ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ВОЕННОМ ДЕЛЕ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ВОЕННОМ ДЕЛЕ

СБОРНИК ПЕРЕВОДОВ С АНГЛИЙСКОГО

Ю. С. ГОЛУБЕВА-НОВОЖИЛОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

В. О. АШКЕНАЗЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СОВЕТСКОЕ РАДИО"

МОСКВА—1961

Книга представляет собой сборник переводов статей по вопросам применения теории игр в военном деле.

Помещенные в сборнике статьи охватывают широкий диапазон военных проблем — от тактики одиночных боев-дуэлей между танками и боевыми самолетами до стратегических вопросов проведения крупных операций и войн в целом. Большинство статей написано на довольно высоком математическом уровне и требует от читателя знания общих основ математической теории игр и знакомства с некоторыми идеями теории исследования операций.

Сборник рассчитан на военных и гражданских специалистов, занимающихся выбором оптимальных видов вооружения, оптимальных группировок вооруженных сил и оптимальных методов проведения тактических боев и операций.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР В ВОЕННОМ ДЕЛЕ

Сб. переводов с английского
Ю. С. Голубева-Новожилова

Редактор *В. И. Грознова*

Техн. редактор *Б. В. Смуров* Обложка худож. *В. Т. Сидоренко*

Сдано в набор 4. VIII. 1961 г. Подписано к печати 15. XII. 1961 г.
Формат $84 \times 108/_{32}$ Уч.-изд. л. 18,68 Печ. л. 18,45
Зак. 464 Тираж 7 000 экз. Цена в перепл. № 5 — 1 р. 41 к., в перепл. № 7 — 1 р. 46 к.

Типография Госэнергоиздата. Москва, Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема принятия решения волнует человека с незапамятных времен. Сталкиваясь повседневно с необходимостью выбирать тот или иной альтернативный способ действий, человек использует имеющийся в его распоряжении логический аппарат, проводя цепь логических рассуждений, обращаясь к ассоциациям и аналогиям, вспоминая прецеденты, высказывая прогнозы, предположения и догадки, прибегая к интуиции и, наконец, производя расчеты. При этом человек, естественно, стремится, чтобы выбранный им способ действий приводил к наивыгоднейшим для него результатам. Такой способ действий обычно называется *оптимальным выбором* или *оптимальным решением.*

По мере расширения и усложнения задач растет потребность в научных способах выбора методов их решения. Это объясняется тем, что ошибки при решении задач большого масштаба или неоптимальное их решение приводит к бо́льшим потерям, чем при решении задач малого масштаба. К тому же, чем сложнее задача, тем труднее найти не только оптимальное, но и просто правильное решение.

Особенно важное значение имеет проблема решения в области организации, планирования и проведения военных операций и в области выбора новых систем вооружения. Ведь принятие в этих областях неоптимальных решений может привести к неисчислимым потерям людей и материальных ценностей.

Однако только появление быстродействующих вычислительных машин дало толчок к разработке и развитию методов теории решений, позволяющих отказаться от интуитивных или полуинтуитивных способов принятия решения и находить научное обоснование выбора того или иного способа действий во многих сложных ситуациях, в том числе и в военных ситуациях.

Круг вопросов, рассматриваемых теорией решений, включает в себя:

— выбор некоторой функции критерия полезности (целесообразности), с помощью которой можно было бы оценивать результаты возможных способов действия;

— перечисление всех возможных способов действия (альтернатив) в данной ситуации;

— установление математической модели (в частности, функциональных соотношений), связывающей функцию критерия полезности и возможные способы действия;

— применение вычислительных способов определения оптимальных альтернатив, дающих наилучшие результаты с точки зрения выбранной функции критерия.

Все эти вопросы тесно взаимосвязаны и влияют друг на друга. Так, например, часто приходится выбирать функцию критерия, математическую модель и даже перечень доступных альтернатив таким образом, чтобы рассматриваемая проблема поддавалась анализу и чтобы существовала возможность практически найти решение этой проблемы.

Практические потребности теории решений вызвали появление и развитие новых разделов математики. Среди них следует в первую очередь назвать теорию игр, теорию статистических решений, линейное и нелинейное программирование, динамическое программирование.

При применении теории решений в военном деле особый интерес представляет теория игр, изучающая математические методы анализа конфликтных ситуаций, возникающих между враждующими сторонами. Каждая из этих сторон преследует противоположные цели и для достижения их выбирает тот или иной способ действия. Однако результат действий одной из сторон зависит не только от этих действий, но и от действий, выбранных противниками. Иначе говоря, исход конфликтной ситуации есть функция выборов способов действия всех сторон, принимающих участие в этой конфликтной ситуации. Задача теории игр состоит в установлении тех способов действия, которые дают наибольшую выгоду (пользу) для каждого из противников.

Наибольших успехов теория игр добилась в изучении так называемых парных игр с нулевой суммой, т. е.

таких моделей конфликтных ситуаций, в которых имеются две враждующие стороны, причем выигрыши, получаемые одной стороной в процессе развития конфликта в результате выбора обеими сторонами определенных способов действия, в точности равны проигрышам противной стороны. Именно к такому типу игр принадлежат все модели военных ситуаций, рассмотренные в настоящем сборнике статей. Эти статьи написаны, в основном, американскими специалистами по теории решений и посвящены применению теории игр к отдельным военным проблемам.

Помещенные в сборнике статьи охватывают широкий диапазон военных проблем, от тактики одиночных боевдуэлей между танками и боевыми самолетами до стратегических вопросов проведения крупных операций и войн в целом. Условно сборник можно разбить на несколько разделов.

К *первому разделу* относятся статьи, рассматривающие планирование боевых действий различных видов и масштабов. В статье Дж. Р. Айсбела и У. Х. Мэрлоу «Игры на уничтожение» рассмотрена общая математическая модель процессов тактического сражения, описываемого дифференциальными уравнениями, сходными с уравнениями Ланчестера, известными из литературы по исследованию операций *: Сначала бой рассматривается как игра, решения в которой состоят в распределении сил для участия в активных боевых действиях и в качестве резерва. После разделения сил рассмотрена задача распределения огня сил, выделенных для участия в активных действиях, по различным типам целей, т. е. задача целераспределения.

В небольшой статье Д. У. Блэкетта «Решения игр «Блотто» в чистых стратегиях» выводятся условия, необходимые для того, чтобы так называемые игры Блотто имели решения в виде однозначно рекомендуемых распределений сил противников на нескольких независимых участках боя.

В статьях Д. Р. Фулкерсона и С. М. Джонсона «Тактическая воздушная игра» и Л. Д. Берковица и М. Дрешера «Игровой анализ тактической воздушной

* См., например, Ф. М. Морз и Дж. Е. Кимбелл. Методы исследования операций. «Советское радио», 1956, стр. 148—172.

войны» и «Игровой анализ распределения двух типов самолетов в тактической воздушной войне» анализируется одна и та же задача оптимального планирования использования воздушных сил для выполнения различных тактических задач (удары по аэродромам противника, противовоздушная оборона, непосредственная поддержка наземных войск). Статьи различаются друг от друга исходными данными относительно сил противников и состава тактических задач, решаемых этими силами.

Во *второй раздел* входят статьи, посвященные оптимальному распределению ограниченных ресурсов боевых средств. Джон Э. Уолш в статье «Оптимальные свойства оборонительной стратегии, состоящей в одинаковом воздействии по всем целям» доказывает, что при ограниченных оборонительных ресурсах наилучший способ действия состоит в равномерном распределении этих ресурсов по всем атакующим боевым единицам.

В статье Х. К. Уэйсса «Некоторые тактические дифференциальные игры и выбор поддерживающей системы оружия» даны рекомендации по распределению ограниченного бюджета между главной и поддерживающей системами вооружения.

Аналогичная проблема рассмотрена в статье Дж. М. Добби «О распределении бюджета между различными типами оружия устрашения», где под оружием устрашения понимается ракетное оружие.

Тематика *третьего раздела* — оптимальное построение группировок войск — весьма близко соприкасается с тематикой второго раздела. В статьях, входящих в этот раздел, рассматриваются вопросы оптимального построения группировки многорубежной системы обороны (Дж. Э. Уолш «Недостаточность стоимости поражения цели в качестве критерия эффективности»), оптимального построения кольцевых боевых порядков системы локальной противовоздушной обороны (М. Л. Лейбовиц и Дж. Дж. Либерман «Оптимальный состав и боевой порядок разнородной по составу системы локальной противовоздушной обороны») и оптимальных боевых порядков войск на поле боя при применении обеими сторонами тактического атомного оружия (Дж. К. Хэйл и Х. Х. Уик «Применение теории игр для оценки атомного оружия»).

Статьи, входящие в *четвертый раздел*, посвящены выбору оптимальных тактик при ведении одиночного боя между танками (Л. Э. Сашриссон «Применение теории игр к анализу танковой дуэли») или воздушного боя между истребителем и бомбардировщиком (Т. Э. Кэйвуд и С. Дж. Томас «Применение теории игр к воздушному бою между истребителем и бомбардировщиком»).

Несколько особняком стоят три статьи (Х. Э. Скарф и Л. С. Шэпли «Игры с неполной информацией», Л. Э. Дубинс «Дискретная игра на уклонение от преследования» и С. Карлин «Бесконечноходовая игра с запаздыванием»), составляющие *пятый раздел* и посвященные оптимальной тактике маневрирования корабля, преследуемого бомбардировщиком.

Сборник заканчивается статьей К. Дж. Томаса и У. Л. Димера «Роль моделирования игр в исследовании операций», в которой указана ограниченность областей применения моделирования игровых ситуаций и проведено сопоставление аналитических методов с методами моделирования. Нужно отметить, что интересные соображения о границах применимости метода моделирования при исследовании процессов решения приведены также в заключительном разделе статьи «Игровой анализ тактической воздушной войны».

Реальные конфликтные ситуации, встречающиеся при решении военных проблем, обычно слишком сложны для непосредственного игрового анализа. Поэтому аналитические методы применяются к упрощенным моделям таких ситуаций и само собой разумеется, что наиболее важные выводы, которые следует делать на основании теоретико-игровых моделей, использованных авторами статей, заключаются не в точных количественных результатах, а в качественной стороне решений и в установлении природы этих решений.

Авторы некоторых статей излагают содержание исследованных ими игровых задач в типичном стиле «холодной войны» и политики «с позиции силы», характерном для идеологии современного империализма. Однако мы сочли возможным включить эти статьи в настоящий сборник без каких-либо изменений, так как основной интерес с точки зрения теории решений здесь представляет математическая постановка конкретной игровой задачи, а не внешняя форма изложения.

Следует указать, что большинство статей написано на довольно высоком математическом уровне, и для их понимания необходимо знакомство с теорией стратегических игр в объеме общих курсов, таких, например, как книга Дж. Мак-Кинси «Введение в теорию игр», ГИФМЛ, 1960 г. Полезно также знакомство с некоторыми идеями исследования операций, например, с уже упоминавшимися дифференциальными уравнениями боя, предложенными Ланчестером.

Помещенные в сборнике статьи, несмотря на некоторую ограниченность постановки исследуемых задач, могут помочь читателю усвоить методику принятия научно обоснованных решений по ряду военных проблем.

