А. И. Кобзарь, В. Н. Тикменов, И. В. Тикменова

теория игр:
ИГРАЮТ ВСЕ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2015

УДК 519.83
ББК 22.18
К 55

Кобзарь А.И., Тикменов В.Н., Тикменова И.В. **Теория игр: Играют все.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-1656-5.

Авторы исходили из запросов и возможностей практиков — экономистов и менеджеров реального сектора экономики и техники. Этим определялась глубина вторжения в недра теории игр, весьма математизированной науки. Авторы предпочли сделать это в доступной форме, не перегружая текст сложными математическими пассажами. Логико-математические выкладки чередуются с историческими примерами, литературными аналогиями и просто занимательными историями, что позволит читателю знакомиться с основами теории игр, постигая, прежде всего, смысловое содержание последних.

Книга, скорее всего, — путеводитель для начинающего по истории возникновения теории игры, пути ее становления, начиная с азартных салонных игр и заканчивая глобальными процессами бизнеса и политики; базовым посылам; основным приемам и методам.

Математическое сопровождение доступно пользователю, владеющему математикой в объеме средней школы и начальных курсов вузов.

ISBN 978-5-9221-1656-5

Памяти Джона Форбса Нэша-младшего,
великого человека, гениального ученого, лауреата
Нобелевской премии посвящается [1])

«Искусство читать — это искусство мыслить
с некоторой помощью другого»
Эмиль Фаге

«Знать может любой дурак.
Весь фокус в том, чтобы понимать»
Альберт Эйнштейн

[1]) Книга была в редакции, когда пришло известие о гибели Джона Нэша и его жены Алисии в автомобильной катастрофе 23 мая 2015 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Если в Вашей жизни
нет конфликтов,
проверьте,
есть ли у Вас пульс.

Чарльз Диккенс
1812 – 1870

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

«Если в Вашей жизни нет конфликтов,
проверьте, есть ли у Вас пульс»
Ч. Диккенс (1812–1870)

Книга адресована экономистам и менеджерам различного уровня, которые, не отдавая себе в этом отчета, ежеминутно находятся во власти теории игр, неосознанно используя ее рекомендации при решении своих многочисленных проблем, ища выходы из конфликтов, являющихся следствием несовпадения собственных целей с целями тех, кто им противостоит. Нобелевский лауреат Роберт Ауманн (р. 1930) так сформулировал базовый посыл теории игр (по его мнению, не стоящей присужденной ему Нобелевской премии) — прийти к результату намного проще, если постараться понять желания другой стороны, попытаться сопоставить их со своими, не только рассчитать результаты собственных шагов, но и учесть возможную реакцию конкурентов.

«*Когда я звоню в справочную службу*, *то спрашиваю*, *как зовут человека*, *с которым разговариваю. Это теория игр в чистом виде*, *так как имя человека я тут же забываю*, *но он об этом не знает. Таким образом*, *я мотивирую его работать более ответственно. Стимулирование — основополагающий принцип теории игр*, *позволяющий людям добиваться своих целей*», — считает Ауманн.

Приведем поучительный пример. Преподаватель математической экономики из Бангладеш Асхар Чоудхари на вопрос пятилетней дочки Аннапутры — «*Что такое теория игр*?» — ответил так. Предположим, мать каждый день приносит домой торт и делит его на две равные части, давая их своим детям. В результате случался постоянный семейный конфликт, каждый из детей считал, что больший кусок достается другому. Однажды мать предложила разрезать торт старшему сыну, а младшему решать, какую часть он возьмет себе. Конфликты прекратились, торт всегда разрезался точно на две равные части. Это и есть результат реализации базового посыла теории игр — выбор каждого зависит от того, что делает другой. Старший разрезал торт точно пополам, так как знал, что младший брат не упустит случая воспользоваться его неточностью. Младший брат потерял возможность извлекать выгоду из права выбирать из двух равных кусков больший. Просто, не правда ли?

Авторы, следуя совету Альберта Эйнштейна (1879–1955), постарались так же, как в приведенном примере, изложить основания теории игр «*так просто, как только возможно, но не проще*», что соответствует принципу монаха-францисканца Уильяма Оккама (1285–1349) «*Pluralitas non est ponenda sine necessitate*» (*без необходимости не следует утверждать многое*), известному как «*Бритва Оккама*». Нами руководило желание сделать неосознанное использование теории игр осознанным, избегая профанации; дать простое, понятное и по возможности занимательное изложение этой теории для читателя, не только не обремененного глубокими знаниями в математике, но и в суматохе жизненных проблем подзабывшего то, чему его учили в школе и институте. Стоит отметить еще одно печальное обстоятельство — снижение качества математического образования, выразившееся не в совершенствовании преподавания математических дисциплин, а в цене гаджетов у студентов, позволяющих им добывать ответы на задачи и тесты, избегая минимального знакомства с их содержанием

Сфера деятельности авторов — разработка и производство сложных электронных устройств и комплексов и финансово-экономическое сопровождение этого процесса. Столкнувшись с теорией игр, мы восприняли ее возможности и стали использовать их для анализа бизнес-процессов и управления компанией. По мнению мудрого Бенджамина Дизраэли (1804–1881), «*лучший способ ознакомиться с каким-либо предметом — написать книгу о нем*». Так мы и поступили, и перед вами книга, являющаяся результатом следования совету Дизраэли. Приглашаем тебя, уважаемый читатель, пройти вместе с нами путь знакомства с этой молодой и занимательной теорией.

Книга не претендует на учебник, скорее она занимательный путеводитель для начинающих по истории возникновения теории игр, любопытному пути ее становления, базовым посылам и основным приемам. Авторы исходили из мудрого совета Славомира Врублевского: «*Если тебе трудно сразу понять всю бесконечность, постарайся понять ее хотя бы наполовину*» [10, с. 426].

Наша цель обратить внимание читателя на логические основы и фундаментальные положения теории игр. Если такое знакомство привлечет его к этому, сравнительно молодому направлению математико-логического анализа наших конфликтов, он может воспользоваться списком литературы на любой вкус — от научно-занимательных публикаций до трудов классиков. Следуя академику Л. А. Арцимовичу (1909–1973), автору увлекательной «Элементарной физики плазмы», мы полагаемся на то, что наш читатель «*не сосуд, который нужно заполнить знаниями, а факел, который нужно зажечь*». Для зажигания этого факела большинству разделов предпосланы максимы и афоризмы, которые, по мнению английского ученого и публициста Джона Морлея (1838–1923), есть «*истинная житейская мудрость, ... то, что люди должны искать при чтении книг*».

При публикации научной статьи принято использовать ключевые слова (*keyword*), чтобы сориентировать пользователя в ее тематике. Мы повторяем эту традицию с иной целью — в конце каждого раздела книги приводятся ключевые термины, слова и фразы (назовем их *end keywords*), смысл и содержание которых читатель должен понимать после прочтения раздела. Если у читателя остаются сомнения, рекомендуется повторно обратиться к тексту раздела, чтобы восполнить появившийся пробел. Это позволит успешно продвигаться по тропе знакомства с началами теории игр.

Москва–Зеленоград, 2015

д. т. н. Кобзарь А. И.,
д. т. н. Тикменов В. Н.,
Тикменова И. В.

Шлепок, яркий свет,
первый крик.
Вокруг все не так,
все не так, как привык.
Теперь я один, и мама одна.
Начинается жизнь.
Стартует ИГРА.

1 ГЛАВА
ВО ЧТО ИГРАЕМ?

«Можно отрицать любую абстракцию:
право, красоту, истину, добро, дух, Бога.
Можно отрицать серьезность. Игру — нельзя»
Йохан Хёйзинга (1872–1945)

«Шлепок, яркий свет, первый крик.
Вокруг все не так, все не так, как привык.
Теперь я один, и мама одна.
Начинается жизнь. Стартует ИГРА»

Теория игр — звучит привлекательно, не правда ли? Один пытается извлечь из такой теории инструкцию по движению навстречу лотерейному выигрышу, другой — победу в шахматном турнире, третий — руководство, которое следует прихватить с собой в казино. *«Система Станиславского»* — тоже теория игр, только театральных. Что же такое *«игра»*, о теории которой речь? Читаем в энциклопедии [1, с. 475]: *«Игра — вид осмысленной непродуктивной деятельности, где мотив лежит не в ее результате, а в самом процессе...»*. Неужели речь идет о теории непродуктивной деятельности людей? Вряд ли, тогда за что получили свои премии нобелевские лауреаты, прославившие науку достижениями теории игр [1])?

В толковом словаре Владимира Даля (1801–1872) [2, с. 7], находим, что игра — *«забава, установленная по правилам»*; еще определеннее сформулировал французский философ Жан

---

[1]) *Джон Форбс Нэш-младший* (*Принстонский университет, США,* (*1928–2015*), *Джон Чарльз Харшаньи* (*Калифорнийский университет в Беркли, США, 1920–2000*), *Райнхард Зелтен* (*Боннский университет, ФРГ, р. 1930*) — **1994 г.**, *Уильям Спенсер Викри* (*Колумбийский университет, США, 1914–1996*), *Джеймс Александр Мирлис* (*Оксфордский университет, Великобритания, р. 1936*) — **1996 г.**, *Джордж Акерлоф* (*Калифорнийский университет в Беркли, США, р. 1940*), *Майкл Спенс* (*Гарвардский университет, США, р. 1943*), *Джозеф Юджин Стиглиц* (*шеф-экономист Всемирного банка, США, р. 1930*) — **2001 г.**, *Томас Кромби Шеллинг* (*Мэрилендский университет, США, р. 1921*), *Исраэль Роберт Ауманн* (*Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль, р. 1930*) — **2005 г.**, *Леонид Гурвиц* (*Университет Миннесоты, США, 1917–2000*), *Эрик Маскин* (*Институт перспективных исследований, Гарвард, США, р. 1950*), *Роджер Брюс Майерсон* (*Чикагский университет, США, р. 1951*) — **2007 г.**, *Элвин Рот* (*Гарвардский университет, США, р. 1951*), *Ллойд Стауэлл Шепли* (*Калифорнийский университет, США, р. 1923*) — **2012 г.**

Франсуа Лиотар (1924–1998): «*Если нет правил, нет и игры*» [3, с. 281].

Наличие правил стало той основной причиной, по которой в XX веке игра трансформировалась в математический термин. Теория игр стала синонимом специального математического аппарата анализа конфликтов, рождающихся в точках пересечения векторов интересов людей, составляющих содержание любой игры. Большинство перечисленных выше нобелевских лауреатов в области экономики прежде всего математики, в то время как математикам Нобелевские премии не присуждаются, поскольку такая премия Нобелем не учреждалась. Ее учредил в 1968 г. в память Альфреда Нобеля (1833–1896) Банк Швеции (Риксбанк) по случаю своего трехсотлетия. Для математиков теория игр стала хорошим подспорьем, чтобы облачиться в нобелевский фрак, что нашему странноватому гению Григорию Перельману (р. 1966), доказавшему справедливость гипотезы Пуанкаре, никак не светило. Впрочем, он наверняка бы от нее отказался, как отказался от премии Еврейского математического общества, Филдсовской премии, премии тысячелетия Математического института Клея.

Энциклопедическое определение теории игр гласит [1, с. 475]: «*Теория игр — раздел математики, предметом которого является изучение математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта*». Классики теории игр Дж. Нейман и О. Моргенштерн определяли конфликт как взаимодействие двух объектов, обладающих несовместимыми целями и способами достижения этих целей [23]. Для экономических и социальных проблем игры выполняют ту же роль, которую математические и геометрические модели осуществляют в естественных науках.

В условиях конфликта стремление противников скрыть свои будущие действия порождает неопределенность. Неопределенность при принятии решений в условиях недостатка данных можно интерпретировать как конфликт принимающего решение при противодействии внешних обстоятельств или другого субъекта [4]. В такой интерпретации теория игр — инструмент принятия решений в условиях неопределенности. В любом случае пьедесталом теории игр является математика. Как справедливо заметил американский философ Джордж Сантаяна (1863–1952), «*подобно тому как все искусства тяготеют к музыке, все науки стремятся к математике*» [3, с. 267].

Каким же образом слились «*в едином экстазе*» теория и игра? Прежде всего, вспомним, что такое теория. Заглянув в энциклопедии, находим:

- «*Теория* (*от греческого theoria — рассмотрение*, *исследование*) *— система основных идей в той или иной отрасли знания*; *форма научного знания*, *дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях действительности*» [5, с. 307].
- «*Теория* (*от греческого* $\vartheta\varepsilon\omega\rho\iota\alpha$ *— научное познание*) *— произвольная совокупность предложений некоторого формализованного языка*» [6, с. 581].

Диапазон определений весьма широк — от системы основных идей до произвольной совокупности предложений. Любая теория характеризуется концептуальными структурами, терминологическим аппаратом, позволяющими объяснять и прогнозировать различные проявления объекта теории. До сих пор не затихают споры: является ли вообще теория игр теорией, имеет ли она свою закрытую и структурированную объектную область? По страницам энциклопедий и монографий вот уже 70 лет гуляет немало различных определений теории игр.

Любая теория должна проверяться экспериментально и подтверждаться практикой. Однако не любую теорию можно проверить прямым экспериментом (например, возникновение жизни на земле), в определенной мере это относится и к теории игр.

Всякая наука начинается с формирования содержательных представлений о явлениях объективного мира, а затем, опираясь на них, создает описывающие их формализованные знаковые представления — математические модели. Исторически математика формировалась как наука, предметом которой является количественная определенность, передаваемая языком чисел и соотношений. Согласно Иммануилу Канту (1724–1857), «*в каждой естественной науке заключено столько истины*, *сколько в ней математики*» [3, с. 159].

Однако не все согласны с ведущей ролью математики в семье наук. Польский математический классик Стефан Банах (1892–1945), считал, что «*гуманитарные науки в средней школе важнее математики*: *математика — это острый инструмент*, *он не для детей*», а сами гуманитарные науки, по мнению основателя кибернетики Норберта Винера (1894–1964), всего лишь «...убогое поприще для новых математических методов» [140, с. 75]. С ними солидарен бывший министр высшего образования и науки России А. А. Фурсенко (р. 1949): «...*не нужна высшая математика в школе. Более того, высшая математика убивает креативность*». По признанию бывшего министра, он «... *не изучал в школе высшую математику, и при этом... "не дурее всех"*». Но, скорее, прав отец теории игр, гениальный математик Джон фон Нейман (1903–1957), по мнению которого «*если люди отказываются верить в простоту математики, то это только потому, что они не понимают всю сложность жизни*».

Стефан Банах знал, о чем говорил, утверждая, что математика — «*острый инструмент*». Порой она преподносит парадоксы, противоречащие здравому смыслу. Проиллюстрируем это примером из наверняка известных читателю «Похождений бравого солдата Швейка» Ярослава Гашека (1883–1923). Швейка поместили в психиатрическую лечебницу на предмет обследования по поводу слабоумия. Там он встретился с весьма примечательным пациентом, утверждавшим, что внутри земного шара есть шар больше земного шара. Подожди саркастически улыбаться, уважаемый читатель. Не прошло и три года после написания романа, как в 1926 году доказали справедливость утверждения: «*Если разрезать шар на количество частей больше 5, то из них можно составить шар, вдвое превышающий исходный*», известного как парадокс Хаусдорфа (1968–1942)–Банаха (1892–1945)–Тарского (1901–1983) [7–9]. В соответствии с ним утверждение странного пациента лечебницы представляется логически беупречным [1]. Выходит, не совсем чудаком был пытливый пациент лечебницы. Ему просто не повезло в ситуации, описанной Хуго Штейнхаусом: «*Из дома реальности легко забрести в лес математики, но лишь немногие способны вернуться обратно*» [10, с. 426]. Нашему чудаку просто не удалось вернуться в реальность.

Примеров математизации науки немало. Вот немногие из них. Исследования перемещения физических тел в пространстве в XVI веке привело к появлению дифференциального

[1] *Суть парадокса скрыта в глубинах теории множеств (в трехмерном пространстве существуют неизмеримые множества, поэтому не все куски в разбиении Хаусдорфа–Банаха–Тарского могут быть измерены).*

и интегрального исчисления. Изучая детскую игрушку «*волчок*», Софья Ковалевская (1850–1891) нашла новое решение задачи вращения твердых тел. Иоганн Кеплер (1571–1630) по просьбе виноторговца озаботился задачей вычисления объема его бочек, решение которой стало основой его статьи «*Новая стереометрия винных бочек*», содержавшей начала теории бесконечно малых. Георг Кантор (1845–1918), размышляя над Святой Троицей, создал свою теорию множеств, способствовавшую формированию математического аппарата теории игр.

Необычность созданной Кантором теории стоила ему участи математического маргинала. Анри Пуанкаре (1854–1912) назвал теорию множеств Кантора о «*бесконечности бесконечностей*», основанную на понятии трансфинитных (порядковых) числах, «*тяжелой болезнью*», поразившей математическую науку. Давид Гильберт (1862–1943), наоборот, считал идеи Кантора «*одним из высших достижений чисто умственной деятельности человека*». Если в XIX веке все считали, что бесконечность недоступна человеческому разуму, то в XX веке трудами Кантора она стала вполне разумным понятием, доступным дискурсивному (от фр. *discour* — рассуждение), то есть связному логическому анализу, когда каждый последующий шаг вытекает из предыдущего.

Завершая этот раздел, отметим, что пренебрежение математическими методами так же вредно, как и тотальная математизация всего и вся, неистовая фанатичная вера во всесильность математических моделей. Российский математик и философ Василий Налимов (1910–1997) (именно он, кстати, ввел в научный оборот термин «*наукометрия*») справедливо заметил, что «*наряду с математизацией знаний происходит и математизация глупостей*: *язык математики*, *как ни странно*, *оказывается пригодным для выполнения любой из этих задач*». С ним солидарны нобелевские лауреаты Чарльз Вильсон (1869–1959), считавший, что «*эквилибристикой математики можно внушить доверие даже к самой ложной теории*», и Альберт Эйнштейн (1879–1955), заметивший, что «*математика — единственный совершенный метод*, *позволяющий провести самого себя за нос*».

End keywords:

Теория игр, конфликт, математическая модель игры.

Чтобы понять
какую-нибудь науку,
необходимо знать
историю этой науки.

Огюст Конт
1798 – 1857

2 ГЛАВА

ИСТОКИ И ИСТОРИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ

«Чтобы понять какую-нибудь науку,
необходимо знать историю этой науки»
Огюст Конт (1798–1857) [3, с. 185]

«Никакой достоверности нет
в науках там, где нельзя приложить
ни одной из математических наук»
Леонардо да Винчи (1452–1519)

2.1. Истоки, история: откуда есть пошла теория игр

Подобно тому, как труд сделал из обезьяны человека, математика создала теорию игр из развлекательных и азартных игр. Подмечено, что обезьяны играют в игры, аналогичные играм людей (что поразительно, порою даже лучше людей, см. Главу 7).

Человек играет с доисторических времен, уже в додинастическом Египте (около 3500 до н.э.) как светское развлечение была известна упоминаемая в «*Книге мертвых*» игра «*сенет*» с передвижением фишек по доске, Цари Вавилона тоже баловались настольными играми. Фараон Рамсес II Великий (1650 до н.э.) прихватил с собой в погребальную пирамиду папирус Ахмеса [1]) с занимательными математическими задачами.

Первая стратегическая игра (в которую не вмешивается случай) появляется в «*Книге игр*» (1283) времен короля Кастилии и Леона Альфонсо X Мудрого (1221–1284); может быть, именно поэтому его называли еще Альфонсом Образованным. XVII–XVIII века становятся золотым периодом развития математических игр, начало которому дала книга «*Развлекательная математика*» иезуита Жана Лёрешона (того самого, который в 1633 г. предложил термин «*термометр*»), опубликованная в 1624 г. под псевдонимом Анри ван Эттен.

Математика и игры схожи в том, что являются вызовом интеллекту. Долгий путь их слияния в общей теории игр на-

[1]) *Учебное пособие по арифметике и математике периода* XII *династии Срединного царства* (1985–1785 *гг. до н.э.*), *переписанное с древнего текста* III *тысячелетия до н.э.*

чался с математематических игр, взрыхливших почву для переноса идей анализа азартных игр на исследование игр человеческих. С момента появления игр и до XVII века серьезная и занимательная математика существенно не отличались друг от друга, тесно переплетаясь и взаимообогащаясь. В 1612 г. во Франции издается первая книга математика и поэта, одного из первых членов французской академии (1635) Клода Гаспара Баше де Мезирьяка (1581–1638), посвященная только математике игр разума — занимательной математике [11]. Затем «*серьезное*» и игровое течения математики начали расходиться. Только к середине XX века исследованиями Пьера Ферма (1601–1665), Блеза Паскаля (1623–1662), Исаака Ньютона (1642–1727), Леонарда Эйлера (1707–1783), Иоганна Карла Фридриха Гаусса (1777–1855) эти направления объединила теория игр. Трудами Джеймса Джозефа Сильвестра (1814–1897), Льюиса Кэрролла (1832–1898), Эдуарда Люка (1842–1891), Уильяма Роуза Болла (1850–1925) и др. занимательная математика непрерывно развивалась в течение XIX – начала XX века.

В стратегической игре всегда можно найти стратегию, ведущую игрока к победе. Не исключение и любимые многими шахматы, являющиеся стратегической игрой с полной информацией, но очень большим количеством возможных ходов. К слову сказать, именно исследование шахматной игры немецкого математика Эрнста Фридриха Цермело (1871–1953) [12] считается первой работой по теории игр. По мере совершенствования компьютеров шахматы стремятся к тому, что становятся не игрой, а математической задачей, успешно атакуемой современными компьютерными технологиями.

Шахматный суперкомпьютер *Deep Blue* (IBM) в матче, состоявшимся 3–11 мая 1997 г. в Нью Йорке, со счетом 3,5 : 2,5 обыграл в 6 партиях чемпиона мира Гарри Каспарова (р. 1963) (из призового фонда матча 1 100 000 долларов 700 000 долларов получил победитель — машина, а 400 000 долларов досталось чемпиону мира). Так же со счетом 4 : 2 поступила немецкая шахматная программа *Deep Fritz* с чемпионом мира Владимиром Крамником (р. 1975) в декабре 2006 г.

Теоретически доказано, что для шахматной игры существует решение, в соответствии с которым ее исход предрешен. Но каков он именно? Пока мы этого не знаем, так как количество всевозможных стратегий чудовищно велико, чтобы можно было построить матрицу шахматной игры и найти в ней седловую точку (точку равновесия — см. с. 48). День, когда такая матрица появится, будет днем похорон шахмат.

По оценке американского математика и инженера Клода Шеннона (1916–2001) (которому мы обязаны термином «*бит*» для обозначения наименьшей единицы информации), число неповторяющихся шахматных партий $\approx 10^{118}$ [140], что в 10^{40} раз превышает число атомов во Вселенной, $4 \cdot 10^{79}$–10^{81}. После 3 ходов число возможных позиций на шахматной доске равно $9 \cdot 10^6$, а к следующему ходу число комбинаций возрастает до 318 979 564 000. Общее число вариантов расположения фигур на шахматной доске равно 7 534 686 312 361 225 327 (7 секстиллионов 534 квинтиллиона 686 квадриллионов 312 триллионов 361 миллиард 225 миллионов 327 тысяч). При рекордной производительности компьютеров (компьютер Jaguar Cray XT5, Oak Ridge National Laboratory фирмы IBM с отводимой тепловой мощностью 400 кВт: 1,75 квадриллионов операций в секунду) прямой поиск решения одной шахматной игры потребуется около 50 000 лет. В 2007 г. после 18 лет труда группой Джонатана Шеффера (р. 1957) была решена игра в английские шашки [1]), имеющая всего $5 \cdot 10^{20}$ вариантов ходов [13], ее неизбежный результат — ничья.

Стратегическая игра является не чем иным, как математической задачей.

Обширный анализ стратегических игр содержится в 4-томнике Элвина Берлекэмпа (р. 1940), Джона Конвея (р. 1937) и Ричарда Гая «*Выигрышные стратегии ваших математических игр*» [14]. Стратегические игры (иногда их называют комбинаторными) являются хорошим полигоном для исследования методологии решения сложных проблем. Ограничиваясь небольшим числом ясных и точных правил, такие игры позволяют моделировать сложные ситуации, требующие не меньше интеллекта, расчета и интуиции, чем при решении реальных

[1]) *В Америке они называются «чекерс», отличаются от русских тем, что можно ходить только вперед, дамка ходит только на одну клетку по диагонали назад и вперед и бьет через одну клетку в любую сторону.*

проблем экономики, бизнеса и политики, методологии решения сложных проблем.

Отвлечемся на время и напомним читателю, что такое комбинаторика. Комбинаторика — раздел конечной (дискретной) математики, изучающий комбинации и перестановки предметов. Ее идеи восходят к символам древней китайской «Книги перемен» (V век до н.э.). Классическая задача комбинаторики — «*Сколькими способами можно извлечь m из n элементов*» — упоминается еще в сутрах древней Индии ($\approx$ IV век до н.э.); уже во II веке до н.э. индийцы знали, что сумма всех n биномиальных коэффициентов равна 2^n. Отдельные комбинаторные задачи рассматривали античные греки — Хрисипп из Сол (281–208 до н.э.), Плутарх из Херонеи (45–127 до н.э.). В XII в. индиец Бхаскара (1114–1185) умел вычислять то, что сегодня мы называем «*сочетания*» (кстати, он первый ввел корень квадратный из отрицательного числа, однако не придал ему никакого практического значения). Глубокие исследования в области комбинаторики принадлежат Аврааму ибн Эзра (1089–1164) и Леви бен Гершому (1288–1344).

По мере усложнения общественных отношений задачи стали усложняться. Первые научные исследования в области комбинаторики принадлежат итальянцам Джероламо Кардано (1501–1576), Галилео Галилею (1564–1642), Никколо Тарталье (1499–1557), французам Блезу Паскалю (1623–1662) и Пьеру Ферма (1601–1665). Основоположником современной комбинаторики как самостоятельного раздела математики считается Г. Лейбниц (1646–1716), который в 1666 г. в 20-летнем возрасте опубликовал книгу «*Рассуждения о комбинаторном искусстве*», ему принадлежит и сам термин «*комбинаторика*». В этот же период формируется современная терминология комбинаторики: термин «*сочетание — combination*» впервые встречается у Паскаля в 1665 г., термины «*перестановка — permutation*» и «*размещение — arrangement*» — у Бернулли.

Поиграем теперь в математические игры, чтобы почувствовать неуловимую игру интеллекта, ведущего нас от занимательных упражнений для ума к совсем не шуточным играм будущего.

Начнем с игры «*Ним*» [15]. Суть игры — играют двое, перед ними фишки, каждый игрок поочередно берет несколько фишек, проигрывает (или выигрывает) тот, кому достается последняя фишка. В терминах теории игр «*Ним*» — конечная игра с полной информацией.

Первый строгий анализ стратегии игр такого типа опубликовал в 1902 г. математик Гарвардского университета Чарльз Леонард Боутон (1869–1927) [16], давший название этой игре — «*Ним*». Рассмотрим различные варианты игр такого типа.

Вариант 1. На столе четное количество 20 фишек. Каждый игрок может брать 1 или 2 фишки. Выигрывает тот, кому достанется последняя фишка. Очевидно, выигрывает всегда игрок, оставивший на столе число фишек, кратное 3. Стратегия, непременно приносящую победу игроку, начинающему игру, проста: нужно первым ходом взять 2 фишки, а затем всегда оставлять на столе число фишек, кратное 3. В общем случае стратегия игры определяется числом фишек на столе. Если остаток от деления после первого хода равен 3 или 1, то ходящий первым игрок всегда побеждает. Если остаток 0, то всегда побеждает игрок, ходящий вторым.

Вариант 2. (приписывается Клоду Гаспару Баше де Мезирьяку [11] «*Fort honnete home saus être mathematicien*» — «*благородному человеку, хотя и не математику*», тому самому, кто перевел с греческого «Арифметику» Диофанта, на полях которой Ферма сформулировал свою великую теорему). Игрок пишет на бумаге цифры от 1 до 10. Второй игрок записывает сумму от сложения его с любым числом от 1 до 10. Проигрывает записавший трехзначное число ($\geqslant 100$). Очевидно, выигрывает записавший число 99. Какое число нужно написать игроку, чтобы гарантированно записать на следующем ходу 99? Очевидно, число 88 вынуждает соперника написать число между 89 и 98. Рассуждая по аналогии, от 88 приходим к 77, от 77 к 66, ..., от 22 к 11. Отсюда следует — выигрывает тот, кто первый запишет число 11. Следовательно, в игре всегда будет побеждать 2-й игрок, только он сможет сделать это после любого хода первого игрока.

Вариант 3. Общий случай. На столе m фишек, каждым ходом можно брать $n < m$ фишек. Выигрывает тот, кто забирает последнюю фишку. Заметив предварительно, что остаток от деления $\dfrac{m}{n+1}$ будет находится всегда в интервале от 0 до n, рассмотрим два случая:

- остаток равен 0. В этом случае существует выигрышная стратегия для второго игрока, который должен оставить на столе число фишек, кратное $(n+1)$. Для этого, если первый игрок берет k фишек $(0 < k < n+1)$, второй игрок должен брать $(n+1-k)$ фишек (заведомо положительное число, так как находится в интервале $[0, n]$);
- остаток от деления равен r. В этом случае выигрышная стратегия в руках первого игрока. На первом ходу он должен взять r фишек, оставляя на столе число фишек, кратное $(n+1)$. На любые k фишек $(0 < k < n+1)$, которые берет 2-й игрок, первый игрок отвечает $(n+1-k)$ фишками и выигрывает.

Вариант 4. Из 25 фишек, лежащих на столе, два игрока могут поочередно брать от 1 до 4 фишек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При правильном алгоритме выигрывает всегда первый игрок. Алгоритм, приводящий его к победе, таков. Первым ходом игрок берет 2 фишки, а затем — число фишек в соответствии с тем, сколько фишек берет второй игрок, дополняя их количество до 5. Читатель может самостоятельно проверить, что если на столе 24 фишки, то первый игрок выигрывает, беря первым ходом 4 фишки, дополняя затем количество фишек, взятых вторым игроком, до 5.

В общем случае для числа фишек n есть два варианта. Если n делится на 5 без остатка, то выигрыш гарантирован для второго игрока, дополняющего ход противника до 5. Если n не делится без остатка на 5, то выигрывает первый игрок, беря количество фишек, равное остатку, а затем дополняя ход противника до 5.

Предельный случай стратегической игры, правила которой уже содержат выигрышную стратегию, называется **псевдоигрой**. Пример такой псевдоигры — на столе четное число фишек, каждый игрок может брать только нечетное число: побеждает тот, кто забирает последнюю фишку. Ясно — побеждает второй игрок, так как после того, как первый игрок возьмет нечетное число, второй игрок, взяв нечетное число, опять сделает число фишек на столе четным (0 — четное число). Поэтому, что бы ни делали игроки, всегда будет побеждать второй игрок, даже если он будет страстно избегать этой победы.

Наглядным примером псевдоигры является следующая игра. Игроки делят плитку шоколада, состоящую из $5 \times 8 = 40$ отдельных плиток, разламывая ее по границе составляющих маленьких плиток. Проигрывает тот, кто не сможет сделать последний ход (остается одна маленькая плитка). Очевидно, что всегда будет побеждать игрок, делающий ход первым. В этом легко убедиться, так как общее число разламываний плитки шоколада нечетно (равно 39). Первому игроку не удастся проиграть, даже когда он будет к этому страстно стремиться, что является определяющей особенностью любой псевдоигры.

Как не вспомнить здесь историю жестянщика Вейводы из Здераза, рассказанную уже известным нам бравым солдатом Швейком. Этот жестянщик попал в неприятную историю — сел он как-то в трактире позади «Столетнего кафе» перекинуться в двадцать одно по пяти крейцеров и, что бы он ни делал, выигрывал и выигрывал. Игра продолжалась уже несколько часов, а Вейвода все выигрывал и выигрывал, он все бы на свете отдал за то, чтобы проиграть, но к вечеру в банке было уже больше чем на полмиллиарда крон долговых расписок и полторы тысячи крон наличными. Совсем рехнувшись, он донес на компанию в полицию, и опять ему повезло: всех повязали, банк арестовали, а его отпустили и, как доносчику, пообещали треть банка. Ситуация, конечно, иная, играл Вейвода в иную игру, но вот выигрывал так же, как в псевдоигре.

Стратегические игры, являясь хорошей разминкой и развлечением для игроков, не могли стать основой для современной теории игр. Между математикой развлечений и будущей теорией игр стеной встал его величество — СЛУЧАЙ. До этого математика всегда имела дело только с чем-то правильным и определенным. Но, как сказал поэт, по жизни «*нас ведет связующая нить, случайности вплетая в неслучайность*» (*Александр Давыдов*). Игра как соперничество людей сталкивается с неопределенностью ответных ходов соперника, порождающую случайно меняющуюся игровую ситуацию. К сожалению, но именно «*его величество случай делает три четверти дела*» (Фридрих Вильгельм II Великий (1744–1797)). Только появление теории вероятностей с ее возможностью моделировать случайные процессы разрушило последнюю стену между математикой и теорией игр.

Свое начало теория вероятностей берет в азартных играх. Теория случая, основанная на теории вероятностей, родилась во Франции в середине XVII века, в переписке Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665) [17], в которой они обсуждали вопрос, поставленный перед ними шевалье де Мере (1607–1685).

Этот азартный мот по дороге в свое имение в Пуату встретил Блеза Паскаля и попросил ответить на волнующий его вопрос. Он успешно выигрывал в игре, в которой нужно было выбросить не менее одной шестерки броском 4 игральных костей. В погоне за бо́льшим выигрышем неуемный шевалье предложил игру, в которой для победы необходимо выбросить минимум один раз 2 шестерки за 24 броска двух костей. Казалось бы, с позиций здравого смысла он должен был увеличить свой выигрыш, но вдруг стал чаще проигрывать. Славящийся своей интуицией, разочарованный шевалье обратился за разъяснением к Паскалю, который, исходя из того, что «*предмет математики настолько серьезен, что полезно не упустить случая сделать его немного занимательным*», взялся помочь шевалье. Паскаль в своей переписке с Пьером Ферма обменивался результатами исследования затронутой де Мере ситуации, и оба пришли к одинаковому результату. Решая эту задачу, великие французы дали начало исчислению вероятностей.

Они рассуждали следующим образом. Для честных игральных костей вероятность выпадения 6 при одном броске равна $\frac{1}{6}$, а вероятность того, что она не выпадет, очевидно, равна дополнению этой вероятности до 1, то есть $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Так как броски костей независимы, то вероятность невыпадения шестерки за 4 броска костей будет равна произведению вероятностей ее непоявления при одном бросании:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} = 0{,}482 < \frac{1}{2}.$$

Отсюда вероятность обратного события, то есть появления хотя бы одной шестерки при броске 4 костей, равна $1 - 0{,}482 = 0{,}518 > \frac{1}{2}$, что интуитивно предполагал и чем промышлял смышленый шевалье.

Что же происходит при бросании 24 пар костей? Вероятность того, что при одном броске пары костей не выпадет две шестерки, очевидно, равна сумме вероятностей трех независимых событий: либо на обоих костях шестерки не выпали, либо на одной кости выпала шестерка, а на второй нет, и наоборот. Вероятность того, что при одном броске шестерка не выпадет на одной кости равна, как мы ранее показали, $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что шестерки не выпадут ни на одной из двух костей при одном их броске равна вероятности совместного события $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$. Вероятность того, что одновременно на одной кости выпадет 6, а на второй нет, равна произведению вероятности выпадения шестерки на одной кости — $\frac{1}{6}$, на вероятность ее не выпадения на второй кости — $\frac{5}{6}$, то есть $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$. Учитывая, что такая ситуация может повториться дважды, вероятность того, что шестерка выпадет только на одной из пары костей, равна сумме вероятностей $\frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}$. Суммируя полученные вероятности, получаем вероятность того, что при одном броске двух костей две шестерки не выпадут, $\frac{10}{36} + \frac{25}{36} = \frac{35}{36}$. Очевидно, вероятность того, что за 24 броска пары костей две шестерки не выпадут ни разу, равна $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}5086$, а вероятность обратного события (за 24 бросания выпадет хотя бы один раз 2 шестерки) равна $1 - 0{,}5086 = 0{,}4914 < \frac{1}{2}$, что и ощутил карман шевалье.

Таким образом, Паскаль и Ферма, решив первую задачу по теории вероятностей, дали толчок началу долгого пути сближения теории вероятностей и теории игр. По этому поводу Блез Паскаль из Парижа написал Пьеру Ферма в Тулузу: «*Я вижу, истина одинакова и в Тулузе, и в Париже*» [17]. А ведь не совсем дурак шевалье, совсем немного промахнулся, предложил бы бросать кости 25 раз и результат был бы совсем другим:

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0{,}4944 \quad \text{и} \quad 1 - 0{,}4944 = 0{,}5056 > \frac{1}{2}.$$

Признанным родоначальникам теории вероятностей является Пьер-Симон маркиз де Лаплас (1749–1827), опубликовавший в 1812 г. первое систематическое исследование по теории вероятностей «*Аналитическая теория вероятностей*» [18]), в котором он указал на важнейшую роль теории вероятностей: «*Замечательно, что науке, начинавшейся с рассмотрения азартных игр, суждено было стать важнейшим объектом человеческого знания*». Так что 1812 год — это не только год краха Наполеона в России, но и год рождения теории вероятностей. Кто знает, что бы было, если бы Наполеон, подобно шевалье де Мере, задал раньше вопрос Лапласу: стоит ли идти ему в Россию? Может быть, все бы и обошлось?

В России первый курс теории вероятностей «*по Лапласу и Симеону Пуассону*» был прочитан в 1837 г. в Петербургском университете профессором В. А. Анкудовичем (1792–1856) (передавшим по уходу кафедру математики будущему академику П. Л. Чебышеву), а в 1846 г. академиком В. Я. Буняковским (1804–1889) был создан первый русский учебник по теории вероятностей — «*Основания математической теории вероятностей*», написанный столь просто и понятно, что стал для Гаусса и Бьенэме (1796–1878) одновременно учебником русского языка. При богатстве и глубине содержания учебник отличался увлекательностью и литературной красотой, изящностью изложения сложных математических положений, увлекавших даже начинающих, малоподготовленных читателей.

Законченный строгий математический вид теория вероятностей приобрела в начале XX века и стала восприниматься как раздел классический математики благодаря предложенному в 1929–1933 гг. нашим соотечественником Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903–1987) [19, 20] аксиоматическому подходу к математическому описанию событий и вероятностей.

Необходимо отметить большой вклад в развитие отечественной школы теории вероятностей и случайных процессов блестящей плеяды русских ученых П. Л. Чебышева (1821–1894), С. Н. Бернштейна (1880–1968), А. Я. Хинчина (1894–959), В. И. Романовского (1879–1954), В. И. Гливенко (1897–1940), Н. В. Смирнова (1900–1966), Б. В. Гнеденко (1912–1995), В. С. Пугачева (1911–1998) и др.

Теория вероятностей — наука весьма капризная, часто противопоставляющая себя здравому смыслу и интуиции. «*Я верю в безупречно точную вероятность*», — шутил Станислав Ежи Лец (1909–1966) [10, с. 763]. Попробуйте ответить на вопрос: какова вероятность того, что среди отобранных случайным образом 25 человек найдется хотя бы одна пара родившихся в один день. Здравый смысл подсказывает — вероятность мала, по крайне мере, меньше 0,5. Скорее всего, мы не обнаружим такой пары среди 25 человек.

Предупрежденные о коварности теории вероятностей, не будем спешить. Включаем логику. Очевидно, что день рождения первого из группы попадает на один из 365 дней года, второго — на один из оставшихся 364 дней, третьего — на один из оставшихся 363 дней и т. д. Тогда вероятность того, что дни рождения каждого в группе приходятся на разные дни года, равна произведению этих независимых событий: следовательно, вероятность обратного события — хотя бы у одной пары совпали дни рождения — равна $1 - 0{,}4313 = 0{,}5687 > \frac{1}{2}$.

Невероятно, но факт! Более того, вычисления указывают на то, что пара родившихся в один день, с вероятностью более 0,5, обнаружится уже среди 23 человек.

На самом деле, в этом случае

$$\frac{365!}{342! \cdot 365^{23}} = 0{,}4927 \quad \text{и} \quad 1 - 0{,}4927 = 0{,}5073 > \frac{1}{2}.$$

Для любопытного читателя, желающего поглубже вникнуть в задачу, предлагаем самостоятельно доказать, что из 7 человек с вероятностью не менее 50 % дни рождения не менее, чем двух человек, не будут различаться более, чем на неделю.

Читатель может сам убедиться в том, что среди 90 человек, приведенных в именном указателе настоящей книги, содержатся 4 пары, у которых совпадают дни рождения: (19 января — Канторович (1912) и Конт (1798), 14 апреля — Гюйгенс (1629) и Шеллинг (1921), 25 апреля — Колмогоров (1903) и Боутон (1869), 8 ноября — Хаусфорд (1868) и Данциг (1914)). Вероятность такого события равна $\left(1 - \frac{365!}{275! \cdot 365^{90}}\right)^4 = 0{,}9(9)79 \approx 1$.

Для читателя, подобного азартному шевалье де Мере, приведем еще один пример игры: игрок ставит 1 рубль на число от 1 до 6 (например, 3). Затем бросаются 3 кубика. Если 3 выпадает один раз, игрок выигрывает 1 рубль, если 3 выпадает два раза — 2 рубля и, наконец, если на всех трех кубиках выпадает 3, то игрок получает 3 рубля. При любом выигрыше игрок получает обратно и свою ставку — 1 рубль. Если же число 3 не выпадает ни разу ни на одном кубике, игрок теряет свою ставку — 1 рубль. Вопрос — у кого выше шансы на выигрыш (у игрока или у казино).

Здравый смысл подсказывает лукаво игроку: твои шансы на выигрыш никак не меньше $\frac{1}{2}$. Проверим. Вероятность выпадения нужного числа при бросании одного кубика равна $\frac{1}{6}$. Тогда при бросании трех кубиков вероятность появления нужного числа хотя бы на одном кубике равна сумме вероятностей $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Да еще остается, пусть и небольшой, но шанс выпадения нужного числа 2 и 3 раза. Стало быть, шансы игрока на выигрыш на самом деле никак не меньше. И тем не менее, теория вероятностей упрямо твердит: очевидное на первый взгляд рассуждение приводит к ошибочному выводу.

Проверим. При возможном количестве вариантов исхода игры, равном $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, вероятность того, что задуманное число выпадет три раза равна: трижды — $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$, дважды — $3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$ и один раз $3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{75}{216}$ (почему так, надеемся, читатель понял). Следовательно, игрок, по крайней мере, не потеряет свою ставку в $1 + 15 + 75 = 91$ случае из 216 возможных исходов игры, но в остальных $216 - 91 = 125$ он ее теряет!!! Вычислим теперь математическое ожидание выигрыша игрока при ставке 1 рубль, равное произведению случайной величины количества нужных игроку событий (вероятность выпадения требуемого числа 1, 2 или 3 раза) минус вероятность невыпадения его ни разу:

$$3 \cdot \frac{1}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} - \frac{125}{216} = -\frac{17}{216} = -0{,}0787.$$

Как ни странно, но минус указывает нам на то, что в среднем игрок проигрывает, а казино выигрывает приблизительно по 8 копеек с каждого рубля. Как же игроку обыграть казино?

Оказывается, нужно повышать ставки. Предположим, если тройка выпадет один раз, — игрок получает 1 рубль, если 2 раза — 4 рубля, если 3 раза — 6 рублей. Тогда его выигрыш в среднем будет

$$6 \cdot \frac{1}{216} + 4 \cdot \frac{15}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} - \frac{125}{216} = \frac{16}{216} = 0{,}074,$$

то есть игрок в среднем будет уже выигрывать у казино ≈ 7 копеек с каждого рубля.

Если бы условия игры предусматривали бросание 4 кубиков с выплатой за выпадение выбранного кубика 4 раза — 4 рубля, 3 раза — 3 рубля, 2 раза — 2 рубля и 1 раз — 1 рубль, то его выигрыш составил бы уже $\approx 18{,}5$ коп. с каждого рубля (читатель может самостоятельно проверить это).

Рассмотрим прикладную игру. Вы собираетесь на конференцию. По условиям нужно оплатить невозвращаемый вступительный взнос — 200 руб. за месяц до конференции, или 250 руб. на месте. При каком значении вероятности p посещения конференции стоит оплачивать вступительный взнос за месяц?

Если вы оплачиваете за месяц, то математическое ожидание взноса равно (вне зависимости от того, поедете вы на конференцию или нет) 200 руб. (сумма постоянна и не возвращается). Если вы платите по приезде, то математическое ожидание вашего вступительного взноса будет $250 \cdot p + (1 - p) \cdot 0 = 250 \cdot p$ (если вы не приедете, то и не нужно платить). Приравнивая математические ожидания, получаем $p = \frac{200}{250} = 0{,}8$, следовательно, если вероятность посещения конференции $> 0{,}8$, следует платить заранее, если меньше — платить по приезде, если равно 0,8 — то неважно, когда платить.

Кого же считать родоначальниками теории игр? На этот вопрос нет однозначного ответа. Уже в XVII веке Христиан Гюйгенс (1629–1695) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) предложили дисциплину, в которой содержались бы научные методы изучения поведения людей в конфликтах, возникающих между ними в процессе взаимодействия. Гюйгенс в работе «*О расчетах в азартной игре или рассмотренная математически стоимость всех шансов при азартных играх в карты, кости, при заключении пари, при участии в лотерее*» (1657 г.) [21], вошедшей в первую часть трактата Якоба

Бернулли (1654–1705) «*Искусство предположений*» [22], впервые продемонстрировал научный подход к анализу случайности в игре. Однако в XVIII в. не появилось ни одной работы, которая покушалась бы на теорию игр.

Теоретическая база современной теории игр оформилась в середине прошлого столетия. Первая теорема теории игр принадлежит Эрнесто Цермело (1871–1953), доказавшему ее в 1912 г. В соответствии с ней любая конечная игра с полной информацией, в которой отсутствует элемент неопределенности, имеет оптимальное решение в чистых стратегиях [12].

В 1920 г. Эмиль Борель (1871–1956) предложил идею смешанной [1)] стратегии, учитывающий элемент случайности в игре. Вскоре к мейнстриму создания теории игр подключился Джон фон Нейман, он и занял трон общепризнанного отца этой теории.

Годом рождения современной теории игр принято считать 1944 г., год выхода в свет классического труда Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна (1902–1977) [23]. До сих пор статус Дж. фон Неймана как основоположника теории игр оспаривается ссылкой на работу Эмиля Бореля (1871–1956) «*Теория игр и интегральные уравнения с кососимметричными ядрами*» (1921), ставшего в 1925 г. военно-морским министром Франции (по-видимому, единственным в истории военно-морским министром, разбиравшимся в интегральных уравнениях, да еще с кососимметричными ядрами). Другие (А. Коупленд) утверждают, что «*потомки будут рассматривать эту книгу как одно из важнейших научных достижений первой половины двадцатого века*» (Бюллетень Американского математического общества, 1945, т. 51, с. 498–504). В конечном счете «*в науке слава достается тому, кто убедил мир, а не тому, кто первым набрел на идею*» (Фрэнсис Дарвин (1848–1925) [10, с. 491], «*чтобы построить полную теорию, фактов всегда достаточно, не хватает только фантазии*» [10, с. 838].

Однако ни после работы Э. Бореля, ни после статьи Дж. фон Неймана «*К теории стратегических игр*», вышедшей в 1928 г. [24], в которой он доказал теорему о минимаксе, теория игр не получила такого признания, как после выхода

[1)] *О понятиях чистой и смешанной стратегии см. в Главе* 3.

в свет в 1944 г. его монографии, написанной в соавторстве с О. Моргенштерном [23].

End keywords:
Математические игры, стратегические игры с полной информацией, случайная величина, теория вероятностей.

2.2. Классификация, термины и определения

«Достаточно, чтобы слова выражали смысл»
Конфуций (551–479 до н.э.)

«Мы мудрецами кажемся, блистая
ученейшими терминами...»
Д. Чосер (1340–1400)

Существует немало определений теории игр как науки. Судя по названию, такая наука должна изучать игры. Под игрой, претендующей на «*собственную*» теорию, понимается процесс, в котором участвуют не менее двух сторон, стремящихся реализовать свои собственные несовпадающие интересы. Ситуации, содержанием которых является противодействие сторон в борьбе за реализацию собственных целей, очевидно, следует признать конфликтными, цель игры — разрешение конфликта. В конце концов, «*конфликтные ситуации неизбежны, но умные ищут выход из них, а дураки вход*» (Виктор Губарев, р. 1956). Посему умные предложили еще одно определение теории игр как математической теории анализа и разрешения конфликтных ситуаций. Но для изучения конфликтов существует иная наука — конфликтология [25, 26], анализирующая закономерности зарождения, возникновения, развития, разрешения и завершения конфликтов любого уровня. Не правда ли, для одного, пусть и неприятного процесса — конфликта — многовато научных дисциплин?

Основная область применения теории игр — экономика — также мечется между социальными науками и математикой, что отражается и на решениях по присуждению Нобелевских премий. Декан математического факультета иерусалимского вуза «Махон Лев» Исраэль Аарон в интервью газете «Аруц-7» в 2005 г. так прокомментировал присуждение Нобелевской премии по экономике Роберту Ауманну: «*Три года назад Нобелевскую премию получил другой израильский профессор Даниэль Канеман* (р. 1934). *Он сказал, что экономика в своей основе — это психология. Нынешний лауреат* (авт. Ауманн) *утверждает прямо противоположное. Новый лауреат говорит, что экономика — это чистая математика и логика*». Авторам представляется, что теория игр, конечно же, в определяющей доле чистая математика, но... беременная психологией (нам кажется, прочитав книгу до конца, читатель согласится с этим). Математика теории игр интуитивно проста, хотя порой весьма сложна формально.

В процессе своего развития теория игр постепенно превратилась в общую математико-логическую теорию конфликтов, позволяющую анализировать конфликтные ситуации, прогнозировать сценарии поведения их участников, предлагать рекомендации по разрешению конфликта. Будучи, с одной стороны, достаточно абстрактным направлением математики, с другой стороны, теория игр — весьма эффективный инструмент исследования экономических, политических, правовых, военных, технических и иных проблемных ситуаций. Она полезна при планировании и прогнозировании, разработке стратегии развития компаний, определении ценовой политики, ведении переговоров. Одновременно теория игр выполняет роль формализованного языка анализа экономических процессов; обеспечивает возможность проверки на согласованность и применимость решений, формирующихся на интуитивном уровне здравого смысла, позволяет сформировать принципы, критерии и методы нахождения оптимальных решений.

Математический анализ конфликтной ситуации возможен только при наличии упрощенной, схематизированной до уровня знакового описания модели ситуации, которая и является игрой. Другими словами, игра и конфликт — синонимы. Исследованиями математических моделей игр-конфликтов и поиском их формализированных решений и занимается теория игр. Она объясняет логику поведения индивидов в условиях конфликта интересов. В рамках теории игр решение конфликта и его реализация не рассматриваются как психологический волевой акт. Для этого есть психология, частью которой и является конфликтология.

Попытки одной фразой определить предмет теории игр завершим пересказом занимательной истории. Как-то один еврей попросил мудреца-раввина сформулировать Тору стоя на одной ноге. Тот сказал: «*Не делай другому того, что ненавистно тебе, в этом — вся Тора, остальное расшифровка этого*». Нобелевский лауреат Роберт Ауманн, следуя раввину, также обошелся одной фразой: «*Теория игр — попытка прогнозировать поведение нескольких факторов на общем интерактивном поле, когда у каждого из них имеется своя собственная задача*». Одно настораживает — Тору в течение нескольких тысяч лет расшифровывают толпы мудрых раввинов, неужели и теорию игр ждет та же участь?

Основной целью теории игр является снабжение участников конфликта оптимальными решениями, отличающимися, по крайней мере, от решений типа «*не конфликтуй: с умным договорись, дурака обмани*» (Михаил Литвак (р. 1938), *Принцип сперматозоида*) [27]. В условиях конфликта принимающему решение приходится исходить не только из своих собственных целей, но и из целей, которые ставят перед собой его партнеры. Он должен учитывать не только известные ему обстоятельства конфликта, но и решения, принимаемые его оппонентами, а также иные обстоятельства, априори ему не известные.

Процесс математизации принятия оптимальных (наилучших в принятых критериях) решений привел к появлению обширного раздела прикладной математики — исследование операций — теории математических моделей принятия оптимальных решений [28–32].

Ученые-юмористы, сторонясь бескомпромиссности термина «*оптимальность*», дают другое определение: исследование операций — «*это искусство давать плохие ответы на такие практические вопросы, на которые другими способами даются еще худшие ответы*» [33]. Исследование операций превращает искусство принятия решения в научную, математическую дисциплину. Сам термин «*исследование операций*» (*operations research*) — буквальный перевод принятого в конце 30-х годов XX века условного наименования одного из подразделений британских ВВС, занимавшегося вопросами использования радиолокационных установок в общей системе обороны.

В определенном смысле теория игр является одним из разделов исследования операций. Однако не следует отождествлять теорию игр только с теорией принятия решений. Теория игр позволяет определять лучшие стратегии игроков с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и возможных действиях, что является характерным отличием теории игр от теории принятия решений. Особенно сложные проблемы возникают при анализе экономических конфликтов, разрешение которых зависит от множества лиц, каждое их которых не контролирует целиком ситуацию. В рамках теории игр принимаемые решения базируются на анализе упрощенных идеализированных схем реальных процессов. Естественно, степень упрощения должна разумно ограничиваться пределами, за которыми модель утрачивает существенные черты самого явления.

Поскольку теория игр есть раздел математики и конструируемые ею модели являются формальными, знаковыми моделями, то средства их анализа также, естественно, являются формальными. Игра как математическая модель включает в себя ряд характерных признаков: наличие нескольких участников (игроков), неопределенность их поведения, несовпадение их интересов. Цель теории игр — помочь предсказать результат игры на основе интерактивных моделей, в которых решения одной стороны влияют на решения других сторон. Основной смысл и содержание «*игры*» заключается в том, что действия одного игрока зависят от действий партнеров и наоборот.

Поясним этот тезис на известном историческом примере [34, 35] (заимствован из [36]). Ранним утром 14 октября 1066 года войска правителя Англосаксонского королевства короля Гарольда II Годвинсона (1022–1066) недалеко от местечка Гастингс готовились к бою с герцогом Нормандским Вильгельмом (1027–1087), двумя неделями раньше вторгшимся на земли Гарольда. Войско нормандцев, состоявшее из тяжеловооруженных всадников, всей своей мощью обрушилось на пеших англосаксов, стоявших щит к щиту на вершине холма, но, потеряв много убитыми и ранеными, отступило. Раз за разом настойчивые нормандцы ожесточенно повторяли атаки. В конце концов они пробили брешь в защите англосаксов, последние не выдержали и побежали, король Гарольд и два его брата были убиты, спаслись немногие, Англия была завоевана в последний раз в своей долгой истории.

Почему же исход тяжелого сражения решился так быстро? Каждый воин-англосакс преследовал две (во многом противоположные) цели — выполнить свой воинский долг и остаться в живых. Пока держался строй, каждый воин сражался. Его могли, конечно, убить, но если бы он бежал с поля боя, то его ждали бы позор и даже смерть за трусость. Но после особенно жестокой атаки, видя, как рядом гибнут их товарищи, несколько солдат дрогнули и побежали, стоящие рядом последовали за ними. Как только число солдат, покинувших поле боя, приблизилось к критическому, риск быть убитым стал превалировать над возможным наказанием за бегство, держать оборону становилось невыгодно. С ростом числа солдат, покинувших поле боя, снижалась вероятность наказания для каждого отдельного беглеца. В течение десятка минут все войско англо-саксов обратилось в бегство и погибло: пеший имел мало шансов противостоять конному воину. Решение каждого солдата бросить поле боя и скрыться в видневшейся вдали рощице представляется рациональным: если бегут все, то у него фактически нет выбора. Оставаясь в бою, он наверняка погибнет, а пытаясь спастись, может рассчитывать на вероятность — хотя и не на высокую — сохранить жизнь.

Каков бы был вероятный исход битвы, если бы каждый воин-англосакс сражался до конца, как дружина короля Гарольда, которая не отступила и полностью погибла. Возможно, никто бы не побежал и битва закончилась бы победой англичан. Таким образом, причиной поражения англосаксов в числе прочих (а может быть, и основной) было влияние на решение каждого воина решений, принятых его окружением.

Важнейшим выводом из приведенного примера является тот факт, что решение игровой задачи зачастую отличается от оптимального. Ведь войску короля Гарольда, да и ему самому, было выгодно, чтобы никто из солдат не побежал, но каждый из них принимал решение, исходя из своего понимания рациональности. Описанная ситуация является базовой проблемой теории игр, получившей образное название «*дилемма заключенных*» (об этом в Главе 4, разд. 4.3.1).

Такая дилемма разрешается только внешним воздействием на игроков (путем организации обмена информации между ними, а порой и прямым управляющим воздействием на них).

Здесь уместно вспомнить известный художественный фильм «Горячий снег» по роману Юрия Болдырева (р. 1924). Армейская артиллерия сдерживает прорыв танкового корпуса генерала Манштейна, идущего на помощь войскам фельдмаршала Паулюса, окруженным под Сталинградом. Командарм (роль Георгия Жженова (1915–2005)) с командного поста наблюдает, как один за другим гибнут артиллерийские расчеты его армии. Член Военного совета армии (роль Анатолия Кузнецова (1930–2014)) напоминает командарму: ведь гибнущие солдаты — это чьи-то дети, мужья, братья. Ответ командарма жесток: «*Сейчас они только солдаты, их основная задача — уничтожать танки, только уничтожать танки*!» В результате танки Манштейна не прошли, армия Паулюса была разгромлена, тысячи сталинградцев были спасены от уничтожения, был обеспечен перелом, приведший к победе в Великой Отечественной войне. Как ни горько за смерти героев-артиллеристов, но это пример победы жесткой стратегии битвы (игры) над частными критериями рациональности решений отдельных солдат.

Есть над чем задуматься современным либеральным стратегам. Тотальное увлечение индивидуальными правами человека, как правом ничем не ограниченной свободы каждого индивидуума формулировать самостоятельно, без оглядки на общество, критерии рациональности собственных решений, с позиции теории игр может приводить к неоптимальным ситуациям в масштабах всего общества. Более того, не кто иной, как нобелевский лауреат Р. Ауманн, классик теории игр, будучи сторонником демократии, тем не менее, является автором «*ужасно еретических*» слов: «*Я не уверен, что демократия более эффективна*». По его мнению, «*авторитарный режим может быть более эффективным, так как у него горизонт принятия решений больше, чем у демократического, ... это, правда, не причина выбирать авторитарный режим, но это недостаток демократии, ... авторитарные режимы обычно развращены и коррумпированы, но они не обязательно должны быть такими*».

Мы наблюдаем работу теории игр каждый день, садясь утром в собственный автомобиль. Двигаясь в общем транспортном потоке, каждый из нас преследует свои собственные цели (успеть на работу, посетить любовницу, отвезти детей в школу и т. п.), но вынужден подчиняться общей стратегии поведения, диктуемой правилами дорожного движения. В конечном счете выигрывают все, достигая своих целей без транспортных происшествий.

С экономической точки зрения цель теории игр состоит в том, чтобы помочь экономистам понимать и предсказывать происходящее в экономических ситуациях. Теория игр — это математический инструмент экономического анализа, точный язык исследования экономических ситуаций, позволяющий проверять их на логическую согласованность с интуитивными представлениями экономиста.

Математизация содержательных финансово-экономических задач в части принятия решений в условиях неопределенности и риска приводит к экономико-математическим моделям и методам, теоретический аспект которых составляет содержание теории игр.

От принимающего решения теория игр требует продуманной формулировки альтернатив поведения, оценки их результатов, и самое главное — учета поведения всех субъектов игры. Хотя мудрость гласит «*Errare humanum est* (*Ошибаться — это по-человечески*)», владеющий теорией игр чаще избегает непростительных ошибок. Теория игр не рассчитана на то, чтобы сделать агрессивнее и настойчивее в достижении цели игрока, следующего логике Фридриха Ницше (1844–1900): «*Победитель не верит в случайность*» и пренебрегающего риском. Еще древние греки понимали, что «*смелыми людей делает невежество, а размышления — нерешительными*» (Фукдид, около 460–400 гг. до н.э.). Невозможно найти способ определения стратегии, приносящей игроку абсолютную уверенность в исходе игры, ибо «*для того чтобы быть абсолютно уверенным в чем-либо, нужно знать об этом либо все, либо ничего*». Знание теории игр не обязательно должно приносить ощутимый выигрыш — «*Наука не отвечает на все вопросы даже в кабинете следователя*» (Хенрик Ягодзиньский (р. 1928) [10, с. 489]), но она «... *не отвечая на все вопросы, тем не менее, помогает понять бессмысленность многих из них*» (Григорий Ландау (1877–1941)) и удержать не в меру ретивых игроков от совершения глупых и неоправданных ошибок.

Математическая формализация предполагает выработку правил действий игроков, что требует определения основных понятий теории игр, формирования ее терминологической базы. Математическая теория игр оперирует определенным набором понятий и определений, имеющих строго однозначный смысл. Этим она отличается от повседневного (бытового) языка, отражающего игру.

Каждая игра во времени представляется последовательной совокупностью **ходов**, под которыми понимается выбор и осуществление игроком действий, предусмотренных правилами игры.

Ходы могут быть **личными и случайными**. В первом случае ход — это сознательный выбор игроком возможного варианта действий, во втором — выбор из ряда возможных, случайно распределенных альтернатив, представляемых некой незаинтересованной средой (в теории игр — **природой**). Для случайного хода правилами игры определяются вероятностные характеристики ее возможных исходов.

Совокупность правил, определяющих выбор игроком варианта его действий при каждом личном ходе, в зависимости от ситуации, складывающейся в игре, называется **стратегией игрока**.

