопределенностью*, относительно внешних параметров – *внешней неопределенностью*. Внешняя объективная неопределенность называется *неопределенностью природы* (или *неопределенностью состояния природы*), внутренняя субъективная неопределенность[7] называется *игровой неопределенностью*.

Ниже будет использоваться следующая модель предпочтений и информированности агента. Пусть предпочтения агента на множестве возможных результатов деятельности заданы его функцией полезности $v(\cdot)$, а результат деятельности $z \in A_0$ зависит от действия $y \in A$ и обстановки $\theta \in \Theta$ известным образом[8]: $z = w(y, \theta)$. Тогда закон $W_I(\cdot)$ определяется функцией[9] $w(\cdot)$, отражающей структуру пассивного *управляемого объекта*, и той информацией I, которой обладает агент на момент принятия решений о выбираемом действии.

Структура модели принятия решений агентом изображена на рисунке 1.

Детализируем, что понимается под информацией и каким образом устраняется неопределенность того или иного типа.

[7] *Внешняя субъективная неопределенность, как правило, не рассматривается, так как она может быть исключена путем включения субъектов, о принципах поведения которых у ЛПР имеется неполная информированность, в ОС.*

[8] *Использование такого описания не снижает общности, так как в многоэлементных системах партнеры каждого агента могут рассматриваться как внешняя для него среда, и их стратегии будут образовывать «состояние природы» (которое, правда, будет для каждого из агентов свое) – см. описание игровой неопределенности ниже.*

[9] *Отображение, связывающее действия и обстановку с результатами деятельности, может рассматриваться как «технология» функционирования некоторого объекта, управление которым осуществляет агент (см. рисунок 1).*

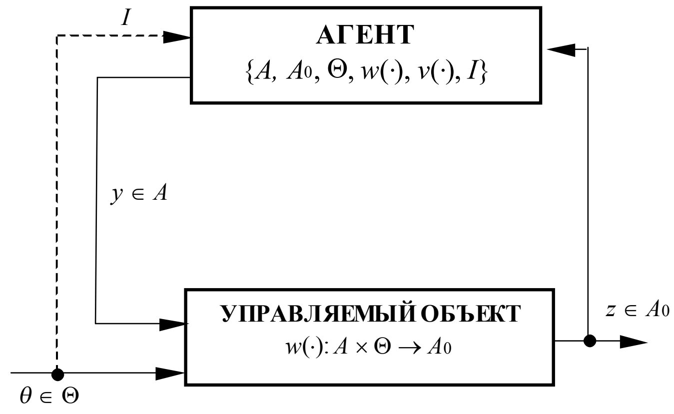

Рис. 1. Структура модели принятия решений агентом.

Рассмотрим сначала объективную неопределенность[10] (внешнюю или внутреннюю). Тогда существенной для агента является информация относительно обстановки. В качестве такой информации (различных *видов неопределенности*) могут выступать[11]:

- множество возможных значений обстановки $\Theta' \subseteq \Theta$. Соответствующая неопределенность называется *интервальной неопределенностью* и устраняется использованием *макси-*

[10] *Традиционно под «неопределенностью» понимают объективную неопределенность и большинство исследований ОС с неопределенностью учитывает именно ее [6, 21, 55]. В то же время, например, для динамических ОС характерна не только текущая объективная неопределенность, но и неопределенность будущего, которая заключается в том, что, принимая решение, ЛПР, с одной стороны, «влияет» на будущее (это влияние может проявляться в изменении множеств его будущих допустимых действий, выигрышей и т.д.), а, с другой стороны, возможности его анализа этого влияния ограничены незнанием будущих значений существенных параметров. Многочисленные примеры проявлений неопределенности будущего приведены в [58].*

[11] *Всюду, где встречаются максимумы и минимумы, предполагается, что они достигаются.*

мального гарантированного результата (МГР): $f(y) = \min_{\theta \in \Theta'} v(w(y,\theta))$, использованием *гипотезы благожелательности* (ГБ): $f(y) = \max_{\theta \in \Theta'} v(w(y,\theta))$, их комбинаций и т.д. [13, 18, 21];

- распределение вероятностей $p(\theta)$ на множестве Θ. Соответствующая неопределенность называется *вероятностной неопределенностью* и устраняется использованием ожидаемых значений (EUA – expected utility analysis): $f(y) = \int_{\theta \in \Theta'} v(w(y,\theta)) p(\theta) d\theta$, быть может, с учетом риска (дисперсии полезности) и моментов более высоких порядков;
- функция принадлежности $\mu_{\Theta'}(\theta)$ нечеткого множества $\Theta' \subseteq \Theta$. Соответствующая неопределенность называется *нечеткой неопределенностью* и обычно устраняется выделением множества максимально недоминируемых действий [53, 55, 61].

До сих пор мы рассматривали индивидуальное принятие решений. Рассмотрим теперь игровую (внутреннюю субъективную) неопределенность, в рамках которой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений обстановки (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов поведения) в зависимости от его действий, то есть $\Theta' = \Theta'(y)$.

Для описания коллективного поведения агентов, входящих в некоторую *многоэлементную ОС* (включающую центр и нескольких агентов), недостаточно определить их предпочтения и соответствия рационального индивидуального выбора по отдельности, так как следует описать модель их совместного поведения. Как отмечалось выше, в случае, когда в системе имеется единственный агент, гипотеза его рационального (индивидуального) поведения предполагает, что агент ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции. В случае, когда агентов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние. В этом случае возникает *игра* – взаимодействие игроков (участников некоторой системы), в котором полезность каждого игрока зависит как от его собственного действия (стратегии), так и от действий других игроков. Если, в силу гипотезы рационального поведения, каждый из игроков стремится выбором стратегии максимизировать свою целевую функцию, то понятно, что в случае нескольких игроков индивидуально рациональная стратегия каждого из них зависит от стратегий других игроков. Набор таких рациональных стратегий называется *решением игры* (*равновесием*). В теории игр на сегодняшний день не существует единого понятия равновесия. Введение различных предположений о рациональном поведении игроков порождает различные концепции равновесия (см. главы 3–6), причем в одной и той же игре равновесия одного типа могут существовать, а другого – нет.

Каждому из n игроков (агентов) поставим в соответствие функцию выигрыша $v_i(y)$, где $y = (y_1, ..., y_n) \in A' = \prod_{i \in N} A_i$ – *вектор действий* всех игроков, $N = \{1, 2, ..., n\}$ – *множество игроков*. Следуя сложившейся терминологии теории игр, будем называть действия y_i стратегиями, а вектор y – *ситуацией игры*. Совокупность стратегий $y_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ называется *обстановкой игры* для i-го игрока.

Таким образом, рациональному коллективному поведению соответствует выбор игроками равновесных стратегий (тип равновесия – см. ниже – должен оговариваться в каждом конкретном случае). Отметим, что любые концепции равновесия должны быть согласованы (при $n = 1$) с введенными выше принципами индивидуального рационального выбора.

Более того, в теоретико-игровых моделях можно считать, что обстановка игры определяет состояние природы для рассматриваемого игрока (агента), то есть $\theta_i = y_{-i}$, $i \in N$, а результат деятельности будет один для всех игроков – ситуация игры, то есть $z_i = y$, $i \in N$. Информация игрока и те предположения, которые он использует о поведении других игроков [13, 21, 35, 56, 76, 82], отражают его принцип устранения неопределенности. Совокупность принципов устранения неопределенности, используемых игроками, порождает тип равновесия игры (принципу максимального гарантированного результата соответствует максиминное равновесие, принципу усреднения – равновесие Байеса, предположению о фиксированной обстановке y^*_{-i} – равновесие Нэша и т.д. – см. ниже) – устойчивой в том или ином (оговариваемом в каждом конкретном случае) смысле совокупности действий участников системы.

Другими словами, субъективная (игровая) неопределенность, как правило, устраняется введением тех или иных предположений о принципах поведения участников системы, позволяющих однозначно доопределить выбираемые ими стратегии. То есть устранение субъективной неопределенности производится в два этапа – на первом этапе определяется концепция равновесия, на втором этапе определяется принцип выбора игроками конкретных равновесных стратегий в случае, если последних несколько – гипотеза благожелательности, принцип гарантированного результата и т.д. [13, 21, 55, 57].

«Предельным» для всех перечисленных выше типов и видов неопределенности является случай *детерминированного* изменения результата деятельности – когда он не зависит от обстановки (или, что то же самое, когда множество Θ' состоит из единственного элемента), то есть когда каждому действию $y \in A$ соответствует единственный результат деятельности $z = w(y) \in A_0$. При этом можно сразу считать, что предпочтения агента заданы на множестве его действий. Если $v(\cdot)$ - функция полезности агента, то его целевая функция $f(\cdot)$ в детерминированном случае определяется как $f(y) = v(w(y))$.

Правило индивидуального рационального выбора в детерминированном случае заключается в выборе агентом действий, доставляющих максимум его целевой функции, то есть

$$P^{W_I}(\Re_{A_0}, A, I) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} f(y).$$

Таким образом, гипотеза детерминизма проявляется в том, что агент, устраняя неопределенность (то есть используя МГР, математическое ожидание, отношение недоминирования, предположения о поведении других агентов и т.д. – в зависимости от типа и вида неопределенности), переходит от предпочтений, зависящих от неопределенных факторов, к предпочтениям, зависящим от его собственных действий – к индуцированным предпочтениям. Гипо-

теза рационального поведения проявляется в том, что агент выбирает действия, наилучшие с точки зрения его индуцированных предпочтений (стремится выбором действия максимизировать свою целевую функцию, в качестве которой может выступать гарантированная полезность, ожидаемая полезность и т.д. – см. выше).

Описав модель принятия индивидуальных и коллективных решений, перейдем к рассмотрению модели управления.

1.2. Управление и его типы

В общем случае *управлением* называется воздействие на управляемую систему (управляемый субъект или объект управления), нацеленное на обеспечение требуемого ее поведения[12]. Классификация управлений может строиться на основании тех компонентов управляемой системы[13] (точнее, ее модели) – агента, на которые оказывается воздействие при использовании управлений тех или иных типов [14, 49, 55].

В рамках представления предпочтений агента в терминах функции полезности, модель принятия им решений описывается следующим кортежем: $\Psi = \{A, A_0, \Theta, v(\cdot), w(\cdot), I\}$, то есть множествами: допустимых действий A, допустимых результатов деятельности A_0, возможных значений обстановок (неопределенности) Θ; функциями: полезности $v(\cdot)$ и «технологии» $w(\cdot)$ между действиями, обстановкой и результатом деятельности; а также информацией I, которой обладает агент на момент принятия решений.

Будем считать, что закон $w(\cdot)$ известен всем участникам ОС и не может быть изменен. Содержательно это предположение соот-

[12] *Принятие решений агентом также может рассматриваться как выработка управляющих воздействий* (*см. рисунок 1*). *Агент, осуществляющий управление активным субъектом, должен рассматриваться как центр.*

[13] *Примером может служить стимулирование – «побуждение к совершению действий; комплексное целенаправленное внешнее воздействие на процессуальные компоненты деятельности управляемой системы и процессы их формирования»* [*55, С.13*].

ветствует фиксированной технологии деятельности агента (или фиксированной технологии функционирования управляемого агентом объекта) и не является критическим, так как практически любое изменение связи между действием и результатом может быть отражено зависимостью этой связи от обстановки.

Также без ограничения общности можно считать, что множество обстановок Θ известно всем участникам ОС и фиксировано (для выполнения этого предположения всегда можно выбрать это множество достаточно широким, ограничивая в каждом конкретном случае возможные значения обстановок имеющейся у агента информацией).

В соответствии с приведенным выше определением, управление – это воздействие на управляемую систему. Так как управляемая система (точнее, управляемый субъект – агент) описывается кортежем Ψ, то внешнее воздействие в общем случае может быть направлено на каждый из элементов этого кортежа. Выделим три группы переменных (элементов кортежа Ψ, которые могут изменяться) – допустимые множества A и A_0, функция полезности $v(\cdot)$ и информация I. Этим трем группам переменных соответствуют *три типа управлений* (основание классификации – группа переменных, описывающих модель принятия решений, на изменение которых направлено управление)[14]:

- **институциональное управление** (изменение ограничений и норм деятельности, в том числе, допустимых множеств);
- **мотивационное управление** (изменение функции полезности);
- **информационное управление** (изменение информации, которую агент использует при принятии решений).

Обсудим кратко специфику каждого из введенных типов управлений[15].

[14] Управление составом и структурой мы не рассматриваем, считая состав и структуру ОС заданными.

[15] Естественно, на практике иногда трудно выделить в явном виде управление того или иного типа, так как они используются (и должны(!) использоваться) одновременно.

Институциональное управление, которое обозначим $u_A \in U_A$, является наиболее жестким и заключается в том, что центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агента. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями[16] – правовыми актами, морально-этическими нормами и т.д.

Мотивационное управление, которое обозначим $u_v \in U_v$, является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении функции полезности агента. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов и/или поощрений за выбор тех или иных действий и/или достижение определенных результатов деятельности. Широкий класс примеров моделей мотивационного управления составляют *задачи планирования и стимулирования* [10, 11, 13, 56, 64, 79]. В случае, например, задачи стимулирования, мотивационное управление заключается в непосредственном (входящем в функцию полезности аддитивно) вознаграждении агента за выбор определенных действий.

Наиболее «мягким» (косвенным), по сравнению с институциональным и мотивационным, и, в то же время, наименее исследованным (с точки зрения формальных моделей) является *информационное управление*. В соответствии с введенной в [49] классификацией, частными случаями информационного управления являются: *рефлексивное управление* [27, 40], при котором центр воздействует на представления агента о параметрах других участников ОС («передает ему основания для принятия решений» [40]); *активный прогноз*, при котором центр сообщает агентам информацию о будущих результатах (осуществляет прогноз) их деятель-

[16] Достаточно ярко институциональное управление проявляется в моделях управления многоэлементными организационными системами, в которых центр может запрещать или разрешать совместный выбор агентами определенных комбинаций действий (примеры – производственные цепочки [56], управление проектами [12] и др.) или достижение определенных результатов совместной деятельности (примеры – агрегирование информации в системах управления [56], управление многоуровневыми системами [51, 57] и др.).

ности; *информационное регулирование* [23], при котором центр сообщает агентам информацию о внешней обстановке, влияя тем самым на их равновесные стратегии. Подробный анализ такого эффекта информационного регулирования как манипулирование посредством СМИ и другими способами, проведен в [36].

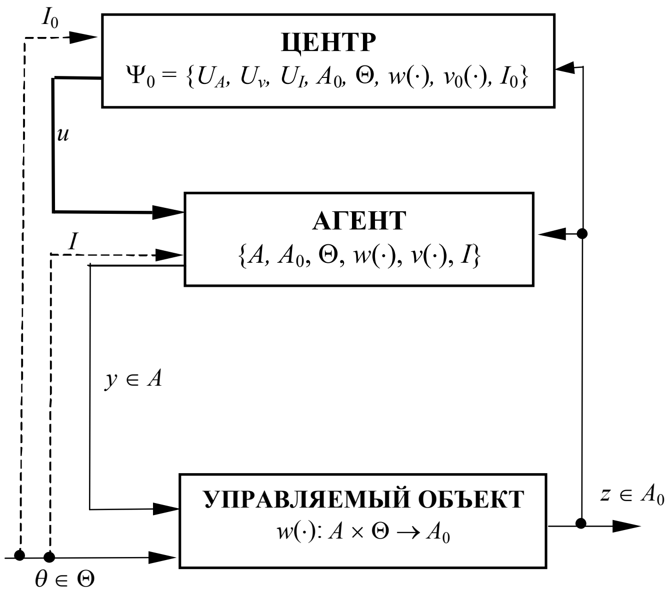

Рис. 2. Структура системы управления.

В соответствии с данным выше определением, управление – воздействие на управляемую систему, нацеленное на обеспечение требуемого ее поведения. Введенные типы управлений характеризуют объекты воздействия (компоненты управляемой системы, на которые направлено управляющее воздействие), поэтому обсудим, что следует понимать под требуемым поведением управляемой системы, и, в первую очередь – «требуемым» с чьей точки зрения.

Исследователь операций, занимающийся построением и анализом модели, как правило, находится на позициях оперирующей

(управляющей) стороны, то есть центра [15, 21, 45, 57]. Следовательно, необходимо описать предпочтения центра и рассмотреть модель принятия им решений по выбору управлений.

Модель принятия решений центром в целом аналогична[17] рассмотренной выше модели принятия решений агентом и описывается кортежем[18] $\Psi_0 = \{U_A, U_v, U_I, A_0, \Theta, w(\cdot), v_0(\cdot), I_0\}$. Поясним элементы модели (см. рисунок 2).

«Действиями» центра (выбираемыми им стратегиями) являются управления $u_A \in U_A$, $u_v \in U_v$, $u_I \in U_I$. Обозначим $u = (u_A, u_v, u_I) \in U = U_A \times U_v \times U_I$ – вектор управлений.

В большинстве моделей управления организационными системами считается, что единственная роль центра заключается в осуществлении управления, то есть у него отсутствует собственный (не опосредованный агентом) результат деятельности, поэтому результатом деятельности центра обычно считают результат деятельности агента.

Таким образом, структура системы управления агентом имеет вид, приведенный на рисунке 2 (ср. со структурой модели принятия решений агентом, приведенной на рисунке 1).

Так как предпочтения центра $v_0(\cdot)$ определены, в том числе, на множестве A_0 возможных результатов деятельности агента, а по-

[17] *Нижний индекс «$_0$» в настоящей главе обозначает переменные, выбираемые центром. Использование обозначения A_0 для множества результатов деятельности агента следует признать неудачным, но сложившимся исторически.*

[18] *В силу единообразия описания моделей принятия решений, в сложных (многоуровневых иерархических) системах центр может рассматриваться как субъект, управляемый центром более высокого уровня, а агент – как центр, управляющий агентом более низкого уровня (ср. рисунки 1 и 2) [49, 51].*

следние зависят от действий агента и обстановки[19], то качественно управление заключается в побуждении центром агента к выбору определенных действий. Обсудим, какие действия следует центру побуждать выбирать агента.

Предпочтения центра $v_0(\cdot)$, определенные на множестве $A_0 \times U$, с учетом имеющейся у него информации I_0 индуцируют (устранение неопределенности центром производится по той же схеме, которая описана выше для агента) на множестве $A \times U$ предпочтения (целевую функцию центра) $f_0(\cdot)$.

Рациональный выбор $P(\cdot)$ агента (см. выше) зависит от управляющих воздействий $u(\cdot) \in U$, используемых центром, то есть *множество рационального выбора* агента есть $P(u) = P^{W_I}(\Re_{A_0(u_A)}(u_v), A(u_A), I(u_I)) \subseteq A$.

Итак, центр может предсказать, что, если он использует некоторое управление $u \in U$, то агент выбирает одно из действий из множества $P(u) \subseteq A$. Если это множество содержит более одного элемента, то у центра остается неопределенность относительно выбора агента, которая может устраняться одним из описанных выше для интервальной неопределенности методов. Будем использовать далее гипотезу благожелательности (или *принцип оптимистических оценок*), в соответствии с которой значение целевой функции центра при использовании управления $u \in U$ равно $K(u) = \max_{y \in P(u)} f_0(y, u)$. Содержательно гипотеза благожелательности

[19] *Обстановка центра (и та информация об обстановке, которой обладает центр), естественно, может отличаться от обстановки агента. Более того, вне рассматриваемой модели управления (но легко вписываемой в нее) остается неполная информированность центра об агенте (например, о его типе, правилах устранения неопределенности и принятия решений и т.д.). Неполная информированность центра о типе агента учитывается в механизмах управления с сообщением информации, которые полностью укладываются в рассматриваемую модель управления – см. пример 2 (механизм экспертизы). Неполная информированность центра о принципах принятия решений агентом на сегодняшний день исследована недостаточно полно – см. [21, 49].*

означает, что агент выбирает из множества рационального выбора действие, наиболее благоприятное для центра.

Величина $K(u)$, $u \in U$, называется *эффективностью управления*. Следовательно, ***задача управления организационной системой*** формально может быть сформулирована следующим образом: найти допустимое управление, имеющее максимальную эффективность (такое управление называется *оптимальным управлением*), то есть $K(u) \to \max_{u \in U}$.

Рассмотренная модель управления является *базовой моделью управления организационными системами*, так как она позволяет унифицированно описывать процессы принятия решений участниками организационных систем. Действительно, в многоуровневых системах взаимодействие между участниками различных уровней управления[20] может описываться наращиванием структур, приведенных на рисунках 1 и 2, по «вертикали». Введение нескольких управляющих органов (центров) или нескольких управляемых субъектов (агентов) соответствует «горизонтальному» расширению этих структур.

Игровая неопределенность в принятии решений отражает взаимодействие субъектов, в результате которого выигрыши (полезности и т.п.) каждого из них в общем случае зависят от действий всех участников системы. Предположение о рациональном их поведении, в зависимости от используемого способа устранения игровой неопределенности, приводит к той или иной концепции равновесия игры. Равновесие игры управляемых субъектов зависит от используемых центрами управляющих воздействий, поэтому можно считать, что решение задачи управления ОС заключается в исследовании, во-первых, *равновесия игры управляющих органов* и, во-вторых, – *управляемого равновесия* игры агентов. В зависимости от уровней иерархии, которым принадлежат участники рассматриваемого игрового взаимодействия, можно выделять *игры между агентами* (см. пример 2), *игры между центрами* (см.

[20] *Напомним, что принадлежность к определенному уровню иерархии определяется последовательностью принятия решений и возможностью выбирать стратегии, являющиеся «функциями» от стратегий участников, принадлежащих более низким уровням иерархии [21, 57].*

пример 3) и *игры между центрами и агентами* (последний класс игр называется *иерархическими играми*) – см. пример 1 и главу 6.

Примеры задач управления, в которых используются игры перечисленных типов, приводятся ниже (см., в частности, разделы 1.5 и 2.3).

1.3. Технология управления организационными системами

Как отмечалось выше, теория игр изучает игровую неопределенность в принятии решений. Рассмотрим, на каких этапах постановки и решения задач управления (см. раздел 1.2) возникает эта неопределенность. Для этого опишем *технологию управления* организационными системами.

Под технологией понимается совокупность методов, операций, приемов и т.д., последовательное осуществление которых обеспечивает решение поставленной задачи. Отметим, что рассматриваемая ниже технология управления охватывает все этапы, начиная с построения модели ОС и заканчивая анализом эффективности внедрения результатов моделирования на практике (см. рисунок 3, на котором в целях наглядности опущены обратные связи между этапами).

Первый этап – построение *теоретико-игровой модели* – заключается в описании реальной ОС в формальных терминах, то есть задании целевых функций и множеств допустимых стратегий участников системы, их информированности[21], порядка функционирования[22], гипотез о поведении и т.д. На этом этапе существенно используется аппарат теории игр, в терминах которой, собственно, и формулируется модель.

[21] *Информированностью участников называется та информация, которой они обладают на момент принятия решений (см. раздел 1.1)* [55].

[22] *Порядком функционирования называется последовательность получения информации и принятия решений участниками ОС* [55].

Рис. 3. Технология управления ОС.

Второй этап – анализ модели – исследование поведения участников при тех или иных *механизмах управления*[23]. Решение теоретико-игровой задачи анализа заключается в следующем: для

[23] *Механизмом управления ОС называется совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие ее участников. В узком смысле механизм управления – совокупность правил и процедур принятия управленческих решений центром* [*14, 55*].

фиксированного механизма управления определяются стратегии агентов, которые являются равновесными при этом управлении.

Решив задачу анализа, то есть зная поведение управляемых субъектов при различных управлениях, можно переходить к третьему этапу – решению, во-первых, *прямой задачи управления*, то есть задачи синтеза оптимальных управляющих воздействий, заключающейся в поиске допустимых управлений, имеющих максимальную эффективность, и, во-вторых, *обратной задачи управления* – поиска множества допустимых управлений, переводящих ОС в заданное состояние. Критерием эффективности управления является значение (максимальное или гарантированное) целевой функции управляющего органа на множестве решений игры агентов. Следует отметить, что, как правило, именно этот этап решения задачи управления вызывает наибольшие теоретические трудности и наиболее трудоемок с точки зрения исследователя операций.

Имея набор решений задачи управления, необходимо перейти к четвертому этапу, то есть исследовать их устойчивость. Исследование устойчивости подразумевает решение, как минимум, двух задач. Первая задача заключается в изучении зависимости оптимальных решений от параметров модели, то есть является задачей анализа устойчивости решений (корректности оптимизационной задачи, чувствительности, устойчивости принципов оптимальности и т.д.) в классическом понимании. Вторая задача специфична для математического моделирования. Она заключается в теоретическом исследовании адекватности модели реальной системе, которое подразумевает изучение эффективности решений, оптимальных в модели, при их использовании в реальных ОС, которые могут в силу ошибок моделирования отличаться от модели. Результатом решения задачи адекватности является *обобщенное решение задачи управления* – параметрическое семейство решений, обладающих некоторой гарантированной эффективностью в определенном множестве реальных ОС [54, 84].

Итак, перечисленные выше четыре этапа заключаются в общем теоретическом изучении модели ОС. Для того, чтобы использовать результаты теоретического исследования при управлении реальной ОС, необходимо произвести настройку модели, то есть

идентифицировать моделируемую систему [54] и провести серию имитационных экспериментов [4, 9] – соответственно пятый и шестой этапы. Исходными данными для идентификации системы служат обобщенные решения, которые ограничиваются информацией, имеющейся о реальной системе. Этап имитационного моделирования во многих случаях необходим по нескольким причинам. Во-первых, далеко не всегда удается получить аналитическое решение задачи синтеза оптимальных управлений и исследовать его зависимость от параметров модели. При этом имитационное моделирование может служить инструментом получения и оценки решений. Во-вторых, имитационное моделирование позволяет проверить справедливость гипотез (в первую очередь, относительно принципов поведения участников системы – используемых ими процедур устранения неопределенности, правил рационального выбора и т.д.), принятых при построении и анализе модели, то есть дает дополнительную информацию об адекватности модели без проведения натурного эксперимента. И, наконец, в-третьих, использование деловых игр и имитационных моделей в учебных целях позволяет управленческому персоналу освоить и апробировать предлагаемые механизмы управления.

Завершающим является седьмой этап – этап внедрения, на котором производится обучение управленческого персонала, внедрение в реальной ОС разработанных и исследованных на предыдущих этапах механизмов управления с последующей оценкой эффективности их практического использования, коррекцией модели и т.д.

Таким образом, аппарат теории игр используется на всех этапах технологии управления (так как сама модель ОС является теоретико-игровой моделью). В явном виде игровое взаимодействие участников ОС наиболее отчетливо проявляется на этапах построения модели, анализа и синтеза управлений, а также имитационного моделирования.

Приведем примеры постановок задач управления, соответствующие первому этапу приведенной на рисунке 3 технологии.

1.4. Примеры задач управления

В разделе 1.2 было определено понятие управления в рамках принятой в настоящей работе модели принятия решений, в разделе 1.3 описана технология управления организационными системами, из содержания этапов которой видны роль и место теории игр. В настоящем разделе приводится ряд примеров постановки задач управления организационными системами (задача стимулирования, задача экспертизы и задача распределенного контроля), которые иллюстрируют использование теоретико-игрового описания взаимодействия участников организационных систем. Решения поставленных задач приводятся после изложения соответствующих (используемых в них) разделов теории игр.

Пример 1. [56] «Задача стимулирования».

Рассмотрим многоэлементную детерминированную двухуровневую ОС, состоящую из центра и n агентов. Стратегией каждого агента является выбор действия, стратегией центра – выбор функции стимулирования, то есть зависимости вознаграждения каждого агента от его действия и, быть может, действий других агентов.

Обозначим $y_i \in A_i$ – действие i-го агента, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество агентов, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A' = \prod_{j \in N} A_j$ – вектор действий агентов, $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ – обстановка игры для i-го агента.

Предпочтения участников ОС – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $f_0(\sigma, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $\upsilon(y)$, выплачиваемым агентам: $\upsilon(y) = \sum_{i \in N} \sigma_i(y)$, где $\sigma_i(y)$ – стимулирование i-го агента, $\sigma(y) = (\sigma_1(y), \sigma_2(y), \ldots, \sigma_n(y))$ – *механизм стимулирования*. Целевая функция i-го агента $f_i(\sigma_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$f_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y),\ i \in N\ ,\ f_0(\sigma, y) = H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(y)\,.$$

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го агента по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех агентов.