В. О. Ашкеназы
Ю.С. Голубев-Новожилов

ИГРЫ НА УНИЧТОЖЕНИЕ

Дж. Р. Айсбел (Эбердинский полигон) и *У. Х. Мэрлоу* (Университет Джорджа Вашингтона) *

ЧАСТЬ I. ПРОЦЕССЫ УНИЧТОЖЕНИЯ

В этой части мы рассматриваем двухмерные стохастические процессы, основанные на понятии о вероятностях выживания индивидуальных боевых единиц. Мы объединили результаты работ нескольких авторов [9, 10, 12] с некоторыми собственными выводами и замечаниями. Центральной проблемой является определение $P(x, \xi; r, \rho; t)$, где все аргументы неотрицательные, а аргументы x, ξ, r, ρ — целочисленные; P — это вероятность того, что за период времени t, начинающийся в момент $t=0$, из общего числа (r, ρ) единиц уцелеет (выживет) (x, ξ) единиц. За исключением раздела I.4 мы будем повсюду рассматривать только *однородный процесс уничтожения*, при котором индивидуальные боевые единицы одного из игроков одинаковы, но не обязательно такие же, как боевые единицы его противника. В разделе I.1 мы рассмотрим *вероятностный* случай, когда функция P положительна для $t>0$, $0 \leqslant x \leqslant r$, $0 \leqslant \xi \leqslant \rho$. Мы даем частное решение в явном виде для случая (I.1.6) и показываем, что проблема численных расчетов в общем случае не является совершенно безнадежной. В разделе I.2 мы рассматриваем усеченный процесс, игнорируя его развитие во времени, для того чтобы изучить направление изменения процесса. В таком виде он поддается анализу, а его применение до известной степени оправдывается теми выводами, которые мы делаем из

* J. R. Isbell and W. H. Marlow. Attrition games. Naval Research Logistics Quarterly, 1956, vol. 3, p. 71—94.

игр, рассматриваемых позднее. В разделе I.3 рассмотрены *детерминированные* процессы, стандартными примерами которых являются процессы, описываемые *уравнениями Ланчестера*. Неоднородный процесс уничтожения, рассматриваемый в разделе I.4, основан на работе [11]; мы ограничимся изучением только тех вопросов, которые понадобятся нам в части III.

I.1. Вероятностный процесс уничтожения

Рассмотрим однородный процесс уничтожения, описываемый введенной выше функцией $P(x, \xi;\ r, \rho;\ t)$, где $f(x, \xi)\,dt$ $[\varphi(x, \xi)\,dt]$ есть вероятность потери за время dt одной из боевых единиц первого (второго) игрока, если общему числу боевых единиц первого игрока x противостоит общее число боевых единиц второго игрока ξ. Если пренебречь вероятностью одновременной потери двух и более единиц, то уравнение для будущих состояний системы (перспективное уравнение) будет

$$\frac{dP(x, \xi; \ldots)}{dt} = f(x+1, \xi)\,P(x+1, \xi; \ldots) + \varphi(x, \xi+1)\,P(x, \xi+1; \ldots) - [f(x, \xi)\,P(x, \xi; \ldots) + \varphi(x, \xi)\,P(x, \xi; \ldots)]; \tag{1}$$

$$x = 0, 1, \ldots, r,$$

$$\xi = 0, 1, \ldots, \rho,$$

$P(x, \xi;\ r, \rho;\ 0) = \delta^x_r \delta^\xi_\rho$*;

$P(x, \xi;\ r, \rho;\ t) = 0$ для всех t, если $x > r$ или $\xi > \rho$. Мы будем иметь дело со случаем, когда

$$\begin{aligned} f(x, \xi) &= ax + \beta\xi, \quad f(0, \xi) = 0; \\ \varphi(x, \xi) &= \alpha\xi + bx, \quad \varphi(x, 0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположение (2) означает, грубо говоря, что для каждой из x боевых единиц имеется вероятность a уцелеть и вероятность b уничтожить одну единицу противника; α и β имеют тот же смысл для боевых единиц, входящих в число ξ.

---

* Здесь δ^a_b — символ Кронекера: $\delta^a_b = 1$ при $a = b$, $\delta^a_b = 0$ при $a \neq b$. (*Прим. ред.*)

Совершенно очевидно, что для случая (2) имеется единственное решение уравнения (1) (ср. [4], стр. 409, 416), но читатель должен обратить внимание на то, что разрывы непрерывности в условиях (2) приводят к тому, что дифференциальные уравнения для $x>0=\xi$ и $\xi>0=x$ не являются частными случаями уравнений для $x\xi>0$. Читатель может убедиться, что точное интегрирование уравнения (1) в общем виде несложно при, скажем, $r-2\leqslant x\leqslant r$; $\rho-2\leqslant\xi\leqslant\rho$, но быстро становится практически невыполнимым для меньших значений x и ξ (для бо́льших значений r и ρ).

Уравнение для прошлых состояний системы (ретроспективное уравнение) (см. [5], стр. 397), соответствующее (1) и (2), будет

$$\begin{aligned}\frac{dP(\ldots;r,\rho;t)}{dt}&=(ar+\beta\rho)\,P(\ldots;\,r-1,\,\rho;\,t)+\\&+(\alpha\rho+br)\,P(\ldots;\,r,\rho-1;\,t)-\\&-[(a+b)\,r+(\alpha+\beta)\,\rho]\,P(\ldots;\,r,\,\rho;\,t),\end{aligned}\tag{3}$$

причем в случае $r=0$ или $\rho=0$ мы можем сохранить эту формулу, если положим $P(\ldots;-1,\rho;t)=P(\ldots;0,\rho;t)$ и $P(\ldots;\,r,-1;\,t)=P(\ldots,\,r,\,0;\,t)$. Уравнение (3) можно легко проверить, если в правой части уравнения для будущих состояний (1) записать P' вместо $P(x,\,\xi;\,r,\,\rho;\,t)$. Тогда P' будет обычным аналитическим решением „перспективного“ уравнения, удовлетворяющим начальным условиям уравнения (1).

Ретроспективное уравнение удобно потому, что оно удовлетворяется любой функцией $F(t,r,\rho)=\sum\limits_{x,\,\xi}c\,(x,\xi)\times$ $\times P\,(x,\,\xi;\,r,\,\rho;\,t)$; например, среднее значение x в момент t, определяемое выражением $c(x,\xi)\equiv x$, удовлетворяет уравнению (3) и поэтому его можно вычислить рекурсией по r и ρ, не обращаясь к индивидуальным значениям P. Ретроспективное уравнение разрешимо в одном частном случае, который, к сожалению, не имеет большого практического значения. Тем не менее, само решение и рассуждения, приводящие к нему, могут дать понятие о трудностях решения для общего случая.

Рассмотрим вначале независящую от времени вероятность $F(x,\,\xi;\,r,\,\rho)$ того, что имеется некоторый момент времени $t \geqslant 0$, когда число уцелевших боевых единиц равно точно x, ξ. Совершенно очевидно, что $F(r, \rho; r, \rho)=1$ и что F удовлетворяет двойственным рекурсивным соотношениям

$$F(x, \xi; r, \rho)=\frac{a(x+1)+\beta\xi}{(a+b)(x+1)+(\alpha+\beta)\xi} F(x+1, \xi; r, \rho)+$$
$$+\frac{\alpha(\xi+1)+bx}{(a+b)x+(\alpha+\beta)(\xi+1)} F(x, \xi+1; r, \rho); \qquad (4)$$

$$F(x, \xi; r, \rho)=\frac{ar+\beta\rho}{(a+b)r+(\alpha+\beta)\rho} F(x, \xi; r-1, \rho)+$$
$$+\frac{\alpha\rho+br}{(a+b)r+(\alpha+\beta)\rho} F(x, \xi; r, \rho-1). \qquad (5)$$

Соотношения (4) и (5) можно вывести из предыдущих формул, но читатель может рассматривать соотношение (5) как определение. Учитывая, что $F(x, \xi; x, \xi)=1$ и $F(x, \xi; r, \rho)=0$ при $x>r$ или $\xi>\rho$, мы получим полное определение F. Оно правильно лишь для $x>0$ и $\xi>0$; поэтому наши последующие рассуждения применимы только к этому случаю.

Предполагая, что $a+b=\alpha+\beta$, можно получить решение уравнения (3) при начальных условиях (1):

$$P(x, \xi; r, \rho; t)=F(x, \xi; r, \rho)\binom{r+\rho}{x+\xi}\times$$
$$\times[e^{(a+b)t}-1]^{r+\rho-x-\xi} e^{-(a+b)(r+\rho)t}. \qquad (6)$$

Формулу (6) легко проверить: мы опускаем эти вычисления. Мы пришли к формуле (6) с помощью следующих рассуждений, заимствованных у К. А. Труселлла [13]. Заменим P функцией $Q=e^{(a+b)(r+\rho)t}$, а t—переменной $z=\frac{e^{(a+b)t}}{a+b}$. Тогда (3) преобразуется в простое уравнение

$$\frac{dQ(x, \xi; r, \rho; z)}{dz}=(ar+\beta\rho)Q(\ldots, r-1, \rho; z)+$$
$$+(br+\alpha\rho)Q(\ldots; r, \rho-1; z), \qquad (7)$$

в правой части которого отсутствует неразделенный, третий, член. В одномерной задаче Труселлла это можно всегда сделать в соответствии со строгими правилами. В нашей задаче именно на этом этапе требуется гипотеза о том, что $a+b=\alpha+\beta$. [Хотя мы не можем доказать, что в других случаях задача становится труднее, у нас имеется совершенно иной и более сложный вывод соотношения (6), для которого потребовалась та же гипотеза.]

Последовательными приближениями (итерациями) по формуле (7) производные от $Q(x, \xi; r, \rho; t)$ могут быть выражены через некоторые функциональные значения $Q(x, \xi; r', \rho'; z)$, где r' и ρ' меньше, чем r и ρ. Если неизвестная функция Q является аналитической в z, то ее можно представить в виде ряда Тейлора. Разлагая ее в ряд вблизи значения z, соответствующего $t=0$, мы находим из начальных условий, что все члены ряда равны нулю, кроме $(r+\rho-x-\xi)$-го члена. Тогда Q может быть выражена через z, а поэтому P может быть выражена через t.

Итерация, упомянутая в начале предыдущего абзаца, приводит к сложным коэффициентам. Можно в принципе последовательно вычислить коэффициенты $\varphi(x, \xi, r, \rho)$, которые оказываются равными $P(x, \xi; r, \rho)\binom{r+\rho}{x+\xi}$, как в уравнении (6). Мы решили, однако, использовать тот факт, что если $x'+\xi'=x+\xi$, то (поскольку $a+b=\alpha+\beta$) отношение $P(x', \xi'; r, \rho; z)$ к $P(x, \xi; r, \rho; z)$ не зависит от времени и равно отношению соответствующих значений φ или F. Следовательно, достаточно найти $\sum\limits_{x+\xi=k}\varphi(x, \xi; r, \rho)=$ $=G(k; r, \rho)$. (Соответствующая сумма значений F равна единице, так как общее число уцелевших боевых единиц равно k.) Теперь вероятность того, что число боевых единиц в момент t было равно k и уменьшилось к моменту $t+dt$, равна

$$(a+b)\,k\,[e^{(a+b)\,t}-1]^{r+\rho+k}\,e^{-(a+b)(r+\rho)\,t}\,G(k;\ r,\ \rho)\,dt.$$

Интеграл этого выражения от нуля до бесконечности равен единице, поскольку его можно рассматривать как вероятность. Непосредственное вычисление интеграла от этого выражения дает $\dfrac{G(k;\ r,\ \rho)}{\binom{r+\rho}{k}}$. Отсюда мы приходим к выражению (6).

Численное решение уравнений процесса уничтожения (1) и (2) может быть получено рекурсивно на цифровой вычислительной машине стандартными способами. При этом задаются постоянными значениями параметров a,

b, α и β, после чего табулируются значения P для желаемых значений t. Такие табулированные распределения вероятностей оказываются необходимыми для решения игр, рассматриваемых в разделах II.1 и II.2.