Цель теории игры — обоснование оптимальной стратегии для каждого игрока. Под **оптимальной стратегией** игрока подразумевается стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает ему максимально возможный средний выигрыш при условии, что его партнер по игре делает все возможное, чтобы противодействовать этому. По количеству игроков игры подразделяются на **парные** и **игры** n **игроков**.

По количеству стратегий игры могут быть **конечными**, когда каждый игрок имеет конечное количество стратегий, и **бесконечными**, если хотя бы один игрок имеет бесконечное число стратегий. Для игр с бесконечным числом стратегий польские математики Стефан Банах (1892–1945), Станислав Мазур (1905–1981) и Станислав Улам (1909–1984) доказали, что в бесконечной игре ни для одного игрока не существует выигрышной ситуации.

Различают **антагонистические игры с нулевой суммой** [38] и **неантагонистические, с суммой, отличной от нуля** [39, 40]. Сумма выигрышей игроков в антагонистической игре равна нулю, цели игроков диаметрально противоположны, выигрыш одного игрока возможен только при проигрыше другого. В игре с ненулевой суммой критерии выигрыша игроков различны и сумма их выигрышей может быть отличной от нуля. Например покер, когда один игрок выигрывает все ставки других. Частный случай игры с ненулевой суммой игры с постоянной разностью (или суммой), в которой игроки проигрывают (выигрывают) одновременно, поэтому им выгодно действовать сообща. Пример — война, когда оба игрока, взаимно уничтожают ресурсы друг друга, старательно уменьшая сумму игры.

По взаимоотношениям игроков в процессе игры последние делятся на **бескоалиционные** [41, 42] (игроки не имеют права создавать коалиции во время игры), **коалиционные** (игроки могут образовывать коалиции во время игры) и **кооперативные** [43, 44], когда игроки вступают в игру в составе специально созданной коалиции.

Игры могут быть **одношаговыми**, когда распределение выигрышей происходит после каждого хода игрока, и **многошаговыми**, если результат игры фиксируется после осуществления серии ходов. Последние подразделяются на **позиционные** [45], **стохастические и дифференциальные**, возникшие в 50-х годах прошлого века при формулировании американским математиком Р. Ф. Айзексом (1914–1981) [46] задачи перехвата самолета управляемой ракетой в терминах навигационных переменных. В **позиционной** игре могут участвовать несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Игры, в которых ходы приводят к определенной позиции, называются **стохастическими**. Многошаговая игра с непрерывными шагами, в которой действия игроков могут быть описаны дифференциальными уравнениями, называется **дифференциальной** [46]. Мы будем рассматривать только вырожденный случай позиционной игры с единственным игроком — **задачи динамического программирования**.

Игры, в которых каждый игрок располагает информацией о том, какой выбор осуществили остальные игроки (игрок), называются **играми с полной информацией**. В ином случае имеет место игра с **неполной информацией**.

Игры могут быть **симметричными**, когда соответствующие стратегии игроков будут равны (то есть иметь одинаковые платежи). Большинство парных игр являются симметричными.

Различают **параллельные (статические) и последовательные (динамические)** игры. В первом случае игроки делают свои ходы, одновременно не имея информации о выборе оппонента. В **динамических** играх игроки могут делать свои ходы в заранее установленном или случайном порядке, получая некоторую информацию о предшествующих ходах.

Конечная антагонистическая игра двух игроков с нулевой суммой (выигрыш первого игрока равен проигрышу второго и наоборот), заданная в виде одной матрицы, называется **матричной игрой** [38].

Конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, определяемая двумя матрицами, в которых выигрыши каждого игрока отражаются его собственной матрицей, называется **биматричной игрой** [39, 40].

Игра, в которой функция выигрышей каждого игрока непрерывна в зависимости от стратегий, является **непрерывной игрой**.

Игры более чем с двумя игроками, а также игры с последовательными шагами чаще представляются в **экстенсивной** (развернутой) форме в виде ориентированного дерева, у которого каждая вершина соответствует ситуации выбора игроком своей стратегии. Такая форма представления удобна при описании игры более чем с двумя игроками и игр последовательного типа.

Игры, представленные платежной матрицей, строки которой определяются стратегиями одного игрока, а столбцы — второго (на их пересечении указываются выигрыши, получаемые игроками), называются играми в **нормальной или стратегической форме**.

Игры, в которых каждый игрок осуществляет рефлексивное управление (то есть воздействуя на других игроков передачей им в той или иной форме искаженной информации о своей стратегии для формирования нужного ему результата игры), называются **рефлексивными** [47, 48].

Наиболее изучены и продвинуты матричные игры, в основе которых содержится большинство фундаментальных положений теории игр. С них и начнем, попутно усваивая фундаментальные положения теории игр.

End keywords:

Цель теории игр, личные и случайные ходы, стратегия игрока, антагонистические игры с нулевой суммой, бескоалиционные, коалиционные и кооперативные игры, одношаговые и многошаговые игры, позиционные, стохастические и дифференциальные игры, динамические игры, матричные игры, биматричные игры, экстенсивная форма игры, нормальная стратегическая форма игры, рефлексивные игры.

Равновесное состояние –
когда победа не главное
и нет проигравших.

Джон Форбс Нэш – мл.
1928 – 2015

3 ГЛАВА
МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

«Равновесное состояние —
когда победа не главное и нет проигравших»
Джон Форбс Нэш-мл. (1928–2015)

«В чужой игре ставка всегда на тебя»
Миша Богородский, р. 1968

3.1. Основные понятия, чистые и смешанные стратегии, равновесие

Рассмотрим антагонистическую игру двух игроков (обозначим их **A** и **B**) с нулевой суммой. Каждый игрок имеет в своем распоряжении конечное число стратегий. Пусть игрок **A** располагает m стратегиями: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а игрок **B** — n стратегиями: $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Одновременный выбор игроками пары стратегий будем называть **ситуацией** — $\{A_i, B_j\}$, которой соответствует пара выигрышей a_{ij} и b_{ij}, связанных (так как игра антагонистическая) соотношением $a_{ij} = -b_{ij}$. Поскольку выигрыш одного игрока в антагонистической игре однозначно определяет проигрыш второго, далее будем рассматривать выигрыши только одного из них (например, **A**). Значения выигрышей a_{im} в каждой ситуации, удобно записывать в виде прямоугольной таблицы или матрицы (3.1), строки которой соответствуют стратегиям игрока **A**, а столбцы — стратегиям игрока **B**:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array}. \end{array} \qquad (3.1)$$

Матрица **A** (3.1) называется $m \times n$-**матрицей игры** или **платежной матрицей** (отсюда и игры называются матричными).

Переход к матричной форме записи игры является первым шагом на долгом пути процесса математизации игры-конфликта. По сути этот шаг знаменует собой замену вербального (словесного) описания игры математическим объектом — матрицей, что дает возможность использовать мощный математический аппарат для формального анализа сложных игровых ситуаций. Логические размышления и посылы, взаимоотношения игроков заменяются математическими манипуляциями с формальной знаковой моделью игры — матрицей.

Замена игры знаковой моделью дает возможность моделировать, прогнозировать и оптимизировать поведение игроков. Ведь, уважаемый читатель, если вам сообщат среднюю скорость вашего движения и время в пути, вы же не побежите, сломя голову, измерять рулеткой расстояние, которое вам предстоит преодолеть. Это глупо, если вы располагаете математической моделью движения, позволяющей простым умножением скорости на время получить необходимый результат без излишней беготни с рулеткой. Так и теория игр освобождает продавца и покупателя от необходимости разрешать конфликт «*дороже продать — дешевле купить*» спором до хрипоты при купле-продаже товара, выработав на основе математической модели указанного конфликта стратегии своего поведения, удовлетворяющие одновременно обе стороны.

Рассмотрим игру с платежной матрицей 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}.$$

Будем полагать, что игра может многократно повторяться. На рис. 3.1. иллюстрируются все возможные ситуации игры, имея в виду, что на каждую стратегию игрока противники отвечают стратегией, сводящей к минимуму выигрыш оппонента.

Например на стратегию A_1 игрока $\mathbf{A}$ — первая строка матрицы $(-4, 4, -2)$, игрок $\mathbf{B}$ отвечает стратегией B_1 — первый столбец матрицы $(-4, 4, 6)$, создавая ситуацию 1 — $\{A_1, B_1\}$, в которой у игрока $\mathbf{A}$ наибольший проигрыш $a_{11} = -4$, а у игрока $\mathbf{B}$ наибольший выигрыш $b_{11} = -a_{11} = 4$.

Очевидно, игрока $\mathbf{A}$ такая ситуация не устраивает и он меняет свою стратегию с A_1 на A_2 — вторая строка матрицы $(4, 2, 2)$, обещающую ему выигрыш до $a_{21} = 4$, а игроку $\mathbf{B}$ проигрыш $b_{21} = -4$. Игрок $\mathbf{B}$ незамедлительно отвечает на этот ход игрока $\mathbf{A}$ своей стратегией B_3 — третий столбец матрицы $(-2, 2, 2)$, уменьшая выигрыш игрока $\mathbf{A}$ до $a_{23} = 2$ и снижая свой проигрыш с $b_{21} = -4$ до $b_{23} = -2$.

A

1

A/B	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	4	-2
A_2	4	2	2
A_3	6	-6	2

2

A/B	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	4	-2
A_2	4	2	**2**
A_3	6	-6	2

3

A/B	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	4	-2
A_2	4	2	2
A_3	6	-6	2

B

4

A/B	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	4	-2
A_2	4	2	2
A_3	6	-6	2

5

A/B	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	4	-2
A_2	4	2	2
A_3	6	-6	2

6

A/B	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	4	-2
A_2	4	2	**2**
A_3	6	-6	2

Рис. 3.1. К пояснению равновесия в матричной игре (красным отмечена ситуация равновесия 2, 6 — $\{A_2, B_3\}$)

Далее, рассуждая по аналогии, игрок **A**, стремясь увеличить выигрыш до $a_{31} = 6$, меняет свою стратегию A_2 на стратегию A_3: третья строка матрицы $(6, -6, 2)$, на которую игрок **B** отвечает стратегией B_2 — второй столбец матрицы $(4, 2, -6)$, превращающей выигрыш игрока **A**, равный $a_{31} = 6$, в проигрыш $a_{32} = -6$, а проигрыш $b_{32} = -6$ игрока **B** — в выигрыш $b_{32} = 6$.

Таким образом, из всех выигрышей, представляемых игроку **A** ответными стратегиями игрока **B** (ситуации 1, 2, 3): при стратегии A_1 — $a_{11} = -4$, при стратегии A_2 — $a_{23} = 2$, при стратегии A_3 — $a_{32} = -6$, ему, естественно, следует выбрать стратегию A_2, при реализации которой его выигрыш будет не меньше $a_{23} = 2$, какую бы стратегию не выбрал игрок **B**.

Теперь порассуждаем относительно стратегий игрока **B**, который, понимая, что игрок **A** стремится максимизировать свой выигрыш, намерен противостоять такому стремлению. На стратегию B_1 игрока **B** — первый столбец матрицы $(-4, 4, 6)$, игрок **A** ответит стратегией A_3 — третья строка матрицы $(6, -6, 2)$, создав ситуацию 4 — $\{A_3, B_1\}$, при которой его выигрыш (и проигрыш игрока **B**) максимальны: $a_{13} = -b_{13} = 6$; на стратегию B_2 игрока **B** — второй столбец матрицы $(4, 2, -6)$, игроку **A** выгодно ответить стратегией A_1 — первая строка матрицы $(-4, 4, -2)$, создавая ситуацию 5 — $\{A_1, B_2\}$, при которой его выигрыш будет максимальным: $a_{12} = 4$; на стратегию B_3 игрока **B** — третий столбец матрицы $(-2, 2, 2)$ игрок **A** ответит стратегией A_2 — вторая строка матрицы $(4, 2, 2)$, создавая ситуацию 6 — $\{A_2, B_3\}$, обеспечивающую ему выигрыш, не менее $a_{23} = 2$. Естественно, из всех предоставленных ответными стратегиями игрока **A** возможностей (ситуации 4 — $b_{31} = -6$; 5 — $b_{12} = -4$ и 6 — $b_{23} = -2$) игрок **B** выберет стратегию B_3, при которой его проигрыш будет не более $b_{23} = -2$, какую бы ответную стратегию ни использовал игрок **A**. Можно ожидать, что через несколько циклов прохождения через точку равновесия игроки зафиксируют ее и впредь будут ее придерживаться. По образному выражению Теодора Драйзера (1871–1945), «*прежде, чем прийти в равновесие, чаши весов должны колебаться*».

Сведя результаты нашего анализа в табл. 3.1, выделим максимальный среди минимальных выигрышей по всем стратегиям игрока **A** (по строкам матрицы **A**) — $\max\min = 2$ и минимальный среди максимальных проигрышей по стратегиям игрока **B** (по столбцам матрицы **A**) — $\min\max = 2$.

Таблица 3.1. Платежная матрица

Игрок **A**	Игрок **B**			max
	B_1	B_2	B_3	
A_1	**–4**	**4**	-2	**–4**
A_2	4	2	седло **2**	max **2** min
A_3	**6**	**–6**	2	**–6**
min	**6**	**4**	mini **2** max	

Соответствующие им стратегии игроков A_2 и B_3 будут оптимальными в том смысле, что при многократном повторении игры отказ любого игрока от выбранной стратегии $A_2 = A_{\text{opt}}$ и $B_3 = B_{\text{opt}}$ может только уменьшить их шансы на выигрыш или увеличить шансы на проигрыш. В конце концов, «*лучше быть немного потерпевшим, чем сильно пострадавшим*».

Оптимальная ситуация $\{A_2, B_3\}$, соответствующая элементу a_{23}, в которой $\max\min = \min\max$, в теории игр называется **точкой равновесия**, или **седловой** точкой.

Пример 3.1 (заимствован из [49])

Две конкурирующие инвестиционные компании **A** и **B** ведут переговоры с клиентами B_1, B_2 и B_3, преследуя цель заключить инвестиционный договор с одним из клиентов. Задача компании **B** — заключить инвестиционный договор, задача компании **A** — препятствовать компании **B** и занять ее место в инвестировании. При этом в распоряжении компании **A** две стратегии: A_1 — предложить лучшие условия инвестирования, A_2 — передать клиентам материалы, компрометирующие компанию **B**. Стратегия A_1 приводит к срыву переговоров компании **B** с инициаторами проектов с вероятностями 0,7; 0,5; 0,3 соответственно, а стратегия A_2 — к такому же результату с вероятностями 0,6; 0,9; 0,4.

Таким образом, имеет место антагонистическая (так как выигрыш компании **A** есть проигрыш компании **B**) конечная игра с платежной матрицей

Игрок **A**	Игрок **B**			max
	B_1	B_2	B_3	
A_1	0,7	0,5	0,3	0,3
A_2	–0,6	0,9	седло **0,4**	0,4
min	0,7	0,9	0,4	

Из матрицы игры ясно, что стратегии игроков A_2 и B_3 (отмечены желтым цветом) являются оптимальными, а точка 0,4 будет седловой точкой. В терминах игры следует, что оптимальным действием компании **A** в противостоянии компании **B** является представление на нее компрометирующих материалов (стратегия A_2). В этом случае вероятность отрицательного результата переговоров компании **B** с любым из трех возможных клиентов будет не меньше 0,4. С другой стороны, оптимальная стратегия компании **B** — проведение переговоров с инициатором инвестиционного проекта B_3 (стратегия B_3), так как отрицательный результат таких переговоров будет не больше 0,4 при любых действиях компании **A**.

Компаниям не выгодно нарушать равновесие, соответствующее седловой точке. Например, если компания **B** начнет вести инвестиционные переговоры с клиентом B_2, то компания **A**, сменив стратегию A_2 на A_1, предложит вместо предоставления компромата на компанию **B** лучшие условия инвестирования, чем существенно повысит вероятность неудачи переговоров компании **B** (с 0,4 до 0,7).

Рис. 3.1 наглядно демонстрирует, что ситуация $\{A_2, B_3\}$ обеспечивает игроку **A** гарантированный выигрыш при любом поведении игрока **B** в пределах его чистых стратегий, но и для игрока **B** эта же ситуация гарантирует приемлемый проигрыш независимо от того, какие чистые стратегии использует игрок **A**. Другими словами, имеет место равновесие в игре, игроки взаимно удовлетворены ситуацией $\{A_2, B_3\}$.

Здесь переведем дыхание. Равновесие в экономике — желанная цель, являющаяся мечтой участников рынка. Продемонстрированное в примере равновесие удостоилось даже именного титула (как принято в географии или астрономии) — равновесие Нэша, по имени нобелевского лауреата, американского математика из Принстона Джона Форбса Нэша-младшего (1928–2015). Концепция равновесия Дж. Нэша — ключевое понятие теории игр — является таким набором стратегий игроков, когда ни один игрок, предполагая стратегии других игроков зафиксированными, не может поменять свою стратегию так, чтобы увеличить свой выигрыш. Такой чести Нэш удостоился в связи с тем, что он первым в общем виде сформулировал определение равновесия и доказал, что оно всегда имеет место если не в чистых, то в смешанных стратегиях — своеобразной лотерее на множестве чистых стратегий (о том, что такое смешанные стратегии, поговорим позже). На самом деле «*правила игры нужно знать, но лучше устанавливать их самому*» (Анджей Сток [10, с. 298]). Равновесие Нэша отражает устойчивые исходы игры при неспособности игроков договориться. Статья Нэша с доказательством существования равновесия заняла в «*Proceedings of the National Academy of Sciences*» одну страницу, отмеченную впоследствии Нобелевской премией. Для справедливости необходимо отметить, что до Нэша существование равновесия для конечных игр 2 участников с нулевой суммой было доказано Нейманом и Моргенштерном в 1944 г. [23]. Нэш в своей диссертации [50] доказал, что подобные равновесия должны существовать для всех конечных игр с любым числом игроков.

27 страниц докторской диссертации Нэша [50] перевернули с ног на голову устои корпоративного бизнеса и оказали на общество и экономику такое же влияние, как 21 страница докторской диссертации Эйнштейна на теоретическую физику. Примечательна судьба самого гения Нэша. Он 30 лет скитался по психиатрическим клиникам, страдая маниакальной формой шизофрении, от которой излечился усилием собственного гения. Может быть, прав Сенека Луций Анней (4 г. до н.э.–65 г. н.э.), утверждавший, что «*не бывало великого ума без примеси безумия*», что в определенной мере относится и к нашему отечественному гению Григорию Перельману. Однако, как справедливо заметил Карло Досси (1849–1910), «*безумцы прокладывают пути, по которым следом пойдут рассудительные*».

Когда эта книга была уже закончена, пришло печальное известие: 23 мая 2015 года жизнь великого безумца Джона Нэша трагически оборвалась. Вместе со своей женой Алисией он погиб в автомобильной катастрофе при возвращении из Норвегии, где король Харальд V вручил ему вместе с 90-летним коллегой Луисом Ниренбергом премию Абеля, престижнейшую математическую награду, предложенную норвежским метематиком Софусом Ли, когда стало известно, что Альфред Нобель отказался отмечать премией математиков. Премия Абеля стала своеобразным аналогом Нобелевской премии за математические достижения, опубликованные несколько десятилетий назад и получившие всеобщее признание (в отличие от медали Филдса, предназначенной для математиков не старше 40 лет).

Если максимин и минимакс совпадают, решения игроков будут устойчивыми, а игра будет иметь равновесие, то есть игрокам одинаково невыгодно отходить от выбранных стратегий. Из этого следует, что при равновесной игре любой игрок, желающий получить лучший результат, не должен менять свою стратегию, если другие игроки придерживаются своей линии поведения.

Почему равновесие Нэша стало основной концепцией решения теоретико-игровых задач. Вероятней всего, потому, что оно удовлетворяет минимальному набору представлений игроков о рациональности. Лауреат Нобелевской премии Р. Майерсон так отзывается о равновесии Нэша: «*Когда меня спрашивают, почему в какой-то игре игроки должны вести себя, как в равновесии Нэша, я отвечаю: “Почему нет?” Далее я предлагаю задавшему вопрос сформулировать свое представление о том, как должны повести себя игроки. Если эта спецификация не являются равновесием Нэша, то... она будет противоречить сама себе, если мы предположим, что игроки имеют верное представление о действиях друг друга*» [51, с. 106].

Справедливости ради следует указать на ситуации, когда равновесие — состояние, отнюдь не желанное для игрока. К примеру, всякий «заяц»-безбилетник старается избежать равновесия в игре с контролером. Попробуем схематизировать их взаимоотношения игровой моделью. Предположим, если «заяц» и контролер оказываются в одном вагоне электрички, то первый наказывается штрафом (предположим в 150 руб.), а второй получает моральное удовлетворение, положим, условно оцениваемое в 100 руб.

Если безбилетник оказывается в соседнем вагоне, то он на следующей станции его покинет, избегая чреватой штрафом встречи с контролером.

Матрица такой игры имеет вид

«Заяц»	Контролер	
	Вагон 1	Вагон 2
Вагон 1	−150; 100	0; 0
Вагон 2	0; 0	−150; 100

Так как $\max\min = -150 \neq \min\max = 0$, в этой игре равновесие Нэша отсутствует. Если безбилетник в первом вагоне, контролер максимизирует свой выигрыш — морально удовлетворенный получит штраф 150 руб., «заяц» в трауре — пропали 150 руб., которые хотел сэкономить на проезде. Но если безбилетник знает, что контролер в первом вагоне, он постарается улизнуть поскорее во второй вагон и минимизировать свои потери.

Читатель иногда может встретить в литературе термин равновесие Нэша–Курно, что отражает старый спор о том, кто является первооткрывателем концепции равновесия. По мнению французских ученых, первенство принадлежит их соотечественнику Антуану Огюсту Курно (1801–1877), указавшему на такое равновесие на сто лет раньше Нэша в работе «*Исследование математических принципов теории богатства*» («*Recherches sur les principes mathé-matiques de la théorie des richesses*», Париж, 1838).

Предоставим читателю самому оценить справедливость таких претензий к нобелевскому лауреату, для чего изложим вкратце результаты Курно.

А. Курно в указанной выше работе впервые формализовал задачу о равновесии в дуполии (от латинского «*два*» и «*продаю*»), когда имеются только два продавца идентичного товара, не связанные между собой монополистическим соглашением о ценах.

Обозначим через $0 \leqslant q_1\ (q_2) < \infty$ возможные объемы производства товара в заданный промежуток времени (например, месяц). Пусть $P = 1 - q_1 - q_2$ — функция спроса на товар, P — максимальная цена реализации $(q_1 + q_2)$ штук товара в месяц, $0 < c_1\ (c_2) \leqslant 1$ — издержки изготовления единицы товара (нижние индексы 1, 2 относятся к фирмам-производителям товара).

Полагая, что прибыль производителя $V_1\ (V_2)$ равна его выручке за вычетом издержек производства, получим

$$\begin{aligned} V_1 &= q_1 P - c_1 q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - c_1 q_1 = q_1(1 - q_2 - c_1) - q_1^2, \\ V_2 &= q_2 P - c_2 q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - c_2 q_2 = q_2(1 - q_1 - c_2) - q_2^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В общем случае множество стратегий фирм-производителей (объемы производства) не является конечным (каждая фирма может производить товар в неограниченном количестве).

Если $\{q_1^p, q_2^p\}$ — равновесная ситуация по Нэшу, то значение $q_1 = q_1^p$ должно максимизировать величину V_1, а при $q_2 = q_2^p$ — величину V_2.

Равновесие наступает при одновременном достижении $\max\limits_{q_1} V_1(q_1, q_2)$ и $\max\limits_{q_2} V_2(q_1, q_2)$, которое имеет место при

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = \dfrac{\partial[q_1(1 - q_2 - c_1) - q_1^2]}{\partial q_1} = 1 - q_2 - c_1 - 2q_1 = 0, \\ \dfrac{\partial V_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial[q_2(1 - q_1 - c_2) - q_2^2]}{\partial q_2} = 1 - q_1 - c_2 - 2q_2 = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

откуда следуют выражения для функции реакции обеих фирм

$$\begin{gathered} q_1(q_2) = \begin{cases} \dfrac{1 - q_2 - c_1}{2}, & q_2 < 1 - c_1, \\ 0, & q_2 \geqslant 1 - c_1, \end{cases} \\ q_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1 - q_1 - c_2}{2}, & q_2 < 1 - c_2, \\ 0, & q_2 \geqslant 1 - c_2. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Равновесие Нэша $\left\{q_1^p, q_2^p\right\}$ имеет место тогда, когда объем производства одной фирмы максимизирует ее прибыль при заданном объеме производства второй фирмы, и наоборот. Следовательно, равновесие по Нэшу является решением системы уравнений $q_1(q_2) = q_1$; $q_2(q_1) = q_2$. Условие $q_1(q_2) = q_1$ с учетом (3.4) эквивалентно $\dfrac{1 - q_2^p - c_1}{2} = q_1^p$, где $q_2^p = \dfrac{1 - q_1^p - c_2}{2}$. Подставляя выражение для q_2^p в формулу для q_1^p, получаем решение для q_1^p:

$$\frac{1 - \dfrac{1 - q_1^p - c_2}{2} - c_1}{2} = q_1^p, \quad \text{откуда } q_1^p = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{3}.$$

По аналогии, подставляя в выражение для q_1^p в формулу для q_2^p, получаем для q_2^p:

$$\frac{1 - \dfrac{1 - q_2^p - c_1}{2} - c_1}{2} = q_2^p, \quad \text{откуда } q_2^p = \frac{1 - 2c_2 + c_1}{3}.$$

Так как $q_1^p(q_2^p) > 0$, полученные решения справедливы при $(1 - 2c_1 + c_2) > 0$ и $(1 - 2c_2 + c_1) > 0$ или при $2c_2 - 1 < c_1 < \dfrac{1 + c_2}{2}$.

В итоге из условия $q_1(q_2) = q_1$; $q_2(q_1) = q_2$ с учетом (3.4) следует решение

$$\begin{cases} q_1^p = \dfrac{1 - 2c_1 + c_2}{3}, \quad q_2^p = \dfrac{1 - 2c_2 + c_1}{3}, & \text{при } c_1 \in \left(2c_2 - 1, \dfrac{1 + c_2}{2}\right); \\ q_1^p = \dfrac{1 - c_1}{2}, \quad q_2^p = 0, & \text{при } c_1 \leqslant \dfrac{1 + c_2}{2}; \\ q_1^p = 0; \quad q_2^p = \dfrac{1 - c_2}{2}, & \text{при } c_1 \leqslant 2c_2 - 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

которое наглядно иллюстрируется на рис. 3.2.

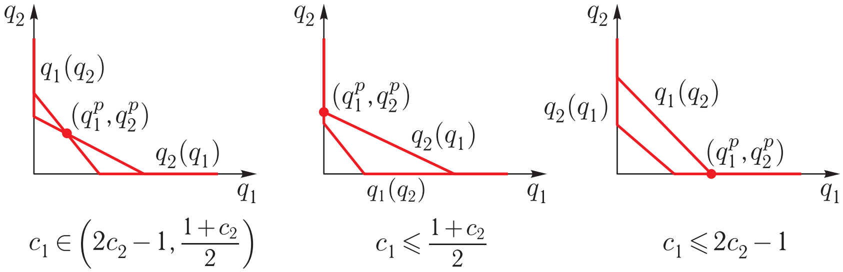


Рис. 3.2. Равновесие в дуполии Курно для разных значений издержек c_1 и c_2

В подавляющем большинстве случаев в литературе ограничиваются термином «*равновесие Нэша*». Необходимо отметить, что равновесие по Нэшу может не быть эффективным по Парето [59], соответствующему такому состоянию системы, при котором значение каждого частного критерия, описывающего ее, не может быть улучшено без ухудшения положения других ее элементов. Таким образом, этот принцип признает право на все изменения, не приносящие никому дополнительного вреда. Ситуация, когда достигается эффективность по Парето, соответствует ситуации, когда все выгоды от обмена исчерпаны. Вернемся к матрице конечной игры двух лиц с нулевой суммой и рассмотрим алгоритм поиска ответа на вопрос — есть ли в этой игре ситуация равновесия?

Напомним, что базовым постулатом теории игр является то, что оба игрока действуют разумно, то есть стремятся к получению максимального выигрыша, исходя из того, что соперник также действует для себя наилучшим образом. Это сильное предположение относительно того, что считает наилучшим для себя соперник. Что такое разумно и рационально с точки зрения игроков, оставим пока в стороне. Поговорим об этом позже.

Выбирая стратегию A_i, игрок **A** рассчитывает, что при любых действиях соперника B_j в рамках правил игры его выигрыш составит $> a_{ij}$.

Обозначим через α **максимальное значение выигрышей из всех минимальных** по строкам матрицы (3.1),

$$\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij}, \tag{3.6}$$

являющееся одним из элементов платежной матрицы. Если игрок **A** будет придерживаться стратегии, выбранной ранее описанным способом, то при любом поведении игрока **B** ему гарантирован выигрыш $\geqslant \boldsymbol{\alpha}$. Поэтому число $\boldsymbol{\alpha}$ называется **нижней ценой игры**, а принцип построения стратегии игрока на максимизации минимальных выигрышей называется **принципом максимина** и выбранная в соответствии с этим принципом стратегия — **максиминной стратегией** игрока **A**.

По аналогии введем обозначение для минимального из максимальных элементов по столбцам матрицы (3.1). Очевидно, выбирая стратегию B_j, игрок **B** рассчитывает, что при любых действиях игрока **A** в рамках правил игры его проигрыш будет $\leqslant \beta$.

Обозначим

$$\beta = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \beta_j = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{ij}, \tag{3.7}$$

являющийся элементом матрицы (3.1). Действуя осторожно и рассчитывая на разумное поведение противника, игрок **B** должен выбрать стратегию B_j, для которой число β_j является минимальным. Если игрок **B** будет придерживаться стратегии, выбранной описанным методом, то при любом поведении игрока **A** ему гарантирован проигрыш $\leqslant \beta$. Число β называется **верхней ценой игры**. Принцип построения стратегии игрока **B**, основанный на **минимизации максимальных потерь**, называется **принципом минимакса**, а выбираемая в соответствии с этим принципом стратегия B_j называется **минимаксной стратегией**.

Формулировка и доказательство принципа минимакса внесло в теорию игр принципиально новый аспект в понимание неопределенности. Все предшествующие теории исходили из того, что неопределенность — это не зависящая от нас внешняя данность. Теория игр исходит из того, что такой внешней данностью и источником неопределенности являются намерения противостоящих игроку участников игры. С этой точки зрения всякое принимаемое нами решение — результат переговоров, в которых мы стремимся снизить неопределенность, давая другим то, что они хотят, в обмен на то, что хотим мы. Иными словами, жизнь — это стратегическая игра, подкрепляемая контрактами для защиты от мошенников.

Выбор стратегии, обещающей наибольшую выгоду, как правило, сопровождается и наибольшими рисками, так как провоцирует на повышенную защиту оппонента, карман которого, собственно говоря, и является источником, из которого мы надеемся эту выгоду вытащить Поэтому, будучи рационалистами, мы пытаемся выбирать компромиссный вариант, ограничиваясь наибольшим (максимумом) из наихудшего (минимума).

Нижняя цена игры α и ее верхняя цена β связаны неравенством $\alpha \leqslant \beta$. Равенство

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij} \tag{3.8}$$

соответствует равновесному состоянию, которое ни один из игроков не заинтересован нарушить. В этом случае имеет место единая цена игры $\nu = \alpha = \beta$, равная

$$\nu = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}. \tag{3.9}$$

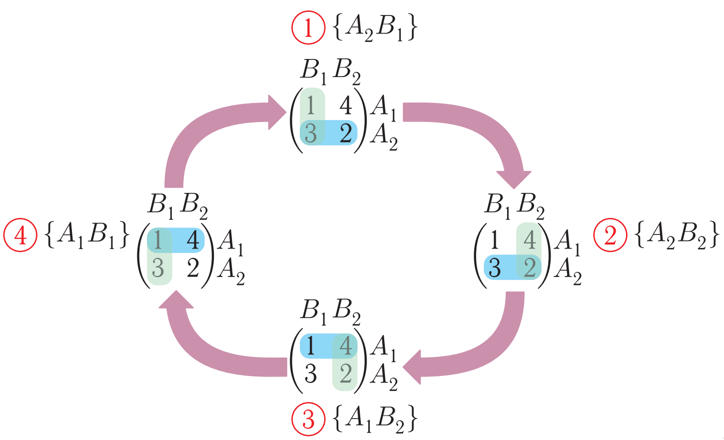
Элемент матрицы, лежащий на пересечении строки, содержащей максимальное из всех минимальных по строкам платежной матрицы значений выигрыша игрока **A**, со столбцом, содержащим минимальное из всех максимальных по столбцам платежной матрицы значение проигрышей игрока **B**, называется **седловой** точкой матрицы, а игра называется **игрой с седловой точкой**. Стратегии, образующие ситуацию, соответствующую седловой точке, называются **оптимальными**, а **совокупность оптимальных стратегий и цены игры — решением матричной игры с седловой точкой**. Термин «*седловая точка*» заимствован из геометрии, в которой так называется точка поверхности, где совпадают максимум по одной переменной и минимум по другой. Выражаясь образно и привлекая аналогию из области физики, седловая точка формирует «*седло*» для игроков с минимальной потенциальной энергией, с которого падать, как известно, менее больно. В общем случае в матричной игре может быть несколько седловых точек, но все они равны между собой.

Мы рассматривали решение матричной игры в так называемых «*чистых*» стратегиях. Возникает вопрос: откуда взялся этот термин — «*чистая*» стратегия? Что, могут быть и грязные? Попахивает шулерством. Чистыми в теории игр называются стратегии, которые игроки выбирают сами из известного им обоим заранее набора возможных.

Если это не так, например, если выбор стратегии игроком является случайным процессом, подобным выбору шара из лотерейного автомата, если игра определяется набором вероятностей, сопровождающим такой выбор, то такая стратегия, представленная определенным набором вероятностей реализации чистых стратегий, называется **смешанной**.

Почему целесообразно переходить от понятного «*чистого*» выбора стратегии игры к ее случайному выбору: случайность ведь всегда напрягает неизвестностью.

Поясним ответ на примере простейшей игры с матрицей $\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array}$:



В матрице нет седловой точки: нижняя цена игры равна $\nu_{\text{н}} = 2$ ед., что соответствует ситуации игры $\{A_2, B_2\}$; верхняя цена игры $\nu_{\text{в}} = 3$ ед. — ситуации $\{A_2, B_1\}$. Следовательно, игрок **A**, применяя свою чистую стратегию A_2, гарантирует себе выигрыш не менее 2 ед., а игрок **B**, используя свою стратегию B_1, не проиграет более 3 ед. (ситуация 1).

Если первый игрок постоянно будет применять стратегию A_2, игрок **B**, заметив это, не преминет сменить свою стратегию с B_1 на B_2, уменьшив тем самым свой проигрыш с 3 ед. до 2 ед. (ситуация 2). Если это будет происходить часто, игрок **A** постарается сменить свою стратегию A_2 на A_1, увеличив свой выигрыш до 4 ед. (ситуация 3). Игрок **B**, поняв это, стремительно сменит свою стратегию также на B_1, уменьшив выигрыш игрока **A** до 1 ед. (ситуация 4). На что игрок **A** сменит свою стратегию на A_2, увеличив свой выигрыш до 3 ед., приходя опять в стартовую ситуацию 1. Следовательно, игрокам не выгодно применять только одну из своих чистых стратегий. Каждому игроку необходимо использовать обе свои чистые стратегии, то есть применять попеременно одну и другую стратегии при повторении игры. Возникает вопрос: каким образом это делать? Означает ли «*попеременность*», что в половине партий игры нужно применять одну стратегию, а в половине другую? Естественно, нет. Ведь противник не должен знать, каким образом вы чередуете свои чистые стратегии, иначе он будет извлекать для себя информацию, с помощью которой сможет успешно парировать ваши усилия. Необходимо соблюдать секретность, противник не должен знать, какую стратегию вы будете использовать в очередной партии игры. Как этого добиться? Самый простой способ — использовать случайный механизм (например, жребий). В этом случае противник не будет осведомлен о вашей стратегии в очередной партии игры по той простой причине, что и вы сами этого не знаете (ведь слепой жребий и вам не подвластен).

Первое, что приходит в голову, а не безответственно ли отдавать в руки слепого случая такую важную задачу, как достижение выигрыша в игре? Нет, не безответственно, если относиться осмысленно к введению случайного механизма выбора стратегий с учетом характера игры, назначенных платежей, анализу выгодных значений вероятностей повторения стратегий (как это сделать, максимизируя результат игры, мы рассмотрим позже). Случайный механизм не должен быть хозяином игры, а должен являться оружием воли игрока, инструментом в его руках. По мнению авторов, термин «*смешанные стратегии*» не совсем удачен, точнее было бы использовать термин «*случайные стратегии*», который указывает на характеристику, их определяющую.

Понятия «*чистая*» и «*смешанная*» стратегия часто наталкиваются на методическое и терминологическое непонимание новичков. Обычно на вопрос, что такое смешанная стратегия, ответ начинающих звучит примерно так: это когда игроки определяют свои стратегии случайным образом.

Ответ методически не верен: смешанная стратегия не процесс, а результат случайного выбора. Правильный ответ: смешанная стратегия — это набор вероятностей, каждая из которых соотнесена с частостью применения игроком определенной чистой стратегии. Представим себе следующую ситуацию. В лотерейном автомате находятся шары, помеченные стратегиями игроков. Если лотерейный автомат не вращается и каждый игрок выбирает собственную стратегию, вытаскивая из него свои шары — ходы, ориентируясь только на пометки на шарах, то это игра в чистых стратегиях. Если лотерейный автомат вращается таким образом, что имеет место заранее фиксированная и известная игроку вероятность выпадения шаров, помеченных определенной стратегией, но из какой совокупности появится шар в текущий момент, ему неизвестно, то имеет место игра в смешанных стратегиях.

Если в первом случае игрок перед каждым ходом волен выбрать любую из своих стратегий, то во втором он информирован только о том, с какой вероятностью он может воспользоваться одной из своих чистых стратегий, однако какую именно свою чистую стратегию он применит в текущий момент, ему неизвестно до остановки вращения лотерейного автомата (это лучший способ скрыть свои намерения, ибо невозможно проговориться о том, чего сам не знаешь). Другими словами, смешанная стратегия является результатом рандомизации (от английского *random* — случай) игроками своего выбора. В случае смешанной стратегии игроком, по-существу, является его величество случай, правда, с заранее оговоренными вероятностными характеристиками. Смешанная стратегия, как вероятностное распределение на множестве чистых стратегий, дает в руки игрока новый инструмент решения его игровых проблем, и, как это ни звучит абсурдно, этим инструментом является его величество случай — «*Бог-изобретатель*». Звучит несколько парадоксально — случай искусственно вводится в игру как инструмент парирования неравновесных ситуаций при отсутствии седловой точки. Иными словами, смешанные стратегии вносят в игру созидательный аспект и этот аспект, как это ни странно, создается случаем. Случай из врага становится помощником, создавая условия для возможного увеличения выигрыша для игроков. Игрок доверяет выбор чистой стратегии случаю, но при этом контролирует его вероятностные характеристики.

Теоретически все верно, но для пытливого читателя-скептика остается вопрос: неужели это все применимо в реальной практике? Если для Бога верно «*не поверишь, не увидишь*», то человек «*пока не увидит, не поверит*». Неужели люди в реальной жизни скрупулезно моделируют случайные вариации? Неужели они в конкретных ситуациях принимают случайные решения, чтобы запутать противника? И основания для такого скепсиса имеются. Вряд ли супруги разрешают конфликты семейной жизни, изводя друг друга вероятностным выбором своих предпочтений и решений, так и до развода недолго. Каждый из нас вряд ли вспомнит случай из своей жизни, когда он принимал случайное решение, чтобы запутать противника. Врал? Да! Но без опоры на теорию вероятностей.

Известен пример эвристически осмысленного применения смешанной стратегии британским офицером во времена колониальной войны в Малайзии [52, 53]. Британские войска несли большие потери от партизанских атак малазийцев на их сухопутные конвои с провизией и оружием. Партизаны постоянно меняли тактику: либо устраивали крупную засаду, либо атаковали мелкими снайперскими группами с целью деморализации водителей, которых набирали из местного населения.

В ответ британцы могли либо сосредоточить силы в центре конвоя (для отражения крупных атак), либо рассредоточиваться (что эффективно в борьбе со снайперами). Командир британцев каждый раз тянул жребий (например, бросал монету), с 50%-й вероятностью выбирая возможную атаку. Конечно, британский офицер мало чего понимал в теории вероятностей (скорее и не слышал о такой), но он интуитивно пытался стать хоть как-то непредсказуемым для партизан, чтобы не дать им возможность прогнозировать его смешанную стратегию и реагировать определенным образом.

Вообще случаи, когда использование смешанных стратегий строго документировано, довольно редки. Для того чтобы доказать эффективность использования смешанных стратегий, необходим большой объем наблюдений с постоянным фиксированием действий двух или более игроков в сравнимых условиях много раз подряд. Можно назвать, пожалуй, только два таких источника данных. Первый — это специальным образом организованные экономические эксперименты, когда подопытные добровольцы много раз играют в одну и ту же игру в контролируемых условиях. Мы с вами вдоволь наигрались в такие игры в 90-е гг. прошлого века (правда не добровольно, а по собственной дурости).

Второй источник — спортивная статистика. Например, проанализируем поведение голкиперов и форвардов при исполнении пенальти в футболе или ручном мяче [54]. Большинство голкиперов не успевает реагировать на направление полета мяча и вынуждены угадывать, в какую часть ворот направит мяч форвард. Было установлено, что смешанные стратегии и голкиперов, и форвардов близки к равновесным. Чем только не занимаются сегодня ученые умы — математики! Одни тратят уйму времени на поиск экзотических соотношений типа

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26\,390 \cdot k)}{(k!)^4 \cdot 396^{4k}}\right]^{-1}$$

(это разложение, по словам индийского математика Сриниваса Рамануджана Айенгора (1887–1920), ему внушила богиня Намагири) или, еще чудовищнее (братья Чудновски, 1987 г.):

$$\pi = 426\,880\sqrt{10\,005} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)! \cdot (13\,591\,409 + 545\,140\,134 \cdot k)}{3k!(k!)^3 \cdot (-640\,320)^{3k}}\right]^{-1}.$$

Для сравнения: в 464 году китайский математик Цзу Чунчжи (429–500) вычислил π с помощью дроби $\pi = \dfrac{55}{113}$ с точностью до седьмого разряда (это достижение держалось почти 1000 лет), кстати, и основание натурального логарифма может быть вычислено с точностью до 10^{-7} с помощью простейшего соотношения $e = 3 - \sqrt{\dfrac{5}{63}}$.

Не отстают от них и ученые, пытающиеся установить, как чередуют свои стратегии форварды, пробивающие пенальти: в соответствии со случайным выбором или нет. Перестанешь удивляться ученым города Лагадо из саги Джонатана Свифта (1667–1745) о Гулливере [1]).

Матричные игры с седловой точкой встречаются редко, чаще $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, то есть чаще игрок **A** обеспечивает себе выигрыш $> \boldsymbol{\alpha}$, а игрок **B** не дает ему выиграть $> \boldsymbol{\beta}$. Образуется неиспользованный резерв возможностей, равный $(\beta - \alpha)$. Для того чтобы поделить его между собой эту разницу, игрокам приходится расширять арсенал стратегических возможностей.

Компромиссного распределения разности $(\beta - \alpha)$ между игроками при многократном повторении игры можно достичь случайным чередованием ими своих чистых стратегий (вспомните, как дети делят лишнюю конфету по принципу — отгадай, в какой руке). Это позволяет: обеспечить скрытность выбора стратегии (даже сам игрок не знает ее заранее); при разумном построении механизма случайного выбора стратегий их можно сделать оптимальными. Следует помнить, что случайная величина — это математический объект, значение которого заранее не может быть предсказано точно. Задать смешанную стратегию означает не что иное, как указать вероятности, с которыми применяются игроком чистые стратегии.

Смешанные стратегии игрока **A** — это набор из m неотрицательных чисел

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m\}, \quad i = 1, 2, \ldots; \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

[1]) *При посещении Гулливером столицы страны Лагадо ему показали Академию прожектеров и познакомили со странным тощим человеком с длинными всклокоченными волосами и бородой, который восемь лет разрабатывал проект извлечения из огурцов солнечных лучей, закрывая их затем в герметически закупоренные склянки, чтобы пользоваться в случае холодного и дождливого лета.*

соответствующих вероятностям применения им своих чистых стратегий.

Аналогично, для игрока **B** будет

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_n\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Очевидно, любая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии, когда все остальные стратегии применяются с нулевой вероятностью.

Каждый игрок применяет свои стратегии скрытно, не обращая внимания на выбор другого игрока. Таким образом, задав набор вероятностей

$$P\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, \; Q\{q_1, q_2, \ldots, q_n\},$$

мы формирует игру в смешанных стратегиях. Каждая ситуация (совокупность пар стратегий) является случайным событием, и ввиду независимости наборов P и Q оно реализуется с вероятностью $p_i q_j$. Следовательно, математическое ожидание выигрыша игрока **A** в смешанных стратегиях равно математическому ожиданию дискретной случайной величины

$$M_A\{P, Q\} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_i q_j, \tag{3.10}$$

являющемуся оценкой среднего выигрыша игрока **A** в игре в смешанных стратегиях. Смешанные стратегии P^0 и Q^0 будут оптимальными, если выполнено соотношение

$$M_A\left\{P, Q^0\right\} \leqslant M_A\left\{P^0, Q^0\right\} \leqslant M_A\left\{P^0, Q\right\}. \tag{3.11}$$

Из левого неравенства следует, что отклонение игрока от оптимальной стратегии P^0 при условии, что игрок **B** придерживается стратегии Q^0, приводит к тому, что выигрыш игрока **A** только уменьшается. Правое неравенство равносильно тому, что отклонение игрока **B** от оптимальной стратегии Q^0 при условии, что игрок **A** придерживается стратегии P^0, приводит к тому, что проигрыш игрока **B** только увеличится.

Ситуация $\left\{P^0, Q^0\right\}$ является оптимальной при

$$\max_P \min_Q M_A\{P, Q\} = M_A\left\{P^0, Q^0\right\} = \min_Q \max_P M_A\{P, Q\}. \quad (3.12)$$

Величина $\nu_A = M_A\left\{P^0, Q^0\right\}$ является ценой игры. Набором $\left\{P^0, Q^0\right\}$, $\boldsymbol{\nu}$ решение игры определяется полностью.

Отвлечемся немного и ответим на незаданный вопрос пытливого читателя: почему точка равновесия в платежной матрице игры называется «*седловой*», причем здесь седло. Поясним это на примере игры с матрицей [55]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в чистых стратегиях в этой игре точки равновесия и седловой точки нет, так как

$$\max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = -1 \neq \min_{i=1,2} \max_{kj=1,2} a_{ij} = 1.$$

Поищем седловую точку в смешанных стратегиях $P\{p, 1-p\}$, $Q\{q, 1-q\}$. Для наглядности запишем матрицу игры с указаниями по вероятности присутствия в смешанных стратегиях игроков вероятностей реализации различных ходов

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \end{array}.$$

Средний выигрыш игрока $\mathbf{A}$ будет определяться математическим ожиданием выигрышей при его различных стратегиях, равным произведению выигрыша для каждого хода игрока на вероятность его реализации,

$$\begin{aligned} M_A\{P, Q\} = 1 \cdot pq + (-1) \cdot p \cdot (1-q) + (-1) \cdot (1-p) \cdot q + \\ + 1 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = 4pq - 2p - 2q + 1 = \\ = (2p-1) \cdot (2q-1) = 4 \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(q - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

На рис. 3.3 приведена поверхность, соответствующая уравнению (3.13), — ну чем не седло! Седловая точка, отмеченная

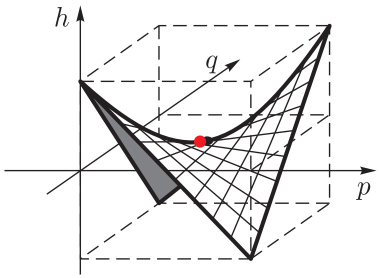


Рис. 3.3. К пояснению седловой точки (● — седловая точка)

на рис. 3.3, является самой устойчивой точкой поверхности, описываемой уравнением (3.13).

Зададимся двумя справедливыми вопросами: какие матричные игры имеют решение в смешанных стратегиях? Как найти решение матричной игры, если оно существует?

Ответ на эти вопросы дают две основные теоремы теории игр. Краеугольная теорема теории игр — теорема Неймана о минимаксе — утверждает, что:

«*Для любой матричной игры с* $\max\limits_{P}\min\limits_{Q} M_A(P,Q) = \min\limits_{Q}\max\limits_{P} M_B(P,Q)$ *существует по крайней мере одна ситуация в смешанных стратегиях* $\left(P^0, Q^0\right)$, *для которой выполняется соотношение*

$$M_A\left\{P^0, Q^0\right\} = \max_P \min_Q M_A\left(P^0, Q^0\right) = \min_Q \max_P M_B\left(P^0, Q^0\right)\text{».} \tag{3.14}$$

Иными словами, любая матричная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно, в смешанных стратегиях. Математика припасла для игроков оптимальные смешанные стратегии, в классе которых всегда существует седловая точка. Смешанные стратегии возвращают игрокам надежду, вооружающую их смыслом искать выход в конфликтных ситуациях не только на тропе интуиции и Провидения. Если партнерам не удается максимизировать свой выигрыш, когда их чистые стратегии известны друг другу, остается бросить кости и призвать на помощь случай в виде оптимальных вероятностных схем, чтобы найти там довесок к своему выигрышу.

Пусть $P^0\left\{p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0\right\}$, $Q^0\left\{q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0\right\}$ — оптимальные смешанные стратегии игроков и $\boldsymbol{\nu}$ — цена игры. Очевидно, что оптимальная смешанная стратегия игрока **A** — $P^0\left\{p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0\right\}$ является результатом смешения не всех чистых стратегий A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, а только тех, для которых $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j^0 = \nu$. По аналогии в оптимальной смешанной стратегии $Q^0\left\{q_1^0, q_2^0, \ldots, q^0\right\}$ смешиваются только те чистые стратегии, для которых справедливо $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 = \nu$.

Стратегии игрока, входящие в оптимальную смешанную стратегию с отличными от нуля вероятностями, называются **активными**. Для таких стратегий справедливо утверждение (**теорема для активных стратегий**): «*Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры* $\boldsymbol{\nu}$, *независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий*». Все сказанное обобщается равенствами

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 = \max_P \min_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i = \\ = \min_Q \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0, \quad (3.15)$$

составляющими основу построения методов решений матричных игр.

Наблюдательного читателя наверняка смутит посыл «*выигрыш игрока, придерживающегося оптимальной стратегии, неизменен, независимо от того, что делает другой игрок...*». Тогда в чем смысл игры при бессилии второго игрока? Напоминает ситуацию при игре в преферанс, когда вистующие игроки, вскрывая карты, предлагают играющему исход игры, с которым последний чаще всего вынужден согласиться без игры. Поясним этот парадокс, раскрывающий суть теоремы Дж. Неймана о минимаксе «*на пальцах*», в прямом и переносном смысле [56]. Предположим, игрок **A** играет в следующую игру с игроком **B**. Каждый игрок одновременно поднимает 1 или 2 пальца.

Если сумма пальцев окажется нечетной, то игрок **A** платит игроку **B** сумму, равную сумме поднятых пальцев, если четной, то игрок **B** платит игроку **A** аналогичную сумму.

Матрица платежей такой игры будет, очевидно, выглядеть так:

Игрок **A**	Игрок **B**	
	1 палец	2 пальца
1 палец	minimax **2**	maximin **−3**
2 пальца	−3	4

Знак «−» означает проигрыш игрока **A** и выигрыш игрока **B**. На первый взгляд, игра справедлива, ведь сумма платежей равна $2 + (-3) + (-3) + 4 = 0$. Но седловая точка отсутствует, так как $\max\min = -3 \neq \min\max = 2$. Будем искать равновесие в смешанных стратегиях (по Нэшу, оно там должно быть обязательно). Смешанная стратегия игрока **A** есть $P\{p_1, p_2\}$, где p_1 — вероятность того, что игрок **A** поднимет 1 палец, p_2 — вероятность того, что он поднимет 2 пальца (очевидно, $p_2 = 1 - p_1$). Аналогично $Q\{q_1, q_2\}$ — q_1, q_2 — вероятности того, что игрок **B** поднимет 1 или 2 пальца соответственно. Так как игроки принимают решения независимо друг от друга, сумма S, которую выплатит в среднем игрок **B** игроку **A**, если он применит свою оптимальную стратегию, будет равна (см. матрицу)

$$S = 2p_1q_1 - 3p_1q_2 - 3p_2q_1 + 4p_2q_2. \tag{3.16}$$

В нашем случае, если игрок **B** поднимает 1 палец ($q_1 = 1$, $q_2 = 0$), $S(1) = 2p_1 - 3p_2$, если два пальца ($q_1 = 0$, $q_2 = 1$), то $S(2) = -3p_1 + 4p_2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$S(1) \cdot q_1 + S(2) \cdot q_2 = 2p_1q_1 - 3p_2q_1 - 3p_1q_2 + 4p_2q_2 = S.$$

Поскольку q_1 и q_2 не могут быть одновременно равны 0, то $S = S(1) = S(2)$ или

$$2p_1 - 3p_2 = -3p_1 + 4p_2,$$

$$5p_1 = 7p_2 \quad \text{или} \quad 5p_1 = 7 \cdot (1 - p_1) = 7 - 7p_1,$$

откуда $12p_1 = 7$, $p_1^0 = \frac{7}{12}$, $p_2^0 = \frac{5}{12}$ и $S = 2 \cdot \frac{7}{12} - 3 \cdot \left(1 - \frac{7}{12}\right) = -\frac{1}{12}$.

По аналогии для игрока **B** имеем $2q_1 - 3q_2 = -3q_1 + 4q_2$, откуда $q_1^0 = \dfrac{7}{12}$, $q_2^0 = \dfrac{5}{12}$. В чистых стратегиях игра не является справедливой, и оптимальная смешанная стратегия игроков предписывает поднимать им один палец с вероятностью $\dfrac{7}{12}$. Выигрыш каждого игрока S при применении им оптимальной смешанной стратегии будет равен

$$\begin{aligned} S = 2p_1^0q_1^0 - 3p_1^0q_2^0 - 3p_2^0q_2^0 = 2p_1^0q_1^0 - 3p_1^0\left(1 - q_1^0\right) - \\ - 3\left(1 - p_1^0\right)q_1^0 + 4\left(1 - p_1^0\right)\cdot\left(1 - q_1^0\right) = \\ = 12p_1^0q_1^0 - 7p_1^0 - 7q_1^0 + 4. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Теперь самое замечательное (как фокусники говорят — следите за руками): если игрок **A** применяет свою оптимальную смешанную стратегию (то есть будет поднимать 1 палец с частотой $\dfrac{7}{12}$), то его выигрыш равен

$$\begin{aligned} S = 12p_1^0q_1^0 - 7_1^0 - 7q_1^0 + 4 = 12\cdot\frac{7}{12}\,q_1^0 - 7\cdot\frac{7}{12} - 7q_1^0 + 4 = \\ = 7q_1^0 - 7q_1^0\frac{1}{12} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Следовательно, средний выигрыш (проигрыш) игрока **A**, если он применяет свою оптимальную смешанную стратегию, не зависит от того, как будет действовать игрок **B** в пределах своих чистых стратегий (то есть не поднимет вдруг три пальца): его стратегия q_1 исчезает из выражения (3.17) для S. Таким образом, если один из игроков применит оптимальную смешанную стратегию, то другому игроку все равно как играть (в выражении (3.13) любая его стратегия исчезает). Это означает, что игрок **B** будет всегда выигрывать в среднем, если будет поднимать один палец с частотой $\dfrac{7}{12}$.

End keywords:

Матричная игра, платежная матрица, равновесие Нэша, дуополия Курно, седловая точка, минимакс, максимин, принцип минимакса (максимина), теорема Неймана о минимаксе, чистые и смешанные стратегии, активные стратегии.

3.2. Методы упрощения платежной матрицы

3.2.1. Принцип доминирования

Прежде чем приступать к решению матричной игры, следует проверить — нельзя ли облегчить задачу, упростив платежную матрицу игры. Одним из способов упрощения игры является поиск и исключение из платежной матрицы чистых стратегий, не вносящих вклада в оптимальные смешанные стратегии, то есть не влияющих на результат игры. Их можно отбросить без ущерба для решения задачи, тем самым уменьшив размерность матрицы. Такая операция снижения размерности матрицы называется **редуцированием** [57, 58]. Если в платежной матрице

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \end{array}$$

каждой из стратегий игрока **A** поставить в соответствие вектор-строку матрицы **A**, то стратегия A_i будет доминировать стратегию A_j при

$$a_{ik} \geqslant a_{jk} \quad \forall\, k \in [1, n], \tag{3.18}$$

а если каждой стратегии игрока **B** поставить в соответствие вектор-столбец матрицы **A**, то стратегия B_j будет доминировать стратегию B_i при

$$a_{ki} \geqslant a_{kj} \quad \forall\, k \in [1, m]. \tag{3.19}$$

Для читателя, не часто встречающегося в своей практике со знаками логических операций, поясним: запись $\forall\, k \in [1, n]$ читается следующим образом: «*Для всех значений* k, *принадлежащих интервалу величин от* 1 *до* n» (здесь знак $\forall$ — квантор всеобщности).

Выполнение условий (3.18) и (3.19) означает, что стратегии A_i и B_j не будут использоваться и соответствующие строка и столбец удаляются из платежной матрицы.

Строгое выполнение неравенств (3.18) и (3.19) соответствует строгому доминированию, в ином случае имеет место слабое доминирование. Порядок удаления из матрицы строк и столбцов при строгом доминировании не имеет значения, при слабом домировании порядок удаления влияет на конечный результат редуцирования матрицы.

Таким образом, из платежной матрицы **удаляются дублирующие стратегии**, а также (внимание!!!) **доминируемые строки** и **доминирующие столбцы**. Продемонстрируем использование отношений доминирования для редуцирования платежной матрицы на примере.

Пример 3.2

Редуцировать матрицу 4×5

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 11 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 11 \\ 4 & 3 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}$$

удалением доминируемых стратегий.

Так как $a_{i1} \leqslant a_{i3}$, $a_{i4} \leqslant a_{i2}$, $a_{i4} \leqslant a_{i5}$ $\forall\, i \in [1, 4]$, столбец 3 доминирует столбец 1, а столбцы 2 и 5 доминируют столбец 4. Следовательно, доминирующие столбцы 2, 3 и 5 могут быть удалены из матрицы, которая редуцируется до матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{1j} \geqslant a_{3j}$, $a_{1j} \geqslant a_{4j}$ $\forall\, j \in [1, 2]$, строка 1 слабо доминирует строку 3 и строго — строку 4, которые также могут быть удалены из матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_{i2} \leqslant a_{i1}$ $\forall\, i \in [1, 2]$, удаляется столбец B_1 как доминирующий столбец B_2,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и, наконец, удаляется строка 2, доминируемая строкой 1 — $\|a_{ij}\| = (4)$.

Таким образом, матрица размерности 4×5 редуцирована до матрицы 1×1, содержащей одну ячейку, соответствующую седловой точке.

3.2.2. Разбиение на подматрицы

Если платежная матрица **A** допускает разбиение горизонтальными и вертикальными линиями на подматрицы, в каждой из которых суммы элементов в строках равны между собой и суммы элементов в столбцах равны между собой, то это ее свойство может быть использовано для редуцирования исходной матрицы. Обозначим через $A^{\alpha,\alpha+1,\ldots,\alpha+k}_{\beta,\beta+1,\ldots,\beta+f}$ подматрицу, образованную $(k+1)$ строками с номерами $\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+k$ и $(f+1)$ столбцами с номерами $\beta, \beta+1, \ldots, \beta+f$. При $k=0$ или $f=0$ подматрица будет состоять из одной строки и нескольких столбцов ($k=0$, $f \neq 0$), из нескольких строк и одного столбца ($k \neq 0$, $f=0$) или из одной строки и одного столбца ($k=0$, $f=0$).

Подматрицы, расположенные по одной горизонтали, имеют одинаковые наборы верхних индексов, а подматрицы на одной вертикали — одинаковые наборы нижних индексов. Для подматриц $A^{\alpha,\alpha+1,\ldots,\alpha+k}_{\beta,\beta+1,\ldots,\beta+f}$, отвечающих сформулированным выше требованиям, справедливы следующие утверждения:

- для подматрицы, состоящей из единственной строки ($k=0$, $f \neq 0$), все элементы этой строки с номером α равны между собой;
- для подматрицы, состоящей из единственного столбца ($k \neq 0$, $f=0$), все элементы этого столбца с номером β равны между собой;
- если подматрица $A^{\alpha,\alpha+1,\ldots,\alpha+k}_{\beta,\beta+1,\ldots,\beta+f}$ квадратная (то есть число ее строк равно числу ее столбцов), то сумма элементов каждой строки равна сумме элементов каждого столбца.

Если чистые стратегии игроков **A** и **B**, пересечением которых образованы подматрицы, входят в оптимальные смешанные стратегии с положительными вероятностями, то эти вероятности равны между собой. Однако из того, что чистые стратегии, входят в смешанную стратегию с равными вероятностями, не следует, что эта смешанная стратегия будет оптимальной.

Пример 3.3 (заимствован из [49])

Редуцировать платежную матрицу $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & -3 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

разбиением на подматрицы и найти решение игры в смешанных стратегиях.