Примем следующий порядок функционирования ОС. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (функциях стимулирования и действиях соответственно) известны целевые функции и допустимые множества всех участников ОС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их агентам, после чего агенты при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Обозначим M – множество допустимых систем стимулирования, $P(\sigma)$ – множество равновесных при системе стимулирования σ стратегий агентов – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; пока предположим лишь, что агенты выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Эффективностью стимулирования (эффективностью управления) является максимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

$$K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} f_0(\sigma, y)\,.$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования σ^*, имеющей максимальную эффективность: $\sigma^* \in \operatorname{Arg}\max_{\sigma \in M} K(\sigma)$. Решение этой задачи приводится в третьей главе. •[24]

Пример 2 [10, 55, 64]. «Задача экспертизы».

В многоэлементных ОС *план* (желательное с точки зрения центра состояние – действие или результат деятельности агента), назначаемый i-му агенту, обозначим $x_i \in X_i$, где X_i – множество

[24] *Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера, доказательства и т.д.*

допустимых планов, сообщение i-го агента (его действие) обозначим $s_i \in S_i$, $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество агентов. Будем считать, что центр определяет планы (на основании предоставляемой агентами информации) по *процедуре планирования* $\pi : S \to X$, где $S = \prod_{i \in N} S_i$, $X = \prod_{i \in N} X_i$. Тогда план, назначаемый i-му агенту, будет определяться выражением: $x_i = \pi_i(s)$, $i \in N$, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$. Совокупность $\Sigma = (S, \pi(\cdot))$ множеств возможных сообщений агентов и процедуры планирования называется *механизмом планирования*. Так как план каждого агента зависит в общем случае от сообщений всех агентов, то возникает игра агентов, поэтому в качестве моделей поведения агентов можно использовать ту или иную концепцию равновесия (см. ниже).

Будем считать, что интересы центра задаются его целевой функцией $f_0(x, r)$, где $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – неизвестный ему вектор типов агентов, $r \in \Omega$ – множеству возможных типов, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор планов. Тогда задачей центра является выбор такой процедуры планирования, чтобы в точке равновесия значение его целевой функции было максимально.

Обозначим множество равновесий при фиксированной процедуре планирования $P_\pi(r)$, $r \in \Omega$. Отображение, ставящее в соответствие множеству равновесий $P_\pi(r)$ конкретное равновесие $s^*(r) \in P_\pi(r)$, называется *соответствием отбора равновесий*. Будем считать, что конкретный выбор агентов из этого множества удовлетворяет *гипотезе благожелательности*, в соответствии с которой, в том числе, при прочих равных, агенты предпочтут сообщать достоверную информацию. Для фиксированного равновесия $s^*(r) \in P_\pi(r)$, определяемого принятым соответствием отбора равновесий, вычисляя, например, гарантированный результат по множеству Ω, можно ввести *гарантированную эффективность* $K(\Sigma)$ *механизма планирования* $\Sigma = (S, \pi)$: $K(\Sigma) = \min_{r \in \Omega} f_0(\pi(s^*(r)), r)$.

Механизм $\pi : S \to X$, в котором агенты сообщают оценки из множеств $\{S_i\}$, называется *непрямым механизмом* (содержательно, в нем сообщение может нести косвенную информацию о типе

агента). При фиксированном соответствии отбора равновесий для непрямого механизма $\pi(\cdot)$ можно построить *соответствующий* ему *прямой механизм*[25]: $h(\tilde{r}) = \pi(s^*(\tilde{r}))$, в котором агенты сообщают непосредственно (прямо) оценки $\tilde{r} \in \Omega$ своих типов (поэтому этот механизм и называется *прямым*). Если в соответствующем прямом механизме сообщение достоверной информации является доминантной стратегией (см. раздел 3.7), то он называется *эквивалентным прямым механизмом*.

Очевидно, в механизмах с сообщением информации агенты будут руководствоваться своей полезностью и не обязательно будут сообщать достоверную информацию. Явление сообщения агентами недостоверной информации называется *манипулированием информацией*, а механизмы, в которых агентам выгодно сообщение достоверной информации (оно является равновесием игры агентов), называются *неманипулируемыми*.

Под *задачей экспертизы* понимают задачу оценки некоторой величины группой экспертов – специалистов в определенной области. Пусть r_i – собственное мнение i-го агента-эксперта (его тип), $r_i \in [d, D] \subset \Re^1$, $i \in N$, $-\infty < d < D < +\infty$, и пусть $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n$, то есть r_i упорядочены по возрастанию. Экспертам известна процедура $\pi : [d, D]^n \to [d, D]$ принятия итогового решения на основе сообщаемых оценок $s_i \in [d, D]$, $i \in N$: $x = \pi(s)$.

Будем считать, что функции полезности агентов однопиковые[26] с точками пика r_i, $i \in N$, а процедура $\pi(s)$ – *механизм активной экспертизы* – удовлетворяет следующим <u>свойствам</u>:

---

[25] *В механизмах с сообщением информации обозначение «$\tilde{r}$» для вектора сообщений агентов в прямом механизме вводится для того, чтобы подчеркнуть, что в общем случае сообщения о типах r могут отличаться от истинных, то есть может иметь место: $\exists i \in I : \tilde{r}_i \ne r_i$.*

[26] *То есть каждый из экспертов заинтересован в том, чтобы итоговое решение было как можно ближе к его собственному мнению.*

1. $\pi(s)$ строго монотонна по всем переменным при $s \in [d, D]^n$;

2. $\pi(s)$ непрерывна по всем переменным при $s \in [d, D]^n$;

3. если обозначить $s^a = (a, ..., a)$, $a \in [d, D]$, то $\pi(s^a) = a$ (*условие единогласия*).

Примером механизма активной экспертизы является *линейный механизм экспертизы*: $x = \sum_{i \in N} \alpha_i s_i$, где $\alpha_i > 0$, $\sum_{i \in N} \alpha_i = 1$. Частным случаем линейного механизма является вычисление среднего арифметического мнений экспертов ($\alpha_i = 1/n$, $i \in N$).

Задачей управления для рассматриваемой модели ОС является синтез неманипулируемого механизма экспертизы. Решение этой задачи приводится в четвертой главе. •

Пример 3 [25, 57]. «Задача распределенного контроля».

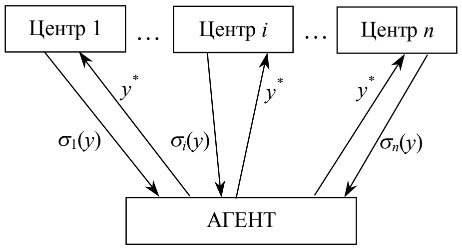

Рис. 4. Модель ОС с несколькими центрами

Рассмотрим организационную систему со структурой, изображенной на рисунке 4. Центры представляют собой менеджеров проектов и руководителей функциональных подразделений некоторой проектно-ориентированной организации, а агент – сотрудника подразделения или подразделение в целом.

Предпочтения n центров описываются их функциями полезности $f_{0i}(y) = H_i(y) - \sigma_i(y)$, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество центров, где $H_i(y)$ – кусочно-непрерывная функция дохода i-го центра от выбора агентом действия $y \in A = \Re^1_+$, $\sigma_i(y)$ – неотрицательная

функция стимулирования агента i-ым центром в зависимости от выбираемого действия.

Предпочтения агента представлены функцией полезности $f(y) = \sum_{i \in N} \sigma_i(y) - c(y)$, где $c(y)$ – положительная выпуклая возрастающая по $y \in A$ функция затрат агента в зависимости от выбираемого действия y, причем существует непрерывная третья производная функции затрат. Также предполагается, что $c(0) = c'(0) = 0$.

Все центры и агент имеют полную информацию о функциях $H_i(y)$ и $c(y)$, а также о множестве A.

Порядок функционирования системы следующий:

- центры одновременно сообщают агенту функции стимулирования $\sigma_i(y)$;

- если существует действие y, для которого $f(y) \geq 0$, то агент выбирает действие $y^* \in P(\sigma) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} [\sum_{i \in N} \sigma_i(y) - c(y)]$, где $\sigma = (\sigma_i(y))_{i \in N}$ – вектор функций стимулирования всех центров, и несет затраты $c(y^*)$, иначе он отказывается от игры, и все ее участники получают нулевые выигрыши;

- центры получают доходы $H_i(y^*)$ и выплачивают агенту суммы $\sigma_i(y^*)$.

Для функций стимулирования центров должно выполняться балансовое ограничение: $\sigma_i(y^*) \leq H_i(y^*)$, $i \in N$, то есть центры должны иметь достаточно средств, чтобы оплатить агенту обещанную сумму.

Должно также выполняться условие «обоснованности угроз», или «условие запрета блефа»: $\forall y \in A, \forall i \in N \quad \sigma_i(y) \leq H_i(y)$, говорящее о том, что обещания любого центра не превышают его дохода.

Для завершения описания модели необходимо указать, какое действие выберет агент, если множество $P(\sigma)$ состоит более чем из одной точки, и агент должен выбрать одно действие из множества равнозначных для него действий. Для описания процесса выбора агентом действия из множества «оптимальных» действий $P(\sigma)$

введем функцию $\Psi(\sigma)$, известную всем центрам, которая каждому вектору σ функций стимулирования ставит в соответствие точку из соответствующего множества $P(\sigma)$.

Будем считать, что для функции $\Psi(\sigma)$ выполняется *свойство независимости от посторонних альтернатив*: для любых векторов стратегий σ^1, σ^2 из $\Psi(\sigma^1) \in P(\sigma^2) \subset P(\sigma^1)$ следует $\Psi(\sigma^2) = \Psi(\sigma^1)$, то есть если агент выбрал действие $\Psi(\sigma^1)$ из более широкого множества $P(\sigma^1)$, то и из более узкого множества $P(\sigma^2)$ он выберет действие $\Psi(\sigma^1)$ (если оно содержится в $P(\sigma^2)$).

Задача управления, заключающаяся в анализе поведения центров, предсказании их рациональных стратегий и исследовании возможностей их совместных действий решается в пятой главе. •

Решение сформулированных в примерах 1-3 задач управления организационными системами дается ниже после описании соответствующих результатов теории игр.

Таким образом, в настоящей главе рассмотрены модели принятия решений и управления, что позволяет перейти к систематическому изложению результатов теории игр, необходимых для постановки и решения задач управления организационными системами. Для этого, в первую очередь, необходимо рассмотреть различные способы представления предпочтений участников ОС (отношения предпочтения и функции полезности, а также связь между ними – см. разделы 2.1 и 2.2) и провести классификацию игровых моделей (см. раздел 2.3).

ГЛАВА 2. ПРОБЛЕМАТИКА ТЕОРИИ ИГР

В настоящей главе рассматривается аппарат описания предпочтений участников организационных систем – отношения предпочтения и функции полезности, а также приводятся классификация игр и примеры игровых моделей.

2.1. Отношения предпочтения

Как отмечалось в первой главе, в основе теории принятия решений лежит предположение, что человек, поставленный перед проблемой выбора, в процессе выработки решения (выбора альтернативы) руководствуется своими предпочтениями, то есть выбирает действие, которое, по его мнению, приведет к наиболее предпочтительному для него результату деятельности (исходу). Формальное описание процесса сравнения альтернатив может быть дано через *отношения предпочтения и неразличимости* [44, 69, 70, 77].

Бинарное отношение $\wp$ на множестве A_0 – это подмножество $\wp \subseteq A_0 \times A_0$, где $A_0 \times A_0$ – множество всех упорядоченных пар (a,b), $a, b \in A_0$. Если $(a, b) \in \wp$, говорят, что отношение $\wp$ *выполнено* (или *имеет место*) для (a, b) и пишут $a \wp b$.

Если бинарное отношение $\wp$ не имеет места для a, b, этот факт обозначается $a \wp^c b$.

Отношение предпочтения $\succ$ – это бинарное отношение, определяемое свойством: $a \succ b$ тогда и только тогда, когда a предпочтительнее (лучше) для лица, принимающего решение (ЛПР), чем b.

Отношение неразличимости $\approx$ имеет место для пары a, b тогда и только тогда, когда $a \succ^c b$ и $b \succ^c a$.

Отношение $\wp$ называется *рефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \wp a$, *антирефлексивным*, если для всех $a \in A_0$ выполнено $a \wp^c a$.

Отношение $\wp$ называется *антисимметричым*, если из $a \wp b$ и $b \wp a$ следует $a = b$, *асимметричным*, если из $a \wp b$ следует $b \wp^c a$.

Далее рассматривается отношение *строгого* предпочтения $\succ$, для которого выполнено условие асимметричности.

Отношение $\wp$ называется *транзитивным*, если для всех $a, b, c \in A_0$ из $a \wp b$ и $b \wp c$ следует $a \wp c$.

Отношение $\wp$ называется *полным*, если для всех $a, b \in A_0$ выполнено $a \wp b$ или $b \wp a$.

Пусть на множестве исходов A_0 задано предпочтение ЛПР, то есть отношение типа $\succ$, которое для пары a, b исходов из A_0 выполняется, если a лучше b с точки зрения лица, принимающего решение. Определим также множество действий A. Это множество содержит все возможные действия ЛПР и состоит из элементов вида «Сделать то-то», «Приказать то-то», «Купить то-то…» и пр.

Рассмотрим пример, который иллюстрирует, во-первых, описание предпочтений агента бинарными отношениями, а, во-вторых, приведенные в разделе 1.1 модель принятия решений и способы устранения неопределенности

Пусть контрабандист, готовясь переправить морем груз через границу, выбирает пункт назначения из двух вариантов, А и Б. До пункта А путь короче, до Б – длиннее. Однако в случае шторма первый маршрут гораздо опаснее, чем второй. На любом из этих маршрутов его могут задержать пограничники.

Множество исходов A_0 для этого примера будет состоять из следующих элементов:

$z1$. Контрабандист успешно добрался до пункта А.
$z2$. Контрабандист успешно добрался до пункта Б.
$z3$. Судно было задержано пограничниками.
$z4$. Судно разбилось во время шторма.

В этот список с полным основанием можно добавить и исход

$z5$. Контрабандист никуда не поплыл.

Отношение предпочтения между этими исходами можно определить, например, так: $z1 \succ z2 \succ z5 \succ z3 \succ z4$.

Множество A действий для данного примера будет включать элементы:

$y1$ – «Плыть в А»,
$y2$ – «Плыть в Б»,
$y3$ – «Сидеть дома».

Однако определением множеств A_0, A и отношения предпочтения на A_0 формулировка задачи принятия решения не исчерпывается. Необходимо определить еще связь между принятым решением и реализующимся результатом, то есть отображение $w(\cdot)$ (см. раздел 1.1).

Задача принятия решения – это задача выбора ЛПР действия из множества A, которое приводит к наилучшему с точки зрения

предпочтения ЛПР результату из A_0. Чтобы решить эту задачу, необходимо тем или иным образом из отношения предпочтения на множестве исходов A_0 вывести отношение предпочтения на множестве действий A, а затем выбрать наиболее предпочтительное действие.

Пусть имеется некоторая функция w: $A \to A_0$ – детерминированное (однозначное) соответствие между выбранным действием и его результатом. В этом случае выбор действия равнозначен выбору результата. Задача, таким образом, состоит лишь в нахождении *реализуемого исхода* (то есть исхода, для которого есть действие, его реализующее), предпочтительного по отношению ко всем остальным реализуемым исходам. Выбранное действие будет принадлежать множеству:

$$\{a \in A \mid \overline{\exists}\, b \in A : w(b) \succ w(a)\}.$$

Все действия, принадлежащие решению, приводят к исходам, равнозначным с точки зрения отношения $\approx$.

Если в рассматриваемом примере с контрабандистом функция $w(\cdot)$ задана следующим образом:

1. w(«Плыть в А») = $z4$,
2. w(«Плыть в Б») = $z2$,
3. w(«Сидеть дома») = $z5$,

то, очевидно, решением задачи принятия решения будет действие $y2$ - «Плыть в Б», то есть действие, приводящее к наилучшему реализуемому результату $z2$.

Такая задача, в соответствии с терминологией, введенной в первой главе, называется *детерминированной задачей принятия решения*.

Сложнее дело обстоит, если результат z действия y зависит не только от самого действия ЛПР, но и от некоторых внешних по отношению к ЛПР факторов, то есть зависимость результата от действия имеет вид $z = w(y, \theta, u)$, где θ и u – факторы, не зависящие от ЛПР. Множества возможных значений этих параметров обозначим Θ и U соответственно. Если эти факторы известны на момент принятия решения, задача сводится к предыдущему случаю. Если же они не известны, возникает неопределенность.

Например, Θ может быть совокупностью погодных факторов, например, «Погода хорошая» и приводить к исходам: «Судно разбилось во время шторма на маршруте в А», «Судно не разбилось во время шторма на маршруте А», «Судно разбилось во время шторма на маршруте в Б», «Судно не разбилось во время шторма на маршруте Б». Множество U описывает неопределенность действий других лиц и может иметь, например, вид: {«Пограничники выбрали для патрулирования маршрут в А», «Пограничники выбрали для патрулирования маршрут в Б»}. Считаем, что если пограничники патрулируют маршрут, то они задерживают все плывущие по нему суда с контрабандой.

Теперь уже выбор ЛПР некоторого действия y^* не приводит к единственному возможному результату. В зависимости от реализации не зависящих от ЛПР факторов θ и u может реализоваться любой результат из множества $R(y^*) = \{w(y^*, \theta, u) \mid \theta \in \Theta, u \in U\}$. Чтобы сделать выбор, ЛПР необходимо научиться сравнивать эти множества. Однако отношение предпочтения на системе множеств $R(\cdot)$ не задано условиями задачи. Его необходимо получать (возможно, используя некоторые дополнительные предположения) из отношения предпочтения на множестве результатов A_0.

Так, если известно распределение вероятностей реализации событий из Θ и U, то можно определить вероятности появления различных результатов при выборе определенного действия.

Например, пусть вероятность

P («Погода хорошая») = 80%,

P(«Судно разбилось в шторме на маршруте в А»|«Плыть в А»)=0%,

P(«Судно не разбилось в шторме на маршруте А»|«Плыть в А»)=100%,

P(«Судно разбилось в шторме на маршруте в Б»|«Плыть в Б») = 50%,

P(«Судно не разбилось в шторме на маршруте Б»|«Плыть в Б»)=50%.

Предположим также, что вероятности патрулирования пограничниками обоих маршрутов равны 50%.

Тогда, если судно отправляется в А:

P(«Контрабандист успешно добрался до пункта А»|«Плыть в А») = 50%.

P(«Судно было задержано пограничниками»|«Плыть в А») = 50%.

Соответственно, для других действий вероятности различных исходов будут следующими:

P(«Контрабандист успешно добрался до пункта Б»|«Плыть в Б») = 45%.

P(«Судно контрабандиста разбилось в шторме»|«Плыть в Б») = 10%.

P(«Судно было задержано пограничниками»|«Плыть в Б») = 45%.

P(«Контрабандист никуда не поплыл»|«Сидеть дома») = 100%.

Остальные исходы имеют нулевую вероятность.

В соответствии с терминологией, введенной в первой главе, описанная выше задача – это *задача принятия решения в условиях вероятностной неопределенности*.

Немногим отличается случай, когда ЛПР не имеет информации о вероятностях некоторых значимых событий, но имеет предположения о них. В этом случае объективные вероятности заменяются на субъективные и реализуется та же схема решения.

Таким образом, в данном примере каждое решение (действие) ЛПР приводит к *лотерее*, случайному процессу, в котором исходы могут реализовываться с некоторыми вероятностями. Для того, чтобы от предпочтения на множестве исходов перейти к предпочтениям на множестве действий, ЛПР должен уметь сравнивать свои предпочтения на множестве подобных лотерей, то есть определять, какая из лотерей для него лучше или хуже. Тогда оптимальным решением будет действие, приводящее к наилучшей лотерее. Каким образом осуществляется этот переход, описывается в следующем разделе.

2.2. Полезность и функция полезности

При решении задач принятия решений для описания интересов ЛПР редко используется непосредственно отношение предпочтения. Это связано с тем, что бинарные отношения довольно неудобны для моделирования реальных систем и анализа этих моделей. Гораздо чаще используются *функции полезности*.

Соответствие между отношением предпочтения $\succ$ и функцией полезности $f : A_0 \to \Re^1$ определяется условием

(1) $\forall a, b \in A_0 \;\; f(a) > f(b) \Leftrightarrow a \succ b.$

Рассмотрим, каким ограничениям должно удовлетворять отношение предпочтения, чтобы можно было рассматривать вместо него функцию полезности. Эта задача является предметом изучения *математической теории полезности* [48, 68] (впервые вопрос о представимости отношения предпочтения функцией полезности – см. (1) – рассматривался Г. Кантором (1895 г.) – см. подробности в [77]).

Как отмечалось выше, отношение предпочтения – бинарное отношение на множестве исходов A_0, удовлетворяющее, как минимум, свойству *асимметрии*. Для продуктивного использования, однако, необходимы дополнительные условия на отношение предпочтения (см. [44, 77]). При этом то, какие дополнительные предположения необходимо сделать, чтобы получить инструмент, с которым можно работать, не отходя в то же время от встречающихся в реальной жизни предпочтений – это вопрос, который на протяжении многих лет служил предметом дискуссий и продолжает обсуждаться до сих пор. Дело в том, что подобные дополнительные предположения вводятся в виде аксиом, некоторых гипотез о закономерностях процесса выбора, и обоснованность введения тех или иных предположений отнюдь не бесспорна.

Кроме того, некоторые аксиомы, которые по отдельности представляются достаточно логичными, вступают в противоречие друг с другом [2, 17, 34, 46, 71, 86]. То есть необходимо определить минимальные комбинации аксиом, которые, не вступая друг с другом в противоречие, дают достаточный для конструктивного использования набор предположений о закономерностях выбора.

Приведем типичный набор таких аксиом (отметим, что некоторые из перечисленных ниже аксиом зависимы). Другие примеры введения аксиоматики можно найти в [68].

Введем следующие *аксиомы полезности*:

1. Если $\succ$ – отношение предпочтения (асимметричное), $\approx$ – отношение неразличимости, то для любых исходов x и y имеет место одно из событий: либо $x \succ y$, либо $y \succ x$, либо $x \approx y$, то есть для любой пары исходов либо первый исход предпочтительнее второго, либо второй предпочтительнее первого, либо же исходы равнозначны. Если $a \approx b \Leftrightarrow a \succ^c b$ и $b \succ^c a$, то эта аксиома выполняется всегда.

2. $x \approx x$, для любого исхода x, то есть исход всегда неотличим от себя самого, что также очевидным образом следует из определения отношения безразличия.

3. Если $x \approx y$, $y \approx z$, то $x \approx z$. Это – условие *транзитивности отношения неразличимости*, оно уже не столь очевидно. Существуют примеры достаточно логичных с точки здравого смысла предпочтений, когда эта аксиома не выполняется [2, 31, 38, 39, 44, 73].

4. Если $x \succ y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (условие *транзитивности отношения предпочтения*).

5. Если $x \succ y$, $y \approx z$, то $x \succ z$, то есть если x лучше y и y равнозначно z, то x лучше z. На самом деле, эта аксиома вводит предположение о произвольно глубокой разрешающей способности агента – о том, что последний всегда может различить сколь угодно близкие ситуации.

6. Если $x \approx y$, $y \succ z$, то $x \succ z$ (аналогично аксиоме 5).

Этих предположений хватает [62], чтобы ввести функцию $f(.)$ таким образом, чтобы выполнялось условие (1). Однако, их недостаточно, чтобы определить эту функцию однозначно. И действительно, в случае конечного числа исходов нестрогое упорядочение позволяет лишь выстроить их в порядке от наихудшего до наилучшего. Этой последовательности событий можно сопоставить любую последовательность возрастающих чисел, назначая в качестве значения функции полезности соответствующий элемент числовой последовательности (другими словами, функция полезности определена с точностью до монотонного преобразования).

Чтобы от отношения предпочтения перейти к определенной с точностью до линейного преобразования функции полезности, требуются дополнительные аксиомы (так называемые, *аксиомы комбинирования*), определяющие модель поведения в условиях неопределенности.

Пусть x и y – любые исходы из A_0 и $0 < r, s < 1$. Тогда выражение $r\,x + (1 - r)\,y$ будет обозначать исход, представляющий собой лотерею, которая реализует два исхода x и y с вероятностями r и $(1 - r)$ соответственно. Тогда от этой лотереи потребуем выполнения следующих условий:

7. $rx + (1 - r)\,y = (1 - r)\,y + r\,x$ для любой лотереи r на x, y. Это свойство *коммутативности лотереи*, имеющее лишь техническое значение. Оно, по сути, не ограничивает предпочтения.

8. $r\,x + (1-r)\,(s\,y + (1-s)\,z) = r\,x + (1-r)\,s\,y + (1-r)\,(1-s)\,z$ для любых лотерей s и r на исходах $x, y, z \in A_0$. Это свойство вводит предположение о том, что для ЛПР порядок лотерей не важен.

9. $r\,x + (1-r)\,x = x$ (*рефлексивность лотереи*).

10. Если $x \approx z$, то для любых y, r имеем

$$(r\,x + (1-r)\,y) \approx (r\,z + (1-r)\,y).$$

11. Если $x \succ z$, то для любых $r > 0$ и y имеем

$$(r\,x + (1-r)\,y) \succ (r\,z + (1-r)\,y).$$

12. Пусть $x \succ z \succ y$. Тогда существует $0 \le r \le 1$, такое, что $(r\,x + (1-r)\,y) \approx z$. Эта очень важная аксиома имеет отдельное название – *аксиома непрерывности*.

Теорема 1 (Неймана-Моргенштерна) [62]. Если для отношения предпочтения $\succ$ выполнены аксиомы 1-12, то существует функция $f\colon A_0 \to R$, что для любых x, y из A_0 и любого $r \in [0, 1]$

(2) $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x \succ y$,

(3) $f(rx + (1-r)y) = r\,f(x) + (1-r)\,f(y)$.

Эта функция единственна *с точностью до положительного линейного преобразования*, то есть если некоторая функция $F(\cdot)$ удовлетворяет условиям (2), (3), то $F(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta$, где $\alpha > 0$ и β – некоторые константы.

Доказательство. Если для всех исходов x, y верно $x \approx y$, то $f(\cdot)$ можно положить всюду равной константе, например, нулю.

Пусть, однако, существуют исходы x, y такие, что $x \succ y$. Тогда для произвольного исхода z имеется пять возможностей:

a) $z \succ x$,
b) $z \approx x$,
c) $x \succ z \succ y$,
d) $z \approx y$,
e) $y \succ z$.

Обозначим $x = e_1$, $y = e_0$. Положим $f(e_1) = 1$, $f(e_0) = 0$.

По аксиоме непрерывности, в случае a) существует r, такое, что $rz + (1-r)y \approx x$. Положим тогда $f(z)=1/r$. В случае b) положим $f(z)=1$. В случае c) существует s, такое, что $sx + (1-s)y \approx z$. Положим $f(z)=s$. В случае d) положим $f(z)=0$. В случае e) существует $t \in [0,1]$, такое, что $tz + (1-t)x \approx y$. Положим $f(z)=(t-1)/t$.

Теперь необходимо доказать, что введенная таким образом функция удовлетворяет условию (2) для произвольных событий z_1 и z_2. Доказательство довольно длинно и состоит в последовательном рассмотрении z_1 и z_2, удовлетворяющих условиям a)-e) в различных сочетаниях.

Докажем один из случаев, в котором и для z_1, и для z_2 выполнено условие c) (остальные 14 случаев доказываются аналогично). Итак, пусть $f(z_1)=s_1$, $f(z_2)=s_2$, причем $s_1>s_2$. Надо показать, что $z_1 \succ z_2$.

$$z_1 \approx s_1e_1 + (1-s_1)e_0 \approx (s_1 - s_2)e_1 + s_2e_1 + (1-s_1)e_0 \approx$$

$$\approx s_2e_1 + (1-s_2)\left[\frac{(s_1-s_2)}{1-s_2}e_1 + \frac{(1-s_1)}{1-s_2}e_0\right] \succ$$

$$\succ s_2e_1 + (1-s_2)\left[\frac{(s_1-s_2)}{1-s_2}e_0 + \frac{(1-s_1)}{1-s_2}e_0\right] \approx$$

$$\approx s_2e_1 + (1-s_2)e_0 \approx z_2.$$

Повторяя те же действия в обратном направлении, получаем и обратное утверждение.