Один из недостатков выражения (2), применяемого для описания скорости процесса уничтожения (кроме трудности анализа), связан с тем, что огневая мощь каждой боевой единицы вносит свою долю в процесс уничтожения каждой боевой единицы противника. Заметим вначале, что для машинного решения можно иметь f и φ нелинейными; читателю предоставляется право создавать частные варианты выражения (2), соответствующие рассматриваемым частным физическим ситуациям. Однако следует исходить из совершенно очевидного желания сохранить представление о бое как о комбинации независимых событий: при этом каждое событие или *боевое соприкосновение* может быть описано системой, подобной системе уравнений (1).

Предположим, что физическая ситуация такова, что одна и та же боевая единица противника никогда не может быть обстреляна более чем двумя боевыми единицами (ср. [12]). Тогда будут возможны следующие виды боевого соприкосновения:

$$(r,\ \rho)=(2,1),\ (1,2),\ (1,1),\ (1,0) \text{ или } (0,1),$$

для которых уравнение (1) легко решается. Для любого значения $(r,\ \rho)$ требуется, чтобы игрок, обладающий численным превосходством, мог организовать единственное, наиболее выгодное для него множество соприкосновений. Тогда вероятности P для сражения $(r,\ \rho)$ вычисляются рекурсивно: для любого значения $(r,\ \rho)$ имеется такое „ближайшее" значение $(r',\ \rho')$, $r' \leqslant r$, $\rho' \leqslant \rho$, что сражение (r, ρ) состоит из сражения (r', ρ') плюс одно дополнительное соприкосновение. Среднее число уцелевших после сражения равно, конечно, сумме средних чисел уцелевших после боевых соприкосновений. Вероятность полной победы (уничтожения противника) определяется простым умножением; другие подобные выражения легко рассчитываются.

I.2. Усеченный процесс

В этом разделе мы исключим непрерывную переменную t и заменим ее дискретной переменной $x+\xi$, общим числом уцелевших боевых единиц. Отдельные дискретные шаги в сражении соответствуют последовательным потерям отдельных боевых единиц. Как и раньше, мы исключаем возможность одновременного уничтожения двух или более единиц и начинаем с уравнений (I.1.1) и (I.1.2). На этот раз мы примем $r=x$ и $\rho=\xi$ и будем считать, что может быть потеряна самое большее одна единица. При этом получаем

$$P(x,\ \xi;\ldots)=\exp\{-[(a+b)x+(\alpha+\beta)\xi]t\},$$

$$P(x-1,\ \xi;\ldots)=\frac{ax+\beta\xi}{(a+b)x+(\alpha+\beta)\xi}[1-P(x,\ \xi;\ldots)], \tag{1}$$

$$P(x,\ \xi-1;\ \ldots)=\frac{\alpha\xi+bx}{(a+b)x+(\alpha+\beta)\xi}[1-P(x,\xi;\ldots)].$$

Из системы уравнений (1) легко находим

$$\lim_{t\to\infty}P(x-1,\xi;\ldots)=\frac{ax+\beta\xi}{(a+b)x+(\alpha+\beta)\xi}=P^{-}(x,\ \xi),$$

$$\lim_{t\to\infty}P(x,\ \xi-1;\ldots)=1-P^{-}(x,\ \xi)=P^{+}(x,\ \xi). \tag{2}$$

Знак «+» обозначает благоприятный исход с точки зрения первого игрока, а знак «—» — неблагоприятный исход. Для любых значений x, ξ r, ρ, t в процессе (I.1.2) P^{+} является вероятностью того, что если единицы x и ξ уцелели до момента t, то следующей потерянной единицей будет ξ-единица.

Мы предполагаем, что в начале этого независящего от времени процесса силы r противостоят силам ρ; процесс продолжается до тех пор, пока одна из сторон не будет уничтожена. Если конечные результаты $(x,\ 0)$, $(0,\ \xi)$ оценивать функцией u, то значения u могут быть вычислены рекурсивно по формуле

$$\begin{aligned} u(x,\ \xi)=P^{-}(x,\ \xi)\,u(x-1,\ \xi)+&\\ +P^{+}(x,\ \xi)\,u(x,\ \xi-1),& \end{aligned} \tag{3}$$

т. е. значение функции при $(x,\ \xi)$ является выпуклой комбинацией значений этой функции при возможных вариантах сил, которые могут последовать за $(x,\ \xi)$. Например, если $V(x,\ 0)=1$ для $x>0$, $V(0,\ \xi)=0$ (определять $V(0,0)$ нет необходимости), то V есть вероятность победы первого игрока. Если теперь $V(x,\ 0)=x$, $V(0,\xi)=$ $=0$, то вычисленное по формуле (3) значение V есть без-условное число единиц x, уцелевших после последнего боя.

Усеченный процесс, описанный в настоящем разделе, может быть, очевидно, использован тогда, когда предполагается, что после уничтожения какой-нибудь одной боевой единицы возможен выбор новых стратегий. Иначе говоря, он применим не только к сражениям до конца; эту мысль мы разовьем в разделе II.3.

I.3. Детерминированные процессы

В этом разделе мы рассмотрим развитие боя в среднем: мы будем интересоваться такими значениями $x'=x(t)$ и $\xi'=\xi(t)$, чтобы $P(x', \xi'; r, \rho; t)=1$.

Классические уравнения Ланчестера (см. [9, глава IV]) для случая, когда потери не восполняются, имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt}=-ax-\beta\xi,$$
$$\frac{d\xi}{dt}=-\alpha\xi-bx, \tag{1}$$
$$x(0)=r,\ \xi(0)=\rho.$$

Решения уравнений (1) приведены в книге [9, стр. 164]. Если $a=\alpha=0$, то интегральные кривые являются гиперболами с асимптотами $x^2b=\xi^2\beta$. Поэтому здесь говорят о *законе* n^2; эффективность сил каждой стороны измеряется произведением ее огневой мощи на квадрат ее численного состава. Имеется по крайней мере одна прямолинейная интегральная кривая (при положительных значениях x и ξ), уравнение которой имеет вид

$$\xi=\frac{\alpha-a+\sqrt{(\alpha-a)^2+4b\beta}}{2\beta}\,x. \tag{2}$$

Если $b\beta>a\alpha$, то остальные интегральные кривые отклоняются от прямой (2) при возрастании t; таким образом, начальное превосходство усиливается по мере развития сражения. Если $a\alpha>b\beta$, то интегральные кривые отклоняются в сторону прямой (2). Если $a\alpha=b\beta$, то эти кривые превращаются в прямые линии, параллельные линии (2). В некоторых вырожденных случаях один противник всегда выигрывает, но вообще существует критическое соотношение, определяемое наклоном прямой (2), так что победителя можно определить с помощью оценки каждой x-единицы через посредство ξ-единиц; победителем будет та сторона, которая имеет более высокую оценку. Выше мы упомянули *закон* n^2 для случая $a=\alpha=0$; легко создать аналогичные описания сражений для других случаев. Мы вернемся к проблеме определения собственной цены боевых единиц в части IV.

Интересно сравнить систему уравнений (1) с уравнениями, удовлетворяемыми средним числом уцелевших единиц в уравнениях (I.1.1) и (I.1.2).

После умножения на x и суммирования, умножения на ξ и суммирования, эти уравнения принимают вид (ср. [11, стр. 24]):

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -a\bar{x} - \beta\bar{\xi} + \beta\sum_{\xi}\xi P(0, \xi; \ldots),$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = -\alpha\bar{\xi} - b\bar{x} + b\sum_{x} xP(x, 0; \ldots), \tag{3}$$

$$\bar{x}(0) = r; \quad \bar{\xi}(0) = \rho.$$

Непосредственные вычисления по этим формулам невозможны, если неизвестны суммируемые члены. Это, вероятно, указывает, ввиду раздела I.1 нашей статьи, на то, что $\bar{x}$ и $\bar{\xi}$ могут быть вычислены согласно их определениям. Мы отметили выше, что $\bar{x}$ и $\bar{\xi}$ удовлетворяют ретроспективному уравнению (I.1.3); поэтому подобные рекуррентные вычисления, очевидно, приведут к таким значениям t, которые делают уравнения (1) плохим (неадэкватным) приближением к уравнениям (3).

Итак, мы рассмотрели следующие детерминированные процессы: уравнения Ланчестера (1), точные уравнения (3), легко разрешимые выражения для среднего числа уцелевших единиц, приведенные в конце раздела I.1, и уравнения (I.2.3) для уцелевших единиц в усеченном процессе.

I.4. Неоднородное уничтожение

В работе [11, стр. 22] даны уравнения, обобщающие (I.1.1) для сражения между стороной, состоящей из m типов боевых единиц, обладающих мощью r_i в единице i-го типа, $i=1, 2, \ldots, m$ (Игрок *1*), и стороной описываемой аналогично параметрами $\rho_1, \ldots, \rho_n$ (Игрок *2*). Мы не будем приводить здесь эти уравнения, так как в процессе вероятностного неоднородного уничтожения нас интересует главным образом обобщение усеченного процесса, рассмотренного в разделе I.2. По аналогии с уравнениями (I.1.2) мы полагаем, что для ненулевых значений r_i и ρ_j

$$f_i(r_1, \ldots, r_m; \rho_1, \ldots, \rho_n) = a_i r_i + \sum_j \rho_j \beta_{ji} \pi_{ji},$$

$$\varphi_j(r_1, \ldots, r_m; \rho_1, \ldots, \rho_n) = \alpha_j \rho_j + \sum_i r_i b_{ij} p_{ij}. \tag{1}$$

Например, вероятность потери одной единицы типа i в сражении, длящемся время dt, равна $f_i dt$, если $r_i \neq 0$, и равна нулю, если $r_i = 0$.

Как обычно, мы ввели оба значения в виде греческих и латинских букв для парных переменных, благодаря чему достаточно объяснить значение одной переменной из каждой пары. Так, a_i обозначает скорость экспоненциального убывания своих сил типа i, а b_{ij} есть мера эффективности огня своих боевых единиц i-го типа против боевых единиц противника j-го типа. Новым понятием, которое мы используем в части III, являются введенные нами стратегические переменные p_{ij}, представляющие собой пропорциональную часть общих усилий боевых единиц типа i (для Игрока *1*), которые направлены против единиц типа j. Здесь мы применили слово «стратегические» в смысле теории игр; на военном языке переменные p_{ij} являются тактическими переменными.

Мы ограничиваемся изучением оптимального выбора значений p и π в части III, для чего достаточно рассмотреть процесс [см. (I.2.1)] только до первой боевой потери. Если символом d_i обозначить такое возможное событие, при котором первым потерянным подразделением будет своя боевая единица типа i, то нам требуется определить вероятность Вер(d_i) и аналогичную вероятность Вер(δ_j). При этом мы, как и в (I.2.2), получим

$$\text{Вер}\,(d_i) = \frac{a_i r_i + \sum\limits_j \rho_j \beta_{ji} \pi_{ji}}{\sum\limits_k a_k r_k + \sum\limits_j \alpha_j \rho_j + \sum\limits_{j,\,k} (r_k b_{kj} p_{kj} + \rho_j \beta_{jk} \pi_{jk})}. \tag{2}$$

В заключение в целях законченности наших рассуждений мы заметим, что соответствующее обобщение детерминированных уравнений (I.3.1) для $i=1,\ldots,m$ и $j=1,\ldots,n$ приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -f_i(x_1,\ldots, x_m;\ \xi_1,\ldots,\xi_n),\ x_i(0)=r_i, \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= -\varphi_j(x_1,\ldots, x_m;\ \xi_1,\ldots,\xi_n),\ \xi_j(0)=\rho_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Эти уравнения для фиксированных значений p и π используются в работе [11, стр. 12—17]. Их решение, естественно, много сложнее, чем решение уравнений Ланчестера; однако, как мы уже говорили, нас интересует только выбор значений p и π в вероятностном случае, для чего достаточно соотношения (I.4.2).