Разбиваем матрицу игры на подматрицы

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} -1 & 5 & -4 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 2 & -3 & -3 & -3 & 5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array},$$

где:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A_{12}^{123}, \qquad \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A_{345}^{123}, \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = A_{6}^{123},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = A_{12}^{4}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = A_{45}^{4}, \qquad \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = A_{6}^{4}.$$

Подматрица A_{12}^{123} расположена на пересечении первых трех строк и первых двух столбцов, сумма элементов каждой ее строки равна 4, а сумма элементов каждого столбца равна 6. Квадратная подматрица A_{345}^{123} расположена на 1, 2, 3-й строках и на 3, 4, 5-м столбцах. Сумма элементов каждой ее строки и каждого ее столбца равна 3. Подматрица A_{6}^{123} расположена на первых трех строках и на 6-м столбце; ее единственный столбец состоит из одинаковых элементов, равных 4. Подматрица A_{12}^{4} состоит из одной строки, каждый элемент которой равен 2. Подматрица A_{345}^{4} состоит из единственной строки, каждый элемент которой равен (-3). Подматрица A_{6}^{4} состоит из единственного элемента 5.

Объединяем стратегии B_1 и B_2 в смешанную стратегию $Q_{12} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right\}$, в которую стратегии B_1 и B_2 входят с равными вероятностями $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$. Аналогично объединяем стратегии B_3, B_4, B_5 в смешанную стратегию $Q_{345} = \left\{0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}$, в которую стратегии B_3, B_4, B_5 входят с равными вероятностями $q_3 = q_4 = q_5 = \frac{1}{3}$.

В результате исходная матрица редуцируется в матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Q_{12} & Q_{345} & Q_6 = B_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{2} a_{1j} \cdot Q_{12} & \sum\limits_{j=3}^{5} a_{1j} \cdot Q_{345} & a_{16} \\ \sum\limits_{j=1}^{2} a_{2j} \cdot Q_{12} & \sum\limits_{j=3}^{5} a_{2j} \cdot Q_{345} & a_{26} \\ \sum\limits_{j=1}^{2} a_{3j} \cdot Q_{12} & \sum\limits_{j=3}^{5} a_{3j} \cdot Q_{345} & a_{36} \\ \sum\limits_{j=1}^{2} a_{4j} \cdot Q_{12} & \sum\limits_{j=3}^{5} a_{4j} \cdot Q_{345} & a_{46} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

В условиях задачи вычисляем (см. исходную матрицу):

$$\sum_{j=1}^{2} a_{1j} \cdot Q_{12} = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{2j} \cdot Q_{12} = 5 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{3j} \cdot Q_{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{4j} \cdot Q_{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

$$\sum_{3=1}^{5} a_{1j} \cdot Q_{345} = (-4) \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

$$\sum_{3=1}^{5} a_{2j} \cdot Q_{345} = 5 \cdot \frac{1}{3} + (-3) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

$$\sum_{3=1}^{5} a_{3j} \cdot Q_{345} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

$$\sum_{3=1}^{5} a_{4j} \cdot Q_{345} = (-3) \cdot \frac{1}{3} + (-3) \cdot \frac{1}{3} + (-3) \cdot \frac{1}{3} = -3,$$

$$a_{16} = 4, \quad a_{26} = 4, \quad a_{36} = 4, \quad a_{46} = 5.$$

В результате получаем матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Q_{12} & Q_{345} & Q_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array},$$

из которой следует, что если игрок $\mathbf{B}$ использует стратегии Q_{12}, Q_{345}, Q_6, то стратегии A_1, A_2, A_3 являются дублирующими и две из них можно исключить. Отсюда следует, что стратегии A_1, A_2, A_3 игрока $\mathbf{A}$ можно объединить в одну смешанную стратегию $P^{123}\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}$, в которую стратегии A_1, A_2, A_3 входят с равными вероятностями $p_1 = p_2 = p_3 = \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, конечная матрица будет редуцирована до размера 2×3:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Q_{12} & Q_{345} & Q_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P^{123} \\ P^4 = A_4 \end{array}.$$

Так как $\max\min = 1 = \min\max$, редуцириованная матрица имеет седловую точку 1, поэтому смешанные стратегии P^{123} и Q_{345} являются оптимальными для исходной игры. Окончательно решением игры, заданной исходной платежной матрицей, в смешанных стратегиях будет

$$\widetilde{P}\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}, \quad \widetilde{Q}\left\{0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right\}, \quad \nu = 1.$$

3.2.3. Изоморфное преобразование матрицы

Изоморфное преобразование матрицы

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \end{array}$$

позволяет в ряде случаев изменить вид матрицы, сделав ее лучше обозримой. Изоморфным преобразованием матрицы игры называется перенумерация стратегий игрока **A** и (или) игрока **B**. Другими словами, каждой чистой стратегии A_i $(i = 1, \dots, m)$ игрока **A** ставится в соответствие его стратегия A_{k_i} $(k_i \in i = 1, 2, \dots, m)$ таким образом, что разным номерам i соответствуют разные номера k_i (при этом не исключается, что для некоторых номеров возможно равенство $i = k_i$). Таким образом, формируется взаимно однозначное отображение стратегий $A_i \to A_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, на себя, в результате которого столбец $\begin{pmatrix} A_1 \\ A \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix}$ преобразуется в столбец $\begin{pmatrix} A_{k_1} \\ A_{k_2} \\ \dots \\ A_{k_m} \end{pmatrix}$, сводящееся к перестановке строк исходной матрицы (k_i-я строка переставляется на i-е место, а при $k_i = i$ остается на своем месте).

Аналогично взаимнооднозначное отображение $B_j \to B_{d_j}$, $d_j = 1, 2, \dots, n$, преобразует строку $(B_1 \ \ B_2 \ \ \dots \ \ B_n)$ в строку $(B_{d_1 1} \ \ B_{d_2} \ \ \dots \ \ B_{d_n})$ перестановкой столбцов матрицы (столбец d_j переставляется на место j-го столбца, $j = 1, 2, \dots, n$). В конце концов, независимо от порядка преобразования столбцов или строк, матрица **A** изоморфно преобразуется в матрицу $\mathbf{A}'$ с элементами a'_{ij}:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B'_1 & B'_2 & \dots & B'_n \end{array} \\ \mathbf{A}' = & \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A'_1 \\ A'_2 \\ \dots \\ A'_m \end{array} \end{array}.$$

Матрица $\mathbf{A}'$ называется **образом матрицы A**, а матрица **A** называется **изоморфным прообразом** матрицы $\mathbf{A}'$.

При изоморфном преобразовании смешанные стратегии игрока **A** преобразуются в смешанные стратегии

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \to P'\,(p'_1, p', \ldots, p'_m) = (p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots, p_{k_m}),$$

а игрока **B** в смешанные стратегии

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_m) \to Q'\,(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n) = (q_{d_1}, p_{d_2}, \ldots, p_{d_n}).$$

Ситуация $\{P', Q'\}$ называется образом ситуации $\{P, Q\}$, а ситуация $\{P, Q\}$ называется прообразом ситуации $\{P', Q'\}$.

Изоморфизм перестановочных преобразований приводит к тому, что цена игры с матрицей $\mathbf{A}$ равна цене игры с матрицей $\mathbf{A}'$, образы и прообразы оптимальных стратегий матриц $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}$ остаются оптимальными. Подбором подходящей перестановки строк или столбцов может обеспечить лучшую обозримость матрицы игры, что упрощает ее решение.

Одним из таких изоморфных преобразований является зеркальное преобразование, при котором происходит следующее преобразование матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = -\mathbf{A}^\top = \mathbf{B}$. Очевидно, что матрица $\mathbf{B}$ совпадает с противоположной транспонированной матрицей $(-\mathbf{A}^\top)$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \end{array} \quad \mathbf{A}' \to \mathbf{B} = -\mathbf{A}^\top =$$

$$= \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cccc} B'_1 = -A_1^\top & B'_2 = -A_2^\top & \ldots & B'_m = -A_m^\top \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a'_{11} = b_{11} = -a_{11} & a_{12} = b_{12} = -a_{21} & \ldots & a_{1m} = b_{1m} = -a_{m1} \\ a'_{21} = b_1 = -a_{12} & a'_{22} = b_{22} = -a_{22} & \ldots & a'_{2m} = b_{2m} = -a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} = b_{n1} = -a_{1n} & a'_{n2} = b_{n2} = -a_n & \ldots & a'_{nm} = b_{nm} = -a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A'_1 = -B_1^\top \\ A'_2 = -B_2^\top \\ \ldots \\ A'_n = -B_n^\top \end{array} \end{array}.$$

Образы и прообразы оптимальных стратегий сохраняются при зеркальном изоморфном преобразовании, а цена игры при зеркальном изоморфизме меняет свой знак на обратный.

Пример 3.4 ([49])

а) Для платежной матрицы

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

применить изоморфное преобразование

$$\begin{aligned} &B_1 \to B_3 = B_{d_1} = B_1', \quad d_1 = 3, \\ &B_2 \to B_4 = B_{d_2} = B_2', \quad d_2 = 4, \\ &B_3 \to B_1 = B_{d_3} = B_3', \quad d_3 = 1, \\ &B_4 = B_2 = B_{d_4} = B_4', \quad d_4 = 2. \end{aligned}$$

Определить оптимальные смешанные стратегии изоморфного образа игры, если $P^0 = \{0{,}4; 0{,}6\}$, $Q^0 = \{0; 0; 0{,}6; 0{,}4\}$ — оптимальные стратегии прообраза.

б) Применить к платежной матрице игры зеркальное изоморфное преобразование и определить смешанные стратегии игроков и цену зеркально-преобразованной игры, если оптимальные смешанные стратегии и цена исходной игры равны $\nu = 2{,}2$.

Образ матрицы $\mathbf{A}$ при изоморфном преобразовании а) будет

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A}' = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1' & B_2' & B_3' & B_4' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1' \\ A_2' \end{array} \begin{array}{c} \\ = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_3 & B_4 & B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array},$$

где:

$$\begin{aligned} &A_1' = A_{k_1} = A_1, \qquad A_2' = A_{k_2} = A_2, \qquad B_1' = B_{d_1} = B_3, \\ &B_2' = B_{d_2} = B_4, \qquad B_3' = B_{d_3} = B_1, \qquad B_4' = B_{d_4} = B_2. \end{aligned}$$

Оптимальные смешанные стратегии прообраза игры $P^0 = \{0{,}4; 0{,}6\}$, $Q^0 = \{0; 0; 0{,}6; 0{,}4\}$ преобразуются в смешанные стратегии $(P^0)' = \{0{,}4; 0{,}6\}$, $(Q^0)' = \{0{,}6; 0{,}4; 0; 0\}$. Так как P^0, Q^0 являются оптимальными стратегиями в игре с исходной платежной матрицей $\mathbf{A}$, то стратегии $(P^0)'$, $(Q^0)'$ оптимальны в игре с матрицей $\mathbf{A}'$.

Зеркальным изоморфным образом матрицы **A** является матрица

$$\begin{array}{cc} B'_1 = -A_1^\top & B'_2 = -A_2^\top \end{array}$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} = -a_{11} = -2 & b_{12} = -a_{21} = -4 \\ b_{21} = -a_{12} = -3 & b_{22} = -a_{22} = -2 \\ b_{31} = -a_{13} = -1 & b_{32} = -a_{23} = -3 \\ b_{41} = -a_{14} = -4 & b_{42} = -a_{24} = -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A'_1 = -B_1^\top \\ A'_2 = -B_2^\top \\ A'_3 = -B_3^\top \\ A'_4 = -B_4^\top \end{array}.$$

Оптимальные смешанные стратегии $P^0 = \{0{,}4; 0{,}6\}$, $Q^0 = \{0; 0; 0{,}6; 0{,}4\}$ игроков **A** и **B** преобразуются в смешанные стратегии $(Q^0)' = \{0{,}6; 0{,}4; 0; 0\}$ игрока $\mathbf{B}'$ (бывшего игрока **A**) и $(P^0)' = \{0{,}4; 0{,}6\}$ игрока $\mathbf{A}'$ (бывшего игрока **B**).

Цена игры с матрицей **A** — $\nu = 2{,}2$. Следовательно, цена игры с матрицей **B** будет равна $\nu' = -2{,}2$.

3.2.4. Аффинное правило

Укажем еще на одно полезное преобразование матрицы — **аффинное правило** [60, 66]: стратегии игр с платежными матрицами игр **A** и **C**, элементы которых связаны соотношением

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} + \mu, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где λ — целое число, а μ — произвольное число, — имеют одинаковые равновесные ситуации (либо в чистых, либо в смешанных стратегиях), а их цены ν_C, ν_A связаны соотношением

$$\nu_C = \lambda \cdot \nu_A + \mu. \tag{3.20}$$

С помощью аффинного преобразования можно менять масштаб измерения выигрышей в игре. Если платежная матрица содержит дробные элементы, то аффинным преобразованием ее можно редуцировать к матрице с целыми элементами, для чего достаточно в качестве λ использовать общий знаменатель всех дробных элементов при $\mu = 0$.

Если матрица содержит большое количество равных элементов a, аффинным преобразованием $\lambda = 1$, $\mu = -a$ ее можно редуцировать к матрице с бо́льшим количеством нулей.

Если матрица содержит отрицательные элементы, то ее можно преобразовать в матрицу, содержащую положительные элементы, аффинным преобразованием, в котором $\lambda = 1$, а μ больше наибольшего модуля отрицательных элементов:

$\mu > \max\{|a_{ij}|: a_{ij} \leqslant 0\}$. Игру с ценой ν с помощью аффинного преобразования $\lambda = 1$, $\mu = -\nu$ можно привести к игре с нулевой ценой игры $\nu^0 = 0$ (игры с такой матрицей называются **справедливыми**).

Пример 3.5

С помощью аффинного правила редуцировать матрицу $\mathbf{A}$ в матрицу справедливой игры, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

В исходной матрице точка $a_{13} = 6$ является седловой, следовательно, цена игры равна $\nu_A = 6$.

Применяя аффинное правило $a'_{ij} = a_{ij} - 6$ при $\lambda = 1$, $\mu = -6$, приходим к справедливой матрице $\mathbf{A_C}$:

$$\mathbf{A_C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

для которой цена игры равна $\nu_{A_C} = 0$.

End keywords:

Принцип доминирования, разбиение на подматрицы, изоморфное преобразование матрицы, аффинное правило.

3.3. Методы решения матричных игр 2×2

3.3.1. Аналитический метод [60, 61]

Рассмотрим платежную матрицу 2×2 без седловой точки, где каждый игрок имеет по две стратегии,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Необходимо найти цену игры $\boldsymbol{\nu}$ и пару оптимальных смешанных стратегий $P^0\left\{p_1^0, p_2^0\right\}$; $Q^0\left\{q_1^0, q_2^0\right\}$. В соответствии с теоремой об активных стратегиях, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры, независимо от образа действий противника, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В игре 2×2 обе стратегии противника активны (иначе имела бы место седловая точка), следовательно, если игрок **A** придерживается своей оптимальной стратегии, то игрок **B**, не меняя выигрыша, может применить любую свою чистую стратегию. Цена игры $\boldsymbol{\nu}$ по определению есть математическое ожидание дискретной случайной величины — выигрыша игрока **A**. Предположим, что игрок **B** применяет свою чистую стратегию B_1, а игрок **A** — смешанную стратегию $P\{p_1, p_2\}$, то есть с вероятностью p_1 он получит выигрыш a_{11} и с вероятностью p_2 — выигрыш a_{21}. Находим средний выигрыш (цену игры) $a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 = \nu$. Для стратегии B_2 получаем по аналогии $a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 = \nu$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu. \end{cases} \tag{3.21}$$

Так как по определению $p_1 + p_2 = 1$, то из (3.21) следует

$$a_{11}p_1 + a_{21} \cdot (1 - p_1) = \nu = a_{12}p_1 + a_{22} \cdot (1 - p_1), \tag{3.22}$$

откуда

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$
$$\nu = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{3.23}$$

Если игрок **B** использует свою смешанную стратегию $Q\{q_1, q_2\}$, то игрок **A** может применить любую из своих чистых стратегий, тогда

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu = a_{21}q_1 + a_{22}q_2, \quad q_1 + q_2 = 1. \tag{3.24}$$

Отсюда

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_1 + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad q_2 = 1 - q_1. \tag{3.25}$$

Пример 3.6

Решить игру с платежной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\alpha = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} \min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2} a_{ij} = 2 \neq \beta = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} a_{ij} = 3$, игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, а цена игры $\alpha = 2 < \nu < \beta = 3$.

При $a_{11} = 1$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 2$, используя формулы (3.23) и (3.25), вычисляем решение игры:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-5}{1+2-3-5} = \frac{3}{5}, \\ p_2 &= 1 - p_1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \\ \nu &= \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1\cdot 2 - 5\cdot 3}{1+2-3-5} = \frac{13}{5}, \\ q_1 &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-3}{1+2-3-5} = \frac{1}{5}, \\ q_2 &= 1 - q_1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Ответ: решение игры $P\left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}$, $Q\left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, $\nu = \frac{13}{5}$. Следовательно, если игрок $\mathbf{A}$ будет применять свою чистую стратегию A_1 с вероятностью $p = \frac{3}{5} = 0{,}6$, а стратегию A_2 с вероятностью $p = \frac{2}{5} = 0{,}4$, то его средний выигрыш будет не менее $\nu = \frac{13}{5} = 2{,}6$. По аналогии, если игрок $\mathbf{B}$ применит свою чистую стратегию B_1 с вероятностью $q = \frac{1}{5} = 0{,}2$, а стратегию B_2 с вероятностью $q = \frac{4}{5} = 0{,}8$, то его средний проигрыш не превысит $\nu = \frac{13}{5} = 2{,}6$.

3.3.2. Метод, основанный на равновесии Нэша

Точка равновесия Нэша определяется координатами максимума математического ожидания выигрыша игрока $\mathbf{A}$. Предположим, что в игре с матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ 1-p \end{array}$$

игроки реализуют свои смешанные стратегии $P\{p, 1-p\}$, $Q\{q, 1-q\}$. Очевидно, что математическое ожидание выигрыша игрока **A** равно

$$\begin{aligned} M(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot p \cdot q + a_{21} \cdot (1-p) \cdot q + \\ + a_{12} \cdot p \cdot (1-q) + a_{22} \cdot (1-p) \cdot (1-q). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Тогда, по определению, с учетом (3.26) координаты точки Нэша являются решением уравнений [60]

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(\mathbf{A})}{\partial p} = (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}) \cdot q + a_{12} - a_{22} = 0, \\ q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}, \\ \frac{\partial M(\mathbf{A})}{\partial q} = (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}) \cdot p + a_{21} - a_{22} = 0, \\ p = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Убеждаемся, что решение уравнений (3.27) приводит к результатам (3.23) и (3.25), полученным ранее аналитическим способом.

Пример 3.7

В условиях примера 3.6 решить игру с помощью понятия равновесия Нэша.

Из (3.27) находим координаты точки Нэша $p_1 = \dfrac{3}{5}$, $p_2 = \dfrac{2}{5}$, $q_1 = \dfrac{1}{5}$, $q_2 = \dfrac{4}{5}$ и цену игры из (3.26):

$$\begin{aligned} \nu = pq + 3p(1-q) + 5q(1-p) + 2(1-p)(1-q) = \\ = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{65}{25} = \frac{13}{5}. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, результат совпал с ответом примера 3.6.

3.3.3. Графический метод [55, 60, 61, 62]

Рассмотрим платежную матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array}. \end{array}$$

Будем полагать, что решение в чистых стратегиях отсутствует (седловой точки нет). Предположим, игрок **A** выбрал свою смешанную стратегию $P\{p_1, p_2\}$, то есть он с вероятностью p_1 будет использовать стратегию A_1, а с вероятностью p_2 — стратегию A_2, а игрок **B** выбрал свою чистую стратегию B_i. В этом случае его средний выигрыш определяется математическим ожиданием (не забывая, что $p_1 + p_2 = 1$)

$$\nu(B_i) = a_{1i} \cdot p_1 + a_{2i} \cdot p_2 = a_{1i} + (a_{2i} - a_{1i}) \cdot p_2, \quad i = 1, 2. \quad (3.28)$$

Очевидно, что каждому значению i соответствует прямая линия в прямоугольной системе координат. Такая система координат приведена на рис. 3.4, на котором: A_1A_2 — единичный отрезок на абсциссе p, левый конец отрезка соответствует $p = 0$ (точка A_1), правый — $p = 1$ (точка A_2). Остальные точки отрезка A_1A_2 — смешанные стратегии игрока **A** (отрезок $A_1C_A = p_2$, отрезок $C_AA_2 = p_1$). В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляры к отрезку A_1A_2, обозначив их 1 и 2 соответственно. На ординате 1 будем отмечать выигрыши игрока **B**,

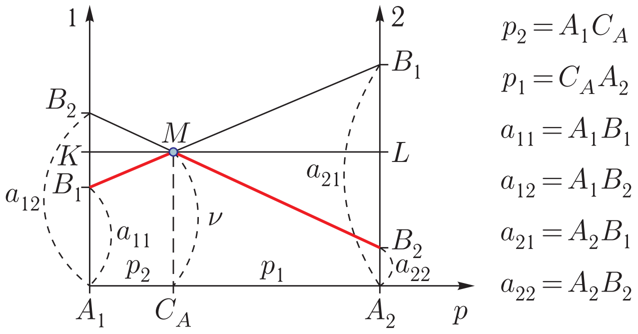


Рис. 3.4. Графическое решение матричной игры 2×2

когда игрок **A** выбирает стратегию A_1, а на ординате 2 — когда игрок **A** выбирает стратегию A_2.

Предположим, игрок **B** применил стратегию B_1, тогда из (3.28) следует

$$\nu(B_1) = a_{11} + (a_{21} - a_{11}) \cdot p_2. \tag{3.29}$$

При стратегии A_1 игрока **A**, $p = 0$ и выигрыш равен $\nu = a_{11}$, а при стратегии A_2, $p = 1$ и $\nu = a_{22}$. Отложив эти точки на осях *1* — $a_1 1(B_1)$ и *2* — $a_{21}(B_1)$, соответственно, проведем прямую B_1–B_1. Эта прямая будет образом стратегии B_1 игрока **B**. Аналогично строим образ стратегии B_2, откладывая на осях *1* и *2* значения $a_{12}(B_2)$ и $a_{22}(B_2)$ соответственно. Средний выигрыш — цена игры $\boldsymbol{\nu}$ — при смешанной стратегии $P\{p_1, p_2\}$ равен ординате точки M, определяемой точкой пересечения прямых B_1–B_1 и B_2–B_2.

Абсцисса точки M, равная C_A, определит оптимальную смешанную стратегию игрока **A**: $A_1C_A = p_2$, а отрезок $C_AA_2 = p_1$. Для определения оптимальной смешанной стратегии игрока **B** проводим прямую K–L через точку M параллельно оси p. Тогда

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{KB_2}{KB_2 + KB_1} = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1}, \\ q_2 &= 1 - q_1 = \frac{KB_1}{KB_2 + KB_1} = \frac{LB_1}{LB_2 + LB_1}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Решение игры в терминах отрезков рис. 3.4 будет

$$P\left(\frac{A_1C_A}{A_1A_2}, \frac{C_AA_2}{A_1A_2}\right), Q\left(\frac{LB_2}{B_1B_2}, \frac{LB_1}{B_1B_2}\right),\ \nu = MC_A,$$
$$\left(\frac{A_1C_A}{A_1A_2} + \frac{C_AA_2}{A_1A_2} = 1, \frac{LB_2}{B_1B_2} + \frac{LB_1}{B_1B_2} = 1\right).$$

Графический метод уступает по точности аналитическому методу, но более нагляден. Отметим несколько особенностей, возникающих при графической интерпретации матричной игры 2×2. Например, выбрав смешанную стратегию $p(0, 1)$, игрок **A** играет свою чистую стратегию A_2, следовательно, и игрок **B** будет играть только свою чистую стратегию B_2. Цена игры в такой ситуации графически определяется ординатой точки $\mathbf{B}_2$ (рис. 3.5).

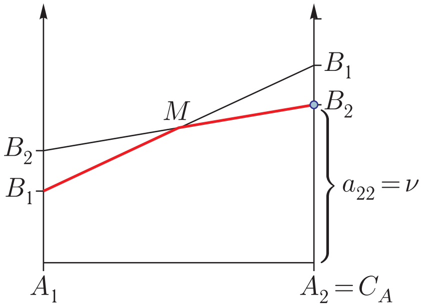


Рис. 3.5. Решение игры 2×2 в чистых стратегиях $p(0, 1)$

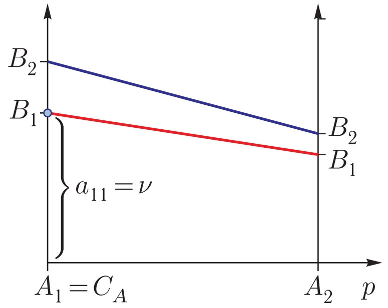


Рис. 3.6. Решение игры 2×2 в чистых стратегиях $p(1, 0)$

По аналогии при смешанной стратегии $P\{1, 0\}$ игрока **A** цена игры будет равна ординате точки B_1 (рис. 3.6).

End keywords:

Методы решения матричной игры 2×2: аналитический, равновесия Нэша, графический.

3.4. Методы решения матричных игр $m \times 2$ и $2 \times n$

3.4.1. Графическая интерпретация игры $2 \times n$ [55, 60, 61]

Платежная матрица игры $2 \times n$ имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array} . \qquad (3.31)$$

У игрока **A** две чистых стратегии, а у игрока **B** их n. Поступая по аналогии с предыдущей задачей, отображаем n прямыми n стратегий игрока **B** подобно задаче 2×2 (рис. 3.7). Определяем верхнюю точку M нижней границы пересекающихся прямых B_i. Ординатой этой точки, как и ранее, определяется цена игры — $\boldsymbol{\nu}$, а абсциссой оптимальная смешанная стратегия игрока **A** — (p_2, p_1).

Существенное отличие задачи $2 \times n$ от задачи 2×2, в которой решение определяли все возможные стратегии игроков (их было только 2): в нашем случае следует выделить из всего множества n стратегий игрока **B** только те две, которые определяют решение игры (точку пересечения). Эти стратегии (в нашем случае B_5 и B_2), выделенные красным цветом на рис. 3.7, активны, остальные являются пассивными, то есть не участвующими в игре (вероятность их применения $q_1 = q_3 = q_4 = 0$). Далее решаем игру 2×2, игнорируя остальные $(n-2)$ стратегии игрока **B**. Решение задачи $2 \times n$, показанное на рис. 3.7, записывается как $P\{p_1, p_2\}$, $Q\{0, q_2, 0, 0, q_5\}$, что указывает на использование только двух из пяти активных стратегий у игрока **B**: B_2 и B_5.

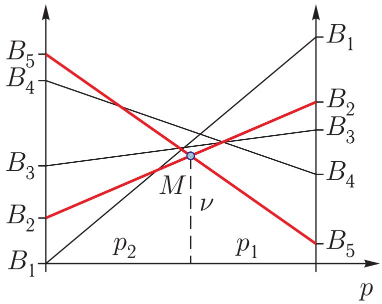


Рис. 3.7. Графическое решение игры $2 \times n$

Рассмотрим крайние случаи, возникающие в игре $2 \times n$:

- верхняя точка нижней границы пересечения прямых B_1–$B_1, \ldots, B_n$–B_n с координатами $(0, \nu)$ находится на оси, соответствующей чистой стратегии игрока A_1. В этом случае игрок **B** должен применять свою чистую стратегию, отображаемую прямой с наибольшим отрицательным наклоном (рис. 3.8);

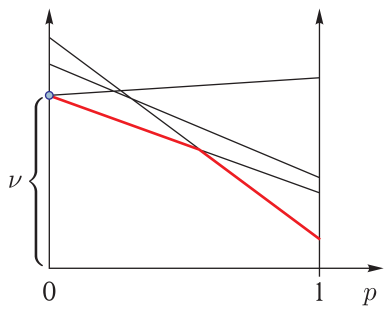


Рис. 3.8. Решение игры $2 \times n$
(игрок **A** применяет чистую стратегию A_1)

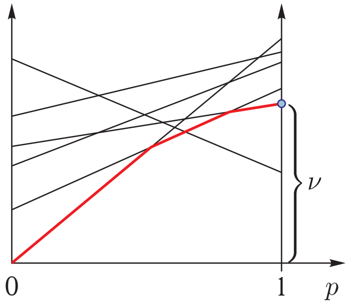


Рис. 3.9. Решение игры $2 \times n$
(игрок **A** применяет чистую стратегию A_2)

- верхняя точка нижней границы пересечения прямых B_1–$B_1, \ldots, B_n$–B_n с координатами $(1, \nu)$ находится на оси, соответствующий чистой стратегии игрока A_2. В таком случае игрок **B** должен применять свою чистую стратегию, отображаемую прямой с наименьшим положительным наклоном (рис. 3.9);
- нижняя граница пересечения прямых B_1–$B_1, \ldots, B_n$–B_n имеет горизонтальный участок, точка пересечения представлена их множеством на отрезке MM' (рис. 3.10), ординаты которых равны $\boldsymbol{\nu}$. В этом случае игрок **A** может применять множество чистых стратегий $P\{p_1, p_2\}$, где $p_2 \in [p_2', p_2'']$, $p_2 = 1 - p_1$.

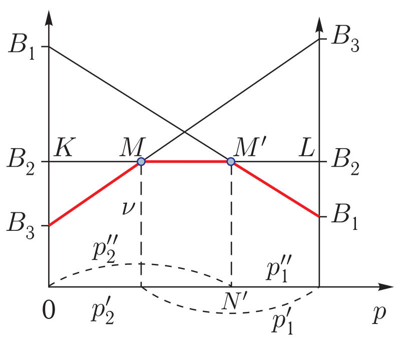


Рис. 3.10. Решение игры $2 \times n$
(игрок **B** применяет чистую стратегию B_2)

Решение для игрока **B** определяется по аналогии с задачей для матрицы 2×2 в точках пересечения M и M'. Например, в точке M пересекаются прямые B_3–B_3 и B_2–B_2. Тогда, учитывая, что отрезок $LB_2 = 0$, имеем в соответствии с (3.30)

$$q_3 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_3} = 0, \quad q_2 = 1 - q_1 = 1.$$

По аналогии для точки M', в которой пересекаются прямые стратегий B_1–B_1 и B_2–B_2, имеем ($LB_2 = 0$)

$$q_1 = \frac{LB_2}{LB_2 + LB_1} = 0, \quad q_2 = 1 - q_1 = 1.$$

Полученный результат указывает на одно существенное обстоятельство: горизонтальный участок MM' соответствует чистой стратегии B_2 игрока **B**.

3.4.2. Графическая интерпретация игры $m \times 2$ [55, 60, 61]

Рассматривается платежная матрица двух игроков, из которых игрок **A** имеет m чистых стратегий, а игрок **B** — две стратегии

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ q_{21} & a_{12} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Отобразим графически все m стратегий игрока **A** прямыми, так же, как при решении задачи $2 \times n$ для игрока **B** (рис. 3.6). Ордината нижней точки M верхней границы пересекающихся прямых равна цене игры $\boldsymbol{\nu}$, а абсцисса — оптимальная смешанная стратегия игрока **A** ($A_1C_A = q_2$, $C_AA_2 = q_1$).

Если в задаче 2×2 решение определяли все возможные стратегии игроков (их было только 2), в нашем случае следует выделить из всего множества m стратегий игрока **A** только те две, которые определяют решение игры (точку пересечения). Эти стратегии A_1 и A_3, выделенные красным цветом на рис. 3.11, являются активными, остальные (A_2–A_4) пассивными, то есть не участвующими в игре (вероятность их применения равна 0). Далее решаем игровую задачу 2×2, игнорируя остальные $(m-2)$ стратегии игрока **A**.

Решение $P\{p_1, 0, p_3, 0\}$, $Q\{q_1, q_2\}$ задачи $2 \times m$ указывает на наличие только двух активных стратегий у игрока **A**: A_1 и A_3. В крайних случаях определение оптимальных значений страте-

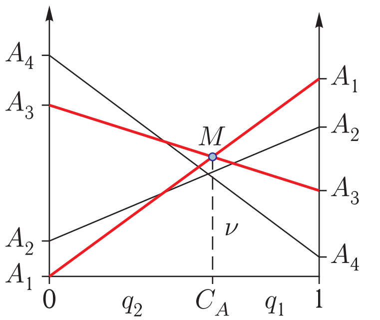


Рис. 3.11. Геометрическая интерпретация игры $m \times 2$

гии игрока **A** проводится по аналогии с тем, как в игре $2 \times n$ для игрока **B**.

3.5. Методы решения матричных игр $n \times n$

3.5.1. Метод Лагранжа [63–66]

Рассматривается квадратная платежная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Предполагается, игра не имеет седловой точки и ее матрица предварительно редуцирована (то есть удалены доминируемые строки и доминирующие столбцы). Игрок **A** использует свои смешанные стратегии с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а игрок **B** с вероятностями $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Цена игры при использовании игроками своих оптимальных смешанных стратегий определяется математическим ожиданием выигрыша игрока **A**

$$\nu = M(A) = \sum_{j=1}^{n} q_j^0 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot p_i^0. \tag{3.32}$$

Математическое ожидание выигрыша игрока **B** также равно $\boldsymbol{\nu}$.

Используя элементы вариационного вычисления, будем решать игру методом Лагранжа [62, 63], применяя вспомогательные функции f_a и f_b,

$$\begin{aligned} f_a &= \nu + \lambda_a \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1 \right), \\ f_b &= -\nu + \lambda_b \left(\sum_{j=1}^{n} q_j - 1 \right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Точка равновесия Нэша определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_a}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \dfrac{\partial f_b}{\partial \lambda_b} = 0, \\ \dfrac{\partial f_b}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \dfrac{\partial f_a}{\partial \lambda_a} = 0, \end{cases} \tag{3.34}$$

из решения которой находятся оптимальные стратегии. Подстановка вычисленных смешанных стратегий в выражение для цены игры определяет величину платежа, который должен будет получить игрок **A** от игрока **B**.

Пример 3.8

Решить методом Лагранжа игру с платежной матрицей 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}.$$

Положим, что игроки используют свои смешанные стратегии

$$P\{p_1, p_2, p_3\}, \ \ Q\{q_1, q_2, q_3\}.$$

Математическое ожидание выигрыша игрока **A** будет

$$\begin{aligned} \nu = {} & p_1 q_1 + 2p_2 q_1 + 2p_3 q_1 + 3p_1 q_2 + 2p_2 q_2 + \\ & + p_3 q_2 + 4p_1 q_3 + p_2 q_3 + 6p_3 q_3 = \\ & = q_1(p_1 + 2p_2 + 2p_3) + q_2(3p_1 + 2p_2 + p_3) + \\ & + q_3(4p_1 + p_2 + 6p_3) = \\ & = p_1(q_1 + 3q_2 + 4q_3) + p_2(2q_1 + 2q_2 + q_3) + \\ & + p_3(2q_1 + q_2 + 6q_3). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Выпишем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} f_a &= \nu + \lambda_a \cdot (p_1 + p_2 + p_3 - 1), \\ f_b &= -\nu + \lambda_b \cdot (q_1 + q_2 + q_3 - 1). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Система уравнений для определения точки равновесия Нэша будет

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_a}{\partial p_1} = q_1 + 3q_2 + 4q_3 + \lambda_a = 0, \\ \dfrac{\partial f_a}{\partial p_2} = 2q_1 + 2q_2 + q_3 + \lambda_a = 0, \\ \dfrac{\partial f_a}{\partial p_3} = 2q_1 + q_2 + 6q_3 + \lambda_a = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_b}{\partial q_1} = -p_1 - 2p_2 - 2p_3 + \lambda_b = 0, \\ \dfrac{\partial f_b}{\partial q_2} = -3p_1 - 2p_2 - p_3 + \lambda_b = 0, \\ \dfrac{\partial f_b}{\partial q_3} = -4p_1 - p_2 - 6p_3 + \lambda_b = 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Имеем две системы из 3 уравнений, в каждом из которых по 4 неизвестных p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, λ_a, λ_b. Вычитая из второго уравнения первое, а затем из второго третье и дополнив очевидным равенством $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, приходим к системе

$$\begin{cases} q_1 - q_2 - 3q_3 = 0, \\ q_2 - 5q_3 = 0, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1. \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения системы, получаем $q_1 - 8q_3 = 0$, откуда $q_1 = 8q_3$. Из уравнения 2 системы $q_2 - 5q_3 = 0$ следует, что $q_2 = 5q_3$. Тогда из уравнения 3 получаем

$$q_1 + q_2 + q_3 = 8q_3 + 5q_3 + q_3 = 14q_3 = 1$$

$$\text{и} \quad q_3 = \frac{1}{14}, \quad q_1 = \frac{8}{14}, \quad q_2 = \frac{5}{14}.$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока $\mathbf{B}$ —

$$Q^0 \left\{ q_1^0 = \frac{8}{14},\ q_2^0 = \frac{5}{14},\ q_3^0 = \frac{1}{14} \right\}.$$

Аналогично вычисляем оптимальную смешанную стратегию игрока **A**, используя вторую систему, в которой вычитаем из первого уравнения второе, а затем из второго третье, и приходим к системе

$$\begin{cases} 2p_1 - p_3 = 0, \\ p_1 - p_2 + 5p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует $2p_1 = p_3$. Сложив уравнения 2 и 3, получаем $2p_1 + 6p_3 = 1$, откуда $2p_3 = 1 - 6p_3$ и $2p_1 = p_3 = 1 - 6p_3$; $p_3 = \frac{1}{7} = \frac{2}{14}$. Далее имеем

$$p_1 = \frac{p_3}{2} = \frac{2}{14 \cdot 2} = \frac{1}{14}, \quad p_2 = 1 - p_1 - p_3 = 1 - \frac{1}{14} - \frac{2}{14} = \frac{11}{14},$$

отсюда оптимальной смешанной стратегией игрока **A** будет

$$P^0 \left\{ p_1^0 = \frac{1}{14},\ p_2^0 = \frac{11}{14},\ p_3^0 = \frac{2}{14} \right\}.$$

Подставив значения p и q в выражение для цены игры (3.31), получим

$$\nu = \frac{8}{14} \cdot \left(\frac{1}{14} + 2 \cdot \frac{11}{14} + 2 \cdot \frac{2}{14} \right) + \frac{5}{14} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{14} + 2 \cdot \frac{11}{14} + \frac{2}{14} \right) + \\ + \frac{1}{14} \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{14} + \frac{11}{14} + 6 \cdot \frac{2}{14} \right) = \frac{27}{14}.$$

Таким образом, решением игры будет

$$P^0 \left\{ \frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14} \right\}, \quad Q^0 \left\{ \frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14} \right\}, \quad \nu = \frac{27}{14}.$$

Иными словами, игрок **A** должен в 7 % случаев применять стратегию A_1, в 79 % — стратегию A_2, в 14 % — стратегию A_3; игрок **B** в 57 % случаев должен применять стратегию B_1, в 36 % — стратегию B_2, в 7 % — стратегию B_3. Средняя цена игры равна $\nu = \frac{27}{14} = 1{,}93$.

3.5.2. Метод Крамера [64, 65]

Рассматривается матрица игры $n \times n$, не имеющая седловых точек и освобожденная от доминированных стратегий:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Игрок **A** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **B** — свои чистые стратегии. Так как цена игры — математическое ожидание выигрыша игрока **A**, будем искать математическое ожидание дискретной случайной величины выигрыша игрока **A**:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n = \nu, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n = \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n = \nu; \end{cases}$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{3.38}$$

Применяя правило Крамера, вычисляем неизвестные

$$p_1 = \frac{\nu \cdot \Delta a_1}{\Delta a}, \quad p_2 = \frac{\nu \cdot \Delta a_2}{\Delta a}, \quad \ldots, \quad p_i = \frac{\nu \cdot \Delta a_i}{\Delta a}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\nu \cdot \Delta a_n}{\Delta a}, \tag{3.39}$$

где

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1i} & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & a_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.40}$$

и

$$\begin{vmatrix} \nu & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ \nu & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & a_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ 1 & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & a_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \Delta a_1,$$

....

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1i} & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & a_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & 1 & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & 1 & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1i} & a_{2i} & \ldots & 1 & \ldots & a_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & 1 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \Delta a_j,$$

....

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & \nu \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & \nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1i} & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & \nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & \nu \end{vmatrix} = \nu \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1i} & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \nu \cdot \Delta a_n. \tag{3.41}$$

Из условия нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ следует

$$\frac{\nu \cdot (\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n)}{\Delta a} = 1.$$

Тогда

$$\nu = \frac{\Delta a}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}. \tag{3.42}$$

Комбинируя формулы (3.37), (3.38) и (3.39), вычисляем смешанную стратегию игрока **A**:

$$p_1 = \frac{\Delta a_1}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}; \quad p_2 = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}; \\ \ldots; \quad p_n = \frac{\Delta a_n}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}. \tag{3.43}$$

Аналогично ищем оптимальную стратегию игрока **B**, составляя систему

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + q_{1n}q_n = \nu, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n = \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \ldots + a_{nn}q_n = \nu. \end{cases} \tag{3.44}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

и вводя обозначения

$$\begin{vmatrix} \nu & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \nu & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{n1} \\ 1 & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & a_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \Delta\widetilde{a}_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \nu & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \nu & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \nu & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \nu & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & 1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & 1 & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{2} & \ldots & 1 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \nu \cdot \Delta\widetilde{a}_j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & \nu \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & \nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & \nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & \nu \end{vmatrix} = \nu \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \nu \cdot \Delta\widetilde{a}_n \tag{3.45}$$

и

$$\Delta\widetilde{a} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.46}$$

Применяя правило Крамера, с учетом (3.45) и (3.46) получаем неизвестные

$$\begin{aligned} &q_1 = \frac{\nu \cdot \Delta\widetilde{a}_1}{\Delta\widetilde{a}}, \quad q_2 = \frac{\nu \cdot \Delta\widetilde{a}_2}{\Delta\widetilde{a}}, \quad \ldots, \\ &q_i = \frac{\nu \cdot \Delta\widetilde{a}_j}{\Delta\widetilde{a}}, \quad \ldots, \quad q_n = \frac{\nu \cdot \Delta\widetilde{a}_n}{\Delta\widetilde{a}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Из условия нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1$ следует

$$\frac{\nu \cdot (\Delta\widetilde{a}_1 + \Delta\widetilde{a}_2 + \ldots + \Delta\widetilde{a}_n)}{\Delta a} = 1,$$

откуда

$$\nu = \frac{\Delta\widetilde{a}}{\Delta\widetilde{a}_1 + \Delta\widetilde{a}_2 + \ldots + \Delta\widetilde{a}_n}. \tag{3.48}$$

Комбинируя формулы (3.47) и (3.48), вычисляем смешанную стратегию игрока $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} &q_1 = \frac{\Delta\widetilde{a}_1}{\Delta\widetilde{a}_1 + \Delta\widetilde{a}_2 + \ldots + \widetilde{\Delta}a_n}; \quad q_2 = \frac{\Delta\widetilde{a}_2}{\Delta\widetilde{a}_1 + \Delta\widetilde{a}_2 + \ldots + \widetilde{\Delta}a_n}; \\ &\ldots; \quad q_n = \frac{\Delta\widetilde{a}_n}{\Delta\widetilde{a}_1 + \Delta\widetilde{a}_2 + \ldots + \widetilde{\Delta}a_n}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Пример 3.9

Решить методом Крамера игру, представленную платежной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители (3.40), (3.41):

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 1) - 2 \cdot (3 \cdot 6 - 4 \cdot 1) + \\ + 2 \cdot (3 \cdot 1 - 4 \cdot 2) = 11 - 28 - 10 = -27,$$

$$\Delta a_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 1) - 2(1 \cdot 6 - 1 \cdot 1) + \\ + 2 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 11 - 10 - 2 = -1,$$

$$\Delta a_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 6 - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (3 \cdot 6 - 4 \cdot 1) +$$
$$+ 2 \cdot (3 \cdot 1 - 4 \cdot 1) = 5 - 14 - 2 = -11,$$
$$\Delta a_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 2 \cdot (3 \cdot 1 - 4 \cdot 1) +$$
$$+ 1 \cdot (3 \cdot 1 - 4 \cdot 2) = 1 + 2 - 5 = -2.$$

Далее вычисляем $\Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 = -1 - 11 - 2 = -14$ и по формулам (3.39), (3.42), (3.43) находим цену игры и оптимальную смешанную стратегию игрока $\mathbf{A}$:

$$\nu = \frac{-27}{-14} = \frac{27}{14},\ p_1 = \frac{-1}{-14} = \frac{1}{14},\ p_2 = \frac{-11}{-14} = \frac{11}{14},\ p_3 = \frac{-2}{-14} = \frac{2}{14}.$$

Вычисляем по формулам (3.45)–(3.49) оптимальную смешанную стратегию игрока $\mathbf{B}$:

$$\Delta \widetilde{a}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 1) - 3 \cdot (1 \cdot 6 - 1 \cdot 1) +$$
$$+ 4 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 11 - 15 - 4 = -8,$$
$$\Delta \widetilde{a}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 6 - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot 6 - 2 \cdot 1) +$$
$$+ 4 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 5 - 10 - 0 = -5,$$
$$\Delta \widetilde{a}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) +$$
$$+ 1 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 1 - 0 - 2 = -1,$$
$$\Delta \widetilde{a}_1 + \Delta \widetilde{a}_2 + \Delta \widetilde{a}_3 = -8 - 5 - 1 = -14,$$
$$q_1 = \frac{-8}{-14} = \frac{8}{14}, \quad q_2 = \frac{-5}{-14} = \frac{5}{14}, \quad q_3 = \frac{-1}{-14} = \frac{1}{14}.$$

Запишем окончательное решение игры:

$$P\left\{\frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14}\right\}, \quad Q\left(\frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right); \quad \nu = \frac{7}{14}.$$

Как и следовало ожидать, ответ совпадает с ответом, полученным методом Лагранжа (см. задачу 3.8).

3.5.3. Метод обратной матрицы [65]

Метод позволяет находить решения игровых задач размерности $n \times n$, содержащих только активные стратегии. Поэтому предварительно нужно убедиться, что седловой точки нет и невыгодные стратегии доминированы.

Рассмотрим платежную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и стратегии игроков $P\{p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n\}$, $Q\{q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots \ldots, q_n\}$ с ценой игры ν. По аналогии с предыдущим разделом запишем систему уравнений игрока $\mathbf{A}$

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n = \nu, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n = \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n = \nu; \end{cases}$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

или в векторно-матричной форме

$$\mathbf{P} \times \mathbf{A} = \nu \cdot (\mathbf{E})_{1\times n}, \tag{3.50}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор-строка $(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$; $\mathbf{A}$ — платежная матрица; $(\mathbf{E})_{1\times n}$ — вектор размерности $1 \times n$, состоящий только из единиц.

Умножив обе части равенства (3.50) справа на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, получаем

$$\mathbf{P} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \nu \cdot (\mathbf{1})_{1\times n} \times \mathbf{A}^{-1}. \tag{3.51}$$

Читатель экономист-практик явно подзабыл основы матричного исчисления. Надеемся, ему поможет восполнить этот пробел небольшое приложение, помещенное в конце книги.

Так как по определению обратной матрицы $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$, то из (3.51) следует решение для вектора $\mathbf{P}^0$ оптимальной смешанной стратегии игрока $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{P}^0 = \nu \cdot (\mathbf{E})_{1\times n} \times \mathbf{A}^{-1}. \tag{3.52}$$

Рассмотрим новый вектор

$$\mathbf{P}^{0*} = \frac{1}{\nu} \cdot \mathbf{P}^0 = (\mathbf{E})_{1\times n} \times \mathbf{A}^{-1}. \tag{3.53}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}$; вычисляем цену игры

$$\nu = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i}. \tag{3.54}$$

Комбинируя (3.51) и (3.52), получаем оптимальную смешанную стратегию игрока $\mathbf{A}$

$$P^0 \left\{p_1^0, p_2^0, \ldots, p_i^0, \ldots, p_n^0\right\} = \nu \cdot \mathbf{P}^{0*} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i} \cdot \mathbf{P}^{0*}. \tag{3.55}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока $\mathbf{B}$ вычисляется по аналогии.

Поясним алгоритм решения игры $n \times n$ методом обратной матрицы на примере платежной матрицы примера 3.6.

Пример 3.10

> Ищется решение игры $n \times n$, представленной платежной матрицей
>
> $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$
>
> Алгоритм вычисления обратной матрицы приведен в приложении.

Вычислим определитель (*дискриминант*) матрицы $\|a_{ij}\|$:

$$\det \mathbf{A} = \Delta A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) +$$
$$+ a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$
$$= 1 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 6 - 2 \cdot 1) + 4 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$
$$= 11 - 30 - 8 = -27.$$

Транспонируем матрицу $\mathbf{A}$ (меняем местами строки и столбцы матрицы):

$$\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу алгебраических дополнений транспонированной матрицы $\mathbf{A}^\top$:

$$\operatorname{ad}\left(A^\top\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & -(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 1 \cdot 1 & -(3 \cdot 6 - 1 \cdot 4) & 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ -(2 \cdot 6 - 2 \cdot 1) & 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 & -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 4) \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) & 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -14 & -5 \\ -10 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{\det A}{\operatorname{ad}\left(A^{\top}\right)} = -\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -14 & -5 \\ -10 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{27} & \dfrac{14}{27} & \dfrac{5}{27} \\ \dfrac{10}{27} & \dfrac{2}{27} & -\dfrac{7}{27} \\ \dfrac{2}{27} & -\dfrac{5}{27} & \dfrac{4}{27} \end{pmatrix}.$$

По формуле (3.53) вычисляем вектор

$$\mathbf{P}^{0*} = (\mathbf{E})_{1\times n} \times \mathbf{A}^{-1} = (1 \quad 1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{27} & \dfrac{14}{27} & \dfrac{5}{27} \\ \dfrac{10}{27} & \dfrac{2}{27} & -\dfrac{7}{27} \\ \dfrac{2}{27} & -\dfrac{5}{27} & \dfrac{4}{27} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{27} + \frac{10}{27} + \frac{2}{27} \quad \frac{14}{27} + \frac{2}{27} - \frac{5}{27} \quad \frac{5}{27} - \frac{7}{27} + \frac{4}{27}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{27} \quad \frac{11}{27} \quad \frac{2}{27}\right),$$

элементами которого в соответствии с (3.54) являются величины

$$\widetilde{p}_1 = \frac{p_1}{\nu}, \quad \widetilde{p}_2 = \frac{p_2}{\nu}, \quad \widetilde{p}_3 = \frac{p_3}{\nu}.$$

Далее имеем $\sum\limits_{i=1}^{3} \widetilde{p}_i = \dfrac{1}{\nu} \cdot \sum\limits_{i=1}^{3} p_i = \dfrac{1}{\nu}$ и, следовательно, цена игры равна

$$\nu = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{3} \widetilde{p}_i} = \frac{1}{\dfrac{1}{27} + \dfrac{11}{27} + \dfrac{2}{27}} = \frac{27}{14}.$$

Окончательно вычисляем смешанную оптимальную стратегию игрока **A**:

$$P^0\left\{p_1, p_2, p_3\right\} = P^0\left\{\frac{\widetilde{p}_1}{\nu}, \frac{\widetilde{p}_2}{\nu}, \frac{\widetilde{p}_3}{\nu}\right\} =$$

$$= P^0\left\{\frac{1}{27} \cdot \frac{27}{14}, \frac{11}{27} \cdot \frac{27}{14}, \frac{2}{27} \cdot \frac{27}{14}\right\} = P^0\left\{\frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14}\right\}.$$

Аналогично смешанная оптимальная стратегия игрока $\mathbf{B}$ определяется произведением обратной матрицы A^{-1} на единичный вектор-столбец $(\mathbf{E})_{n\times 1}$

$$Q^0 = (\mathbf{E})_{n\times 1} \times \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{27} & \frac{14}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{2}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{4}{27} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot \left(= \frac{1}{27} + \frac{14}{27} + \frac{5}{27}\right) \\ 1 \cdot \left(\frac{10}{27} + \frac{2}{27} - \frac{7}{27}\right) \\ 1 \cdot \left(\frac{2}{27} - \frac{5}{27} + \frac{4}{27}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{5}{27} \\ \frac{1}{27} \end{pmatrix}.$$

Умножив элементы вектор-столбца $\begin{vmatrix} \frac{8}{27} \\ \frac{5}{27} \\ \frac{1}{27} \end{vmatrix}$ на $\nu = \frac{27}{14}$, по аналогии получим оптимальную смешанную стратегию игрока $\mathbf{B}$:

$$Q^0 \left\{ \frac{8}{27} \cdot \frac{27}{14}, \frac{5}{27} \cdot \frac{27}{14}, \frac{1}{27} \cdot \frac{27}{14} \right\} = \left\{ \frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14} \right\}.$$

Таким образом, решением игры будут оптимальные смешанные стратегии игроков и цена игры

$$P^0 \left\{ \frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14} \right\}, \quad Q^0 \left\{ \frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14} \right\}, \quad \nu = \frac{27}{14},$$

что совпадает с результатами, полученными методами Лагранжа и Крамера (примеры 3.8 и 3.9).

End keywords:

Графическая интерпретация матричных игр n × 2, m × 2, методы решения матричной игры n × n: Лагранжа, Крамера и обратной матрицы.

3.6. Методы решения матричных игр $m \times n$

3.6.1. Метод линейного программирования

Рассмотрим платежную матрицу $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Все элементы положительны (если это не так, то ситуация приводится к требуемой применением аффинного правила (см. 3.2.3)). Из теоремы о свойствах смешанных стратегий следует, что при любой чистой стратегии B_j игрока $\mathbf{B}$, $j = 1, 2, \dots, n$, оптимальная смешанная стратегия $P^0\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ игрока $\mathbf{A}$ обеспечивает ему средний выигрыш, не меньший ν, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i \geqslant \nu, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Вводя обозначения $x_i = \dfrac{p_i}{\nu}$, запишем

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\nu}, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Так как игрок $\mathbf{A}$ стремится максимально увеличить свой гарантированный выигрыш, отыскание решения матричной игры сводится к следующей задаче:

«*Необходимо найти неотрицательные величины* $x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_m$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \textit{при условии} \ \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min».$$

Применительно к игровой матричной задаче оптимальная смешанная стратегия $Q^0\left\{q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0\right\}$ игрока **B** при любой чистой стратегии игрока **A** обеспечивает ему средний проигрыш не более ν. Иными словами,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j \leqslant \nu, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad q_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

или, обозначив $y_j = \dfrac{q_j}{\nu}$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\nu}, \quad y_j \geqslant, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку игрок **B** стремится сделать свой средний гарантированный проигрыш минимальным, решение матричной игры сводится к задаче: «*Необходимо найти неотрицательные величины $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \geqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

такие, что их сумма максимальна $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \to \max$».

В такой формулировке поставленная задача являются классической задачей линейного программирования [67–72], впервые сформулированной отечественным математиком Леонидом Канторовичем (1912–1986). В 1938 г. к нему обратились представители фанерного треста с просьбой решить казалось бы простую задачу — составить оптимальный план загрузки 8 типов станков для выпуска продукции 5 видов в нужной пропорции. Неожиданно выяснилось, что решение такой на первый взгляд простой задачи классическими методами математического анализа требует решения большого количества систем линейных уравнений с двенадцатью неизвестными в двенадцати уравнениях.

Для решения такого рода задач Л. Канторовичу пришлось разработать новое научное направление — построение эффективных методов решения задач оптимизации линейных функций при линейных ограничениях, получившее впоследствии название линейное программирование. Это привело его в конечном счете, к Нобелевской премии (по экономике) за создание нового раздела математической оптимизации процессов планирования. В 1939 г. Л. В. Канторович опубликовал работу «*Математические методы организации и планирования производства*» [67], в которой сформулировал новый класс экстремальных задач с линейными ограничениями и разработал эффективный метод их решения. Таким образом, были заложены основы линейного программирования. Здесь термин «*программирование*» нужно понимать в смысле «*планирование*» (*один из переводов с англ. programming*). Позже Дж. Нейман [23] доказал, что решение любой матричной игры с положительной платежной матрицей равносильно двойственной задаче линейного программирования:

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i \to \min, & \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \to \max, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_i \geqslant, \quad i = 1, 2, \ldots, m, & y_j \geqslant, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{array} \tag{3.56}$$

При этом цена игры равна $\nu = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^0} = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^0}$, а оптимальные смешанные стратегии — $p_i^0 = \dfrac{x_i^0}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^0}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $q_j^0 = \dfrac{y_j^0}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^0}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

В 1950 г. талантливый американский математик Джордж Бернард Данциг (1914–2005) разработал эффективный метод решения задач линейного программирования — симплекс-метод [72]. Рассказывают, что он однажды опоздал на занятия по математике и принял записанные на доске уравнения за домашнее задание. Приложив усилия, он с ними справился. Позже выяснилось, что это были две нерешенные проблемы в статистике, над которыми ученые мужи корпели уже несколько лет.

Суть предложенного Данцигом симплекс-метода заключается в следующем. Допустимая совокупность решений любой задачи линейного программирования может быть представлена выпуклым многогранником с конечным числом вершин, в одной из которых находится единственное решение задачи (если оно имеется).

Симплекс-метод является алгоритмом перебора вершин многогранника решений задачи линейного программирования, обеспечивающим последовательное улучшение целевой функции при каждом переходе от вершины к вершине. Это вычислительная процедура последовательного решения системы линейных уравнений. Теоретически симплекс-алгоритм обеспечивает сходимость задачи линейного программирования к точному решению за конечное число итераций, зависящее от числа ограничений m (в грубом приближении число итераций находится в пределах $1,5, \ldots, 2m$).

Стартовое опорное базисное решение, удовлетворяющее принятой системе ограничений, последовательно улучшается путем перехода к новому базисному решению, до тех пор, пока не будет достигнуто экстремальное значение функции цели. Симплекс-алгоритм включает в себя выполнение последовательности следующих процедур:

- выражение базисных переменных и функции цели через небазисные переменные (под базисной переменной понимается переменная, входящая с коэффициентом 1 только в одно линейное уравнение), остальные переменные являются небазисными (свободными);
- определение небазисной (свободной) переменной, изменение значений которой улучшает значение целевой функции, и введение ее в базис;
- определение базисной переменной, выводимой из базиса;
- выражение базисных переменных и функции цели через новые небазисные (свободные) переменные и повторение следующего цикла.

Если значение небазисной (свободной) переменной не улучшает целевую функцию, последнее базисное решение признается оптимальным.

Поясним примером решение матричной игры $m \times n$ методом сведения к задаче линейного программирования.

Пример 3.11

Найти методом линейного программирования решение матричной игры 3×4 с платежной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2. \\ A_3 \end{array}$$

Все элементы матрицы положительны, доминированных строк и столбцов нет. Так как седловая точка отсутствует, решение будем искать в смешанных стратегиях

$$P^0\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \quad Q^0\{q_1, q_2, q_3\}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} q_j = 1.$$

Запишем для заданной матрицы системы неравенств

$$\begin{cases} 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 \leqslant \nu, \\ 3q_1 + 2q_2 + q_4 \leqslant \nu, \\ 2q_1 + q_2 + 3q_3 + 2q_4 \leqslant \nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2p_1 + 3p_2 + 2p_3 \geqslant \nu, \\ 3p_1 + 2p_2 + p_3 \geqslant \nu, \\ p_1 + 3p_3 \geqslant \nu, \\ 4p_1 + p_2 + 2p_3 \geqslant \nu. \end{cases} \tag{3.57}$$

Введем обозначения $x_i = \dfrac{p_i}{\nu}$ и $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{p_1}{\nu} + \dfrac{p_2}{\nu} + \dfrac{p_3}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}$. Стремление игрока $\mathbf{A}$ к максимальному среднему выигрышу (цене игры ν) эквивалентно $\dfrac{1}{\nu} \to \min$, что приводит к задаче линейного программирования на минимум: найти переменные x_i, при которых $F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ при выполнении системы ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant \nu, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant \nu, \\ x_1 + 3x_3 \geqslant \nu, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant \nu. \end{cases} \tag{3.58}$$

По аналогии обозначим $y_i = \frac{q_i}{\nu}$ и $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{q_1}{\nu} + \frac{q_2}{\nu} + \frac{q_3}{\nu} + \frac{q_4}{\nu} = \frac{1}{\nu}$. Стремление игрока **B** уменьшить свой проигрыш эквивалентно $\frac{1}{\nu} \to \max$, что приводит к задаче линейного программирования на максимум: найти переменные y_i, при которых $L = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max$ при системе ограничений

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 + 4y_4 \leqslant \nu, \\ 3y_1 + 2y_2 + y_4 \leqslant \nu, \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \leqslant \nu. \end{cases} \tag{3.59}$$

Таким образом, решение матричной игры сводится к решению пары взаимно двойственных задач линейного программирования на минимум при ограничениях (3.58) и на максимум при ограничениях (3.59). Решение одной задачи автоматически приводит к решению второй задачи двойственной пары.

Продемонстрируем применение симплекс-алгоритма для решения задачи линейного программирования для игры с заданной платежной матрицей с целевой функцией $F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$. Переформатируем задачу на минимум $F \to \min$ в задачу на максимум с целевой функцией $(-F) \to \max$, для чего умножим все свободные переменные x_1, x_2, x_3 на (-1). Далее приведем систему ограничений к каноническому виду путем преобразования неравенств (3.55) в уравнения, для чего в каждое неравенство вводим неотрицательные базисные переменные x_4, x_5, x_6, x_7 (по определению базисными переменными являются переменные, входящие с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 в остальные уравнения):

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -1, \\ -x_1 - 3x_3 + x_6 = -1, \\ -4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_7 = -1. \end{cases} \tag{3.60}$$

В уравнениях (3.60) переменные $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 1$ являются базисными, а переменные $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ — свободными. Получаем опорное базисное решение $X_0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = X_0(0, 0, 0, -1, -1, -1, -1)$ в системе ограничений (3.58). Значение целевой функции в этой точке равно $F(X_0) = 0$.

Формируем опорную симплекс-таблицу.

Таблица 3.2. Опорная симплекс-таблица

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СЧ
x_4	-2	-3	-2	1	0	0	0	-1
x_5	-3	-2	-1	0	1	0	0	-1
x_6	-1	0	-3	0	0	1	0	-1
x_7	-4	-1	-2	0	0	0	1	-1
$-F$	-1	-1	-1	0	0	0	0	
ОТ								

В таблице приняты обозначения: БП — базисные переменные, СЧ — свободные члены (правая часть системы уравнений (3.60)). В F-строке целевой функции коэффициенты при свободных членах записываются с противоположным знаком. Элемент F-строки таблицы, соответствующий столбцу свободных членов, не рассматривается.