Докажем, что для функции f, введенной выше, справедлива формула (3). Известно, что $z_1 \approx s_1e_1 + (1-s_1)e_0$, $z_2 \approx s_2e_1 + (1-s_2)e_0$. Следовательно, для произвольного $0 < r < 1$ выполняется условие

$$rz_1 + (1-r)z_2 \approx r(s_1e_1 + (1-s_1)e_0) + (1-r)(s_2e_1 + (1-s_2)e_0) \approx$$

$$rs_1e_1 + r(1-s_1)e_0 + (1-r)s_2e_1 + (1-r)(1-s_2)e_0 \approx$$

$$(rs_1 + (1-r)s_2)e_1 + (r(1-s_1) + (1-r)(1-s_2))e_0 =$$

$$[rs_1 + (1-r)s_2]e_1 + [1-(rs_1 + (1-r)s_2)]e_0.$$

Обозначим $\gamma := rs_1 + (1-r)s_2$. По построению $f(.)$, $f(\gamma e_1 + (1-\gamma)e_0) = \gamma$. Значит,

$$f(rz_1 + (1-r)z_2) = rs_1 + (1-r)s_2 = rf(z_1) + (1-r)f(z_2).$$

Пусть теперь некоторая $F(\cdot)$ удовлетворяет (2) и (3). Так как $e_1 \succ e_0$, значит, $F(e_1)>F(e_0)$. Положим $\alpha = F(e_1) - F(e_0) > 0$,

$\beta = F(e_0)$. Пусть теперь $e_1 \succ z \succ e_0$. Если $f(z)=s$, то $z \approx se_1 + (1-s)e_0$, то есть

$F(z) = F(se_1 + (1-s)e_0) = sF(e_1) + (1-s)F(e_0) = s(\alpha + \beta) + (1-s)\beta$,

и, значит, $F(z) = \alpha s + \beta = \alpha f(z) + \beta$. •

Итак, предположений 1-12 достаточно, чтобы построить по отношению предпочтения функцию полезности, единственную с точностью до переноса координат и изменения масштаба [62], то есть описать полезность в виде функции $F(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta$, где $f(x)$ – некоторая известная функция, а константы $\alpha > 0$ и β не определены. Выбор этих констант сходен с выбором нулевой точки и шкалы измерения (по Цельсию, по Фаренгейту) для измерения температуры.

В постановках задач математической экономики и управления отношение предпочтения, как таковое, фигурирует крайне редко. Функция полезности в этом случае строится почти эмпирически (на самом деле при этом используются уже полученные, готовые результаты теории полезности [46, 47, 68, 82]), например, часто в экономических задачах полезность компании равна стоимости активов в ее распоряжении и т.д. (см. подробности в [44, 68, 70, 77]). Тем не менее, всегда необходимо помнить, что для корректного использования функции полезности Неймана-Моргенштерна, предпочтение, которым она определяется, должно удовлетворять аксиомам 1-12.

Выше была построена функция полезности отдельного агента. Однако задачей теории игр является исследование взаимодействия многих агентов. Поэтому интересен вопрос о том, как соотносятся друг с другом полезности разных агентов, как «привести к общему знаменателю» шкалы измерения их полезностей. Особенную актуальность этот вопрос представляет при рассмотрении игровых моделей, в которых игроки могут передавать друг другу полезность (так называемые *игры с трансферабельной полезностью,* или *ТП-игры*, в отличие от *игр с нетрансферабельной полезностью*, или *НТП-игр*, в которых передача полезности запрещена правилами игры). Передача полезности между игроками может принимать вид денежных выплат или передачи иных материальных ценностей. Поскольку целью таких платежей является воздействие на

полезность (или *выигрыш*) игрока, понятно, что в этом случае частью описания исходов (на множестве которых определена функция полезности) должно быть количество денег или материальных ценностей, являющихся средством обмена. Можно показать [62], что для того, чтобы уменьшение полезности «донора» d при передаче некоторого количества денег соответствовало пропорциональному увеличению полезности «акцептора» a, их функции полезности $F_i(\cdot)$ должны иметь вид:

(4) $F_i(x_i, c_i) = g_i(x_i) + \lambda_i c_i$, $i \in \{d, a\}$

где $F_i(\cdot)$ – функция полезности игрока i, c_i – сумма денег в его распоряжении, x_i – остальные компоненты описания исхода для игрока i, а $g_i(\cdot)$ – полезность компонент x ситуации.

Если функции полезности имеют вид (4) для всех рассматриваемых индивидуумов, то говорят о существовании *отделимого линейно трансферабельного товара*. При этом соответствующим выбором масштаба функций предпочтения можно сделать приращения полезности при передаче некоторого количества денег не просто пропорциональными, но и равными по абсолютной величине. Наличие линейно трансферабельного товара облегчает исследование игровых моделей.

Завершив описание предпочтений участников организационных систем, перейдем к классификации игр и рассмотрению примеров игровых моделей.

2.3. Классификация и примеры игр

Теория игр является сравнительно молодой наукой. Ее самостоятельная[27] **история** насчитывает менее века [43]. В 1911 году Э. Цермело описал теоретико-игровой подход к шахматной игре, в 1921 году Э. Борель начал систематическое изучение матричных игр, в 1928 году вышла в свет работа Дж. Фон-Неймана «К теории

[27] *Зарождение теории игр как математической дисциплины можно датировать 29 июля 1654 г., то есть днем, когда Б. Паскаль написал известное письмо П. Ферма* (*это же письмо считается началом теории вероятностей*) [*43*]. *Идеи, которые можно отнести к теоретико-игровым, высказывались на протяжении 17-19 вв. Д. Бернулли, П. Лапласом, П.Л. Чебышевым, Г. Минковским и др.*

стратегических игр», содержащая основные идеи современной теории игр. В 1944 году, после выхода в свет книги Дж. Фон-Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» [48] теория игр окончательно сформировалась как самостоятельная наука.

В настоящее время теория игр – развитая математическая теория с большим количеством направлений и сложными взаимосвязями между ними. Одним из оснований **системы классификаций** теоретико-игровых задач может служить количество сторон (или, как принято говорить, *игроков*), участвующих в конфликте (*игре*). Различают *игры двух лиц* и *игры многих лиц*[28]. Так, конфликт контрабандиста и пограничников (см. раздел 2.1) – игра двух лиц. Игры двух лиц являются наиболее исследованной моделью, для них получено наибольшее число результатов [17, 20, 21, 37, 48, 63]. Тем не менее, игры многих лиц привлекают не менее пристальное внимание исследователей, в первую очередь потому, что именно такие игры наиболее часто встречаются в задачах управления.

В зависимости от ограничений на выигрыши среди игр двух лиц различают игры *с нулевой суммой* (*антагонистические* игры), в которых сумма выигрышей игроков при каждом исходе равна нулю, и игры *с произвольной суммой*, в которых сумма выигрышей игроков может отличаться от нуля для всех или некоторых исходов игры.

Другим основанием классификации является информированность сторон. Существуют игры *с полной информированностью* и игры *с неполной информированностью* о различных параметрах игры[29]. Полная информированность не означает, что рассматривается *задача принятия решения с полной информированностью*, а лишь то, что в задаче имеется только игровая неопределенность, а остальные типы неопределенности (см. первую главу) отсутствуют.

[28] *Игры, в которых имеется один активный игрок, называются играми с природой и рассматриваются, в основном, в теории статистических решений.*

[29] *Параметрами игры являются компоненты моделей принятия решений участниками игры* (*см. раздел 1.1*).

По количеству повторений игры различают *однократные* и *динамические* игры. Динамические игры с дискретным временем называются *повторяющимися* играми [33, 52, 58, 74, 82]. Динамические игры, в которых динамика описывается дифференциальными или разностными уравнениями, называются *дифференциальными* играми [1, 28, 32, 34].

По мощности множества исходов и/или стратегий разделяют *дискретные* и *непрерывные* игры (в отличие от непрерывных игр, в дискретных играх множество исходов конечно).

По возможности совместных действий различают *некооперативные* и *кооперативные* игры. Некооперативные игры – это класс моделей теории игр, в постановке которых предполагается, что в процессе выработки решений игроки не могут действовать совместно. Это значит, что запрещены договоры между игроками, передача игроками друг другу ресурсов и информации, образование каких-либо коалиций и пр. Наоборот, отличительной чертой кооперативных игр является то, что при их исследовании решающее значение имеет возможность игроков выбирать действия совместно, объединяясь для этой цели в коалиции.

В большинстве игровых моделей принимается порядок функционирования, в соответствии с которым игроки выбирают стратегии одновременно. Рассмотрение последовательности ходов позволяет выделить *иерархические игры*. Теория иерархических игр [21-24, 33, 35, 76] занимается изучением игровых моделей, в которых фиксирован порядок ходов игроков, то есть предписана последовательность, в которой игроки выбирают свои действия.

Рассмотрим некоторые содержательные (можно сказать, хрестоматийные для теории игр) примеры постановок теоретико-игровых задач.

Пример 4 [82]. «Минипокер».

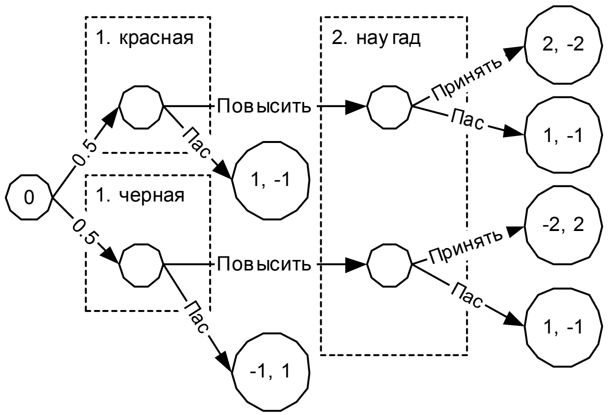

Рис. 5. Игра в развернутой форме

Опишем правила игры (см. рисунок 5). Два игрока кладут по доллару на кон. Первый игрок наугад выбирает карту из перетасованной колоды, замечая ее цвет (красный – червы или бубны, черный – пики или трефы). Второй игрок не знает цвета карты. После этого первый игрок имеет две альтернативы:

А) повысить ставку

Б) спасовать.

Если он пасует, то забирает все деньги (2 доллара), если выбрана красная карта и, наоборот, все деньги забирает второй игрок, если карта черная, и игра заканчивается. Если первый игрок повышает ставку, то он кладет еще один доллар на кон и игра продолжается следующим образом. Второй игрок выбирает свое действие: принять кон и доложить свой доллар на кон или спасовать. При пасе второго игрока все деньги забирает первый игрок. При принятии ставки, все деньги получает первый игрок, если выбрана красная карта, и второй игрок – если выбрана черная карта.

Такое представление игры называется *игрой в развернутой форме*. По введенной выше классификации, эта задача – дискретная некооперативная однократная игра двух лиц с неполной информированностью одного из игроков относительно внешних (природных) факторов. •

Пример 5. «Два начальника».

Этот пример является частным случаем примера 3. Имеются два игрока-начальника. У них есть один подчиненный. Каждый из начальников дает подчиненному задание и может как разрешить выполнять свое задание совместно с заданием противника (другого начальника), так и потребовать выполнения своего задания в первую очередь. Назовем первый выбор «сотрудничество», а второй – «эгоистическое поведение». Если задания выполняются совместно, то каждый из начальников получает по 10 единиц выигрыша. Если только один из начальников потребовал первоочередного выполнения своего задания, он получает 15 единиц выигрыша, времени на выполнение задания второго начальника у подчиненного не остается и второй начальник несет убытки в размере 5 единиц. Если оба начальника потребовали выполнения своего задания в первую очередь, подчиненный отказывается работать вообще, и начальники получают нулевые выигрыши. Выигрыши игроков можно представить в виде следующей матрицы:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \textit{сотр.} & \textit{эгоист.} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \textit{сотр.} \\ \textit{эгоист} \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 10,10 & -5,15 \\ 15,-5 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$ (игра является *биматричной*).

Здесь паре чисел в каждой из четырех ячеек матрицы соответствуют выигрыши первого и второго игрока при том или ином их поведении. Строки соответствуют выбору первого игрока, столбцы – второго.

Эта классическая игра широко известна под другим названием – «*дилемма заключенного*» [5, 19, 62, 65, 82].

По рассмотренной классификации «Два начальника» – дискретная однократная некооперативная игра двух лиц с полной информированностью.

Также можно заметить, что, в отличие от предыдущей игры, при любых стратегиях игроков сумма их выигрышей в результате не равна нулю, то есть это – игра с непротивоположными интересами, в отличие от антагонистической игры примера 5. •

Пример 6 [46, 47]. «Фермеры на общем поле».

Два фермера пасут коров на общем поле. Количество молока x, которое приносит корова, зависит от общего числа коров на поле, $x = 120 - n$ (литров), где $n = n_1 + n_2$ – общее количество коров на поле. Доход фермера определяется количеством молока, приносимым его коровами: $\Pi_1 = n_1 (120 - n_1 - n_2)$, $\Pi_2 = n_2 (120 - n_1 - n_2)$. Сколько коров выпустят на поле фермеры? В этой игре действия игроков – n_1 и n_2, а выигрыши – Π_1 и Π_2. Это также дискретная однократная некооперативная игра двух лиц с полной информированностью.

Если предположить, что фермер может выпускать коров не на полный день, то полученная игра будет уже непрерывной, множество действий каждого фермера будет представлять собой отрезок действительной оси. •

Пример 7 [74, 79, 82]. «Аукцион».

На аукционе на продажу выставлен предмет. Есть один продавец и один покупатель. Цена предмета для продавца (минимальная цена, по которой продавец готов продать предмет) r_s, цена для покупателя (максимальная цена, по которой покупатель готов купить предмет) – r_b. Оба игрока знают свою цену, но не знают цену противника. Они делают заявки p_s и p_b. Если заявка покупателя выше заявки продавца, то предмет продается по средней стоимости $p = (p_s + p_b) / 2$. Если заявка продавца выше заявки покупателя, то сделка не состоится.

Это также непрерывная игра двух лиц с непротивоположными интересами, причем имеется неопределенность относительно параметров (*предпочтений*), характеризующих противника. Для завершения описания этой игры необходимо определить *вид неопределенности*, то есть вид информации, которую могут иметь игроки о предпочтениях друг друга. В зависимости от вида этой неопределенности можно ставить различные вопросы, например, каковы рациональные ставки игроков в случаях, если:

- продавец знает лишь, что цена покупателя лежит в диапазоне от b до B, а покупатель знает, что цена продавца лежит в диапазоне от s до S?

- продавец знает вероятность $P_1(b')$, $b' \in [b; B]$ того, что цена покупателя равна b', а покупатель знает вероятность $P_2(s')$, $s' \in [s; S]$, того, что цена продавца равна s'? •

Пример 8 [65]. «Дележ в оркестре».

Директор клуба обещает 100 руб. певцу S, пианисту P и ударнику D за совместное выступление. Дуэт певца и пианиста он оценивает в 80 руб., ударника и пианиста – в 65 руб., а одного пианиста – в 30 руб. Другие дуэты и солисты им не рассматриваются (присутствие пианиста он считает обязательным). В других местах дуэт ударник-певец зарабатывает за выступление 50 руб., певец – 20 руб. Ударник один ничего не может заработать.

Как должны быть поделены деньги от выступления оркестра, чтобы никто не был обижен? •

Игры в примерах 4-8 сформулированы по-разному. Так, постановка игры в виде дерева принятия решений, как в примере 4 «Минипокер», называется *игрой в развернутой форме*. *Игрой в нормальной форме* называется представление игры в виде таблицы (как в примере 5 «Два начальника»), или в виде задания возможных действий игроков и их выигрышей в зависимости от их действий (как в примере 6 «Фермеры на общем поле») – см. главу 3.

Игры, в которых игроки неточно знают интересы противника, как в примере 7 «Аукцион», называются *играми с неполной информированностью* – см. главу 4.

Наконец, для теории кооперативных игр базовой является постановка задачи в форме перечисления выигрыша всевозможных объединений (*коалиций*) игроков, как в примере 8 «Дележ в оркестре». Такая постановка задачи называется игрой *в форме характеристической функции* – см. главу 5.

Ниже будут подробно описаны все перечисленные формы игр и способы их исследования.

Итак, игровая задача может задаваться в различных формах. Одни формы больше подходят для описания одних классов игр (реальных ситуаций), другие – для других. Тем не менее, такое многообразие постановок задач порождает свои сложности. Может ли одна и та же игра быть представлена в различных формах? Стоит ли рассматривать все эти игры или можно ограничиться рассмотрением игр только в одной форме? Как тогда будут соотноситься решения игры, представленной в одной форме с решениями этой же игры, представленной в другой форме? Ниже будут даны ответы на некоторые из этих вопросов. В частности, в главе 3 будет показано, каким образом производится переход от игры в развернутой форме к игре в нормальной форме. В главе 5 будет продемонстрирован переход от игры в нормальной форме к игре в форме характеристической функции.

Перейдем к изложению основных результатов теории игр.

ГЛАВА 3. ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТЬЮ

3.1. Определение игры в развернутой форме

Развернутая форма – естественный способ представления *салонных игр*, вроде шахмат или преферанса. Однако и другие игры (по крайней мере, дискретные), обычно сначала рассматриваются в развернутой форме.

Для того чтобы продемонстрировать основные элементы описания игры в развернутой форме, вспомним пример 4 «Минипокер» (см. рисунок 5).

Игры в развернутой форме представляются в виде дерева, вершины которого представляют собой текущие игровые ситуации. Вершины соединяются дугами, которые означают возможные переходы между ситуациями. Если из данной вершины выходят несколько дуг, это значит, что в данной ситуации ход игры зависит от выбора одного из игроков или от реализации внешнего события. Самая левая вершина («*корень*» дерева) означает ситуацию в начале игры, *конечные* (*терминальные*) *вершины* означают возможные исходы игры. Каждой конечной вершине поставлен в соответствие *вектор выигрышей* игроков. В случае двух игроков этот вектор состоит из пары чисел – значений полезности игроков при заданном исходе игры.

Для каждой нетерминальной вершины необходимо указать, какой игрок *контролирует* данную вершину, то есть осуществляет выбор. Вершина может и не контролироваться ни одним из игроков, тогда эту вершину контролирует природа (как, например, стартовую вершину в примере 4). Вершина, контролируемая игроком с номером i, называется еще «*точкой выбора i-го игрока*».

При каждом розыгрыше игроки (и реализация природных факторов) выбирают *путь* в этом дереве от стартовой вершины до одной из терминальных вершин.

Немаловажной деталью описания игры в развернутой форме является информированность игрока в каждой контролируемой им игровой ситуации. Из рисунка 5 видно, что, поскольку первый игрок знает, выпала ему красная или черная карта, он может различить две ситуации принятия решения, в отличие от второго игрока, который не знает цвета масти выпавшей карты, но должен принять решение: принять ставку или спасовать. Значит, для полноты описания необходимо, помимо игрока, контролирующего данную вершину, указать информационное состояние, в котором он находится. На рисунке 5 контролируемые вершины второго игрока объединены пунктиром, чтобы показать, что им соответствует одно информационное состояние, названное – «Наугад». Заметим, что возможные альтернативы вершин, объединенных одним информационным состоянием, должны совпадать, иначе нарушается предположение об одинаковой информированности игрока в обеих ситуациях.

Таким образом, для описания игры n лиц в развернутой форме необходимо определить:

1) Дерево, ребрам и вершинам которого присвоены следующие метки:

2) Каждой терминальной вершине F_i ставится в соответствие метка-«вектор выигрышей», то есть числовой вектор $f(F_i)=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (размерности n) выигрышей (полезностей) игроков.

3) Каждой нетерминальной вершине ставится в соответствие метка контроля – номер игрока $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$,

контролирующего вершину. Если данную вершину контролирует природа (внешние обстоятельства, случай и т.д.), то эта метка равна нулю.

4) Каждой нетерминальной вершине ставится в соответствие метка информационного состояния игрока (обычно она отделяется от номера игрока точкой).

5) Каждое ребро помечено возможными альтернативами, доступными для выбора игрока, контролирующего вершину, из которой выходит данное ребро. Если вершину контролирует природа, метки должны обозначать вероятности реализации данной альтернативы, причем сумма вероятностей должна равняться единице.

6) Набор исходящих ребер множества вершин с одним информационным состоянием имеет одинаковый набор маркировок.

Определение 1: Игрой в развернутой форме называется система 1-6.

Описание игры в развернутой форме довольно сложно, хотя и содержательно богато. Следует ожидать, что и формулировка понятия решения для таких игр будет громоздка. Поэтому вместо того, чтобы подробно исследовать игры в развернутой форме, введем новую, более простую форму игры (*нормальную*, или *стратегическую форму*), определим формальную процедуру перехода от игр в развернутой форме к играм в нормальной форме, и на время забудем о существовании развернутой формы вообще.

3.2. Определение игры в нормальной форме

В отличие от довольно сложной постановки игры, рассмотренной выше, постановка игры в нормальной форме сравнительно проста. Предполагается, что игроки имеют возможность лишь один раз выбрать альтернативу (действие), каждый из своего *множества возможных действий*. Также предполагается, что выбор действия игроки производят одновременно и независимо друг от друга, не зная выбора противников. После выбора всех действий реализуется определенный исход. Каждому исходу соответствуют значения полезности игроков, их выигрыши.

Всем игрокам известны как зависимость их выигрышей от исхода игры, так и выигрыши противников. То есть в таком виде определение игры в нормальной форме подходит только для игр с полной информированностью.

В соответствии с введенной выше классификацией, среди игр в нормальной форме можно выделить *антагонистические игры*, в которых сумма выигрышей игроков при любом исходе равна нулю, и *игры с непротивоположными интересами*, в которых сумма выигрышей может быть различной для разных ситуаций.

Для экономических задач и задач организационного управления типична ситуация, когда интересы игроков не противоположны. Тогда, в принципе, игроки могут быть заинтересованы в совместных действиях, например, в обмене информацией. Однако, иногда подобное кооперирование запрещено правилами игры. Этот случай является предметом исследования теории некооперативных игр. Кроме того, результаты теории некооперативных игр будут использованы в дальнейшем при исследовании кооперативных игр.

Определение 2: *Игрой в нормальной форме n* лиц с произвольной суммой называется система[30] $\Gamma = (X_i, K_i, i \in N)$, где X_i – непустые множества действий, K_i – функции выигрыша игроков, K_i: $X_1 \times \ldots \times X_n \to \Re^1$.

Обычно множества действий считаются *компактами*, то есть *ограниченными и замкнутыми множествами*. Определения замкнутости и ограниченности подразумевают, что на множестве действий определено понятие сходимости, то есть задана, как минимум, топология. Часто в доказательствах необходимо наличие метрики на множестве действий. На практике множества действий игроков обычно представляют собой подмножества векторного пространства, для которых можно использовать евклидову метрику.

[30] *При описании моделей теории игр (вне их связи с задачами управления ОС) будет использоваться принятая в теории игр система обозначений.*

Если множества действий игроков конечны, то действия каждого игрока можно последовательно пронумеровать. Если, к тому же, игроков двое, выигрыши первого игрока можно представить в виде матрицы, в которой он выбирает действие – номер строки, его противник выбирает действие – номер столбца, а на пересечении столбца и строки находится число, соответствующее выигрышу первого игрока. Аналогичную матрицу можно построить и для второго игрока. Определенная с помощью пары таких матриц игра в нормальной форме называется *биматричной*.

Игры из примеров 5 и 6 – это игры в нормальной форме, причем в примере 5 рассматривается биматричная игра. Приведем еще один пример биматричной игры.

<u>Пример 9 [65]. «Семейный спор».</u>

Муж и жена решают, куда им пойти – на футбольный матч или в театр. Если они не договариваются, то остаются дома. Первое действие каждого из игроков соответствует поездке на футбольный матч, второе – в театр. Биматрица игры записывается так (первое число пары соответствует выигрышу мужа, второе – выигрышу жены): $A = \begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix}$. •

3.3. Переход от игры в развернутой форме к игре в нормальной форме

Постановка игры в нормальной форме гораздо проще для изучения и формализации, чем игра в развернутой форме, поэтому ниже будут рассматриваться только решения игр в нормальной форме. Для игр же в развернутой форме построим формальную процедуру перехода от них к играм в нормальной форме.

Сначала введем для игры в развернутой форме понятие *стратегии* игрока.

<u>Определение 3:</u> *Стратегией* игрока для игры в развернутой форме называется функция, отображающая множество информационных состояний игрока на множество его ходов таким образом, что каждому информационному состоянию ставится в соответствие один из возможных в данном состоянии ходов.

Таким образом, стратегия определяет, какую альтернативу игрок должен выбирать в каждом из своих информационных состояний.

Множество стратегий каждого игрока будем обозначать X_i. Элементы x декартова произведения множеств стратегий всех игроков будем называть векторами стратегий, а само декартово произведение будем обозначать X.

Для каждой вершины Q графа игры в развернутой форме и каждого вектора стратегий $x \in X$ определим вероятность $P(Q|x)$ реализации данного состояния Q при использовании игроками стратегий x с помощью рекуррентной процедуры, а именно:

- если Q – корневая вершина, то, для произвольных x, $P(Q|x) = 1$;
- если вершина R предшествует вершине Q в графе игры, переход из R в Q определяется природой и происходит с вероятностью p, то $P(Q|x) = P(R|x)\, p$;
- если вершина R предшествует Q в графе игры и переход из R в Q определяется одним из игроков, то $P(Q|x) = P(R|x)$ в случае, если данный переход содержится в векторе стратегий игроков, в противном случае $P(Q|x) = 0$.

Таким способом для каждой терминальной вершины F_i можно определить соответствующие вероятности $P(F_i|x)$ попадания в них при условии использования игроками вектора стратегий x.

Теперь можно определить ожидаемые значения выигрышей игроков при использовании ими вектора x по формуле

(5) $K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_j f_i(F_j) P(F_j|x)$,

где F_j – терминальные вершины графа игры.

Теперь можно определить игру в нормальной форме, которая соответствует исходной игре в развернутой форме. Множество игроков новой игры совпадает с множеством игроков исходной игры, множествами действий будут определенные выше множества стратегий X_i, а функция выигрыша определяется формулой (5). Эта игра вполне эквивалентна в исследовании исходной игре в развернутой форме и, если определить, что для нормальной формы игры целесообразными является набор действий $x \in X$, тем самым полностью определяется и поведение игроков в исходной игре.

Отметим, что, поскольку выше было дано описание лишь дискретных игр в развернутой форме, то и получающиеся с помощью рассмотренной процедуры игры в нормальной форме также будут дискретными.

<u>Пример 10. Построение игры в нормальной форме для примера 4 «Минипокер».</u>

Игрок 1 имеет два информационных состояния: он знает, каков цвет выбранной карты. Следовательно, его стратегиями будут: {(повысить, повысить), (повысить, пасовать), (пасовать, повысить), (пасовать, пасовать)}. В этих парах первый элемент означает действие игрока в случае выпадения красной, второй – в случае выпадения черной карты.

Второй игрок имеет одно информационное состояние и две возможных стратегии {(Принять), (Пасовать)}.

Нормальная форма игры, построенная с учетом усреднения полезности по состояниям природы (цвета выбранной карты) тогда будет следующей:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \textit{Принять} & \textit{Пасовать} \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{Повысить, повысить} \\ \textit{Повысить, пасовать} \\ \textit{Пасовать, повысить} \\ \textit{Пасовать, пасовать} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (1,-1) \\ (0.5,-0.5) & (0,0) \\ (-0.5,0.5) & (1,-1) \\ (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array} . \bullet$$

Понятно, что непрерывную игру, в которой множество стратегий не является конечным, изобразить в виде конечного графа невозможно. Однако, в большинстве случаев можно непосредственно построить соответствующую игру в нормальной форме.

3.4. Смешанные стратегии

При построении нормальной формы игры по ее развернутой форме, множества стратегий исходной игры превращаются во множества действий игры в нормальной форме. Зачастую действие игрока в игре в нормальной форме также называют *стратегией*. Это не совсем верно. Обычно термин «стратегия» имеет более широкий смысл и используется для обозначения «плана», который

каждый игрок составляет до начала игры. Этот план описывает все действия, которые игрок будет предпринимать во всех возможных игровых состояниях. Стратегия игроков даже в игре в нормальной форме может быть более сложной, чем просто выбор одного из элементов множества действий X_i (стратегия, состоящая в выборе действия из множества X_i, называется *чистой стратегией*).