ЧАСТЬ II. ЗАДАЧИ ТИПА «ХОТСПОТ» *

Мы начнем с кратного изложения статьи К. Томпкинса относительно игр типа «хотспот». Эти игры носят вероятностный характер, потому что в их основе лежит такой процесс уничтожения, который описан в разделе I.1. Решение таких игр представляет определенные трудности. В разделе II.2 мы представим родственную матричную игру, для решения которой известно несколько эффективных методов. Между этими матричными играми и играми типа «хотспот» существует эвристическая связь **. Однако более важно то, что когда одна из этих игр имеет решение в чистых стретегиях, то другая имеет также решение в чистых стратегиях, причем оптимальные стратегии и цена игры одинаковы у обоих типов игр. В заключение в разделе II.3 мы вводим упрощенную игру, возникшую под воздействием модели типа «хотспот». Вместо ввода новых сил в бой через установленные интервалы времени мы производим назначение новых сил у обеих сторон, как только одна из боевых единиц любой стороны уничтожена. Эта упрощенная игра имеет решение в чистых стратегиях, по-

---

* «Хотспот» — дословно «горячее место» — участок ожесточенных боевых действий. (*Прим. перев.*)

** То есть связь, установленная догадкой, а не строгими рассуждениями. (*Прим. перев.*)

этому ни один из игроков не захочет изменить свое распределение в какой-нибудь другой момент времени. Оптимальная стратегия любого игрока в любом случае состоит в вводе в бой всех боевых единиц, ни одной боевой единицы или точно одной боевой единицы. Игры, рассматриваемые в разделе II.3, используются в частях III и IV в качестве основы для перехода к более трудным проблемам.

II.1. Игры типа «хотспот»

В этом разделе мы дадим краткий обзор статьи [12], в которой К. Томпкинс рассмотрел парную игру с нулевой суммой для решения задачи ввода сил на участок поля боя, называемый «хотспот» («горячее место»). Эта игра не является матричной игрой, однако ее можно свести к одноходовой игре.

На k-ом ходу (r_k, ρ_k) боевых единиц из общего числа (m_k, μ_k) единиц вводятся в район „хотспот". Результатом хода явится возможная потеря боевых единиц одним игроком или обоими игроками; предполагается применение функции однородного процесса уничтожения $P(x, \xi; r, \rho; t')$, введенной в части I, причем t' является постоянной величиной и не меняется в промежутках между ходами. После начала партии нельзя вводить никаких новых боевых единиц. Игра заканчивается k-ым ходом, если $r_k\rho_k=0$, причем платеж Игроку *1* равен F, $-\Phi$ или 0 в зависимости от того, $r_k \neq 0$, $\rho_k \neq 0$ или $r_k=\rho_k=0$ соответственно. Кроме того, имеется платеж $-(m_1-m_k)+\sigma(\mu_1-\mu_k)$, т. е. Игрок *1* платит единицу платежа за каждую свою потерянную боевую единицу и получает σ единиц платежа за каждую уничтоженную единицу Игрока *2*. Таким образом, мы придерживаемся общепринятого правила, считая Игрока *1* максимизирующим игроком.

Томпкинс [12] доказал, что эту игру можно рассматривать как заканчивающуюся за ограниченное число ходов, и, таким образом, показал существование единственной цены $V(m, \mu)$ для многоходовой игры. Для того чтобы получить более эффективный метод расчета, чем метод, применявшийся при доказательстве существования цены игры, потребовалось сведение игры к одному ходу. Так как $V(m, \mu)$ есть единственная цена игры, то можно написать следующее выражение для математического ожидания платежа Игроку *1* после первого хода:

$$E(r, \rho; m, \mu) = A(m, \mu; r, \rho) + [B(r, \rho) + 1] V(m, \mu), \quad (1)$$

где предполагается, что на поле боя введены силы (r, ρ) из числа общих сил (m, μ) и что после этого каждый игрок применяет свои оптимальные стратегии. В этом выражении A есть математическое ожидание платежа от всех возможных исходов хода, который приводит к потере по крайней мере одной боевой единицы. Точнее

$$A(0, 0; m, \mu) = 0,$$

$$A(r, 0; m, \mu) = F - \sum_x (r - x) P(x, 0; r, 0; t'), \quad r \neq 0,$$

$$A(0, \rho; m, \mu) = -\Phi + \sigma \sum_\xi (\rho - \xi) P(0, \xi; 0, \rho; t'), \quad \rho \neq 0,$$

$$A(r, \rho; m, \mu) = \sum_{x, \xi} [V(m - r + x, \mu - \rho + \xi) - (r - x) +$$

$$+ \sigma(\rho - \xi)] P(x, \xi; r, \rho; t'), \quad r \neq 0, \ \rho \neq 0, \quad (2)$$

где суммирование производится в диапазоне $0 \leqslant x \leqslant r$; $0 \leqslant \xi \leqslant \rho$, исключая точку (r, ρ).

Для облегчения анализа мы ввели обозначение

$$B(r, \rho) = P(r, \rho; r, \rho; t') - 1, \text{ если } r\rho \neq 0,$$

$$B(r, \rho) = -1 \text{ в противном случае.} \quad (3)$$

Следует заметить, что A не зависит от m и μ при $r\rho = 0$. В самом деле, для этих случаев $A = E$ и поэтому игры, в которых у одного из игроков или у обоих игроков вместе нет никаких ресурсов, могут быть немедленно исключены. Примем далее по индукции следующую гипотезу: $V(r, \rho)$ известна для $r \leqslant m$ и $\rho \leqslant \mu$, за исключением $V = V(m, \mu)$. Тогда все величины в уравнениях (2) и (3) известны, и нетрудно определить V как цену игры с платежами (1) или, что равнозначно, как корень уравнения

$$W(V) = \text{Цена}(A + BV) = 0. \quad (4)$$

Томпкинс показал справедливость этого определения и предложил итеративный метод расчета цены V. Существование единственного корня уравнения (4) было также доказано фон Нейманом [14], Лумисом [8] и Дайнсом [3] при предположении, что элементы матрицы B отрицательны. С более поздними результатами можно познакомиться в статье Беллмэна [1].

Таким образом, игра типа «хотспот» сводится к одноходовой игре, решение которой несколько отличается от решения стандартных матричных игр. Ее цена и оптимальные стратегии могут быть найдены, если считать, что матричная игра в выражении (4) имеет нулевую цену. Для того чтобы найти $V(m, \mu)$, необходимо решить систему $(m+1)(\mu+1)$ уравнений (4).

II.2. Вариант игры типа «Хотспот»

Как мы только что видели, решение первоначальной игры типа „хотспот“ означает определение числа V и оптимальных стратегий, таких, чтобы у игры G_1 с платежной матрицей $(a_{ij}+b_{ij}V)$ была нулевая цена. Решение в чистых стратегиях (i, j) существует тогда и только тогда, когда $V=\frac{-a_{ij}}{b_{ij}}$, т. е. когда имеется игра G_2 с платежной матрицей $\left(\frac{a_{ij}}{-b_{ij}}\right)$. Действительно,

если все величины $b_{ij}<0$, то игра G_1 имеет решение в чистых стратегиях (r, s) и цену игры $V=\frac{a_{rs}}{-b_{rs}}$ тогда и только тогда, когда (r, s) является решением игры G_2. (1)

Доказательство. Если игра G_1 имеет такое решение, например V^*, то остающиеся платежные элементы $a_{ij}+b_{ij}V^*$ в строке r (в столбце s) будут неотрицательными (неположительными). Так как наклон линии $E=a_{ij}+b_{ij}V$ отрицателен, то точки пересечения линий V удовлетворяют условию $\frac{a_{rs}}{-b_{rs}}=\min\limits_{j}\frac{a_{rj}}{-b_{rj}}=\max\limits_{i}\frac{a_{is}}{-b_{is}}$, т. е. (r, s) есть решение игры G_2.

Следующий пример показывает, что ни цены игры, ни даже чистые стратегии, входящие в оптимальные смешанные стратегии, не нуждаются в согласовании

$$A=\left\|\begin{matrix}5 & 1\\ 1 & 4-\varepsilon\\ 1 & 1\end{matrix}\right\| \quad -B=\left\|\begin{matrix}1 & 3\\ 5 & 2-\varepsilon\\ 3 & 1/2\end{matrix}\right\|.$$

В игре G_1 цена $V=1$, и Игрок *2* выбирает первую и вторую строки. С другой стороны, для малых значений ε цена игры $G_2>1$, и используются строки *1* и *3*. У нас имеются примеры, когда цены игр не согласуются при решениях в смешанных стратегиях для игр A и B, данных в (I.1.2) и (I.1.3). Мы не смогли найти классы игр A и B, позволяющие сравнивать стратегии для G_1 и G_2, входящие в оптимальные смешанные стратегии.

Мы заканчиваем раздел установлением формальной связи между играми G_1 и G_2. Возвратимся к разделу II.1 и будем действовать дальше, как и прежде, используя уравнения (II.1.3). Затем предположим, что по крайней мере одна боевая единица теряется в каждом шагу при $r\rho\neq 0$ и, кроме того, заменим $P(x,\ \xi;\ r,\ \rho;\ t')$ на $Q(x,\ \xi;\ r,\ \rho;\ t')$;

$$Q(r,\ \rho;\ r,\ \rho;\ t')=0,$$

$$Q(x,\ \xi;\ r,\ \rho;\ t')=\frac{P(x,\ \xi;\ r,\ \rho;\ t')}{1-P(r,\ \rho;\ r,\ \rho;\ t')}.$$

С помощью этого процесса исключения вероятности того, что не будет потеряна ни одна боевая единица, и ренормализации величин вероятностей P мы снова приходим к матричной игре с платежами $\frac{A(r,\ \rho;\ m,\ \mu)}{-B(r,\ \rho)}$.

Если каждая цена игры $V(m,\ \mu)$ не определяется игрой с седловой точкой, то наша новая процедура может привести к различным значениям цен V так, что величины A, только что записанные нами, могут не совпадать с величинами A для первоначальной игры типа «хотспот». Еще не вполне ясно, насколько тесная связь существует между этими двумя методами. Решение численных примеров показывает, что эта связь может быть сильнее, чем указывает утверждение (II.2.1).

II.3. Упрощенная игра

Игра, рассматриваемая в этом разделе, основана на усеченном процессе уничтожения, рассмотренном в разделе I.2. Два командира, в распоряжении которых имеется соответственно r и ρ боевых единиц, борются за обладание некоторым объектом. Если они выделят для этой цели соответственно x и ξ боевых единиц [резервируя $(r-x)$ и $(\rho-\xi)$ боевых единиц] и если $x\xi>0$, то начнется процесс уничтожения, управляемый уравнениями (I.2.1). Как только достигается условие $x\xi=0$, бой считается законченным, и та сторона, у которой остались еще боевые единицы на поле боя, считается выигравшей объект. Как только одна из боевых единиц на любой стороне терпит поражение, оба командира имеют право произвести новые назначения из оставшихся у них сил.

Игра для нас определена, как только установлены количественные показатели конечных состояний. Для любых значений r и ρ мы получаем игру с матрицей порядка $(r+1)\times(\rho+1)$, если только нам известны пять значений цены игры: $V^+(r, \rho)$ — цена первому игроку, если второй игрок не выделяет никаких сил, так что первый игрок выигрывает объект; $V^-(r, \rho)$ — цена игры при противоположной ситуации; $V(r, \rho)$ — цена игры, если оба игрока отказались от боя, и, наконец, две цены игры $W(r-1, \rho)$ и $W(r, \rho-1)$. Имеется большое число неравенств, которым должны удовлетворять эти значения цен игры. В частности, мы предполагаем, что $V^-\leqslant V\leqslant V^+$.