Предварительно определяется ведущая строка опорной симплекс-таблицы, которой соответствует строка с наибольшим по модулю значением величины в столбце СЧ. В нашем случае они все равны (-1), поэтому в качестве ведущей может быть выбрана любая строка, например строка, соответствующая базисной переменной x_4 (выделяем ее желтым цветом), которую выводим из базиса. Далее вычисляются отношения величины в столбце СЧ ведущей строки x_4 (оно равно -1) к каждому значению всех свободных членов, находящихся в ведущей строке x_4, и заносятся в строку ОТ (отношения вычисляются только для отрицательных элементов ведущей строки). В строке ОТ отмечается столбец с наименьшим значением, и он принимается в качестве ведущего столбца симплекс-таблицы. В нашем случае это столбец, соответствующий переменной x_2 (выделен желтым цветом). Свободная переменная x_2 вводится в базис вместо базисной переменной x_4. На пересечении ведущей строки x_4 и ведущего столбца x_2 находится разрешающий элемент (выделен голубым цветом). Разделив элементы ведущей строки x_4 на разрешающий элемент (-3) и введя в столбец БП свободную переменную x_2, приходим к симплекс-таблице 1 (табл. 3.3).

Далее симплекс-таблица переформатируется с помощью алгоритма Жордана–Гаусса. По нашему опыту, именно преобразование исходной симплекс-таблицы в новую вызывает наибольшую трудность у начинающего пользователя. Поэтому остановимся на нем подробнее. Алгоритм преобразования основан на правиле треугольника, графическое пояснение которого приведено на рис. 3.12.

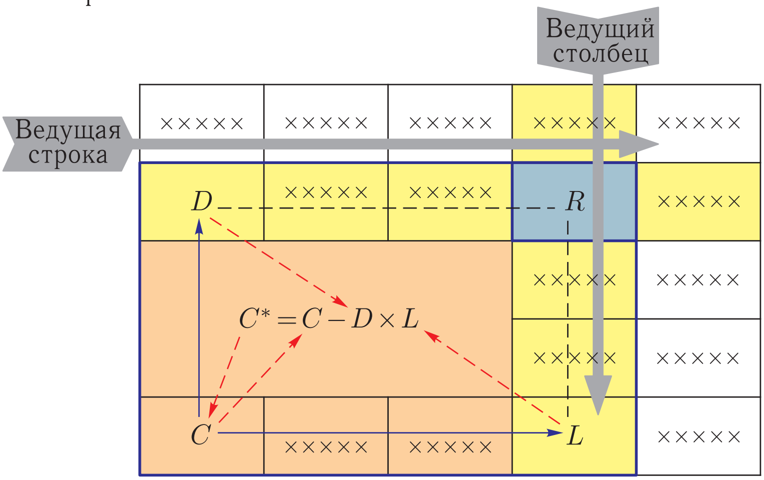


Рис. 3.12. К пояснению алгоритма преобразования симплекс-таблицы

На рис. 3.12 приняты следующие обозначения: C — элемент строки преобразуемой симплекс-таблицы; D — элемент, лежащей на пересечении столбца, содержащего элемент строки преобразуемой симплекс-таблицы, и ее ведущей строки; L — элемент, лежащий на пересечении строки, содержащей преобразуемый элемент симплекс-таблицы, и ее ведущего столбца; R — разрешающий элемент преобразуемой симплекс-таблицы; C^* — преобразованный элемент новой симплекс-таблицы, замещающий элемент предыдущей матрицы.

Треугольник преобразования CDL строится относительно системы координат (DR–RL), образуемой ведущей строкой и ведущим столбцом с началом координат в ячейке R, содержащей разрешающий элемент. Отсюда становится понятным и происхождение терминов «ведущая строка», «ведущий столбец» и «разрешающий» элемент, так как они определяют («ведут» и «разрешают») алгоритм преобразования симплекс-таблицы, являясь своеобразным аналогом системы координат (ведущая строка DR и ведущий столбец RL — оси абсцисс и ординат, разрешающий элемент R — начало координат), относительно которой производится вычисление элементов новой симплекс-таблицы. Вычисления, иллюстрирующие алгоритм преобразования симплекс-таблицы 1 в симплекс-таблицу 2 методом Жордана–Гаусса, приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3. Симплекс-таблица 1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СЧ
x_2	$\frac{1}{3}(D_1)$	$1(D_2)$	$\frac{2}{3}(D_3)$	$-\frac{1}{3}(D_4)$	$0(D_5)$	$0(D_6)$	$0(D_7)$	$\frac{1}{3}(D_8)$
x_5	$-3(C_1)$	$-2(C_2, L_1)$	$-1(C_3)$	$0(C_4)$	$1(C_5)$	$0(C_6)$	$0(C_7)$	$-1(C_8)$
x_6	$-1(C_1)$	$0(C_2, L_2)$	$-3(C_3)$	$0(C_4)$	$0(C_5)$	$1(C_6)$	$0(C_7)$	$-1(C_8)$
x_7	$-4(C_1)$	$-1(C_2, L_3)$	$-2(C_3)$	$0(C_4)$	$0(C_5)$	$0(C_6)$	$1(C_7)$	$-1(C_8)$
$-F$	$-1(C_1)$	$-1(C_2, L_4)$	$-1(C_3)$	$0(C_4)$	$0(C_5)$	$0(C_6)$	$0(C_7)$	$0(C_8)$
ОТ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$					

Для пояснения алгоритма преобразования все элементы преобразуемой симплекс-таблицы промаркированы соответствующими величинами C_i, D_i, L_j. В ведущем столбце все значения преобразованной симплекс-таблицы будут равны 0, кроме позиции разрешающего элемента (для которого $D_i = 1$), так как если $C_i = L_j$, то всегда $C_i^* = C_i - D_i \cdot L_j = C_i - 1 \cdot C_i = 0$. В симплекс-таблице 1 (табл. 3.3) красным выделены 4 треугольника с вершинами

$$(C_1, D_1, L_1), \quad (C_1, D_1, L_2), \quad (C_1, D_1, L_3), \quad (C_1, D_1, L_4),$$

по которым производится расчет элементов новой симплекс-таблицы.

Схема расчета новых значений симплекс-таблицы 2 приведена в табл. 3.4. По аналогии вычисляются остальные элементы, формирующие новую симплекс-таблицу 2, приведенную в табл. 3.5. Среди отрицательных значений столбца СЧ симплекс-таблицы 2 (табл. 3.5) выбираем наибольший по модулю. Он равен 1 и находится в строке x_6 (окрашена в желтый цвет), которая становится ведущей, а переменная x_6 выводится из базиса.

Т а б л и ц а 3.4. Вычисление элементов симплекс-таблицы 2

x_5 $(L_1=-2)$	x_6 $(L_2=0)$	x_7 $(L_3=-1)$	$-F$ $(L_4=-1)$
$C_1=-3,\ D_1=\frac{2}{3},$ $C_1^*=-3-\frac{2\cdot(-2)}{3}=-\frac{5}{3}$	$C_1=-1,\ D_1=\frac{2}{3},$ $C_1^*=-1-\frac{2\cdot 0}{3}=-1$	$C_1=-4,\ D_1=\frac{2}{3},$ $C_1^*=-4-\frac{2\cdot(-1)}{3}=-\frac{10}{3}$	$C_1=-1,\ D_1=\frac{2}{3},$ $C_1^*=-1-\frac{2\cdot(-1)}{3}=-\frac{1}{3}$
$C_2=-2,\ D_2=1,$ $C_2^*=-2-1\cdot(-2)=0$	$C_2=0,\ D_2=1,$ $C_2^*=0-1\cdot 0=0$	$C_2=-1,\ D_2=1,$ $C_2^*=0=-1-1\cdot(-1)=0$	$C_2=-1,\ D_2=1,$ $C'^*=0=-1-1\cdot(-1)=0$
$C_3=-1,\ D_3=\frac{2}{3},$ $C_3'^*=-1-\frac{2\cdot(-2)}{3}=\frac{1}{3}$	$C_3=-3,\ D_3=\frac{2}{3},$ $C_3'^*=-3-\frac{2\cdot 0}{3}=-3$	$C_3=-2,\ D_3=\frac{2}{3},$ $C_3^*=-2-\frac{2\cdot(-1)}{3}=-\frac{4}{3}$	$C_3=-1,\ D_3=\frac{2}{3},$ $C_3^*=-1-\frac{2\cdot(-1)}{3}=-\frac{1}{3}$
$C_4=0,\ D_4=-\frac{1}{3},$ $C_4'^*=0-\left(-\frac{1\cdot(-2)}{3}\right)=-\frac{2}{3}$	$C_4=0,\ D_4=-\frac{1}{3},$ $C_4^*=0-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 0=0$	$C_4=0,\ D_4=-\frac{1}{3},$ $C_4^*=0-\left(-\frac{1\cdot(-1)}{3}\right)=-\frac{1}{3}$	$C_4=0,\ D_4=-\frac{1}{3},$ $C_4^*=0-\left(-\frac{1\cdot(-1)}{3}\right)=-\frac{1}{3}$
$C_5=1,\ D_5=0,$ $C_5^*=1-0\cdot(-2)=1$	$C_5=0,\ D_5=0,$ $C_5^*=0-0\cdot 0=0$	$C_5=0,\ D_5=0,$ $C_5^*=0-0\cdot(-1)=0$	$C_5=0,\ D_5=0,$ $C_5^*=0-0\cdot(-1)=0$
$C_6=0,\ D_6=0,$ $C_6^*=0-0\cdot(2)=0$	$C_6=1,\ D_6=0,$ $C_6^*=1-0\cdot 0=1$	$C_6=0,\ D_6=0,$ $C_6^*=0-0\cdot(-1)=0$	$C_6=0,\ D_6=0,$ $C_6^*=0-0\cdot(-1)=0$
$C_7=0,\ D_7=0,$ $C_7^*=0-0\cdot(-2)=0$	$C_7=0,\ D_7=0,$ $C_7^*=0-0\cdot 0=0$	$C_7=1,\ D_7=0,$ $C_7^*=1-0\cdot(-1)=1$	$C_7=0,\ D_7=0,$ $C_7^*=0-0\cdot(-1)=0$
$C_8=-1,\ D_7=\frac{1}{3},$ $C_8^*=-1-\frac{1\cdot(-2)}{3}=-\frac{1}{3}$	$C_8=-1,\ D_7=\frac{1}{3},$ $C_8^*=-1-\frac{1\cdot 0}{3}=-1$	$C_8=-1,\ D_7=\frac{1}{3},$ $C_8^*=-1-\frac{1\cdot(-1)}{3}=-\frac{2}{3}$	$C_8=0,\ D_7=\frac{1}{3},$ $C_8^*=0-\frac{1\cdot(-1)}{3}=\frac{1}{3}$

Таблица 3.5. Симплекс-таблица 2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СЧ
x_2	$2/3$	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	0	$1/3$
x_5	$-5/3$	0	$1/3$	$-2/3$	1	0	0	$-1/3$
x_6	-1	0	-3	0	0	1	0	-1
x_7	$-10/3$	0	$-4/3$	$-1/3$	0	0	1	$-2/3$
$-F$	$-1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	0	0	0	$1/3$
ОТ	$1/3$	—	$1/9$					

Минимальное отношение ОТ $\left(\frac{1}{9}\right)$ соответствует 3-му столбцу с переменной x_3, которая вводится в базис взамен выводимой x_6. Продолжая по аналогии преобразование симплекс-таблицы методом Жордана–Гаусса, получаем симплекс-таблицу 3 (табл. 3.6) с ведущим элементом $\left(-\frac{16}{9}\right)$, лежащем на пересечении ведущей строки x_5 и ведущего столбца x_1.

Таблица 3.6. Симплекс-таблица 3

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СЧ
x_2	$4/9$	1	0	$-1/3$	0	$2/9$	0	$1/9$
x_5	$-16/9$	0	0	$-2/3$	1	$1/9$	0	$-4/9$
x_3	$1/3$	0	1	0	0	$-1/3$	0	$1/3$
x_7	$-2/9$	0	0	$-1/3$	0	$-4/9$	1	$-2/9$
$-F$	$-2/9$	0	0	$-1/3$	0	$-1/9$	0	$4/9$
ОТ	$1/8$	—	—	$1/2$				

Так как в столбце СЧ есть отрицательные элементы, продолжаем преобразование симплекса. Выполняя перечисленные выше манипуляции, переходим от симплекс-таблицы 3 к симплекс-таблице 4 (таблица 3.7).

Из симплекс-таблицы 3 следует, что из базиса выводится переменная x_5, вместо которой вводится переменная x_1.

В базисном столбце СЧ все элементы положительны, в индексной строке $(-F)$ положительных элементов нет. Следовательно, симплекс-процедура завершена. Оптимальная

Таблица 3.7. Симплекс-таблица 4

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	СЧ
x_2	0	1	0	$-1/2$	$1/4$	$1/4$	0	0
x_1	1	0	0	$3/8$	$-9/16$	$-1/16$	0	$1/4$
x_3	0	0	1	$-1/8$	$3/16$	$-5/16$	0	$1/4$
x_7	0	0	0	$-3/4$	$-13/8$	$-5/8$	1	$1/2$
$-F$	0	0	0	$-1/4$	$-1/8$	$-1/8$	0	$1/2$

смешанная стратегия игрока **A** будет определяться свободными переменными $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{4}$, а целевая функция будет равна $F(X) = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Найдем теперь решение для игрока **B**, используя теорему двойственности $Y = C \cdot A^{-1}$, для чего составим матрицу **A** из компонентов, входящих в оптимальный базис-столбец БП симплекс-таблица 3 (x_2, x_1, x_3, x_7),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем, используя алгебраические дополнения, обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{9}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{13}{8} & -\frac{5}{8} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, перемножая матрицы

$$Y = (-1)_{1\times 4} \cdot A^{-1} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\right),$$

получаем

$$y_1 = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{1}{8}, \quad y_3 = \frac{1}{8}, \quad y_4 = 0, \quad L(y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Если существуют допустимые решения прямой и двойственной задач линейного программирования, для которых выполняется равенство целевых функций $F(x)$ и $L(y)$, то эти решения являются оптимальными.

Цена игры равна $\nu = \dfrac{1}{F(x)} = \dfrac{1}{L(y)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, а составляющие оптимальной смешанной стратегии игрока **A** равны

$$p_1^0 = \nu \cdot x_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad p_2^0 = \nu \cdot 0 = 0,$$
$$p_3^0 = \nu \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad P^0\left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.$$

По аналогии оптимальная смешанная стратегия игрока **B** есть

$$q_1 = \nu \cdot y_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad q_2 = \nu \cdot y_2 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$
$$q_3 = \nu \cdot y_3 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \qquad q_4 = \nu \cdot y_4 = 2 \cdot 0 = 0$$
$$\text{и} \quad Q^0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right).$$

Проверим правильность решения игры критерием оптимальности стратегий

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} \cdot q_j \leqslant \nu \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot p_i \geqslant \nu.$$

Критерий удовлетворяется, если выполнены неравенства (3.54) и (3.55):

$$\begin{cases} 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot 0 = 2 \leqslant \nu = 2, \\ 3q_1 + 2q_2 + q_4 = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 = 2 \leqslant \nu = 2, \\ 2q_1 + q_2 + 3q_3 + 2q_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 0 = 2 \leqslant \nu = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_2 + 2p_3 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot 0 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 2 \geqslant \nu = 2, \\ 3p_1 + 2p_2 + p_3 = 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot 0 + \dfrac{1}{2} = 2 \geqslant \nu = 2, \\ p_1 + 3p_3 = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 2 \geqslant \nu = 2, \\ 4p_1 + p_2 + 2p_3 = 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3 \geqslant \nu = 2. \end{cases}$$

Так как все нестрогие неравенства выполняются как равенства или строгие неравенства, найденное решение игры верно.

Таким образом, для получения наибольшего среднего выигрыша игроку **A** следует в 50 % случаев применять стратегию A_1, а в остальных 50 % — стратегию A_3, стратегию A_2 применять не следует. Игроку **B** следует в 50 % случаев применять стратегию B_1, в 25 % случаев — стратегию B_2 и в 25 % — стратегию B_3, стратегию B_4 применять не следует.

Сведение задачи решения игры к задаче линейного программирования позволяет получить точное решение для игр любой размерности, но сам метод вычислительно затратен. Конечно, можно воспользоваться услугами компьютера, который будет послушно складывать и умножать, умножать и делить, транспонировать и обращать матрицы, но заслонит от игрока живой процесс развития игры. Да и сама точность, доставляемая аналитическими методами решения игр большой размерности, на практике обесценивается вольностью исходных посылок, недостаточной точностью исходных данных платежной матрицы. Зачастую более эффективны итерационные численные методы моделирования игровой ситуации, позволяющие получать решение игры с удовлетворительной погрешностью при неизмеримо меньших затратах.

Один из таких, наиболее распространенных методов, — итерационный метод Брауна–Робинсон.

3.6.2. Итерационный метод Брауна–Робинсон [73, 74, 76, 77]

Итерационный метод Брауна–Робинсон [74, 75] предполагает интерактивный выбор игроком наилучшей стратегии в ответ на накопленный выигрыш противника. Его основная идея заключается в разыгрывании «*мысленного эксперимента*», в котором игроки применяют друг против друга свои стратегии, стремясь к большему выигрышу (меньшему проигрышу). Эксперимент состоит из последовательности разыгрываемых по определенному алгоритму «*партий*» игры. Метод Брауна–Робинсон [74–76] является итеративной процедурой построения последовательности пар смешанных стратегий игроков, сходящейся к решению матричной игры.

Если один из игроков (положим, **A**) выбирает произвольно одну из своих чистых стратегий A_i, оппонент (игрок **B**) отвечает на «*ход*» противника своей чистой стратегией B_j, наименее выгодной для игрока **A**, обращая его выигрыш при стратегии A_i в минимум. В ответ игрок **A** отвечает стратегий A_k, дающей ему максимальный выигрыш при стратегии оппонента B_j. Игрок **B** отвечает игроку **A** стратегией B_f, являющейся наихудшей для смешанной стратегии, в которую стратегии A_i и A_k входят с равными вероятностями.

Таким образом, на каждой итерации каждый игрок отвечает на ход оппонента своей чистой стратегией, являющейся оптимальной для него относительно смешанной стратегии противника, в которую чистые стратегии входят в пропорциях, определяемых частотой их применения. Вместо вычисления среднего выигрыша после каждого «*хода*» можно пользоваться выигрышем, накопленным за предыдущие «*партии*», и выбирать стратегию, при которой накопленный выигрыш максимален (проигрыш минимален). Итерационный процесс сходится, при этом средний выигрыш на одну «*партию*» стремится к цене игры ν, а частоты применения стратегий $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$ приближаются к вероятностям $p_1, \ldots, p_m$ и $q_1, \ldots, q_n$ в оптимальных смешанных стратегиях

$$P^0(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m); \quad Q^0(q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_n).$$

Поясним алгоритм Брауна–Робинсон на примере игры с платежной матрицей (табл. 3.8)

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Таблица 3.8. К пояснению итерационного метода Брауна–Робинсон

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k	A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_i	A_1	A_2	A_3	$\nu_{\text{н}}$	$\nu_{\text{в}}$	$\overline{\nu}$
1	A_1	min 1	4	2	3	B_1	1	2	max 4	1	4	2,5
2	A_3	5	6	min 2	5	B_3	3	3	max 4	1	2	1,5

В табл. 3.8 приняты обозначения (по столбцам): 1 — номер итерации k; 2 — выбранная игроком $\mathbf{A}$ стратегия A_i; 3–6 — накопленные выигрыши игрока $\mathbf{A}$ за первые k «партий» соответственно при стратегиях $B_1, \ldots, B_4$ игрока $\mathbf{B}$ (определяется суммированием элементов каждой строки к предыдущей). Среди накопленных выигрышей отмечается минимальный (если их несколько, отмечаются все), указывающий на выгодную стратегию B_j, номер которой заносится в столбец 7 таблицы; столбец 7 — выбранная игроком $\mathbf{B}$ стратегия B_j; 8–10 — накопленные проигрыши игрока $\mathbf{B}$ за первые k «партий» при стратегиях $A_1, \ldots, A_3$ игрока $\mathbf{A}$ (определяется суммой элементов строки B_j и предыдущей строки). Среди накопленных выигрышей отмечается максимальный (если их несколько, отмечаются все), указывающий на выгодную стратегию игрока $\mathbf{A}$ в следующей «*партии*» (в следующей строке таблицы), номер которой A_i заносится в столбец 2 (если максимумов несколько отмечаются все); 11 — нижняя оценка цены игры, равная минимальному накопленному выигрышу, деленному на число k «*партий*»; 12 — верхняя оценка цены игры, равная максимальному накопленному выигрышу, деленному на число k «*партий*»; 13 — среднее арифметическое нижней и верхней оценок цены игры, являющееся приближенной оценкой цены игры $\boldsymbol{\nu}$.

Пример 3.12

Рассмотрим решение методом Брауна–Робинсон предыдущей игры с платежной матрицей примера 3.10 (иллюстрируется в табл. 3.9):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Таблица 3.9. Итерационный метод Брауна–Робинсон

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k	A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_j	A_1	A_2	A_3	ν'	ν''	$\overline{\nu}$
1	A_1	2	3	1	4	B_3	1	0	3	1	3	2
2	A_3	4	4	4	6	B_1	3	3	5	2	$5/2$	$9/4$
3	A_3	6	5	7	8	B_2	6	5	6	$5/3$	2	$11/6$
4	A_1	8	8	8	12	B_1	8	8	8	2	2	2
5	A_1	10	11	9	16	B_3	9	8	11	$9/5$	$11/5$	2
6	A_3	12	12	12	18	B_1	11	11	13	2	$13/6$	$25/12$
7	A_3	14	13	15	20	B_2	14	13	14	$13/7$	2	$27/14$
8	A_1	16	16	16	24	B_1	16	16	16	2	2	2
9	A_1	18	19	17	28	B_3	17	16	19	$17/9$	$19/9$	2
10	A_3	20	20	20	30	B_1	19	19	21	2	$21/10$	$41/20$
11	A_3	22	21	23	32	B_2	22	21	22	$21/11$	2	$43/22$
12	A_1	24	24	24	36	B_1	24	24	24	2	2	2

Для заданной платежной матрицы игры алгоритм итерационного метода Брауна–Робинсон реализуется следующим образом.

Произвольно выбирается начальная стратегия A_1 игрока **A**, ее строка $(2-3-1-4)$ из матрицы игры заносится в таблицу (строки 3–6). Минимальное значение этого ряда, равное 1, указывает на выбор игроком **B** стратегии B_3. Отмечается ячейка со значением 1 (окрашена в желтый цвет) и стратегия B_3 заносится в столбец 7, а в столбцы 8–10 — значения столбца B_3 матрицы $(1-0-3)$. Отмечается (желтым цветом) максимальное значение этого ряда, равное 3, указывающее на стратегию A_3 $(2-3-1-4)$ игрока **A**. Стратегия A_3 $(2-1-3-2)$ заносится в столбец 2, а в столбцах 3–6 таблицы проставляется сумма значений предыдущей строки A_1 и строки A_3 $(2+2=4;\ 3+1=4;\ 1+3=4;\ 4+2=6)$.

Выбирается минимальное значение, равное 4, указывающее на стратегию B_1 игрока **B**. Стратегия B_1 $(2-3-2)$ вносится в столбец 7, а в столбцах 8–10 таблицы проставляется сумма значений столбцов матрицы B_3 и B_1 $(1 + 2 = 3;\ 0 + 3 = 3;\ 3 + 2 = 5)$. Отмечается максимальное значение, равное 5, указывающее на стратегию A_3 игрока **A**, которая заносится в столбец 2.

Далее итерационный алгоритм воспроизводится по аналогии.

Оценка цены игры определяется отношением накопленного выигрыша к числу сыгранных «партий»: $\nu' = \dfrac{1}{1} = 1$, $\nu'' = \dfrac{3}{1} = 3$, $\overline{\nu} = \dfrac{1+3}{2} = 2$ при $k = 1$; $\nu' = \dfrac{4}{2} = 2$, $\nu'' = \dfrac{5}{2}$, $\overline{\nu} = \left(2 + \dfrac{5}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{4}$ при $k = 2$ и т. д.

Возникает вопрос: когда следует заканчивать процесс вычислений? Существуют три критерия завершения итерационного алгоритма: по количеству итераций, по точности и по достижению положения равновесия. График зависимости цены игры от числа итераций является затухающей синусоидой [68] (рис. 3.13).

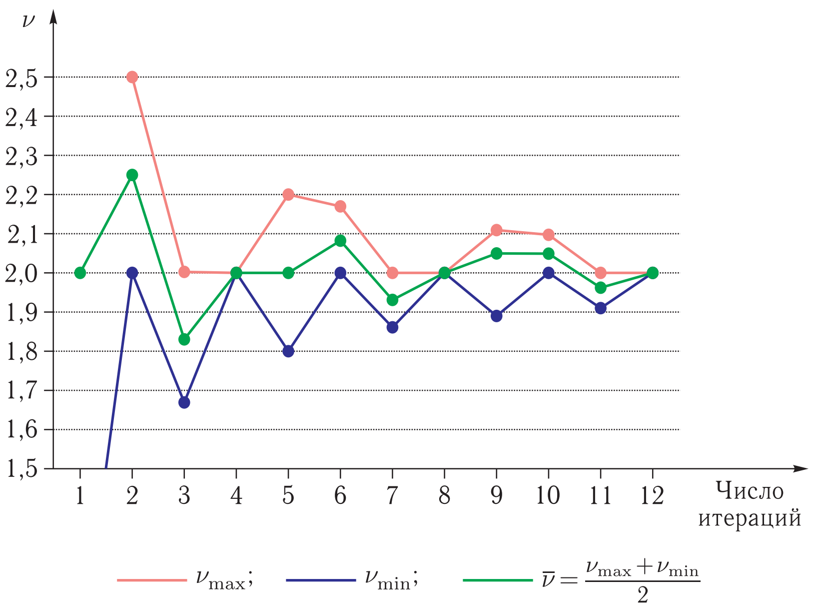


Рис. 3.13. Зависимость оценки цены игры $\boldsymbol{\nu}$ от числа итераций

Итерационный процесс завершается, если несколько последовательных значений цены игры отличаются друг от друга менее чем на заранее оговоренную величину.

При достижении положения равновесия любое поведение игрока дает один и тот же выигрыш, равный цене игры $\boldsymbol{\nu}$. В нашем случае это положение достигается уже на четвертой итерации, однако такая ситуация бывает очень редко, и, если она наступает на ранней стадии итерации, процесс обычно продолжается до следующего наступления положения равновесия. В нашем случае для повторного наступления положения равновесия потребовалось 12 итераций. На практике чаще всего итерационный процесс ограничивается достижением заданной точности оценки цены игры.

В нашем случае после 12 итераций оценка средней цены игры $\overline{\nu} = 2$. Смешанные стратегии вычисляются отношением количества реализаций игроками своих чистых стратегий к общему количеству итераций (количество «желтых» ячеек — $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ по каждой чистой стратегии к общему числу итераций):

$$p_1 = \frac{d(A_1)}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{d(A_2)}{12} = \frac{0}{12} = 0,$$
$$p_3 = \frac{d(A_3)}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$$
$$q_1 = \frac{d(B_1)}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad q_2 = \frac{d(B_2)}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$
$$q_3 = \frac{d(B_3)}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}; \quad q_4 = \frac{d(B_4)}{12} = \frac{0}{12} = 0,$$

что в нашем случае совпадает с точным аналитическим решением методом линейного программирования (пример 3.10).

В отличие от метода линейного программирования, обладающего экспоненциальной сложностью по трудоемкости во всем классе решаемых задач, итерационный метод Брауна–Робинсон при незначительной потере в точности имеет линейную оценку сложности, многократно уступающую сложности линейного программирования. Это свойство итерационной процедуры особенно важно при анализе экономических игр в условиях среднего промышленного предприятия, не обремененного опытными специалистами в области математических методов анализа и оптимизации экономических процессов.

Дополнительным преимуществом итерационной процедуры Брауна–Робинсон является его наглядность, интуитивная простота, возможность анализировать ход виртуальной «*игры*», возможность фиксировать значимость составляющих решаемой игровой экономической ситуации. Решение матричной игры итерационным методом Брауна–Робинсон отражает реальную ситуацию накопления опыта по поиску игроками-экономистами «*хороших*» стратегий в процессе многократного повторения конфликтных ситуаций, тренирует их интуицию. Выбирая на каждом шагу выгодную для себя стратегию, опираясь на предыдущий выбор противника, игрок-экономист на собственном опыте «*прощупывает*» способ поведения оппонента, реагируя на него выгодным для себя способом. Таким образом, попутно с решением игровой задачи в процессе самой игры происходит своеобразное «*обучение*» игроков принятию оптимальных решений из множества возможных.

3.6.3. Метод Шепли–Сноу

Метод предназначен для решения матричной игры произвольной размерности $m \times n$. В такой игре множество оптимальных стратегий каждого игрока может быть представлено многогранником, полностью определенным конечным числом своих крайних вершин (точек). Поэтому для вычисления полного решения матричной игры достаточно определить крайние оптимальные стратегии, метод нахождения которых вытекает из следующей теоремы Шепли–Сноу: «*Все крайние оптимальные стратегии P^0, Q^0 игроков в игре с платежной матрицей $\mathbf{A}$ произвольной размерности и ценой игры ν должны удовлетворять какой-либо из систем уравнений*

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{r} a_{i_s j_t} p_{i_s}^0 - \nu = 0, \quad t = 1, \ldots, r; \quad \sum_{s=1}^{r} p_{i_s}^0 = 1, \\ &\sum_{t=1}^{r} a_{i_s j_t} q_{j_t}^0 - \nu = 0, \quad s = 1, \ldots, r; \quad \sum_{t=1}^{r} q_{j_t}^0 = 1, \end{aligned} \tag{3.61}$$

где $(a_{i_s j_t})$ — квадратная матрица, полученная из матрицы $\mathbf{A}$ вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. Остальные p_i^0, q_j^0 с индексами, соответствующими *вычеркнутым строкам и столбцам, равны* 0. *При этом если* $\nu \neq 0$, *то матрица* **A** *не вырождена*».

По теореме Шепли–Сноу полное решение матричной игры сводится к перебору всех ее квадратных матриц и решению для них соответствующих систем линейных уравнений (3.61). Если, $\nu \neq 0$, то эти системы либо не имеют решения, либо имеют единственное решение. Полученное единственное решение проверяется на неотрицательность и выполнение условий оптимальности для вычеркнутых строк и столбцов. При выполнении перечисленных условий решения системы (3.61), дополненные нулями на местах, соответствующих вычеркнутым строкам и столбцам, являются оптимальными стратегиями (не обязательно крайними, так как условия теоремы необходимые, но не достаточные). Полный перебор всех квадратных матриц размерности не ниже 2×2 приводит к определению всех крайних оптимальных стратегий.

Алгоритм Шепли–Сноу весьма трудоемок, поэтому рекомендуется предварительно редуцировать исходную матрицу вычеркиванием доминирующих строк и столбцов, входящих в оптимальные стратегии с нулевой вероятностью (при этом цена игры не меняется). При решении системы линейных уравнений (3.61) удобнее оперировать с невырожденными подматрицами $(a_{i_s j_t})$. Рекомендуется свести исходную игру к игре с заведомо не равной нулю ценой, для чего прибавить к каждому элементу матрицы **A** одну и ту же константу, при которой цена новой игры будет заведомо положительна. Алгоритм Шепли–Сноу в силу своей сложности и трудоемкости редко применяется для решения задач в условиях компаний реального производства.

Пример 3.13 (заимствовано из [49])

Решить методом Шепли–Сноу игру с платежной матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

Из матрицы следует, что нижняя цена игры $\max\min a_{ij} = \alpha = 1$, а верхняя цена игры $\min\max a_{ij} = \beta = 2$.

Так как $\alpha \neq \beta$, решений игры в чистых стратегиях нет, искать решение будем в смешанных стратегиях.

Анализируя матрицу, видим, что стратегия A_2 доминирует стратегию A_1, а стратегия B_1 доминирует стратегию B_3. Исключением доминированной стратегии A_1 (первая строка) и доминирующей стратегии B_1 (первый столбец) редуцируем исходную матрицу до размерности 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Запишем для редуцированной матрицы первую систему (3.61)

$$\begin{cases} 3p_1^0 + p_2^0 + 3p_3^0 - \nu = 0, \\ p_1^0 + 2p_2^0 - \nu = 0, \\ 3p_1^0 + 6p_3^0 - \nu = 0, \\ p_1^0 + p_2^0 + p_3^0 = 1, \end{cases}$$

решая которую получим $\nu = 1{,}5$; $p_1^0 = 0$, $p_2^0 = 0{,}75$, $p_3^0 = 0{,}25$.

Теперь рассмотрим вторую систему (3.61), подставив в нее $\nu = 1{,}5$,

$$\begin{cases} 3q_1^0 + q_2^0 + 3q_3^0 = 1{,}5, \\ q_1^0 + 2q_2^0 = 1{,}5, \\ 3q_1^0 + 6q_3^0 = 1{,}5. \end{cases}$$

Ее решением будут неотрицательные значения $q_1^0 = 0$, $q_2^0 = 0{,}75$, $q_3^0 = 0{,}25$. Следовательно, стратегии $P^0\{0; 0{,}75; 0{,}25\}$, $Q\{0; 0{,}75; 0{,}25\}$ являются оптимальными.

Проверкой подматриц

$$A_{34}^{24} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_{24}^{24} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_{24}^{23} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_{24}^{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_{23}^{24} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{23}^{23} = \begin{Bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

убеждаемся, что они не имеют решения (читатель может сам в этом удостовериться, что будет самостоятельным упражнением для него).

Для остальных подматриц при цене игры $\nu = 1{,}5$ оптимальными стратегиями будут:

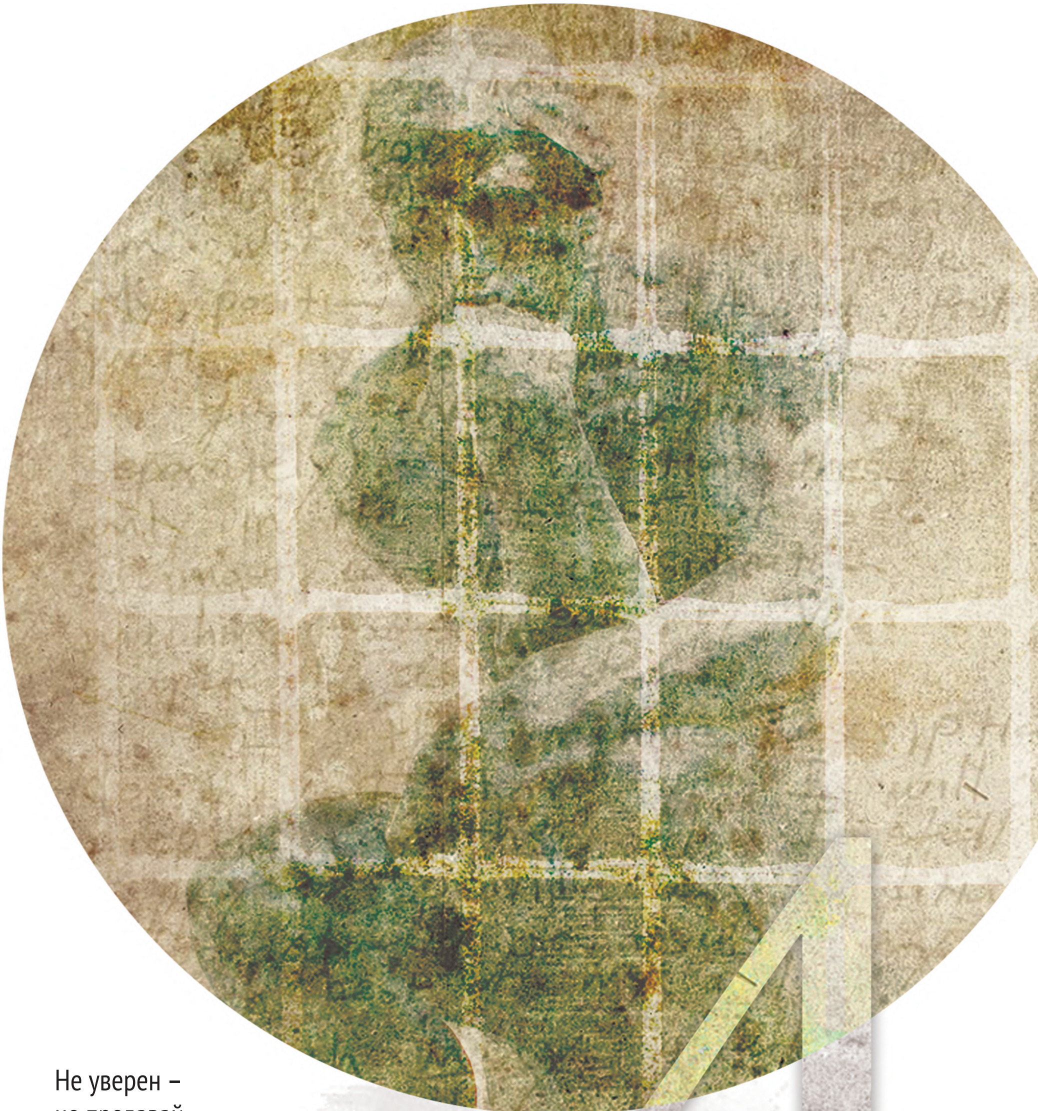
- *для подматрицы* $A_{14}^{14} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ — $P^0\{0; 0{,}75; 0{,}25\}$, $Q\{0; 0{,}75; 0{,}25\}$;
- *для подматрицы* $A_{34}^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ — $P^0\{0{,}5; 0{,}5; 0\}$, $Q\{0; 0{,}75; 0{,}25\}$;
- *для подматрицы* $A_{23}^{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ — $P^0\{0; 0{,}75; 0{,}25\}$, $Q\{0{,}5; 0{,}5; 0\}$.

Таким образом, полное решение игры — множество $\{S_A^0, S_B^0, \nu\}$, где

$$S_A^0 = \left\{P^0 = \lambda P^{(1)} + (1-\lambda)P^{(2)} \colon 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\right\} =$$
$$= \{(0; -0{,}5\lambda + 0{,}5; 0{,}25\lambda + 0{,}5; 0{,}25\lambda) \colon 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\},$$
$$P^{(1)} = (0; 0; 0{,}75; 0{,}25), \quad P^{(2)} = (0; 0{,}5; 0{,}5; 0),$$
$$S_B^0 = \left\{Q^0 = \lambda Q^{(1)} + (1-\lambda)Q^{(2)} \colon 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\right\} =$$
$$= \{(0; -0{,}5\lambda + 0{,}5; 0{,}25\lambda + 0{,}5; 0{,}25\lambda) \colon 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\},$$
$$Q^{(1)} = (0; 0; 0{,}75; 0{,}25), \quad Q^{(2)} = (; 0{,}5; 0{,}5; 0).$$

End keywords:

Решения матричной игры m × n методом линейного программирования, итерационный метод Брауна–Робинсон, метод Шепли–Сноу.



Не уверен –
не предавай.

Максим Звонарев
р. 1956

4 ГЛАВА
БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

В предыдущем разделе мы рассматривали матричные игры двух лиц с прямо противоположными интересами (антагонистические игры). Однако значительно чаще встречаются ситуации, в которых интересы игроков, не совпадая полностью, тем не менее, не являются строго противоположными. Даже танковая битва на Прохоровке не является строго антагонистическим конфликтом (как это ни кажется странным на первый взгляд), так как в антагонистическом конфликте цели сторон должны быть строго противоположны: каждая сторона, стремясь уничтожить противника, должна избегать собственного уничтожения. В матричной антагонистической игре самое существенное заключается в том, что это игра с нулевой суммой. Если же действия каждого игрока должны соответствовать собственному критерию эффективности, то, очевидно, сумма игры не обязана быть нулевой. Игры, в которых участвуют два игрока с различающимися критериями эффективности, называются биматричными играми. В строгом определении биматричная игра — это конечная бескоалиционная игра двух лиц с ненулевой суммой [39, 77–80].

Биматричная игра представляется двумя платежными матрицами конфликтующих сторон. Например, игра двух игроков, **A** — с m стратегиями и **B** — с n стратегиями, представляется матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{array},$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{array}.$$

Размерности матриц должны всегда совпадать. Если игрок **A** применяет стратегию A_i, а игрок **B** — стратегию B_j, то выигрыши игроков в ситуации $\{A_iB_j\}$ будут располагаться в соответствующих матрицах на пересечении i-й строки и j-го столбца: выигрыш игрока **A** будет a_{ij}, а игрока **B**, соответственно, b_{ij}. Как и ранее, знак «минус» означает проигрыш игрока в ситуации.

4.1. Доминирование в биматричных играх [60, 77, 78]

Как и в классической матричной игре, в биматричных играх существуют отношения доминирования. Однако они значительно отличаются от отношений доминирования в антагонистических играх и основываются на исходных данных и критериях игровой задачи. Рассмотрим основные варианты таких критериев [60].

Вариант 1. Игрок **A** преследует цель максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока **B**.

Рассмотрим случай, когда игрок **A** стремится максимизировать свой выигрыш. Активной стороной в таком случае является игрок **A**, он может реализовать свою цель, управляя только собственными стратегиями, выигрыши по которым расположены в строках матрицы **A**. Поэтому сравнивать между собой следует только элементы строк. Так как игрок **A** стремится максимизировать свой выигрыш, стратегии, содержащие меньший выигрыш, он применять не будет. Следовательно, удалению из матрицы **A** подлежат доминируемые строки, удовлетворяющие условию: если $a_{ik} \leqslant a_{jk}$, $\forall k = 1, \ldots, n$, то стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы **A**. Поскольку игрок **A** отказался от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка удаляется также и из матрицы **B** независимо от ее остальных элементов.

Если игрок **A** стремится минимизировать выигрыш игрока **B**, то сокращению подлежит матрица **B**, содержащая эти выигрыши. Активной стороной остается игрок **A** (так как он инициатор стремления к минимизации выигрыша игрока **B**), но он может управлять только своими стратегиями, выигрыши по которым располагаются по строкам матрицы **B**. Следовательно, сравнивать между собой необходимо элементы строк матрицы **A**. Так как игрок **A** стремится минимизировать выигрыш стороны **B**, он не будет использовать те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для игрока **B**. Тогда удалению из матрицы **B** подлежат строки, удовлетворяющие условию $b_{ik} \geqslant b_{jk}$, $k = 1, \ldots, n$, стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы **B**.

Пример 4.1

Заданы платежные матрицы биматричной игры игроков **A** и **B**.

Необходимо редуцировать размерность игровой задачи доминированием матриц **A** и **B** при условии, что игрок **A** стремится максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока **B**, где

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 12 & 6 \\ 14 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 12 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}, \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \\ 12 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

Рассмотрим случай, когда игрок **A** стремится максимизировать свой выигрыш. Будем искать доминируемые строки. Сравнивая строки 2 и 4 матрицы **A**, видим, что все элементы строки 4 не меньше соответствующих элементов строки 2, следовательно, строка 2 может быть удалена из матрицы **A**. Автоматически из матрицы **B** также удаляется строка 2. Таким образом, матрицы выигрышей будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 12 & 6 \\ 2 & 10 & 12 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \\ 12 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}.$$

Рассмотрим теперь вариант, когда игрок **A** стремится минимизировать выигрыш игрока **B**. По этому критерию доминирующие строки удаляются из матрицы **B**. Возвращаясь к первоначальным матрицам, видим, что строка 3, соответствующая стратегии A_3, является доминирующей по отношению к строке 1, соответствующей стратегии A_1, поэтому она удаляется из обеих матриц и мы получаем конечный результат

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 4 & 12 & 6 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array}, \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 12 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_4 \end{array}. \end{array}$$

Вариант 2. Предположим теперь, что каждая сторона стремиться минимизировать выигрыш противоположной стороны.

Рассмотрим случай, когда игрок **A** стремится минимизировать выигрыш игрока **B**. Так как речь идет о выигрышах игрока **B**, выбираем для сокращения матрицу **B**, содержащую эти выигрыши. Действующей (активной стороной) является игрок **A**, который может управлять только своими стратегиями, выигрыши при которых располагаются по строкам матрицы **A**. Поэтому доминировать он может только строки своей матрицы **A**. Поскольку игрок **A** стремится минимизировать выигрыш игрока **B**, он не должен применять свои стратегии, доставляющие больший выигрыш игроку **B**. Тогда удалению из матрицы **B** подлежат доминирующие строки, удовлетворяющие условию $b_{ik} \geqslant b_{jk}$, $k = 1, \ldots, n$, стратегия A_i не используется и соответствующая строка удаляется из матрицы **B**. Так как игрок **A** отказался от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка удаляется также из матрицы **A** независимо от ее элементов.

Предположим теперь, что игрок **B** стремится минимизировать выигрыш игрока **A**. В этом случае игрок **B** является активной стороной. Следовательно, он может управлять только собственными стратегиями, выигрыши по которым располагаются по столбцам матрицы **B**. Поэтому сравнению подлежат элементы соответствующих столбцов. Так как игрок **B** стремится к минимизации выигрыша игрока **A**, то те свои стратегии, которые содержат больший выигрыш для игрока **A**, он применять не будет. Тогда из матрицы **A** подлежат удалению столбцы, удовлетворяющие условию $a_{jk} \geqslant a_{jl}$, $j = 1, \ldots, m$, стратегия B_k не используется, а соответствующий ей столбец удаляется из матрицы **A**. Так как игрок **B** отказался от применения своей стратегии B_k, соответствующий ей столбец автоматически из матрицы **B** удаляется независимо от ее элементов.

Пример 4.2

Заданы платежные матрицы биматричной игры игроков **A** и **B**. Необходимо редуцировать размерность игровой задачи доминированием матриц **A** и **B** при условии, что оба игрока стремятся минимизировать выигрыши противоположной стороны.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 12 & 6 \\ 14 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2, \\ A_3 \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 6 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2. \\ A_3 \end{array}$$

Предположим, что игрок **A** стремится минимизировать выигрыш игрока **B**. В этом в случае из матрицы **B** удаляются доминирующие строки. Сравнением выигрышей при стратегиях A_1 и A_3 в матрице **B** убеждаемся, что все элементы 3-й строки не меньше элементов 1-й строки, следовательно, из матрицы **B** удаляется доминирующая 3-я строка. Автоматически удаляется и 3-я строка в матрице **A**.

Тогда редуцированные матрицы будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \\ 14 & 2 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2, \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2. \end{array}$$

Предположим теперь, что игрок **B** стремится минимизировать выигрыш игрока **A**. В этом случае игрок **B** является активной стороной. По этому критерию из матрицы **A** удаляется столбец B_1, являющийся доминирующим по отношению к столбцу B_3. Соответственно из матрицы **B** также удаляется первый столбец. Окончательно редуцированные матрицы биматричной игры принимает вид

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2, \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2. \end{array}$$

Вариант 3. Каждая сторона стремиться максимизировать проигрыш противной стороны.

Рассмотрим случай, когда игрок **A** стремится максимизировать проигрыш игрока **B**. Так как речь идет о проигрышах игрока **B**, выбираем в качестве редуцируемой матрицу **B**, которая их содержит. Игрок **A** является активным, управляя своими стратегиями, проигрыши при которых располагаются по строкам. Следовательно, сравнивать между следует элементы соответствующих строк. Так как игрок **A** стремится максимизировать проигрыш игрока **B**, те свои стратегии, которые обеспечивают меньший проигрыш для игрока **B**, он применять не будет. Тогда удалению из матрицы **B** подлежат доминируемые строки, удовлетворяющие условию $b_{jk} \leqslant a_{jk}$, $k = 1, \ldots, n$, стратегия A_i не используется и соответствующая ей строка удаляется из матрицы **B**. Так как игрок **A** отказывается от использования своей стратегии A_i, соответствующая ей строка автоматически удаляется из матрицы **B**.

Предположим теперь, что активный игрок **B** стремится максимизировать проигрыш игрока **A**. Так как речь идет о проигрышах игрока **A**, выбираем для редуцирования матрицу **A**, их содержащую. Управлять он может только своими стратегиями, проигрыши которых находятся в столбцах матрицы **A**. Игрок **B** стремится максимизировать проигрыш игрока **A**, поэтому он не будет применять стратегии, которые содержат меньший проигрыш для игрока **A**. Тогда удалению из матрицы **A** подлежат доминируемые столбцы, удовлетворяющие условию $a_{lk} \geqslant a_{jk}$, $j = 1, \ldots, m$, стратегия B_k не используется и соответствующий столбец удаляется из матрицы **A**. В связи с тем, что игрок **B** отказался от использования своей стратегии B_k, соответствующий ей столбец автоматически удаляется также из матрицы **B** независимо от ее элементов. Так как алгоритмы определения оптимальных стратегий в качестве исходных данных предполагают наличие матриц выигрышей, переходим к матрицам выигрыша, полагая, что проигрыш противника есть наш выигрыш. Другими словами, меняем матрицы местами.

Пример 4.3

Рассмотрим, как и ранее, матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 12 & 6 \\ 14 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2, \\ A_3 \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 6 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2. \\ A_3 \end{array}$$

Положим, игрок **A** стремится максимизировать проигрыш игрока **B**. В этом случае из матрицы **B** удаляются доминируемые строки. При сравнении проигрышей при стратегиях A_1 и A_3 видно, что все элементы 1-й строки матрицы **B** не превосходят соответствующих элементов 3-й строки, следовательно, из матрицы **B** удаляется 1-я строка. Автоматически первая строка удаляется и из матрицы **A**. Редуцирование приводит к матрицам

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 14 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}.$$

Для случая когда игрок **B** стремится максимизировать проигрыш игрока **A**, из матрицы **A** удаляются доминируемые столбцы. Столбец B_2 является доминируемым по отношению к столбцу B_3 и удаляется из матрицы **A**. Автоматически из матрицы **B** также удаляется второй столбец. После редуцирования матрицы проигрышей принимают вид

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}.$$

Далее переходим к матрицам выигрышей: матрицей **A** становится матрица **B**, а матрицей **B** становится матрица **A**, где

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}.$$

4.2. Графический способ решения биматричной игры 2×2 [38, 39, 60, 61, 80, 81]

Рассматриваем биматричную игру двух игроков, матрицы которых предварительно доминированы, то есть удалены все невыгодные стратегии и каждый игрок имеет в своем распоряжении по две чистых стратегии. В этом случае имеют место матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $P\{p, 1-p\}$ — вектор-строка смешанной стратегии игрока **A**, $Q(q, 1-q)$ — вектор-столбец смешанной стратегии игрока **B**, а $M(\mathbf{A})$, $M(\mathbf{B})$ — математические ожидания средних выигрышей игроков, равные

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{A}) &= a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q) = \\
&= a_{11}pq + a_{12}p - a_{12}pq + a_{21}q - a_{21}pq + \\
&\quad + a_{22} - a_{22}q - a_{22}p + a_{22}pq = \\
&= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + \\
&\quad + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = a_1pq - a_2p + a_3q + a_{22}, \qquad (4.1) \\
M(\mathbf{B}) &= b_{11}pq + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q) = \\
&= b_{11}pq + b_{12}p - b_{12}pq + b_{21}q - b_{21}pq + b_{22} - \\
&\quad - b_{22}q - b_{22}p + b_{22}pq = \\
&= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = \\
&= b_1pq - b_2q + b_3p + b_{22}, \quad \text{где}
\end{aligned}$$

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad a_2 = a_{22} - a_{12}, \quad a_3 = q_{21} - a_{22},$$
$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \quad b_2 = b_{21} - b_{22}, \quad b_3 = b_{12} - b_{22}.$$

Запишем условие равновесной ситуации биматричной игры:

$$\begin{matrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} \leqslant M(\mathbf{A}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} \leqslant M(\mathbf{B}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{matrix} \qquad (4.2)$$

или

$$\begin{cases} a_{11}q + a_{12}(1-q) \leqslant M(\mathbf{A}), \\ a_{12}q + a_{22}(1-q) \leqslant M(\mathbf{A}), \end{cases} \quad \begin{cases} b_{11}p + b_{21}(1-p) \leqslant M(\mathbf{B}), \\ b_{12}p + b_{22}(1-p) \leqslant M(\mathbf{B}). \end{cases} \qquad (4.3)$$

Подставляя значение $M(\mathbf{A})$ из (4.1) в (4.3), получаем систему

$$\begin{cases} a_1(1-p)q - a_2(1-p) \leqslant 0, \\ a_1pq - a_2p \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Из формулы (4.4), определяющей условия для приемлемых стратегий игрока **A**, следует, что:

- при $p = 0$, условие $a_1pq - a_2p \geqslant 0$ справедливо для всех q, а условие $a_1(1-p)q - a_2(1-p) \leqslant 0$ эквивалентно условию $a_1q - a_2 \leqslant 0$ или $q \leqslant \dfrac{a_2}{a_1}$;

- при $p = 1$, условие $a_1(1-p)q - a_2(1-p) \leqslant 0$ выполняется для всех q, а условие $a_1pq - a_2p \geqslant 0$ эквивалентно условию $a_1q - a_2 \geqslant 0$ или $q \geqslant \dfrac{a_2}{a_1}$;
- при $0 < p < 1$, разделив правую и левую части неравенства $a_1(1-p)q - a_2(1-p) \leqslant 0$ на $(1-p)$, а правую и левую части неравенства $a_1pq - a_2p \geqslant 0$ на p, получим

$$\begin{cases} a_1q - a_2 \leqslant 0, \\ a_1q - a_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

что равносильно $a_1q - a_2 = 0$.

Таким образом, множество решений системы (4.5) состоит из всех ситуаций $(0 \leqslant p \leqslant 1;\ 0 \leqslant q \leqslant 1)$: $(0, q)$ при $(a_1q - a_2) \leqslant 0$; (p, q) при $(a_1q - a_2) = 0$; $(1, q)$ при $(a_1q - a_2) \geqslant 0$.

При $a_1 = a_2 = 0$ решением будет являться весь единичный квадрат $p \in [0, 1]$, $q \in [0, 1]$, так как (4.5) справедливо при всех значениях p и q.

При $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ выполняется либо условие $(a_1q - a_2) \leqslant 0$, либо условие $(a_1q - a_2) \geqslant 0$, поэтому решением является либо $p = 0$, либо $p = 1$.

При $a_1 > 0$ получаем решения:

$$\begin{cases} q \leqslant \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha & \text{при } p = 0, \\ q \geqslant \alpha & \text{при } p = 1, \\ q = \alpha & \text{при } 0 < p < 1; \end{cases} \tag{4.6}$$

при $a_1 < 0$:

$$\begin{cases} q \geqslant \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha & \text{при } p = 0, \\ q \leqslant \alpha & \text{при } p = 1, \\ q = \alpha & \text{при } 0 < p < 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Графическая интерпретация множества решений игрока **A** приведена на рис. 4.1.

Множество приемлемых для игрока **B** решений состоит из всех ситуаций $(0 \leqslant p \leqslant 1;\ 0 \leqslant q \leqslant 1)$: $(p, 0)$ при $(b_1q - b_2) \leqslant 0$; (p, q) при $(b_1q - b_2) = 0$; $(p, 1)$ при $(b_1q - b_2) \geqslant 0$.

При $b_1 = b_2 = 0$ решением будет являться единичный квадрат $p \in [0, 1]$, $q \in [0, 1]$, так как (4.3) справедливо при всех значениях p и q.

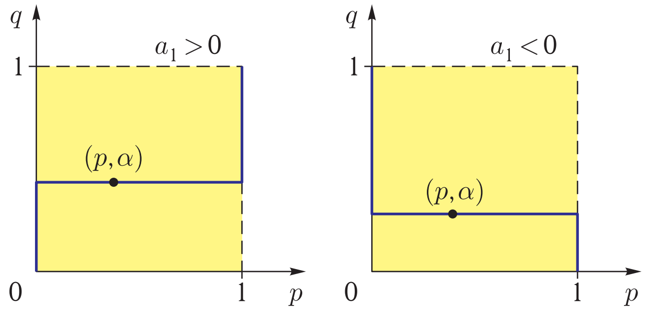


Рис. 4.1. Графическая интерпретация множества решений игрока **A**

При $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ может выполняться либо условие $(b_1 q - b_2) \leqslant 0$, либо условие $(b_1 q - b_2) \geqslant 0$, поэтому решением является либо $q = 0$, либо $q = 1$.

При $b_1 > 0$ получаем решения:

$$\begin{cases} p \leqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \beta & \text{при } q = 0, \\ p \geqslant \beta & \text{при } q = 1, \\ p = \beta & \text{при } 0 < q < 1; \end{cases} \tag{4.8}$$

при $b_1 < 0$:

$$\begin{cases} p \geqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \beta & \text{при } q = 0, \\ p \leqslant \beta & \text{при } q = 1, \\ p = \beta & \text{при } 0 < q < 1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Графическая интерпретация множества решений игрока **B** приведена на рис. 4.2.

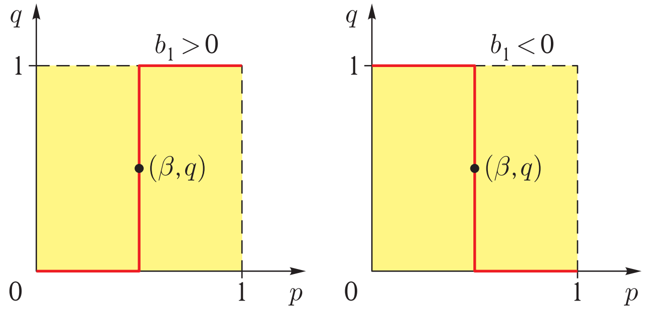


Рис. 4.2. Графическая интерпретация множества решений игрока **B**

Решение биматричной игры — пересечение множеств решений игрока **A** и **B**, то есть пара значений (p, q), являющихся общими для обоих множеств. Графическая интерпретация возможных решений биматричной игры представлена на рис. 4.3.

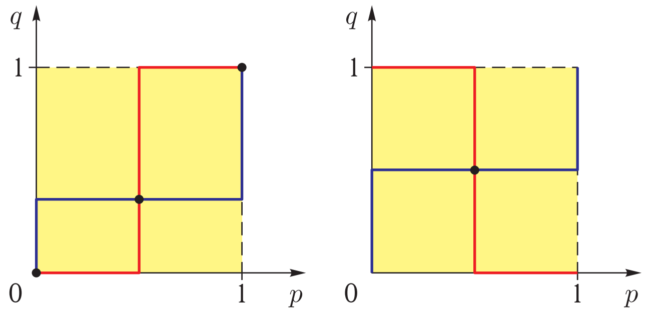


Рис. 4.3. Графическая интерпретация решений биматричной игры

Средние выигрыши игроков вычисляются подстановкой в формулы (4.1) значений p и q.

Из полученных соотношений видно, что при $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ следует нетривиальный вывод: в равновесной ситуации выбор игрока **A** полностью определяется элементами платежной матрицы игрока **B** и не зависит от элементов собственной платежной матрицы

$$p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}, \tag{4.10}$$

а выбор игрока **B** в равновесной ситуации полностью определяется элементами платежной матрицы игрока **A** и не зависит от элементов собственной платежной матрицы

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \tag{4.11}$$

Отсюда следует, что равновесная ситуация игры определяется не столько стремлением игроков увеличить свой выигрыш, сколько их стремлением контролировать (минимизировать) выигрыш другого игрока. На самом деле, если изменить платежную матрицу игрока **A**, не меняя платежную матрицу игрока **B**, то игрок не изменит своего кажущегося ему «*равновесного*» поведения, он просто не заметит замену собственной платежной матрицы, тогда как игрок **B** изменит свою стратегию на новую, равновесную. Получается, что в неантагонистической, по определению биматричной игре антагонизм все-таки имеет место, но не антагонизм интересов, а антагонизм поведения.

В биматричных играх, в отличие от матричных, может быть несколько ситуаций равновесия в чистых стратегиях с различными средними выигрышами игроков (в матричной игре при наличии нескольких точек равновесия выигрыш игрока всегда одинаков), более того, в биматричной игре возможны ситуации равновесия как в чистых, так и в смешанных стратегиях одновременно. Важной особенностью равновесия по Нэшу в биматричной игре заключается в том, что отклонение от нее обоих игроков может приводить к увеличению выигрыша одного из них или обоих (см. раздел 4.3.1), в то время как действуя в одиночку, ни один игрок не сможет увеличить своего выигрыша.

Но тогда возникает вопрос — если средние выигрыши в разных точках равновесия разные, то какая равновесная ситуация является оптимальной? Позже мы рассмотрим такие ситуации. Следует отметить результат, полученный Дж. Харшаньи и Р. Зелтеном [83], которые ввели понятие «*равновесие дрожащей руки*», дополняющее принцип равновесия Нэша в некооперативных играх устойчивостью к малым отклонениям от равновесных стратегий игроков.