Вспомним, что в играх в развернутой форме для тех ходов, которые делала природа, указывалась вероятность того или иного ее «хода». Аналогично и игроки могут не выбирать в каждой ситуации некоторое единственное действие, а выбирать одно из действий с определенной вероятностью. Тогда выбор игрока будет описываться вероятностным распределением на множестве возможных в данной игровой ситуации действий, которое называется *смешанной стратегией*. Оказывается, что такое поведение в некоторых ситуациях может привести игрока к более выгодному распределению полезностей. Например, пусть в рассмотренной выше игре «Минипокер» (см. примеры 4 и 10), первый игрок в результате долгого размышления выбрал стратегию повышать, если выпала красная карта, и пасовать, если выпала черная. Тогда, если игрок 2 достаточно умен, он может повторить со своей стороны рассуждения первого игрока, и считать, что если игрок 1 повышает, значит, выпала красная карта, и ему нужно пасовать[31]. Если же игрок 1 может использовать смешанные стратегии, то второй игрок уже не может установить цвет карты по ходу первого игрока. Его задача усложняется. Таким образом, *блеф* (а в данном случае именно так можно охарактеризовать использование первым игроком смешанных стратегий) может быть очень полезен. Мало того, оказывается, что возможность использования игроками смешанных стратегий играет немалую роль в доказательстве существования решения теоретико-игровых задач.

<u>Определение 4:</u> *Смешанной стратегией* χ_i i-го игрока ($i \in N$) для игры в нормальной форме называется распределение

[31] *Класс игр, в которых наблюдение выборов партнеров дает игрокам дополнительную информацию, получил название signaling games* [*74*].

вероятности на множестве действий X_i с плотностью $\chi_i(x_i)$, где $x_i \in X_i$.

<u>Определение 5:</u> Вектор действий $x_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ всех игроков, кроме i-го, называется *обстановкой игры для i-го игрока* ($i \in N$).

<u>Определение 6:</u> Распределение вероятности (с плотностью $\chi_{-i}(x_{-i}) = \prod_{j \neq i} \chi_j(x_j)$) реализации заданной обстановки при использовании игроками смешанных стратегий χ_j называется *обстановкой в смешанных стратегиях для i-го игрока*, $i \in N$.

Ожидаемый выигрыш игроков при использовании ими смешанных стратегий будет вычисляться как математическое ожидание их функции выигрыша. Для дискретных игр

$$\widetilde{K}_i(\chi) = \sum_{x_i \in X_i} \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(x_i, x_{-i}) \chi_i(x_i) \chi_{-i}(x_{-i}),\ i \in N.$$

Смешанная стратегия для непрерывных игр представляет собой вероятностную меру на множестве чистых стратегий игрока. Ожидаемая полезность игроков при использовании ими смешанных стратегий будет интегралом функции полезности по декартову произведению этих вероятностных мер.

Дискретную игру, в которой игроки используют смешанные стратегии, можно привести к непрерывной игре, в которой игроки используют только чистые стратегии. Это достигается путем замены множества чистых стратегий игрока на множество его смешанных стратегий, а функции выигрыша – ее математическим ожиданием.

Тогда можно исследовать свойства новой игры в предположении, что игроки используют только чистые стратегии. Это, однако, не всегда бывает удобным, так как такой переход приводит к замене более простой, дискретной игры, более сложной – непрерывной.

Приведем несколько свойств смешанных стратегий в дискретных играх.

<u>Лемма 1 [82].</u> Ожидаемая полезность дискретной игры – непрерывная функция смешанных стратегий. •

<u>Теорема 2 [82].</u> Для произвольной обстановки в смешанных стратегиях найдется чистая стратегия, являющаяся «наилучшим ответом» на данную обстановку, то есть

$$\forall \chi_{-i} \quad \max_{\chi_i} K(\chi_i, \chi_{-i}) = \max_{x_i \in X_i} K(x_i, \chi_{-i}).$$

Более того, любая смешанная стратегия χ_i, которая содержит с ненулевой вероятностью чистую стратегию, не являющуюся лучшим ответом на обстановку χ_{-i}, не будет и сама лучшим ответом на обстановку χ_{-i}.

Доказательство. Множество смешанных стратегий – это компакт, в котором содержатся и чистые стратегии. Для игрока i зафиксируем обстановку в смешанных стратегиях χ_{-i}. Тогда ожидаемый выигрыш игрока i будет функцией только его смешанной стратегии χ_i. Очевидно, существует смешанная стратегия χ_i^*, при использовании которой ожидаемый выигрыш достигает максимума.

Для стратегии χ_i^* ожидаемый выигрыш есть

(6) $K_i(\chi_i^*, \chi_{-i}) = \sum_{x_i \in X_i} \chi_i^*(x_i) \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(x_i, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i})$.

Так как $\sum_{x_i \in X_i} \chi_i^*(x_i) = 1$, то $K_i(\chi_i^*, \chi_{-i})$ представляет собой взвешенную с весами $\chi_i^*(.)$ сумму величин

(7) $\widetilde{K}_i(x_i) = \sum_{x_{-i} \in X_{-i}} K_i(x_i, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i})$.

Взвешенная сумма (6) не может превышать своего максимального слагаемого, то есть существует чистая стратегия x_i^{**}, для которой $\widetilde{K}_i(x_i^{**}) \geq K_i(\chi_i^*, \chi_{-i})$. Но в правой части этого неравенства стоит максимальный ожидаемый выигрыш, возможный при использовании смешанных стратегий. Значит, неравенство можно заменить равенством, а это, в свою очередь, значит, что максимальный ожидаемый выигрыш достигается на некоторой чистой стратегии. Кроме того, если любой не максимальный элемент (7) входит в сумму (6) с ненулевым весом, то ожидаемая полезность будет строго меньше максимально возможной, и смешанная стратегия не будет наилучшим ответом на обстановку χ_{-i}. •

Смешанные стратегии – довольно хрупкая конструкция. Их использование в ряде практических задач неоднократно подвергалось критике. Один из аргументов [21] против использования смешанных стратегий таков: «Применение смешанных стратегий подходит только для игр с большим числом повторений. Рассмотрим игру, которая должна быть сыграна лишь один раз. При использовании смешанных стратегий игрок должен выбирать свое решение на основании реализации случайного процесса, задаваемого распределением вероятности его смешанной стратегии. Однако эта реализация может дать стратегию, настолько «экзотическую», что ее применение в единичной игре будет малоэффективно, несмотря на теоретические обоснования эффективности такой смешанной стратегии в смысле среднего выигрыша на протяжении многих игр».

Поэтому, когда возможно, особенно при моделировании реальных систем, следует использовать только чистые стратегии.

3.5. Различные концепции решения игр

Выше были перечислены постановки задач теории игр. Теперь наступило время для того, чтобы приступить к решению этих задач. Но что означает найти решение игры, решить теоретико-игровую задачу?

С формальной точки зрения можно разделить задачи принятия решений в теории игр, когда игра рассматривается с точки зрения одного из игроков, которому (на основании исследования игры) рекомендуется то или иное поведение, и задачи прогнозирования результатов игры, то есть описательные задачи, когда исследователь занимается поиском возможных устойчивых исходов игры при рациональном поведении игроков. Понятно, что, в силу специфики теории игр, эти задачи взаимосвязаны, так как задача принятия решений в теории игр с неизбежностью требует прогнозирования поведения других рациональных игроков. Предположение о разумности противников/партнеров требует рассмотрения их поведения с не меньшей подробностью, чем поведения ЛПР, при

этом исследователю приходится становиться на точку зрения каждого из игроков, то есть абстрагироваться (хотя бы на время) от непосредственных интересов оперирующей стороны. Аналогично и задача описания рациональных исходов распадается на задачи рационального выбора всех игроков, то есть рассмотрения игры с точки зрения каждого из игроков. Тем не менее, эти два подхода несколько различаются в методическом плане. В некоторых ситуациях (например, в иерархических играх – см. шестую главу) более продуктивным оказывается подход теории принятия решений, в других же ситуациях лучше подходит описательный метод. Соответственно, различные концепции решения игр более склонны к тому подходу, в рамках которого они зародились.

Решением игры в самом общем смысле можно назвать любое описание того, каким образом должны вести себя игроки в той или иной игровой ситуации [18]. Это не обязательно должен быть набор рекомендуемых для каждого игрока действий. Решением, например, может быть набор исходов игры. Такое решение можно интерпретировать как набор ситуаций, рациональных относительно некоторых предположений о поведении игроков. То есть при рациональном поведении игроков должны реализовываться только ситуации, принадлежащие решению. Решением игры может быть и набор смешанных стратегий, если одних только чистых стратегий недостаточно.

В настоящее время в теории игр не существует единой концепции решения, одинаково подходящей для всех классов игр. Связано это, во-первых, с тем, что формальное описание игры представляет собой лишь очень грубый «слепок» с чрезвычайно сложных реальных процессов, происходящих в ходе игры: обмена информацией, возможных договоров между игроками, самостоятельных действий игроков по увеличению своей информированности. Нельзя исключать и возможности иррационального поведения игроков, которое на сегодняшний день практически не поддается формализации.

Если ставить целью включить все подобные детали в описание игры, то оно может стать слишком сложным для конструктивного анализа.

Другая сложность состоит в том, что само понимание того, что такое рациональное поведение, различно у разных людей. То, что кажется рациональным одним, может показаться не рациональным другим, и современная наука зачастую не знает объективных причин, лежащих за этими различиями в поведении [31, 38, 39, 46, 73].

В связи с этим теория игр не всегда может точно предсказать поведение игроков в реальной игровой ситуации или дать однозначную рекомендацию по принятию решения.

Это общая проблема всех формальных, модельных исследований, не только в теории игр, но и в физике, экономике и т.д. Тем не менее, ценность модельных исследований конфликта бесспорна, поскольку они дают возможность, исследуя достаточно простые модели, выяснять основные закономерности, которые лежат в основе рационального поведения в конфликтных ситуациях.

Задачей теории игр на современном этапе ее развития является не поиск единственного решения игры, то есть полного предсказания поведения игроков, а, скорее, отсечение ситуаций и способов поведения игроков, которые рациональными, разумными, назвать нельзя.

Формально теоретико-игровую концепцию решения можно представить, как некоторое отображение множества игр на множество решений. Это отображение может не охватывать все возможные игры, то есть решение может не существовать для некоторых игр или их классов, может быть неоднозначным, то есть ставить в соответствие некоторой игре несколько решений, которые представляются разумными с точки зрения этой концепции.

Определение любой концепции решения невозможно без некоторых предположений относительно психологии игроков, того, что они понимают под рациональным поведением. По сути, любое такое предположение, которое позволяет сузить множество альтернатив в игровой задаче выбора, определяет некоторую концепцию решения [18]. После этого можно говорить о формализации концепции решения, проверке существования или единственности решения для всех игр или некоторых классов игр, исследовать свойства решений, разрабатывать алгоритмы их нахождения.

Сами предположения о рациональном поведении при этом остаются на заднем плане. Их обоснование не является, на самом деле, сферой действия теории игр или теории принятия решений, и относятся скорее к сфере психологии, социологии и философии.

Этот подход был продемонстрирован выше при определении условий, которым должно удовлетворять отношение предпочтения, чтобы на его основе можно было определить функцию полезности (см. раздел 2.2). Условия формулировались в виде набора аксиом. Аналогично можно поступить и при формулировке концепции решения [18, 46]:

Шаг 1. Определить аксиомы, фиксирующие некоторое представление о рациональном поведении.

Шаг 2. Проверить, что аксиомы не противоречат друг другу.

Шаг 3. Убедиться, что аксиомы позволяют сузить множество рассматриваемых игроками альтернатив.

Шаг 4. На основе введенных аксиом построить механизм нахождения решения игры.

Шаг 5. Исследовать свойства решений: их существование для всех (или некоторых) классов игр, единственность решения и т.д.

Шаг 6. Разработать алгоритмы вычисления решения.

Известные на сегодняшний день концепции решения обладают одним из двух недостатков: либо решение существует не для всех игр, либо существуют игры, для которых это решение противоречит здравому смыслу. Трудности с поиском приемлемой общей концепции решения привели к появлению многочисленных частных концепций, удовлетворяющих требованиям здравого смысла, но существующих только для ограниченного класса игр.

Ниже рассматриваются наиболее часто используемые в теории игр и в теории принятия решений принципы рационального поведения и соответствующие им концепции равновесия (решения игры). Соотношение между различными концепциями равновесия обсуждается в разделе 3.13.

3.6. Удаление доминируемых стратегий

Определение 7: Стратегия $x_i \in X_i$ называется *строго доминируемой* стратегией игрока i, если существует стратегия $y_i \in X_i$ такая, что для произвольной обстановки x_{-i}, выполняется неравенство[32] $K_i(y_i, x_{-i}) > K_i(x_i, x_{-i})$.

Определение 8: Стратегия $x_i \in X_i$ называется *строго недоминируемой* стратегией игрока i, если для произвольной стратегии $y_i \in X_i$ найдется обстановка x_{-i} такая, что $K_i(y_i, x_{-i}) \le K_i(x_i, x_{-i})$.

Использование строго доминируемых стратегий представляется неразумным способом поведения, ведь, независимо от поведения противников, можно получить больший выигрыш, используя одну из строго недоминируемых стратегий.

Первое, что можно сделать для сужения множеств альтернатив игроков – это убрать из рассмотрения строго доминируемые чистые стратегии. После удаления из игры доминируемых стратегий одного из игроков может оказаться, что одна или несколько стратегий другого игрока, недоминируемых в исходной игре, становятся доминируемыми в новой игре. Тогда процесс удаления можно повторять до тех пор, пока все стратегии всех игроков будут недоминируемыми.

Легко показать, что для любой дискретной игры множество строго недоминируемых стратегий для каждого игрока не пусто. Действительно, поскольку отношение доминирования транзитивно, а стратегий конечное число, всегда найдется недоминируемая стратегия.

Множество недоминируемых стратегий непусто и в случае бесконечных компактных множеств стратегий и функций выигрыша, непрерывных по всем переменным [82].

Точно так же, как для чистых стратегий, можно определить и доминирование смешанных стратегий. Одна смешанная стратегия доминируется другой, если для произвольного вектора смешанных стратегий остальных игроков ожидаемая полезность от использования первой смешанной стратегии ниже, чем от использования второй стратегии.

Удаление доминируемых стратегий, тем не менее, довольно слабая концепция решения, так как во многих практически интересных играх все стратегии строго недоминируемы. Ее применение к анализу игры оправданно на первоначальном этапе, когда, за счет исключения из рассмотрения доминируемых стратегий, исследование игры упрощается.

3.7. Равновесие в доминантных стратегиях

Определение 9: Стратегия x_i^* называется *доминантной стратегией игрока* i, если для любой обстановки $x_{-i} \in X_{-i}$ и для любых $x_i \in X_i$ справедливо неравенство $K_i(x_i^* \mid x_{-i}) \ge K_i(x_i | x_{-i})$.

Это определение означает, что, если у игрока, независимо от действий противников, есть стратегия, дающая ему максимальный по сравнению с другими его стратегиями выигрыш, то эта стратегия называется *доминантной*.

Целесообразность использования каждым игроком своих доминантных стратегий очевидна.

Определение 10: Если для каждого игрока i существует доминантная стратегия x_i^*, то их совокупность $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ называется *равновесием в доминантных стратегиях* (*РДС*).

Равновесие в доминантных стратегиях существует далеко не для всех игр. Приведем несколько лемм, определяющих некоторые классы игр, в которых существует равновесие в доминантных стратегиях.

Лемма 2 [65]. Если в игре n лиц $x_i \in [a_i, b_i]$, функции выигрыша непрерывны по совокупности стратегий и для каждого игрока частная производная $\frac{\partial K_i}{\partial x_i}(x_i, x_{-i})$ существует и везде знакопостоянна, то существует РДС. При этом доминантной стратегия x_i^* i-го игрока будет стратегия

[32] *Для вектора стратегий* $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *используется обозначение* (y_i, x_{-i}).

$$x_i^* = \begin{cases} a_i, \dfrac{\partial K_i}{\partial x_i} < 0 \\ b_i, \dfrac{\partial K_i}{\partial x_i} > 0 \end{cases}, \ i \in N.$$

Идею леммы 2 можно обобщить на более широкий класс игр.

Лемма 3 [65]. Если в игре n лиц $x_i = [a_i, b_i]$, а функция выигрыша произвольного игрока i *сепарабельна* по стратегии этого игрока, то есть $K_i(x_i, x_{-i}) = K_i^0(x_i) + K_i^1(x_{-i})$, $i \in N$, и $K_i^0(\cdot)$ имеет единственный максимум на множестве действий X_i, то существует РДС, причем для игрока i его доминантная стратегия:

$$x_i^* = \arg\max_{x_i \in X_i} K_i^0(x_i), \ i \in N.$$

Для доказательства лемм 2 и 3 достаточно проверить определение РДС.

3.8. Оптимальность по Парето

«Равновесие» Парето можно назвать, наверное, самым общим принципом рациональности. Принцип В. Парето утверждает, что, если для ситуации x существует такая ситуация y, что выигрыш каждого из игроков при реализации ситуации y не меньше, чем при реализации ситуации x, и по крайней мере один игрок получает выигрыш, строго больший, то игроки предпочтут ситуацию y ситуации x. Формально определение выглядит следующим образом.

Определение 11: Ситуация x^* в игре Γ называется *оптимальной по Парето*, если для любой ситуации $x \neq x^*$, найдется игрок i, такой, что $K_i(x) < K_i(x^*)$.

Этот принцип представляется в некотором смысле полярным, противоположным к равновесию в доминантных стратегиях. Если РДС представляет собой верх индивидуалистического поведения игроков, то равновесие Парето является критерием сотрудничества. Действительно, если есть ситуация, которая приносит всем игрокам не меньший доход, чем существующая, то почему им не реализовать более выигрышную для всех них ситуацию? Однако для этого необходимы объединенные усилия всех игроков, так как

реализующаяся ситуация зависит от «правильного» выбора всех стратегий. Из принадлежности ситуации множеству недоминируемых по Парето ситуаций не следует, что такая ситуация выгодна для всех игроков. Как будет показано ниже при рассмотрении равновесия Нэша, отдельные игроки могут быть недовольны своим выигрышем в недоминируемой по Парето ситуации, так как, изменив в одиночку свою стратегию, они могут увеличить свой выигрыш. Ответные действия других игроков, ущемленных таким поведением, могут вывести ситуацию из множества Парето.

Как и удаление доминируемых стратегий, равновесие Парето обычно выделяет достаточно широкое множество ситуаций, в которых одновременно не может быть увеличен выигрыш всех игроков. Тем не менее, очевидная рациональность оптимальных по Парето исходов приводит к мысли, что хорошая теоретико-игровая концепция решения должна считать рациональными только оптимальные по Парето исходы.

Пример 11. «Сравнение оптимальности по Парето и РДС».

Рассмотрим игру, в которой участвуют $n > 2$ игроков со стратегиями $x_i \in [0; 1]$. Функции выигрыша игроков: $K_i = x_i - \sum_{j \neq i} x_j$.

Так как целевые функции сепарабельны, доминантными стратегиями всех игроков являются стратегии $x_i = 1$ (см. лемму 3). Выигрыши игроков при этом будут равны $K_i = 2 - n < 0$.

Равновесие в доминантных стратегиях не оптимально по Парето, поскольку при выборе, скажем, $x_i = 0$ все игроки получают нулевой выигрыш вместо отрицательного выигрыша в РДС. •

Этот пример показывает, что стремление к общему благу может вступать в противоречие с индивидуальными интересами. Используя доминантные стратегии, все игроки обеспечивают себе меньший выигрыш, чем при использовании строго доминируемой стратегии $x_i = 0$.

Неустойчивость оптимальной по Парето ситуации поднимает вопрос о целесообразности расширения рассматриваемой модели игры. Можно, например, включить в модель возможность заключения игроками договора о выборе стратегий. Если этот договор будет предусматривать наказание за невыполнение соглашения, оптимальный по Парето исход в этой игре будет достижим [51]. Такие игровые модели будут рассмотрены ниже. Аналогичные идеи используются для обеспечения устойчивости оптимальных по Парето исходов в повторяющихся играх [21, 33, 52, 58].

3.9. Равновесие Нэша

Стремление к устойчивости решений является широко распространенным способом формулирования принципов рационального поведения в теории игр. Устойчивость при этом может пониматься по-разному. Самый популярный принцип рационального поведения в некооперативных играх рекомендует в качестве рациональных исходов использовать *ситуации равновесия Нэша*. Они характеризуются тем, что отклонение от данной ситуации равновесия одним из игроков не может увеличить его выигрыша. Можно сказать, что ситуация называется равновесной по Нэшу, если она устойчива относительно индивидуального отклонения игроков.

Определение 12: Ситуация $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу* (*в чистых стратегиях*), если для всех $i \in N$ и $x_i \in X_i$, справедливо неравенство

$$K_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq K_i(x_i, x_{-i}^*).$$

Определение 13: Совокупность всех равновесных по Нэшу ситуаций игры называется *множеством равновесий Нэша*.

Если ситуация x^* – равновесие Нэша, то никому из игроков не выгодно в одиночку отклоняться от нее. Однако возможно, что, объединившись, игроки могут улучшить свое положение выходом из равновесия Нэша (см. раздел 3.11).

Например, в примере 5 «Два начальника» единственным равновесием Нэша является ситуация ($x_1 = x_2 =$ «Эгоист.»). При этом, поскольку равновесие Нэша в данной игре не является оптимальным по Парето, оба игрока могут улучшить свое состояние, выбрав ситуацию ($x_1 = x_2 =$ «Сотр.»). Однако, эта ситуация уже не будет равновесной, так как отклонение одного из игроков от этой ситуации увеличивает его выигрыш (см. также пример 11). Именно поэтому сложно ожидать от игроков сотрудничества в этой игре.

Определение 14: Набор смешанных стратегий $\chi^* = (\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots, \chi_n^*)$ называется *ситуацией равновесия Нэша в смешанных стратегиях*, если для любого игрока $i \in N$ и произвольной смешанной стратегии χ_i справедливо неравенство

$$\widetilde{K}_i(\chi_i^*, \chi_{-i}^*) \geq \widetilde{K}_i(\chi_i, \chi_{-i}^*),$$

где $\widetilde{K}_i(\cdot)$ – результат усреднения функций выигрыша игроков по используемым ими смешанным стратегиям.

Множество равновесий Нэша в чистых стратегиях может оказаться пустым для некоторых игр, и возможное отсутствие равновесных ситуаций является большим недостатком равновесия Нэша в чистых стратегиях. Тем не менее, для равновесия в смешанных стратегиях справедлив следующий результат

Теорема 3 [59.]. Для произвольной дискретной игры существует, по меньшей мере, одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Доказательство [82]. Множество смешанных стратегий каждого игрока – непустой выпуклый компакт (ограниченное и замкнутое множество) в конечномерном пространстве. Обозначим множество наилучших ответов игрока на произвольную обстановку χ_{-i}

(8) $R_i(\chi_{-i}) = \operatorname{Arg}\max_{\chi_i} \widetilde{K}_i(\chi_i, \chi_{-i})$.

По теореме 2, это множество представляет собой множество всех вероятностных распределений на множестве чистых стратегий – наилучших ответов на заданную обстановку. Поэтому R_i – выпуклое множество, так как оно представляет собой ограниченное линейными неравенствами подмножество выпуклого множества смешанных стратегий [74, 82]. Определим многозначное соответствие

(9) $R(\chi) = (R_1(x_{-1}), \ldots, R_n(x_{-n}))$,

которое ставит в соответствие каждой ситуации множество – декартово произведение множеств стратегий – наилучших ответов каждого игрока на обстановку, заданную остальными компонентами ситуации. Для произвольной ситуации в смешанных стратегиях χ, $R(\chi)$ является непустым, выпуклым компактом (так как является декартовым произведением непустых, выпуклых компактов).

Для дальнейшего доказательства воспользуемся *теоремой Какутани*. Введем сначала определение:

Определение 15: Многозначное отображение F компакта S в себя, называется *полунепрерывным сверху*, если для любых сходящихся последовательностей $\chi^k \in S$ ($\chi^k \to \chi$), и $\rho^k \in S$ ($\rho^k \to \rho$), таких, что $\rho^k \in F(\chi^k)$, ρ принадлежит $F(\chi)$.

Теорема 4 [82] (теорема Какутани о неподвижной точке). Пусть S есть непустой, выпуклый компакт конечномерного пространства. Если F – полунепрерывное сверху многозначное соответствие, которое ставит в соответствие каждой точке S непустое выпуклое подмножество S, то существует такой элемент $\chi^* \in S$, что $\chi^* \in F(\chi^*)$.

Покажем, что отображение R полунепрерывно сверху.

Для этого рассмотрим произвольные сходящиеся последовательности χ^k и ρ^k из определения полунепрерывности сверху.

Из того, что $\rho^k \in R(\chi^k)$ следует, что для произвольной смешанной стратегии σ_i выполнено $\widetilde{K}_i(\rho_i^k, \chi_{-i}^k) \geq \widetilde{K}_i(\sigma_i, \chi_{-i}^k)$. По лемме 1 функция ожидаемого выигрыша непрерывна по совокупности переменных, поэтому $\widetilde{K}_i(\rho_i, \chi_{-i}) \geq \widetilde{K}_i(\sigma_i, \chi_{-i})$, то есть $\rho \in R(\chi)$.

По теореме Какутани, существует неподвижная точка – ситуация χ^*, такая, что $\chi^* \in R(\chi^*)$.

Значит, для всех игроков $\widetilde{K}_i(\chi_i^*, \chi_{-i}^*) \geq \widetilde{K}_i(\chi_i, \chi_{-i}^*)$, где χ_i – произвольная смешанная стратегия. То есть χ^* – это равновесие Нэша. •

Аналогичные результаты можно получить и для бесконечных игр, например, справедлива

Теорема 5 [82]. Если множества стратегий игроков компактны, а функции выигрыша непрерывны по совокупности переменных (чистых стратегий игроков), то в игре существует, по крайней мере, одно равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 3.

На основании полученных результатов можно сформулировать одно из возможных достаточных условий существования равновесия в чистых стратегиях:

Теорема 6 [65]. Если в непрерывной игре множества стратегий X_i – выпуклые подмножества линейных метрических пространств, для каждого игрока i функция выигрыша K_i непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i, то в этой игре существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Доказательство. Ранее была доказана теорема 2 о том, что наилучший ответ всегда достигается на чистых стратегиях. Теперь необходимо показать, что следствием вогнутости целевых функций является единственность наилучшего ответа. Это будет означать, что наилучшим ответом может быть только чистая стратегия. Тогда и равновесие Нэша будет состоять только из чистых стратегий.

Введем обозначение $X_i^*(\chi_{-i}) = \operatorname{Arg}\max_{x_i} K_i(x_i, \chi_{-i})$ – множество чистых стратегий, которые являются наилучшими ответами на обстановку χ_{-i}. Пусть имеются два наилучших ответа – $x_i^* \in X_i^*$ и $x_i^{**} \in X_i^*$. Так как оба они являются лучшими ответами на обстановку χ_{-i}, значит $K_i(x_i^*, \chi_{-i}) = K_i(x_i^{**}, \chi_{-i})$, то есть

$$\int_{X_{-i}} K_i(x_i^*, x_{-i})\chi_{-i}(x_{-i})dx_{-i} = \int_{X_{-i}} K_i(x_i^{**}, x_{-i})\chi_{-i}(x_{-i})dx_{-i}.$$

Для краткости обозначим этот выигрыш буквой M.

Рассмотрим стратегию $\widetilde{x}_i = \alpha x_i^* + (1-\alpha)x_i^{**}$, где $\alpha \in (0, 1)$. В силу выпуклости X_i, $\widetilde{x}_i \in X_i$. Ожидаемая полезность от применения этой стратегии:

$$K_i(\widetilde{x}_i, \chi_{-i}) = \int_{X_{-i}} K_i(\widetilde{x}_i, x_{-i})\chi_{-i}(x_{-i})dx_{-i} =$$

$$\int_{X_{-i}} K_i(\alpha x_i^* + (1-\alpha)x_i^{**}, x_{-i})\chi_{-i}(x_{-i})dx_{-i}.$$

В силу строгой вогнутости целевой функции K_i, имеем

$$K_i(\tilde{x}_i, \chi_{-i}) > \alpha \int_{X_{-i}} K_i(x_i^*, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}) dx_{-i} +$$

$$+ (1-\alpha) \int_{X_{-i}} K_i(x_i^{**}, x_{-i}) \chi_{-i}(x_{-i}) dx_{-i}.$$

Следовательно, $K_i(\tilde{x}_i, \chi_{-i}) > \alpha M + (1-\alpha) M = M$, что невозможно, так как M – это максимальный ожидаемый выигрыш. Таким образом, наилучший ответ всегда один, а, значит, и равновесие Нэша будет равновесием в чистых стратегиях. •

Итак, как показано выше, множество равновесий Нэша в смешанных стратегиях не пусто для достаточно широкого класса игр. Однако оно далеко не всегда единственно.