Платеж в игре (r, ρ) при применении стратегий (x, ξ) определяется уравнениями (I.2.2), т. е.

$$H(x, \xi; r, \rho)=P^+(x, \xi)W(r, \rho-1)+ \\ +P^-(x, \xi)W(r-1, \rho). \qquad (1)$$

Формула (1), естественно, применима только при $x\xi\neq 0$. Должно также выполняться условие $H(x, 0; r, 0)=$ $=V^+(r, 0)$ и симметричное условие для $(0, \rho)$. Случай, когда $r=\rho=0$, можно не рассматривать, так как он не может возникнуть при любом другом варианте.

Матрица H порядка $(r+1)\times(\rho+1)$ всегда имеет седловую точку. Главной причиной этого является то, что $P^+(x+1, \xi)\geqslant P^+(x, \xi)\geqslant P^+(x, \xi+1)$ тогда и только тогда, когда $b\beta\geqslant a\alpha$ и все эти неравенства одновременно обратимы. Тогда, если $b\beta > a\alpha$, стратегия r (или ρ) доминирует над всеми остальными, за исключением, возможно, стратегии 0. Это сразу приводит к матрице

$$\begin{Vmatrix} V^*(r, \rho) & V^+(r, \rho) \\ V^-(r, \rho) & V(r, \rho) \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где $V^*(r, \rho) = H(r, \rho)$. Однако $V^- \leqslant V \leqslant V^+$; следовательно, вопрос заключается в том, где лежит V^*.

Для случая, когда $b\beta \geqslant a\alpha$,

если $V^* > V^+$, *то* V^+ *есть седловая точка матрицы (2);*

если $V^- \leqslant V^* \leqslant V^+$, *то седловой точкой является* V^*; (3)

если $V^* < V^-$, *то седловой точкой является* V^-.

Аналогично,

если $b\beta \leqslant a\alpha$, *то следует в условии (3) заменить* V^* *на* $V^* = H$ (1,1); *результат от этого не изменится.* (3′)

Заключение (3′) основано по существу на специальном предположении о том, что $H(x, 0) = \text{const}$ для $x > 0$ и $H(0, \xi) = \text{const}$ для $\xi > 0$. Заключение (3) справедливо и при более слабом ограничении, состоящем в том, что $H(x, 0)$ является монотонной функцией по x, а $H(0, \xi)$ — немонотонной функцией. Вырождение этих игр подтверждает интуитивное предположение о том, что обычно следует вводить в бой все наличные силы, если не предполагается одновременно предпринять другие операции, так как обычно $b\beta \geqslant a\alpha$. Из заключений (3) и (3′) следует, что если $b\beta = a\alpha$, то все ненулевые назначения боевых единиц эквивалентны.

Общий ход боя, протекающего в соответствии с (3), будет следующим: обе стороны вводят в бой все свои силы и продолжают сражаться до тех пор, пока одна из сторон не прекратит борьбу (будучи, возможно, полностью уничтоженной). С другой стороны, согласно заключению (3′) каждая сторона вводит в бой только одну боевую единицу. Когда эта боевая единица уничтожается, она заменяется другой, и так продолжается до тех пор, пока одна из сторон не покинет поля боя. Тогда введение любой новой характеристики, такой, например, как стоимость передислокации или выгода временного обладания полем боя, приведет к возможности еще более общего использования знакомого принципа, определяемого заключением (3).

ЧАСТЬ III. ИГРЫ НА ПЛАНИРОВАНИЕ

В этой части мы рассмотрим модель изолированной тактической проблемы распределения огня по вражеским целям нескольких типов. Процесс уничтожения описывается функциями, введенными в части I, а модель игры имеет конструкцию, весьма сходную с последней моделью, рассмотренной в части II. Такая модель может быть решена сравнительно простыми методами благодаря некоторым интересным математическим причинам, которые будут в дальнейшем рассмотрены более подробно. Третья часть заканчивается изучением «расширенных игр на планирование». При этом было найдено, что объединение решений по выделению сил с решениями по распределению огня встречает серьезные трудности, которые нам не удалось преодолеть.

III.1. Игры на планирование огня

Формально игра на планирование огня может быть описана следующей платежной функцией:

$$H(P,\ \Pi) = \sum_i \text{Вер}(d_i)\, W(d_i) + \sum_j \text{Вер}(\delta_j)\, W(\delta_j). \qquad (1)$$

Стратегические переменные P и Π представляют собой распределения огня нескольких типов оружия по нескольким типам целей противника. В уравнении (1) мы не дали явного указания о силах, принимающих участие в игре. Имеется m типов боевых единиц, сражающихся с n типами боевых единиц противника. Имеется r_i своих боевых единиц i-го типа ($i=1, 2, \ldots, m$) и ρ_j боевых единиц противника j-го типа. Тогда P есть матрица порядка $m \times n$, состоящая из действительных чисел p_{ij}, подчиненных условиям

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ для всех } i \text{ и } j; \qquad (2)$$
$$\sum_j p_{ij} = 1 \text{ для любого } i.$$

Под p_{ij} мы понимаем ту часть общей огневой мощи своих боевых единиц i-го типа, которая направлена против единиц противника j-го типа. Аналогично у противника имеется стратегия распределения огня $\Pi = (\pi_{ji})$, подчиненная таким же ограничениям. H является для нас ценой игры. Поэтому стратегия P выбирается так, чтобы максимизировать $H(P, \Pi)$, а стретегия Π — так, чтобы минимизировать ее.

Символ d_i относится к тому возможному случаю, когда первой уничтоженной боевой единицей будет наша единица типа i. Предполагается, что результирующая ситуация уже была оценена и имеет цену $W(d_i)$. Таким образом, мы неявно предполагаем, что, во-первых, мы перечислили все возможные варианты развертывания войск и, в частности, указали, что силы не будут ни вводиться, ни выводиться с поля боя до тех пор, пока не произойдет уничтожение одной боевой единицы; во-вторых, уничтожение боевой единицы сразу же становится известным обоим командирам или, по крайней мере, результирующая цена не зависит от стратегий P и Π, как если бы смена стратегий происходила с запозданием. Отметим, что мы уже сделали соответствующие предположения в разделе II.3. Первое предположение было подтверждено результатами, а второе предположение обосновывается необходимостью упрощения.

Замена латинских букв греческими при сохранении индексов превращает d_i в δ_j, что соответствует такому событию, когда первой уничтоженной боевой единицей будет единица противника j-го типа. Вероятности Вер (d_i) зависят от стратегий P и Π согласно формуле (I.4.2), которую мы перепишем в следующем виде:

$$\text{Вер}(d_i) = \frac{a_i r_i + \sum_j \rho_j \beta_{ji} \pi_{ji}}{\sum_k a_k r_k + \sum_j \alpha_j \rho_j + \sum_{j,k} (r_k b_{kj} p_{kj} + \rho_j \beta_{jk} \pi_{jk})}. \qquad (3)$$

Уравнением (1), парой уравнений (2) и парой уравнений (3) мы закончили описание игры на планирование огня. Принятый нами характер уничтожения достаточно подробно описан коэффициентами (I.4.1) и является по существу простейшей из всех форм, претендующих на описание действительного боя. Правило ходов в игре также является простейшим из всех имеющихся в нашем распоряжении. Формально у нас имеется только один ход. В действительности, однако, мы предполагаем, что какой-нибудь ход, т. е. смена стратегии распределения огня, может быть сделан немедленно, как только возникнет в этом необходимость. Наконец, мы ограничили действия командиров принятием решения только по распределению огня между целями.

Решение настоящей проблемы оказывается замечательно простым по причинам, которые теряют свою силу как только мы снимем какое-нибудь из наших упрощающих предположений или даже в том случае, когда модель будет слегка изменена без увеличения ее сложности. Поэтому мы желаем здесь подчеркнуть, что проблема, перед которой мы поставлены, заключается в определении оптимальных стратегий P и Π, изменяющихся во времени и в зависимости от наблюдаемой стратегии противника. Подобные проблемы весьма сложны, однако в нашей модели мы найдем оптимальные постоянные стратегии.

III.2. Вычислительные методы

Перед решением игры на планирование огня мы рассмотрим более простую проблему *дробно-линейного программирования*, т. е. задачу максимизации дробно-линейной функции при линейных ограничениях. Задача состоит в том, что задан выпуклый многогранник X в действительном n-мерном пространстве и функция

$$f(x) = \frac{tx + h}{ux + k} \tag{1}$$

и требуется найти $\max\limits_{x \in X} f(x)$. В настоящее время известно много эффективных методов решения этой задачи для линейной функции f; это не что иное как задача *линейного программирования*. Мы опишем метод дробно-линейного программирования, который основан на решении проблем линейного программирования. Сначала, однако, мы опишем задачу, используя геометрические представления.

Простота функции (1) заключается в том, что она представляет по существу двухмерное преобразование, имеющее следующий смысл: знаменатель обращается в нуль на некоторой гиперплоскости D, а числитель — на некоторой гиперплоскости N. Обычно (случай 1) гиперплоскости D и N не параллельны и пересекаются в $(n—2)$-мерном подпространстве L данного n-мерного пространства E. Функция f не определена на подпространстве L; она постоянна на любом подпространстве, параллельном L. Таким образом, мы можем спроектировать E в пределах L на некоторую плоскость, в которой D и N становятся линиями, пересекающимися в точке L. Функция f постоянна на линиях, проходящих в пространстве L; на любой окружности вокруг L функция f проходит монотонно через все действительные значения, совершая дважды скачки от $+\infty$ до $-\infty$ при каждом пересечении гиперплоскости D. Наше описание можно пояснить следующим образом: функция f есть одномерное преобразование, имеющее сингулярности, которые проявляются как бесконечности (на D) и как существенные сингулярности (на L), но мы можем применить сначала двухмерное преобразование без сингулярностей. Все затруднения имеют место на плоскости, но даже там ситуация очень простая; читатель, знакомый с однородными координатами проективной линии, может распознать их здесь.

Возвращаясь к многограннику X, трансформированному с помощью упомянутой выше проекции в многоугольник, мы видим, что он не может пересечься с гиперплоскостью D, если должен существовать максимум. Поэтому он должен находиться по одну сторону от D. Здесь f монотонно возрастает по мере перемещения x в направлении, которое мы можем назвать направлением часовой стрелки; мы желаем найти самый удаленный, при обходе по часовой стрелке, луч, проходящий через L, который касается многогранника X. Для того чтобы такой луч существовал, необходимо наложить дополнительные условия на X, которых мы не будем касаться в деталях; достаточно, если X ограничен.

Запишем задачу в следующем виде:

$$\max_{x \in X} \frac{tx+h}{ux+k} = V. \tag{2}$$

Знаменатель имеет неизменный знак, который мы можем считать положительным. Тогда при умножении знак неравенства сохраняется, и мы имеем

$$\max_{x \in X} (t - Vu)\, x = Vk - h, \tag{3}$$

т. е. луч $f(x) = V$, касающийся многогранника X в наиболее удаленной (по часовой стрелке) точке, является одновременно самым удаленным в семействе всех линий, параллельных ему и касающихся еще многогранника X. К несчастью, мы ничего не знаем относительно этого параллельного семейства. Мы можем, однако, аппроксимировать его следующим способом.

Для того чтобы найти $\max\limits_{x \in X} \dfrac{tx+h}{ux+k}$ на ограниченном многограннике X, надо

1) выбрать x^1 на X и по индукции

2) вычислить $W^n = \dfrac{tx^n + h}{ux^n + k}$;

3) решить уравнение $\max\limits_{x \in X} (t - W^n u)\, x = W^n k - h + d$.