Пример 4.4

Решить биматричную игру, заданную платежными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения множества решений игрока $\mathbf{A}$ вычисляем

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -10 - 2 - 1 - 1 = -14,$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3, \quad a_3 = a_{21} - a_{22} = 1 - 1 = 0,$$

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-3}{-14} = \frac{3}{14}.$$

Так как $a_1 \leqslant 0$, то множество решений игрока $\mathbf{A}$ имеет вид (4.7)

$$\begin{cases} q \geqslant \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{3}{14} & \text{при } p = 0, \\ q \leqslant \dfrac{3}{14} & \text{при } p = 1, \\ q = \dfrac{3}{14} & \text{при } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Для определения множества решений игрока **B** вычисляем

$$b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = b_1 = 5 + 2 + 1 + 1 = 9,$$
$$b_{22} - b_{21} = b_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$\beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{9}, \quad b_3 = b_{12} - b_{22} = -2 - 1 = -3.$$

Так как $b_1 > 0$, то множество решений игрока **B** (4.9)

$$\begin{cases} p \leqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{2}{9} & \text{при } q = 0, \\ p \geqslant \dfrac{2}{9} & \text{при } q = 1, \\ p = \dfrac{2}{9} & \text{при } 0 < q < 1. \end{cases}$$

Множества решений игроков **A** и **B** пересекаются в точке C (рис. 4.4) с координатами $\left(p = \dfrac{2}{9};\ q = \dfrac{3}{14}\right)$, определяющими оптимальные смешанные стратегии игроков **A** и **B** $P\left\{\dfrac{2}{9}, \dfrac{7}{9}\right\}$, $Q\left\{\dfrac{3}{14}, \dfrac{11}{14}\right\}$. Средние выигрыши игроков в соответствии с (4.1) при этом будут равны

$$M(A) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} =$$
$$= (-10 - 2 - 1 - 1) \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + (2 + 1) \cdot \frac{2}{9} + (1 + 1) \cdot \frac{3}{14} - 1 = \frac{4}{7},$$
$$M(B) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22} =$$
$$= (5 + 2 + 1 + 1) \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + (-2 - 1) \cdot \frac{2}{9} + (-1 - 1)\frac{3}{14} + 1 = \frac{1}{3}.$$

На рис. 4.4 приведена графическая интерпретация решения матричной игры.

Для числа стратегий более двух решение достаточно просто достигается только при наличии точек равновесия в чистых стратегиях, которые и являются решением игры.

Например, в биматричной системе, заданной платежными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ 9 & 8 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

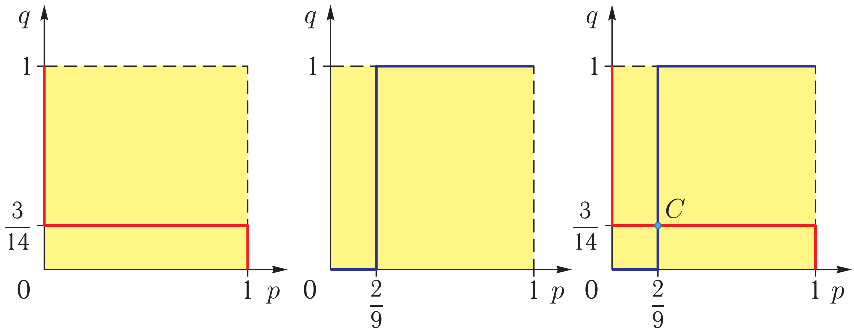


Рис. 4.4. Графическая интерпретация решения биматричной игры примера 4.4

максимумы в столбцах матрицы $\mathbf{A}$: $a_{41} = 9$, $a_{12} = 6$, $a_{13} = 9$, $a_{24} = 7$, $a_{15} = 5$ и в строках матрицы $\mathbf{B}$: $b_{21} = 9$, $b_{22} = 8$, $b_{13} = 7$, $b_{33} = 4$, $b_{34} = 8$ не пересекаются, следовательно, равновесные ситуации по Нэшу в чистых стратегиях отсутствуют.

В биматричной системе

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

максимумы в столбцах матрицы $\mathbf{A}$: $a_{21} = 9$, $a_{22} = 6$, $a_{33} = 8$, $a_{14} = 6$, $a_{15} = 9$ и в строках матрицы $\mathbf{B}$: $b_{15} = 6$, $b_{21} = 6$, $b_{33} = 9$, $b_{33} = 4$, $b_{43} = 6$, $b_{52} = 4$ пересекаются в ячейках, соответствующих равновесным ситуациям по Нэшу

$$\{a_{15} = 9,\ b_{15} = 6\}, \quad \{a_{21} = 9,\ b_{21} = 6\}, \quad \{a_{33} = 8,\ b_{33} = 9\}.$$

Решение биматричной игры с матрицами произвольной размерности в смешанных стратегиях является сложной задачей, доступной читателю, обладающему недюжинными математическими возможностям. В общем случае все сводится к многошаговой схеме поочередного выбора стратегий игроками. Это сложная многоэкстемальная задача математического нелинейного программирования с квадратичной целевой функцией и системой линейных ограничений. В настоящей книге, ориентированной на пользователя, не располагающего такими возможностями, мы такие решения опускаем. Читателя, обладающего достаточными математические возможностями, мы отсылаем к наиболее распространенному методу решения такой задачи — алгоритму Лемке–Хоусона, подробно изложенному в [60].

End keywords:

Биматричные игры, доминирование в биматричных играх, графическая интерпретация биматричной игры 2×2.

4.3. Прототипные биматричные игры

4.3.1. Дилемма заключенных [84–86]

«Не уверен — не предавай»
Максим Звонарев, р. 1956

Для описания и анализа реальных конфликтных ситуаций часто используются простейшие игровые модели — **прототипные** игры, предложенные для иллюстрации основных принципов теории игр.

Среди них особое место занимают ситуации, порождаемые так называемыми дилеммами, в которых игроки могут соперничать или сотрудничать друг с другом, а в ходе игры не ясно, какой вариант окажется выгодным для игрока, потому что он зависит от решения соперника. Специфика такой игры заключается в том, что игроки находятся во власти друг друга.

Одна из таких дилемм — «*дилемма заключенных*» — игра, породившая фундаментальную проблему теории игр, согласно которой игроки не всегда сотрудничают друг с другом, даже если это в их интересах. Проблема, «*тюремное*» название которой дал Альберт Такер (1905–1995), была сформулирована в 1950 г. Мерилом Фладом (1908–1991) и Мелвином Дрешером (1911–1992) из Принстона. Классическая формулировка проблемы звучит следующим образом.

Двух подозреваемых арестовали по подозрению в намерении совершить преступление и посадили в одиночные камеры без возможности общаться. Для того, чтобы заставить их признаться в преступлении, полицейские предложили сделку: если оба молчат, то получат по 1 году тюрьмы каждый; если один укажет на другого, а тот не заговорит, то предавший освобождается, а молчавший получает 9 лет тюрьмы; если оба обвинят друг друга, то каждый получает по 6 лет тюрьмы. Преступникам известно, что предложение сделано им обоим. Что же происходит? Каждый заключенный рассуждает: «*Если подельник все свалит на меня, мне 9 лет сидеть, а он будет на свободе. Несправедливо, однако. Если я его заложу, могу получить свободу. Стоит ли мучиться обоим, когда один может быть на свободе?*» В конечном счете чаще всего подозреваемые размышляют одинаково и предают друг друга, получая по 6 лет тюрьмы. Тогда как в случае обоюдного молчания, получили бы всего по 1 году тюрьмы.

Так в чем дилемма? А в том, что, предавая друг друга, приятели получают в сумме 12 лет тюрьмы (по 6 года каждый), а вот если бы промолчали, то получили бы по 1 году каждый (в сумме 2 года). Но подельники не доверяют друг другу, посему поступают иначе. Но это все психология, обидно, что и бесстрастная математика теории игр, и отец ее базового принципа — равновесия — Джон Нэш тоже оказывается на стороне предательства.

В дилемме заключенного предательство строго доминирует над сотрудничеством, поэтому единственное возможное равновесие — предательство обоих участников. Проще говоря, не важно, что сделает другой игрок, каждый выиграет больше, если предаст. Поскольку в любой ситуации предать выгоднее, чем сотрудничать, рациональные игроки выберут предательство.

Действуя по отдельности рационально, участники приходят к нерациональному решению: если оба предадут, они получат в сумме больший срок, чем если бы сотрудничали. Дилемма заключается в том, что единственное равновесие по Нэшу в этой игре не ведет к Парето-оптимальному решению, то есть к такому решению, при котором любое отступление от него приводит только к уменьшению выигрыша. Оптимальность по Парето гласит: следует считать улучшением любое изменение, которое никому не приносит убытков и которое приносит людям пользу (по их собственной оценке).

Ничего не напоминает тебе, уважаемый читатель, такая формулировка? Думаем, напоминает наше сравнительно недавнее прошлое. Оптимальность по Парето неприменима к ситуации, когда изменение приносит пользу одним и в то же время потери другим. Именно такая ситуация случилась с нами в недавнем прошлом, когда либеральный авангард удачно распределил общественное благосостояние (попутно утверждая, что его и нет вовсе), использовав равновесие по Нэшу, в свою пользу (читай — предав партнера — остальных). Здесь удачно подходит термин «*диллема заключенных*», напрашивается следующая аналогия: заключенные — это будущие олигархи и остальная страна. Равновесие по Нэшу — олигархи предают страну и весьма выигрывают, остальные получают приличный срок отсидки в нищете. Возможны различные оптимальные по Парето варианты распределения ресурсов общества. Экономическая теория не может определить, какое из оптимальных по Парето распределений ресурсов общества является наилучшим с социальной точки зрения. Выбор оптимального варианта — извечная проблема социальной справедливости. Перемещение из одной точки эффективного по Парето распределения к другой такой же точке в общем случае требует государственного вмешательства в процесс перераспределения ресурсов общества.

Содержательно оптимальность по Парето означает, что нет иной ситуации, которая была бы предпочтительнее для обоих игроков. Парето-оптимальный исход игры может быть только в том случае, если нет исхода, его доминирующего. Формальное различие между ситуациями равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето заключается в следующем: в первом случае ни один игрок, действуя в одиночку, не сможет увеличить своего выигрыша, а во втором — оба игрока, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш каждого игрока. Парето-оптимальная пара стратегий обеспечивает больший суммарный выигрыш для обоих игроков по сравнению с ситуацией равновесия по Нэшу, когда при уменьшении суммарного выигрыша увеличивается выигрыш одного игрока (аналог обогащения за общественный счет).

Отвлекшись на тему социального компонента равновесий по Нэшу и Парето, вернемся к нашей теме — биматричной игре. Если для антагонистической матричной игры понятия равновесия по Нэшу и Парето-оптимальность эквивалентны, то для биматричной игры это не так. Если в антагонистической игре седловые точки (если их несколько) и соответствующие им оптимальные игровые ситуации эквивалентны, то в биматричной игре равновесия в общем случае не обладают таким свойством. Например, в биматричной системе с платежными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} = 4 & a_{12} = 0 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} = 1 & b_{12} = 0 \\ b_{21} = 0 & b_{22} = 4 \end{pmatrix}$$

имеются две равновесные ситуации в чистых стратегиях: $\{a_{11} = 4,\ b_{11} = 1\}$ и $\{a_{22} = 1,\ b_{22} = 4\}$. Однако они не образуют равновесную систему $\{a_{11}, b_{11}\} = 4 \neq \{a_{22}, b_{22}\} = 1$, а стратегии, образующие равновесные ситуации, не взаимозаменяемы: пары стратегий $\{a_{21}, b_{21}\}$ и $\{a_{12}, b_{12}\}$ не являются равновесными. Другими словами, несмотря на наличие в игре двух ситуаций равновесия в чистых стратегиях, исход игры непредсказуем.

Дилемма заключенных является прототипной моделью для анализа большого количества конфликтов в различных областях экономики, политики, социологии, военного дела. Это единственная игровая модель, которой посвящены тысячи статей и даже отдельная книга [84].

Рассмотрим дилемму заключенных, схематизированную в формате биматричной игры с парой платежных матриц 2×2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Если выполняется условие

$$a_{21} = b_{12} > a_{11} = b_{11} > a_{22} = b_{22} > a_{12} = b_{21}, \tag{4.12}$$

то матрицы будут соответствовать схеме дилеммы заключенных. Наблюдательный читатель, надеюсь, догадался, что матрицы в дилемме заключенных взаимно транспонированы.

Из условия (4.12) следует, что вторая строка матрицы $\mathbf{A}$ строго доминирует первую строку, которая может быть исключена из матрицы, одновременно с ней исключается и первый столбец матрицы $\mathbf{B}$, который строго доминируется ее вторым столбцом. В этом случае единственными равновесными решениями по Нэшу являются ситуации $\{A_1, B_2\}$ или $\{A_2, B_1\}$, что соответствует ситуации обоюдного предательства.

Выигрыши (минусы означают, что тюремный срок для игроков — не совсем выигрыш) в условиях нашей задачи представляются матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Так как $a_{21} = b_{12} = 0 > a_{11} = b_{11} = -1 > a_{22} = b_{22} = -6 > a_{12} = b_{21} = -9$, имеет место дилемма заключенных.

Вычислим исходные данные:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -1 + 9 - 0 - 6 = 2;$$
$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -6 + 9 = 3; \quad \alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2};$$
$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = -1 - 0 + 9 - 6 = 2;$$
$$b_2 = b_{22} - b_{21} = -6 + 9 = 3; \quad \beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{2}.$$

Так как $a_1 = 2 > 0$, множество решений игрока $\mathbf{A}$ имеет вид (4.6)

$$\begin{cases} q \leqslant \dfrac{3}{2} & \text{при } p = 0, \\ q \geqslant \dfrac{3}{2} & \text{при } p = 1, \\ q = \dfrac{3}{2} & \text{при } 0 < p < 1. \end{cases}$$

При $b_1 = 2 > 0$ множество решений игрока $\mathbf{B}$ будет (4.8)

$$\begin{cases} p \leqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{2}{9} & \text{при } q = 0, \\ p \geqslant \dfrac{2}{9} & \text{при } q = 1, \\ p = \dfrac{2}{9} & \text{при } 0 < q < 1. \end{cases}$$

Множества решений игроков $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ пересекаются в точке (рис. 4.5) с координатами ($p = 0$, $q = 0$). Средние выигрыши игроков при этом будут равны

$$\begin{aligned} M(A) &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) \cdot p \cdot q + (a_{12} - a_{22}) \cdot p + \\ &\quad + (a_{21} - a_{22}) \cdot q + a_{22} = (-1 + 9 - 0 - 6) \cdot 0 \cdot 0 + \\ &\quad + (-9 + 6) \cdot 0 + (0 + 6) \cdot 0 - 6 = -6, \\ M(B) &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}) \cdot p \cdot q + (b_{12} - b_{22}) \cdot p + \\ &\quad + (b_{21} - b_{22}) \cdot q + b_{22} = (-1 - 0 + 9 - 6) \cdot 0 \cdot 0 + \\ &\quad + (0 + 6) \cdot 0 + (-9 + 6) \cdot 0 - 6 = -6. \end{aligned}$$

В единственной равновесной точке ($p = 0$, $q = 0$), соответствующей второй чистой ситуации $\{A_2, B_2\}$ — *«сознаться»* (то есть предать друг друга), узники получают в сумме 12 лет

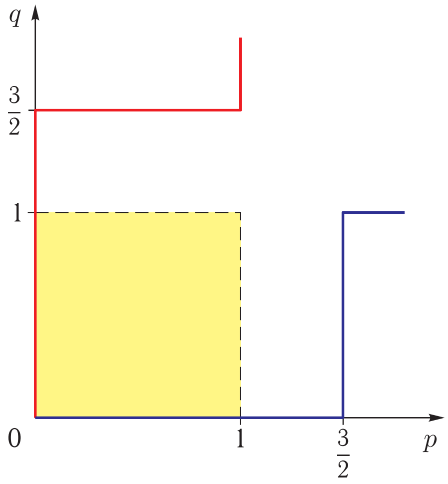


Рис. 4.5. Графическая интерпретация игры «*дилемма заключенных*»

заключения. Отклонение от ситуации равновесия одного из них не дает никаких преимуществ (в сумме они получают 9 лет заключения), однако **одновременное отклонение обоих заключенных от равновесной точки** (!), когда они одновременно выбирают первые чистые стратегии $\{A_1, B_1\}$ — «*молчать*» (не предавать друг друга), **дает им суммарно больший выигрыш** по сравнению с равновесной ситуацией — только по 1 году отсидки каждому, сидеть в сумме 2 года вместо 9 (в этом и есть дилемма):

$$\begin{aligned} M(A) = {} & (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + \\ & + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = (-1 + 9 - 0 - 6) \cdot 1 \cdot 1 + \\ & + (-9 + 6) \cdot 1 + (0 + 6) \cdot 1 - 6 = -1; \\ M(B) = {} & (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + \\ & + (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = (-1 - 0 + 9 - 6) \cdot 1 \cdot 1 + \\ & + (0 + 6) \cdot 1 + (-9 + 6) \cdot 1 - 6 = -1. \end{aligned}$$

Но, к сожалению, обмен информацией между ними недопустим (игра не допускает кооперации), и взаимное недоверие делает свое грязное дело.

Замечание. Внимательный читатель, наткнувшись на значения вероятностей p, $q = \dfrac{3}{2}$ и более, будет ошарашен — как такое может быть? Ведь по определению $0 < p < 1$, $0 < q < 1$. И будет прав. Будем считать размашистые ветви на рис. 4.5 всего лишь лишенным здравого смысла «*моментом графики*» и не более. Ведь поле битвы любой игры в смешанных стратегиях — единичный квадрат, за пределами которого «*вечный мир*».

4.3.2. Студент–преподаватель

Удивительная вещь — экзамен.
Одних он удивляет вопросами,
других — ответами

Студент (игрок **A**) сдает зачет, преподаватель (игрок **B**) принимает зачет. Игрок **A** имеет две чистые стратегии: A_1 — подготовиться к сдаче зачета, A_2 — не готовиться к сдаче зачета. У игрока **B** также две чистые стратегии: B_1 — принять зачет, B_2 — отправить на пересдачу. Возможные варианты количественных оценок для студента (матрица **A**): готовится и получает зачет $\to \{A_1, B_1\} \to$ все нормально (2), готовился, но не сдал зачет $\to \{A_1, B_2\} \to$ обидно (-1), не готовился, но сдал зачет $\to$ $\to \{A_2, B_1\} \to$ удалось обмануть (1), не готовился, отправился на пересдачу $\to \{A_2, B_2\} \to$ заслуженная оценка (0). Для преподавателя (матрица **B**) варианты количественных оценок будут: принял зачет у подготовившегося студента ситуация $\to$ $\to \{B_1, A_1\} \to$ все нормально (1), не принял зачет у подготовившегося студента $\to \{B_2, A_1\} \to$ был неправ (-3), принял зачет у не подготовившегося студента $\to \{B_1, A_2\} \to$ дал себя обмануть (-2), не принял зачет у не подготовившегося студента $\to$ $\to \{B_2, A_2\} \to$ отправил на пересдачу (-1).

В такой схематизации имеет место биматричная игра с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A \end{array}, \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}.$$

Вычислим исходные данные:

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 2 + 1 - 1 - +0 = 2;$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = 0 + 1 = 1; \quad \alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2};$$

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 1 + 3 + 2 - 1 = 5;$$

$$b_2 = b_{22} - b_{21} = -1 + 2 = 3; \quad \beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}.$$

Так как $a_1 = 2 > 0$, множество решений игрока **A** имеет вид (4.6)

$$\begin{cases} q \leqslant \dfrac{1}{2} & \text{при } p = 0, \\ q \geqslant \dfrac{1}{2} & \text{при } p = 1, \\ q = \dfrac{1}{2} & \text{при } 0 < p < 1. \end{cases}$$

При $b_1 = 5 > 0$ множество решений игрока **B** будет (4.8)

$$\begin{cases} p \leqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{1}{5} & \text{при } q = 0, \\ p \geqslant \dfrac{1}{5} & \text{при } q = 1, \\ p = \dfrac{1}{5} & \text{при } 0 < q < 1. \end{cases}$$

Множества решений **A** и **B** пересекаются в точках (рис. 4.6): C — с координатами $(p = 0,\ q = 0)$; D — с координатами $\left(p = \dfrac{1}{5},\ q = \dfrac{1}{2}\right)$ и F — с координатами $(p = 1,\ q = 1)$, которые определяются двумя чистыми стратегиями $(p = 0, q = 0)$ и $(p = 1, q = 1)$ и одной оптимальной смешанной $\left(p = \dfrac{1}{5},\ q = \dfrac{1}{2}\right)$.

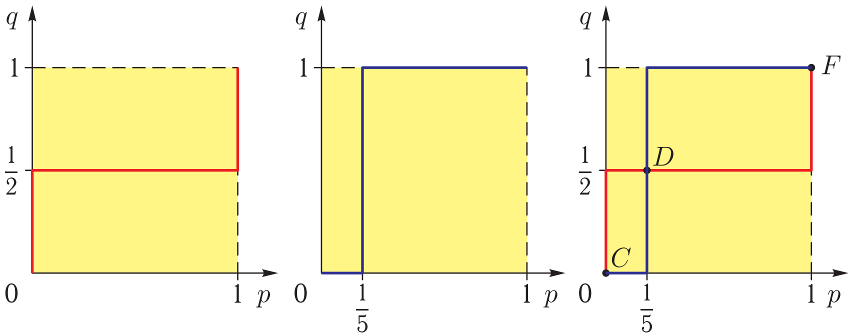


Рис. 4.6. Графическая интерпретация игры «*студент–преподаватель*»

Средние выигрыши игроков при этом будут равны:

- в точке C

$$\begin{aligned}M(A) &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + \\ &+ (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = (2 + 1 - 1 + 0) \cdot 0 \cdot 0 + \\ &+ (-1 - 0) \cdot 0 + (1 - 0) \cdot 0 + 0 = 0, \\ M(B) &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + \\ &+ (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = (1 + 3 + 2 - 1) \cdot 0 \cdot 0 + \\ &+ (-3 + 1) \cdot 0 + (-2 + 1) \cdot 0 - 1 = -1;\end{aligned}$$

- в точке D

$$\begin{aligned}M(A) &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + \\ &+ (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = (2 + 1 - 1 + 0) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \\ &+ (-1 - 0) \cdot \frac{1}{5} + (1 - 0) \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}, \\ M(B) &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + \\ &+ (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = (1 + 3 + 2 - 1) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \\ &+ (-3 + 1) \cdot \frac{1}{5} + (-2 + 1) \cdot \frac{1}{2} - 1 = -\frac{7}{5};\end{aligned}$$

- в точке F

$$\begin{aligned}M(A) &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + \\ &+ (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = (2 + 1 - 1 + 0) \cdot 1 \cdot 1 + \\ &+ (-1 - 0) \cdot 1 + (1 - 0) \cdot 1 + 0 = 2, \\ M(B) &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + \\ &+ (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = (1 + 3 + 2 - 1) \cdot 1 \cdot 1 + \\ &+ (-3 + 1) \cdot 1 + (-2 + 1) \cdot 1 - 1 = 1.\end{aligned}$$

Анализ решения игры позволяет сделать вывод, что ситуацией, приносящей наибольший выигрыш, является сочетание двух чистых стратегий ($p = 1$, $q = 1$) в точке F — «*студент подготовился к зачету, и преподаватель его принял*».

Здесь реализован редкий на практике случай, когда выигрыши каждого игрока достигают максимума одновременно:

$$M(A)_F = 2 > M(A)_C = 0 > M(A)_D = \frac{1}{2}$$

$$\text{и} \quad M(B)_F = 1 > M(B)_C = -1 > M(D)_D = -\frac{7}{5}.$$

4.3.3. Семейный спор

«Можно доказать даме, что она не права,
но нельзя уверить ее в этом»
Чертон Коллинз (1848–1908)

В случае антагонистической игры приемлемые стратегии игроков совпадают с их оптимальными стратегиями. Для игр неантагонистических понятие «оптимальная стратегия» вообще может быть лишено смысла, так как часто в таких играх приходится говорить не об оптимальной стратегии каждого игрока, а об оптимальном сочетании стратегий игроков. В бескоалиционных играх понятие «оптимальность» применимо не к оценке действий каждого игрока, а к совокупности действий всех игроков. Чаще всего в бескоалиционной игре решением является нахождение ситуации равновесия путем координации действий игроков.

К координационным играм такого типа относится игровая модель, условно называемая «*семейный спор*». Классическая интерпретация этой игры такова. Муж (игрок $\mathbf{A}$) и жена (игрок $\mathbf{B}$) могут выбрать один из двух вариантов проведения уикенда: пойти на футбольный матч или посетить театр. Естественно, ситуация непростая, муж стремится на футбол, жена — на вечерний спектакль. Однако оба предпочитают провести воскресный вечер вместе. Схематизировано представим игру биматричной платежной системой

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}, \end{array}$$

где стратегии игрока $\mathbf{A}$: A_1 — выбираю футбол, A_2 — иду а театр; игрока $\mathbf{B}$: B_1 — иду на футбол, B_2 — иду в театр.

Очевидно, что для мужа предпочтительнее ситуация $\{A_1, B_1\}$ — идем с женой на футбол, а для жены предпочтительнее ситуация $\{A_2, B_2\}$ — с мужем идем в театр. Обе ситуации являются равновесными точками по Нэшу в чистых стратегиях. Однако есть еще одна точка равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. В соответствии с (4.6), (4.8) имеют место соотношения

$$\begin{cases} q \leqslant \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha & \text{при } p = 0, \\ q \geqslant \alpha & \text{при } p = 1, \\ q = \alpha & \text{при } 0 < p < 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} p \leqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \beta & \text{при } q = 0, \\ p \geqslant \beta & \text{при } q = 1, \\ p = \beta & \text{при } 0 < q < 1, \end{cases}$$

где

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad a_2 = a_{22} - a_{12},$$
$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \quad b_2 = b_{22} - b_{21} \quad \text{и}$$
$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1,$$
$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{21} = 0, \quad b_{22} = 2,$$
$$a_1 = 2 = -0 - 0 - +1 = 3 > 0, \quad a_2 = 1 - 0 = 1,$$
$$b_1 = 1 - 0 - 0 - +2 = 3 > 0, \quad b_2 = 2 - 0 = 2,$$
$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{3}, \quad \nu_A = \nu_B = \frac{2}{3}.$$

Графическая интерпретация решения игры «*семейный спор*» приведена на рис. 4.7.

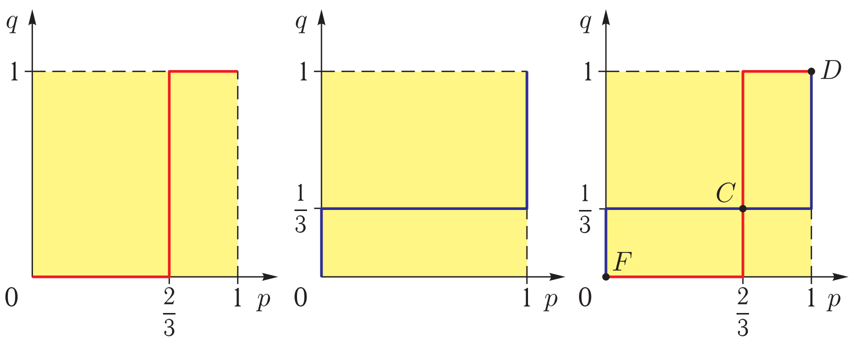


Рис. 4.7. Графическая интерпретация игры «*семейный спор*»

Из решения игры в смешанных стратегиях $P^0\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$, $Q^0\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, $\nu_A = \nu_B = \frac{2}{3}$ следует, что в точке равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях (точка C) выигрыши каждого игрока $\nu_A = \nu_B = \frac{2}{3}$ меньше, чем в точках равновесия в чистых стратегиях, где они равны 1 или 2 в зависимости от ситуации.

Хотя стратегии $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$ и являются оптимальными для игроков, так как дают максимальные средние выигрыши, но не являются справедливыми, так эти выигрыши для них не одинаковы.

В антагонистической игре ни одному из игроков не выгодно информировать другого о своей стратегии, в рассматриваемой биматричной игре — наоборот. Если игроки не будут общаться, но оба обладают твердым характером (первый выбирает непреклонно стратегию A_1, второй — также непреклонно стратегию B_1), то в результате оба проигрывают. Аналогичная ситуация будет и в том случае, когда каждый игрок имеет мягкий и уступчивый характер. Другими словами, уступчивость и справедливость входит в противоречие с твердостью и выгодностью.

Очевидно, лучше договориться об одном из вариантов $\{A_1, B_1\}$ или $\{A_2, B_2\}$, чередуя их случайно (например, путем подкидывания монеты: орел — театр, решка — футбол). Иными словами, оптимальный вариант такой игры достигается координированием выбора игроков, причем координатором выступает случай. В антагонистической игре, в отличие от рассматриваемой биматричной, не имеет смысла вести переговоры до игры и уславливаться о совместном плане действий, на то она и антагонистическая.

В игре «*семейный спор*» координация выбора игроков, пусть и случайная, доставляет им наилучший результат. Каждый игрок поступается частично своими предпочтениями, но сполна компенсирует эти потери, приобретая возможность проводить чаще свободные вечера вместе.

4.3.4. Силовое соперничество

«Понимание — начало согласия»
Б. Спиноза (1632–1677)

За 5600 лет летописной истории человечество пережило 14 600 войн ($\approx$ по 2,6 войны ежегодно), только 10 из 185 поколений, жившие в этот период, не испытали ужасов войны. В конце концов, «*если убить убийцу, количество убийц не изменяется*». Теория игр является эффективным инструментом анализа такой крайней формы военно-политического силового соперничества игроков [86–90].

С конца 40-х–начала 50-х годов прошлого столетия большинство монографий по теории игр перегружено примерами вооруженного соперничества. Особенно в этом потоке преуспевала корпорация RAND Corp. [91–93]. Одним из таких конфликтов, заполнивших экраны и страницы масс-медиа, является конфликт центральной власти с районами Юго-Востока в Украине.

При исследовании природы силовых международных конфликтов и гонки вооружения в качестве прототипной модели с успехом применяется модель игры «*дилемма заключенного*» (см. разд. 4.3.4).

Схематизируем игровую модель следующим образом: каждая из двух противоборствующих сторон (игроки **U** и **N**) может независимо выбрать любую из двух стратегий: $St(1)$ — отказаться от сотрудничества и вооружиться для продолжения конфликта или $St(2)$ — сотрудничать и разоружиться. Возможные игровые ситуации приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Возможные исходы игры «*дилемма заключенных*»

Игрок **U**	Игрок **N**	
	Соперничество	Сотрудничество
Соперничество	$\{St(1), St(1)\}$	$\{St(1), St(2)\}$
Сотрудничество	$\{St(2), St(1)\}$	$\{St(2), St(2)\}$

Присвоив возможным ситуациям условные численные оценки (в теории игр — платежи), трансформируем табл. 4.1 в биматричную матрицу игры в соответствии с табл. 4.2.

Таблица 4.2. Матрицы игры «*дилемма заключенных*»

$$\mathbf{N} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} St(1) & St(2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} St(1) \\ St(2) \end{array} \end{array}, \quad \mathbf{U} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} St(1) & St(2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} St(1) \\ St(2) \end{array} \end{array}.$$

Проанализируем возникшую дилемму. Как следует вести себя игроку **N**? Для любого из вариантов, доступных игроку **U**, $St(1)$ или $St(2)$, игроку **N** выгоднее вооружаться: если игрок **U** выберет вариант $St(1)$, то игрок **N**, применив стратегию $St(1)$, выиграет 2 ед. или, применив стратегию $S(2)$, не проиграет (выиграет 0 ед.). Если игрок **U** выберет стратегию $St(2)$, игрок **N**, применив стратегию $St(1)$, выиграет 5 ед. или, применив стратегию $St(2)$, выиграет 4 ед. То есть, выбирая соперничество, игрок **N** в худшем случае не проиграет. В силу симметричности матрицы к аналогичным выводам придет и игрок **U**.

Из матрицы игры (табл. 4.2) следует, что каждому игроку выгодно, если противник использует стратегию $St(2)$ — сотрудничество, так как его выигрыш возрастает (5 ед. и 4 ед. против 2 ед. и 0 ед.). Наибольший совокупный выигрыш сторон $St(2) + St(2) = 4 + 4 = 8$ ед. достигается при обоюдном сотрудничестве.

С другой стороны, если игрок **N** выберет стратегию $St(2)$, сотрудничество и разоружение, не зная выбора противоборствующей стороны, он подвергается большому риску: в случае отказа игрока **U** от сотрудничества при выборе стратегии $St(1)$ значительные потери игрока **N** неизбежны. Отсюда следует фундаментальный вывод — основной проблемой игры является даже не величина выигрыша, а неуверенность игрока в ответном сотрудничестве. В противном случае каждая из противоборствующих сторон будет стремиться защитить себя от возможного отказа сотрудничать со стороны оппонента.

Если игра проводится один раз, то надеяться на сотрудничество не приходится и вероятный исход игры — конфронтация. Только при многократном повторении игры можно выявить намерения противника и сформировать понимание неизбежности сотрудничества. Другими словами, сотрудничество достижимо только в длительной перспективе. По мнению нобелевского лауреата Роберта Ауманна, *«если конфликт длится какое-то время, поведение его участников становится принципиально другим»*. Только на такую перспективу можно надеяться. Одно огорчает, в ожидании светлой перспективы *«надежда питается людьми»* (Славиан Троцкий [10, с. 478]).

Остается один немаловажный вопрос: что делать, пока соперник находится в стадии созревания до состояния сотрудничества. Можно и не дожить. Эту проблему рассматривал математик и политолог из Мичигана Роберт Аксельрод (р. 1943), изложивший полученные результаты в книге [94]. Он исследовал эволюцию кооперации в игре и организовал турнир экспертов по теории игр на создание лучшей стратегии для *«дилеммы заключенных»*. В турнире участвовали и программы — *«мошенники»*, пытавшиеся обмануть оппонента. В результате лучшей (и, как оказалось, самой простой) была признана стратегия, предложенная сотрудником RAND Corp., нашим бывшим соотечественником Анатолем Рапопортом [84], так называемая TFT-стратегия *«око за око»* (*от анг. tit-for-tat — дословно «то за это»*).

Ее суть заключается в следующем: не предавай первым; отвечай взаимностью как на предательство, так и на сотрудничество; будь предсказуемым; никогда не пытайся набирать больше очков, чем оппонент, так как проигрыш оппонента приведет тебя к собственному проигрышу.

Логический анализ приводит к неожиданному выводу — для формирования выигрышной стратегии не требуется даже сознательный выбор, носители неэффективных стратегий будут удалены естественным отбором. Представим себе двух первобытных аборигенов, перед каждым из которых стоит выбор: или обменяться ресурсами (добытой живностью), или стукнуть приятеля дубиной и все забрать себе. Если это единичная встреча и соперник проявил дружелюбие, все ясно — дубиной его по голове и отобрать добычу. Если же встречаетесь часто, то лучше сотрудничать, а то при следующей встрече можно и самому схлопотать дубиной по голове. Подобное на бессознательном уровне происходило, да и происходит вечно, начиная с игр первых молекул ДНК в первичном бульоне. Носители неэффективных стратегий удалялись из него бессознательным естественным отбором.

Даже враждебный оппонент во имя собственного блага будет сотрудничать. В качестве примера можно привести стратегические договоренности СССР – США в области контроля над ядерными вооружениями в годы «*холодной войны*».

Основной вывод Р. Аксельрода состоит в том, что поддержание политики сотрудничества имеет смысл только тогда, когда высокая вероятность повторных встреч с противником неизбежна. В качестве примера такого сотрудничества он приводит отказ стрелять друг в друга немцев и солдат союзников во время длительных «*окопных*» противостояний во время Первой мировой войны, несмотря на приказы командиров. В нашем случае это также имеет место, нам никуда не деться от постоянных контактов и встреч с нашим крупнейшим соседом, с которым веками жили в одной коммунальной квартире. Анализ показывает, что даже не совсем умный, эгоистичный и нечестный сосед в конце концов приходит к сотрудничеству, понимая, что для него выгоднее быть честным (череда газовых переговоров Украина–Россия при участии Евросоюза неизбежно кончается поставками газа).

Парадокс «*дилеммы заключенных*» состоит в том, что в этой игре предательство строго доминирует над сотрудничеством, поэтому единственное возможное равновесие по Нэшу в игре достигается при обоюдном предательстве [84, 85].

Рассмотрим теперь обсуждаемую гипотезу, утверждающую, что одна из сторон не является игроком в прямом смысле слова, обслуживая интересы некоей третьей стороны — бенефициара результатов игры. По этому поводу стоит вспомнить английского философа Томаса Гоббса (1588–1679), рассматривавшего около 500 лет назад проблему, подобную «*дилемме заключенных*». Гоббс исходил из того, что изначально общество находится в анархии, где правит только жесткая конкуренция, предполагающая единственный способ разрешения конфликтов — конкурентное соперничество. По его мнению, для того, чтобы сотрудничество стало возможным, необходим общественный договор и меры по принуждению к нему. Общество должно подчиняться некоему независимому регулятору, модерирующему возникающие проблемы в сторону сотрудничества. Решения о сотрудничестве или соперничестве не должны приниматься только самими конкурирующими субъектами.

Во времена Гоббса таким регулятором предполагалась абсолютная монархия, в наше время им является глобальная общественно-политическая организация — ООН, созданная множеством потенциальных игроков специально для этих целей.

Вернемся к гипотезе, утверждающей, что игрок $\mathbf{Y}$ не является реальным игроком, выполняя роль скорее крупье, обслуживающего игру более могущественных игроков (обозначим их $\mathbf{U}$ и $\mathbf{R}$), один из которых преследует цель абсолютного доминирования. Схематизированной моделью такой ситуации является другая известная прототипная игра «*струсил–проиграл*». Она, как и «*дилемма заключенных*», является игрой с неполной информацией, показывающей, что стремление каждой стороны достичь своих кратковременных интересов в перспективе приводит к катастрофическим результатам для обоих игроков. Но между этими играми есть существенное различие: если в «*дилемме заключенных*» наибольший результат является следствием совпадения стратегий игроков, то в игре «*струсил–проиграл*» наоборот.

Суть игры «*струсил–проиграл*» заключается в противостоянии двух соперников в погранично рискованной ситуации. Модель игры: два водителя мчатся навстречу друг другу, каждый должен принять решение — свернуть (U_1, R_1) в последний момент, чтобы избежать столкновения, или нет (стратегии (U_2, R_2)). Свернувший первым проигрывает. Проиллюстрируем анализ игровой ситуации формализованными математическими методами теории игр на примере игровой платежной матрицы игры «струсил–проиграл». Будем рассматривать игру в формате биматричной игры с двумя платежными матрицами (табл. 4.3):

Таблица 4.3. Платежная матрица игры «*струсил – проиграл*»

$$\mathbf{U} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} R_1 & R_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \end{array} \quad \text{и} \quad \mathbf{R} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} R_1 & R_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \end{array}$$

- ни один из игроков не сворачивает, машины сталкиваются, оба погибают (наихудший вариант, оцениваемый условно 0 баллами каждому игроку);
- оба игрока сворачивают в последний момент, победителя нет (хороший результат для обоих, несмотря на взаимную потерю «*крутости*», оцениваемый 3 баллами каждому игроку);
- один из игроков сворачивает, другой нет (сворачивающий теряет «*крутость*» и получает 1 балл, второй становится «*крутым*» победителем и получает 5 баллов). Игровая ситуация представлена платежной матрицей в табл. 4.3.

Анализ платежной матрицы приводит к выводу, что каждый игрок в стремлении достигнуть максимального результата в 5 баллов будет пытаться не сворачивать, что приводит к наихудшему результату для обоих. Очевидно, лучше свернуть в сторону, получив отличный от нуля результат, но никто не хочет делать это первым, так как получит только 1 балл, а соперник 5 баллов.

Обоюдное сотрудничество (оба свернули) дает хороший результат, но оставляет привкус поражения (каждому игроку по 3 балла). В определенном смысле игра «*струсил–проиграл*» является моделью переговоров, когда каждый участник стремится пойти на уступки как можно позже, заставив соперника действовать «*разумно*», то есть свернуть с дороги и избежать столкновения. Часто отличительной чертой такой игры является показательная рефлексия — демонстрация игроком «*крутости*» своей стратегии (например, он блокирует свой руль), принуждая соперника использовать противоположную стратегию и свернуть с дороги (что-то очень это напоминает введение санкций одной из сторон против другой во вред себе).

Анализ игр «*дилемма заключенных*» и «*струсил–проиграл*» является примером того, как сложно найти решение в таких, казалось бы, простых ситуациях, в которых возможно и сотрудничество и соперничество.

Обозначим смешанную стратегию игрока **U** через $P\{p, 1-p\}$, а игрока **R** через $Q\{q, 1-q\}$, где p и q — вероятности реализации игроками своих чистых стратегии «*сотрудничать – свернуть*», а $(1-p)$, $(1-q)$ — вероятности чистых стратегий «*соперничать – не сворачивать*».

В нашем случае

$$\begin{gathered}
a_{11} = 3, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 5, \quad a_{22} = 0, \\
b_{11} = 3, \quad b_{12} = 5, \quad b_{21} = 1, \quad b_{22} = 0, \\
a_1 = 3 - 1 - 5 + 0 = -3, \quad a_2 = 0 - 1 = -1, \\
b_1 = 3 - 5 - 1 + 0 = -3, \quad b_2 = 0 - 1 = -1.
\end{gathered}$$

Так как $a_1 = -3 < 0$ и $b_1 = -3 < 0$, в соответствии с (4.7) и (4.9) решением игры будет

$$\begin{cases}
q \geqslant \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{3} & \text{при } p = 0, \\
q \leqslant \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{3} & \text{при } p = 1, \\
q = \dfrac{1}{3} & \text{при } 0 < p < 1
\end{cases}
\quad \text{и} \quad
\begin{cases}
p \geqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{1}{3} & \text{при } q = 0, \\
p \leqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{1}{3} & \text{при } q = 1, \\
p = \dfrac{1}{3} & \text{при } 0 < q < 1.
\end{cases}$$

Графическая интерпретация игры приведена на рис. 4.8.

Из рис. 4.8 следует, что игра имеет решения в трех точках C, D и F. Решение в точке неизбежной катастрофы ($p = 0$, $q = 0$), как и следует ожидать, отсутствует. Математические ожидания выигрышей игроков в точках C, D, F вычисляются по формулам (4.1):

$$\begin{aligned}
M(U) &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + \\
&\quad + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} = -3pq + p + 5q; \\
M(R) &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + \\
&\quad + (b_{21} - b_{22})q + b_{22} = -3pq + 5p + q.
\end{aligned}$$

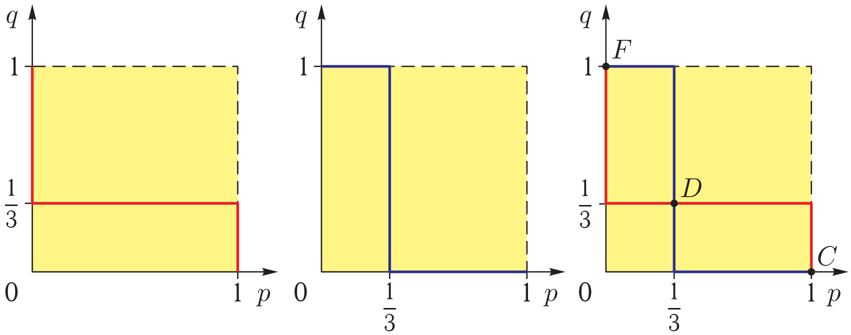


Рис. 4.8. Графическая интерпретация игры «*струсил–проиграл*» (красный — игрок **U**, синий — игрок **R**)

В точке C $(p = 1,\ q = 0)$

$$M_C(U) = -3 \cdot 1 \cdot 0 + 1 + 5 \cdot 0 = 1,$$
$$M_C(R) = -3 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 0 = 5.$$

В точке D $\left(p = \dfrac{1}{3},\ q = \dfrac{1}{3}\right)$

$$M_D(U) = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$
$$M_D(R) = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

В точке F $(p = 0,\ q = 1)$

$$M_F(U) = -3 \cdot 0 \cdot 1 + 0 + 5 \cdot 1 = 5,$$
$$M_F(R) = -3 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Очевидно, оптимальным решением игры является отказ игроков от попытки получить максимальный выигрыш (точки C и F); в этом случае усилиями одного из игроков, **U** (точка C) или **R** (точка F), катастрофа устраняется, что вполне компенсирует потерю «*крутости*» одним из них. Математическое ожидание суммарного выигрыша игроков равно 6 ед. В точке D математическое ожидание суммарного выигрыша $\dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{3} < 6$, но главный проигрыш — высокий риск (30 %) катастрофы из-за неуступчивости соперников.

Остается вопрос: какой из двух наиболее приемлемых вариантов равновесия (точки C и F) будет реализован игроками, кому придется уступить? Возможно, ответ зависит от репутации соперников. Равновесие равновесием, но хотелось бы не за счет потери собственной репутации. Если про одного игрока известно, что в прошлых игровых взаимодействиях он никогда не сворачивал, а другой игрок не имеет такой репутации, то следует ожидать, что свернет второй игрок, а не первый. В таких играх с нессиметричными равновесиями репутации игроков самоподдерживаются от игры к игре. Именно поэтому неудача устранения Асада в Сирии — весьма неприятный прецедент для США, именно поэтому они с настойчивостью продолжают разрушительную политику на Украине. Повторение сирийского фиаско, иракского конфуза с пробиркой отравляющего вещества и оружием массового поражения, ливийского беспредела отражается негативно на репутации крутого парня, что чревато теми самыми репутационными потерями, которые перестают самоподдерживаться.

Ответ на вопрос о том, кто выиграл и кто проиграл в такой экстремальной игре, как «*струсил–проиграл*», не так прост, как кажется на первый взгляд. Например, кто выиграл и кто проиграл в кубинском кризисе — США или СССР? Прежде всего, выиграли оба и, прежде всего, — мы с вами, живущие сейчас, поскольку избежали глобального ракетно-ядерного конфликта. Но до сих пор, спустя полвека, раздаются мнения, что США однозначно выиграли в этом кризисе, так как добились важной уступки от СССР (убрать свои ракеты с Кубы) взамен символической уступки США — убрать ракеты из Турции. Такая оценка хромает, потому что это было не символической уступкой США, а ответом на категорическое требование СССР. Не стоит забывать и о том, что США были вынуждены дать гарантии о ненападении на Кубу, которые, кстати, не нарушаются вот уже 50 лет. Да вскоре на вооружение были поставлены межконтинентальные ракеты, которые вообще сняли проблему. В конце концов, нелогично считать выигрышем ошибку, признав которую, США исправили ее через 50 лет, восстанавливая отношения с Кубой.

Вообще, теория игр является весьма непростой областью знания и при обращении к ней необходимо соблюдать осторожность и знать границы ее применения, понимая, что упрощенные толкования ее выводов чреваты скрытыми опасностями. Еще в XII веке Шота Руставели (1160/1166–1216) не без сарказма заметил в своей великой поэме «*Витязь в тигровой шкуре*»:

«*Всякий мнит себя стратегом, видя бой со стороны*». Однако и профессионалам от стратегии не помешает математика теории игр — хуже не будет.

К сожалению, прежде чем прийти к оптимальному решению в реальных ситуациях, игроки тратят длительное время на осознание его безальтернативности. В пограничной ситуации игры «*струсил–проиграл*» времени, необходимого для осознания этой истины, может и не представится.

Однако вывод самого авторитетного исследования по проблемам сотрудничества [94] позитивен — в долгосрочной перспективе сотрудничество всегда предпочтительнее предательства, из чего следует парадоксальный вывод: «*альтруизм является эволюционно выигрышной стратегией*». История учит, что никогда ни один силовой конфликт не был разрешен насилием. Можно победить или проиграть, но рано или поздно все равно придется договариваться.

Для взаимного альтруизма требуется только пара носителей христианской этики «*око за око*», живущих рядом; они смогут защититься от мошенников, имея преимущество благодаря сотрудничеству друг с другом. Такая стратегия и будет распространяться.

4.3.5. Задача инспектирования

«Если ты не заметил, что у тебя все хорошо, налоговая инспекция напомнит»
Михаил Мамчич (р. 1964)

Из названия следует конфликт между двумя игроками, один из которых — деятельный исполнитель, а второй — контролер качества исполнения. Классическим конфликтом такого типа является конфликт пары «*налогоплательщик – налоговый инспектор*».

Противостоянию налогоплательщика и налогового инспектора более 4 тысяч лет. Первые налоговые установления появились в 2280–2270 гг. до н.э. в Древнем Египте. Впервые в письменном виде налог на землю был издан в нецентрализованной Китайской империи в IV в. до н.э.

Однако до сих пор не все налогоплательщики откликаются на тщетные призывы налоговой инспекции заплатить налоги и спать спокойно, не оставляя надежду обыграть государство в этой бесконечной игре.

Налогоплательщик (игрок **A**) и налоговая инспекция (игрок **B**) преследуют прямо противоположные цели — игрок **A** стремится максимизировать доход, остающийся в его распоряжении, игрок **B** — максимизировать сумму взимаемых налоговых платежей.

В распоряжении игроков имеется по две стратегии: игрок **A** может уплатить налог в соответствии с действующим законодательством (стратегия A_2) или уклониться от его уплаты (стратегия A_1), игрок **B** может осуществлять (стратегия B_1) или не осуществлять (стратегия B_2) проверку правильности уплаты налогов. Схематично рассматриваемая игра формализуется биматричной системой.

Таблица 4.4. Биматричная система игры «налогоплательщик – инспектор»

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}, \quad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}.$$

Конфликтными являются ситуации $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_1, B_2\}$, ситуации $\{A_2, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$ тривиальны и бесконфликтны — человек уплатил налоги и спит спокойно, не будем его будить.

Введем обозначения: D — доход игрока **A**, остающийся в его распоряжении после уплаты всех налогов и сборов; N — сумма налоговых сборов, подлежащая уплате игроком **A**; S — штраф, подлежащий выплате игроком **A** при нарушении налогового законодательства, P — вероятность обнаружения неуплаты налогов в случае, когда игрок **A** уклоняется от уплаты, а игрок **B** осуществляет его проверку, C — стоимость проверки игроком **B** уплаты налогов игроком **A**.

С учетом введенных обозначений игра схематизируется следующим образом [82]:

- $a_{11} = D + (1 - P) \cdot N - P \cdot S$ — сумма дохода D игрока **A** и не обнаруженной в процессе поверки части прибыли N за вычетом штрафа S за уклонение от уплаты, обнаруженной проверкой части прибыли;

- $a_{12} = D + N$ — сумма дохода игрока **A** и сэкономленных им неуплаченных налогов в отсутствии проведения налоговой проверки;
- $a_{21} = a_{22} = D$ — доход игрока **A**, оставшийся в его распоряжении после уплаты всех налогов и сборов;
- $b_{11} = -C + P \cdot S - (1 - P) \cdot N$ — сумма штрафа, взыскиваемого игроком **B** за обнаруженную часть неуплаченных игроком **A** налогов за вычетом затрат на проверку и не обнаруженной части налогов;
- $b_{12} = -N$ — не выявленный уклонением игроком **A** от уплаты налог в связи с непроведением проверки;
- $b_{21} = -C$ — затраты на проведение налоговой проверки; $b_{22} = 0$.

В соответствии с принятой схематизацией игра формализуется системой.

Таблица 4.5. Матрицы игры «налогоплательщик–инспектор»

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} D+N\cdot\left(1-\dfrac{P}{F}\right) & D+N \\ D & D \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}, \quad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -C-N\cdot\left(1-\dfrac{P}{F}\right) & -N \\ -C & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}.$$

В точках пересечения позиций максимумов в столбцах матрицы **A** с позициями максимумов в строках матрицы **B** имеет место равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. В ином случае единственное равновесие находится во вполне полных смешанных стратегиях, в которых обе чистые стратегии применяются с положительными вероятностями.

Для биматричной системы равновесия (табл. 4.5) по Нэшу в чистых стратегиях имеют место:

- при $\begin{cases} D + (1-P)\cdot N - PS \geqslant D \\ -C + PS - (1-P)\cdot N > -N \end{cases}$ в ситуации $\left\{D + N\cdot\left(1-\dfrac{P}{F}\right), -C - N\cdot\left(1-\dfrac{P}{F}\right)\right\}$: «*налогоплательщик* (*игрок* **A**) *уклоняется от уплаты налогов*, *налоговый инспектор* (*игрок* **B**) *проводит проверку*», что справедливо при

$$F \geqslant P > L, \quad \text{где } F = \frac{N}{N+S}, \quad L = \frac{C}{N+S}; \tag{4.13}$$

- при $N \leqslant C - P \cdot S + (1-P) \cdot N$ в ситуации $\{D+N; -N\}$: «*налогоплательщик* (*игрок* **A**) *уклоняется от уплаты налогов, налоговый инспектор* (*игрок* **B**) *не проводит проверку*», что удовлетворяется при $P \leqslant \dfrac{C}{N+S} = L$;
- при $\begin{cases} P \cdot (N+S) > C, \\ (1-P) \cdot N < PS, \end{cases}$ что справедливо при $P > \dfrac{N}{N+S} = F$, игра не имеет равновесия в чистых стратегиях и единственное равновесие находится во вполне полных смешанных стратегиях $\widetilde{P}\{\widetilde{p}, 1-\widetilde{p}\}$, $\widetilde{Q}\{\widetilde{q}, 1-\widetilde{q}\}$ (то есть в стратегиях, в которых обе чистые стратегии применяются с положительными вероятностями), вычисляемыми по формулам (4.6)–(4.9):

$$\begin{cases} \widetilde{q} \geqslant \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha, & p = 0, \\ \widetilde{q} \leqslant \alpha, & p = 1, \\ \widetilde{q} = \alpha, & 0 < p < 1 \end{cases} \qquad \text{для игрока } \mathbf{A} \text{ и}$$

$$\begin{cases} \widetilde{p} \geqslant \dfrac{b_2}{b_1} = \beta, & q = 0, \\ \widetilde{p} \leqslant \beta, & q = 1, \\ \widetilde{p} = \beta, & 0 < q < 1 \end{cases} \qquad \text{для игрока } \mathbf{B},$$

где

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -P \cdot (N+S) = -\frac{PN}{F},$$
$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -N; \quad b_2 = b_{22} - b_{21} = C,$$
$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = P \cdot (N+S) = \frac{PN}{F}.$$

Решением игры в смешанных стратегиях является

$$\widetilde{P}\{\widetilde{p}, 1-\widetilde{p}\}, \quad \widetilde{Q}\{\widetilde{q}, 1-\widetilde{q}\}, \quad \nu_A, \quad \nu_B, \tag{4.14}$$

где

$$\widetilde{p} = \frac{C}{P \cdot (N+S)} = \frac{L}{P}, \quad \widetilde{q} = \frac{N}{P \cdot (N+S)} = \frac{F}{P}$$

и цена игры в соответствии с (4.1)

- игрока **A**

$$\begin{aligned} \nu_A &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) \cdot \widetilde{p}\widetilde{q} + (a_{12} - a_{22}) \cdot \widetilde{p} + \\ &+ (a_{21} - a_{22}) \cdot \widetilde{q} + a_{22} = -\widetilde{p}\widetilde{q}\frac{PN}{F} + \widetilde{p}N + D = \\ &= \widetilde{p}N \cdot \left(1 - \widetilde{q}\frac{P}{F}\right) + D = \widetilde{p}N \cdot \left(1 - \frac{F}{P} \cdot \frac{P}{F}\right) + D = D; \end{aligned} \tag{4.15}$$

• игрока **B**

$$\begin{aligned}\nu_B &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}) \cdot \widetilde{p}\widetilde{q} + (b_{12} - b_{22}) \cdot \widetilde{p} + \\ &+ (b_{21} - b_{22}) \cdot \widetilde{q} + b_{22} = \widetilde{p}\widetilde{q}P \cdot (N+S) - \widetilde{p}N - \widetilde{q}C = \\ &= \widetilde{p}N \cdot \left(\widetilde{q}\frac{P}{F} - 1\right) - \widetilde{q}C = \\ &= \widetilde{p}N \cdot \left(\frac{F}{P} \cdot \frac{P}{F} - 1\right) - \frac{FC}{P} = -\frac{FC}{P}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Решение игры существенно зависит от вероятности P, являющейся критерием эффективности сбора налогов, профессионализма налоговой инспекции, ее способности противостоять изощренным уловкам налогоплательщиков.

Графическая интерпретация решения биматричной игры приведена на рис. 4.9.

При $F \geqslant P > L$ в игре существует равновесие по Нэшу, соответствующее ситуации «*игрок* **A** *уклоняется от уплаты налогов*, *игрок* **B** *проводит проверку*» (точка 3, рис. 4.9). В пределах этого равновесия игроки при повторении игры делят между собой приобретения и утраты: игрок **A** — увеличение дохода на сумму налогов N (в случае успешного уклонения от налогов) и уменьшение дохода на сумму неуплаченного налога и штрафа $P(N+S) = -\dfrac{PN}{F}$ (в случае обнаружения этого факта

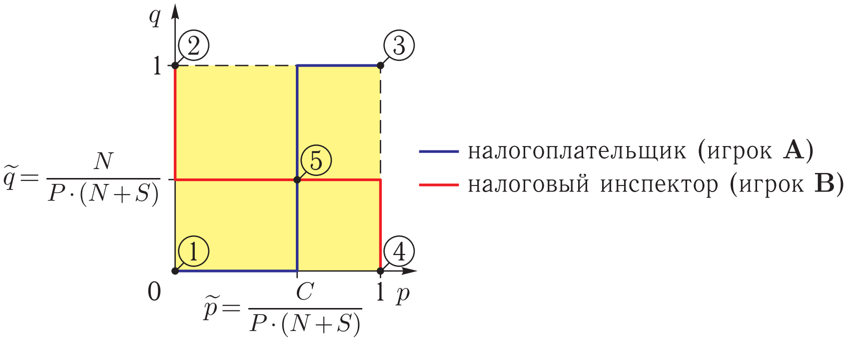


Рис. 4.9. Графическая интерпретация биматричной игры: $\widetilde{P}\{0,1\}$, $Q\{0,1\}$, $\nu_A = D$, $\nu_B = 0$ (1); $\widetilde{P}\{0,1\}$, $Q\{1,0\}$, $\nu_A = D$, $\nu_B = -C$ (2); $\widetilde{P}\{1,0\}$, $Q\{1,0\}$, $\nu_A = D + N \cdot \left(1 - \dfrac{P}{F}\right)$, $\nu_B = -C - N \cdot \left(1 - \dfrac{P}{F}\right)$ (3); $\widetilde{P}\{1,0\}$, $Q\{0,1\}$, $\nu_A = D + N$, $\nu_B = -N$ (4); $\widetilde{P}\left\{\dfrac{L}{P}, 1 - \dfrac{L}{P}\right\}$, $\widetilde{Q}\left\{\dfrac{F}{P}, 1 - \dfrac{F}{P}\right\}$, $\nu_A = D$, $\nu_B = -\dfrac{F \cdot C}{P}$ (5)

игроком **B**), игрок **B** — при обнаружении уклонения от налогов взимает налог и штраф за уклонение.

При $P \leqslant L$ равновесию по Нэшу отвечает ситуация «*игрок* **A** *уклоняется от уплаты налогов, игрок* **B** *не осуществляет налоговые проверки*» (точка 4, рис. 4.9). Естественно, в этой ситуации игрок **A** будет безнаказанно пользоваться прибавкой к доходу в сумме неуплаченного налога N, а игрок **B** упускает возможность взыскать налог N в казну.

При $P > F$ ($F > L$) в игре реализуется единственное равновесие во вполне полных смешанных стратегиях (точка 5, рис. 4.9). В этом случае игрок **A** получает в среднем свой законный доход D, а игрок **B** минимизирует свои средние затраты

$$\frac{N \cdot C}{P \cdot (N+S)} = \frac{FC}{P}.$$

Вывод очевиден — платить налоги выгодно. Надеяться, что удастся избежать налоговых проверок или искусно уклониться от уплаты налогов, противопоставляя налоговому инспектору изощренные финансовые схемы, может иметь смысл только в редких случаях, которые затем неизбежно приходится компенсировать беспокойным сном.

Проиллюстрируем полученные результаты примером решения игры «*налогоплательщик–налоговый инспектор*». Предположим, имеются следующие исходные данные: $D = 400$ ед., $N = 100$ ед., $S = 25$ ед., $C = 20$ ед., $P = 0{,}15$; $0{,}5$; $1{,}0$ ($F = 0{,}8$), которым соответствуют различные биматричные системы в зависимости от значения P:

- при $P = 0{,}15$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} = 481{,}25 & a_{12} = 500 \\ a_{21} = 400 & a_{22} = 400 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} = -101{,}25 & b_{12} = -100 \\ b_{21} = -20 & b_{22} = 0 \end{pmatrix};$$

- при $P = 0{,}5$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} = 437{,}5 & a_{12} = 500 \\ a_{21} = 400 & a_{22} = 400 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} = -57{,}5 & b_{12} = -100 \\ b_{21} = -20 & b_{22} = 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в биматричной системе при $P = 0{,}15$ максимум во втором столбце $a_{12} = 500$ матрицы $\mathbf{A}$ пересекается с максимумом $b_{12} = -100$ в первой строке матрицы $\mathbf{B}$, ситуация в чистых стратегиях $\{a_{12}, b_{12}\} = \{500, -100\}$ (игрок $\mathbf{A}$ не уплатил налоги, а инспекция — игрок $\mathbf{B}$ — проворонил это нарушение) является равновесной по Нэшу. По аналогии в системе с $P = 0{,}5$ максимум $a_{11} = 437{,}5$ в первом столбце матрицы $\mathbf{A}$ пересекается с максимумом $b_{11} = -57{,}5$ в первой строке матрицы $\mathbf{B}$, следовательно, ситуация $\{a_{11}, b_{11}\} = \{437{,}5; -57{,}5\}$ (игрок $\mathbf{A}$ уклонился от уплаты налогов, игрок $\mathbf{B}$ частично выявил факт уклонения) является равновесной точкой по Нэшу в чистых стратегиях. При $P = 1{,}0$ реализуется равновесие в смешанных стратегиях с вероятностями использования чистых стратегий $\widetilde{p} = \dfrac{C}{N+S} = 0{,}16$ и $\widetilde{q} = \dfrac{F}{P} = 0{,}8$ и ценой игры $\nu_A = D = 400$ и $\nu_B = -\dfrac{FC}{P} = -0{,}8 \cdot 20 = -16$.

Как ни крутись, но уклонение от налогов при квалифицированном и плотном контроле со стороны налоговой инспекции не создает преимуществ по сравнению с ситуацией, соответствующей правовому полю, поэтому потеря спокойного сна при уклонении от налогов лишена смысла.