Так, например, равновесие Нэша не единственно в игре «Семейный спор» (см. примеры 9, 14): в ней три равновесия Нэша, два – в чистых и одно – в смешанных стратегиях.

Наличие нескольких равновесий Нэша порождает определенные проблемы, ведь в идеальном случае концепция решения должна точно предсказывать результат игры, что возможно лишь при однозначном определении рациональных стратегий всех игроков[33].

Одним из выходов является констатация того, что ситуации равновесия Нэша не являются точным и единственным решением, а являются лишь набором рациональных стратегий поведения, выбор из которых нельзя произвести на основе имеющихся данных. В таком случае возникает вопрос об улучшениях и поправках к определению равновесия Нэша, которые сужали бы множество равновесий (желательно – до одной ситуации). Теме «улучшения» равновесия Нэша посвящено большое количество работ. Один из методов уточнения равновесия Нэша заключается в переходе к рассмотрению игры в развернутой форме. Оказывается, что некоторые игры, имеющие разные представления в развернутой форме, могут иметь одинаковую нормальную форму. При этом, естественно, все равновесия Нэша этих игр совпадают. Однако рассмотрение исходных игр дает возможность отдать предпочтение одним из равновесий перед другими. В результате можно отбросить некоторые из равновесий, усилив, тем самым, предсказание поведения игроков. Подробно с такими концепциями решения, как: равновесие по подыграм (subgame perfect equilibria), trembling hand perfect equilibria и другими можно ознакомиться в [74, 79, 82].

[33] *В задачах управления наличие нескольких равновесий Нэша игры агентов, зависящих от управлений центра, означает, что центр должен вводить и обосновывать дополнительные предположения о том, в каком из равновесий окажется управляемая система* [25, 51, 56, 57].

Другой выход заключается в предположении (подтвержденном, кстати, экспериментально [82]) о том, что выбор одного из равновесий Нэша игроки производят на основе некоторой второстепенной информации, которая не нашла своего отражения в постановке задачи. Стремление игроков к выбору одного из равновесий Нэша в результате игры называется *эффектом фокальной точки* [40, 74, 82].

Разрешению проблемы неединственности равновесия Нэша посвящено очень большое количество исследований, и в рамках данной книги нет возможности подробно останавливаться на этом вопросе.

Равновесие Нэша подвергается справедливой критике, ведь чтобы результатом игры было равновесие Нэша, все игроки должны выбрать именно равновесную ситуацию, при этом предварительно конкретизировав одну из равновесных ситуаций в случае, когда равновесий много. Тем не менее, содержательных объяснений рациональности использования равновесных ситуаций, как и рекомендаций по обеспечению реализации равновесных ситуаций, можно предложить довольно много.

Так, например, принятие решения о выборе равновесной стратегии может быть следствием рефлексивных рассуждений вида: «Я думаю, что противник думает, что я поступлю так, значит, он поступит так, поэтому я должен действовать следующим образом…». Вложенность таких рассуждений может быть очень большой, и равновесие Нэша – именно та ситуация, которая позволяет разорвать «порочный круг», поскольку, даже если противник знает, какую стратегию мы собираемся использовать, то равновесная стратегия дает ему максимальный в этих условиях выигрыш. Заметим, что для проведения подобных рассуждений каждому игроку необходимо точное знание целевых функций всех игроков [62].

Другим подходом к обоснованию равновесия Нэша является создание игроками «центра» – рекомендательного органа, который берет на себя вычисление равновесия Нэша и выбор одной из ситуаций равновесия, выдавая затем рекомендации игрокам. При этом, если игрок в одиночку отклоняется от этой рекомендации, выиграть от этого он не сможет, поэтому логичным для него представляется следовать рекомендации «центра». Здесь, как минимум, центр должен знать все целевые функции, а игроки должны доверять центру в этом вопросе (см. описание реализации этого подхода для задач управления организационными системами в [21, 51, 56, 57]).

Заметим, что этот подход, по сути дела, нарушает ранее введенное предположение о бескоалиционности игры, так как означает создание всеми игроками информационной коалиции – регулирующего органа. Тем не менее, он довольно широко используется некоторыми исследователями [82].

В теории управления широко распространен метод повторения игры, или «*метод фиктивного разыгрывания»* для реализации равновесных ситуаций. При этом игрокам разрешается разыгрывать игру многократно, возможно, меняя стратегии от тура к туру. При этом оказывается, что стремление к максимизации выигрыша заставляет игроков менять свои стратегии таким образом, чтобы прийти, в конце концов, в одну из ситуаций равновесия. Оправданность такого подхода объясняется тем, что при проведении экспериментов – так называемых, *имитационных игр* [4, 9, 60], – игроки ведут себя таким образом, что, после проведения достаточного числа повторений игры (при этом можно даже не выплачивать игрокам их выигрыш, а лишь ставить их в известность о его величине) стратегии игроков сходятся к одному из равновесий Нэша[34]. Можно заметить, что рефлексивные рассуждения, по сути, представляют собой то же фиктивное разыгрывание, производимое каждым игроком отдельно. Если все игроки рациональ-

---

[34] *Сходимость различных процедур выбора агентами стратегий к равновесию Нэша и другие эффекты динамики коллективного поведения исследовались в* [*4, 9, 50, 60*].

ны, то их решением должно стать использование равновесных стратегий.

<u>Пример 12 [56]. «Решение задачи стимулирования».</u>

Опишем решение задачи стимулирования в многоэлементной ОС (пример 1). Относительно параметров ОС введем следующие предположения:

А.1. $\forall\, i \in N \;\; A_i \subseteq \Re^1_+$.

А.2. $\forall\, i \in N$ 1) функция $c_i(\cdot)$ непрерывна по всем переменным; 2) $\forall\, y_i \in A_i \;\; c_i(y)$ не убывает по y_i, $i \in N$; 3) $\forall\, y \in A'\;\, c_i(y) \geq 0$; 4) $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}\;\, c_i(0, y_{-i}) = 0$.

А.3. Функции стимулирования кусочно-непрерывны и принимают неотрицательные значения.

А.4. Функция дохода центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при ненулевых действиях агентов.

Если стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов, то определение множества равновесий Нэша $P_N(\sigma)$ имеет вид:

$$P_N(\sigma) = \{y^N \in A \mid \forall\, i \in N\ \forall\, y_i \in A_i\ \sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq$$
$$\geq \sigma_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\};$$

РДС $y_d \in A'$ определяется условием: $y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента тогда и только тогда, когда

$$\forall\, y_i \in A_i,\ \forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех агентов имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

Если стимулирование каждого агента зависит только от его собственных действий, то определение множества равновесий Нэша $P_N(\sigma)$ имеет вид:

$$E_N(\sigma) = \{y^N \in A' \mid \forall\, i \in N\ \forall\, y_i \in A_i\ \sigma_i(y_i^N) - c_i(y^N) \geq$$
$$\geq \sigma_i(y_i) - c_i(y_i,\ y_{-i}^N)\},$$

РДС $y_d \in A$ определяется условием: $y_{i_d} \in A_i$ – доминантная стратегия i-го агента тогда и только тогда, когда

$$\forall\, y_i \in A_i,\ \forall\, y_{-i} \in A_{-i}\ \sigma_i(y_{i_d}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \ge \sigma_i(y_i) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$\sigma^*_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \ne y_i^* \end{cases},\ \delta_i \ge 0,\ i \in N.$$

Если стимулирование каждого агента зависит только от его собственного действия, то, фиксировав для каждого агента обстановку игры, перейдем от σ^* к системе индивидуального стимулирования следующим образом: фиксируем произвольный вектор действий агентов $y^* \in A'$ и определим систему стимулирования:

$$\sigma^{**}_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \ne y_i^* \end{cases},\ \delta_i \ge 0,\ i \in N.$$

Справедливы следующие утверждения [56]:

1) При использовании центром системы стимулирования σ^* вектор действий y^* является РДС. Более того, если $\delta_i > 0$, $i \in N$, то y^* – единственное РДС.

2) При использовании центром системы стимулирования σ^{**} вектор действий y^* является равновесием Нэша.

3) Вектор оптимальных реализуемых действий агентов y^*, фигурирующий в качестве параметра в системах стимулирования σ^* и σ^{**}, определяется в результате решения следующей задачи:

$$y^* \in \operatorname{Arg}\max_{t \in A'} \{H(t) - \sum_{i \in N} c_i(t)\},$$

а эффективность этих систем стимулирования равна следующей величине: $K^* = H(y^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y^*) - \delta$, где $\delta := \sum_{i \in N} \delta_i$

5) Класс (с параметром y^*) систем стимулирования σ^* и σ^{**} является δ-оптимальным.

Содержательно, при использовании системы стимулирования σ^* центр использует следующий *принцип декомпозиции*: он предлагает i-му агенту: «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, независимо от того какие действия выбрали остальные агенты, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». При использовании системы стимулирования σ^{**} центр предлагает i-му агенту: «выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные агенты также выбрали соответствующие компоненты – y_{-i}^*, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю». Используя такую стратегию, центр декомпозирует игру агентов. •

3.10. Вычисление равновесий Нэша

Чтобы для конкретной игры вычислить равновесие Нэша в чистых стратегиях, необходимо проверить наличие собственного значения оператора R (см. (9)) для собственного числа 1. Оператор R – отображение произвольной игровой ситуации на совокупность наилучших ответов игроков на задаваемую для них этой ситуацией обстановку. Таким образом, для бесконечных игр, задача сводится к нахождению вида этого оператора и решения уравнения

(10) $x^* = R(x^*)$.

Пример 13. Вычисление равновесий Нэша для игры «Фермеры на общем поле».

Целевые функции игроков в этой игре $K_i = x_i(120 - x_1 - x_2)$. Функции выигрыша вогнуты по стратегиям игроков, поэтому в этой игре существует равновесие Нэша в чистых стратегиях (см. теорему 6).

Наилучший ответ игрока при фиксированном поведении противника вычисляется в результате нахождения максимума функции выигрыша по стратегии этого игрока, то есть $x_i^* = R_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in X_i} K_i(x_i, x_{-i})$. Частная производная в этой точке равна нулю, то есть $\frac{\partial K_i(x_i^*, x_{-i}^*)}{\partial x_i} = 0$, значит $x_i^* = 60 - \frac{x_{-i}}{2}$, $i = 1, 2$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} x_1^* = 60 - x_2^* / 2 \\ x_2^* = 60 - x_1^* / 2 \end{cases}$, решением которой является пара стратегий $x_1^* = x_2^* = 40$, приводящих к выигрышам $K_1 = K_2 = 1600$.

Заметим, что при условии безусловного сотрудничества игроков, то есть в случае объединения их выигрышей и выбора стратегий из условия максимизации нового критерия $K = K_1(x_1, x_2) + K_2(x_1, x_2)$, стратегии игроков были бы $x_1 = x_2 = 30$.

При этом $K = 3600$, то есть при распределении выигрыша поровну на долю каждого из игроков достается по 1800 единиц, что больше, чем при конкуренции. Эта оптимальная по Парето ситуация, не является, однако, равновесной, так как неустойчива по односторонним отклонениям игроков от оптимальной по Парето стратегии. •

Система (10) может давать несколько решений, и все они будут равновесиями Нэша.

Кроме того, уравнения системы (10) могут оказаться зависимыми. Это значит, что равновесий Нэша в этой игре бесконечное множество. Например, для игры двух лиц с функциями выигрыша $K_i = 1(x_1 + x_2 - c) - x_i$, где $1(x) := \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$, $x_1, x_2, c \in [0, 1]$, множество равновесных ситуаций описывается равенством $x_1 + x_2 = c$. Такая ситуация характерна, в основном, для игр с разрывной функцией выигрыша (см. примеры в [56, 57, 82]).

Вычисление равновесий Нэша в смешанных стратегиях для дискретных игр сводятся к той же программе действий. Она может быть легко проиллюстрирована для биматричной игры, в которой каждый игрок имеет две стратегии.

Пример 14. «Нахождение равновесий Нэша в смешанных стратегиях в игре «Семейный спор».

Пусть матрица выигрышей имеет вид $\begin{array}{c} \\ x_1 \\ y_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,3 \end{pmatrix} \end{array}$.

Смешанная стратегия первого игрока определяется одним числом p – вероятностью выбора им первой стратегии, смешанная стратегия второго, соответственно, числом q. Вычисляем:

$$K_1(x_1, qx_2 + (1-q)y_2) = 3q,\ K_1(x_2, qx_2 + (1-q)y_2) = 1 - q.$$

Таким образом, при $q < 0.25$, наилучшим ответом первого игрока является стратегия y_1, при $q > 0.25$ – стратегия x_1. При $q = 0.25$ обе стратегии равнозначны с точки зрения ожидаемого выигрыша. То есть наилучший ответ первого игрока:

$$p^*(q) = \begin{cases} 0, & q < 0.25 \\ 1, & q > 0.25 \\ [0,1], & q = 0.25 \end{cases}.$$

Аналогично, наилучший ответ второго игрока:

$$q^*(p) = \begin{cases} 0, & p < 0.75 \\ 1, & p > 0.75 \\ [0,1], & p = 0.75 \end{cases}.$$

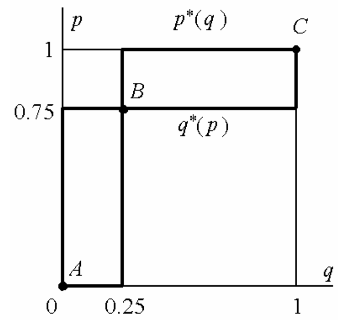

Рис. 6.

Изобразив эти зависимости на плоскости $p \times q$, получим рисунок 6. Точки A, B, C пересечения ломаных линий на рисунке и будут соответствовать трем равновесиям Нэша этой игры:

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2), (0.75\, x_1 + 0.25\, y_1, 0.25\, x_2 + 0.75\, y_2). \bullet$$

3.11. Сильное равновесие Нэша

Как показано выше, равновесие Нэша и РДС зачастую вступают в конфликт с принципом оптимальности Парето. Введение понятия сильного равновесия можно считать попыткой объединения концепций равновесия Нэша и равновесия Парето.

Определение 16: Для игры n лиц обозначим множество игроков через $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Любое непустое подмножество S данного множества, включая и само N, называется *коалицией*.

Понятно, что для игры n лиц возможны 2^n–1 коалиций. Множество всех возможных коалиций обозначим 2^N. Обозначим (x_{-S}^*, x_S) ситуацию, в которой игроки, не входящие в коалицию $S \subset N$, используют стратегии x_i^* ($i \in N \setminus S$), а игроки из S используют стратегии x_j ($j \in S$).

Определение 17: Ситуация x^* называется *сильно равновесной по Нэшу*, если для любых коалиций $S \subseteq N$ и любых $x_S \in \prod_{i \in S} X_i$ найдется участник коалиции $i \in S$, такой, что

$$K_i(x^*) > K_i(x_{-S}^*, x_S).$$

Как видно из определения, сильное равновесие отличается от равновесия Нэша тем, что игроки не только поодиночке не могут увеличить свой выигрыш выходом из равновесия, но и произвольная их коалиция не может, отклоняясь от равновесия, увеличить этим одновременно выигрыш всех своих участников.

Довольно просто показать, что все сильные равновесия Нэша, если они существуют, оптимальны по Парето.

Тем не менее, при всех привлекательных чертах сильного равновесия Нэша, его использование ограничено тем, что даже в смешанных стратегиях оно существует не во всех играх.

3.12. «Параметрическое» равновесие Нэша

Для того чтобы вычислить равновесие Нэша, исследователь игры должен точно знать функции выигрыша игроков. В задачах управления, однако, часто встречается ситуация, когда на момент исследования игры функции выигрыша известны исследователю игры не полностью. Эта ситуация характерна для механизмов управления с сообщением информации [10, 64] (см. пример 2).

Неточную информацию о функциях выигрыша игроков принято описывать с помощью понятия *типа игрока*. Рассмотрим следующую игру n лиц, в которой каждый из игроков имеет некоторый тип $r_i \in \Omega_i$ из множества Ω_i возможных типов данного игрока i. Будем считать, что все множества типов Ω_i компактны, $i \in N$. Функции выигрыша игроков $K_i = K_i(x_1, ... x_n, r_1, ..., r_n)$ зависят как от действий $x_i \in X_i$ всех игроков, так и от их типов $r_i \in \Omega_i$, $i \in N$.

Определение 18: *Профилем типов игроков* называется вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Omega = \prod_{i \in N} \Omega_i$.

Определение 19: Набор функций $x^*(r) = (x_1^*(r), ..., x_n^*(r))$ будем называть *равновесием Нэша*[35] (*в чистых стратегиях*) *в игре с параметрически заданными функциями выигрыша*, если для каждого фиксированного профиля r типов игроков для каждого игрока $i \in N$ и для всех его стратегий $x_i \in X_i$, справедливо неравенство

$$K_i(x^*(r), r) \geq K_i(x_i, x_{-i}^*(r), r).$$

Пример 15. «Простая задача распределения ресурса».

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и двух агентов (игроков). Центру распределяет между игроками ресурс, для чего собирает от них заявки $s_i \in [0; 1]$ ($i = 1, 2$) и выдает каждому игроку ресурс по формуле

(11) $x_i = s_i - \dfrac{s_1 + s_2}{4}$.

В этом механизме центр «недодает» игрокам ресурс относительно заявленных ими потребностей, причем, чем больше сообщенная общая потребность в ресурсе $s_1 + s_2$, тем существеннее становится «недодача».

Игроки имеют типы $r_i \in [0; 1]$. Функции выигрыша игроков зависят от полученного ими ресурса и типа следующим образом:

(12) $K_i = 2x_i - \dfrac{x_i^2}{r_i}$.

Параметр $r_i \in [0; 1]$ можно интерпретировать как количество ресурса, оптимальное для игрока, так как именно при $x_i = r_i$ достигается максимум его выигрыша. Центр не знает типы $\{r_i\}$ игроков.

[35] *Для задач управления оказывается существенным, что равновесная по Нэшу стратегия каждого из игроков зависит от типов всех игроков* [*55, 64, 80, 85*].

Стратегиями игроков в этой игре являются их заявки s_i на ресурс. Подставив (11) в (12), можно выразить функции выигрыша через стратегии, получив игру в нормальной форме. В этой игре функции выигрыша игроков зависят не только от их стратегий, но и от типов r_i.

Задача исследователя заключается в том, чтобы предсказать, насколько это возможно, равновесные заявки игроков.

Можно показать, что в зависимости от типов r_1 и r_2 игроков равновесие Нэша в этой игре будет задаваться заявками

$$(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot)) =$$

$$= \begin{cases} (1.5r_1 + 0.5r_2,\ 0.5r_1 + 1.5r_2); & 3r_1 + r_2 \le 2,\ r_1 + 3r_2 \le 2 \\ (4r_1/3 + 0.25,\ 1); & 3r_1 + r_2 > 2,\ r_1 \le 1/2 \\ (1,\ 4r_2/3 + 0.25); & r_1 + 3r_2 > 2,\ r_2 \le 1/2 \\ (1,\ 1); & r_1 > 1/2,\ r_2 > 1/2 \end{cases} \quad (13)$$

Равновесные заявки зависят от типов $\{r_i\}$ игроков. Если в дальнейшем исследователь получит точную информацию о типах игроков, то, подставив значения типов игроков в (13), сможет получить точное равновесие Нэша этой игры.

Однако полученный результат можно использовать и другим способом. Пусть исследователю известна та же информация, что и центру. Пусть игра разыграна один раз, и центр получил от игроков заявки (s_1, s_2). Тогда, зная (13), центр может узнать типы игроков. Так, например, если обе заявки меньше 1, центр может определить типы игроков по формуле:

$$r_1 = 0.75\, s_1 - 0.25\, s_2,\ \ r_2 = 0.75\, s_2 - 0.25\, s_1.$$

Если обе заявки равны 1, центр может сделать вывод, что типы обоих игроков превышают 0.5. Аналогично можно восстановить типы и для случаев, когда лишь одна из заявок равна 1. Таким образом, по результатам игры центр (а, значит, и исследователь) может с той или иной точностью восстановить типы игроков. •

Пример 16 [9, 55]. «Решение задачи «Экспертиза».

Приведем решение задачи примера 2.

Сообщение достоверной информации в механизмах планирования является равновесием в доминантных стратегиях для всех $r \in \Omega$, если: $\forall r \in \Omega, \forall i \in N, \forall s_i \in \Omega_i, \forall \bar{s}_{-i} \in \Omega_{-i}$, выполняется $\varphi_i(\pi_i(r_i, \bar{s}_{-i}), r_i) \ge \varphi_i(\pi_i(s_i, \bar{s}_{-i}), r_i)$.

Для механизма активной экспертизы справедливо следующее утверждение [55, 64]: для каждого $r \in [d, D]^n$ равновесие Нэша $s^*(r)$ имеет следующую структуру:

1) $s_i^* = \begin{cases} D, \text{ если } x^* < r_i; \\ d, \text{ если } x^* > r_i; \end{cases}$

2) если $d < s_i^* < D$, то $x^* = r_i$.

Определим для каждого $k = \overline{0, n}$ векторы сообщений:

$$s(k) = \begin{cases} k \text{ первых экспертов сообщают } d; \\ (n-k) \text{ последних экспертов сообщают } D \end{cases}$$

и вычислим последовательность точек $W_k = \pi(s(k))$.

Упорядочим экспертов в порядке возрастания r_i. В [9] доказано, что всегда найдется такой номер $q \in N$, что либо $r_q \in [W_q, W_{q-1}]$, либо $r_q > W_{q-1}$.

Общий результат, характеризующий решение задачи экспертизы [9, 55, 64], гласит, что итоговое решение в равновесии имеет вид: $x^* = \max_{k \in N} \min\,(r_q, W_{q-1})$.

Следовательно, для любой процедуры активной экспертизы найдется эквивалентный прямой механизм (см. определение в первой главе). •

3.13. Сравнение концепций решения

Чтобы подытожить результаты данной главы, удобно рассмотреть следующий рисунок, показывающий, как соотносятся между собой различные концепции решения некооперативных игр.

Области на рисунке 7 представляют собой различные концепции решения. Если одна область включается в другую, значит, первая из них является более «точной», то есть, если первая концепция дает некоторую ситуацию в качестве решения, значит, вторая будет давать эту ситуацию, как одно из решений игры. Сплошной линией на рисунке обведены концепции решения, для которых доказано существование решения для произвольной игры в нормальной форме (для равновесия Нэша в смешанных стратегиях его существование доказано в условиях теоремы 3). Пунктиром обведены концепции, которые для некоторых игр дают пустое множество в качестве решения.

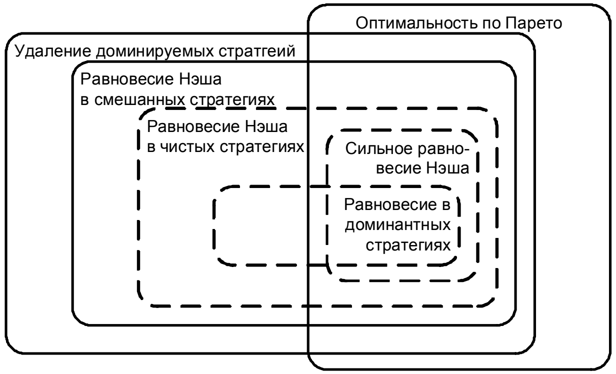

Рис. 7. Сравнение концепций решения некооперативных игр

Из рисунка 7 видно, что РДС и сильное равновесие Нэша являются самыми сильными концепциями решения: из того, что ситуация равновесна в доминантных стратегиях, следует, что она является и равновесием Нэша. Также и из сильной равновесности следует равновесность по Нэшу. Самая слабая концепция – это удаление доминируемых стратегий. Она предлагает в качестве решения самое широкое множество ситуаций. Этот недостаток несколько оправдывается его логической простотой. «Золотой серединой» в некотором роде, является равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Выше доказано (см. теорема 3) существование, по крайней мере, одной равновесной ситуации для достаточно широкого класса игр. В то же время, эта концепция достаточно строгая: множество равновесий Нэша обычно гораздо уже, чем можно получить, удаляя доминируемые стратегии. Эти преимущества и определили популярность равновесия Нэша при решении приклад-

ных теоретико-игровых задач. Несколько особняком от других стоит оптимальность по Парето. Рисунок показывает, что, даже просто удаляя доминируемые стратегии, можно получить в результате лишь не оптимальные по Парето исходы (см. пример 11). Причина, по которой это происходит, состоит в том, что в данной главе рассматриваются некооперативные игры, где каждый игрок следует лишь своим интересам, не зная ничего о поведении партнеров. Достижение же оптимальных по Парето ситуаций зачастую требует обмена информацией между игроками, согласования их действий или даже компенсационных выплат некоторым игрокам за выбор ими определенных стратегий. Теоретико-игровые модели, учитывающие такие взаимодействия, рассматриваются ниже в главах 5 и 6.

<u>ГЛАВА 4.</u> ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТЬЮ

При определении игры в нормальной форме (см. раздел 3.2) предполагалось, что на момент выбора стратегий игроки имеют полную информацию о виде функций (матрице) выигрыша других игроков.

В разделе 3.12 был рассмотрен случай, когда у исследователя нет полной информации о типах игроков, однако, предполагалась полная информированность игроков о параметрах функций выигрыша.

Но как описать рациональное поведение игроков в случае, когда они сами не знают точно интересы своих противников (партнеров)? Ответу на этот вопрос посвящен материал настоящей главы «Игры с неполной информированностью».

4.1. Принцип максимального гарантированного результата

Принцип максимального гарантированного результата (МГР) – это один из самых общих принципов принятия решений в условиях интервальной неопределенности. В соответствии с принципом МГР неопределенность устраняется введением предположения, что неопределенные параметры принимают наихудшие для ЛПР значения.

Определения принципа МГР для очень широкого класса игр можно найти в [21]. Приведем некоторые из них.

Пусть игровая ситуация с точки зрения i-го игрока определяется вектором $z = (y_i, \theta, r)$, $y_i \in A_i$, $\theta \in \Theta$, $r \in \Omega$, и его выигрыш $K_i = K_i(z)$ зависит от ситуации. Пусть $y_i \in A_i$ – действие i-го игрока, и на момент принятия игроком решения о выборе стратегии ему известны значения параметров $\theta \in \Theta$. Об остальных параметрах информации не ожидается. Тогда принцип МГР предлагает использование, так называемой, *гарантирующей стратегии*.

Определение 20: Гарантирующая стратегия i-го игрока – это стратегия, определяемая по формуле:

$$y_i^*(\theta) \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in A_i}[\min_{r \in \Omega} K_i(y_i, \theta, r)].$$

Другими словами, для того, чтобы найти гарантирующую стратегию i-го игрока, необходимо при фиксированных известных параметрах θ найти минимум функции выигрыша по неизвестным параметрам $r \in \Omega$, а затем максимизировать результат минимизации выбором действия y_i. Стратегия $y_i^*(\theta)$, на которой достигается максимум, и будет гарантирующей.

Вектор $(y_i^*(\theta))_{i \in N}$ гарантирующих стратегий игроков называется *максиминным равновесием.*

Неизвестные параметры могут иметь очень широкое содержательное наполнение: от информации о действиях других игроков, о виде их целевых функций, до информации о правилах игры. Рассмотрим с этой точки зрения *игру с неполной информацией*.

Пусть на момент принятия решения каждому игроку известен его тип $r_i \in \Omega_i$, неизвестны типы других игроков $r_j \in \Omega_j$ $(j \neq i)$ и их стратегии. Если $K_i(y_1, \ldots, y_n, r_1, \ldots, r_n)$ – функция выигрыша i-го игрока, то его гарантирующей стратегией будет стратегия

$$y_i^*(r_i) \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in A_i}[\min_{y_{-i} \in A_{-i},\, r_{-i} \in \Omega_{-i}} K_i(y_1,\ldots,y_n,r_1,\ldots,r_n)],\ i \in N.$$

Можно заметить, что приведенное определение подходит и для игр с полной информированностью – гарантирующей стратегией i-го игрока в игре с полной информированностью будет стратегия

$$y_i^* \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in A_i}[\min_{y_{-i} \in A_{-i}} K_i(y_1,\ldots,y_n)].$$

Для существования гарантирующей стратегии достаточно ограниченности функции выигрыша игрока и компактности множеств стратегий A_i и множеств типов игроков Ω_i [21], поэтому можно говорить, что гарантирующие стратегии существуют «почти всегда».