В пункте *3* $d \geqslant 0$. Если $d = 0$, тогда $W^n = V$ и x^n оптимален. В противном случае

4) полагаем, что в пункте *3* оптимальным будет x^{n+1} и повторяем пункт *2* программы.

Величины W_i монотонно возрастают до V, и итерационный процесс заканчивается, т. е. $W^n = V$ для некоторого значения n.

Формальное доказательство заключается в следующем. Если в пункте *3* $d < 0$, то $W^n > V$, что невозможно по определению W^n. Величины W^n монотонно возрастают, поскольку мы постепенно приближаемся к крайнему лучу $f(x) = V$. Итерационный процесс имеет конец, потому что решением любой линейной задачи, подобной сформулированной в пункте *3*, является одна из вершин многогранника X, а их имеется ограниченное количество.

Мы опустили случай, когда D и N параллельны. В этом случае в пункте 1 $t=au$ для некоторой постоянной a. Метод, описанный выше, здесь также применим, и $W^2=V$. С геометрической точки зрения в этом случае нет сингулярностей, и f есть проективное преобразование на проективную линию. Читатель, который заинтересуется этим вопросом, может проверить это самостоятельно. Мы не приводим также описания аналогичного метода для некоторых минимаксных проблем более общих, чем игры на планирование огня, а именно

$$\max_{(a,\, b) \in X_1} \min_{(c,\, d) \in X_2} \frac{a+c}{b+d}, \tag{4}$$

где (a, b) и (c, d) суть точки на плоскости. Игры на планирование огня имеют именно такую форму: в них a, b, c и d являются линейными функциями нескольких действительных переменных, которые, к счастью, подчинены очень удобным ограничениям (III.1.2).

Запишем выражения $F=\sum\limits_i f_i$ и $\Phi=\sum\limits_j \varphi_j$. На основании (I.4.1), (III.1.1) и (III.1.3) мы получаем

$$H(P, \Pi)=\frac{\sum\limits_j f_j(P)\, W(\delta_j)+\sum\limits_i \varphi_i(\Pi)\, W(d_i)}{F(P)+\Phi(\Pi)}. \tag{5}$$

Определим *маргинальные значения** боевых единиц с помощью истинной цены $V=\max\limits_P \min\limits_\pi H(P, \Pi)$ как $s_i=V-W(d_i)$, $\sigma_j=W(\delta_j)-V$. Заметим, что мы еще не знаем, действительно ли $\min\limits_\Pi \max\limits_P H(P, \Pi)=V$ или нет. Но из уравнения (5) и из определений мы имеем

$$\max_P \min_\Pi \left(\sum_j f_j(P)\, \sigma_j-\sum_i \varphi_i(\Pi)\, s_i\right)=0. \tag{6}$$

Записывая H в виде $\dfrac{VF(P)+a(P)+V\Phi(\Pi)-b(\Pi)}{F(P)+\Phi(\Pi)}$, мы видим, что $\max\limits_P a(P)=\max\limits_\Pi b(\Pi)$ и что V есть истинное ми-

* Маргинальное значение какой-либо величины — скорость изменения этой величины вблизи ее оптимального значения. (*Прим. перев.*)

нимаксное значение. Точнее говоря, согласно (6) стратегия P оптимальна тогда и только тогда, когда она максимизирует линейную функцию $\sum_j f_j(P)\sigma_j$. Аналогичные соображения справедливы и в отношении П. Принимая во внимание ограничения (III.1.2), мы получаем

$$\sum_j \alpha_j\rho_j\sigma_j + \sum_i r_i \max_j b_{ij}\sigma_j = \sum_i a_i r_i s_i + \sum_j \rho_j \max_i \beta_{ji} s_i, \qquad (6')$$

и, следовательно, оптимальные распределения огня являются чистыми стратегиями. Каждая боевая единица типа i выбирает себе ту единицу противника типа j, которая максимизирует $b_{ij}\sigma_j$, и сосредотачивает весь свой огонь на ней.

По-прежнему вычисления основаны на аппроксимации истинного значения V и состоят в решении линейных задач, одна из которых «касательна» к истинной задаче в точке решения. Для некоторого выбранного значения W решают уравнение (6′) (это выполняется довольно быстро, так как решение состоит из некоторых арифметических действий и из выбора максимумов из нескольких строк чисел) и обычно приходят к неравенству вместо равенства (6′). Если равенство выполняется, то W есть истинное значение цены. Если левая часть больше, это означает, что W взято слишком малым. В этом случае стратегии распределения огня, которые удовлетворяют уравнению (6′) для этого значения W, будучи подставлены в выражение для $H(P,\Pi)$, приведут к некоторому бо́льшему пробному значению цены W'. Если теперь оперировать с W', то итерационный процесс должен неизбежно закончиться; однако мы не располагаем достаточным опытом числовых расчетов или пониманием вычислительного процесса, чтобы утверждать, что этот метод является наилучшим. В конце концов, теперь, когда мы показали существование чистых оптимальных стратегий распределения огня, проверка всех пар чистых стратегий является конечным методом. Тем не менее, метод, предложенный выше, обладает преимуществом, состоящим в монотонном приближении к решению.

Заметим, что минимаксную теорему для $H(P, \Pi)$ можно вывести из более общей минимаксной теоремы для билинейных дробных функций [14]. Форма $\frac{a+c}{b+d}$

позволяет нам найти решение с помощью решения последовательности задач линейного программирования. Здесь мы имеем дело с частным случаем ограничений (III.1.2), который сводит эти линейные задачи к обычным. Теперь можно отметить следующее: помимо того, что наша модель во многих отношениях не может дать точного описания реального боя, мы считаем возможным такое решение, при котором сорок военных кораблей обрушивают свой огонь на одну шлюпку для того, чтобы потопить ее за какую-нибудь долю секунды. Эта несуразица может быть несколько скорректирована введением дополнительных ограничений. Однако за это придется уплатить введением задач линейного программирования, значительно более сложных, чем задача выбора максимального значения из ряда чисел.

III.3. Расширенные игры на планирование

Проблемы планирования огня можно объединить с задачами распределения сил в играх типа «хотспот», рассмотренными в части II. При этом должны быть приняты предположения, аналогичные предположениям модели, приведенной в разделе II.3. Если же мы попытаемся применять одну из двух первых моделей, то мы столкнемся с новыми трудностями. Необходимо решить, когда могут производиться изменения в распределении огня. Здесь имеются две альтернативы: во-первых, изменять распределение огня, когда теряется одна боевая единица, и, во-вторых, изменять распределение огня одновременно с изменением распределения сил. Если мы выберем первую альтернативу, то мы должны исследовать процесс уничтожения более подробно, чем мы это делали до сих пор (а в первой части отмечалось, что мы не в состоянии по-настоящему исследовать этот вопрос). Если же мы выбираем вторую альтернативу, то мы сталкиваемся с игрой более сложного типа, чем мы рассматривали раньше. В любом случае вычислительные трудности превышают возможности современных вычислительных машин.

Поэтому мы обращаемся к правилу ходов, рассмотренному в разделе II.3; изменения в распределении сил могут производиться только тогда, когда уничтожается одна из боевых единиц. Мы не будем описывать модель в деталях; командиры определяют распределение сил, вводят эти силы в бой и решают задачу планирования огня применительно к выделенным силам. Существование решения и общие очертания вычислительного метода довольно очевидны; следует начинать с сил, состоящих из одной боевой единицы, и произвести расчеты сложной последовательности минимаксных задач в обратном направлении. Структура таких составных игр и доказательство существования решения разработаны в весьма общем виде в работе [6].

Даже при использовании модели, которую мы выбрали в качестве самой легкой для решения, возникают серьезные возражения. Во-первых, правило, по которому стратегические решения могут меняться лишь при потере одной боевой единицы, выглядит мало обоснованным, если только нам не посчастливится получить такую модель, при которой командование ни одной из сторон не может выиграть, игнорируя это правило. С другой стороны, эти правила могут оказаться недостаточно строгими, если они ведут к бою, в котором участвуют сотни боевых единиц и стратегии меняются по нескольку раз в минуту. Нам не удалось выяснить, применимо ли второе возражение к данным моделям. Но бой четырех боевых единиц показывает, что первое возражение может быть применено в нашем случае.

Рассмотрим пример и покажем, каковы должны быть чистые стратегии, входящие в оптимальный план игры. Интересующийся этим вопросом читатель может произвести вычисления самостоятельно. Матрицы огневой мощи игры 2×2 имеют вид:

$$(b_{ij})=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix};\ (\beta_{ji})=\begin{pmatrix}1 & 15\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Все a_i и α_i равны нулю. Окончательная цена игры равна 1, если противник уничтожен или если он оставляет поле боя. В противном случае она равна 0. Значения цены игры $W(m_1, m_2; \mu_1, \mu_2)$, когда имеется m_i своих единиц i-го типа и μ_j единиц противника j-го типа, равны

$$W(1,\ 0;\ 1,\ 0)=0{,}8333$$
$$W(1,\ 0;\ 0,\ 1)=0{,}5000$$
$$W(0,\ 1;\ 1,\ 0)=0{,}0625$$

$$W(0,\ 1;\ 0,\ 1)=0{,}6667$$
$$W(1,\ 0;\ 1,\ 1)=0{,}3571$$
$$W(0,\ 1;\ 1,\ 1)=0{,}0392$$
$$W(1,\ 1;\ 1,\ 0)=0{,}8661$$
$$W(1,\ 1;\ 0,\ 1)=0{,}8750.$$

Все имеющиеся боевые единицы вводятся в бой в этих восьми случаях. В первых четырех случаях выбор целей не производится; в следующих двух случаях целью является первая единица противника; в последних двух случаях предпочтительными целями являются первая и вторая своя единица, соответственно. Обратите внимание на то, что в случае (1, 1; 1, 0) маргинальное значение цены первой своей единицы более чем в 15 раз превышает маргинальное значение цены второй своей единицы.

Переходя к случаю (1, 1; 1, 1), мы видим, что здесь должны быть решены пять нетривиальных игр на планирование огня. В любом случае, когда какая-нибудь единица должна сделать выбор целей, она должна его производить в соответствии со стратегиями

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad \text{II}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Игровая матрица, в которой перечислены стратегии распределения сил и в которой строки относятся к своим силам, имеет следующий вид:

$$\begin{array}{c}\\ (1,\ 1)\\ (1,\ 0)\\ (0,\ 1)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}(1,\ 1) & (0,\ 1) & (1,\ 0)\end{array}\\ \begin{pmatrix}0{,}5001 & 0{,}6594 & 0{,}5051\\ 0{,}6362 & 0{,}4527 & 0{,}7357\\ 0{,}4137 & 0{,}6964 & 0{,}3895\end{pmatrix}\end{array}.$$

В этой игре седловой точки нет. Минимакс равен 0,6362, а максимин — 0,5001. В смешанной стратегии принимают участие чистые стратегии, входящие в подматрицу 2×2 в верхнем левом углу. Цена игры равна 0,5633.

Это означает, что каковы бы ни были распределения сил, произведенные командирами, как только каждый из них узнает о силах противника, он решает, выиграет ли он, оставляя одну единицу в резерве или используя одну единицу из резерва. При этих условиях будет существовать стабильность физической ситуации. Но для того чтобы определить эти условия, мы должны полнее описать условия боя. При этом решение проблемы соответственно усложнится.