End keywords:

Прототипные биматричные игры: дилемма заключенных, студент – преподаватель, семейный спор, струсил – проиграл. Анализ силового соперничества методами теории игр. Задача инспектирования — конфликт налогоплательщик – налоговый инспектор.

Законы природы
безгласны.

Роберт Хайнлайн
1907 – 1988

5 ГЛАВА
ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

«Законы природы безгласны»
Роберт Хайнлайн (1907–1988)

«Управлять природой можно,
лишь подчиняясь ей»
Френсис Бэкон (1561–1626)

В предыдущих разделах мы имели дело с играми двух активных игроков, каждый из которых выбирал стратегии своего поведения, исходя из стратегии противника или исходя из своего представления о полезности.

В настоящем разделе рассматривается игра, которую ведет один игрок против второго «*псевдоигрока*», не действующего против него сознательно [95–98]. Другими словами, роль второго игрока выполняют обстоятельства, в которых вынужден принимать решение первый игрок (например, погода для сельского жителя, ставка по банковскому кредиту для предпринимателя и т. д.). Второго игрока в описанной ситуации в теории игр принято называть «*природой*» (далее будем кавычки опускать), имея в виду, что она (природа) не «*злонамеренна*», не действует сознательно против игрока, не имеет своей цели, «*ходы*» ее случайны.

Казалось бы, отсутствие целенаправленного противодействия со стороны природы должно облегчить задачу игроку, но, с другой стороны, непредсказуемость поведения такого оппонента способна с лихвой компенсировать это преимущество.

Платежная матрица игры с природой имеет классический вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Необходимо иметь в виду, что отношения доминирования в матрице игры с природой могут применяться только по отношению к строкам матрицы, отражающим чистые стратегии игрока $\mathbf{A}$. Столбцы матрицы игры с природой, отражающие чистые «*стратегии*» природы (естественно, здесь термин «*стратегия*» употреблен не в общепринятом смысле направленного осознанного действия, а в смысле случайной вариантной реализации состояния действительности), доминированию не подлежат.

Игра с природой, по существу, является вариантом общей проблемы принятия решения в условиях неопределенности. В зависимости от информации о состоянии природы, имеющейся в распоряжении игрока, различают ситуации риска и ситуации полной неопределенности. Если вероятности состояния природы известны, то имеет место ситуация риска в пределах известных нам вероятностей; в ином случае имеет место ситуация полной неопределенности. В силу этого игру с природой задают как в виде матрицы выигрышей (в ситуации полной неопределенности), так и в виде матрицы рисков или матрицы упущенных возможностей

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix},$$

где r_{ij} — риск игрока при использовании им i-й стратегии при j-м состоянии природы, определяемый разностью $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$ между максимальным выигрышем, который он получил бы, если бы знал точно, что наступит j-е состояние природы, и выигрышем, который он получает, не обладая такой информацией. Например, матрица выигрышей, у которой максимумы по столбцам равны 6, 5, 9 и 7 соответственно

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

конвертируется в матрицу рисков

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 6-2 & 5-3 & 9-1 & 7-7 \\ 6-4 & 5-2 & 9-9 & 7-1 \\ 6-3 & 5-5 & 9-8 & 7-6 \\ 6-6 & 5-4 & 9-2 & 7-2 \\ 6-5 & 5-3 & 9-7 & 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.1. Критерии полной неопределенности

«Определенности “ясли” —
сменяются неопределенностью “если”»
Алонсо Арджуна, р. 1971

Критерии полной неопределенности для выбора оптимальной стратегии игроком из набора возможных определяются прежде всего характером и целями лица, принимающего решение. Рассмотрим некоторые из них.

Критерий максимакса — это критерий крайнего оптимизма, когда игрок, находясь в безвыходном положении, пренебрегает любым риском в надежде сорвать джекпот — наибольший из максимальных выигрышей:

$$M = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \Big). \tag{5.1}$$

Максиминный критерий Вальда отражает принцип гарантированного результата. Это критерий крайнего пессимизма, когда игрок выбирает стратегию, максимизирующую его выигрыш в самой неблагоприятной ситуации:

$$W_V = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Big(\min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \Big). \tag{5.2}$$

Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица — составной критерий, не рекомендующий руководствоваться крайностями и ориентированный на здравый уровень пессимизма (оптимизма):

$$W_G = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Big[\alpha \cdot \min_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \Big]. \tag{5.3}$$

Параметр $0 < \alpha < 1$ характеризует степень пессимизма игрока. Выбор значения параметра α определяется субъективной реакцией игрока на ситуацию, в которой принимается решение. При отсутствии явных предпочтений рекомендуется выбирать $\alpha = 0{,}5$. При $\alpha = 0$ критерий Гурвица совпадает с M-критерием максимакса, а при $\alpha = 1$ с W_V-критерием Вальда.

Критерий минимального риска Сэвиджа предполагает, что оптимальной является стратегия, при которой в самом неблагоприятном случае величина риска r_{ij} будет минимальна:

$$W_S = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} r_{ij} \Big). \tag{5.4}$$

Критерий Лапласа исходит из равновероятности состояний природы и рекомендует игроку ориентироваться на максимальное среднее значение выигрыша по всем состояниям природы:

$$W_L = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right). \tag{5.5}$$

5.2. Критерии риска

«Больше всего рискует тот,
кто не рискует»
Бунин И. А. (1870–1953)

Если априорно известны оценки вероятностей состояния природы, то имеют место ситуации риска, при которых применимы следующие критерии.

Критерий Байеса — по аналогии с W_L-критерием Лапласа ориентируется на максимизацию математического ожидания выигрыша с учетом априорно известных вероятностей состояний природы p_j:

$$W_B = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij} \right). \tag{5.6}$$

Критерий Ходжеса – Лемана — так же, как и W_G-критерий Гурвица, является составным критерием:

$$W_{H-L} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left[\beta \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij} + (1 - \beta) \cdot \min_{1 \geqslant j \leqslant n} a_{ij} \right]. \tag{5.7}$$

При $\beta = 0$ W_{H-L}-критерий совпадает с W_V-критерием Вальда, а при $\beta = 1$ — с W_B-критерием Байеса.

Выбор критерия принятия решения является ответственным этапом для игрока. Редко рекомендации перечисленных критериев совпадают, чаще всего игроку приходится при выборе наилучшего решения использовать интуицию, учитывать особенности ситуации.

Пример 5.1

Рассмотрим алгоритм применения критериев принятия решения по заданной матрице игры с природой, если априорные вероятности реализации различных состояний природы p_j равны: 0,1; 0,2; 0,4; 0,2; 0,1,

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 12 & 8 & 7 & 10 \\ 2 & 18 & 10 & 3 & 1 \\ 5 & 21 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 24 & 11 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матрице $\mathbf{A}$ соответствует матрица рисков

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6-3 & 24-12 & 11-8 & 7-7 & 10-10 \\ 6-2 & 24-18 & 11-10 & 7-3 & 10-1 \\ 6-1 & 24-21 & 11-9 & 7-5 & 10-4 \\ 6-6 & 24-24 & 11-11 & 7-6 & 10-3 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Критерий максимакса (5.1)

$$M = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant 5} a_{ij}\right) =$$
$$= \max(12, 18, 21, 24) = 24,$$

что указывает на выбор стратегии A_4.

Максиминный критерий Вальда (5.2)

$$W_V = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\left(\min_{1\leqslant j\leqslant} a_{ij}\right) =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant 4}(3, 1, 4, 3,) = 4,$$

что указывает на выбор стратегии A_3.

Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица ($\alpha = 0{,}5$) (5.3)

$$W_G = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left[\alpha\cdot\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} + (1-\alpha)\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij}\right] =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\left[0{,}5\cdot\min_{1\leqslant j\leqslant 5} a_{ij} + (1-0{,}5)\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant 5} a_{ij}\right] =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\left(\frac{3+12}{2}; \frac{1+18}{2}; \frac{4+21}{2}; \frac{3+24}{2}\right) =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant 4}(7{,}5; 9{,}5; 12{,}5; 13{,}5) = 13{,}5,$$

что указывает на стратегию A_4.

Критерий минимального риска Сэвиджа (используем матрицу рисков) (5.4)

$$W_S = \min_{1\geqslant i\leqslant m}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} r_{ij}\right) = \min_{1\geqslant i\leqslant 4}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant 5} r_{ij}\right) = \min_{1\geqslant i\leqslant 4}(12, 9, 6, 7) = 6,$$

что указывает на стратегию A_3.

Критерий Лапласа (5.5)

$$W_L = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant}\left(\frac{1}{5}\cdot\sum_{j=1}^{5} a_{ij}\right) =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\left(\frac{3+12+8+7+10}{5}; \frac{2+18+10+3+1}{5};\right.$$
$$\left.\frac{5+21+9+5+4}{5}; \frac{6+24+11+6+3}{5}\right) =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant 4}(8; 6{,}8; 8{,}8; 10) = 10,$$

что указывает на стратегию A_4.

Критерий Байеса ($p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}4$; $p_4 = 0{,}2$; $p_5 = 0{,}1$) (5.6): вычислим предварительно математические ожидания $\sum\limits_{j=1}^{5} p_j\cdot a_{ij}$

$$i = 1,\quad \sum_{j=1}^{5} p_j\cdot a_{1j} = 0{,}1\cdot 3 + 0{,}2\cdot 12 + 0{,}4\cdot 8 + 0{,}2\cdot 7 +$$
$$+ 0{,}1\cdot 10 = 8{,}3;$$

$$i = 2, \quad \sum_{j=1}^{5} p_j \cdot a_{2j} = 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 18 + 0{,}4 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 3 + \\ + 0{,}1 \cdot 1 = 8{,}7;$$

$$i = 3, \quad \sum_{j=1}^{5} p_j \cdot a_{3j} = 0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 21 + 0{,}4 \cdot 9 + 0{,}2 \cdot 5 + \\ + 0{,}1 \cdot 4 = 9{,}7;$$

$$i = 4, \quad \sum_{j=1}^{5} p_j \cdot a_{4j} = 0{,}1 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 24 + 0{,}4 \cdot 11 + 0{,}2 \cdot 6 + \\ + 0{,}1 \cdot 3 = 11{,}3.$$

Далее

$$W_B = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij} \right) = \max_{1 \geqslant i \leqslant 4} (8{,}3; 8{,}7; 9{,}7; 11{,}3) = 11{,}3,$$

что указывает на выбор стратегии A_4.

Таблица 5.1

Критерии	Стратегии A_i			
	A_1	A_2	A_3	A_4
$M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \right)$	12	18	21	24
$W_V = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \right)$	3	1	4	3
$W_G = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left[\alpha \cdot \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} + (1-\alpha) \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \right]$	7,5	9,5	12,5	13,5
$W_S = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\max\limits_{1 \leqslant J \leqslant N} r_{ij} \right)$	12	9	6	7
$W_L = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$	8,0	6,8	8,8	10
$W_B = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij} \right)$	8,3	8,7	9,7	11,3
$W_{H-L} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left[\beta \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij} + (1-\beta) \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} \right]$	5,65	4,85	6,85	7,15

Критерий Ходжеса–Лемана ($\beta = 0{,}5$) (5.7): используя вычисленные ранее математические ожидания $\sum\limits_{j=1}^{5} p_j \cdot a_{ij}$ (см. критерий Байеса) и значения $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant 5} a_{ij}$ (см. критерий Вальда), получаем

$$W_{H-L} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left[\beta \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij} + (1-\beta) \cdot \min_{1 \geqslant j \leqslant n} a_{ij} \right] =$$

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \left(\frac{8{,}3+3}{2}; \frac{8{,}7+1}{2}; \frac{9{,}7+4}{2}; \frac{11{,}3+3}{2} \right) = 7{,}15,$$

что указывает на стратегию A_4.

Результаты вычисления критериев сведены в табл. 5.1, из которой следует, что большинство критериев указывает на предпочтительный выбор стратегии A_4. Сопоставление средних рисков стратегий A_4 ($\overline{r} = 1{,}6$) и A_3 ($\overline{r} = 2{,}8$) также отдает предпочтение стратегии A_4.

5.3. Решение методом линейного программирования

Игра с природой является игрой с одним активным игроком **A**, роль второго игрока **B** выполняют обстоятельства, сообразуясь с которыми **A** должен искать свои оптимальные стратегии. По аналогии с разделом 3.5.1 такая игра может быть сведена к решению простой задачи линейного программирования (в отличие от двойственной задачи линейного программирования при решении парной игры с двумя активными игроками). Поясним алгоритм решения игры с природой на примере с данными примера 5.1.

Пример 5.2

Решить задачу игры с природой, представленную матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 8 & 7 & 10 \\ 2 & 18 & 10 & 3 & 1 \\ 5 & 21 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 24 & 11 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как строка A_4 доминирует строку A_2, последняя исключается из матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 8 & 7 & 10 \\ 5 & 21 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 24 & 11 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему уравнений, отвечающую стремлению игрока **A** обеспечить средний выигрыш не менее ν,

$$\begin{cases} 3p_1 + 5p_2 + 6p_3 \geqslant \nu, \\ 12p_1 + 21p_2 + 24p_3 \geqslant \nu, \\ 8p_1 + 9p_2 + 11p_3 \geqslant \nu, \\ 7p_1 + 5p_2 + 6p_3 \geqslant \nu, \\ 10p_1 + 4p_2 + 3p_3 \geqslant \nu. \end{cases}$$

Введем обозначения $x_i = \dfrac{p_i}{\nu}$ и $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{p_1}{\nu} + \dfrac{p_2}{\nu} + \dfrac{p_3}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}$.

Стремление игрока **A** к максимальному среднему выигрышу (цене игры $\boldsymbol{\nu}$) эквивалентно $\dfrac{1}{\nu} \to \min$, что приводит к задаче линейного программирования на минимум: $F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ при выполнении ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geqslant 1, \\ 12x_1 + 21x_2 + 24x_3 \geqslant 1, \\ 8x_1 + 9x_2 + 11x_3 \geqslant 1, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geqslant 1, \\ 10x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geqslant 1, \end{cases}$$
$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min.$$

Будем решать задачу симплекс-методом (см. разд. 3.5.1). Переформатируем задачу на минимум $F \to \min$ в задачу на максимум с целевой функцией $(-F) \to \max$, для чего умножим переменные x_1, x_2, x_3 на (-1) и приведем систему ограничений к каноническому виду путем преобразования неравенств в уравнения, для чего в каждое неравенство вводим неотрицательные переменные x_4, x_5, x_6, x_7, x_8:

$$\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 + x_4 = -1, \\ -12x_1 - 21x_2 - 24x_3 + x_5 = -1, \\ -8x_1 - 9x_2 - 11x_3 + x_6 = -1, \\ -7x_1 - 5x_2 - 6x_3 + x_7 = -1, \\ -10x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_8 = -1. \end{cases}$$

Переменные x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, входящие с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 — в остальные, называются базисными.

Формируем опорную симплекс-таблицу (табл. 5.2).

В таблице приняты обозначения: БП — базисные переменные, СЧ — свободные члены (правая часть системы уравнений). В F-строке целевой функции коэффициенты при свободных членах записываются с противоположным знаком. Элемент F-строки таблицы, соответствующий столбцу свободных членов, не рассматривается.

Таблица 5.2. Опорная симплекс-таблица

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СЧ
x_4	−3	−5	−6	1	0	0	0	0	−1
x_5	−12	−21	−24	0	1	0	0	0	−1
x_6	−8	−9	−11	0	0	1	0	0	−1
x_7	−7	−5	−6	0	0	0	1	0	−1
x_8	−10	−4	−3	0	0	0	0	1	−1
$-F$	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0
ОТ									

Определяется ведущая строка опорной симплекс-таблицы с наибольшим по модулю значением базисной переменной (столбец СЧ). В нашем случае они все равны (-1), поэтому в качестве ведущей может быть выбрана любая строка, например x_4 (выделена цветом) — табл. 5.3.

Далее вычисляется отношение свободных членов к отрицательным значениям в каждой ячейке ведущей строки x_4,

Таблица 5.3. Выделение ведущей строки и ведущего столбца

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СЧ
x_4	-3	-5	-6	1	0	0	0	0	-1
x_5	-12	-21	-24	0	1	0	0	0	-1
x_6	-8	-9	-11	0	0	1	0	0	-1
x_7	-7	-5	-6	0	0	0	1	0	-1
x_8	-10	-4	-3	0	0	0	0	1	-1
$-F$	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
ОТ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$						

они заносятся в строку ОТ. В строке ОТ столбец x_3 с наименьшим значением $\left(\frac{1}{6}\right)$ принимается в качестве ведущего столбца симплекс-таблицы, а переменная x_3 вводится в базис вместо базисной переменной x_4. На пересечении ведущей строки x_4 и ведущего столбца x_3 находится разрешающий элемент, равный (-6). Разделив элементы ведущей строки x_5 на разрешающий элемент (-6), переформатируем опорную симплекс-таблицу с помощью алгоритма Жордана–Гаусса, для чего в соответствии с правилом треугольника от каждого элемента строки вычитается значение соответствующего элемента ведущей строки (см. рис. 3.12), умноженного на значение элемента строки, находящегося в ведущем столбце. Поясним процедуру алгоритма Жордана–Гаусса на примере строки x_8 (табл. 5.4):

$$-10-\frac{1}{2}\cdot(-3) = -\frac{17}{2};\quad -4-\frac{5}{6}\cdot(-3) = -\frac{3}{2};\quad -3-1\cdot(-3) = 0;$$
$$0-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(-3) = -\frac{1}{2};\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ -1-\frac{1}{6}\cdot(-3) = -\frac{1}{2}.$$

Применив алгоритм Жордана–Гаусса к остальным строкам опорной симплекс-таблицы, приходим к симплекс-таблице 1. Видим, что в столбце СЧ находится отрицательный элемент $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Продолжая симплекс-процедуру по аналогии, приходим последовательными преобразованиями к симплекс-таблице 1 (табл. 5.5) и симплекс-таблице 2 (табл. 5.6).

Таблица 5.4. Преобразование симплекс-таблицы методом Жордана–Гаусса

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СЧ
x_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
x_5	-12	-21	-24	0	1	0	0	0	-1
x_6	-8	-9	-11	0	0	1	0	0	-1
x_7	-7	-5	-6	0	0	0	1	0	-1
x_8	-10	-4	-3	0	0	0	0	1	-1
$-F$	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
ОТ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	0

Таблица 5.5. Симплекс-таблица 1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СЧ
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
x_5	0	-1	0	-4	1	0	0	0	3
x_6	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{11}{6}$	0	1	0	0	$\frac{5}{6}$
x_7	-4	0	0	-1	0	0	1	0	0
x_8	$-\frac{17}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
$-F$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
ОТ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$						

Так как в базисном столбце СЧ все элементы положительны, а в индексной строке $(-F)$ все элементы отрицательны, симплекс-процедура завершена. Оптимальная смешанная стратегия игрока **A** будет определяться свободными переменными $x_1 = \frac{3}{51}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{7}{51}$, $x_4 = 0$, а целевая функция $F(X) = 1 \cdot \frac{3}{51} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{7}{51} + 1 \cdot 0 = \frac{10}{51}$.

Таблица 5.6. Симплекс-таблица 2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	СЧ
x_3	0	$\frac{38}{51}$	1	$-\frac{10}{51}$	0	0	0	$\frac{6}{17}$	$\frac{7}{51}$
x_5	0	-1	0	-4	2	0	0	0	3
x_6	0	$\frac{31}{51}$	0	$\frac{16}{51}$	0	1	0	$-\frac{30}{17}$	$\frac{50}{51}$
x_7	0	0	0	$-\frac{39}{51}$	0	0	1	$-\frac{144}{51}$	$\frac{12}{51}$
x_1	1	$\frac{36}{51}$	0	$\frac{3}{51}$	0	0	0	$-\frac{36}{51}$	$\frac{3}{51}$
$-F$	0	$-\frac{4}{51}$	0	$-\frac{7}{51}$	0	0	0	$-\frac{18}{17}$	$\frac{10}{51}$

Цена игры равна $\nu = \dfrac{1}{F(x)} = \dfrac{51}{10}$. Оптимальная смешанная стратегия игрока **A**

$$P^0\left\{p_1 = x_1 \cdot \nu = \frac{3}{51}\cdot\frac{51}{10} = \frac{3}{10};\ p_2 = 0;\right.$$
$$\left. p_3 = x_3 \cdot \nu = \frac{7}{51}\cdot\frac{51}{10} = \frac{7}{10};\ p_4 = 0\right\} = P\left\{\frac{3}{10}; 0; \frac{7}{10}; 0\right\}.$$

Иными словами, наибольший средний выигрыш игрок может ожидать, используя на 70 % свою стратегию A_3 и на 30 % — стратегию A_1, стратегии A_2 и A_4 не используются.

Проверим правильность решения игры критерием оптимальности стратегий $\sum\limits_{i=1}^{4} a_{ij}\cdot p_i \geqslant \nu$.

Критерий удовлетворяется, если выполнены неравенства

$$\begin{cases} 3p_1 + 5p_2 + 6p_3 = 3\cdot\dfrac{3}{10} + 5\cdot 0 + 6\cdot\dfrac{7}{10} = \dfrac{51}{10} \geqslant \nu = \dfrac{51}{10}, \\ 12p_1 + 21p_2 + 24p_3 = 12\cdot\dfrac{3}{10} + 21\cdot 0 + 24\cdot\dfrac{7}{10} = \dfrac{204}{10} \geqslant \nu = \dfrac{51}{10}, \\ 8p_1 + 9p_3 + 11p_4 = 8\cdot\dfrac{3}{10} + 9\cdot\dfrac{7}{10} + 11\cdot 0 = \dfrac{87}{10} \geqslant \nu = \dfrac{51}{10}, \\ 7p_1 + 5p_3 + 6p_4 = 7\cdot\dfrac{3}{10} + 5\cdot\dfrac{7}{10} + 6\cdot 0 = \dfrac{56}{10} \geqslant \nu = \dfrac{51}{10}, \\ 10p_1 + 4p_3 + 3p_4 = 10\cdot\dfrac{3}{10} + 4\cdot\dfrac{7}{10} + 3\cdot 0 = \dfrac{58}{10} \geqslant \nu = \dfrac{51}{10}. \end{cases}$$

Так, как все неравенства выполняются как равенства или строгие неравенства, найденное решение игры верно.

5.4. Задача оптимального планирования производства

«Конечно, обдумывай “что”,
но еще больше обдумывай “как”»
Иоганн Вольфанг Гете (1749–1832)

Планирование производства — основная задача для менеджмента любой компании реального сектора экономики. Неопределенность спроса на выпускаемый продукт, подверженность ценовых и временных требований на поставку продукции колебаниям рыночной конъюнктуры заставляют компанию-производителя принимать решения в условиях неопределенности и риска.

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, компания ожидает получения заказа на специальное оборудование (СПО), для производства которого требуется разработать и изготовить высокотехнологичные рабочие места (РМ). Необходимо определиться, сколько РМ потребуется изготовить компании для своевременного выполнения производственного плана при условии, что для изготовления одного СПО необходим один комплект РМ.

Предварительно известно, что возможный объем заказа СПО (а следовательно, и необходимое количество РМ) является одной из величин ряда $N_1 < N_2 < N_3 < N_4 < N_5$ ед., прибыль от изготовления одного СПО составит S_1 ед., убыток при срыве сроков поставки — S_2 ед. на один непоставленный СПО, убыток от простоя изготовленного РМ при отсутствии заказов — S_3 ед. на одно РМ. Менеджменту компании, не располагающему достоверной информацией о возможном количестве заказов на СПО, необходимо принять решение: сколько требуется изготовить РМ, чтобы обеспечить максимальную прибыль компании от выполнения производственного плана.

В такой постановке задача поиска оптимального решения сводится к игре с «*природой*», особенность которой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников: в нашем случае менеджмент компании. Второй игрок, условно называемый «*природа*», принимает решения независимо от действий менеджмента компании; в нашем случае его действия определяются конъюнктурой рынка спроса на СПО. Руководству компании приходится принимать решение в условиях неопределенности и повышенного риска.

Схематизируем игру в форме платежной матрицы табл. 5.7, в которой приняты следующие обозначения: N, n — количество СПО и РМ соответственно; в ячейках матрицы приведены значения прибыли, получаемой компанией от выполнения производственного плана. Задача менеджмента компании — определить количество изготавливаемых РМ, обеспечивающее максимальную прибыль.

Таблица 5.7. Платежная матрица игры

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
n_1	$N_1 \cdot S_1$	$N_1 \cdot S_1 - (N_2 - N_1) \cdot S_2$	$N_1 \cdot S_1 - (N_3 - N_1) \cdot S_2$	$N_1 \cdot S_1 - (N_4 - N_1) \cdot S_2$	$N_1 \cdot S_1 - (N_5 - N_1) \cdot S_2$
n_2	$N_1 \cdot S_1 - (n_2 - n_1) \cdot S_3$	$N_2 \cdot S_1$	$N_2 \cdot S_1 - (N_3 - N_2) \cdot S_2$	$N_2 \cdot S_1 - (N_4 - N_2) \cdot S_2$	$N_2 \cdot S_1 - (N_5 - N_2) \cdot S_2$
n_3	$N_1 \cdot S_1 - (n_3 - n_1) \cdot S_3$	$N_2 \cdot S_1 - (n_3 - n_2) \cdot S_3$	$N_3 \cdot S_1$	$N_3 \cdot S_1 - (N_4 - N_3) \cdot S_2$	$N_3 \cdot S_1 - (N_5 - N_3) \cdot S_2$
n_1	$N_1 \cdot S_1 - (n_4 - n_1) \cdot S_3$	$N_2 \cdot S_1 - (n_4 - n_2) \cdot S_3$	$N_3 \cdot S_1 - (n_4 - n_3) \cdot S_3$	$N_4 \cdot S_1$	$N_4 \cdot S_1 - (N_5 - N_4) \cdot S_2$
n_5	$N_1 \cdot S_1 - (n_5 - n_1) \cdot S_3$	$N_2 \cdot S_1 - (n_5 - n_2) \cdot S_3$	$N_3 \cdot S_1 - (n_5 - n_3) \cdot S_3$	$N_4 \cdot S_1 - (n_5 - n_4) \cdot S_3$	$N_5 \cdot S_1$

Одна из возможностей оценки наиболее вероятного размера заказа на поставку СПО — использование опыта, знаний и интуиции квалифицированных экспертов. Для этого годится метод экспертных оценок [94, 95], в соответствии с которым группе специалистов-экспертов предлагается проранжировать (расположить в порядке возрастания величины) дискретный ряд априори возможных значений N_i по вероятности $P_j(N_j)$ их реализации (табл. 5.8).

В табл. 5.8 приняты обозначения: P_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots \ldots, k)$ — оценка i-м экспертом вероятности получения заказа в объеме N_j ед. СПО; m — количество экспертов, k — число ранжируемых объектов, R_{ij} — ранг (номер в упорядоченном

Таблица 5.8. Экспертная оценка $P_{ij}(N_j)$

Эксперт, i	N_j					
	N_1	N_2	...	N_j	...	N_k
1	$P_{11}(R_{11})$	$P_{12}(R_{12})$	...	$P_{1j}(R_{1j})$	...	$P_{1k}(R_{1k})$
2	$P_{21}(R_{21})$	$P_{22}(R_{22})$	...	$P_{2j}(R_{2j})$	...	$P_{2k}(R_{2k})$
...	...	...	...	...	...	...
i	$P_{i1}(R_{i1})$	$P_{i2}(R_{i2})$	...	$P_{ij}(R_{ij})$	...	$P_{ik}(R_{ik})$
...	...	...	...	...	...	...
m	$P_{m1}(R_{m1})$	$P_{m2}(R_{m2})$	...	$P_{mj}(R_{mj})$	...	$P_{mk}(R_{mk})$

по возрастанию ряду), присвоенный i-м экспертом оценке вероятности P_{ij} заказа СПО в объеме N_j.

Распространенной мерой оценки согласованности оценок экспертов является коэффициент конкордации Кендалла–Бэбингтона Смита [98–101]:

$$W = \frac{12S_W}{m^2\left(k^3 - k\right)}, \quad \text{где} \quad S_W = \sum_{j=1}^{k}\left\{\sum_{i=1}^{m} R_{ij} - \frac{m(k+1)}{2}\right\}^2. \quad (5.8)$$

Значения W расположены в интервале от 0 (что соответствует отсутствию согласованности среди экспертов) до $W = 1$ (что соответствует полной согласованности оценок экспертов). S_W является суммой квадратов отклонений суммы рангов R_{ij} от их среднего значения [101]. Точные критические значения суммы $S_{W_{\text{кр}}}(\alpha)$ приведены в работе [102, табл. 228, с. 635].

При $S_{W_{\text{кр}}}(\alpha) > S_W$ мнения экспертов с достоверностью $\boldsymbol{\alpha}$ признаются согласованными и воспринимаются как консолидированное мнение группы квалифицированных специалистов.

Рассмотрим алгоритм выбора оптимальной стратегии формирования производственного плана в условиях неопределенности и неполной информации на конкретном примере.

Пример 5.3

Исходные данные: возможен заказ СПО в объеме $N_1 = 10$ ед., $N_2 = 20$ ед., $N_3 = 30$ ед., $N_4 = 40$ ед., $N_5 = 50$ ед. при $S_1 = 9$ ед., $S_2 = 6$ ед., $S_3 = 6$ ед. Необходимо определить

n — требуемое количество изготовления РМ, при котором прибыль от изготовления СПО будет максимальна.

Предварительно проводится экспертная оценка вероятности заказа СПО по количеству; ее результаты при $m = 5$, $k = 5$ приведены в табл. 5.9.

Таблица 5.9. Результаты экспертной оценки

Эксперт, i	$N_1 = 10$		$N_2 = 20$		$N_3 = 30$		$N_4 = 40$		$N_5 = 50$		$\sum R_j$
	P_{i1}	R_{i1}	P_{i2}	R_{i2}	P_{i3}	R_{i3}	P_{i4}	R_{i4}	P_{i5}	R_{i5}	
1	0,10	4	0,15	3	0,50	1	0,20	2	0,05	5	15
2	0,12	4	0,18	3	0,47	1	0,20	2	0,03	5	15
3	0,10	4	0,15	3	0,32	2	0,38	1	0,05	5	15
4	0,15	3	0,20	2	0,50	1	0,10	4	0,05	5	15
5	0,10	4	0,15	3	0,30	2	0,40	1	0,05	5	15
$\overline{P}_j$	0,114		0,166		0,418		0,256		0,046		
$\sum R_i$		19		14		7		10		25	

Критерием конкордации Кендалла–Бэбингтона Смита проверяем согласованность оценок экспертов. Вычисляем по формуле (5.8) сумму квадратов отклонений рангов от $\dfrac{m \cdot (k+1)}{2} = \dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$:

$$S_W = \sum_{j=1}^{k} \left\{ \sum_{i=1}^{m} R_{ij} - \frac{m(k+1)}{2} \right\}^2 = (19-15)^2 + (14-15)^2 + \\ + (7-15)^2 + (10-15)^2 + (25-15)^2 = 206$$

и коэффициент конкордации Кендалла–Бэбингтона Смита [99]

$$W = \frac{12 S_W}{m^2 \left(k^3 - k\right)} = \frac{12 \cdot 206}{5^2 \cdot \left(5^3 - 5\right)} = 0{,}824.$$

Значение коэффициента W достаточно велико, что указывает на согласованность мнений экспертов. Непосредственной проверкой с помощью критических значений суммы S_W

[102, с. 635] *убеждаемся*, что

$$S_W = 206 > S_W(0{,}99) = 142{,}8,$$

что позволяет с высокой достоверностью утверждать о высокой согласованности оценок в группе экспертов.

В соответствии с табл. 5.7, с учетом принятых значений N_j, S_1, S_2, S_3 и результатов экспертной оценки $\overline{P}_j$ (табл. 5.9) формируем платежную матрицу игры с «природой» (табл. 5.10).

Таблица 5.10. Матрица игры с «природой»

N_j	$N_1 = 10$	$N_2 = 20$	$N_3 = 30$	$N_4 = 40$	$N_5 = 50$
$\overline{P}(N_j)$	0,114	0,166	0,418	0,256	0,046
A_1 $(n_1 = 10)$	90	40	−10	−60	−110
A_2 $(n_2 = 20)$	30	180	130	80	30
A_3 $(n_3 = 30)$	−30	120	270	220	170
A_4 $(n_4 = 40)$	−90	60	210	360	310
A_5 $(n_5 = 50)$	−150	0	150	300	450

Рекомендации различных критериев не всегда совпадают, необходимо использовать интуицию, особенности экономической ситуации, чтобы выбрать наилучшее решение. Рассмотрим алгоритм применения критериев принятия решения по данным матрицы (табл. 5.10). Предварительно преобразуем матрицу выигрышей (табл. 5.10) в матрицу рисков (табл. 5.11).

Таблица 5.11. Матрица рисков

N_j	$N_1 = 10$	$N_2 = 20$	$N_3 = 30$	$N_4 = 40$	$N_5 = 50$
$\overline{P}(N_j)$	0,114	0,166	0,418	0,256	0,046
A_1 $(n_1 = 10)$	0	140	280	420	560
A_2 $(n_2 = 20)$	60	0	140	280	420
A_3 $(n_3 = 30)$	120	60	0	140	280
A_4 $(n_4 = 40)$	180	120	60	0	140
A_5 $(n_5 = 50)$	240	180	120	60	0

Исходные данные из табл. 5.10 и 5.11, необходимые для вычисления критериев принятия решений, сведем в табл. 5.12 и вычислим по формулам (5.1)–(5.7) искомые критерии принятия решения (рекомендуемые стратегии указаны красным цветом в скобках и отмечены желтым цветом в табл. 5.12).

$$
\begin{aligned}
M &= \max_i \left(\max_j a_{ij} \right) = \\
&= \max(90; 180; 270; 360; 450) = 450 \quad (A_5); \\
W_V &= \max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \\
&= \max(-110; 30; -30; -90; -150) = 30 \quad (A_2); \\
W_g(0{,}5) &= \max_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] = \\
&= \max(-10; 105; 120; 135; 150) = 150 \quad (A_5); \\
W_S &= \min_i \left(\max_j r_{ij} \right) = \\
&= \min(560; 420; 280; 180; 240) = 180 \quad (A_4); \\
W_L &= \max_i \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \\
&= \max(-10; 90; 150; 170; 150) = 170 \quad (A_4); \\
W_B &= \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} P_j \cdot a_{ij} \right) = \\
&= \max(-7{,}7; 109{,}7; 193{,}5; 193{,}9; 143{,}1) = 193{,}9 \quad (A_4); \\
W_{H-L}(0{,}5) &= \max_i \left[\alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} P_j \cdot a_{ij} + (1-\alpha) \cdot \min_j a_{ij} \right] = \\
&= \max(-58{,}8; 69{,}7; 81{,}7; 51{,}9; -3{,}4) = 81{,}7 \quad (A_3).
\end{aligned}
$$

Анализ рекомендаций исследованных критериев позволяет сделать следующие выводы:

- критерии W_V, M-максимакса и W_G рекомендуют стратегии A_2, A_5, обеспечивающие или максимальный выигрыш при азартно рискованной игре (A_5), или при излишней

Таблица 5.12. Исходные данные для вычисления критериев принятия решения (желтым цветом отмечены рекомендуемые стратегии)

Исходные данные	Стратегии игрока A_i				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\min a_{ij}$	–110	30	–30	–90	–150
$\max a_{ij}$	90	180	270	360	450
$\left(\sum a_{ij}\right)/n$	–10	90	150	**170**	150
$\sum P_j \cdot a_{ij}$	–7,7	109,5	193,5	**193,9**	143,1
$0{,}5 \cdot (\min a_{ij} + \max a_{ij})$	–10	105	120	135	150
$\max r_{ij}$	560	420	280	**180**	240
$\left(\sum r_{ij}\right)/n$	280	180	120	**100**	120
$\sum P_j \cdot r_{ij}$	301,56	156,36	72,36	**71,96**	122,76
$0{,}5 \cdot \left(\sum P_j \cdot a_{ij} + \min a_{ij}\right)$	–58,5	69,7	**81,7**	51,9	–3,4

перестраховке (A_2) отсутствие проигрыша при нулевом или минимальном выигрыше;

- рекомендации критерия, основанного на минимизации риска W_S и группы критериев W_B, W_L и W_{H-L}, использующих априорную информацию экспертных оценок, ориентируют менеджмент компании на стратегии A_3 и A_4.

Сравнение стратегий A_3 и A_4 по дополнительным показателям, характеризующим средние выигрыши и риски:

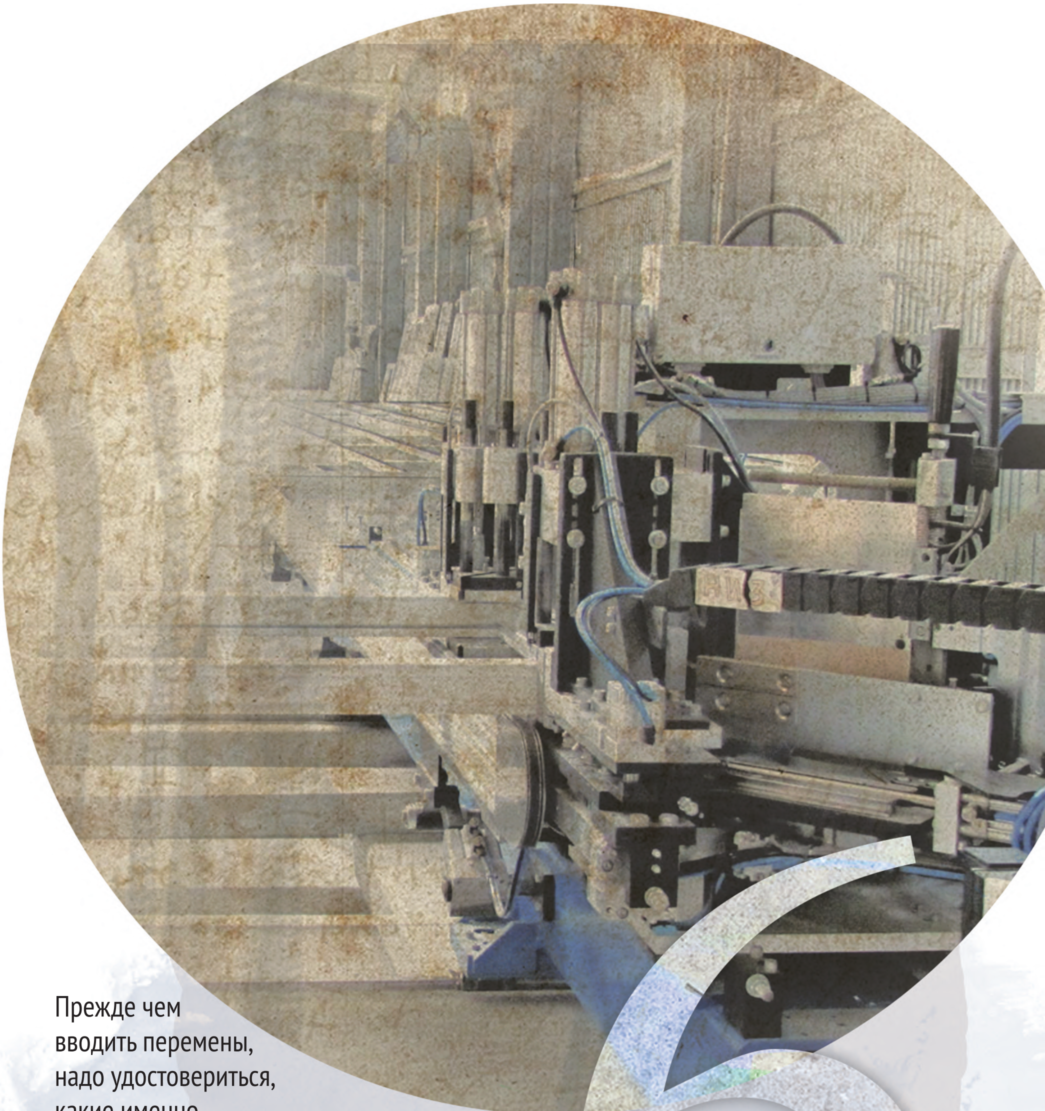
$$\frac{1}{n} \cdot \sum a_{ij}(A_4) = 170 > \frac{1}{n} \cdot \sum (A_3) = 150;$$
$$\frac{1}{n} \cdot \sum r_{ij}(A_3) = 120 > \frac{1}{n} \cdot \sum r_{ij} = 100(A_4),$$

позволяет сделать уверенный выбор в пользу стратегии A_4, так как ее применение обеспечивает получение в среднем большей прибыли при меньших в среднем рисках.

Таким образом, руководству компании рекомендуется принять меры к изготовлению 40 комплектов РМ, что позволит обеспечить максимальный размер средней прибыли от производства СПО в размере 170 ед. Такая рекомендация неочевидна, так как экспертами наиболее вероятным оценен объем заказа СПО в размере 30 ед. Проведение игрового математического моделирования позволило менеджменту компании проанализировать особенности возможной экономической ситуации и обоснованно принять решение по формированию производственного плана.

End keywords:

«Природа» — участник игры, критерии полной неопределенности и риска, решение методом линейного программирования.



Прежде чем
вводить перемены,
надо удостовериться,
какие именно
преобразования они
повлекут за собой.
Жажда перемен не может
служить предлогом
к преобразованиям.

Фрэнсис Бэкон
1561 – 1626

6 ГЛАВА
ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ
(ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ)

Позиционная игра — это бескоалиционная игра, схематически моделирущая принятие игроками решений в условиях меняющейся во времени информации [45]. Примером таких игр являются шахматы, шашки, домино, покер, задачи последовательного статистического анализа.

В организационно-экономических процессах компании, связанной с реальным производством, позиционные игры нескольких игроков редко могут найти объект для моделирования. Чаще имеют место ситуации предельного случая позиционной игры с одним игроком, решаемые средствами динамического программирования [103–110], позволяющими моделировать многошаговые задачи принятия оптимальных решений.

Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Процесс управляем, если возможно влияние на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию, является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах обеспечивали получение либо максимально возможного объема продукции, либо прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными к совокупности задач с малым числом переменных, что существенно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения. При решении задачи средствами динамического программирования процесс решения расчленяется на этапы, решаемые последовательно во времени.

Типичные особенности задач, решаемых методом динамического программирования, сводятся к следующему:

- процесс перехода системы из одного состояния в другое должен отвечать требованиям марковости [1]. Иначе говоря,

[1] *Марковский процесс — случайный процесс, эволюция которого после любого момента времени t не зависит от его эволюции, предшествовавшей моменту t. Иначе говоря, «будущее» марковского процесса зависит*

развитие процесса зависит только от данного состояния управляемой системы и не зависит от того, каким путем она приведена в это состояние;

- процесс длится конечное число шагов n, на каждом шаге выбирается управление $\mathbf{U}$, под воздействием которого система переходит из состояния $S(n)$ в состояние $S(n+1)$;
- каждый элемент управления связан с текущим состоянием системы $S(n)$ и принятым управлением $\mathbf{U}$;
- общий эффект (доход) за n шагов управления является суммой доходов всех предшествующих шагов, то есть критерий оптимальности аддитивен.

Цель динамического программирования — найти последовательность управлений $\mathbf{U}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_i, \ldots, \mathbf{U}_n)$, доставляющую максимум критерию эффективности управляемой системы.

В отличие от линейного программирования (см. разд. 3.5.1), для которого симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Основа динамического программирования — метод рекуррентных соотношений, базирующийся на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом [103–105].

Любая допустимая последовательность управлений $\mathbf{U}_i$ называется стратегией управления. Стратегия управления, доставляющая максимум критерию оптимальности, является оптимальной. Термин «*динамическое программирование*» для решения задач управления предложен Р. Беллманом в 1940 г. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние и выбранное управление, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце текущего шага. Использование такого принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучшее, а лучшее с точки зрения процесса в целом.

Многошаговость оптимизационной задачи является следствием протекания процесса принятия решений во времени либо моделируется путем искусственного расчленения требуемого однократного решения на отдельные во времени этапы и шаги.

от «прошлого» через «настоящее». Назван по имени российского математика Андрея Андреевича Маркова (1856–1922), *впервые его сформулировавшего.*

Цель такого последовательного расчленения заключается в сведении исходной задачи принятия оптимального решения как некоторой точки в пространстве высокой размерности к последовательному пошаговому решению совокупности нескольких задач меньшей размерности (вплоть до одномерной задачи). В настоящее время методы динамического программирования стали основным инструментом множества моделей исследования операций, затребованных практикой работы производственных компаний (замена оборудования, оптимизация последовательности технологических операций и т. п.).

Мы ограничимся рассмотрением некоторых актуальных задач уровня компании реального сектора экономики — замена оборудования, задачи Джонсона (минимизации продолжительности технологического цикла изготовления деталей при их последовательной обработке на двух станках).

6.1. Замена оборудования

«Прежде чем вводить перемены, надо удостовериться,
какие именно преобразования они повлекут за собой.
Жажда перемен не может
служить предлогом к преобразованиям.»

Фрэнсис Бэкон (1561–1626)

Качество продукции, экономические показатели предприятия, производительность труда во многом определяются составом оборудования. Необходимо вовремя обновлять парк оборудования, заменяя устаревшее физически или морально на новое, отвечающее стремительному техническому прогрессу. Естественно, замена оборудования не является самоцелью, стремлением к саморекламе. Замена должна отвечать критериям, делающим такую замену обоснованной и оптимальной. Для решения задач такого рода применяются модели динамического программирования.

Основой динамического программирования являются уравнения Беллмана, с помощью которых сложная оптимизационная задача трансформируется в рекурсивную последовательность простых подзадач. Термин «*программирование*» в динамическом программировании не имеет отношения к «*программированию*» в общепринятом в информатике смысле. В большей степени он соответствует понятию «*оптимизация*». Термин «*программа*» в динамическом программировании употребляется в смысле «*допустимая последовательность событий*».

В последние десятилетия динамическое программирование получило широкое распространение в задачах оптимизации экономических процессов [106, 107, 109]. В данном разделе мы будем рассматривать динамическое программирование как инструмент оптимизации процесса обновления и эффективного использования парка технологического оборудования компании.

Модель динамического программирования в задаче о замене оборудования может ориентироваться на различные критерии оптимальности: либо на обеспечение максимальной прибыли компании, либо на минимизацию эксплуатационных издержек при использовании оборудования.

В первом случае задача формулируется следующим образом [107, 109, 111]: необходимо определить оптимальные сроки замены оборудования в течение t лет, чтобы прибыль компании была максимальна, если известны: возраст t_j оборудования к началу j-го года или к концу $(j-1)$ года; начальная стоимость P приобретаемого нового оборудования (с учетом расходов на его транспортировку, монтаж, наладку и подготовку кадров); годовая стоимость $R(t_j)$ продукции, производимой на оборудовании возраста t_j, лет; ежегодные затраты $C(t_j)$ на содержание и ремонт оборудования; максимальный доход $F_j(t_j)$ на временном отрезке $j, \ldots, n$ при возрасте оборудования t_j лет в начале j-го года.

Формирование модели динамического программирования является t-пошаговым процессом. В начале каждого года принимается одно из решений — сохранить или заменить оборудование. Управление на каждом j-м шаге представляется логической переменной $\mathbf{U}_j$, принимающей два альтернативных значения: U^{C} — сохранить и $U^{\mathrm{З}}$ — заменить оборудование. Функциональные уравнения, на основе которых производится выбор управляющего решения, содержат две величины, одна из которых равна условной прибыли при сохранении оборудования, вторая — при его замене.

В начале j-го шага состояние процесса характеризуется возрастом оборудования $\varepsilon^{j-1} = t_j$. При решении сохранить оборудование под влиянием управления U^{C} система в конце j-го шага переходит в состояние $\varepsilon^{j-1} = t_j + 1$, то есть возраст оборудования увеличится на один год. Под влиянием управления $U^З$ система из состояния $\varepsilon^{j-1} = t_j$ переходит в состояние $\varepsilon^{j-1} = 1$, соответствующее замене оборудования в начале t_j-го года, поэтому в конце t_j-го года возраст оборудования будет равен одному году. Таким образом, уравнение состояния ε^j принимает вид

$$\varepsilon^j = \begin{cases} \varepsilon^{j-1} + 1, & U_j = U^С, \\ 1, & U_j = U^З. \end{cases} \tag{6.1}$$

При сохранении оборудования возраста t лет прибыль от его использования равна сумме прибыли на j-м шаге, равной $[R(t_j - C_j)]$, и прибыли, получаемой на $(j+1)$-м шаге, считая от конца процесса (рассматриваемого планового периода), возраст которого равен $(t_j + 1)$:

$$F_j(t_j) = R(t_j) - C(t_j) + F_{j+1}(t_j + 1). \tag{6.2}$$

Если на j-м шаге оборудование возраста t_j лет заменяется на новое, то прибыль рассчитывается по формуле

$$F_j(t_j) = R(0) - C(0) - P - r(0) + F_{j+1}(1), \tag{6.3}$$

где $R(0)$ — стоимость продукции, произведенной на оборудовании, возраст которого $t = 0$ лет; $C(0)$ — эксплуатационные издержки; $F_{j+1}(1)$ — прибыль, полученная на $(j+1)$-м шаге, рассчитывая от конца процесса, при работе оборудования, возраст которого равен $t = 0 + 1 = 1$ лет.

Таким образом, если величина прибыли (6.2) будет больше или равна величине прибыли (6.3), следует работать на старом оборудовании, в противном случае его следует заменить.

Объединяя формулы (6.2) и (6.3), приходим к математической записи принципа оптимальности Беллмана — основному функциональному уравнению Беллмана, на основе которого решаются многие задачи динамического программирования [103–105, 111]:

$$F_j(t_j) = \max_{U^j \subset \{U^С, U^З\}} \begin{cases} R(t_j) - C(t_j) + F_{j+1}(t_j + 1), & U_j = U^С, \\ R(0) - C(0) - P + F_{j+1}(1), & U_j = U^З. \end{cases} \tag{6.4}$$

Уравнения (6.4) позволяют определить величины $F_j(t_j)$, когда при переходе от одного шага к другому возраст оборудования и число пройденных этапов увеличиваются от t_j до $(t_{j+1} + 1)$ и от j до $(j+1)$ соответственно. Поясним решение задачи оптимальной замены оборудования по критерию максимума прибыли эксплуатации на конкретном примере.

Пример 6.1 (заимствовано из [111])

К началу 2001 года компания приобрела и ввела в эксплуатацию новое оборудование, производительность и затраты на содержание которого приведены в табл 6.1. Затраты на приобретение нового оборудования равны $P = 40$ тыс. руб., старое оборудование списывается. Необходимо сформировать план замены оборудования на 5 лет, при котором прибыль от его эксплуатации будет максимальна.

Таблица 6.1

Экономические показатели	Время работы оборудования t_j, гг.				
	0	1	2	3	4
Годовой выпуск продукции $R(t_j)$, тыс. руб.	80	75	65	60	60
Затраты на оборудование, $C(t_j)$, тыс. руб.	20	25	30	35	45

Начнем решение с последнего, 2005 года. Так как в 2001 году оборудование будет новым, то к началу 2005 года t_5 может принимать значения 1, 2, 3 или 4. В начале 2003 года возраст оборудования может иметь значения 1 или 2. В начале 2002 года может принимать значение только 1 год. Запишем, начиная с последнего, 5-го этапа, уравнения Беллмана и сведем все данные расчетов в единую таблицу.

Таблица 6.2

Этап 5 (2005 год)				
$F_5(t_5) = \max\limits_{U^j \subset \{U^C, U^З\}} \begin{cases} R(t_5) - C(t_5), & U_5 = U^C, \\ R(0) - C(0) - P = 20, & U_5 = U^З. \end{cases}$				
t_5	$R(t_5) - C(t_5)$	$R(0) - C(0) - P = 20$	Оптимальное решение	
	$U_5 = U^C$	$U_5 = U^З$	$F_5(t_5)$	U_5
1	$75 - 25 = 50$	$80 - 20 - 40 = 20$	50	U^C
2	$65 - 30 = 35$	$80 - 20 - 40 = 20$	35	U^C
3	$60 - 35 = 25$	$80 - 20 - 40 = 20$	25	U^C
4	$60 - 45 = 15$	$80 - 20 - 40 = 20$	20	$U^З$

Таблица 6.2. Окончание

Этап 4 (2004 год)				
$F_4(t_4) = \max\limits_{U^j \subset \{U^C, U^3\}} \begin{cases} R(t_4) - C(t_4) + F_5(t_4+1), & U_4 = U^C, \\ R(0) - C(0) - P + F_5(1), & U_4 = U^3. \end{cases}$				
t_4	$R(t_4) - C(t_4) +$ $+ F_5(t_4+1)$	$R(0) - C(0) - P + F_5(1)$	Оптимальное решение	
	$U_4 = U^C$	$U_4 = U^3$	$F_4(t_4)$	U_4
1	$75 - 25 + 35 = 85$	$20 + 50 = 70$	85	U^C
2	$65 - 30 + 25 = 60$	$20 + 50 = 70$	70	U^3
3	$60 - 35 + 20 = 45$	$20 + 50 = 70$	70	U^3
Этап 3 (2003 год)				
$F_3(t_3) = \max\limits_{U^j \subset \{U^C, U^3\}} \begin{cases} R(t_3) - C(t_3) + F_4(t_3+1), & U_3 = U^C, \\ R(0) - C(0) - P + F_4(1), & U_3 = U^3. \end{cases}$				
t_3	$R(t_3) - C(t_3) +$ $+ F_4(t_3+1)$	$R(0) - C(0) - P + F_4(1)$	Оптимальное решение	
	$U_3 = U^C$	$U_3 = U^3$	$F_3(t_3)$	U_3
1	$75 - 25 + 70 = 120$	$20 + 85 = 105$	120	U^C
2	$65 - 30 + 70 = 105$	$20 + 85 = 105$	105	$U^{C,3}$
Этап 2 (2002 год)				
$F_2(t_2) = \max\limits_{U^j \subset \{U^C, U^3\}} \begin{cases} R(t_2) - C(t_2) + F_3(t_2+1), & U_2 = U^C, \\ R(0) - C(0) - P + F_3(1), & U_2 = U^3. \end{cases}$				
t_2	$R(t_2) - C(t_2) +$ $+ F_3(t_2+1)$	$R(0) - C(0) - P + F_3(1)$	Оптимальное решение	
	$U_3 = U^C$	$U_3 = U^3$	$F_2(t_2)$	U_3
1	$75 - 25 + 105 = 155$	$20 + 120 = 140$	155	U^C

Проведем анализ таблиц по этапам для отыскания оптимального решения. В начале 2001 года оборудование было новым. Из таблицы этапа 2 следует, что в начале 2002 года оборудование не следует менять (решение U^C). В конце 2002 года этому оборудованию будет 2 года, поэтому в таблице этапа 3 необходимо выбирать строку, соответствующую $t_3 = 2$. В этой строке отмечено, что оборудование можно и заменить, и не менять (доход компании от выбора варианта не меняется). Принимаем решение заменить оборудование новым и до 2005 года будем эксплуатировать его, а в конце 2005 года списываем его.

Таким образом, оптимальным решением по замене оборудования будет $U_{\text{opt}}\left(U_2^{\text{С}}, U_3^{\text{З}}, U_4^{\text{С}}, U_5^{\text{С}}\right)$ и $F_2(1) = 155$. Логично учесть доходы и от эксплуатации нового оборудования, приобретенного компанией в начале планового периода в 2001 году; они равны $R(0) - C(60) = 60$. Тогда в окончательной форме оптимальное решение имеет вид

$$U\left(U^{\text{З}}, U^{\text{С}}, U^{\text{З}}, U^{\text{С}}, U^{\text{С}}\right) \quad \textit{и} \quad F_1(0) = 155 + 60 = 215.$$

Таким образом, оборудование, приобретенное в 2001 году, необходимо заменить в конце 2001 или начале 2002 года и в конце 2004 или начале 2005 года, что обеспечит максимальный доход от его эксплуатации в сумме 215 тыс. рублей.

На рис. 6.1 приведена графическая иллюстрация процесса оптимизации замены оборудования по критерию максимизации дохода.

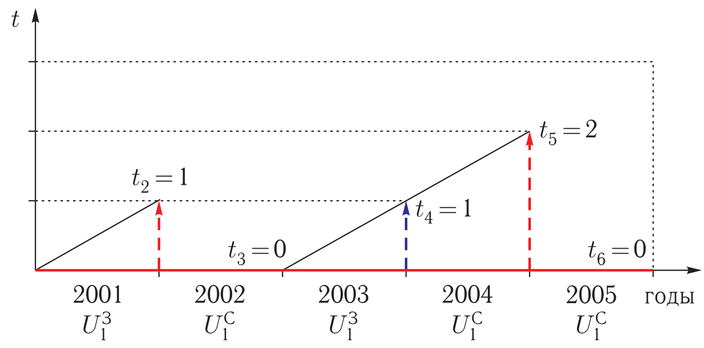


Рис. 6.1. Оптимизация процесса замены оборудования по критерию максимума дохода (замена – – –)

Рассмотрим теперь задачу поиска оптимального расписания замены оборудования по критерию минимизации эксплуатационных расходов на его содержание.

Пример 6.2

Оборудование эксплуатируется в течение 5 лет, после чего продается. В начале года принимается решение — сохранить оборудование или заменить его. Стоимость нового оборудования равна $P_0 = P_0 \cdot 2^{-t}$, где $P_0 = 4000$ — стоимость нового оборудования, t — продолжительность эксплуатации в годах. Затраты на содержание оборудования в зависимости от продолжительности эксплуатации равны $r(t) = 600 \cdot (t+1)$. Необходимо определить оптимальную стратегию, обеспечивающую минимум эксплуатационных издержек на оборудование с учетом стоимости его покупки и продажи.

Будем состояние оборудования отождествлять с его возрастом $S_{k-1} = t$, $S_0 = 0$ (оборудование в начале эксплуатации новое).

Уравнения состояний оборудования определяются оператором управления U:

$$S_k = \begin{cases} t+1, & \textit{если } U_k = U^{\text{С}}, \\ 1, & \textit{если } U_k = U^{\text{З}}, \quad k = 1,2,3,4. \end{cases} \tag{6.5}$$

Если к k-му шагу $S_{k-1} = t$, то при сохранении оборудования ($U_k = U^{\text{С}}$) через год возраст оборудования увеличится на 1. При замене оборудования ($U_k = U^{\text{З}}$) к началу k-го шага его возраст будет $t = 0$, а после года эксплуатации $t = 1$, то есть $S_k = 1$. Тогда показатель эффективности k-го шага можно записать следующим образом:

$$f_k = (U_k, t) = \\ = \begin{cases} 600 \cdot (t+1), & \textit{если } U_k = U^{\text{С}}, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t}, & \textit{если } U_k = U^{\text{З}}, \quad k = 1,2,3,4. \end{cases} \tag{6.6}$$

Первое соотношение определяет затраты на эксплуатацию оборудования при его сохранении ($U_k = U^{\text{С}}$), второе — общие затраты при продаже ($-4000 \cdot 2^{-t}$) старого оборудования, покупке (4000) и эксплуатации нового оборудования в течение первого года (600), равные ($4600 - 4000 \cdot 2^{-t}$).

Обозначая через $F_k(t)$ условные оптимальные затраты на эксплуатацию оборудования, начиная с k-го шага до конца планового периода, при условии, что к началу k-го шага оборудование имеет возраст t лет, запишем уравнения Беллмана:

$$F_5 = \min \begin{cases} 600 \cdot (t+1) - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, & \text{если } U_5 = U^{\text{С}}, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} - 4000 \cdot 2^{(t+1)}, & \text{если } U_5 = U^{\text{З}}, \end{cases}$$

$$F_k = \min \begin{cases} 600 \cdot (t+1) - F_{k+1}(t+1), & \text{если } U_5 = U^{\text{С}}, \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} - F_{k+1}(1), & \text{если } U_5 = U^{\text{З}}, \\ & k = 4,3,2,1, \end{cases} \tag{6.7}$$

где $4000 \cdot 2^{-(t+1)}$ — стоимость оборудования возраста t лет (после 5 лет эксплуатации по условию задачи оборудование продается); $F_{\min} = F_1(0)$.

Будем решать эту задачу, в отличие от задачи 6.1, графическим способом, наглядно демонстрирующим методологию процесса динамического программирования. Графическая модель процесса динамического программирования приведена на рис. 6.2.

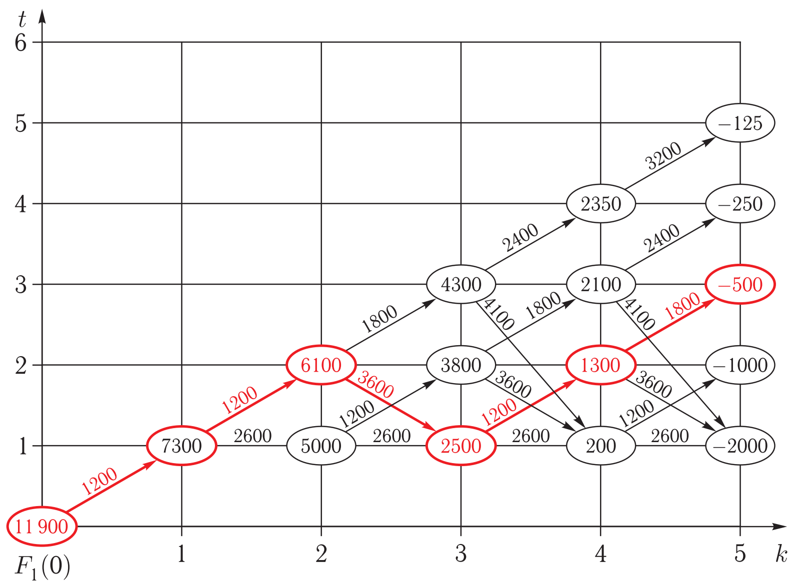


Рис. 6.2. Графическая модель задачи «*замена оборудования*»

На оси абсцисс откладываем номера k шагов оптимизации, на оси ординат — возраст оборудования t. Точка с координатами $(k-1, t)$ соответствует началу k-го года эксплуатации оборудования возраста t лет. Состояние начала эксплуатации оборудования соответствует точке $S_0(0,0)$, а конец — точкам $S_k(6,t)$, связанными между собой различными траекториями $S(k-1,t)$, состоящими из отрезков-шагов, соответствующих годам эксплуатации оборудования. Содержание задачи: из множества траекторий необходимо выбрать оптимальную, при которой затраты на эксплуатацию оборудования будут минимальны. Над каждым отрезком, соединяющим точки $(k-1,t)$ и $(k,t+1)$, записываются затраты $600 \cdot (t+1)$, соответствующие управлению $U^{\text{С}}$, вычисляемые из (6.6), а над отрезком, соединяющим точки $(k-1, t)$ и (k, t), затраты, соответствующие управлению U^3: $4600 - 4000 \cdot 2^{-t}$. Например, над отрезками, соединяющими точки $(k, 2)$ и $(k+1, 3)$, записываем число 1800, равное затратам на эксплуатацию в течение каждого года оборудования возраста $t = 2$ года, а над отрезками, соединяющими точки $(k, 2)$ и $(k+1, 1)$, — число 3600, равное сумме затрат на приобретение и эксплуатацию нового оборудования в течение года без выручки за проданное оборудование возраста t лет.