Еще одним преимуществом МГР является то, что для вычисления гарантирующей стратегии игрока i достаточно знать только функцию его выигрыша, и не нужно знание функций выигрыша других игроков.

Недостатком МГР является его чрезмерная пессимистичность. МГР призывает игрока рассчитывать на наихудшее для него поведение противников. Это оправданно в случае антагонистических игр, но, если игрок знает, что интересы противников лишь ненамного отличаются от его интересов, предположение о том, что рациональные противники будут выбирать наихудшее для него действие, не всегда адекватно.

4.2. Байесовы игры, равновесие Байеса

Если принцип МГР используется в случае интервальной неопределенности, то ситуация, в которой, помимо знания множества возможных типов противников, каждый игрок знает вероятность реализации того или иного профиля их типов, соответствует *игре в форме Байеса* (*или байесовой игре*). Байесова игра формально определяется следующим образом [82].

Пусть имеется n игроков. Игрок i имеет тип $r_i \in \Omega_i$, принадлежащий множеству возможных типов Ω_i данного игрока. Каждый игрок знает все множества $\{\Omega_i\}$, а также *функцию представлений*, (или, иначе, *вер*) игрока $p_i(r_{-i}|r_i)$, описывающую плотность условной вероятности появления некоторого сочетания (профиля) типов других игроков в зависимости от типа игрока i. Функции выигрыша $K_i = K_i(y_1, \ldots y_n, r_1, \ldots, r_n)$ зависят как от действий

$y_i \in A_i$ всех игроков, так и от их типов $r_i \in \Omega_i$, и известны всем игрокам.

Определение 21: Игра в форме Байеса задается следующей системой: $\{N; \Omega_1, ..., \Omega_n; p_1(\cdot), ..., p_n(\cdot); K_1(\cdot), ..., K_n(\cdot)\}$.

Рассмотренный выше пример «Аукцион» представляет собой игру в форме Байеса. В этом примере каждый из двух игроков знает функцию выигрыша противника с точностью до некоторого параметра.

Каким же будет рациональное поведение игроков в условиях байесовой игры, ведь игроки должны наилучшим образом использовать имеющуюся в их распоряжении информацию (см. раздел 1.1)? Ответ на этот вопрос дает концепция равновесия Байеса. Стратегией игрока i в данной игре будем считать распределение $\eta_i = \eta_i(y_i \mid r_i)$ условной вероятности выбора действия y_i при условии, что тип игрока равен r_i. Тогда равновесием Байеса считается такой набор стратегий $(\eta_1^B(.), \eta_2^B(.), ..., \eta_n^B(.))$, что для любого игрока i и любого его типа $r_i \in \Omega_i$ стратегия $\eta_i^B(.)$ максимизирует по $\eta_i(.)$ функционал

$$\int_{\Omega_{-i}} \int_X K_i(y_i, y_{-i}, r_i, r_{-i})\, p_i(r_{-i} | r_i)\, \eta_i(y_i | r_i) \prod_{j \neq i} \eta_j^B(y_j | r_j)\, dy\, dr_{-i},$$

представляющий собой ожидаемый выигрыш игрока i с учетом его субъективного представления о типах других игроков.

В этом определении решением считается, по сути, набор смешанных стратегий. Можно переопределить равновесие Байеса для чистых стратегий. Тогда стратегией будем считать функцию $y_i = \eta_i(r_i)$, которая предписывает игроку действие y_i в зависимости от его типа $r_i \in \Omega_i$. В этом случае равновесие Байеса определяется набором стратегий $(\eta_1^B(\cdot), \eta_2^B(\cdot), ..., \eta_n^B(\cdot))$, таким, что для любого игрока i и любого его типа $r_i \in \Omega_i$ стратегия $\eta_i^B(r_i)$ максимизирует по η_i функционал

$$\int_{\Omega_{-i}} K_i(r_{-i}, r_i, \eta_{-i}^B(r_{-i}), \eta_i)\, p_i(r_{-i} \mid r_i)\, dr_{-i}.$$

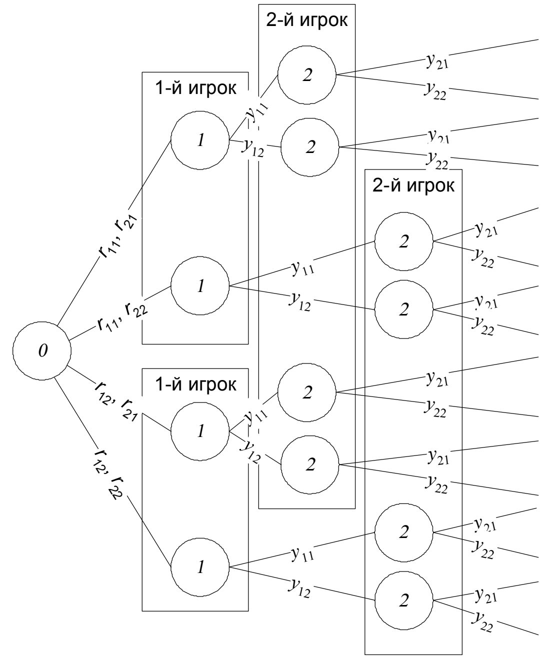

Рис. 8. Игра с неполной информацией

Равновесие Байеса является обобщением равновесия Нэша в смешанных стратегиях на случай байесовых игр. На самом деле, оно представляет собой равновесие Нэша игры, в которой неполная информация о целевых функциях игроков заменена на неполную информацию о ходе природы. Д. Харшаньи [75] предложил считать, что в начале байесовой игры природа (или другие внешние обстоятельства) определяет типы игроков. После этого игроки должны, зная свой тип, но не зная типов противников, выбрать стратегию (см. рисунок 8).

Представление этой игры в развернутой форме для двух игроков, каждый из которых имеет два возможных типа (r_{11}, r_{12} для первого игрока, r_{21}, r_{22} - для второго), и два возможных действия (y_{11}, y_{12} – у первого игрока, y_{21}, y_{22} – у второго) приведено на рисунке 8. Для нахождения равновесий байесовой игры необходимо построить игру в развернутой форме, аналогичную изображенной на рисунке. Далее, эту игру необходимо привести к нормальной форме с помощью процедуры, описанной в разделе 3.3, и для игры в нормальной форме найти множество равновесий Нэша в смешанных стратегиях.

Такая схема построения байесового равновесия подходит лишь для дискретных множеств типов игроков. Кроме того, необходимо, чтобы представления игроков были совместны, то есть, чтобы существовало некоторое априорное вероятностное распределение $p(r_1,\ldots, r_n)$ типов игроков, из которого представления каждого игрока получались бы по формуле условной вероятности: $p_i(r_{-i} \mid r_i) = p(r_1,...,r_n) / \sum_{s_{-i}} p(r_i, s_{-i})$.

Зато для этого класса игр существование байесового равновесия следует непосредственно из теоремы о существовании равновесия Нэша.

<u>ГЛАВА 5.</u> КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

5.1. Виды взаимодействия игроков

В предыдущих главах были рассмотрены некооперативные игры, то есть игры, в процессе которых игроки не могут действовать совместно. При этом под совместными действиями может подразумеваться добровольный обмен между игроками информацией о выбранных стратегиях, о функциях выигрыша, о других параметрах игры, совместный выбор стратегий, передача игроками части выигрыша друг другу. Этот подход вполне оправдывает себя в целом ряде практически важных случаев. Однако, зачастую способность игроков к совместным действиям является неотъемлемой частью конфликтной ситуации. Примером подобных конфликтов являются задачи дележа (см. пример «Дележ в оркестре»). Исследование этих задач требует учета переговорных процессов между игроками. Для этого необходимо изменить модель игры.

<u>Пример 17. Парето-оптимальное равновесие в примере 5 как результат кооперации игроков.</u>

В примере 5 рассматривалась игра с биматрицей

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \textit{сотр.} \\ \textit{эгоист} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \textit{сотр.} & \textit{эгоист.} \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} 10,10 & -5,15 \\ 15,-5 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Выше было показано, что единственное равновесие Нэша («эгоист.», «эгоист.») этой игры не оптимально по Парето. В то же время, в реальной жизни подобные конфликты зачастую разрешаются довольно эффективно. Дело в том, что на практике в подобных ситуациях у игроков имеются и другие способы поведения, помимо одновременного выбора одной из двух своих стратегий. Модифицируем игру следующим образом: добавим каждому игроку дополнительную стратегию «договор» и доопределим матрицу выигрышей следующим образом:

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \textit{сотр.} \\ \textit{эгоист.} \\ \textit{договор} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \textit{сотр.} & \textit{эгоист.} & \textit{договор} \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} 10,10 & -5,15 & 5,15 \\ 15,-5 & 0,0 & 0,0 \\ 15,5 & 0,0 & 10,10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Содержательно дополнительную стратегию можно проинтерпретировать следующим образом: первый начальник, выбрав эту стратегию, предлагает второму заключить совместный договор (обычно называемый в таких случаях положением о должностных полномочиях), который бы регламентировал время, которое подчиненный тратит на работы каждого начальника. В случае, если второй начальник отвергнет договор, выбирая «эгоистическую» стратегию (ситуация («договор», «эгоист.»)), первый начальник угрожает также применить «эгоистическую» стратегию, что приводит к нулевым выигрышам для обоих. Если второй начальник выбирает безусловное сотрудничество (это ситуация («договор», «сотр.»)), договор будет подписан на условиях, более выгодных для первого начальника. Если же оба начальника одновременно выходят с инициативой подписания договора (ситуация («договор», «договор»)), их выигрыши равны выигрышам при одновременном сотрудничестве.

В этой игре уже две ситуации равновесия Нэша, («эгоист.», «эгоист.») и («договор», «договор»), причем вторая доминирует по Парето первую. Кроме того, можно заметить, что, при «эгоистической» стратегии второго начальника, первому безразлично, «эгоистическую» ли стратегию выбирать, или «договор». Но если он выберет «договор», стратегия «договор» станет выгодной и второму начальнику. Дело в том, что «эгоистическое» равновесие – это нестрогое равновесие Нэша, в отличие от «договорного».

Все сказанное позволяет надеяться, что именно «договорное» равновесие будет исходом этой игры. •

Вышеприведенный пример проиллюстрировал, как расширение множества стратегий за счет введения возможности совместных действий между игроками может вывести игру из неоптимального по Парето равновесия Нэша. Подобные идеи лежат в основе отдельного раздела теории игр – *теории кооперативных игр*. Основы этого направления были заложены одновременно с основами теории некооперативных игр [48], однако исследование совместных действий игроков потребовало создания игровых моделей, значительно отличающихся от постановок игровых задач в нормальной или развернутой формах.

В *теории кооперативных игр* взаимодействия игроков формализуются с помощью понятия *коалиции*. *Информационными коалициями* будем называть группу игроков, обменивающихся друг с другом информацией. Считается, что в процессе образования коалиции заключаются соглашения, заставляющие игроков сообщать необходимую информацию. При этом возможность *блефа*, сообщения недостоверной информации, не рассматривается.

Коалиции, члены которых могут обмениваться между собой выигрышем, будем называть *коалициями полезности*, или просто *коалициями*.

Игры, в которых игроки могут образовывать коалиции полезности, называются *играми с трансферабельной полезностью* (*ТП-играми*). В отличие от них, игры, в которых игроки могут образовывать только информационные коалиции, называются *играми с нетрансферабельной полезностью* (*НТП-играми*). Исследование ТП- и НТП-игр исторически происходило параллельно, однако, теория НТП-игр технически гораздо сложнее, поэтому ниже ограничимся рассмотрением только ТП-игр. С результатами теории НТП-игр можно ознакомиться в [46].

Теория кооперативных игр делает упор, в основном, на кооперативные действия игроков в процессе игры, то есть ее интересует то, какие коалиции образуются в процессе игры и какие условия необходимы для устойчивого существования коалиций. С этим связано существенное различие в постановке задачи по сравнению с теорией некооперативных игр, основной математической моделью которой является игра в нормальной форме.

Игра в нормальной форме, как достаточно подробное описание конфликтной ситуации, оказалась слишком сложной моделью для исследования кооперативных взаимодействий игроков. Чтобы описать с помощью игры в нормальной форме даже самый простой переговорный процесс, требуется немыслимое усложнение множества стратегий каждого игрока, включающее в себя как элементы, соответствующие передаче информации другим игрокам, так и элементы, описывающие реакцию на их сообщения.

Основная идея теории кооперативных игр состоит в том, чтобы, не рассматривая переговорный процесс как таковой, анализировать возможные его исходы и делать выводы о реализуемости того или иного результата переговоров. Поэтому и элементами описания *игры в форме характеристической функции* (базовой модели теории кооперативных игр) являются не стратегии игроков, а выигрыши, которые может себе гарантировать та или иная коалиция.

5.2. Переход от нормальной формы игры к игре в форме характеристической функции

Игра в форме характеристической функции может быть построена на основе игры в нормальной форме. Так обычно и приходится делать, потому что даже кооперативные игры обычно формулируются сперва в нормальной форме – перечислением стратегий игроков и их функций выигрыша.

Характеристическая функция определяет выигрыш, получаемый коалицией S (если в процессе игры такая коалиция образовалась) при рациональных действиях ее участников. Что понимать в каждом конкретном случае под рациональными действиями игроков, должно быть понятным из постановки игры в нормальной форме и выбранной модели рационального поведения (см. главы 3 и 4).

Базовая модель кооперативной игры разрешает передачу выигрыша между игроками, а это значит, что предполагается наличие линейно-трансферабельного товара, например, денег (см. раздел 2.2).

Характеристической функцией игры n лиц называется вещественнозначная функция[36] $v(S)$, определенная на подмножествах $S \subseteq N$, такая, что $v(\varnothing)=0$.

Характеристическая функция называется *супераддитивной*, если

(14) $\forall S, T \in 2^N : S \bigcap T = \varnothing \quad v(S) + v(T) \le v(S \bigcup T)$,

то есть для любых непересекающихся коалиций их объединение может получить полезность не меньшую, чем эти коалиции могли бы в сумме получить, действуя по отдельности. В этих условиях объединение в коалицию, включающую всех игроков, представляет собой самое эффективное с точки зрения суммарной полезности поведение участников игры, однако дополнительного исследования требует устойчивость этой коалиции.

[36] *В настоящей главе используются обозначения, принятые в работах по кооперативным играм. Можно надеяться, что совпадения символов (например, характеристической функции и функции полезности – см. раздел 1.1, и др.) не приведут к путанице.*

Супераддитивные игры представляют собой, в некотором роде, типичный случай. Действительно, пусть есть коалиции S и T с их выигрышами $v(S)$ и $v(T)$. Что мешает образующейся коалиции $S \cup T$ действовать так, как если бы такого объединения не существовало? Тогда полезность этой коалиции будет как минимум равна сумме полезностей коалиций S и T, обеспечивая супераддитивность. Это – нестрогие рассуждения и, как будет показано ниже, они верны лишь при соответствующих предположениях.

Классическая теория рассматривает, в основном, супераддитивные игры. Главными вопросами, которые встают при их исследовании – это вопросы об условиях реализуемости и устойчивости максимальной коалиции и «справедливом» распределении выигрыша $v(N)$ между игроками.

Обычно игровые задачи ставятся в нормальной форме. Для исследования кооперативных взаимодействий игру необходимо перевести в форму характеристической функции. При этом процедура перехода существенно зависит от используемого принципа рационального поведения. Для классической постановки задачи теории кооперативных игр характерно отсутствие информированности членов коалиции о стратегиях игроков, не входящих в коалицию. У членов коалиции не предполагается даже знания о структуре других образовавшихся коалиций. Также предполагается, что выбор стратегий игроками происходит одновременно.

В этих условиях осторожные игроки должны использовать принцип МГР для оценки выигрыша коалиции, к которой они собираются присоединиться. Применение принципа МГР для некоторой коалиции S состоит в минимизации выигрыша коалиции по стратегиям игроков, не входящих в коалицию S, и, затем, в максимизации выигрыша по стратегии коалиции S (см. раздел 4.1).

Под *стратегией коалиции* понимается вектор стратегий ее участников, а под *выигрышем коалиции* – сумма их выигрышей. Характеристическая функция определяется выражением

(15) $v(S) = \max\limits_{y_S \in A_S} \min\limits_{y_{N \setminus S} \in A_{N \setminus S}} [\sum\limits_{i \in S} K_i(y_S, y_{N \setminus S})]$,

где $y_S = (y_i)_{i \in S} \in A_S = \prod_{i \in S} A_i$ – вектор действий участников коалиции S.

Можно заменить чистые стратегии на смешанные. Тогда $v(S)$ будет в точности совпадать с решением антагонистической игры двух лиц – коалиции S и коалиции $N \setminus S$ [17, 48, 65].

Введенная таким образом характеристическая функция супераддитивна [65].

Несмотря на удобство использования *максимина* (то есть применения принципа МГР) для построения характеристической функции, дополнительная информированность игроков может сделать более логичным использование других концепций равновесия. Обратим внимание на то, что переговорный процесс должен сопровождаться передачей игроками друг другу информации о своих функциях выигрыша, поскольку подобные данные могут оказывать существенное влияние на структуру коалиций. В связи с этим можно предположить, что к моменту окончательного выбора коалиции каждый игрок (а, значит, и любая коалиция) будет обладать информацией о целевых функциях всех остальных игроков (а, значит, и всех возможных коалиций). В этих условиях коалиция S должна ожидать от остальных игроков действий, направленных на максимизацию их функций полезности, а не действий, наихудших для коалиции S, как предписывает максимин (напомним, что в играх с произвольной суммой минимаксная стратегия второго игрока может не совпадать с наихудшим, с точки зрения первого игрока, его поведением). Такие модификации процедуры построения характеристической функции могут приблизить модель к реальному процессу переговоров, однако при этом может нарушаться супераддитивность. Чтобы воспользоваться многочисленными результатами кооперативной теории игр, полученными для супераддитивных игр, необходимо для каждой такой процедуры проверять, сохраняется ли при ее применении свойство супераддитивности.

5.3. Описание игры в терминах характеристической функции

Определение 22: Игра в форме характеристической функции задается множеством игроков N и характеристической функцией $v(\cdot)$ на его подмножествах.

Одним из часто встречающихся видов игр являются игры с постоянной суммой.

Определение 23: Кооперативная игра (N, v) называется *игрой с постоянной суммой*, если для любой коалиции S справедливо равенство

(16) $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$.

Многими исследователями отмечалось, что вопрос о порядке и способах взаимодействия игроков в теории кооперативных игр разработан недостаточно полно. Однако целью введения характеристической функции, как основы описания игры, является именно упрощение постановки задачи за счет того, что подробности функционирования, такие как: переговорный процесс, процесс образования коалиций, механизмы выработки совместной стратегии, и пр. скрыты «внутри» характеристической функции игры. Такое смысловое наполнение характеристической функции может быть достаточно сложным, однако на уровне постановки задачи поведение игроков описывается относительно просто.

Игроки в процессе игры выбирают, к какой коалиции им присоединиться, и каким образом будет распределяться выигрыш этой коалиции. Затем, после образования коалиций, каждая из них получает выигрыш $v(S)$, равный значению ее характеристической функции. Полученный выигрыш распределяется между членами коалиции согласно предварительной договоренности.

Классическая постановка с целью упрощения задачи не предполагает никакого описания процесса переговоров. Фактически, предметом исследования является рациональное, с некоторой точки зрения, распределение выигрыша коалиции между ее участниками.

Обычно считается, что выигрыш коалиции равен значению характеристической функции для этой коалиции. Однако можно заметить, что характеристическая функция определяет *гарантиро-*

ванный выигрыш, но, в общем случае, в результате игры коалиция может получить и выигрыш, больший гарантированного, определяющего лишь минимальное значение выигрыша при самых неблагоприятных условиях. Проблема распределения такого «неожиданного» дохода лежит за рамками исследования кооперативной теории игр, так как этот «бонус» не влияет на рациональную, с точки зрения игроков, структуру коалиций. Считается, что процесс кооперирования опирается только на имеющуюся информацию, в роли которой выступает лишь характеристическая функция игры.

Перейдем к обсуждению возможных способов распределения выигрыша коалиции между ее участниками.

5.4. Определение дележа, доминирование дележей

Определение 24: *Эффективным распределением* супераддитивной игры (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такой, что

(17) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Определение 25: *Дележом* для игры (N, v) называется эффективное распределение, удовлетворяющее условию

(18) $x_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$.

Множество дележей игры (N, v) будем обозначать $E(v)$.

Условие (17) ограничивает понятие дележа лишь случаем, когда игроки достигли достаточного взаимопонимания, чтобы образовать коалицию, состоящую из всех игроков. Условие (18), называемое еще *индивидуальной рациональностью* (*individual rationality*), предлагает рассматривать только распределения полезности, дающие каждому игроку значения выигрыша не меньшие, чем он получил бы, действуя в одиночку. Это условие позволяет сразу ограничится рассмотрением только множества индивидуально рациональных распределений дохода между игроками.

Определение дележа приводит к понятию существенных игр.

Супераддитивная игра называется *существенной*, если

(19) $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

В противном случае супераддитивная игра называется *несущественной* [62].

Несущественность игры означает нулевой эффект от кооперации. Действительно, выигрыш любой коалиции в несущественной игре равен просто сумме индивидуальных выигрышей ее участников.

Множество дележей несущественной игры состоит из единственного элемента

(20) $x_i = v(\{i\})$, $i \in N$.

Доказательство этого утверждения следует непосредственно из определений дележа и несущественной игры (см. (18)-(20)).

Обычно рассматриваются лишь существенные игры, так как вопрос о поиске решения среди дележей несущественной игры тривиален.

Пусть x и y – два дележа, и S – произвольная коалиция. Говорят, что x *доминирует* y *по коалиции* S (обозначается $x \succ_S y$), если

(21) $x_i > y_i \quad \forall i \in S$,

(22) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Если существует коалиция S, такая, что $x \succ_S y$, говорят, что x *доминирует* y (обозначается $x \succ y$).

Условие (21) означает, что дележ x лучше дележа y для членов коалиции S, а условие (22) отражает реализуемость дележа x коалицией S – если оно выполнено, то коалиция действительно может предложить своим участникам выигрыши x_i.

Определение 26: Игры n лиц с характеристическими функциями u и v называются *изоморфными*, если существует функция f, взаимно однозначно отображающая множество дележей игры u на множество дележей игры v таким образом, что для любой пары дележей x и y игры u и произвольной коалиции S из доминирования дележа x дележом y следует доминирование образа $f(x)$ образом $f(y)$. Иначе говоря, $x \succ_S y \leftrightarrow f(x) \succ_S f(y)$, где $f(\cdot)$ – дележи игры v.

При анализе свойств игры с помощью отношения доминирования полезно знать, у каких игр множества дележей имеют одинаковую структуру доминирования, то есть какие игры являются *изоморфными*.

Определение 27: Игры n лиц u и v называются S-эквивалентными, если существует положительное число r и n таких вещественных чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, что для любой коалиции $S \subseteq N$

(23) $v(S) = r \cdot u(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$.

Теорема 7 [62]. Если u и v являются S-эквивалентными, то они изоморфны.

Определение 28: Игра v называется *игрой в* (0, 1)-*редуцированной форме*, если $\forall\ i \in N$ $v(\{i\}) = 0$, $v(N) = 1$.

Теорема 8 [62]. Любая существенная игра S-эквивалентна одной и только одной игре в (0, 1)-редуцированной форме.

Таким образом, определение 27 вводит классы игр, изоморфных относительно операции доминирования, теорема 7 дает удобный способ проверки изоморфности игр, а теорема 8 утверждает, что анализ игр с помощью отношения доминирования можно ограничить анализом игр в (0, 1)-редуцированной форме.

Понятия дележа и доминирования дележей играют немаловажную роль в формулировках концепций решения, изложение которых представлено ниже.

5.5. Концепции решения кооперативных игр

В теории кооперативных игр, также как и вообще в теории игр, не существует единой концепции решения. Это связано с тем, что на начальной стадии развития теории были разработаны достаточно простые модели игр, которые легко поддавались анализу, и, соответственно, простые концепции решений, такие, как *С*-ядро и НМ-решения (см. ниже). По мере развития теории встал вопрос о практической применимости полученных результатов. Для того чтобы приблизить теорию к примерам игр, встречающихся в жизни, были разработаны более сложные модели, например, игры с нетрансферабельной полезностью, игры «в разбиениях» и др. Параллельно появлялись как обобщения понятий решения на эти более сложные модели, так и новые концепции решений – см. ниже.

Некоторые концепции решения пришли в теорию игр из *теорий общественного благосостояния* и *кооперативного выбора* [46, 79]. Темой исследования этих теорий является задача выбора коллективных решений. Понятно, что коллективный выбор должен быть (или желательно, чтобы был) единственным. Для сужения круга возможных решений эти теории пользуются аксиоматическими предположениями о стратегии принятия коллективных решений. В этих аксиомах широко используется понятие «справедливого» распределения благ (то есть распределения выигрышей, полезности и т.д.).

С понятием справедливости в условиях принятия решения обществом связана отдельная проблематика. Аксиоматический подход предполагает, что при исследовании ситуации выбора, для того, чтобы обосновать выбор общества, исследователь делает предположения, более или менее очевидные, о моральных установках данного общества, и, тем самым, определяет, что в данном обществе понимается под справедливостью. Парадокс состоит в том, что многие соответствующие здравому смыслу по отдельности предположения оказываются противоречащими друг другу. На сегодняшний момент в науке не существует единого мнения о том, что понимать под справедливостью. Двумя основными концепциями справедливого распределения благ являются *эгалитаризм* и *утилитаризм* [46]. Эгалитаризм утверждает, что при распределении благ в первую очередь следует обращать внимание на полезность наиболее «обделенных» членов общества. Утилитаризм же считает справедливым «эффективное» распределение, приводящее к наибольшему значению суммы полезностей членов общества. Применение этих концепций к теории кооперативных игр приводит к понятиям *N-ядра* и *вектора Шепли* соответственно (см. разделы 5.11 и 5.12).

Все концепции решения кооперативных игр, определяющие в качестве решения единственное распределение полезности между игроками, называются *значениями игры* (см. раздел 5.10).

5.6. *С*-ядро

Если игроки пришли к такому дележу x выигрыша максимальной коалиции, что не существует дележа, доминирующего дележ x, то дележ x устойчив в том смысле, что никакой коалиции S не выгодно отделяться от коалиции N и делить между членами этой коалиции выигрыш $v(S)$.

Определение 29: Множество недоминируемых дележей игры называется ее *С-ядром*.

Множество дележей, принадлежащих C-ядру, считается решением кооперативной игры.

Теорема 9 [46]. Для того чтобы дележ x принадлежал C-ядру, необходимо и достаточно выполнения для всех $S \subset N$ неравенств

(24) $v(S) \le \sum_{i \in S} x_i$.

Доказательство очевидно. •

Эта теорема дает удобный способ нахождения C-ядра путем решения системы неравенств. Решением этой линейной системы является выпуклый многогранник в пространстве $\Re^{|N|}$. Можно найти его крайние точки и описать любой дележ из ядра, как взвешенную линейную комбинацию крайних точек.

Пример 18. «Нахождение С-ядра игры трех лиц».

Рассмотрим игру трех лиц с характеристической функцией $v(S)$: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1,2\}) = 0.5$, $v(\{1,3\}) = 0.6$, $v(\{2,3\}) = 0.7$, $v(N) = 1$. Условие на дележи, принадлежащие C-ядру, задается системой неравенств:

$$(25) \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0.5 \\ x_1 + x_3 \ge 0.6 \\ x_2 + x_3 \ge 0.7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Множество дележей игры трех лиц можно изобразить на симплексе (см. рисунок 9), то есть на треугольнике, задаваемом в $\Re^3$ неравенствами $x_i \ge 0$, $i = \overline{1,3}$, и равенством $\sum_{i \in N} x_i = v(N) = 1$ (изображен на рисунке 9 серым цветом).