ЧАСТЬ IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАЧЕСТВА ОРУЖИЯ

В этой части мы, руководствуясь уже рассмотренными моделями, хотим произвести оценку качества (ценности) оружия. Для случая, когда определенному типу оружия противостоит определенный тип оружия противника, имеются, как указывалось выше, две простые формулы, пригодные при $b\beta \geqslant a\alpha$ и $b\beta \leqslant a\alpha$, соответственно. При $b\beta = a\alpha$ формулы совпадают. Обе формулы дают наилучшие результаты в тех случаях, когда силы обеих сторон примерно равноценны. Таким образом, мы видим, что общая проблема оценки оружия достаточно сложна, даже если рассматривается только по одному типу оружия с каждой стороны. Когда необходимо сравнить несколько типов оружия, следует начать с их попарного сравнения. Мы нашли оценки в случае смешанной проблемы, которая является достаточно полным обобщением «главного» случая, когда $b\beta > a\alpha$, по-прежнему при условии, что силы примерно равны. Однако мы нашли их в том смысле, что доказали их существование и, за исключением некоторых краевых случаев, единственность. Достаточно эффективный вычислительный метод еще предстоит найти.

IV. 1. Однородный случай

Вспомним формулу (I.3.2):

$$\rho = \frac{\alpha - a + \sqrt{(\alpha - a)^2 + 4b\beta}}{2\beta} r.$$

Это — уравнение прямой линии, являющейся решением уравнений Ланчестера. При этом соотношение качеств (цен) своих и вражеских единиц равно

$$\frac{\alpha - a + \sqrt{(\alpha - a)^2 + 4b\beta}}{2\beta}.$$

Пусть V и W будут значениями цен в этом соотношении. Тогда мы можем сказать, что если в ланчестеровском процессе уничтожения $rV > \rho W$, то побеждают наши войска, в противном случае побеждает противник, и в случае равенства бой заканчивается вничью. Достижение победы зависит от сил нелинейно, а именно в соответствии с обобщенным законом n^2. Поэтому приписывание боевым единицам линейных однородных значений является неполным описанием ситуации. Тем не менее, в целях экономии мы интересуемся в первую очередь выполнением оценок с помощью простых формул. Вышеприведенная формула по всей видимости соответствует модели Ланчестера.

Формула (I.3.2) получилась при решении уравнения условия „стабильности" $\frac{\dot{r}}{\dot{\rho}} = \frac{r}{\rho}$. Обратите внимание, что это же соотношение получается из уравнений

$$\lambda V = bW - aV; \qquad (1)$$
$$\lambda W = \beta V - \alpha W.$$

В этих уравнениях (1) мы требуем, чтобы значение цены V одной своей боевой единицы было пропорционально тому ущербу, который эта единица может нанести противнику. За время dt она нанесет противнику ущерб $bWdt$, но одновременно сама понесет потери $aVdt$. Выясняется также, что $\lambda > 0$ тогда и только тогда, когда $b\beta > a\alpha$. Действительно, если $b\beta < a\alpha$, то маргинальное значение цены боевой единицы, вводимой дополнительно в бой, отрицательно (если мы предполагаем, что эта единица может находиться в резерве и может быть введена в бой в случае необходимости). Этот результат легко получить из уравнений Ланчестера, но мы желаем использовать соотношения (1) и (I.3.2) в других моделях и в частности в модели раздела II.3.

Если $b\beta \geqslant a\alpha$, то оптимальные стратегии нам известны из раздела II.3. Эти стратегии состоят в посылке всех имеющихся сил на поле боя. При этом следует подчеркнуть, что ограничения в отношении передвижения боевых единиц, вносящие трудности в других случаях, не оказывают в данном случае никакого влияния. Применяя оптимальные стратегии, мы получаем полностью определенный стохастический процесс. Этот процесс был исследован Ричардом Брауном [2] и из результатов его работы, если считать V и W заданными уравнениями (1), легко получается следующая теорема.

Теорема 1 *(Брауна). При возрастании r и ρ, если $rV > (1+\varepsilon)\rho W$ для некоторого значения $\varepsilon > 0$, мы асимптотически приближаемся к победе с вероятностью 1; в противном случае выигрывает противник с вероятностью 1.*

Среди прочих результатов Браун тщательно исследовал асимптотическое поведение вблизи критического отношения, однако недостаточное приближение к действительности не оправдывает изучения этих результатов. Больший интерес представляет вопрос о том, насколько точно критическое отношение описывает преимущества в случае малых сил, т. е. если $rV > \rho W$, то больше ли вероятность победы, чем вероятность поражения? Не всегда; тем не менее, в результате вычисления нескольких сотен примеров мы смогли сделать вывод, что модель оказалась достаточно точной.

Результаты Брауна применимы в случае, когда $b\beta > a\alpha$. Однако наши исследования показали, что если командованию предоставлена некоторая свобода в отношении перемещения сил в резерв и из резерва, то стохастический процесс, описанный Брауном, не имеет места. В этом случае мы должны иметь последовательность дуэлей между одиночными боевыми единицами обеих сторон. Дэвид Блекуэл указал, что это есть последовательность независимых событий с идентичными распределениями вероятностей. Эту же теорему можно легко вывести на основе усиленного закона больших чисел [5, стр. 208]; однако при этом критическое отношение получается другим.

Оно по-прежнему определяется условием $\frac{\dot{r}}{\dot{\rho}} = \frac{r}{\rho}$ и равно $\frac{\alpha + b}{a + \beta}$. Подытоживая вышесказанное, получаем

Определение. Если $b\beta \geqslant a\alpha$, то отношение цены V одной своей боевой единицы к цене W одной боевой единицы противника равно $\frac{V}{W} = \frac{\alpha - a + \sqrt{(\alpha - a)^2 + 4b\beta}}{2\beta}$; если же $b\beta \leqslant a\alpha$, то $\frac{V}{W} = \frac{\alpha + b}{a + \beta}$.

***Теорема 2** (Блекуэла). В последовательности дуэлей при возрастании r и ρ, если $rV > (1+\varepsilon)\rho W$ для некоторого значения $\varepsilon > 0$, мы асимптотически приближаемся к победе с вероятностью 1. В противном случае выигрывает противник с вероятностью 1.*

На основании теорем Брауна и Блекуэла и факта, доказанного в разделе II.3, мы можем сделать вывод о том, что в случае $b\beta = a\alpha$ все ненулевые назначения эквивалентны, и обе формулы в этом случае должны совпадать. Действительно, легко видеть, что обе формулы сводятся к выражению $\frac{V}{W} = \frac{b}{a}$.

Для малых сил в случае Блекуэла мы не располагаем достаточно большим расчетным материалом. Имеется предположение, что эта формула должна определять вероятного победителя по крайней мере с такой же точностью, как формула Брауна в случае Брауна.

В обоих случаях формулы находятся в результате решения уравнения $\frac{r}{\rho} = \frac{r}{\rho}$. Мы не можем распространить эти результаты на случай, когда m типов оружия противостоят n типам оружия, и получить значения цен. Мы можем получить критические линии, а хотим получить критическую гиперповерхность. Мы можем и должны обобщить уравнения (1), которые дают правильные результаты в случае Брауна. Доказательство такого обобщения несколько расплывчато, и мы не можем даже установить область, в которой оно справедливо. У нас нет асимптотических теорем для неоднородных сил, так же как нет полного описания интегральных кривых для обобщенных уравнений Ланчестера. Таким образом, основным доводом в поддержку такого обобщения является внешнее правдоподобие уравнений (1).

Отметим три возможных возражения против наших доводов. Каждый из доводов вместе с нашим ответом может быть легко трансформирован для случая неоднородных сил.

Ценность боевой единицы, принимающей участие в сражении, может быть мысленно разбита на две части. Существует непосредственная ценность единицы, характеризуемая ее огневой мощью в применении к задаче уничтожения противника. Существует также ее ценность выживания, которая пригодна для нашей модели независимо от того, введена ли боевая единица в бой или находится в резерве. Если $a\alpha > b\beta$, то между этими понятиями существует небольшое отличие. «Непосредственная» ценность отрицательна, и дополнительные боевые единицы должны содержаться в резерве. Уравнения (1), по всей видимости, характеризуют только эту часть ценности единицы. С другой стороны, если $a\alpha > b\beta$, и нам позволено проводить бой как последовательность дуэлей, то «непосредственная» ценность, очевидно, исчезает, и выражение $\frac{\alpha + b}{a + \beta}$ в точности равно ценности «выживания». Эти соображения подсказывают, что при дальнейших исследованиях нужно рассмотреть другие особенности оценки в случае $b\beta > a\alpha$, т. е. именно в том основном случае, который мы желаем обобщить. Авторы не знают, как решить эту задачу.

Второе критическое замечание состоит в том, что, хотя мы ведем анализ, не устанавливая точных конечных состояний, т. е. без оценки условий, в которых может закончиться бой, имеется довольно общее (хотя и несколько туманное) свойство, которым должны обладать эти окончательные условия. Факту выигрыша поля боя должна быть приписана существенная ценность. В противном случае более слабая сторона просто откажется вести бой. Это означает, что маргинальные значения ценности боевых единиц максимальны в случае примерного равенства сил, так как добавление одной боевой единицы в этом случае означает существенное увеличение вероятности окончательной победы. Наоборот, если добавить одну единицу более слабой стороне, то это просто уменьшит ожидаемое значение сил победителя в конце боя и увеличит вероятность победы более слабой стороны всего лишь, например, с 0,001 до 0,002. Необходимо отметить, что, во-первых, замечание об отказе от боя более слабой стороны может быть доказано в виде теоремы при разумных предпосылках; во-вторых, замечание о том, что маргинальные значения максимальны при приблизительном равенстве сил, вероятно, может быть также доказано, но мы приводим его на основе числовых расчетов. Возвращаясь к нашим рассуждениям, можно сделать вывод о том, что в случае одинаковых сил ценности единиц сильно зависят от окончательных условий, т. е. от фактора, который мы до сих пор игнорировали. Этот случай является не просто важным частным случаем, но и тем случаем, которому уделялось много внимания в наших рассуждениях (прямолинейная интегральная кривая теоремы Брауна и Блекуэла).

Нашим ответом на это критическое замечание будет, во-первых, то, что оно ограничивает применимость наших формул. Нельзя ожидать, чтобы формулы давали точную оценку маргинальных значений независимо от того, одинаковы силы противников или нет. От них можно ожидать только оценки средних значений. Во-вторых, в нашем распоряжении имеется хорошо известное оправдание: в возражении не говорится о том, что наше отношение слишком велико или слишком мало; поэтому, если конечные условия примерно симметричны, то мы можем с известным оптимизмом пользоваться предлагаемыми формулами, во всяком случае до тех пор, пока не будут предложены лучшие формулы.

Читателю предоставляется возможность самому взвесить как возражение, так и наш ответ. Отметим два возможных источника асимметрии конечных условий: высокая стоимость или трудность замены потерянного оружия и стоимость человеческих жизней могут быть различными для обеих сторон.

Третье критическое замечание касается деталей и имеет меньшее значение, но и оно может оказать нам пользу. В уравнениях (1) если $a=\alpha$, то их общее значение не играет никакой роли, так как хотя λ зависит от a, V и W при этом остаются неизменными, потому что $\lambda+a$ остается постоянной величиной. Если, однако, $b=4$, $\beta=1$, $a=\alpha=0$, то одна наша единица обладает четырехкратным преимуществом над единицей противника. Если же $a=\alpha=2$, то это преимущество уменьшится до двухкратного. Совместимо ли это? Ответ заключается в том, что наши линейные формулы не дают оценки превосходства, которое даже приблизительно не линейно. Назначение наших формул состоит в оценке численного отношения сил, необходимого для преодоления неблагоприятного соотношения в огневой мощи. Здесь мы можем аппроксимировать кривую линию прямой, касательной к ней в критической точке.