Анализируем шаги условной оптимизации начиная с последнего, 5-го шага. Начальные состояния — точки $(4, t)$, конечные — $(5, t)$. Состояние $(5, t)$ соответствует продаже оборудования, в результате чего получается условный оптимальный доход, равный $4000 \cdot 2^{-t}$. Так как целевая функция в нашей задаче связана с затратами на эксплуатацию оборудования, доход от продажи проставляем в точках $(5, t)$ со знаком минус.

Из состояния $(4, 1)$ можно попасть в состояние $(5, 2)$, затратив на эксплуатацию оборудования 1200, выручив затем от продажи 1000, то есть суммарные затраты составят 200. Из точки $(4, 1)$ в состояние $(5, 1)$ можно попасть с затратами $2600 - 2000 = 600$. Следовательно, если к последнему шагу система находилась в точке $(4, 1)$, то следует идти в точку $(5, 2)$, неизбежные затраты при этом составят $F_5(1) = 200$; проставляем эту величину в кружке точки $(4, 1)$. Из состояния $(4, 2)$ переходим в точку $(5, 3)$ с затратами $1800 - 500 = 1300$ и в точку $(5, 1)$ с затратами $3600 - 2000 = 1600$. Выбираем первое управление и проставляем $F_5(2) = 1300$ в кружке точки $(4, 2)$.

Рассуждая по аналогии для каждой точки предпоследнего шага, находим для любого исхода шага 4 оптимальное управление на шаге 5. Далее планируем шаг 4, анализируя состояния, в которых может оказаться система в конце шага 3, с учетом оптимального управления до конца процесса. Например, если начало шага 4 соответствует состоянию $(3, 1)$, то при управлении $U^{\text{С}}$ переходим в точку $(4, 2)$ с затратами 1200, суммарные затраты за два последних шага равны $1200 + 1300 = 2500$. При управлении U^3 затраты на два шага равны $2600 + 200 = 2800$. Выбирая минимальные затраты 2500, проставляем их в кружке точки $(3, 1)$, а соответствующее управление отмечаем стрелкой, ведущей из состояния $(3, 1)$ в состояние $(4, 2)$. Аналогично поступаем для каждого состояния $(3, t)$.

Выполняя шаги 3, 2 и 1 условной оптимизации, приходим к следующей графической модели рис. 6.1: из каждой точки (состояния) выходит стрелка, указывающая направление перемещения на данном шаге, если система оказалась в этой точке, а в кружках записаны минимальные затраты на переход из этой точки в конечное состояние.

В результате условной оптимизации получаем в точке $(0,0)$ минимальные затраты на эксплуатацию оборудования в течение 5 лет с последующей продажей: $F_{\min} = 11\,900$ ед. Далее перемещаемся по красным стрелкам из точки $(0,0)$ в конечную точку по маршруту $\{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,1),\ (4,2),\ (5,3)\}$, соответствующему оптимальному управлению $U_{\text{opt}}\left(U^{\text{С}}, U^{\text{С}}, U^{\text{С}}, U^{\text{С}}, U^{\text{С}}\right)$, из которого следует, что минимальные затраты на эксплуатацию оборудования достигаются при его замене на новое оборудование в начале 3-го года эксплуатации.

6.2. Задача Джонсона

«Всякий существенный порядок приходится непременно наводить»

Владислав Гжегорчик

Эффект от замены устаревшего оборудования новым будет достигнут только при оптимальном его использовании, при сведении к минимуму возможных простоев. При последовательной обработке деталей на нескольких станках эта задача сводится к составлению оптимального расписания поступления деталей на обработку.

Рассмотрим простую задачу: имеется n деталей и два станка, на которых они последовательно обрабатываются. Технологический процесс предусматривает обработку детали сначала на первом станке, а затем на втором. Предположим, что в каждый момент времени станок может работать только с одной деталью, время обработки i-й детали на первом станке равна a_i, а на втором — b_i. Необходимо найти последовательность подачи деталей на обработку, обеспечивающую минимизацию простоя второго станка. Эта задача динамического программирования носит имя Джонсона, который в 1954 г. предложил алгоритм ее решения [112].

Можно предположить, что порядок обработки деталей на обоих станках должен совпадать, так как на втором станке детали обрабатываются только после обработки их на первом, а время их обработки равно сумме b_i независимо от порядка обработки. Следовательно, следует отправлять на второй станок деталь, раньше других прошедшую обработку на первом. Целевая функция определяется как $F(x) = \sum x_i \to$ $\to \min$, где x_i — время простоя второго станка перед обработкой i-й детали (ожидание после обработки на станке $(i-1)$-й детали). Для первой детали $x_1 = a_1$, для второй — $x_2 = \max[(a_1 + a_2) - (x_1 + b_1), 0]$ (здесь $(a_1 + a_2)$ — время отправки детали на второй станок, $(x_1 + b_1)$ — момент окончания обработки вторым станком предыдущей детали). Третья деталь становится доступной для второго станка в момент $(a_1 + a_2 + a_3)$ после его освобождения в момент $(x_1 + b_1 + x_2 + b_2)$, отсюда $x_3 = \max[(a_1 + a_2 + a_3) - (x_1 + b_1 + x_2 + b_2), 0]$. Рассуждая по аналогии, приходим к соотношению для произвольного x_k:

$$x_k = \max\left(\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} b_i - \sum_{i=1}^{k-1} x_i, 0\right). \tag{6.8}$$

С учетом (6.8) суммарный простой равен

$$F(x) = \max_{k=1,\ldots,n} K_i, \quad \text{где } K_i = \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} b_i. \tag{6.9}$$

Джонсон обосновал простой алгоритм минимизации суммарного простоя: если минимум из четырех чисел a_j, a_{j+1}, b_j, b_{j+1} достигается на элементе массива a, то соответствующая деталь должна обрабатываться раньше, если из массива b — позже. Таким образом, алгоритм Джонсона трансформируется в простое правило: отбирать детали на обработку по минимуму величины из пары (a_i, b_i) следующим образом: если у текущей детали минимум равен a_i, то эту деталь нужно обрабатывать первой из оставшихся, если минимум равен b_i, то последней. В итоге решение задачи Джонсона сводится к сортировке деталей по определенному алгоритму сравнения [100, 101].

Пример 6.3

Необходимо найти оптимальную последовательность поступления деталей на обработку на двух станках, для которой суммарная длительность технологического процесса обработки будет минимальной.

Алгоритм динамического программирования решения задачи Джонсона приведен в табл. 6.3. Для наглядности процесс

Т а б л и ц а 6.3. Алгоритм Джонсона оптимизации расписания обработки деталей

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a_i	2	8	4	9	6	9	7	11	7	8
b_i	3	3	6	5	8	7	6	9	10	5
$F(x)$	2	7	8	11	12	13	13	18	16	14
Шаг 1	Минимальное значение $a_1 = 2$, 1-я деталь обрабатывается первой									
a_i	2									
b_i	3									
Шаг 2	Минимальное значение $b_4 = 3$, 2-я деталь обрабатывается последней									
a_i	2									8
b_i	3									3
Шаг 3	Минимальное значение $a_3 = 4$, 3-я деталь обрабатывается первой									
a_i	2	4								8
b_i	3	6								3
Шаг 4	Минимальное значение $b_4 = 5$, 4-я деталь обрабатывается последней									
a_i	2	4							9	8
b_i	3	6							5	3
Шаг 5	Минимальное значение $b_{10} = 5$, 10-я деталь обрабатывается последней									
a_i	2	4						8	9	8
b_i	3	6						5	5	3
Шаг 6	Минимальное значение $a_5 = 6$, 5-я деталь обрабатывается первой									
a_i	2	4	6					8	9	8
b_i	3	6	8					5	5	3
Шаг 7	Минимальное значение $b_7 = 6$, 7-я деталь обрабатывается последней									
a_i	2	4	6				7	8	9	8
b_i	3	6	8				6	5	5	3
Шаг 8	Минимальное значение $b_8 = 7$, 6-я деталь обрабатывается последней									
a_i	2	4	6			9	7	8	9	8
b_i	3	6	8			7	6	5	5	3
Шаг 9	Минимальное значение $a_9 = 7$, 9-я деталь обрабатывается первой									
a_i	2	4	6	7		9	7	8	9	8
b_i	3	6	8	10		7	6	5	5	3
Шаг 10	Минимальное значение $b_9 = 9$, 8-я деталь обрабатывается последней									
a_i	2	4	6	7	11	9	7	8	9	8
b_i	3	6	8	10	9	7	6	5	5	3
$F(x)$	2	3	3	2	3	3	3	5	9	12
i^0	1	3	5	9	8	6	7	10	4	2

трансформации начальной неоптимизированной последовательности поступления деталей на обработку на первом (продолжительность a_i) и втором (продолжительность b_i) станках сопровождается замещением начальной случайной цветовой гаммы на упорядоченную.

В результате применения алгоритма Джонсона исходная последовательность обработки деталей (верхняя строка табл. 6.3)

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10$$

трансформировалась в оптимальную последовательность

$$1 \to 3 \to 5 \to 9 \to 8 \to 6 \to 7 \to 10 \to 4 \to 2.$$

В соответствии с (6.9) вычисляем время простоя второго станка при неоптимизированном расписании обработки деталей:

$$\begin{aligned} F(x) = \max\bigl(&2;\ 2+8-3=7;\ 7+4-3=8;\ 8+9-6=11;\\ &11+6-5=12;\ 12+9-8=13;\ 13+7-7=13;\\ &13+11-6=18;\ 18+7-9=16;\\ &16+8-10=14\bigr)=18, \end{aligned}$$

а при оптимальном расписании, соответствующем алгоритму Джонсона,

$$\begin{aligned} F(x) = \max\bigl(&2;\ 2+4-3=3;\ 3+6-6=3;\ 3+7-8=2;\\ &2+11-10=3;\ 3+9-9=3;\ 3+7-7=3;\\ &3+8-6=5;\ 5+9-5=9;\ 9+8-5=12\bigr)=12. \end{aligned}$$

Таким образом, использование алгоритма динамического программирования Джонсона за счет оптимизации последовательности обработки деталей обеспечивает снижение времени простоя станка на 50 %.

Приведенные примеры позволяют сделать вывод, что динамическое программирование является действенным инструментом повышения экономической эффективности производства, обеспечивая оптимальное использование оборудования и принятие своевременных экономически обоснованных решений по его обновлению.

End keywords:

Динамическое программирование — позиционная игра одного игрока, принцип оптимальности Беллмана, задача замены оборудования, задача Джонсона.

Ты никогда не будешь знать
достаточно, если
не будешь знать больше,
чем достаточно.

Уильям Блейк
1757 – 1827

7 ГЛАВА

ИТОГОВЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

ПОВТОРЕНИЕ ПРОЙДЕННОГО С ЭЛЕМЕНТАМИ ВЫВОДОВ

«Ты никогда не будешь знать достаточно,
если не будешь знать больше, чем достаточно»
У. Блейк (1757–1827)

На этом можно было бы завершить изложение основных приемов теории игр, не требующих от экономистов-практиков отсутствующих у них серьезных математических познаний. Однако, прочитав эту книгу и вооружившись некоторыми знаниями в области теории игр (авторам хочется в это верить), полезно уже новыми глазами взглянуть на настоящее и желательное будущее этой теории, ее место в оснащении практикующих экономистов и менеджеров инструментарием анализа экономических процессов, протекающих не вообще в мире, а на их глазах, на их предприятии, в их цехах и отделах. Начинающих хотелось бы предостеречь от переоценки всесильности математического аппарата, обратив их внимание на сложности и проблемы теории игр, причины ее медленного проникновения в реальную жизнь. Не исключаем и того, что у читателя сложился весьма туманный образ самого понятия «*игра*», для него оно остается неким «*лингвистическим оливье*»: и явлением, и исследованием, и моделью, и технологией.

Известно, что нетерпеливые любители детективов частенько заглядывают в конец очередного бестселлера, чтобы удовлетворить собственное нестерпимое любопытство и узнать, кто же убийца. Авторы решили предоставить такую возможность и нашему читателю. Он без вреда для собственного любопытства может начинать знакомство с книгой с ее заключительного раздела. Поэтому мы включили в него свободный микс из повторения пройденного материала, рассуждений о настоящем и будущем теории игр, занимательные исторические факты и ситуации сегодняшней жизни, рассмотренные с точки зрения теории игр. Полагаем, это позволит ему сконцентрированно представить себе, о чем идет речь, манеру изложения материала, цель, которую преследуют авторы. Если цели авторов и читателя совпадут, он может начать знакомство с книгой, как и положено, с начала. Ну, а если не совпадут, тоже не без пользы — можно не тратить деньги на приобретение книги и сэкономить время. К сожалению, сами авторы были лишены возможности заглянуть в конец предполагаемой книги в начале процесса ее написания. И только в конце им стало ясно, что ее необходимо было начать иначе, с описания истоков — занимательных и азартных игр и теории вероятностей. Пришлось переписывать все сначала. Не стоило бы игнорировать мудрое замечание классика — «*только в конце работы становится ясно, с чего надо было начать*» (Блез Паскаль).

Мы не старались использовать сложный математический аппарат, ориентируясь на уровень математической подготовки школьника старших классов: самое, пожалуй, сложное в нем — это нудное и нелюбимое, как правило, матричное исчисление, но и оно встречается на минимальном уровне и сопровождается небольшой шпаргалкой-приложением. В конце концов, «*чтобы что-то узнать, нужно уже что-то знать*» (Станислав Лем).

Вернемся к основной проблеме — почему теория игр остается любимой игрушкой в руках математиков. Ранее мы определили теорию игр как математическую теорию анализа конфликтов. Самое слабое звено во всей этой цепочке — человек, успешно создающий конфликты, но, к сожалению, менее успешно их разрешающий. Собственно, вся наша жизнь и состоит из цепочки бесконечных конфликтов и усилий по их разрешению. Спросите руководителя компании: какое звено на его предприятии самое слабое, и он, не задумываясь, ответит — человек, правда, добавит, что он и самое сильное звено. Он с настойчивостью пытается исключить человека из технологического процесса, заменяя его автоматами и роботами (забывая, что их тоже создает человек).

Оказалось, что царь природы — человек — не всегда царь в теории игр. Шимпанзе порой лучше ориентируются в игре, чем человек. В журнале *Scientific Reports* от 5 июня 2014 г. [113] опубликованы исследования ученых из Калифорнийского технологического института под руководством профессора бихевиористской (поведенческой) экономики Колина Кэмерера и Роберта Кирби результатов игры людей и обезьян в прятки. Суть игры такова — работник работает в офисе под присмотром бдительного начальника. Цель работника — занимаясь посторонними делами, не попасться на глаза шефу, цель шефа — поймать сотрудника за этим неприличным занятием. В теории игр такая игра называется задачей инспектирования (вспомните разд. 4.3.4 — «*игру*» налогового инспектора с налогоплательщиком). Если участники игры применяют оптимальные стратегии, то количество побед каждого ограничивается средней ценой игры. В ситуации равновесия Нэша изменение стратегии игроком не увеличивает число его выигрышей. В качестве критерия успеха игрока использовалась близость к заранее рассчитанному равновесному балансу побед и поражений. Достижение установленного ранее равновесия трактовалось как достижение игроками оптимальной стратегии.

В Японии 16 студентов соревновались с шестью шимпанзе из Центра исследования приматов при Киотском университете. Три пары обезьян и восемь пар студентов садились спиной к спине перед сенсорными мониторами и выбирали один из двух изображенных на экранах прямоугольников. Выигрывал тот, чей выбор совпадал с выбором противника. То есть один из них условно что-то прятал, а другой должен был это найти.

Результаты студентов были далеки от равновесия Нэша, в то время как обезьяны интуитивно выбирали оптимальную стратегию, близкую к равновесию Нэша (понятно, что обезьяны ничего о Нэше не знали). За правильный ход студенты поощрялись монетами, а обезьяны — яблоками. Результаты обезьян повторялись и тогда, когда они менялись ролями и ученые разнонаправленно меняли точку равновесия Нэша и уровень награды за правильный ход.

Обескураженные ученые провели эксперимент вторично в гвинейском городе Босу, предложив тот же тест 12 мужчинам. Вместо сенсорных экранов использовались бутылочные пробки, которые переворачивались втайне от соперника. Чтобы не опозориться в очередной раз, людям разрешили смотреть друг на друга, но и с таким дополнительным преимуществом они проиграли гвинейским обезьянам.

Однозначного объяснения полученным результатам ученые дать не смогли. Были выдвинуты две гипотезы. По одной из них все дело в отличной кратковременной памяти, свойственной шимпанзе. По другой — способность людей к социализации и кооперированию делает их менее подготовленными к соревновательной деятельности, в то время как шимпанзе всю жизнь утверждают свой статус в группе посредством конфронтации. В конечном счете обе гипотезы базируются на способности человека к речи.

По другой теории эволюционные изменения в мозге, благодаря которым человек приобрел способность к языку и категоризации, одновременно привели его к тому, что он решает простые соревновательные задачи чересчур абстрактно и сложно.

В теории игр человек самое проблемное звено. Он (или совокупность, группа людей) является творцом и субъектом любого конфликта (читай — игры), рождающегося в точках пересечения его интересов с интересами других людей, к нему обращены рекомендации и выводы мудрецов-математиков, творцов теоретического фундамента теории игр.

Но, как многие абстрактные математические модели, теоретико-игровая модель конфликта ограничена. Она не выявляет природу конфликта, скрытые пружины деятельности человека в конфликтной ситуации.

Каждая сторона конфликта настойчиво ищет средства достижения своей цели. На этом поприще приходится учитывать противодействие противника, мешающего вашему продвижению к поставленной цели. Выбирая свою стратегию, участник конфликта опирается на некий резон, которому в наибольшей степени должен соответствовать его выбор, полагая, что выбранная стратегия принесет ему наибольший выигрыш за счет соперника. Не располагая, чаще всего, сколь-нибудь достоверной информацией о целях, ресурсах и стратегиях противника, он вынужден принимать решения в условиях неопределенности (впрочем, противник тоже). Именно поэтому в теории игр базовым является принцип гарантированного результата, то есть результата, достижение которого не зависит (или слабо зависит) от решений противника (равновесие Нэша, принцип минимакса Дж. фон Неймана).

Предположение об «*идеальной*» разумности игроков не является сильной стороной теории игр. Напротив, в реальном конфликте чаще всего стратегия игрока заключается в том, чтобы угадать, в чем слабость противника, и без зазрения совести воспользоваться ею по полной, руководствуясь принципом «*с умным договорись, дурака обмани*». При анализе игры теория предполагает, что все возможные действия (стратегии) противника известны, неизвестно только то, какой стратегией он воспользуется в данной партии. Однако на практике редко перечень возможных стратегий противника известен до игры, более того, чаще всего наилучшим решением в реальной конфликтной ситуации является как раз выход за пределы известных противнику стратегий.

Сама конфликтная ситуация в теории игр является только декорациями, в которых происходит конфликт сторон [48]. Человек в теории игр не рассматривается во всей его сложности, ограничиваясь классической моделью человека-игрока, базирующейся на концепции его абсолютной рациональности.

Фундаментальный посыл теории игр утверждает, что если один рациональный игрок (назовем его первым) преследует цель обеспечить себе наибольший из минимальных выигрышей, опираясь на свою максиминную стратегию, то его противник, реализуя собственную минимаксную стратегию, преследует цель заплатить за это наименьшим из максимальных проигрышей. Когда устремления игроков совпадают в одной ячейке матрицы, наступает момент истины — равновесие; движения в разные стороны от достигнутой точки, называемой седловой, для игроков лишены всякого смысла — лучше не будет, а хуже может быть. Это чистая игра, все возможные стратегии игроков известны им самим и друг другу. Поэтому и стратегии, которые они используют, называются «*чистыми*». Мы ранее уже говорили о том, что если нет равновесия в таких заранее известных стратегиях, оно обязательно есть в смешанных стратегиях. Смешанная стратегия игрока — это совокупность (набор) вероятностей, с которыми он повторяет в случайном порядке свои чистые стратегии, своеобразная рулетка казино. Игра в смешанных стратегиях не является «*чистой*», потому что информация о порядке применения стратегий игроками в процессе игры утаивается не только от противника, но и от самого игрока. Платой за это является возможность повысить свой средний выигрыш и достичь если не чистого равновесия, то равновесия в среднем. Правда, у экономистов «*мозги и деньги редко находятся в равновесии*».

Метод минимакса предполагает одно условие — игроки действуют разумно. Иными словами, каждый игрок считает, что его противник всегда действует в своих интересах и старается использовать стратегии, оптимальные с его точки зрения. Но что будет, если это не так?

Многочисленный эксперименты показали, что разумные действия, направленные на увеличение выигрыша, не используются так часто, как хотелось бы. Большинство страстно и неуклонно стремится к еще большему выигрышу. Достаточно посмотреть на жертв различных комбинаторов и мошенников, предлагающих игрокам стратегии большего выигрыша по телевизору, чтобы понять, что матемематика математикой, а стремление к халяве неистребимо.

Минимаксная стратегия — это своеобразная защита, гарантирующая оптимальный результат, если оппонент будет действовать разумно в своих (а не в ваших) интересах. Однако подленькая мысль получить больше гарантированного минимума не покидает игрока никогда. А что в этом плохого? Кто не рискует, тот не пьет шампанского. Наши нынешние олигархи рискнули в 90-х годах прошлого века поверить, что все происходящее — не временное явление, и получили громадный куш, не особенно себя утруждая.

Создав теорию игр, математика сделала попытку проникнуть в экономику. Экономика не относится к классу естественно-научных дисциплин, являясь до последнего времени гуманитарной, социальной наукой, поэтому теория игр — это рывок точной науки, математики, в гуманитарную область.

У читателя может возникнуть вопрос, почему бы экономике не воспользоваться хорошо развитыми математическими методами оптимизации различных процессов, в том числе и весьма подверженных влиянию случая? Зачем появилась отдельная теория экономических (и иных) конфликтов — теория игр?

При анализе конфликтной ситуации для применения известных методов оптимизации необходимо располагать знанием (или хотя бы гипотезой) о действиях противника, о законах распределения вероятностей различных вариантов этих действий. Однако таких методов до настоящего времени не существует. Именно это обстоятельство привело к необходимости появления специфического класса математических моделей принятия оптимальных решений, что и стало базой теории игр.

Теория игр утверждает, что исход игры, выигрыш, может быть оценен заранее, но только тогда, когда игрок благоразумен, обладает знаниями и рационален. Это очень сильное предположение. Само понятие «рациональность» требует изучения. В Еврейском университете даже существует Центр изучения рациональности, возглавляемый не кем иным, как нобелевским лауреатом, мировой звездой теории игр Робертом Ауманном. Разумное поведение игрока пока не удается математизировать и связать с вероятностными оценками, на которых основываются базовые посылки теории игр. Выбирая путь к выигрышу, игрок ориентируется на некоторую «*внутреннюю*» математическую функцию, соотносящую достигнутый результат со степенью его удовлетворенности.

Математико-игровому моделированию практически не поддается творчество, креативное мышление, интуиция, вдохновение, нравственность как основа внутренней регуляции человека, которую не всегда удается заменить холодным рационализмом. Анри Пуанкаре справедливо заметил, что «*в математике нет символов для неясных мыслей*» [10, с. 427]. Исходные предпосылки теории игр по информированности игроков о структуре игры и платежах в реальной жизни соблюдаются не часто, а теория игр болезненно реагирует на небольшие изменения в правилах игры резкими сдвигами в предсказанных равновесиях. Современная теория игр пока находится в плодотворном тупике. Лебедь, рак и щука предлагаемых решений тянут ее в разные стороны, по различным направлениям и ответвлениям теории, пишутся тысячи работ, однако «*воз и ныне там*».

Одним из новых сложных направлений теории игр являются так называемые рефлексивные игры. Рефлексия — это обращение сознания внутрь себя, проще, это анализ не только того, что думает оппонент делать, но и того, что он думает о том, что думаешь делать ты в ответ на его действия и т. д., и т. п. Термин «рефлексия» предложен впервые английским философом Джоном Локком (1632–1704). Помните, как у Максима Леонидова: «*Я обернулся посмотреть, не обернулась ли она, чтоб посмотреть, не обернулся ли я*». Поиск равновесий в таких играх — задача чрезвычайно сложная и зависит от уровня информированности и креативности игроков, способных не только использовать нестандартные стратегии, но и наличием у них таланта предугадать реакции противников на собственный креатив. Уж кто-кто, но только не математики являются специалистами в законах, управляющих поведением людей (скорее это писатели и поэты). Крупные писатели, инженеры человеческих душ, способны, как никто другие, предвосхищать события и смыслы, конструируемые людьми. Вряд ли можно полнее определить сущность того, что навязывается рефлексией, как это сделал Виктор Пелевин (р. 1962): «*Главная проблема как раз в том, чтобы избавиться от свободы выбора, жестко подвести к нужному решению, сохранив уверенность, что выбор свободный. По* *научному это называется принудительным ориентированием*» [114, с. 80]. Именно это неявное принудительное ориентирование при выборе решения и является рефлексивным управлением. «*Любая из техник, примененная сама по себе*, — продолжает писатель, — *может быть легко обнаружена. Но если она применяется в комбинации и делается это так тонко, что методы сменяют друг друга постоянно, а интенсивность их применения находится на границе восприятия, достигается практически стопроцентная точность манипулирования при ее полной незаметности*» [114, с. 81].

В конечном счете рефлексивное управление есть не что иное, как «*скрытое управление человеком против его воли, приносящее инициатору определенные преимущества*» [115] — методологическая основа цветных революций, грозное оружие современных информационно-психологических войн.

Не нужно думать, что рефлексивные игры — достижение современников. Примеров рефлексивного управления особенно много в истории военного искусства [116–124]. Рефлексивные игры были хорошо известны еще со времен Древнего Китая [116, 119–123], Древнего Рима [117], европейских войн [118].

Искусство создания и реализации стратегем — стратегических планов, содержащих для противника капкан, ловушку или хитрость, — зародилось еще в древности. Термин «*стратегема*» [1)] использовался еще в Древней Греции и приобрел широкую известность благодаря книге Секста Юлия Фронтина (30–103 гг. н.э.) «*Стратегемы*» (Strategemat), в которой он описал богатый собственный опыт и опыт его предшественников Ксенофонта (431–356 гг. до н. э.), Фукдида (460–400 гг. до н. э.), Саллюстия (86–35 гг. до н. э.), Поллибия (200–112 гг. до н. э.), Диодора (90–30 гг. до н. э.), Валерия Максима (II век), Тацита (50–120 гг. н.э.), создав, по-существу, «*справочное пособие, скомпилированный учебник по военному делу, тактическим и психологическеим стратегемам*». Во втором веке появились «*Стратегемы*» Полиэна, римлянина македонского

[1)] Стратегема — (древнегреч. $\sigma\tau\rho\alpha\tau\acute{\eta}\gamma\eta\mu\alpha$ — военная хитрость) — алгоритм поведения, просчитанная последовательность действий, направленных на достижение скрытой цели, получение преимуществ и перехватывания инициативы с обзательным учетом психологии противника, его положения, обстановки и других особенностей ситуации.

происхождения. Приведем классический пример стратегемы в изложении Полиэна [125, с. 104]. Некто Пелопид, фиванский государственный и военный деятель времен Беотийской войны (378–362 гг. до н. э.) между Беотийским союзом во главе с Фивами и Пелопоннесским союзом во главе со Спартой, осаждал два города, отстоящих друг от друга на двадцать стадий (4 км). Пелопид послал четырех всадников, увенчанных победными венками, к стенам одного осаждаемого города с ликующей вестью о взятии соседнего. После чего поджег густой лес перед стенами якобы покоренного города. Увидев густой дым, осажденный город прекратил сопротивление. Пелопид, воспользовавшись гарнизоном сдавшегося города, покорил и город, якобы покоренный ранее.

Однако первенство по использованию стратегем, по богатству их содержания принадлежит Китаю (вспомните: «*Восток — дело тонкое*»). Это понятие существует в культуре Китая не менее трех тысяч лет, означая «расчет», «план», «прием», «техника», «уловка». Уже древнейшее руководство по военному делу, трактат Сунь-Цзы (IV(?)–VI век до н. э.) о военном искусстве [116], начинается главой «*Война — это путь обмана*», а в третьей главе «*Нападение посредством стратегемы*» содержится самая известная фраза Сунь-Цзы: «故善用兵者，屈人之兵，而非戰也 — *Умеющий вести войну покоряет чужую армию, не сражаясь*». По шкале Сунь-Цзы победа в битве стоит только на третьем месте шкалы воинского искусства после стратегемы и дипломатии.

Классикой стратегем является каталог 36 стратегем, состоящий из 138 иероглифов, из древнейшего китайского трактата «*Саньшилю цзи мибэнь бинфа*», оригинал рукописи которого был обнаружен в 1939 г. в провинции Шэньси. Первое упоминание 36 стратегем встречается в седьмом томе «*Биографии Ван Цзинцзэ*», генерала при дворе первого императора династии Южная Ци (479–502 гг.) Гао-ди. Существует версия о нумерологическом происхождении числа 36. В «Книге перемен» число 6 является числом Инь (темного женского начала), среди прочего порождающего и хитрость. Возведенное в квадрат, оно предает числу смысл «*несметного множества хитростей*», являясь буквальным воплощением символизма Ван Цзинцзэ.

В этих 36 кратких формулировках китайцы собрали немалую часть своих тысячелетних наблюдений за поведением противника и способами выхода изо всех немыслимых ситуаций. Трактат —

список из 36 идиом и коротких пояснений к ним, являющихся особым типом фразеологизмов китайского языка — ченьюй. За каждой фразой стоят исторические примеры, большая часть которых относится к периоду Сражающихся царств (475–221 гг. до н. э.) и эпохе Троецарствия (220–280 гг.), когда китайская военная и дипломатическая мысль переживала расцвет.

Давно, в эпоху Троецарствия (192–265 гг.), Чжугэ Лян (181–234 гг.), великий полководец царства Шу, был послан с небольшим отрядом в 5000 солдат в пограничный городок Сичэн, чтобы перевезти находившиеся там припасы в Ханьчжун, когда ему доложили, что на город движется огромная армия под командование опытного военоначальника царства Вэй — Сыма И (179–251 гг.). Вдруг Чжугэ Лян велел открыть ворота, переодеть своих немногих солдат в горожан и приказал им подметать улицы перед воротами города. Сам Чжугэ Лян с двумя оруженосцами поднялся на городскую стену, накинул плащ из журавлиных перьев, надел коническую шелковую шапку и, достав свою любимую цитру с выгнутой декой (*музыкальный инструмент* — авт.) и, возжегши курение, начал играть на ней.

Когда Сыма И во главе отряда разведчиков своего войска в 150 000 солдат подъехал ближе, ему предстала идиллическая картина — пустой город, ворота открыты, Чжугэ Лян играет на цитре на городской стене. Сыма И решил: «*Это ловушка, наверняка в городе спрятано большое войско, войдем в город и окажемся в западне. Вряд ли такой хитрый и осторожный полководец, как Чжугэ Лян, будет вести себя так беспечно, если в городе только маленький отряд. Наверно, у него войско не меньше моего*». Немного поразмышляв, Сыма И отступил. В память об этом событии было даже написано стихотворение: «*Цитра с выгнутой декой, украшенная нефритом длиною в три фута, победила отборное войско Сыма И, когда Чжугэ Лян в Сичэне повернул врагов вспять. Поныне местные жители показывают это место, там 150 000 человек повернули вспять*».

За хитрость и изворотливость Чжугэ Лян при жизни был прозван «*невидимым драконом*». Даже мертвым он сумел провести Сыма И, который преследовал его войско. В 234 г. Чжугэ Лян заболел и умер. Местные жители донесли эту тайну до Сыма И. Но, к его удивлению, воины Чжугэ Ляна, храня его смерть в секрете, спокойно выходили из своего лагеря и наносили удары по войскам противника. Сыма И испугался, предполагая, что Чжугэ Лян притворился мертвым и пытается завлечь его, и немедленно отошел. С тех пор в Китае ходит поговорка, что «*мертвый Чжугэ испугал живого Чжунда* (*почетное имя Сыма И* — авт.)». Не правда ли, поучительный пример изощренной игры двух игроков с неполной информацией, один из которых использовал рефлексию противника?

Естественно, что использование стратегем не предполагает исходить из какой-либо морали и нравственности. Существует единственный критерий — эффективность, нет друзей и союзников, все враги — явные или потенциальные тайные. Нравственность и иные духовные атрибуты — не нормы, которым необходимо следовать, а не более чем инструменты, используемые в своих целях. «*Цель оправдывает средства*» — стержневой принцип китайских стратегем. Что стоит, например, стратегема 24: «*Объявить, что только собираешься пройти сквозь государство Го, и захватить его*», предполагающая одолжить ресурсы у союзника, чтобы атаковать общего противника, а после того, как он будет повержен, первым делом использовать эти ресурсы против того, у кого их одолжил.

Сегодня в Китае миллионными тиражами выпускаются даже комиксы (для детей), иллюстрирующие применение 36 стратегем. 138 иероглифов, выражающих 36 стратегем, входят в обязательную программу знаний китайца, окончившего среднюю школу, и должны быть выучены им наизусть.

Не только Древний Китай отличался использованием стратегем в военном противостоянии. Известен удачный пример проведения Управлением разведки британского Адмиралтейства операции «*Минсмит*» (в буквальном переводе — «*начинка*»), в ходе которой был блестяще реализован прием «*сделать ложное настоящим, а настоящее ложным*» [121, 122].

Суть операции такова. Союзные войска намеревались захватить Сицилию, так как с нее немецкие войска контролировали все Средиземное море, что препятствовало началу боевых действий в Италии. Стояла задача убедить немцев в том, что не Сицилия, а Сардиния и Пелопоннес являются целью союзников. Был разработан следующий сценарий дезинформации: в море находят труп штабного офицера и при нем письмо, из которого следовало, что подготовка наступления на Сицилию является отвлекающим моментом. Офицер летел из Англии в Африку, но самолет его был сбит. Он попал в море и умер. Чтобы заставить противника поверить в это, была проведена громадная работа. Предполагая, что труп будет тщательно исследован врачами, у патологоанатома было выяснены, каким типическим признакам должен соответствовать труп человека, погибшего при авиакатастрофе и попавшего в море. Затем был поиск конкретного тела (пришлось решать проблемы с родственниками, англичане к таким вещам очень щепетильны), до операции тело майора хранилось в холодильнике. Из возможных вариантов транспортировки тела (корабль, гидросамолет, подводная лодка) была выбрана подводная лодка. Заместитель начальника генерального штаба, генерал Арчибальд Най (1895–1967) написал лично письмо командующему армией в Тунисе генералу Харольду Александеру (1891–1969) — тому самому, который 2 мая 1945 года принял капитуляцию германских войск в Италии. Из письма следовало, что в ходе операции «*Бримстен*» (название ложной операции против немецкой армии в Южной Франции) Сицилия используется как отвлекающий маневр, а действительный удар будет нанесен в Сардинии и в восточной части средиземного моря с высадкой войск в Греции. Для погибшего офицера составили легенду: подняли реальные списки офицеров военно-морских сил, нашли распространенную фамилию Мартин, добавили к ней распространенное имя Уильям. Майора Уильяма Мартина задним числом зачислили на службу в штаб морских десантных операций, была подобрана бывшая в употреблении военная форма, с которой срезали бирки разных прачечных; затем на одну из них вновь пришили одинаковые бирки. В карманы лжемайора положили удостоверение, частные письма, приглашение в ночной офицерский клуб Лондона, корешки театральных билетов, письма от возлюбленной и ее фотографии, подлинный счет за обручальное кольцо с письмом из банка о том, что счет не может быть оплачен, поскольку кредит майора исчерпан.

19 апреля 1943 г. подводная лодка «*Сераф*» с телом майора вышла в море и через 10 дней была в заданной точке. Портфель был пристегнут к поясу майора металлической цепочкой, на тело одели спасательный жилет, и операция началась. После войны из архивов немецкой разведки было установлено, что тело своевременно обнаружили, осмотрели и передали немецкой разведке, которая подтвердила подлинность документов. Генеральный штаб согласился с выводами разведки. Адмирал Дениц,

вернувшись из Италии, доложил Гитлеру, что, по мнению Муссолини, союзники нанесут удар по Сицилии, но не смог убедить Гитлера в этом. Тот настаивал, что реальные документы прямо указывают на удар в направлении Сардиния–Пелопоннес. Даже через две недели после высадки союзников в Сицилии Гитлер оставался при своем мнении и послал генерала Роммеля командовать войсками в Грецию, откуда его потом отозвали опять в Италию. Результат операции «*Минсмит*» оказался блестящим: немцы сосредоточили войска в Греции, провели работы по укреплению побережья, поставили минные заграждения, развернули береговые батареи, перебросили в Грецию танковую дивизию и большие средства из Сицилии в Сардинию и на Корсику. Когда стало ясно, что основной удар наносится по Сицилии, было уже поздно. Вот уж поистине «*человек — это то, что он врет, во вранье проступают способности*» (Гарик Губерман (р. 1936) [125, с. 226]).

Вот такая динамическая игра с неполной информацией. Не следует считать, что немцы такие недалекие игроки. Двумя годами раньше они весьма искусно провели такого хитроумного стратега, как Сталин, застав его врасплох в июне 1941 года.

Отметим, что задачи подобного рода весьма креативно умели решать задолго до появления высоколобых ученых. Еще испанский завоеватель Эрнан Кортес (1485–1547), высадившись на американский берег с немногочисленным войском, устоял против многократного превосходящего войска ацтеков. Он знал, что дух солдат был невысок и, чтобы устранить возможность дезертирства, приказал сжечь на глазах ацтеков корабли, на которых приплыл. Солдатам Кортеса ничего не осталось, кроме как драться до последнего, а ацтеки решили, что если испанцы сожгли корабли, значит у них есть на это основания, и отказались от боя. Так же поступил и английский король Генрих V (1387–1422), когда перед битвой при Агинкорте приказал расстрелять французских пленных на глазах у французов. Рефлексия здесь такова — французы увидят, что делают с пленными англичане, поэтому не будут сами церемониться с пленными; солдаты-англичане, поняв это, будут избегать пленения и будут сражаться до конца.

Стоит отметить, что и наш незабвенный Василий Иванович Чапаев (1887–1919), герой Гражданской войны и бесчисленных анекдотов, тоже был не промах, и проявлял недюжинные способности и искусство в применении военных хитростей. Вот пример использования им стратегемы 7 «У чжун шэн ю — извлечь нечто из ничего» (естественно, сам он и не догадывался о том, что он применил такую весьма мудреную штуку). Однажды Чапаев пошел в разведку с кавалерийским эскадроном с целью установить, занята или нет соседняя деревня белогвардейцами. Разведка выяснила, что деревня свободна, но эскадрон по дороге к ней пересекал небольшой холм, на вершине которого был обстрелян белогвардейским дозором, находившимся неподалеку от деревни. При спуске к деревне эскадрон скрылся от белогвардейских наблюдателей. Чапаев смекнул, что белогвардейцы просматривают только малую часть дороги, и приказал эскадрону несколько раз объехать холм и проскакать через его вершину. В то время, как один и тот же эскадрон вновь и вновь пересекал вершину холма, белогвардейцы решили, что к наступлению готовится целый кавалерийский дивизион, и отошли подальше от деревни.

По существу, описанные истории — примеры художественных и занимательно оформленных сценариев блефа, то есть дезинформации, вводящей в заблуждение соперника относительно ваших намерений. Когда обман не кажется обманом — это обман истинный.

Не исчезли стратегемы и в настоящей нашей жизни [126–128]. Рассмотрим самый горячий пример рефлексивной игры — украинский кризис — с теоретико-игровых позиций. Будем исходить из того, что украинский кризис — это крупная геополитическая игра по линии Запад – Восток. Основные игроки: **A** — США и **B** — Россия. Ожидать реализации чистых стратегий не приходится. Игра идет в смешанных стратегиях (очевидно, у игрока **A** есть набор стратегий, которые он будет реализовывать с определенной вероятностью).

Рассмотрим один из вероятных сценариев развития игры. Стратегический ход игрока **A** — майдан, правительственный переворот, ущемление интересов территорий, преимущественно населенных этническими русскими, геополитических и экономических интересов России; побочный результат — оживились националисты. Игрок **A** предполагал некий набор ответных стратегий со стороны игрока **B** — протест, обращение к мировому сообществу, помощь русским в Украине и т. п. Но игрок **B** выбрал неожиданную стратегию: поддержать инициативу Крыма по проведению референдума, стремительный выход Крыма из состава Украины и включение его в состав России, исправление исторической несправедливости, сотворенной руками собственных недалеких и самоуверенных правителей, контроль над черноморской акваторией. Такой исход событий привел игрока **A** в шок. Похоже, такая рефлексия им предполагалось, но не так стремительно во времени. Ответ игрока **A** последовал незамедлительно. Вероятно, потрясенный стремительностью ответного хода игрока **B**, он ошибочно предположил, что следующим будет Юго-Восток Украины, и предпринял резкую атаку на эти территории, ожидая вторжения игрока **B**. И опять просчитался: нет вторжения, все попытки его провоцирования оказались неудачными, процесс перешел в стадию затяжного конфликта и закончился попытками экономического прессинга игрока **B**. Но «*наказания, назначаемые в припадке гнева, не достигают результата*» (Иммануил Кант [10, с. 480]), результат проблематичен, санкции против игрока **B** скорее мобилизуют последнего, кроме Запада есть Восток, что настораживает игрока **A**.

Описанная ситуация является классическим примером динамической игры рефлексивного типа с неполной информацией [36, 48]. Подождем, время покажет, какая рефлексия имела место и к чему приведет конфликт сторон.

С появлением тотального Интернета появилась новая область глобального информационного противостояния, использующего для формирования блефа (к изумлению, не обязательно правдоподобного и доказательного) социальные сети. Даже с первого взгляда нелогичный, грубо сработанной блеф, помноженный на внутренние ожидания его потребителей, по эффективности не уступает непосредственному контактному силовому соперничеству, а по некоторым параметрам и существенно превосходит его [128].

Классическим примером стратегической хитрости является покер, для которого блеф является «*фирменной карточной стратегемой*». Вот такое непочтенное занятие стало предметом исследования Дж. фон Неймана, который 32 страницы своего классического труда [23] посвятил детальному рассмотрению роли блефа при игре в покер с одной раздачей по 5 карт и последующим назначением ставок. В конечном счете Нейман пришел к выводу, что большую сумму нельзя выиграть без блефа, даже при благосклонном раскладе карт. Для достижения большого выигрыша необходимо многократное повышение ставок. На самом деле, если противник будет знать, что игрок не блефует, он уже при первом значительном повышении ставки поймет, что у игрока хорошие карты, и не станет далее повышать ставки. С другой стороны, если игрок замечен в частом блефе с плохими картами, противник потребует уже в начале игры раскрыть карты. В конце концов, «*важно не то*, *какие карты у тебя на самом деле*, *а то*, *какие они по мнению противника*». Единственная здравая стратегия достичь большого выигрыша заключается в чередовании блефа с честной игрой, то есть в терминах теории игр — в применении смешанной стратегии, оставляющей игрока в неведении об истинной стратегии, избранной противником в партии. Однако самому Нейману теоретический анализ игры в покер не помог стать богаче. Ходит байка, что в 1944 г. в Лос-Аламосе он проиграл в покер некоему Н. Метрополису 10 долларов после того, как разъяснил ему свою теорию. Получив выигрыш, поумневший Метрополис купил за 5 долларов книгу Неймана и Моргенштерна «*Теория игр и экономическое поведение*», наклеил на нее оставшиеся 5 долларов и заставил автора расписаться об истории этого проигрыша на книге. Вот уж поистине «*medice*, *cura te ipsum* — *врач*, *излечи себя сам*».

Недалеко от покера ушла и такая респектабельная игра, как шахматы, базирующаяся на глубоком анализе позиции, а не на блефе. Гроссмейстер Н. В. Крогиус (р. 1930) вспоминает: «*Играя с Фишером* (1943–2008), *Таль* (1936–1992) *попал под сильную атаку. Юный Фишер, записав свой сильнейший ход, ведущей к победе, отдал бланк на визу Талю. Таль понял — ситуация тяжелая, встал и стал спокойно прогуливаться по сцене. Фишер, пораженный невозмутимым спокойствием противника, засомневался в выбранном ходе и сделал другой, слабый ход, приведший его к поражению*» [129].

Спустимся с теоретико-художественных высот к проблемам, с которыми сталкивается любой бизнесмен, менеджер, экономист или начальник среднего звена. Конфликты для них — общее место, их разрешением (впрочем, как и их созданием для себя и других) они заняты все свое рабочее время. Они постоянно находятся в состоянии поиска очередного стратегического шага в этой своей бесконечной игре с обстоятельствами, с кредиторами, с конкурентами, с подчиненными и начальством, с природой и обстоятельствами. И почти ничего не знают о том, что существует теория игр, созданная целым подразделением нобелевских лауреатов для облегчения их участи. Почему же они не знакомы с такими важными для них идеями, рекомендациями, советами?

Основная часть неимоверной массы книг, монографий, пособий и учебников загружена «*по ватерлинию*» глубоким рассмотрением математического аппарата теории игр, множеством концепций и моделей, сопровождаемых абстрактными, оторванными от реальных проблем читателя рассуждениями и доказательствами всевозможных теорем. Даже гений А. Эйнштейна, судя по его словам, с трудом противостоял агрессивному напору математиков: «*С тех пор, как математики взялись за теорию относительности, я сам перестал ее понимать*». Чего же ожидать от запуганного ею экономиста-практика, у которого создается устойчивое впечатление о невозможности эффективного использования теории игр в его повседневной практике противостояния реальным экономическим проблемам!

Представьте себе экономиста-практика, пытающегося решить реальную антагонистическую игру с матрицей, которую он с грехом пополам составил. Он берет учебник [130] с обещающим подзаголовком «*Теория игр для всех*» и вместо простой фразы «*Решение любой матричной игры с положительной матрицей равносильно двойственной задаче линейного программирования*», на с. 215 указанного учебника читает: «*Пусть* $m \times n$ *— матрица* A *является матрицей антагонистической игры двух лиц со значением* $v(A) > 0$. *Тогда* $p = (p_1, \ldots, p_n)$ *является оптимальной (минимаксной) стратегией первого игрока тогда и только тогда, когда вектор* $\widehat{y} = \dfrac{p}{v(A)}$ *является оптимальным решением задачи линейного программирования* $\inf\{y_1 + \ldots + y_n \colon y_i \geqslant o, \left(A^{\top}y\right)_j \geqslant 1\}$ *для всех* i, j, *а* $q = (q_1, \ldots, q_m)$ *является оптимальной (минимаксной) стратегией второго игрока тогда и только тогда, когда вектор* $\widehat{x} = \dfrac{q}{v(A)}$ *является решением двойственной задачи* $\sup\{x_1 + \ldots$ $\ldots + x_n \colon y_j \geqslant o$, $(Ax)_i \leqslant 1$ *для всех* i, j».

Результат очевиден — скромный экономист впадает в тихую грусть, чувствуя себя маргиналом в среде упомянутых «*всех*», к кому обращена эта книга, и, следуя Стивену Хокингу (р. 1942): «*Каждая формула, включенная в книгу, уменьшает число ее покупателей*» [10, с. 426], навсегда теряет интерес к играм с такой теорией, сокращая до нуля свое участие в круге читателей книг такого рода. Как сделать достоянием практиков-экономистов наработанные мировой наукой методы анализа конфликтных ситуаций?

Обратимся к теории вероятностей и математической статистики, из гнезда которой появилась теория игр. Долгое время она относилась к сонму элитных математических забав, доступных избранным «*яйцеголовым*» математикам-профессионалам. Но потребности жизни заставили их спуститься с научных небес к повседневной практике инженеров, технологов, конструкторов. Результаты их совместной деятельности не заставили себя ждать, появились тысячи работ, созданных специалистами прикладных профессий в содружестве с математиками, появились справочники и практические руководства, стандарты и ГОСТы, ставшие фундаментом систем анализа надежности изделий и обеспечения качества работ и услуг (сошлемся на их малую толику [131]), регламентирующие, а зачастую и обязывающие применять процедуры математической статистики в ежедневной практике инженеров и ученых различных специальностей. Банально, но верно: теория становится силой, когда она овладевает массами.

В настоящее время национальные стандарты, содержащие элементы принятия решений в условиях неопределенности с учетом анализа рисков, действуют в Австралии и Новой Зеландии (стандарт AS/NZS 4360, принят в 1995 г., дорабатывался в 1999 г. и 2004 г. и подробное руководство по его использованию Australian Handbook HB 254-2003), Канаде (стандарт CAN/SA-Q850-97, принят в 1997 г.), Японии (JIS Q 2001, принят в 2001 г.), Великобритании (BS-6079-3:2000, принят в 2000 г.), Норвегии (стандарт Z-013). Одним из самых полных стандартов в области управления рисками признан стандарт AS/NZS 4360, имеющий внеотраслевой характер. Первые шаги в этом направлении начала предпринимать ISO — Международная организация по стандартизации, начавшая с 2009 г. издание серии стандартов системы «*Менеджмент риска*» [132–137], призванных, являясь «*частью процесса принятия решения*, ...*создавать надежный базис для принятия решений и планирования*». За основу при подготовке пилотного стандарта системы ИСО 31 000 [132] принят стандарт Австралии и Новой Зеландии ASZ/NZS 4360, что следует из схожести подхода к описанию процесса риск-менеджмента и его составляющих. Однако среди множества методов совершенствования решений по снижению рисков [132] (мозговой штурм, метод Дельфи, анализ влияния человеческого фактора, моделирование методом Монте-Карло, анализ сценариев) в этот перечень пока не входят эффективные методы теории игр, способные поднять на новый уровень не только методы анализа и выявления рисков, но и генерацию эффективных стратегий по парированию их возникновения или ослабления воздействия на бизнес-процессы.

Всем известно, что эталоном качества бытовой электроники является Япония. Но мало кто знает, что во многом это следствие высокой культуры внедрения знаний о математико-статистических методах обеспечения качества в «*массы*». Известно, что основным чтением в Японии являются так называемые «*манги*» — комиксы, в которых в непринужденной и доступной форме доводятся до читателя подчас далеко не шуточные вопросы науки и техники. Теория вероятностей и математическая статистика воспользовались такой возможностью, японцы создали мангу «*Занимательная статистика*» [138], на полях которой невозмутимый Ямамото-сан учит большеглазую Руи тонкостям этого раздела математики. Приведем выдержку их этой манги, стиль которой лучше всего характеризует ее замысел:

«*Если тебя интересует статистика или тебе нужно обработать данные, то “занимательная статистика” поможет преодолеть тебе чувство, что “ты плохо знаешь математику”. Этот иллюстрированный путеводитель легко и непринужденно проведет тебя по пути познания статистики... примеры из реальной жизни позволят тебе с легкостью усвоить то, что многие находят трудным для понимания... Если ты хочешь разобраться в статистике, но от обычных учебников у тебя пухнет голова и клонит в сон или если тебе просто нужно освежить забытые знания, пусть Ямамото-сан и Руи будут твоими гидами... Книга полезна учащимся средних школ и колледжей, студентам вузов, а также всем, кто интересуется статистикой и хочет, чтобы обучение было легким и увлекательным*».

Если теория игр хочет стать силой, ей предстоит овладеть массами. Для этого необходимо сконцентрировать внимание на практических аспектах ее применения в реальных ситуациях, в которых существуют объекты ее интереса. Представляется, что основная проблема теории игр — это не только математические сложности (в основной своей массе они достаточно разработаны и в конце концов преодолеваются с помощью компьютеров). Главное — «*увидеть*» игру в реальной жизни, суметь перевести на абстрактный язык игровой матрицы реальный конфликт, реальное столкновение интересов, суметь должным образом схематизировать ситуацию, вычленив в ней структуру, скелет конфликта, правильно сформулировать набор стратегий, наполнить игровую матрицу правдоподобными «*платежами*», имеющими реальный смысл. Эта творческая предварительная работа не может быть выполнена только консультантом-математиком. Именно здесь находится обширное поле его совместной работы с экономистом и менеджером. Блестящим примером такого сотрудничества является работа математика Джона Неймана и экономиста Оскара Моргенштерна [23], создавших фундамент теории игр, на полях которого их последователи собрали богатый урожай Нобелевских премий (к сожалению, сами отцы-основатели не стали лауреатами Нобелевской премии; Джон фон Нейман рано умер, а посмертно эта премия не присуждается).

Сегодня актуальна любая работа, любая информация, содержащая опыт применения методов теории игр в реальной жизни, в реальном производстве. Теоретико-игровые модели — инструмент, которым нужно уметь пользоваться и знать, где и когда его применение оправдано, а где и когда нет. Сама логика теории игр достаточно проста, и у начинающего может создаться впечатление простоты самой теории. Здесь уместно воспользоваться мудростью Эйнштейна: «*Вы думаете, что все так просто? Да, все просто, но не совсем так*». В итоге подавляющее большинство экономистов-практиков не понимают, каким образом можно воспользоваться таким инструментом решения их проблем. Необходимо методы и приемы теории игр конвертировать в алгоритмы и организационные процедуры фирм и компаний реального производства на уровне рекомендуемых стандартов, содержащих ответственность и порядок документооборота в процессе сбора необходимой технико-экономической информации, процедур схематизации конфликтных ситуаций, нормализации их видов и типов, выработки рекомендаций по результатам игрового моделирования разрешения конфликтов и реализации их на практике.

Сам процесс попытки применения теории в практической работе — лучший способ ее изучения. «*Сделал сам — значит понял*», — говорит народная мудрость, и народ прав. Эйнштейн рекомендует использовать простой тест для проверки того, поняли вы что-то или нет: «*Если вы что-то не сможете объяснить шестилетнему ребенку, вы сами этого не поняли*». Следуя этой мудрости, преподаватель из Бангладеш Чоудхари объяснил теорию игр своей пятилетней дочери Аннапутре (см. с. 8), стало быть, понял ее (чего и вам, уважаемый читатель, советуем).

К сожалению, настоящее состояние теории игр у подавляющего большинства экономистов реального сектора экономики не вызывает никаких чувств по одной простой причине — они не догадываются о ее существовании. Студенческие лекции давно испарились из головы, повседневные заботы о хлебе насущном увели их от прелестей научного предвидения и оптимизации к ежедневной сутолоке с бумагами, отчетами, выплатой зарплат и борьбе с налоговыми заморочками. Где же тут подумать о поиске оптимальных игровых процедур! Но самое главное, что не может подвинуть их на этот путь, — отсутствие литературы, адаптированной к их потребностям и подготовке, материалов, доведенных до уровня понятных процедур, не сопровождаемых доказательствами кучи теорем, сложными для восприятия практиком (они и так поверят в написанное).

Необходимо отметить качественное отличие теории вероятностей от теории игр. Для теории вероятностей содержание, природа анализируемых объектов безразлична — важна только вероятность (частость) их появления. Поэтому если для теории вероятностей содержательная часть задачи может быть стерилизована без потерь для результата, то для теории игр схематизация, основанная на содержательном описании особенностей игровой задачи, далеко не безразлична, являясь важнейшим, подчас самым сложным и ответственным этапом задачи, от которого во многом зависит понимание сути проблемы и успех ее решения.

К сожалению, большинство задачников по теории игр ограничивается мертвым набором цифр, собранных в различные матричные формы. Для практика-экономиста формулировка его задачи в игровом формате является часто непреодолимым барьером на пути использования методов теории игр в его повседневной работе. Необходима совместная работа специалиста, имеющего опыт практического применения математических методов теории игр, и практика-экономиста. Пришло время теории игр последовать опыту теории вероятностей, в которой теоретические работы математиков стали базой для серии стандартов, трансформировавших их достижения в алгоритмы и методы, которыми сегодня пользуются тысячи и тысячи специалистов, имеющих далеко не блестящую математическую подготовку.

Представляется, что сегодня актуальна задача создания стандартов уровня компании, которые дали бы в руки (и головы) их менеджеров и экономических служб современные научно-обоснованные средства анализа сложных организационно-экономических решений с привлечением достижений теории игр. Основным содержанием таких нормативных документов должны стать процедуры схематизации основных организационно-экономических проблем компании с целью трансформации их в форматы игровых задач. Необходимо создание базовых алгоритмов решения прототипных для компании игровых задач применительно к механизму функционирования компании с учетом ее специфики и особенностей, организация документооборота компании с целью обеспечения платежных игровых матриц достоверной информацией. Нужно решить комплекс проблем с адаптацией документооборота, необходимого для наполнения игровых задач, к нормативному потоку информационных документов, регламентируемых государственными стандартами. Успешное применение теории игр возможно только тогда, когда пользователь обладает необходимым минимумом знаний логико-теоретического аппарата, знаниями в предметной области, в которой этот аппарат он намерен использовать. Несмотря на то, что положения теории игр довольно абстрактны и не всегда могут быть непосредственно применены на практике, самое главное их достоинство — это развитие стратегического видения ситуации, не всегда доступного для формализации, но помогающего осуществить качественный, строгий и полный анализ проблемы.

Представляется, что базовые организационно-экономические решения компании должны сопровождаться результатами предварительного теоретико-игрового анализа с рекомендациями высшему менеджменту компании по повышению обоснованности принимаемых решений и в итоге повышению эффективности работы компании.

Следует в заключение предостеречь читателя от надежды на безграничные возможности и всемогущество теории игр как универсального инструмента решения всех наших проблем. Желаем мы или нет, но в конце концов нам самим придется их решать, что несомненно справедливо, ибо мы сами себе и создаем эти проблемы. Стартовая эйфория от теории игр привела в 60–80 гг. прошлого века к потере интереса к этому направлению математики. Забавным примером чрезмерного увлечения теорией игр, граничащим с ее профанацией, является так называемый эффект доктора Фокса. В 1970 г. на конференции в Медицинской школе Калифорнийского университета состоялся доклад некого Майрона Фокса на тему «*Математическая теория игр и ее применение к обучению врачей-терапевтов*». Доклад пользовался большим успехом, но позже выяснилось, что докладчиком был подготовленный актер, ничего не смыслящий в теме доклада, а сам доклад был собранием бессмысленных утверждений. Оказалось, что это был эксперимент организаторов конференции, проверявших, может ли хорошо обставленная презентация заменить доклад. Оказалось, вполне может.

Принято считать, что лучше всего откладывается в памяти последнее прочитанное. Поэтому в завершение книги укажем на наличие границ для применения аналитического инструментария теории игр в реальных условиях реальной компании, в которых его следует применять с осторожной обстоятельностью:

- когда у компаний-игроков имеются различные представления об игре, в которой они участвуют, когда они недостаточно информированы о возможностях друг друга (например, о платежеспособности конкурента, о структуре возможных дополнительных издержек);
- когда в игре возникает проблема выбора из множества равных ситуаций;
- когда усложняется ситуация принятия стратегического решения в связи с неожиданным изменением экономической конъюнктуры (появление на рынке новых игроков, изменение стратегических установок действующих на рынке партнеров).

Экспериментально доказано, что если в игре более десяти этапов, игроки не в состоянии следовать рекомендованным алгоритмам и продолжать игру с равновесными стратегиями. Ситуации часто меняются так быстро, что невозможно точно спрогнозировать, как отреагируют конкуренты на изменение тактики компании.

Но не стоит и впадать в уныние, ориентируясь на расхожую житейскую мудрость: «*Как-нибудь да будет, никогда так не было, чтобы никак не было*». Теория игр несомненно полезна в ситуациях, когда нужно вычленить наиболее значимые и важные факторы, которые должны быть учтены при принятии базовых решений в ходе соперничества. Она является хорошим инструментом в руках менеджмента компании, позволяя выявить и учесть дополнительные переменные и факторы, способные повлиять на конкурентную ситуацию, повышая тем самым эффективность принимаемых решений. Теория игр — неплохое лекарство, поддерживающее нас в жизни, утверждает нобелевский лауреат в области медицины Эрвин Неер: «*Конкуренция лежит в основе науки... всей жизни.... Соперничество и сотрудничество делают нас такими, какие мы есть*». В конце концов, «*чтобы выигрывать, нужно прежде всего играть*», — справедливо считал А. Эйнштейн.

У читателя может создаться впечатление, что теория игр в основном разработана и ожидать о нее чего-то нового не приходится, осталось только играть, опираясь на уже полученные результаты. Но это далеко не так.