Неравенства (25) делят симплекс на области, границы которых параллельны одной из его сторон. C-ядро выделено на рисунке черным цветом. В зависимости от вида характеристической функции оно может быть множеством трех-, четырех-, пяти- и шестиугольной формы, может вырождаться в линию или точку. Оно может быть и пустым множеством. •

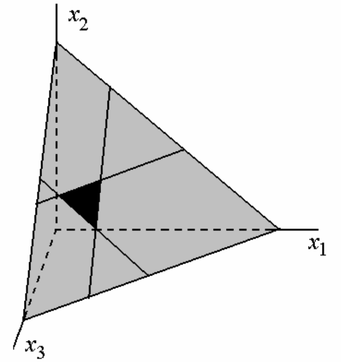

Рис. 9. С-ядро в игре с тремя игроками

Итак, C-ядро существует не для всех игр. Например, все кооперативные игры с постоянной суммой имеют пустое C-ядро.

Необходимым и достаточным условием существования непустого ядра является свойство *сбалансированности* игры.

Определение 30: *Максимальной* коалицией называется коалиция, состоящая из всех игроков.

Определение 31: *Собственной коалицией* называется коалиция, отличная от максимальной коалиции.

Определение 32: Для данного множества игроков N *сбалансированным покрытием* называется такое отображение $\delta_{(\cdot)}$ из $2^N \backslash \{N\}$ в [0, 1], что

(26) $\sum_{S:\, i \in S} \delta_S = 1$ для всех игроков i,

причем суммирование в (27) ведется по всем собственным коалициям, содержащим игрока i.

Теорема 10 [7, 8]. C-ядро игры (N, v) не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия $\delta_{(\cdot)}$ выполнено неравенство

(27) $\sum_{S \subset N} \delta_S v(S) \le v(N)$.

Если для игры выполнено условие (27), то игра называется *сбалансированной*.

Например, для супераддитивной игры трех лиц непустоту *C*-ядра гарантирует следующее дополнительное (к условиям супераддитивности) условие $v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \le 2v(N)$. Для игры четырех лиц условия сбалансированности задаются уже семью дополнительными неравенствами, и т.д.

5.7. Выпуклые игры

Свойство сбалансированности в общем случае достаточно сложно проверить (проверка сбалансированности игры сводится к решению задачи линейного программирования), поэтому встает вопрос о построении достаточных условий непустоты ядра, определяющих классы игр, для которых *C*-ядро гарантированно не пусто.

Определение 33: Игра (N, v) называется *выпуклой*, если для любых коалиций S, $T \subset N$ справедливо неравенство

$$v(S) + v(T) \le v(S \cap T) + v(S \cup T).$$

Теорема 11 [46]. Любая выпуклая игра имеет непустое *C*-ядро.

Другая формулировка выпуклости игры может быть дана в виде следующего критерия:

Теорема 12 [46]. Игра (N, v) выпукла тогда и только тогда, когда для любых коалиций S, $T \subset N$, таких, что $S \subset T$ и любого $i \notin T$ справедливо $v(S \cup \{i\}) - v(S) \le v(T \cup \{i\}) - v(T)$.

Доказательство. Покажем, что из определения выпуклости следует, что для любых коалиций S, $T \subset N$, таких, что $S \subset T$ и любого $i \notin T$ справедливо $v(S \cup \{i\}) - v(S) \le v(T \cup \{i\}) - v(T)$.

Действительно, эта формула является частным случаем определения выпуклости для пары коалиций $S \cup \{i\}$ и T.

Для доказательства в обратную сторону рассмотрим две коалиции S и T, такие, что $S \subset T$. Обозначим $R = N \setminus T$ и рассмотрим последовательность $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, покрывающую R. Последовательно применяя формулу в условии теоремы, получим:

$$v(S \cup \{i_1\}) - v(S) \le v(S \cup \{i_1\}) - v(T),$$
$$v(S \cup \{i_1, i_2\}) - v(S \cup \{i_1\}) \le v(S \cup \{i_1, i_2\}) - v(T \cup \{i_1\}),$$
$$\ldots$$
$$v(S \cup \{i_1, \ldots, i_k\}) - v(S \cup \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}) \le$$
$$v(T \cup \{i_1, \ldots, i_k\}) - v(T \cup \{i_1, \ldots, i_{k-1}\})$$
$$\ldots$$

Суммируя эти неравенства, находим, что для любой коалиции $R' \subseteq R$ верно следующее неравенство:

$$v(S \cup R') - v(S) \le v(T \cup R') - v(T).$$

Зафиксируем две произвольные коалиции S_0 и T_0 и применим полученную формулу к $S = S_0 \cap T_0$, $T = T_0$ и $R' = S_0 \setminus T_0$. Это и дает искомое определение выпуклости. •

Условие выпуклости иногда называют *условием возрастания доходов от кооперации*, то есть игрок, присоединяясь к большей коалиции, приносит ей дополнительный доход, больший, чем дополнительный доход, который он принес бы, присоединяясь к меньшей коалиции.

Выпуклость игры проверить гораздо проще, чем условие сбалансированности (просто проверив вышеуказанные 2^{2N} неравенств), и, если игра оказалась выпуклой, можно с уверенностью говорить о непустоте *C*-ядра.

Пример 19 [25]. «Кооперация центров в задаче распределенного контроля».

Исследуем возможности устойчивого существования коалиции, состоящей из всех центров в задаче распределенного контроля (см. пример 3). Будем считать, что такая коалиция устойчива, если непусто *C*-ядро соответствующей кооперативной игры.

В [25] приведены предположения, в рамках которых характеристическую функцию игры центров в этой задаче можно представить в виде (см. обозначения примера 3):

(28) $v(S) = \max_y [\sum_{i \in S} H_i(y) - c(y)]$, где $S \subseteq N$.

Рассмотрим частный случай линейных функций доходов центров, то есть будем считать, что $H_i(y) = \lambda_i y$, $\lambda_i > 0$. Затраты агента, как и предполагалось в постановке задачи, будем считать неотрицательной возрастающей выпуклой функцией действия *y*.

Обозначим $\lambda_S := \sum_{i \in S} \lambda_i$ – наклон функции дохода коалиции *S*, y_S – точка, в которой достигается максимум (28).

Для произвольной коалиции *S* точка y_S определяется из решения уравнения $c'(y) = \sum_{i \in S} \lambda_i$. Таким образом,

(29) $y_S = g(\lambda_S), g(\lambda_S) := [c']^{-1}(\lambda_S).$

Так как функция затрат выпукла, $[c']^{-1}(\lambda_S)$ – возрастающая функция.

Игра с характеристической функцией (28) супераддитивна. Действительно, из (28) следует, что она супераддитивна, если справедливо неравенство

$$\begin{aligned}(30)\quad &\lambda_S y_S - c(y_S) + \lambda_T y_T - c(y_T) \le (\lambda_S + \lambda_T) y_{S \cup T} - c(y_{S \cup T}),\\ &S, T \subseteq N, S \cap T = \varnothing.\end{aligned}$$

Пусть $\lambda_S \le \lambda_T$. Тогда из возрастания *g*(.) следует, что

$$y_{S \cup T} \ge y_T \ge y_S ,$$

и, следовательно,

$$(\lambda_S + \lambda_T) y_{S \cup T} - c(y_{S \cup T}) \ge (\lambda_S + \lambda_T) y_T - c(y_T).$$

Значит, для справедливости (30) достаточно выполнения неравенства $\sum_{i \in S} \lambda_i y_T \ge \sum_{i \in S} \lambda_i y_S - c(y_S)$. Оно верно, так как $y_S \le y_T$, $c(\cdot) \ge 0$.

Для того чтобы показать, что игра (28) выпукла, воспользуемся следующим результатом:

<u>Лемма 4 [25].</u> Если $v(S) = f(\sum_{i \in S} \lambda_i)$, где $f(\cdot)$ – произвольная выпуклая функция, $f(0) = 0$, а $\lambda_i, i \in N$ – набор неотрицательных чисел, то игра $v(\cdot)$ выпукла. •

Подставим (29) в (28). Тогда

$$v(S) = f(\lambda_S), f(\lambda_S) := \lambda_S g(\lambda_S) - c(g(\lambda_S)) .$$

Продифференцируем *f*(.) по λ_S :

$f'(\lambda_S) := g(\lambda_S) + \lambda_S g'(\lambda_S) - c'(g(\lambda_S)) g'(\lambda_S)$. Из (29) следует, что $c'(g(\lambda_S)) = \lambda_S$. Значит, $f'(\lambda_S) = g(\lambda_S)$. Следовательно, *f*(.) выпукла. Кроме того, очевидно, что $f(0) = 0$, а значит условие леммы выполнено, и игра (28) выпукла. Значит, по теореме 11, эта игра имеет непустое *C*-ядро, и в ней устойчива коалиция, состоящая из всех центров. •

5.8. НМ-решения

Поскольку ядро кооперативной игры часто оказывается пустым, приходится искать другие концепции решения.

Понятие НМ-решения было введено Дж. Фон-Нейманом и О. Моргенштерном [48]. Этот факт нашел отражение и в названии НМ-решений, которые обычно называют *решениями по Нейману и Моргенштерну*.

Они предложили рассматривать в качестве множества решений игры не отдельный дележ, и даже не множество дележей, а множество подмножеств множества дележей, обладающих определенными свойствами. Каждое из этих подмножеств называется НМ-решением.

Идея, которая лежит в основе НМ-решений – это стремление к внешней и внутренней устойчивости. *Внутренняя устойчивость* гарантирует равноправность дележей одного НМ-решения, то есть то, что в НМ-решении нельзя найти пару дележей, такую, что один из них доминирует другой. *Внешняя устойчивость* состоит в том, что для любого произвольного дележа найдется доминирующий его дележ, принадлежащий данному НМ-решению.

Множество $V \subset E(v)$ называется *НМ-решением*, если

1) Не существует такой пары $x, y \in V$, что $x \succ y$;
2) Если $y \notin V$, то найдется такой $x \in V$, что $x \succ y$.

Между НМ-решениями и *C*-ядром существует определенная связь. Так, справедлива

<u>Теорема 13 [62].</u> Если *C*-ядро не пусто, и существует НМ-решение, то оно содержит в себе *C*-ядро.

НМ-решения должны были решить проблему возможной пустоты C-ядра. Однако в 1967 году была найдена игра десяти лиц, не имеющая НМ-решений [78]. Обычно же игра имеет огромное множество НМ-решений, что очень ограничивает применимость этого понятия к практическим задачам. НМ-решения скорее представляют собой философскую категорию, чем практически применимую концепцию решения.

Заметим, что понятие НМ-решения оперирует дележом как выигрышем максимальной коалиции, то есть в определении предполагается, что максимальная коалиция все-таки образовалась. Чтобы определить, каким же образом будет распределен доход между участниками максимальной коалиции, игроки должны сначала определить, в рамках какого НМ-решения они будут выбирать дележ, а потом выбрать дележ из множества дележей, принадлежащих этому НМ-решению.

Фон-Нейман и Моргенштерн предлагают следующую интерпретацию этого процесса. По их мнению, каждое НМ-решение ограничивает множество дележей, удовлетворительных с точки зрения некоторого набора моральных принципов, действующих в данном обществе. То есть каждое НМ-решение представляет собой некоторую этику поведения. Выбор же дележа, принадлежащему выбранному НМ-решению, зависит от переговорных способностей участников игры.

Поиск НМ-решений достаточно трудоемок ввиду их многочисленности. Примеры построения НМ-решений можно найти в [48, 62].

5.9. Решения в конфигурациях

Недостатки классических НМ-решений привели к необходимости их модификаций. Так, Р. Ауман и М. Машлер [72], предложили в качестве исхода игры использовать не дележ, а *конфигурации*, которые учитывают образование коалиционной структуры, отличной от максимальной коалиции.

Определение 34: *Коалиционной структурой* для игры (N, v) называется *разбиение* P множества игроков N, то есть множество непересекающихся коалиций, объединение которых дает N.

Определение 35: *Конфигурацией* для игры (N, v) и коалиционной структуры P называется такое распределение дохода $x = \{(x_i, i \in S); S \in P\}$ между участниками коалиций, что

(31) $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$, $S \in P$,

(32) $x_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$.

Здесь же определим понятия, которые понадобятся ниже при описании решений в угрозах и контругрозах (см. раздел 5.13).

Определение 36: *Индивидуально рациональной* называется конфигурация x, в которой для всех игроков i справедливо $x_i \geq v(\{i\})$ (все конфигурации, удовлетворяющие формуле (32), индивидуально рациональны по определению).

Определение 37: Если в конфигурации $x = \{(x_i, i \in S); S \in P\}$ никакая подкоалиция T произвольной коалиции $S \in P$ не может гарантировать себе больший доход, чем она получает в конфигурации x, (то есть если $\forall S \in P$ и $\forall T \subset S$ $\sum_{i \in T} x_i \geq v(T)$), то такая конфигурация называется *коалиционно рациональной*.

Понятно, что индивидуальная рациональность есть более слабое условие, чем коалиционная рациональность.

Определение 38: Конфигурация $x = \{(x_i, i \in S); S \in P\}$ доминирует конфигурацию $y = \{(y_i, i \in T); T \in R\}$, если найдется такая коалиция $S \in P$, что $x_i > y_i, \forall i \in S$.

Легко видеть, что при этом коалиция S не может принадлежать коалиционной структуре R.

На основании введенного таким образом отношения доминирования можно определить решение по Нейману и Моргенштерну аналогично тому, как это было сделано выше. Определенное таким образом решение называется *НМ-решением в конфигурациях*.

Было доказано [72], что любая игра пяти лиц имеет решение в конфигурациях, а для игры n лиц можно сколь угодно мало изменить значение характеристической функции, чтобы игра имела решение в конфигурациях.

5.10. Значения игры

Общими недостатками рассмотренных выше концепций решения является, во-первых, то, что решение существует не для всех игр, во-вторых, что, если оно существует, то в большинстве случаев не является единственным. Однако в реальности результатом игры является вполне определенное распределение выигрыша между игроками. В этой связи представляется заманчивым построение концепции решения, которое всегда было бы определено и всегда давало бы единственный дележ в качестве решения. Такие концепции решения называются операторами значения игры.

Определение 39: *Оператором значения игры* называется отображение $\varphi[v]$, ставящее в соответствие любой кооперативной игре единственный дележ из множества дележей, называемый *значением игры*.

Этот подход к поиску решения разрабатывался, в основном, аксиоматической теорией принятия решений [46]. Его основной чертой является введение в виде аксиом определенных предположений о механизме принятия решения и поиск понятия решения, удовлетворяющего данным аксиомам.

Уже само определение оператора значения несет в себе черты вводимой аксиоматики. Так, по сути дела, априори предполагается, что любая игра обязательно должна иметь решение, и решение это должно быть единственным.

Дальнейшие аксиомы вводятся в основном в рамках основных направлений теории кооперативного выбора – утилитаризма и эгалитаризма [46], приводя к разным концепциям решения – вектору Шепли и N-ядру соответственно.

Значительным достижением аксиоматической теории принятия решений является демонстрация взаимной противоречивости некоторых, казалось бы, очевидных предположений о справедливом распределении благ, то есть оказывается, что некоторым условиям справедливости нельзя удовлетворить одновременно. Этот факт сказался и на результатах, относящихся к операторам значения.

5.11. Вектор Шепли

Чтобы определить аксиомы, которые лягут в основу определения вектора Шепли, введем следующие определения.

Определение 40: Оператор значения *анонимен*, если он коммутирует с перестановкой агентов, то есть при перестановке любых двух игроков местами соответственно переместятся и компоненты значения игры.

Определение 41: Оператор значения *маргинален*, если его значение зависит только от маргинальных вкладов игроков в коалиции, то есть от величин $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Определение 42: Носителем игры называется такая коалиция S, что для любой коалиции T выполнено $v(T) = v(T \cap S)$.

Определение 43: Для двух игр n лиц с характеристическими функциями u и v их *суммой* называется игра с характеристической функцией $w(S) = u(S) + v(S)$ для любой коалиции S.

Аксиомы (Шепли) [46]:

1. Если S – любой носитель игры v, то $\sum_{i \in S} (\varphi[v])_i = v(S)$, где $(\varphi[v])_i$ – это компонента вектора Шепли, относящаяся к i-му игроку.
2. $\varphi[v]$ анонимен.
3. Для любой пары игр u и v выполнено $\varphi[u + v] = \varphi[u] + \varphi[v]$.

Вектор Шепли есть оператор значения, задаваемый формулами: $x_i = \sum_{0 \le s \le n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S \subset N \setminus \{i\} \\ |S| = s}} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$, $i \in N$ [46].

Теорема 14 [46]. Аксиомы Шепли определяют единственный оператор значения – вектор Шепли.

Существует и альтернативный набор аксиом, также единственным образом характеризующий вектор Шепли:

Теорема 15 [46]. Вектор Шепли – единственный анонимный и маргинальный оператор значения.

Для содержательной интерпретации вектора Шепли используется, так называемая, *арбитражная схема Шепли*. Пусть игроки договорились собраться в определенном месте. Из-за случайных флуктуаций они будут прибывать в разное время. Будем предполагать, что вероятность любого из $n!$ порядков появления игроков одинакова и равна $1/n!$. Предположим, что если игрок, прибывая на место, находит там членов коалиции S и только их, то он получает величину $x_i = v(S \bigcup \{i\}) - v(S)$. Значение компоненты вектора Шепли – это математическое ожидание выигрыша игрока в условиях описанной рандомизированной схемы.

От оператора значения было бы логично ожидать, чтобы справедливо (в соответствии с принятой аксиоматикой) распределенный доход давал бы дележ, принадлежащий ядру (если ядро непустое), то есть чтобы он был *селектором ядра*. Одним из недостатков вектора Шепли является то, что он, в общем случае, селектором ядра не является. Однако для выпуклых игр справедлива

Теорема 16 [46]. В выпуклых играх вектор Шепли принадлежит C-ядру.

5.12. *N*-ядро

Самый распространенный оператор значения, являющийся селектором C-ядра – это N-ядро. Этот оператор реализует эгалитарный подход в распределении кооперативной прибыли. Эгалитаризм [46] считает справедливым распределение дохода, максимизирующее доход наименее удовлетворенного члена общества.

Для вектора x будем обозначать $L(x)$ вектор, составленный из компонент вектора x, ранжированных по возрастанию.

Определение 44: *Вектор* $x \in R^n$ *превосходит вектор* $y \in R^n$ *в смысле лексиминного порядка*, если найдется $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ такой, что $L(x)_k = L(y)_k$ при $k < i$, $L(x)_i > L(y)_i$.

Определение 45: Поставим в соответствие каждому эффективному распределению x в игре (N, v) *вектор эксцессов* $e(x) \in \Re^{|2^N \setminus \{N\}|}$ такой, что любой собственной коалиции S соответствует компонента этого вектора $e(x)_S$ и $e(x)_S = \sum_{i \in S} x_i - v(S)$.

На множестве эффективных распределений существует единственное распределение γ, такое, что для любого эффективного распределения x вектор $e(\gamma)$ предпочтительнее $e(x)$ в смысле лек-

симинного порядка. Это распределение называется *N-ядром* игры (N, v).

Можно показать [46], что для супераддитивных игр N-ядро удовлетворяет принципу индивидуальной рациональности, то есть является дележом.

По сути дела, механизм выбора N-ядра следующий. Для любого эффективного распределения ранжируем коалиции по их сверхприбыли (разнице дохода коалиции в результате распределения дохода $v(N)$ и значения характеристической функции $v(S)$ для нее). На множестве эффективных распределений вводим отношение предпочтения, основанное на лексиминном порядке векторов эксцессов, и определяем наилучшее в этом смысле распределение.

Характеризация N-ядра основана на достаточно сложных определениях, поэтому в данной работе она опускается. Подробное рассмотрение характеризации N-ядра и его модификаций проведено в [46].

5.13. Решения в угрозах и контругрозах

Еще одна концепция решения, которая, подобно решениям в конфигурациях, не ограничивается исследованием случая, когда реализуется максимальная коалиция, а рассматривает как результат игры и случаи неполного согласия игроков – это концепция *решений в угрозах и контругрозах*, которая основана на следующей идее. Пусть, например, в процессе игры трех лиц образовалась коалиционная структура $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, содержащая коалицию $T = \{1, 2\}$, в которую входят игроки 1 и 2. При распределении дохода коалиции $v(\{1, 2\})$ игроки 1 и 2 получают суммы x_1 и x_2 соответственно. Тогда, если игрок 1 недоволен таким распределением, то он может сказать своему партнеру, что если его доля дохода не будет увеличена, то он сформирует коалицию $S = \{1, 3\}$, где сможет рассчитывать на больший выигрыш. Если такая коалиция S может образоваться, то есть если игроку 3 выгодно сменить конфигурацию x на новую конфигурацию y, то такое заявление реально может угрожать целостности коалиции T и называется *угрозой игрока* 1 *игроку* 2. В свою очередь, игрок 2, интересы которого ущемлены подобным сценарием, может заявить игроку 1, что в случае подобных его действий он может предложить игроку 3 такую конфигурацию z коалиционной структуры $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, что игрок 3 получит больший доход, чем в конфигурации y, а сам игрок 2 получит не меньше, чем в исходной конфигурации x. Таким образом, игрок 2 выдвигает *контругрозу*, «защищающую» его долю x_2. Для математического описания этой идеи введем следующие определения.

Пусть $\Gamma = \{T_1,...,T_N\}$ – некоторая коалиционная структура, а K – произвольная коалиция. Тогда *партнерами* коалиции K назовем множество $P(K,\Gamma) = \{i : i \in T_k, T_k \bigcap K \neq \varnothing\}$.

Таким образом, игрок i – партнер коалиции K в Γ, если он входит в ту же коалицию, что и какой-либо из игроков K. Смысл этого определения состоит в следующем: чтобы члены коалиции K могли получить свою долю в коалиционно рациональной конфигурации (x, Γ), им необходимо согласие только своих партнеров.

Пусть (x, Γ) – коалиционно рациональная конфигурация в игре v, а K и L – непустые непересекающиеся подмножества некоторой коалиции $T_k \in \Gamma$. Тогда угрозой коалиции K против коалиции L называется коалиционно рациональная конфигурация (y, U), удовлетворяющая условиям: $P(K,U) \bigcap L = \varnothing$, $y_i > x_i$ для всех $i \in K$, $y_i \geq x_i$ для всех $i \in P(K,U)$.

Пусть (x, Γ) – коалиционно рациональная конфигурация в игре v, а K и L – те же коалиции, что и в предыдущем определении. Если (y, U) – угроза коалиции K против коалиции L, то *контругрозой коалиции L против коалиции K* называется коалиционно рациональная конфигурация (z, V), удовлетворяющая условиям: $K \not\subset P(L,V)$, $z_i \geq x_i$ для всех $i \in P(L,V)$, $z_i \geq y_i$ для всех $i \in P(L,V) \bigcap P(K,U)$.

То есть члены коалиции K, выдвигая угрозу против L, претендуют на то, что они смогут получить больше путем перехода к новой коалиционно рациональной конфигурации, и что их новые партнеры будут согласны с этим. Члены коалиции L могут выдвинуть контругрозу, если они сумеют найти третью коалиционно рациональную конфигурацию, в которой и они, и все их партнеры

получат не меньше своей первоначальной доли. Если для этого членам L в качестве партнеров нужны некоторые партнеры коалиции K (или даже некоторые члены K) в конфигурации угрозы, то им дают не меньше, чем они получали в коалиционно рациональной конфигурации угрозы.

Определение 46: Конфигурация называется *устойчивой*, если на каждую угрозу произвольной коалиции K против любой другой коалиции L найдется контругроза коалиции L против коалиции K.

Определение 47: Множество всех устойчивых конфигураций называется *решением в угрозах и контругрозах* (или *решением по Ауману-Машлеру* [72]).

5.14. Роль информированности

Как отмечалось ранее, на современном этапе развития теории игр не найдено единого понятия решения, которое для всех классов игр давало бы однозначное указание, какая из стратегий является оптимальной для игроков. Это относится как к некооперативной теории игр, так и к кооперативным моделям. Возможно, что из-за огромного многообразия игровых ситуаций подобная общая концепция не существует вообще.

Имеющиеся концепции решения (равновесие Нэша, Парето-доминирование, C-ядро и пр.) могут применяться в основном лишь для определенных классов игр. Поэтому при исследовании каждой конкретной задачи необходимо выбирать концепцию решения, которая будет использоваться. При ее выборе необходимо максимально использовать специфику задачи и имеющуюся в распоряжении ЛПР информацию (см. главу 1).

ГЛАВА 6. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ

6.1. Игры с фиксированным порядком ходов

Описание игр в нормальной или в байесовой форме во многих случаях может оказаться громоздким. В том числе, для многих распространенных в практике управления организационными системами моделей сложно построить игру в нормальной форме, то есть описания игры будут объемными, кроме того, для них будет характерно отсутствие многих «хороших» свойств целевых функций, например, непрерывности; существенно усложняется и расчет равновесий этих игр.

Причина этих сложностей состоит, в частности, в том, что модель «классической» теории игр, на самом деле, не всегда является самой простой. Предположение об одновременном выборе игроками своих стратегий значительно усложняет рассмотрение именно в случаях нетривиальных взаимодействий игроков, обмена информацией между ними, а также в задачах, в которых фиксированный порядок ходов является органической чертой их описания (это характерно именно для задач управления). Действительно, при описании игры в нормальной форме учет процессов взаимодействия между игроками отражается непосредственно на сложности множества стратегий, так как под стратегией понимается полный план поведения игрока во всех возможных игровых ситуациях.

Так, в примере 1 (задача стимулирования) с одним агентом множество стратегий центра $X_ц$ будет состоять из всех допустимых функций стимулирования, то есть будет множеством всех кусочно-непрерывных неотрицательных функций $\sigma(y)$, $y \in A$. Множество всех стратегий агента еще сложнее – оно состоит из всевозможных ответов на заданное поведение центра, то есть является множеством отображений $X_ц \to A$. В построенной таким образом игре равновесие Нэша ищется в виде пары функций – контракта $\{\sigma(\cdot), y(\cdot)\}$. Но, так как задачи стимулирования очень распространены в управлении, то для их плодотворного рассмотрения необходима соответствующая концепция решения (см. ниже), в том

числе допускающая последовательное принятие решений игроками в рамках некоторого фиксированного порядка ходов.

Требования применения теории игр к задачам управления в ОС приводят, таким образом, к необходимости разработки описания игры и концепций решения, ориентированных именно на эти случаи.

На современном этапе развития теории нельзя говорить о создании единой модели, охватывающей все случаи произвольных конфликтных ситуаций в управлении. Сколько-нибудь плодотворное исследование свойств игровых задач управления возможно только в рамках некоторых частных случаев, так называемых *базовых* моделей. При их рассмотрении очень важно, однако, придерживаться единого подхода к описанию игры. Такой подход, *теория иерархических игр*, был сформулирован в работах Ю.Б. Гермейера и его учеников [21-24, 27, 33, 35]. Ниже приводятся некоторые результаты теории иерархических игр двух лиц.

6.2. Базовые модели иерархических игр

Для иерархических игр характерно использование максимального гарантированного результата (МГР) в качестве базовой концепции решения игры. При этом взятие минимума по множеству неопределенных параметров в МГР компенсируется возможностью передачи информации между игроками, что, очевидно, снижает неопределенность при принятии решения.

Критерии эффективности (целевые функции) первого и второго игроков обозначим $w_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ соответственно. Выигрыши игроков зависят от их действий x_1 и x_2 из множеств действий X_1^0, X_2^0.

Во всех моделях иерархических игр считается, что *первый игрок* (*центр*) имеет право первого хода. Его ход состоит в выборе стратегии $\tilde{x}_1$. Понятие стратегии существенно отличается от понятия действия и тесно связано с информированностью первого игрока о поведении *второго игрока – агента*. Под стратегией игрока здесь и далее понимается правило его поведения, то есть правило выбора конкретного действия в зависимости от содержания и конкретного значения той информации, которую он получит в процессе игры. Выбирать же собственно действие центр может и после выбора действия агентом.

Самая простая стратегия центра состоит в выборе непосредственно действия x_1 (если поступления дополнительной информации о действии агента в процессе игры не ожидается), более сложная – в выборе функции $\tilde{x}_1(x_2)$ (если в процессе игры ожидается информация о действии агента). Также стратегия центра может состоять в сообщении агенту некоторой информации, например, информации о планах своего поведения в зависимости от выбора действия агентом. При этом агент должен быть уверен, что первый игрок может реализовать эту стратегию, то есть что первый игрок будет точно знать реализацию действия x_2 на момент выбора своего действия x_1.

Например, если агент (выбирающий стратегию вторым) не ожидает информации о действии центра, то реализация права первого хода центра может состоять в сообщении им агенту функции $\tilde{x}_1(x_2)$. Такое сообщение может рассматриваться как обещание выбрать действие $x_1 = \tilde{x}_1(x_2)$ при выборе агентом действия x_2. Тогда стратегия агента состоит в выборе действия в зависимости от сообщения центра, $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1(.))$. Если при этом агент доверяет сообщению центра, он должен выбрать действие x_2^*, реализующее $\max\limits_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1(x_2), x_2)$.

Игра с описанным выше порядком функционирования называется для краткости игрой Γ_2 (примером такой игры служит, как раз, задача стимулирования в условиях информированности центра о действии агента – см. теорему 19).

Если центр не ожидает информации о действии агента, и это известно агенту, то стратегия центра состоит, как уже было сказано, просто из выбора некоторого действия x_1^*. Стратегия агента состоит в выборе $x_2 = \tilde{x}_2(x_1^*)$ (он делает ход вторым, уже зная действие центра). Такая игра называется игрой Γ_1 (это, например, та же задача стимулирования, но уже в условиях отсутствия у центра информации о действии агента).

Рассмотрим сначала игру Γ_1.

Определение 48 : Пара действий (x_1^*, x_2^*) в игре Γ_1 называется *равновесием Штакельберга*, если

(33) $x_1^* \in \operatorname*{Arg\,max}\limits_{x_1 \in X_1^0,\, x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2)$,

(34) $x_2^* \in R_2(x_1^*) = \operatorname*{Arg\,max}\limits_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^*, x_2)$,

то есть $R_2(x_1)$ – функция наилучшего ответа агента на действие центра.

Равновесие в игре Γ_1 отличается от равновесия Штакельберга (33) тем, что при определении оптимальной стратегии первого игрока вычисляется минимум по множеству $R_2(x_1)$: $x_1^* \in \operatorname*{Arg\,max}\limits_{x_1 \in X_1^0} \min\limits_{x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2)$ [21].

Равновесие по Штакельбергу реализуется, если агент выбирает действие, максимизируя свой выигрыш при известном ему на момент принятия решения действии центра, а центр, зная о таком поведении агента, выбором действия x_1 максимизирует свой выигрыш, считая заданной реакцию агента на свои действия. Кроме того, видно, что, максимизируя свой выигрыш по $x_2 \in R_2(x_1)$, центр, по сути, рассчитывает на благожелательность агента, то есть на то, что агент из множества равнозначных для него действий $R_2(x_1)$ выберет наиболее благоприятное для центра действие.

Будем считать множество равновесий Штакельберга решением игры Γ_1.

Теорема 17 [21]. Если в игре Γ_1 множества действий X_1^0, X_2^0 компактны, функции выигрыша f_1, f_2 непрерывны, то в этой игре существует по крайней мере одно равновесие Штакельберга.

Справедливость теоремы 17 следует непосредственно из существования в условиях теоремы максимумов (33), (34).•

В игре Γ_1 агент выбирает действие в условиях полной информированности, уже зная действие центра. Максимизация выигрыша выбором своего действия является здесь частным случаем применения принципа МГР. Равновесное по Штакельбергу действие центра также дает ему гарантированный результат, если центр уверен в том, что агент выбирает свое действие в соответствии с (34) и принципом благожелательности. Таким образом, равновесные стратегии как центра, так и агента, являются для них и гарантирующими.

Пример 20 [65]. «Нахождение равновесия Штакельберга».

В игре примера 9 («Семейный спор»), если первый игрок имеет право первого хода (является центром), то равновесием Штакельберга будет ситуация (1, 1), дающая ему выигрыш 4. •

В этой игре право первого хода дает центру преимущество перед агентом. Однако это не всегда так.

Пример 21. «Невыгодное для центра равновесие Штакельберга». В антагонистической игре «чет-нечет» с матрицей

$$\begin{bmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{bmatrix}$$

имеются два равновесия Штакельберга: (1, 2) и (2, 1). Оба они дают центру, делающему ход первым, выигрыш –1. Однако в этой игре есть равновесие Нэша в смешанных стратегиях, дающее обоим игрокам нулевой выигрыш.

Использование центром смешанных стратегий в игре Γ_1 не может увеличить его выигрыш, так как в момент выбора действия агент все равно будет знать конкретную реализацию действия центра. Таким образом, игроки в этой игре (как и в любой игре, в которой нет равновесия Нэша в чистых стратегиях) не заинтересованы в том, чтобы противник наблюдал их действие. •

Однако ситуация, когда первый ход дает преимущество, все же более типична. Тогда, если порядок ходов определяется самими игроками, между ними возникает борьба за лидерство. Игре двух лиц в нормальной форме можно поставить в соответствие две игры Γ_1 (игры первого порядка), отличающиеся последовательностью ходов. Тогда борьба за лидерство (первый ход) определяется выгодностью перехода от исходной игры к какой-либо из иерархических игр первого порядка.

Определение 49: В игре двух лиц имеет место *борьба за первый ход*, если не существует ситуации (x_1^*, x_2^*), для которой

$$\max_{\substack{x_i \in X_i^0, \\ x_j \in R_j(x_i)}} f_i(x_1, x_2) \le f_i(x_1^*, x_2^*),\ \forall\ i \in \{1, 2\},\ j \ne i.$$

Теорема 18 [65]. Если в игре двух лиц имеются хотя бы два оптимальных по Парето равновесия Нэша, в которых вектора выигрышей отличаются, то в этой игре имеет место борьба за первый ход.

Для игры «Семейный спор» условия теоремы 18 выполнены, поэтому в этой игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы выбирать действие первым (см. пример 20).

Тем не менее, во многих случаях соответствующее игре Γ_1 поведение центра нельзя назвать эффективным. Если в задаче стимулирования (пример 1) центр будет первым выбирать действие (стимулирование агента, уровень зарплаты), а затем уже агент будет выбирать свое действие при заданном стимулировании, единственное равновесие Штакельберга будет состоять в том, что центр ничего не будет платить агенту, а агент, соответственно, не будет работать. Эффективное решение этой проблемы в условиях, когда центр не может в момент принятия решения наблюдать действие агента, приводится ниже, в разделе «Метаигры». В случае же, когда центр наблюдает действие агента, он заинтересован сообщить агенту о своих планах по выбору действия в зависимости от действия агента, реализуя тем самым игру Γ_2.

Далее приводится формулировка и доказательство теоремы о максимальном гарантированном результате центра в игре типа Γ_2. К этой игре сводятся многие модели управления, например, задача стимулирования в условиях полной информированности [57]. Для наглядности ход доказательства теоремы и вводимые при этом понятия демонстрируются на примере именно этой задачи. В левой колонке приводятся выражения для произвольной игры типа Γ_2, в правой – их описание в терминах задачи стимулирования.

Теорема 19 [21]: (Теорема Ю.Б. Гермейера).

Определение необходимых для формулировки теоремы понятий:

Целевые функции игроков:	Пусть

$w_1 = f_1(x_1, x_2)$,

$w_2 = f_2(x_1, x_2)$.

$x_1 \in X_1^0$, $x_2 \in X_2^0$.

При доказательстве будем считать, что $f_2(x_1, x_2)$ непрерывна по x_1 при любом x_2.

$$\sup_{x_2 \in X_2^0} f_2(\widetilde{x}_1(x_2), x_2) > L_2,$$

$x_2 \in X_2^0$ – компактные множества действий.

Стратегия центра – $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_1(x_2)$, то есть предполагается следующий порядок функционирования: игрок 1, обладая правом первого хода, сообщает игроку 2 план выбора своей стратегии в зависимости от выбранной игроком 2 стратегии x_2. После этого второй игрок выбирает дейст-

$$f_1(x_1,x_2) = \begin{cases} A(1-e^{-x_2}) - B - x_1, & x_2 > 0 \\ -x_1, & x_2 = 0 \end{cases},$$

$$f_2(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 - C, & x_2 < 0.5 \\ x_1 - x_2^2, & x_2 \ge 0.5 \end{cases}.$$

Это – *задача стимулирования второго рода* [55], где x_1 играет роль зарплаты, выплаченной центром (игроком 1) работнику (агенту, игроку 2). При этом x_2 – это результат работы, от которого зависит доход центра $A(1-e^{-x_2})$, где A – ценовой коэффициент, B – постоянные затраты центра. Затраты работника считаются равными C<0.25 при малых (x_2<0.5) действиях, а дальше быстро растут.

$x_1 \in X_1^0 = [0,10]$ – это ограничение по заработной плате, более 10 единиц она быть не может.

$x_2 \in X_2^0 = [0,10]$ физическое ограничение по производительности работы.

Трудовой контракт, который центр предлагает работнику, состоит в указании зависимости $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_1(x_2)$ зарплаты x_1 от результата работы x_2. Зарплата выплачивается по результату работы, то есть после выбора работником действия x_2.

Считается, что работник выбирает свое действие из условия максимизации своей целевой функ-

вие x_2, максимизируя свою целевую функцию с подставленной туда стратегией первого игрока, а затем первый игрок – действие $\widetilde{x}_1(x_2)$.

Стратегия наказания $x_1^н = x_1^н(x_2)$ определяется из условия

$$f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Если стратегий наказания несколько, то будем называть *оптимальной стратегией наказания* ту из них, на которой достигается максимум выигрыша первого игрока.

Гарантированный результат второго игрока (при использовании первым игроком стратегии наказания)

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2^0} \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Множество действий второго игрока, обеспечивающих ему максимальный выигрыш при использовании первым игроком стратегии наказания

$E_2 = \{x_2 |\ f_2(x_1^н(x_2), x_2) = L_2\}$.

Множество достижимости $D = \{(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) > L_2\}$ – это договорное множество

ции при заданном контракте (обещании центра).

Стратегией наказания в данном случае будет отказ центра выплачивать зарплату, так как при любом действии x_2, минимум f_2 достигается при нулевой зарплате ($x_1 = 0$).

Наилучшее действие, которое может выбрать работник при нулевой зарплате, принадлежит отрезку [0, 0.5], так как только на этом отрезке его затраты равны C, а дальше только возрастают. То есть $L_2 = -C$.

Здесь множество D представляет собой совокупность всех зарплат и действий, которые выгодны рассматриваемой игры, то есть множество сочетаний стратегий первого и второго игроков, которые гарантировали бы второму результат, строго больший того, что тот может получить даже при наихудших для него действиях первого игрока (то есть при использовании первым игроком стратегии наказания).

для работника (по сравнению с угрозой получения результата – C).

Множество открытое «снизу», не включает границу, поскольку неравенство строгое (см. рисунок 10).

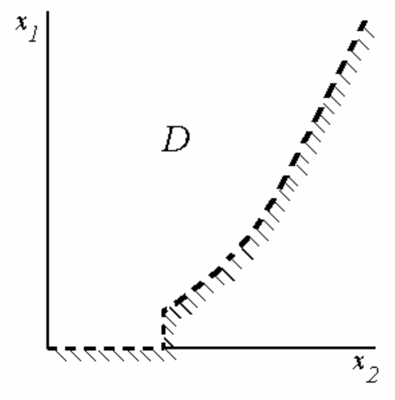

Рис. 10. Множество достижимости

Наилучший результат первого игрока на множестве достижимости

$$K = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in D} f_1(x_1, x_2), D \neq \varnothing \\ -\infty \qquad\qquad , D = \varnothing \end{cases}$$

Принадлежность ситуации множеству достижимости гарантирует реализуемость этого результата путем использования стратегии наказания.

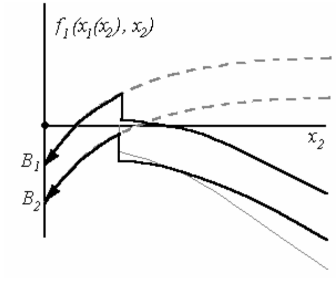

Рис. 11. Выбор плана x_2

Действие игрока 1, реализующее $K - \varepsilon$ при выборе игроком 2 рекомендуемого действия из D

($f_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$, $(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in D \neq \varnothing$).

Для данного примера целевая функция центра есть разница дохода и затрат x_1 на стимулирование. Нижняя грань затрат при этом достигается на нижней границе D (см. рис. 11). Поэтому выбор наиболее выгодного для центра x_2 сводится к поиску максимума разницы дохода центра и затрат работника (это и есть «нижняя грань D»), то есть подставляем

$$x_1(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 < 0.5 \\ x_2^2 - C, & x_2 \geq 0.5 \end{cases}.$$

Как показано на рис. 11, в зависимости от параметров игры, этот максимум может достигаться как при x_2=0 (невыгодность производства, K=0), при x_2=0.5 (средняя производительность), так и при x_2>0.5 (при $f_1'(x_2)$=0).

x_1^ε – это размер вознаграждения работнику, который гарантирует центру результат, не более чем на ε меньший, чем K при выборе работником действия x_2^ε. При этом, данный результат достижим, так как $(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in D \neq \varnothing$.

$M = \inf_{x_2 \in E_2} \sup_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2)$ – гарантированный результат центра при применении им стратегии наказания (так как стратегии игрока 2 ограничены множеством E_2).

В приведенных условиях этот результат достигается при $x_2 \to +0$ и равен $-B$. Он символизирует гарантированный выигрыш, который получает центр при отказе от даже минимального сотрудничества (если оно оказывается невыгодным), то есть наихудшее, что центр может ожидать от рациональных действий работника при нулевой зарплате.

Стратегия $x_1^{a\varepsilon}(x_2)$ реализует (с точностью ε) наилучший ответ игрока 1 на действие x_2 игрока 2, то есть $f_1(x_1^{a\varepsilon}(x_2)) \geq \sup_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2) - \varepsilon$.

Это ε-доминантная стратегия.

В этом примере, из-за монотонного убывания прибыли центра при возрастании зарплаты, эта изоляционистская стратегия почти совпадает со стратегией наказания, (она состоит из произвольных действий $x_1 \in [0, \varepsilon]$).

Тем не менее, эти стратегии могут и сильно отличаться друг от друга (формально связи между их определениями нет).

Формулировка теоремы:

В указанных условиях наибольший гарантированный результат центра равен $\max[K, M]$.

Для задач стимулирования всегда $K>M$, так как выше найдено $K \geq 0$, в отличие от отрицательного M. Можно показать, что при довольно необременительных условиях на целевые функции игроков (в частности, при допущении возможности даже произвольно малых положительных побочных платежей игроку 2), это условие всегда выполняется [21, 22, 57]. В данном же случае зарплата предоставляет возможность практически неограниченных побочных платежей работнику.

При $K>M$ ε-оптимальная стратегия игрока 1

$$\tilde{x}_1^{\varepsilon}(x_2) = \begin{cases} x_1^{\varepsilon}, & при\, x_2 = x_2^{\varepsilon} \\ x_1^{н}(x_2), & при\, x_2 \neq x_2^{\varepsilon} \end{cases}.$$

Как уже показано, именно эта ситуация всегда реализуется в задаче стимулирования. Стратегия состоит в обещании наказывать (использовать стратегию наказания) работника при любом его отклонении от некоторого действия x_2^{ε}. Это действие, как показано выше, выбирается из условия максимизации прибыли центра в пределах «переговорного множества» D.

При $K \le M$ оптимальная стратегия игрока 1 заключается в применении оптимальной стратегии наказания.	Как показано выше, данный случай не является оптимальным поведением в нашем примере, так как здесь всегда $K>M$. Эта стратегия в данном случае вырождается в стратегию наказания, то есть выплату нулевой зарплаты. Более широко эту стратегию можно понимать, как попытку ограничения выбора работника множеством E_2, на котором центр не в силах наказать работника более чем до L_2, при этом центр выбирает наилучший ответ на любое действие из E_2, в противном случае – наказывает. Использование этой стратегии говорит о невозможности компромисса.

Доказательство. В случае $K > M$, $\sup\limits_{x_2 \in X_2^0} f_2(\widetilde{x}_1^{\varepsilon}(x_2), x_2)$ достигается при $x_2 = x_2^{\varepsilon}$, так как только выбор этой стратегии позволяет агенту получить более L_2. Значит, агент выберет $x_2 = x_2^{\varepsilon}$, что гарантирует центру $K - \varepsilon$. Если $K \le M$, то, выбирая стратегию $x_2 \notin E_2$, по определению E_2, агент получит строго меньше L_2. В то же время, из непрерывности f_2 следует достижимость результата L_2 выбором $x_2 \in E_2$.

При этом центр гарантирует себе

$$\inf_{x_2 \in E_2} f_1(x_1^{a\varepsilon}, x_2) \ge \inf_{x_2 \in E_2} \sup_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2) - \varepsilon = M - \varepsilon .$$

То есть показано, что данная стратегия центра действительно приводит к обещанному результату.

Необходимо еще показать, что произвольная стратегия $x_1 = \widetilde{x}_1(x_2)$ не может гарантировать центру больше $\max[K, M]$.

1) Если $\sup\limits_{x_2 \in X_2^0} f_2(\widetilde{x}_1(x_2), x_2) > L_2$, то центр никак не гарантирован от выбора x_2, такого, что $(x_1(x_2), x_2) \in D$, что гарантирует центру не более K.

2) Если $\sup\limits_{x_2 \in X_2^0} f_2(\widetilde{x}_1(x_2), x_2) = L_2$ (меньше быть не может, по определению L_2), то эта верхняя грань достигается при всех $x_2 \in E_2$, так как $L_2 = \inf\limits_{x_1} f_2(x_1, x_2) \le f_2(\widetilde{x}_1, x_2) \le \sup\limits_{x_2 \in X_2^0} f_2(\widetilde{x}_1, x_2) = L_2$. Тогда центр не застрахован от наихудшего для себя выбора x_2 из E_2, что дает ему гарантированный результат M. •

Каким же образом соотносятся выигрыши центра в играх Γ_1 и Γ_2 с одинаковыми функциями выигрыша? Существуют ли более рациональные для центра методы обмена информацией, дающие ему больший выигрыш? Ответ на эти вопросы дает рассмотрение *информационных расширений* игры, или *метаигр*.

6.3. Метаигры

Если центр не планирует самостоятельно получить информацию о действии агента, он может первым выбрать действие, реализуя игру Γ_1. Однако ему можно порекомендовать и более сложное поведение. Центр может попросить агента сообщить ему свою стратегию $x_2 = \widetilde{x}_2(x_1)$, которая основана на ожидаемой агентом информации о действии центра. Реализация права первого хода центром состоит в этом случае в сообщении агенту стратегии $\widetilde{\widetilde{x}}_1(\widetilde{x}_2(x_1))$. Эту стратегию можно интерпретировать, как обещание центра выбрать действие $\widetilde{\widetilde{x}}_1(\widetilde{x}_2(x_1))$ при условии, что агент обещает выбирать свое действие в соответствии с $\widetilde{x}_2(x_1)$. Так образуется игра Γ_3. Здесь также не рассматривается возможность блефа, как со стороны центра, так и со стороны агента.

Если центр определяет порядок обмена информацией, он может выбирать, играть ему Γ_1 или Γ_3. В обеих играх центр вынужден выбирать действие, не зная действия, выбранного агентом. Можно считать Γ_3, в некотором роде, усложнением игры Γ_1.

Аналогично тому, как, с помощью образования дополнительной «петли обратной связи», из Γ_1 была образована Γ_3, можно усложнить и игру Γ_2. Так образуется игра Γ_4. В ней агент, ожидая от центра, как и в Γ_2, информацию вида $\tilde{x}_1(x_2)$, формирует и сообщает центру свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1)$. Центр, обладающий правом первого хода, пользуется стратегиями $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}_1(\tilde{\tilde{x}}_2)$, которые определяют, какую функцию $\tilde{x}_1(x_2)$ выберет центр в зависимости от сообщения агента $\tilde{\tilde{x}}_2$.

Таким же способом можно на основе Γ_3 построить игру Γ_5, и так далее.

В каждой из построенных четных игр Γ_{2m}, $m = 1, 2\ldots$, центр использует в качестве стратегий отображения множества стратегий агента в этой игре на множество стратегий центра в игре Γ_{2m-2}. Аналогично, стратегиями агента являются отображения множества стратегий центра в Γ_{2m} на множество стратегий агента в игре Γ_{2m-2}.

Такую рефлексию можно было бы наращивать бесконечно, переходя к все более сложным схемам обмена информацией, если бы рассмотрение этих игр увеличивало выигрыш центра (в интересах которого и проводится исследование всех метаигр). Однако имеет место следующий результат:

Теорема 20 [21]. Максимальный гарантированный результат центра в игре Γ_{2m} при $m > 1$ равен максимальному гарантированному результату центра в игре Γ_2. В играх же Γ_{2m+1} при $m > 1$ максимальный гарантированный результат центра равен его максимальному гарантированному результату в игре Γ_3.

Таким образом, при исследовании гарантированного результата центра можно ограничиться исследованием только игр Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между гарантированными выигрышами центра в этих играх:

Теорема 21 [21]. Максимальный гарантированный результат центра в игре Γ_2 не меньше его гарантированного результата в игре Γ_3, а тот, в свою очередь, не меньше гарантированного выигрыша в игре Γ_1.

Этот результат показывает, что Γ_2 является «идеальной» игрой для центра. Соответственно, если центр имеет возможность определять порядок и содержание обмена информацией, и, кроме того, при выборе своего действия знает действие, выбранное агентом, он должен играть Γ_2. Если центр на момент выбора своего действия не знает действия агента – ему наиболее выгодна игра Γ_3.

В заключение стоит остановиться на определении равновесных ситуациях в метаиграх. Выше в примере 17 было показано, как расширение множества стратегий игроков позволяет уравновесить ранее неравновесные исходы. Интуитивно понятно, что, добавляя возможности информационного обмена между игроками, можно добиться устойчивой реализации большего числа исходов. Выше также было упомянуто, что в задаче стимулирования равновесий Нэша чрезвычайно много. Следующий результат формулирует это утверждение более строго:

Теорема 22 [21]. В игре Γ_{2m} (при $m \geq 1$) те, и только те, исходы (x_1^0, x_2^0), которые удовлетворяют условиям

$$f_1(x_1^0, x_2^0) \geq \min_{x_2 \in X_2^0} \max_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1^0, x_2^0) \geq \max_{x_2 \in X_2^0} \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2),$$

могут быть ситуациями равновесия Нэша игры со стратегиями $(\tilde{x}_1^0, \tilde{\tilde{x}}_2^0)$ (здесь стратегии понимаются в метаигровом смысле, как функции информированности соответствующей метаигры).

Таких исходов действительно может быть очень много. В этом смысле метаигровые схемы можно рассматривать, как средство расширения множества равновесий Нэша, если множество равновесий исходной игры почему-то не устраивает исследователя или одного из игроков. Большое количество общих теоретических результатов исследования равновесий в метаиграх получено в [16, 35, 76].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящем учебном пособии приведены основные сведения из теории игр, необходимые для построения и анализа математических моделей управления организационными системами. Эффективность теоретико-игрового моделирования в организационном управлении подтверждается как принципиальной необходимостью исследования возможных реакций агентов на те или иные управления в отсутствии возможности проведения натурного эксперимента, так и опытом практического использования значительного числа моделей и методов управления в реальных социально-экономических системах (см. ссылки в [14]). Для более плодотворного применения теории игр в прикладных задачах необходимо как дальнейшее развитие теории (поиск новых адекватных концепций решения игр, методов их анализа и т.д.), так и систематическое привлечение результатов менеджмента, социологии и психологии как эмпирической базы формальных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.
3. Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. М.: Мир, 1977.
4. Бабкин В.Ф., Баркалов С.А., Щепкин А.В. Деловые имитационные игры в организации и управлении. Воронеж: ВГАСУ, 2001.
5. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. М.: Физматгиз, 1961.
6. Блекуэлл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений. М.: Иностранная литература, 1958.
7. Бондарева О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр / Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 119 – 140.
8. Бондарева О.Н. О теоретико-игровых моделях в экономике. Л.: ЛГУ, 1974.
9. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.
10. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 - 25.
11. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 - 30.
12. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.
13. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
14. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999.
15. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. Т. 1 – 3.
16. Васин А.А., Гурвич В.А. Коалиционные ситуации равновесия в метаиграх / Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 38 – 44.
17. Вилкас Э.Й. Аксиоматическое определение значения матричной игры // Теория вероятностей и ее применения. 1962. Том. 8. № 3. С. 324-327.
18. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990.

19. Воробъев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
20. Воробъев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.
21. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
22. Гермейер Ю.Б., Ерешко Ф.И. Побочные платежи в играх с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1974. № 14. С. 1437 – 1450.
23. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.
24. Горелик В.А., Фомина Т.П. Элементы теории игр. Липецк: ЛГТУ, 1999.
25. Губко М.В., Караваев А.П. Матричные структуры управления // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 132 – 146.
26. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981.
27. Ерешко Ф.И. Моделирование рефлексивных стратегий в управляемых системах. М.: ВЦ РАН, 2001.
28. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Некоторые игровые задачи управления и их приложения. Тбилиси: Мецниереба, 1998.
29. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
30. Коваленко А.А. Сборник задач по теории игр. Львов: Высшая школа, 1974.
31. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979.
32. Колмановский В.Б. Игровые задачи управления. М.: МИЭМ, 1990.
33. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
34. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: ФАЗИС, ВЦРАН, 2000.
35. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.
36. Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н., Вус М.А. Введение в информационное управление. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 1999.
37. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. М.: Дело, 2001.
38. Ларичев О.И. Выявление экспертных знаний. М.: Наука, 1989.

39. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987.
40. Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. М.: Советское радио, 1973.
41. Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения. М.: Иностранная литература, 1961.
42. Мак-Кинси Д. Введение в теорию игр. М.: Физматгиз, 1960.
43. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979. Том. 2.
44. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
45. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.
46. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
47. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
48. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
49. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. М.: ИПУ РАН, 2002.
50. Новиков Д.А. Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 4. С. 187 - 189.
51. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999.
52. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
53. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в моделях активных систем с нечеткой неопределенностью. М.: ИПУ РАН, 1997.
54. Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.
55. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
56. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000.
57. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.
58. Новиков Д.А., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002.

59. Нэш Д. Бескоалиционные игры / Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 205 – 221.
60. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
61. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
62. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
63. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974.
64. Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2002.
65. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
66. Пфанцагль И. Теория измерений. М.: Мир, 1976.
67. Советский энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988.
68. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
69. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.
70. Aleskerov F., Monjardet B. Utility maximization, choice and preference. Berlin: Springer, 2002.
71. Arrow K.J. Social choice and individual values. Chicago: Univ. of Chicago, 1951.
72. Aumann R.J., Mashler M. The bargaining set for cooperative games // Advances in Game Theory. Ann. Math. Studies. 52. Princeton: Princeton Univ. Press, 1964.
73. Coombs C.H., Dawes M., Tversky A. Mathematical psychology. N.Y.: Englewood Cliffs, 1970.
74. Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT Press, 1995.
75. Harsanyi J. Games with incomplete information played by "Bayesian" players // Management Science. Part I: 1967. Vol. 14. № 3. P. 159 - 182. Part II: 1968. Vol. 14. № 5. P. 320 - 334. Part III: 1968. Vol. 14. № 7. P. 486 - 502.
76. Howard N. Theory of meta-games / General systems. 1966. № 11. P. 187 – 200.
77. Kreps D. Theory of choice. London: Vestview Press, 1988.
78. Lucas W. F. A game with no solution. RAND Memorandum RM-5518-PR. Rand Corporation, October 1967.
79. Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

80. Moore J. Implementation, contracts and renegotiation in environment with complete information / Advances in Economic Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. Vol. 1. P. 182 – 281.
81. Moulin H. Cooperative microeconomics: a game-theoretical introduction. London: Prentice Hall, 1995.
82. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
83. Myerson R.B. Optimal coordination mechanisms in generalized principal-agent problems // Journal of Mathematical Economy. 1982. Vol. 10. № 1. P. 67 - 81.
84. Novikov D.A. Management of active systems: stability or efficiency // Systems science. 2001. Vol. 26. № 2. P.85-93.
85. Repullo R. The revelation principle under complete and incomplete information / Economic Organizations as Games. Oxford: Basil Blackwell, 1986. P. 179 – 195.
86. Ross A.E. Game-theoretic models of bargaining. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
87. Shubik M. Game theory in the social sciences: concepts and solutions. Massachusetts: MIT Press, 1991.