Даже в досконально изученной игровой ситуации «*дилемма заключенных*» (см. 4.3.1) мы, оказывается, далеко не все знаем. Совсем недавно, в июне 2012 г., Уильям Пресс из *Department of Computer and School of Biological Sciences, University of Texas at Austin* и Фримен Дайсон из School *of Natural Sciences Institute for Advanced Study, Princeton* опубликовали статью [139] со сногсшибательными выводами, опрокидывающими устоявшие представления о «*дилемме заключенных*». Авторы обнаружили существование доминирующих стратегий, позволяющих получать перевес одному игроку и при некооперативном поведении игроков, то есть при отсутствии обмена информацией между ними. Это неожиданное для специалистов в теории игр обстоятельство открывает новое решение в одной из фундаментальных игровых ситуаций теории игр, практические последствия применения которого на практике еще предстоит изучить. Суть стратегий, описанных У. Прессом и Ф. Дайсоном, заключается в том, что игрок в зависимости от исхода предыдущего хода, с определенной вероятностью, вычисляемой по специальной формуле, должен выбирать сотрудничество. Поступая так, игрок после сравнительно долгой игры получает заведомо больший выигрыш, чем оппонент. Противник может бороться с такой стратегией, только снижая собственную выгоду, что противоречит принципу рациональности игрока. Если эта стратегия известна обоим игрокам, то остается один выход — договариваться. Отказ от договоренности любого игрока не приносит ему преимущества, так как его выигрыш определяется полностью действиями противника. Наличие неочевидных успешных стратегий в «*дилемме заключенных*» в определенной мере является революцией в теории игр, возможно, мы присутствуем при перевороте некоторых наших представлений в теории игр и рождении будущих нобелевских лауреатов (правда, вряд ли большинство из нас доживет, чтобы узнать это, ведь премии присуждаются лет через 40–50 после появления идеи). Однако и новая теория утверждает, что сотрудничество имеет смысл только тогда, когда имеешь дело с равным себе противником, а с остальными можно не церемониться. Что-то напоминает нынешнее поведение единственной сверхдержавы по отношению к ее региональному партнеру.

Завершая рассказ о теории игр, обратимся к нашему мудрому соотечественнику Василию Ключевскому (1841–1911), справедливо отметившему, что «*наука часто смешивается со знанием. Это грубое недоразумение. Наука — это не только знание, но и сознание, то есть умение пользоваться знанием как следует*» [10, с. 489]. Авторы надеются, что читатель с пользой трансформирует свои знания о теории игр, полученные после знакомства с этой книгой, в сознательное и умелое решение своих проблем (от домашних до общественно-служебных), и желают ему успеха на этом увлекательном поприще. Если жизнь — это игра, то долгой и удачной игры тебе, наш уважаемый читатель.

Если не сразу все поймете,
работайте, работайте –
а понимание придет потом.

Жан Лерон Д'Аламбер
1717 – 1783

КОРОТКОЕ ПОСЛЕСЛОВИЕ

«На книги одни —
ученья не тратьте-ка.
Объединись,
теория с практикой!»
В. Маяковский (1893–1930)

Авторы надеются, что читатель получил достаточное ясное представлетние о происхождении теории игр, ее логике и основаниях, о ее месте в системе других научных направлений, таких как теория операций, конфликтология, психология, теория множеств и т. д.

Работая над книгой, авторы исходили из запросов и возможностей тех, кому она адресована: практиков-экономистов и менеджеров реального сектора экономики и техники. Этим определялась глубина вторжения в недра теории игр, весьма математизированной науки. Авторы предпочли сделать это в формате доступного изложения материала, не перегруженного сложными математическими пассажами. По словам А. И. Герцена (1812–1870), «*трудных наук нет, есть только трудное изложение, то есть неперевариваемое*». Мы надеемся, что читатель сможет переварить предлагаемый ему вариант изложения базовых основ теории игр.

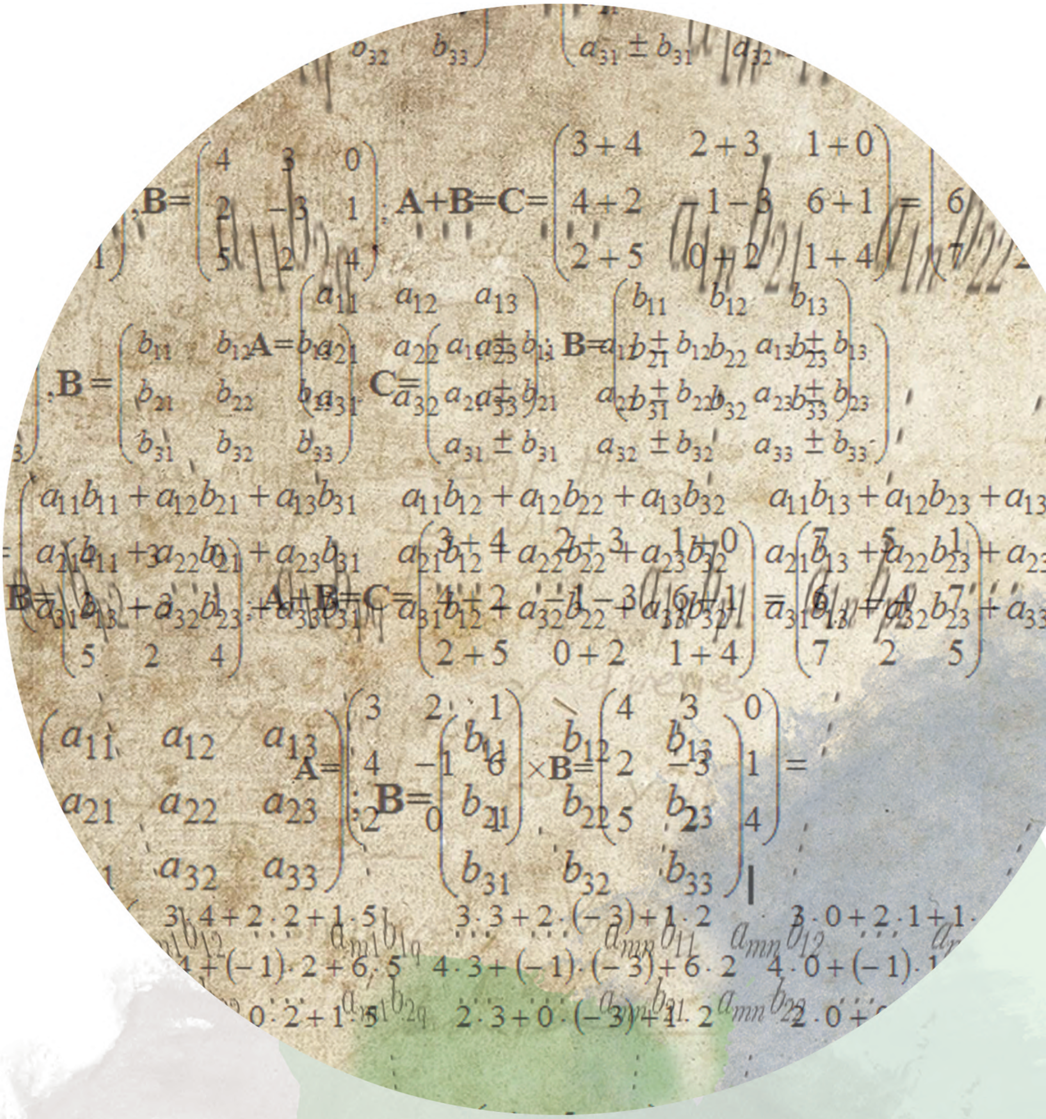
По причинам, приведенным в предисловии, вряд ли можно заставить практика-экономиста с интересом погрузиться в строгий математизированный текст, поэтому многие логико-математические выкладки чередуются в книге с историческими примерами, литературными аналогиями, а иногда и просто с занимательными историями. По нашему мнению, это позволяет читателю более комфортно знакомиться с далеко не элементарными основаниями теории игр, без излишнего напряжения познавая, прежде всего, их смысловое содержание, сочетая этот процесс с занимательным изложением истории возникновения игр, начиная с азартных салонных игр и кончая глобальными процессами бизнеса и политики.

Занимательность и доступность изложения смыслового содержания и методов теории игр сопровождается математическим сопровождением, доступным пользователю, владеющему началами математики в объеме средней школы и начальных курсов вузов. По этой причине ряд существенно математизированных разделов теории игр в книге опущены, но заинтересованные пользователи могут воспользоваться списком литературы, который позволит им восполнить этот пробел.

Мы надеемся, что привели тебя, наш читатель, к важному выводу: теория игр — это синтетический раздел математики, адаптирующий ее разнообразный инструментарий для анализа и выработки стратегии поведения человека в создаваемых им самим или средой его обитания всевозможных конфликтах независимо от их причины, природы, масштабов, напряженности и последствий. Напомним, только в этой книге упомянуты конфликты, возникающие при: разрезании торта, игре в покер, взаимоотношениях шефа офиса и клерка, контролера и зайца на транспорте, подготовке производства, взимании налогов, битве при Гастингсе англосаксов Гарольда II Годвинсона и нормандцев Вильгельма Завоевателя, противостоянии англичан Генриха V и французов при Ангкорте, предотвращении танкового прорыва армии Манштейна к Сталинграду, покорении Кортесом империи ацтеков–майя, атомном противостоянии СССР – США, противодействии колониальным войскам в Малайзии, пробитии пенальти в футболе, сдаче экзаменов в вузе, семейных спорах, противостоянии царств Шу и Вэй Древнего Китая эпох Троецарствования и т. п. Такая гремучая смесь позволяет сделать вывод, что, подобно теории вероятностей, для которой важны только вероятностные характеристики анализируемых событий, а не их природа, теория игр изучает более параметры, отражающие схематизированную структуру (скелет) конфликта, количественно выраженные целевые параметры устремлений его участников, нежели его природу или масштаб. Что общего и различного между проблемами разрезания торта пополам и войнами военоначальников царств Древнего Китая Вэй (Сыма И) и Шу (Чжугэ Ляна)? И первая и вторая являются играми-конфликтами, но первая — динамической игрой двух лиц с полной информацией а вторая — динамической игрой с неполной информацией [36, 127]; все остальное, по справедливому замечанию авторов «*Алгебры конфликта*» Г. Л. Смоляна и В. А. Лефевра [48], только занимательные декорации, на фоне которых протекают упомянутые конфликты.

Авторы отдают себе отчет в том, что овладение материалом, представленным в книге, не превратит в одночасье читателя в уверенного пользователя богатым арсеналом теории игр, но поможет проникнуть в фундамент этой молодой науки, заглянуть в новые смыслы, которые она вносит в анализ конфликтов различной природы. Теория игр в большей степени инструмент анализа конфликтов, нежели генератор инструкций по их разрешению. Однако всесторонний анализ конфликта — это важнейший этап его разрешения, подобно тому, как формулировка и осмысление задачи в математике, — половина ее решения. В теории игр формулировка задачи — не половина, а все три четверти ее решения. Вооруженный пониманием логических основ теории игр, ее терминологии, методологических особенностей и оригинальности приемов читатель будет подготовлен к восприятию более продвинутой литературы, вплоть до трудов классиков этой науки.

Представив вам, уважаемый читатель, теорию игр — капризную и своевольную даму, оставляем вас наедине с нею, с надеждой на то, что эта книга поможет вам наладить с ней тесный творческий контакт. Не бойтесь ошибаться, «*иногда ошибка бывает единственным доказательством того, что ты что-то хотел сделать*». Даже если не сразу придет понимание некоторых вопросов теории игр, не отчаиваетесь, следуйте рекомендациям Жана Лерона Д'Аламбера (1717–1783): «*Работайте, работайте — а понимание придет потом*».



ПРИЛОЖЕНИЕ
ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

1. Сложение (вычитание) $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+4 & 2+3 & 1+0 \\ 4+2 & -1-3 & 6+1 \\ 2+5 & 0+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 6 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 5 & 6 \\ 44 & 27 & 23 \\ 13 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц некоммуникативно, то есть $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{D} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 6 + 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 5 & 22 \\ -1 & 7 & -15 \\ 31 & 8 & 21 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3{\cdot}4 + 2{\cdot}2 + 1{\cdot}5 & 3{\cdot}3 + 2{\cdot}(-3) + 1{\cdot}2 & 3{\cdot}0 + 2{\cdot}1 + 1{\cdot}4 \\ 4{\cdot}4 + (-1){\cdot}2 + 6{\cdot}5 & 4{\cdot}3 + (-1){\cdot}(-3) + 6{\cdot}2 & 4{\cdot}0 + (-1){\cdot}1 + 6{\cdot}4 \\ 2{\cdot}4 + 0{\cdot}2 + 1{\cdot}5 & 2{\cdot}3 + 0{\cdot}(-3) + 1{\cdot}2 & 2{\cdot}0 + 0{\cdot}1 + 1{\cdot}4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 5 & 6 \\ 47 & 27 & 23 \\ 13 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонирование матрицы — замена строк столбцами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{\top} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Детерминант (определитель) матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\det A = {} & (-1)^{1+1} a_{11} \cdot (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + \\
& + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\
& + (-1)^{1+3} a_{13} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) + \\
& + (-1)^{2+1} a_{21} \cdot (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + \\
& + (-1)^{2+2} a_{22} \cdot (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + \\
& + (-1)^{2+3} a_{23} \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) + \\
& + (-1)^{3+1} a_{31} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) + \\
& + (-1)_{3+2} a_{32} \cdot (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) + \\
& + (-1)^{3+3} a_{33} \cdot (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \\
& = 3 \cdot [(-1) \cdot 1 - 0 \cdot 6] - 2 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 6) + \\
& + 1 \cdot [4 \cdot 0 - 2 \cdot (-1)] - 4 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - \\
& - 1 \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 6 \cdot (3 \cdot 0 - 2 \cdot 2) + \\
& + 2[2 \cdot 6 - (-1) \cdot 1] - 0 \cdot (3 \cdot 6 - 4 \cdot 1) + 1 \cdot [3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2] = \\
& = -3 + 16 + 2 - 8 - 1 + 24 + 26 - 0 - 11 = 45.
\end{aligned}$$

5. Определение ранга матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 6\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

- делим строку 1 на a_{11},

$$\begin{pmatrix}\frac{a_{11}}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},$$

- из 2-й строки вычитаем 1-ю строку, умноженную на a_{21}, и из 3-й строки 1-ю строку, умноженную на a_{31},

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}}\\ a_{21}-1\cdot a_{21} & a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & a_{23}-\frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}}\\ a_{31}-1\cdot a_{31} & a_{32}-\frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}} & a_{33}-\frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}}\\ 0 & \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{23}a_{11}-a_{13}a_{21}}{a_{11}}\\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}-a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{33}a_{11}-a_{13}a_{31}}{a_{11}}\end{pmatrix},$$

- 2-ю строку делим на $\dfrac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}$,

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}}\\ 0 & \frac{a_{11}\left(a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}\right)}{a_{11}\left(a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}\right)} & \frac{a_{11}\left(a_{23}a_{11}-a_{13}a_{21}\right)}{a_{11}\left(a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}\right)}\\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}-a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{33}a_{11}-a_{13}a_{31}}{a_{11}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}}\\ 0 & 1 & \frac{a_{23}a_{11}-a_{13}a_{21}}{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}\\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}-a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{33}a_{11}-a_{13}a_{31}}{a_{11}}\end{pmatrix},$$

- из 1-й строки вычитаем 2-ю строку, умноженную на $\frac{a_{12}}{a_{11}}$, и из 3-й строки вычитаем 2-ю строку, умноженную на $\frac{a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31}}{a_{11}}$ соответственно,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & \frac{a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}}{a_{11}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{13}\left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}\right) - a_{12}\left(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}\right)}{a_{11}\left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}\right)} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & 0 & \frac{\begin{array}{r}(a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}) \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) - \\ - (a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}) \cdot (a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31})\end{array}}{a_{11} \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})} \end{pmatrix},$$

- 3-ю строку делим на

$$\frac{(a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31}) \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) - (a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}) \cdot (a_{32}a_{11} - a_{12}a_{31})}{a_{11} \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{13}\left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}\right) - a_{12}\left(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}\right)}{a_{11}\left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}\right)} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 6}{(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 4} \\ 0 & 1 & \frac{6 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как ненулевых строк 3, ранг матрицы $\mathrm{Rank}(\mathbf{A}) = 3$.

6. Вычисление обратной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

- вычисляем миноры, образованные из исходной матрицы вычеркиванием i-й строки и j-го столбца

$$M_{11} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = (-1)\cdot 1 - 0\cdot 6 = 1,$$

$$M_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} = 4\cdot 1 - 2\cdot 6 = -8,$$

$$M_{13} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{32}a_{22} = 4\cdot 0 - 2\cdot(-1) = 2,$$

$$M_{21} = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} = 2\cdot 1 - 0\cdot 1 = 2,$$

$$M_{22} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} = 3\cdot 1 - 2\cdot 1 = 1,$$

$$M_{23} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{1}a_{332} - a_{21}a_{12} = 3\cdot 0 - 2\cdot 2 = -4,$$

$$M_{31} = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = 2\cdot 6 - (-1)\cdot 1 = 13,$$

$$M_{32} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} = 3\cdot 6 - 4\cdot 1 = 14,$$

$$M_{33} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = -11;$$

- вычисляем алгебраические дополнения по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

$$\begin{aligned} &A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = -1, && A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = 8, \\ &A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 2, && A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21} = -2, \\ &A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 1, && A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23} = 4, \\ &A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = 13, && A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32} = -14, \\ &A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = -11 \end{aligned}$$

и формируем матрицу алгебраических дополнений

$$\mathrm{ad}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -14 & -11 \end{pmatrix};$$

- транспонируем матрицу алгебраических дополнений (меняем местами строки и столбцы)

$$\mathrm{ad}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 13 \\ 8 & 1 & -14 \\ 2 & 4 & -11 \end{pmatrix};$$

- делением транспонированной матрицы алгебраических дополнений $\operatorname{ad}\left(\mathbf{A}^{\top}\right)$ на детерминант $\det(\mathbf{A})$ матрицы $\mathbf{A}$ вычисляем обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{ad}\left(A^{\top}\right)}{\det(A)} = \frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 13\\ 8 & 1 & -14\\ 2 & 4 & -11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{13}{15}\\ \frac{8}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{14}{15}\\ \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{11}{15}\end{pmatrix};$$

- выполняем проверку правильности вычислений условием

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 6\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{13}{15}\\ \frac{8}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{14}{15}\\ \frac{12}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{11}{15}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 6\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & -2 & 13\\ 8 & 1 & -14\\ 2 & 4 & -11\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+2\cdot 8+1\cdot 2 & 3\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot 4 & \begin{matrix}3\cdot 13+2\cdot(-14)+\\ +1\cdot(-11)\end{matrix}\\ \begin{matrix}4\cdot(-1)+(-1)\cdot 8+\\ +6\cdot 2\end{matrix} & \begin{matrix}4\cdot(-2)+(-1)\cdot 1+\\ +6\cdot 4\end{matrix} & \begin{matrix}4\cdot 13+(-1)\cdot(-14)+\\ +6\cdot(-11)\end{matrix}\\ 2\cdot(-1)+0\cdot 8+1\cdot 2 & 2\cdot(-2)+0\cdot 1+1\cdot 4 & \begin{matrix}2\cdot 13+0\cdot(-14)+\\ +1\cdot(-11)\end{matrix}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

7. Синтетический пример

Вычислить $\det\left[\left(\mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{B}^{-1}\right)+\left(\mathbf{B}^{-1}\times\mathbf{A}^{-1}\right)\right]$, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

- Вычисляем обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$:

  a) вычисляем детерминант матрицы $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot[(-1)\cdot 1-(-2)\cdot 0]+\\ &+(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot[2\cdot 1-4\cdot 0]+\\ &+(-1)^{1+3}\cdot 3\cdot[2\cdot(-2)-4\cdot(-1)]+\\ &+(-1)^{2+1}\cdot 2[1\cdot 1-(-2)\cdot 3]+\\ &+(-1)^{2+2}\cdot(-1)\cdot[1\cdot 1-4\cdot 3]+\\ &+(-1)^{2+3}\cdot 0\cdot[1\cdot(-2)-4\cdot 1]+\\ &+(-1)^{3+1}\cdot 4\cdot[0\cdot 1-(-1)\cdot 3]+\\ &+(-1)^{3+2}\cdot(-2)\cdot[1\cdot 0-2\cdot 3]+\\ &+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot[1\cdot(-1)-2\cdot 1]=\\ &=-1-2+0-14+11+0+12-12-3=-9;\end{aligned}$$

  b) вычисляем элементы матрицы алгебраических дополнений матрицы $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}&A_{11}=-1, && A_{12}=-2, && A_{13}=0,\\ &A_{21}=-7, && A_{22}=-11, && A_{23}=6,\\ &A_{31}=3, && A_{32}=6, && A_{33}=-3;\end{aligned}$$

  матрица алгебраических дополнений

$$\mathrm{ad}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -7 & -11 & 6\\ 3 & 6 & -3\end{pmatrix};$$

  c) транспонированная матрица алгебраических дополнений

$$\mathrm{ad}\left(\mathbf{A}^{\top}\right) = \begin{pmatrix}-1 & -7 & 3\\ -2 & -11 & 6\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix};$$

  d) вычисляем обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{ad}\left(A^{\top}\right)}{\det(A)} = -\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -7 & 3\\ -2 & -11 & 6\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix};$$

e) проверяем правильность вычислений

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 7 & -3\\ 2 & 11 & -6\\ 0 & -6 & 3\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \begin{matrix}1\cdot1+1\cdot2+\\ +3\cdot0\end{matrix} & \begin{matrix}1\cdot7-+1\cdot11+\\ +3\cdot(-6)\end{matrix} & \begin{matrix}1\cdot(-3)+1\cdot(-6)+\\ +3\cdot3\end{matrix}\\ \begin{matrix}2\cdot1+(-1)\cdot2+\\ +0\cdot(-6)\end{matrix} & \begin{matrix}2\cdot7+(-1)\cdot(11)+\\ +0\cdot(-6)\end{matrix} & \begin{matrix}2\cdot3+(-1)\cdot(-6)+\\ +0\cdot3\end{matrix}\\ \begin{matrix}4\cdot1+(-2)\cdot2+\\ +1\cdot0\end{matrix} & \begin{matrix}4\cdot7+(-2)\cdot11+\\ +1\cdot(-6)\end{matrix} & \begin{matrix}4\cdot(-3)+(-2)\cdot(-6)+\\ +1\cdot3\end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

- вычисляем обратную матрицу $\mathbf{B}^{-1}$:

a) вычисляем детерминант матрицы $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot[1\cdot2-2\cdot0]+\\ &+(-1)^{1+2}\cdot2\cdot[2\cdot2-3\cdot0]+\\ &+(-1)^{1+3}\cdot2\cdot[2\cdot2-3\cdot1]+\\ &+(-1)^{2+1}2\cdot[2\cdot2-2\cdot2]+\\ &+(-1)^{2+2}\cdot1\cdot[(-1)\cdot2-3\cdot2]+\\ &+(-1)^{2+3}\cdot0\cdot[(-1)\cdot2-3\cdot2]+\\ &+(-1)^{3+1}\cdot3\cdot[2\cdot0-1\cdot2]+\\ &+(-1)^{3+2}\cdot2\cdot[(-1)\cdot0-2\cdot2]+\\ &+(-1)^{3+3}\cdot2\cdot[1\cdot(-1)-2\cdot2]=\\ &=-2-8+2+0-8+0-6+8-10=-24;\end{aligned}$$

b) вычисляем элементы матрицы алгебраических дополнений матрицы $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}&A_{11}=2, && A_{12}=-4, && A_{13}=1,\\ &A_{21}=0, && A_{22}=-8, && A_{23}=8,\\ &A_{31}=-2, && A_{32}=4, && A_{33}=-5;\end{aligned}$$

матрица алгебраических дополнений

$$\operatorname{ad}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 0 & -8 & 8\\ -2 & 4 & -5\end{pmatrix};$$

c) транспонируем матрицу алгебраических дополнений

$$\operatorname{ad}\left(\mathbf{B}^{\top}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-8&4\\1&8&-5\end{pmatrix};$$

d) вычисляем обратную матрицу

$$\mathbf{B}^{-1}=\frac{\operatorname{ad}\left(\mathbf{B}^{\top}\right)}{\det(\mathbf{B})}=-\frac{1}{24}\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-8&4\\1&8&-5\end{pmatrix};$$

e) проверяем правильность вычислений

$$-\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&1&0\\3&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-8&4\\1&8&-5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{matrix}(-1)\cdot2+2\cdot(-4)+\\+2\cdot1\end{matrix}&\begin{matrix}(-1)\cdot0+2\cdot(-8)+\\+2\cdot8\end{matrix}&\begin{matrix}(-1)\cdot(-2)+2\cdot4+\\+2\cdot(-5)\end{matrix}\\\begin{matrix}2\cdot2+1\cdot(-4)+\\+0\cdot1\end{matrix}&\begin{matrix}2\cdot0+1\cdot(-8)+\\+0\cdot8\end{matrix}&\begin{matrix}2\cdot(-2)+1\cdot4+\\+0\cdot(-5)\end{matrix}\\\begin{matrix}3\cdot2+\\+2\cdot(-4)+2\cdot1\end{matrix}&\begin{matrix}3\cdot0+2\cdot(-8)+\\+2\cdot8\end{matrix}&\begin{matrix}3\cdot(-2)+2\cdot4+\\+2\cdot(-5)\end{matrix}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-8&0&0\\0&-8&0\\0&0&-8\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

- вычисляем произведение $\mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\times\mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&7&-3\\2&11&-6\\0&-6&3\end{pmatrix}\times\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-2&0&2\\4&8&-4\\-1&-8&5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{216}\begin{pmatrix}\begin{matrix}1\cdot(-2)+7\cdot4+\\+(-3)\cdot(-1)\end{matrix}&\begin{matrix}1\cdot0+7\cdot8+\\+(-3)\cdot(-8)\end{matrix}&\begin{matrix}1\cdot2+7\cdot(-4)+\\+(-3)\cdot5\end{matrix}\\\begin{matrix}2\cdot(-2)+11\cdot4+\\+(-6)\cdot(-1)\end{matrix}&\begin{matrix}2\cdot0+11\cdot8+\\+(-6)\cdot(-8)\end{matrix}&\begin{matrix}2\cdot2+11\cdot(-4)+\\+(-6)\cdot5\end{matrix}\\\begin{matrix}0\cdot(-2)+(-6)\cdot4+\\+3\cdot(-1)\end{matrix}&\begin{matrix}0\cdot0+(-6)\cdot8+\\+3\cdot(-8)\end{matrix}&\begin{matrix}0\cdot2+(-6)\cdot(-4)+\\+3\cdot5\end{matrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{216}\begin{pmatrix}29&80&-41\\46&136&-70\\-27&-72&39\end{pmatrix};$$

- вычисляем произведение $\mathbf{B}^{-1} \times \mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{B}^{-1} \times \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -1 & -8 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 11 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{216}\begin{pmatrix} \begin{matrix}(-2)\cdot 1+0\cdot 2+\\ +2\cdot 0\end{matrix} & \begin{matrix}(-2)\cdot 7+0\cdot 11+\\ +2\cdot(-6)\end{matrix} & \begin{matrix}(-2)\cdot(-3)+\\ +0\cdot(-6)+2\cdot 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}4\cdot 1+8\cdot 2+\\ +(-4)\cdot 0\end{matrix} & \begin{matrix}4\cdot 7+8\cdot 11+\\ +(-4)\cdot(-6)\end{matrix} & \begin{matrix}4\cdot(-3)+8\cdot(-6)+\\ +(-4)\cdot 3\end{matrix} \\ \begin{matrix}(-1)\cdot 1+\\ +(-8)\cdot 2+5\cdot 0\end{matrix} & \begin{matrix}(-1)\cdot 7+(-8)\cdot 11+\\ +5\cdot(-6)\end{matrix} & \begin{matrix}(-1)\cdot(-3)+\\ +(-8)\cdot(-6)+5\cdot 3\end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{216}\begin{pmatrix} -2 & -26 & 12 \\ 20 & 140 & -72 \\ -17 & -125 & 66 \end{pmatrix};$$

- вычисляем сумму $\left(\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}^{-1}\right) + \left(\mathbf{B}^{-1} \times \mathbf{A}^{-1}\right)$:

$$\left(\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}^{-1}\right) + \left(\mathbf{B}^{-1} \times \mathbf{A}^{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 29 & 80 & -41 \\ 46 & 136 & -70 \\ -27 & -72 & 39 \end{pmatrix} + \frac{1}{216}\begin{pmatrix} -2 & -26 & 12 \\ 20 & 140 & -72 \\ -17 & -125 & 66 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 27 & 54 & -29 \\ 66 & 276 & -142 \\ -44 & -197 & 105 \end{pmatrix};$$

- вычисляем $\det\left[\left(\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}^{-1}\right) + \left(\mathbf{B}^{-1} \times \mathbf{A}^{-1}\right)\right]$:

$$\det\left[\left(\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}^{-1}\right) + \left(\mathbf{B}^{-1} \times \mathbf{A}^{-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{216}\det\begin{pmatrix} 27 & 54 & -29 \\ 66 & 276 & -142 \\ -44 & -197 & 105 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{216}\cdot\left\{\begin{array}{l} 27\cdot[276\cdot 105-(-197)\cdot(-142)]- \\ -54\cdot[105\cdot 66-(-44)\cdot(-142)]- \\ -29\cdot[66\cdot(-197)-(-44)\cdot 276]- \\ -66[54\cdot 105-(-197)\cdot(-29)]+ \\ +276\cdot[27\cdot 105-(-44)\cdot(-29)]+ \\ +142\cdot[27\cdot(-197)-(-44)\cdot 54]- \\ -44\cdot[54\cdot(-142)-276\cdot(-29)]+ \\ +197\cdot[27\cdot(-142)-66\cdot(-29)]+ \\ +105\cdot[27\cdot 276-66\cdot 54] \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{216}\,[27 \cdot 1006 - 54 \cdot 682 - 29 \cdot (-858) - 66 \cdot (-43) +$$
$$+ 276 \cdot 1559 + 142 \cdot (-2943) - 44 \cdot 336 + 197 \cdot (-1920) +$$
$$+ 105 \cdot 3888] = \frac{1}{216}(27\,162 - 36\,828 + 24\,882 + 2838 +$$
$$+ 430\,284 - 417\,906 - 14\,784 - 378\,240 + 408\,240) =$$
$$= 45\,648 \cdot \frac{1}{216} = 211\frac{1}{3}.$$

Чего не понимаешь –
тем никогда не овладеешь.

Фрэнсис Бэкон
1561 – 1626

ПРОВЕРЬ
СЕБЯ

«Чего не понимаешь —
тем никогда не овладеешь»
Фрэнсис Бэкон (1561–1626)

Проверь себя, читатель, насколько ты освоил первые азы теории игр. Это заставит тебя потрудиться: найти соответствующий раздел, еще раз пройтись по алгоритму анализа или расчета, получить ответ и порадоваться его совпадению с приведенным.

Задача 1

При бросании двух костей что больше: вероятность получения суммы выброшенных костей, равной 9 или 10? Изменятся ли эти вероятности при бросании трех костей?

Ответ. *При бросании двух костей вероятность получения суммы* 9 *равна* $\frac{4}{36}$, *а суммы* 10: $\frac{3}{36} < \frac{4}{36}$. *Следовательно, получение суммы* 9 *более вероятно, чем* 10. *При бросании трех костей вероятность получения суммы* 9 *равна* $\frac{25}{216}$, *а суммы* 10: $\frac{26}{216} > \frac{25}{216}$. *Следовательно, получение суммы* 9 *менее вероятно, чем получение суммы* 10.

Задача 2

Телеателье производит ремонт телевизоров. Владелец хочет определить количество рабочих мест N в ателье, при котором он будет получать максимальную выручку. По опыту работы он располагает следующими данными: выручка от ремонта одного телевизора составляет 330 руб., простой рабочего места, когда заказов на ремонт нет, приносит убыток 220 руб., убыток от отказа в ремонте телевизора в связи с недостатком рабочих мест 270 руб.

Требуется составить платежную матрицу игры, если на ремонт будет поступать телевизоры в количестве $n = 2$, 3, 5 и 8 шт.

Ответ.

N	n			
	2	3	5	8
2	660	390	−150	−960
3	440	990	450	−360
5	0	550	1650	840
8	−660	−110	990	2640

.

Задача 3

Существует ли решение в чистых стратегиях в игре, заданной платежной матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 11 & 10 & 13 & 15 \\ 13 & 9 & 12 & 16 \\ 15 & 9 & 17 & 10 \\ 13 & 11 & 16 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} ? \end{array}$$

Ответ. *Точка $a_{42} = 11$ является седловой. Решение игры в чистых стратегиях — ситуация $\{A_4, B_2\}$. Цена игры $\nu = 11$.*

Задача 4

Редуцируйте игру с платежной матрицей $\mathbf{A}$ размерности 5×5 в игру 2×2 с использованием принципа доминирования, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 5

Редуцируйте игру с матрицей $\mathbf{A}$ размерности 5×5 в игру с матрицей 2×2 методом разбиения матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5{,}5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Указание. Исходная матрица $\mathbf{A}$ *разбивается на* 9 *подматриц*

$$A_{12}^{12} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{3}^{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_{45}^{12} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$
$$A_{12}^{3} = (2 \ \ 2), \qquad A_{3}^{3} = (3), \qquad A_{45}^{3} = (1 \ \ 1),$$
$$A_{12}^{45} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{3}^{34} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad A_{45}^{45} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 6

Упростить матрицу $\mathbf{A}$ аффинным преобразованием $a_{ij} \to 15a_{ij}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{15} & \frac{4}{10} & \frac{6}{45} & \frac{8}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{5}{3} & \frac{4}{6} & \frac{11}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{3} & 2 & \frac{2}{6} \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 24 \\ 4 & 25 & 10 & 11 \\ 2 & 10 & 30 & 5 \end{pmatrix}.$

Задача 7

Решить игру с платежной матрицей 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $P\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $Q\left\{\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right\}$, $\nu = \frac{9}{2}$.

Задача 8

Решить игру с платежной матрицей 2×4 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответ. $P\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$, $Q\left\{\frac{5}{8}, 0, 0, 0, \frac{3}{8}\right\}$, $\nu = \frac{25}{4} = 6{,}25$.

Задача 9

Решить игру с платежной матрицей 6×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $P\left\{0, \frac{3}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}\right\}$, $Q\left\{\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right\}$, $\nu = 5{,}4$.

Задача 10

Решить игру с платежной матрицей $\mathbf{A}$ сведением к задаче линейного программирования, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 15 & 14 & 8 \\ 16 & 3 & 17 & 5 & 10 \\ 6 & 15 & 5 & 14 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $P\{0,0,61;0,39\}$, $Q\{0,0,33;0,0,0,67\}$, $\nu = 7{,}67$.

Задача 11

Решить игру задачи 9 методом Брауна–Робинсон, используя 25 шагов итерации.

Ответ. $P\{0;0{,}64;0{,}36\}$, $Q\{0;0{,}28;0;0;0{,}72\}$, $\nu = 7{,}62$.

Задача 12

Решить игру 3×3 с платежной матрицей $\mathbf{A}$ методом Лагранжа, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $P\left\{\frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14}\right\}$, $Q\left\{\frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right\}$, $\nu = \frac{41}{14}$.

Задача 13

Редуцировать платежные матрицы биматричной игры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в соответствии с принципом доминирования при условии, что игрок $\mathbf{A}$ стремится максимизировать свой выигрыш и минимизировать выигрыш игрока $\mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 14

Найти решения в чистых стратегиях биматричной игры, заданной матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 9 & 7 \\ 11 & 3 & 4 & 12 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 10 & 11 & 7 \\ 2 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\{A_2, B_4\}$, $\nu_A = 12$, $\nu_B = 11$; $\{A_3, B_2\}$, $\nu_A = 8$, $\nu_B = 8$; $\{A_4, B_1\}$, $\nu_A = 12$, $\nu_B = 0$.

Задача 15

Решить в смешанных стратегиях биматричную игру, заданную платежными матрицами $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $P\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $Q\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{3}\right\}$, $\nu_A = 5\frac{3}{4}$, $\nu_B = 4$.

Задача 16

С целью повышения эффективности работы оборудования необходимо проводить его профилактику, что приводит к дополнительным экономическим издержкам. Профилактические работы могут выполняться в двух вариантах — с заменой и без замены отдельных узлов. Существуют три варианта стратегии восстановления оборудования:

- A_1 — профилактика оборудования с заменой его отдельных частей;
- A_2 — профилактика оборудования без замены его отдельных частей;
- A_3 — отказ от проведения профилактики.

Оборудование может находиться в следующих состояниях:

- S_1 — работоспособно и не требует профилактики;
- S_2 — работоспособно, но требуется профилактика;
- S_3 — не работоспособно и требует ремонта.

Затраты на проведение профилактики и ремонта оборудования (в усл. ед.) приведены в таблице.

Необходимо, используя критерии неопределенности и риска ММ, Вальда, Лапласа, Сэвиджа, Байеса, выбрать наиболее эффективную стратегию компании, минимизирующую затраты на профилактику и ремонт оборудования.

	S_1	S_2	S_3
A_1	−140	−160	−180
A_2	−150	−170	−190
A_3	0	−180	−220

.

Ответ. *Проводить профилактику оборудования без замены деталей и узлов.*

Решение

В соответствии с оптимистическим ММ-критерием из всех наихудших вариантов затрат (−180, −190, −220) *выбираем наилучший вариант* A_1 *с наименьшими затратами.*

В соответствии с пессимистическим критерием минимакса Вальда W_V *из всех наилучших вариантов затрат* (−140, −150, 0) *выбираем наихудший* A_2 *с наибольшими затратами.*

В соответствии с критерием Лапласа, исходя из равновероятности состояний оборудования из средних значений издержек (−160, −170, −133,3), выбираем A_3.

Для применения критерия Сэвиджа преобразуем таблицу затрат в таблицу рисков, для чего вычитаем из каждого значения по столбцам матрицы затрат наибольшее значение издержек:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} -140-(-150)=10 & -160-(-180)=20 & -180-(-220)=40 \\ -150-(-150)=0 & -170-(-180)=10 & -190-(-220)=30 \\ 0-(-150)=150 & -180-(-180)=0 & -220-(220)=0 \end{pmatrix}.$$

Из максимальных значений рисков по строкам матрицы $\mathbf{R}$ (40, 30, 150) *выбираем вариант* A_2 *с наименьшим значением риска.*

Для применения критерия Байеса будем использовать априорные значения вероятностей $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}2$, *соответствующие состояниям оборудования* S_1, S_2, S_3. *Из величин математических ожиданий* $\sum\limits_{j=1}^{2} p_j \cdot r_j$ *по строкам платежной матрицы* $(-164, -174, -146)$ *выбираем вариант* A_3 *с наименьшим математическим ожиданием затрат.*

ММ-критерий рекомендует стратегию A_1, критерии Вальда и Сэвиджа — стратегию A_2, критерии Лапласа и Байеса — стратегию A_3.

Для выбора между вариантами A_2 и A_3 используем дополнительный показатель — средний риск. Среднее значение риска по строкам **R**-*матрицы* (23,3; 13,3; 50) *минимально для варианта A_2.*

Таким образом, следует принять вариант A_2 — проводить профилактику оборудования без замены деталей и узлов, что позволяет минимизировать сумму затрат на поддержание его работоспособности.

Задача 17

Сформировать план замены оборудования на период времени $t = 5$ лет, реализация которого обеспечит максимальную прибыль компании при стоимости нового оборудования $P = 10$ ед., выручке от реализации $R(t_j)$ и затратах на содержание оборудования $C(t_j)$ по годам в соответствии с таблицей

	Время эксплуатации оборудования, t, лет					
	0	1	2	3	4	5
$R(t_j)$	100	110	100	110	90	80
$C(t_j)$	20	28	30	30	40	45

.

Ответ. *Необходимо произвести замену оборудования в начале 2-го и 4-го лет эксплуатации.*

Задача 18

Деталь последовательно проходит обработку сначала на первом, а затем на втором станке. Очередность i поступления деталей на обработку, технологическая продолжительность обработки i-й детали на первом станке t_i^1 и на втором станке t_i^2 приведены в таблице. Найти с помощью алгоритма Джонсона оптимальную очередность поступления деталей на обработку i^0 и определить снижение времени простоя второго станка за счет оптимизации:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t_i^1	2	3	2	1	4	3	3	2	4	1	2	2	1	3	3
t_i^2	4	1	3	2	4	2	1	3	2	3	1	2	1	4	2

.

Ответ. *Оптимальная последовательность поступления деталей на обработку соответствует таблице*

i^0	4	10	13	1	3	8	12	14	5	6	9	15	11	7	2
t_i^1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	3	4	3	2	3	3
t_i^2	2	3	1	4	3	3	1	4	4	2	2	2	1	1	1

.

Простой второго станка при неоптимизированной последовательности равен $T_4 = 4$ *часа, при оптимизации последовательности алгоритмом Джонсона —* $T_4 = 2$ *часа, то есть снижается в 2 раза.*

Список литературы

1. Советский энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1987. — 1600 с.
2. *Даль В.И.* Толковый словарь живого великорусского языка, т. 2, 3-е изд. — СПб.–М.: Товарищество М.О. Вольфа, 1907. — 893 с.
3. Мудрость веков. — М.: Экспо, 2013. — 336 с.
4. *Воробьев Н.Н.* Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. — Л.: Изд. ЛГУ, 1974. — 160 с.
5. Большая энциклопедия, т. 50. — М.: ТЕРРА, 2006. — 592 с.
6. Математический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1988. — 847 с.
7. *Ященко И.В.* Парадоксы теории множеств. — М.: Библиотека «Математическое просвещение», вып. 20, 2002. — с. 40.
8. *Banach S.*, *Tarski F.* Sur la decomposition des ensembles de points en parties re spectivevement congruentes // Fundamenta Mathemathicae. — 1924. — №6, P. 244–277.
9. *Hausdorff F.* Bemerkung uber den lnhalt von Punktmengen // Mathematisenche Annalen. — 1914. — V. 75. — P. 428–434.
10. *Душенко К.В.* Большая книга афоризмов. — М.: Эксмо, 2007. — 1056 с.
11. *Баше де Мезирьяк.* Задачи развлекательные и приятные (перевод подготовленного Лоблоном переиздания Claud Gaspard Bachet «Prodlemes plaisants et delectable qui se font par les nombes», Париж, 1874. — М., 1874; Баше К.Г. Игры и задачи, основанные на математике. — Спб.–М.: Изд. книготорговца-типографа М.О. Вольф, 1877. — 250 с.)
12. *Э.Цермело.* О применении теории множеств в шахматной игре, в сб. статей «Матричные игры», под ред. Н.Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1961. — 280 с., с. 167–172. (E. Zermelo. Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels // Proceedings of the Fifnh International Congress of Mathematians (Cambridge, 1912), Camdridge University Press. — 1913. — P. 501–504).
13. *Schaeffer J. et al.* Checkers Is Solved // Science Express. — 2007. — V. 317. — №14 Semtember. — P. 1518–1522.
14. *Berlekamp E.R.*, *Conway J.H.*, *Guy R.K.* Winning ways for your mathematical plays, v. 1–2. — New York: A.K. Peters Ltd., Natick, Massachusetts. 1982. — 1nd. ed. — V. 1–4. — 2003. — 2nd. ed.

15. *Аменицкий Н.Н.* Игра «Nim». — Сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы». — М.: Изд. А.С. Панафидина, 1912. — вып. 6 — 22 с.
16. *Bouton C.L.* Nim, a game with a complete mathematical theory // Annals of Mathematics. — 1902. — V. 23. — P. 35–39.
17. *Ван дер Варден.* Переписка между Паскалем и Ферма по вопросам теории вероятности, ИМИ, 21. — 1976. — С. 228–232.
18. *Лаплас П.С.* Опыт философии теории вероятностей, Энциклопедия «Вероятность и математическая статистика». — М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. — С. 834–869.
19. *Колмогоров А.Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Труды Коммунистической академии. Математика. — 1929. — Т. 1. — С. 8–21.
20. *Kolmogorov A.N.* Grundbergiffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, In Ergebnisse der Mathematik. — Berlin: — 1933.
21. *Hugenii Christian.* Libellus de ratiociniis in ludo aleae (or the value of all xhances in games of fortune: carda, dice, wagers, loteteries et., mathematically demonstrated). London: printed by S. Keimer for T. Woodward, near the Inner-Temple-Gate in Freetstreet. — 1714.
22. *Bernulli Jakob.* Ars onjectand, opus posthumum, Accedit tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallice scripta de ludo pilae reticulavis. — Basel: Thurmeysen, 1713. — 307 s.
23. *Дж. Фон Нейман*, *О. Моргенштерн.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 707 с.
24. *Нейман Дж.* К теории стратегических игр, в сб. статей «Матричные игры», под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1961. — 280 с. — С. 173–204 (J. v. Neumann. Theorie der Gesellschaftsspiele // Mathematische Annalen. 1928. — v. 100, s. 295–320).
25. *Светлов В.И.*, *Семенов В.А.* Конфликтология. — СПб.: Питер, 2011. — 352 с.
26. *Анцупов А.Я.*, *Шипилов А.И.* Конфликтология. — М.: ЭКСМО, 2009. — 512 с.
27. *Литвак М.Е.* Принцип сперматозоида. — М.: Феникс, 2013. — 131 с.
28. *Вентцель Е.С.* Введение в исследование операций. — М.: Советское радио, 1964. — 388 с.
29. *Акоф Р.*, *Сасиени М.* Основы исследования операций. — М.: Мир, 1971. — 534 с.
30. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. — М.: Мир, т. 1. — 1972. — 335 с., т. 2. — 1973. — 488 с., т. 3. — 1973. — 501 с.
31. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: КноРус, 2010. — 192 с.

32. Исследование операций, в 2-х томах, под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. — М.: Мир, 1981. — 677 с.
33. *Саати Т.* Математические модели исследования конфликтных ситуаций. — М.: Советское радио, 1977. — 360 с.
34. *Донец И.* Битва при Гастингсе (1066) // Военно-исторический альманах «Солдат». — Артемовск, клуб «Ветеран». — 2000. — № 64. — С. 2–24. — № 65. — С. 2–25.
35. *де Боюр Мишель.* Вильгельм Завоеватель. — СПб.: Евразия, 2012. — 368 с.
36. *Захаров А.В.* Теория игр в общественных науках. — М.: НИУ ВШЭ, 2011. — 253 с.
37. *Вильямс Дж.Д.* Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009. — 272 с.
38. Матричные игры, сб. статей под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1961. — 280 с.
39. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 327 с.
40. *Данилов Н.Н.*, *Зенкевич Н.А.* Неантагонистические игры двух лиц. — Кемерово: КемГУ, 1990. — 99 с.
41. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1981. — 374 с.
42. *Нэш Дж.* Бескоалиционные игры, в сб. статей «Матричные игры», под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1961. — 280 с. — С. 205–221 (John Nash. Non-cooperative gams // Annals of Matematics. 1951. — V. 54. — № 2. — P. 286–295).
43. *Розенмюллер И.* Кооперативные игры и рынки. — М.: Мир, 1974. — 295 с.
44. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991. — 464 с.
45. Позиционные игры, сборник статей под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Наука, 1967. — 522 с.
46. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
47. *Новиков Д.А.*, *Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры. — М.: СИНТЕГ, 2003. — 160 с.
48. *Лефевр В.А.*, *Смолян Г.Л.* Алгебра конфликта. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009, 72 с.
49. *Лабскер Л.Г.*, *Ященко Н.А.* Теория игр в экономике. Практикум с решениями задач. — М.: КноРус, 2013. — 204 с.
50. *Nash J.* Non-cooperative Games. A Dissertation Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy. — May, 1950.
51. *Майерсон Р.* Теория игр: анализ конфликта (Game Thejry: Analusis of Conflict), 1991.

52. *Beford S.*, *Person H.* A Mixed Strategy in Action // Operatioin Reseach. — 1955. — V. 6(4). — P. 173–176.
53. *Dixit A.*, *Skeath S.* Games of strategy, W. W. Norton and Company, 2004.
54. *Chiappori P. A.*, *Levitt S.* Groseclose. Testing Mixed-Strategy Equiliia When Players Are Heterogeneouus: The Case of Penalty Kicke in Soccet // The American Economic Rewiew. 2204. — V. 92(4). — P. 1138–1151.
55. *Шикин Е. В.* От игр к играм. Математическое введение. — М.: Инфра-М, 2007. — 112 с.
56. *Секей Г.* Парадоксы теории вероятностей и математической статистики. — М.: Мир, 1990. — 249 с.
57. *Дюбин Г. Н.*, *Суздаль П. Г.* Введение в прикладную теорию игр. — М.: Наука, 1981. — 336 с.
58. *Печерский С. М.*, *Беляева А. А.* Теория игр для экономистов. — СПб.: Изд. Европейского ун-та, 2001. — 342 с.
59. *Подиловский В. В.*, *Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
60. *Колобашкина Л. В.* Основы теории игр. — М.: БИНОМ, 2011. — 164 с.
61. *Крушевский А. В.* Теория игр. — Киев: Вища школа, 1977. — 214 с.
62. *Васин А. А.*, *Морозов В. В.* Теория игр и модели математической экономики. — М.: Макс пресс, 2005. — 272 с.
63. *Красс М. С.* Математика для экономических специальностей. — М.: Дело, 2002. — 704 с.
64. *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели. — М.: ЮНИТИ, 2000. — 368 с.
65. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970. — 400 с.
66. *Хазанова Л. Э.* Математические методы в экономике. — М.: БЕК, 2002. — 144 с.
67. *Канторович Л. Г.* Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд. ЛГУ, 1939. — 67 с.
68. *Гасс С.* Линейное программирование. — М.: Физматгиз, 1961. — 300 с.
69. *Юдин Д. Б.*, *Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование. — М.: Наука, 1969. — 424 с.
70. *Зуховицкий С. И.*, *Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1961. — 348 с.
71. *Кузнецов А. В.*, *Сакович В. А.*, *Холод Н. И.* Высшая математика. Линейное программирование. — Минск: Вышейшая школа, 1994. — 286 с.

72. *Данциг Дж.* Линейное программирование. Его применения и обобщения. — М.: Прогресс, 1966. — 600 с.
73. Итеративные методы в теории игр и программировании, под ред. В. З. Беленького и В. А. Волконского. — М.: Наука, 1974. — 239 с.
74. *Робинсон Дж.* Итеративный метод решения игр, в сб. статей «Матричные игры» под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1961. — 280 с. С. 111–117. (J. Robinson. An Iterative method of solving a game // Annals of Mathematics. — 1951. — V. 54. — № 2. — P. 296–301).
75. *Brown G. W.* Iterative solutions of games by fictivious play, Actiivity Analysis of Production and Alloction, ed. by T. C. Koopmans. — New York: Cowles Commission for Research in Economics Monograph, Wiley. — 1951. — № 13. — P. 374–376).
76. *Шапиро Г. Н.* Замечание о вычислительном методе в теории игр, в сб. статей «Матричные игры» под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Физматгиз, 1961. — 280 с. С. 118–127 (H. N. Shapiro. Note on a computation method in the theory games // Comm. Pure and Appl. Math. — 1958. — V. 11. — № 4. — P. 588–593).
77. *Кукушкин Н. С.*, *Морозов В. В.* Теория неантогонистических игр. — М.: Изд. МГУ, 1984. — 104 с.
78. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. — М.: Мир, 1985. — 192 с.
79. *Розен В. В.* Теория игр и экономическое моделирование. — Саратов: Изд. СГУ, 1997. — 76 с.
80. *Льюис Р. Д.*, *Райфа Х.* Игры и решения. — М: ИЛ, 1961. — 642 с.
81. *Партхасаратхи Т.*, *Рагхаван Т.* Некоторые вопросы теории игр. — М.: Мир, 1974. — 296 с.
82. *Благодатских А. А.*, *Петров Н. Н.* Сборник задач и упражнений по теории игр. — СПб.: Лань, 2014. — 304 с.
83. *Харшаньи Дж.*, *Зелтен Р.* Общая теория выбора равновесия в играх. — СПб.: Экономическая школа, 2001. — 406 с.
84. *Anatol Rapoport and Albert M. Chmmah.* Prisoner's dilemma // Univ. of Michigan Press. — 2009. — 256 p.
85. *Х. Деулофеу.* Дилемма заключенного и доминантные стратегии. Теория игр. — М.: Де Агостини, 2014. — 144 с.
86. *Шеллинг Томас.* Стратегия конфликта. — М.: ИРИ СЭН, 2007. — 366 с.
87. *Герасимов Г.* Теория игр и международные отношения // Мировая экономика и международные отношения. — 1966. — № 7. — С. 101–108.
88. Применение теории игр в военном деле. Сб. статей под ред. В. О. Ашкенази. — М.: Советское радио, 1961, 362 с.

89. *Berkovitz D., Dresher M.* RAND Report № P-1592. — Santa Monica: RAND, 1959. — 49 p.
90. *Ларсен С. У., Херсвик Я.* Крушение и восстановление демократического режима в Португалии (опыт применения теории игр к анализу исторических событий) // Полис, Политические исследования, 2004. — № 2 — С. 51. — № 3. — С. 66.
91. *Hamilton T., Mesic R.* A Simple Game-Theoretic Approach to Suppression of Enemy Defineses and Onther Time Critical Target Analysis, RAND Report DB-385-AF. — Santa Monica: RAND, 2004. — 65 p.
92. *Haywood O.* Military Doctrine of Decision and the von Neumann Theory of GAMES, rand Report ATI 210383. — Santa Monica, RAND, 1993. — 40 p.
93. *Дрешер М.* Стратегические игры. Теория и приложения. — М.: Советское радио, 1964, 353 с. (Dresher M. Games of Ctrategy: Thejry and Applicstions. — Santa Monica, Rand Hall, 1961).
94. *Axelrod R.* The Evolution of Cooperation, Basic Books. — 1984.
95. *Лабскер Л. Г.* Экономические игры с природой (практикум с решениями задач). — М.: КноРус, 2015. — 512 с.
96. *Грень Е.* Статистические игры и их применение. — М.: Статистика, 1976. — 175 с.
97. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц. — М.: Физматгиз, 1961. — 129 с.
98. *Блекуэлл Д., Гиршик М. А.* Теория игр и статистических решений. — М.: ИЛ, 1958. — 380 с.
99. *Kendall M. G., Babington Smith.* The problem of a ranking // The Annals of Mathematical Statistics. — 1939. — V. 68. — № 2. — P. 451–456.
100. *Айвазян Г. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 1000 с.
101. *Кэндэлл М.* Ранговые корреляции. — М.: Статистика, 1975. — 216 с.
102. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 816 с.
103. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического програмирования. — М.: Наука, 1965. — 458 с.
104. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960. — 400 с.
105. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969. — 118 с.
106. *Лежнев А. В.* Динамическое программирование в экономических задачах. — М.: БИНОМ, 2010. — 176 с.

107. *Калихман И.Д., Войтенко М.А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1979. — 125 с.
108. *Черноуско Ф.Л., Меликян А.А.* Задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978. — 270 с.
109. *Габастов Р., Кириллова Ф.М.* Основы динамического программирования. — Минск: Изд. БГУ, 1975. — 262 с.
110. *Акулич И.П.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1986. — 319 с.
111. *Визгунов Н.П.* Динамическое программирование в экономических задачах с применением SciLab. — Нижний Новгород: Изд. ННГУ, 2011. — 70 с.
112. *Johnson S.M.* Optimal two- and tree-stage production schedules with setup times included // Research Logistics Querterly. — 1954. — V. 1. — P. 61–68.
113. *Cynthia Eller*. Looking for the best strategy? Ask a chimp? // California Institute of Thechnology, ScienceDaily. — 5 June 2014 (Scientific Reports. — 5 June 2014).
114. *Пелевин В.О.* Шлем ужаса: Креатифф о Тесее и Минотавре. — М: Открытый мир, 2005. — 224 с.
115. *Шейнов В.П.* Скрытое управление человеком (технология манипулирования). — М.: Изд. АСТ. — 2002. — 848 с.
116. *Сунь-Цзы*. Трактат о военном искусстве. — М.: АСТ, 2002, 560 с.
117. *Фронтин С.Ю.* Военные хитрости (стратегемы). — СПб.: Алетейя, 1996. — 160 с.
118. *Новиков Д.А.* Модели стратегической рефлексии // Автоматика и телемеханика. — 2012. — №1. — С. 3–23.
119. *Харро фон Зенгер*. Стратегемы. О китайском искусстве жить и выживать, т. 1, 2. — М.: ЭКСМО, 2004. — 1024 с.
120. *Мясников В.С.* Антология хитроумных планов. Стратегемы. О китайском искусстве жить и выживать, т. 1. — М.: ЭКСМО, 2004. — С. 5–20.
121. *Воеводин А.И.* Стратегемы — стратегии войны, манипуляции, обманы. — М.: Эт Сетера Паблишинг, 2011. — 304 с.
122. *Смолян Г.Л.* Рефлексивное управленние — технология принятия манипулятивных решений // Труды ИСА РАН. — 2013. — Т. 63. — №2. — С. 54–61.
123. *Christopher Cotton and Chang Liu*. 100 Horsemen and the empty city: A game theoretic examination of deception in Chinese military legend // Journal of Peace Research. — 2011. — №48(2). — P. 217–223. Полиэн. Стратегемы. — Спб.: Евразия. — 2002. — 608 с.
124. *Мрдуляш П.Б.* Китайские стратегемы. — М.: Изд. АНО Институт образовательных исследований и разработок. — 2007. — 143 с.

125. *Губерман И.* Закатные гарики. Гарики предпоследние. — М.: ЭКСМО, 2004. — 352 с.

126. *Анисимов О. С.* Стратегическая форма рефлексивного управления в контексте ситуации в России // Международный научно-практический междисциплинарный журнал «Рефлексивные процессы и управление». — 2001. — Т. 1, № 1. — С. 73–87.

127. *Томас Т. Л.* Рефлексивное управление в России: теория и военные приложения // Международный научно-практический междисциплинарный журнал «Рефлексивные процессы и управление». — 2002. — Т. 2, № 1. — С. 71–89.

128. *Губко М. В.*, *Новиков Д. А*, *Чхартишвили А. Г.* Социальные сети: модели инфоромационного влияния, управления и противоборства. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 244 с.

129. *Крогиус Н. В.* Психология шахматного творчества. — М.: Физкультура и спорт. — 1981. — 183 с.

130. *Колокольцев В. Н.*, *Малафеев О. А.* Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации. Теория игр для всех. — СПб.: Лань, 2012. — 624 с.

131. ГОСТы по прикладной статистике (ГОСТ 8.011-72 — показатели точности измерений, ГОСТ 11.002-73 — оценка анормальности наблюдений, ГОСТ 11.004-74 — точечные оценки и доверительные интервалы параметров нормального распределения, ГОСТ 11.006-74 — проверка согласия опытного распределения с теоретическим, ГОСТ 8.207-76 — методы обработки результатов наблюдений, ГОСТ 50779.11-2000 — статистические методы управления качеством, ГОСТ 50779.10-2000 — вероятность и основы статистики, ГОСТ 11.011-83 — точечные оценки и доверительные границы для параметров гамма-распределения, ГОСТ 26864-86 — точечные оценки и доверительные границы для параметров гипергеометрического и отрицательного гипергеометрического распределения, ГОСТ 50779.42-96 — контрольные карты Шухарта, ГОСТ Р ИСО 16269-6-2005 — определение толерантных интервалов, ГОСТ Р 50779-2004 — расчет статистических характеристик нормального распределения по выборочным данным, ГОСТ Р ИСО 5479-2002 — определение отклонения распределения вероятностей от нормального распределения, ГОСТ Р 50779-23-2005 — сравнение двух средних в парных наблюдениях, ГОСТ ISO 9000-2011 — система менеджмента качества, основные положения и словарь, ГОСТ 50779.40-96 — контрольные карты, общее руководство и внедрение, ГОСТ 27.301-95 — расчет надежности, основные положения, ГОСТ 27.402-95 — планы испытаний для контроля средней наработки до отказа при экспоненциальном распределении, ГОСТ 27.410-87 — методы контроля показателей

надежности и планы контрольных испытаний на надежность, ГОСТ 16493-70 — статистический приемочный контроль по альтернативному признаку, ГОСТ 24660-81 — статистический приемочный контроль по альтернативному признаку на основе экономических показателей, ISO/ТО 100172-2003 — руководящие указания по статистическим методам, применяемым в рамках ISO 9001-2011).

132. ГОСТ Р ИСО-31000. Менеджмент риска. Принципы и руководство. (ISO 31000:2009. Risk manag-ement-Principles and Guidelines.)
133. ГОСТ Р ИСО/МЭК 31010-2011. Менеджмент риска. Методы оценки риска (ISO/IEC 31010:2009. Risk management-Risk assessment techniques.)
134. ГОСТ Р 51901.22-2012. Менеджмент риска. Реестр риска. Правила построения.
135. ГОСТ Р 51901.21-2012. Менеджмент риска. Реестр рынка. Общие положения.
136. ГОСТ Р 51901.23-2012. Менеджмент риска. Реестр риска. Руководство по оценке риска опасных событий для включения в реестр риска.
137. ГОСТ Р 51897-2011. Менеджмент риска. Термины и определения. (ISO Gaide 73:2009. Risk management-Vocabulary-Guidelines for use in standards (IDT).)
138. *Такахаси Син*. Занимательная статистика (манга). — М.: Додэка-XXI, 2014. — 224 с.
139. *Press W.H.*, *Dyson F.J.* Iterated Prisoger's Dilemma contains strategies that dominate any evolutionary opponent // Proceeding of the National Acodemy of Science of the United States of America (PNAS). — Jine 2012. — V. 109. — № 26. — P. 10 409–10 413.
140. *Винер Н*. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. — М.: Наука, 1983. — 344 с.
141. *Shannon C*. Programming a Computer for playing Chess // Philosophical Magazine. — 1950. — V. 7/41. — № 314. — P. 256–275.

Именной указатель

Научное издание

КОБЗАРЬ Александр Иванович
ТИКМЕНОВ Василий Николаевич
ТИКМЕНОВА Ирина Васильевна

ТЕОРИЯ ИГР: ИГРАЮТ ВСЕ

Редактор *Е.И. Ворошилова*
Корректор *В.Р. Игнатова*
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*
Концепция оформления и дизайн: *Ю.М. Юсипова*
Рисунок на переплете: *М.С. Коровина*

Подписано в печать 20.08.2015. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж 1000 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17 Б
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15
Тел.: (8352) 28-77-98, 57-01-87
Сайт: www.volga-print.ru

ISBN 978-5-9221-1656-5

9 785922 116565