Возвратимся к нашему примеру для случая, когда отношение $\frac{\alpha - a + \sqrt{(\alpha - a)^2 + 4b\beta}}{2\beta}$ равно двум. При этом две вражеских единицы примерно эквивалентны одной нашей единице. Действительно, в первом случае ($b=4$, $\beta=1$, $a=\alpha=0$, $r=1$, $\rho=2$) шансы на победу равны 8 против 7 в нашу пользу, а во втором случае — 11 против 10 в пользу противника. Если продолжать увеличивать a и α при сохранении их равенства, то мы будем иметь случай $a\alpha > b\beta$ и должны применять другую формулу. Если $a = \alpha = 5$, то эта формула говорит нам, что две наши единицы эквивалентны трем вражеским единицам. Вероятность победы в этом случае равна 0,4752. Эта цифра получена в результате беспристрастного выбора из проведенных нами расчетов. Поэтому, видимо, эти формулы будут столь же точными, как в трех приведенных примерах. Точность модели в отношении представления боя является совсем другим вопросом.

IV.2. Уравнения ценности боевых единиц

Мы предлагаем для оценки ценности боевых единиц пользоваться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}(\lambda + a_i) V_i &= \max_j b_{ij} W_j,\\ (\lambda + \alpha_j) W_j &= \max_i \beta_{ji} V_i.\end{aligned} \tag{1}$$

Согласно нашему несколько вольному описанию, сделанному ранее, наш метод представляет собой аппроксимацию кривой линии прямой линией. Но, пожалуй, точнее было бы определить его как аппроксимацию кривой линии фунтом масла, так как между стохастическим процессом и системой уравнений, такой, как система (1), существует весьма слабая формальная аналогия. Мы можем иллюстрировать это на примере одной стохастической проблемы максимизации, весьма тесно связанной с системой (1).

Прежде всего, обратим внимание на одну худшую альтернативу. Мы уже указывали ранее на различие между «непосредственной» ценностью боевой единицы, определяемой применением ее огневой мощи в период перед первым поражением, и остаточной ценностью, которую мы назвали ценностью «выживания». Непосредственную ценность можно определить точно посредством сравнения с другим возможным процессом, при котором рассматриваемая боевая единица не может использоваться до тех пор, пока не произойдет потери боевой единицы. Непосредственная ценность может быть отрицательной, и в любом случае она должна быть много меньше ценности выживания для большого числа боевых единиц. Тем не менее, как мы уже говорили, наши уравнения, по всей видимости, дают что-то похожее на непосредственную ценность. Поэтому можно предполагать, что модель, напоминающая модель части III статьи, но для которой система (1) совершенно точно определяет ценность, будет включать некоторую схему для усиления непосредственной ценности. Во всяком случае модель, приводимая нами ниже, обладает этим свойством усиления посредством повторения периода до первой потери боевой единицы в течение неопределенного времени.

Пусть нам заданы m единиц оружия и n целей. Каждая единица оружия должна выбрать себе цель и стрелять по ней до тех пор, пока она не будет разрушена или пока посредник не остановит игру. Попадание в j-ую цель приносит W_j очков, но не приводит к ее уничтожению. Посредник допускает, чтобы партия игры продолжалась в течение времени t или более с вероятностью e^{-kt}. За время dt, если i-ая единица оружия стреляет по j-ой цели, вероятность ее уничтожения равна $a_i dt + o(dt)$, а вероятность зарегистрировать попадание $b_{ij} dt + o(dt)$. Тогда легко понять, что i-ая единица оружия должна выбирать себе цель j так, чтобы максимизировать $b_{ij} W_j$; при этом общий ожидаемый эффект будет равен $\sum\limits_i \frac{1}{k + a_i} \max\limits_j b_{ij} W_j$.

Следовательно, цена игры равна сумме ценностей V_i боевых единиц, где $(k + a_i) V_i = \max\limits_j b_{ij} W_j$.

Таким образом, мы выставили все известные нам аргументы в защиту предлагаемой оценки с указанием условий, ограничивающих применимость такой оценки. Мы ожидаем, что она будет применима в некотором диапазоне параметров, охватывающем диапазон $b\beta \geqslant a\alpha$.

Может быть, она остается в силе и тогда, когда все боевые единицы введены в бой; при $\lambda<0$ это почти наверняка не является наилучшей стратегией. В примере, приведенном в разделе III.3, $\lambda=\sqrt{15}-1>0$. Значения, полученные с помощью системы (1), составляют 6 к 5,16 в пользу своих сил. Если, однако, все силы брошены в бой, то соотношение сил будет почти равным. Тем не менее, имеются основания полагать, что обычно наилучшей стратегией является введение в бой всех наличных сил. К тому же часто не удается сохранить резерв в безопасности. Поэтому наша оценка должна с достаточной для большинства случаев точностью отвечать на вопросы: имеется ли превосходство своих сил над силами противника и какова относительная ценность различных составных частей или проектируемых составных частей своих сил.

Остается проблема решения системы уравнений (1), представляющая значительные трудности. Объединяя уравнения, мы получаем

$$V_i=\frac{1}{\lambda+a_i}\max_j \frac{1}{\lambda+\alpha_j} b_{ij}\max_k \beta_{jk}V_k. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть a_i, b_{ij}, α_j, β_{ji} суть неотрицательные действительные числа, такие, что для любого значения i некоторые $b_{ij}>0$ и для любого значения j некоторые $\beta_{ji}>0$. Тогда существуют неотрицательный ненулевой вектор V и некоторая действительная постоянная λ, такие что удовлетворяется уравнение* (2).

Доказательство. Рассмотрим единичный симплекс S, состоящий из всех V, удовлетворяющих условиям $V_i\geqslant 0$ для любого значения i и $\sum_i V_i=1$. Пусть R будет множеством всех действительных чисел, больших, чем максимум всех $-a_i$ и $-\alpha_j$. Для $V\in S$ и $\lambda\in R$ определим $T(V,\lambda)=V'$, где $V'=\frac{1}{\lambda+a_i}\max_j \frac{1}{\lambda+\alpha_j} b_{ij}\max_k \beta_{jk}V_k$.

Пусть $f(V,\lambda)=\sum_i V'_i$; тогда для фиксированных значений V при $\lambda'>\lambda$ получаем $f(V,\lambda')<f(V,\lambda)$. Мы опускаем доказательство, которое не сложно, но связано с применением

сложной индексации. Неравенство справедливо для любой координаты. При $\lambda \to \infty$, $f(V, \lambda) \to 0$. По мере приближения λ к ее нижнему пределу $f(V, \lambda)$ возрастает до бесконечности. Поэтому существует только одно значение $\lambda = \lambda(V)$, при котором $f(V, \lambda) = 1$, т. е. $T(V, \lambda) \in S$. Мы опускаем стандартное доказательство того, что $\lambda(V)$ есть непрерывная функция от V. Пусть теперь $\Phi(V) = T[V, \lambda(V)]$ есть непрерывное отображение S на себя, и поэтому по теореме Брауера о фиксированной точке существует такое значение V°, при котором $\Phi(V^\circ) = V^\circ$. Но это означает, что V° и $\lambda(V^\circ)$ являются решениями уравнения (2).

Следствие. *Если все b_{ij} и β_{ji} положительны, то положительны и все V_i.*

Доказательство. Пусть некоторое значение V_i, например V_1, положительно. Тогда для любого значения i

$$V_i \geqslant \frac{1}{\lambda + a_i} \frac{1}{\lambda + \alpha_1} b_{i1} \beta_{11} V_1 > 0.$$

Это следствие справедливо только при особом предположении. Рассмотрим случай $a_i = \alpha_j = 0$ для $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $b_{11} = b_{22} = \beta_{11} = 1$, $\beta_{22} = 2$, b_{ij} и β_{ji} равны нулю при $i \neq j$. Можно показать, что наше следствие, точно так же, как и теорема *2* и некоторые дальнейшие выводы, непригодно для этого примера. Действительно, пример относится к двум несвязанным между собой боям, которые не могут иметь одно и то же значение λ. Таким образом, мы сталкиваемся с другим ограничением применимости нашей оценки. Если оптимальные стратегии предписывают разбить бой на ряд отдельных стычек, то, возможно, правильнее рассматривать все составные части по отдельности. Ответ на вопрос о том, как можно скомбинировать результаты, зависит от того, что произойдет после этих отдельных стычек. У нас нет никаких соображений по этому поводу.

На протяжении оставшейся части статьи мы будем предполагать, что все b_{ij} и все β_{ji} положительны. Мы также запишем дополнительные условия, которые мы удовлетворяем, а именно

$$\begin{gathered} \sum_i V_i = 1, \\ V_i > 0 \text{ и } W_j > 0 \text{ для всех } i,\ j, \\ \lambda > -a_i \text{ и } \lambda > -\alpha_j \text{ для всех } i,\ j. \end{gathered} \tag{3}$$

Для заданных значений V и λ решение W является, очевидно, единственным и положительным. Условие $\sum_i V_i = 1$ позволяет нам говорить об единственности V.

***Теорема 2.** В решении уравнений (2) и (3) значение λ единственное.*

Доказательство. Предположим, что (V, λ) и (V', λ') являются решениями. Мы можем положить, что $\lambda' > \lambda$, $V'_1 > V_1 > 0$, а отношение $t_i = \frac{V'_i}{V_i}$ максимально при $t_1 = t$. Докажем противоречивость условия $V'_k \geqslant \theta t V_k$ для некоторых значений k и для $\theta > 1$. Выберем k так, чтобы для некоторого значения j было

$$V'_1 = \frac{1}{\lambda' + a_1} \frac{b_{1j}\beta_{jk}}{\lambda' + \alpha_j} V'_k.$$

Введем определение $\theta = \frac{\lambda' + \alpha_j}{\lambda + \alpha_j} \frac{\lambda' + a_1}{\lambda + a_1}$; так как $\lambda' > \lambda$, а числители и знаменатели этого выражения положительны, то $\theta > 1$. Предположим теперь, что $V'_k < \theta t V_k$; тогда мы приходим к выводу, что

$$(\lambda' + a_1) V'_1 = \frac{b_{1j}\beta_{jk}}{\lambda' + \alpha_j} V'_k < \theta t \frac{b_{1j}\beta_{jk}}{\lambda' + \alpha_j} V_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\theta t}{\lambda' + \alpha_j} (\lambda + \alpha_j)(\lambda + a_1) V_1 = (\lambda' + a_1) t V_1,$$

что противоречит определению t. Следовательно, противоречивость неравенства $V'_k > t V_k$ еще раз доказывает теорему.

Дальше мы отмечаем, что λ удовлетворяет по меньшей мере одному алгебраическому уравнению относительно a, α, b, β. Мы покажем, что если V не единственно, то λ удовлетворяет по меньшей мере двум таким уравнениям, включающим несвязанные множества параметров. Отсюда следует, что V не единственно только тогда, когда параметры удовлетворяют некоторым алгебраическим уравнениям в рациональной области. Но если параметры выбираются случайно, то вероятность того, что они алгебраически связаны, равна нулю.

Кроме того, множество значений параметров, для которых V не единственно, топологически неплотно, так как требуется проверить только конечное число алгебраических уравнений. Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 3. *Решение системы (2) и (3) единственно, за исключением неплотного множества значений параметров, имеющего меру нуль.*

Мы должны рассортировать индексы, но нам достаточно будет проверить свои индексы i, k, ...; пусть k будет *консеквентой* i для некоторого j; при этом

$$V_i = \frac{1}{\lambda + a_i} \frac{b_{ij}\beta_{jk}}{\lambda + \alpha_j} V_k.$$

Тогда в конечном множестве каждый индекс имеет по меньшей мере одну консеквенту. Отсюда следует, что существует некоторый цикл $i_1, \ldots, i_n$, такой, что i_{p+1} является консеквентой i_p для любого значения p и i_1 является консеквентой i_n (возможно, что $n=1$). Освобождаясь от всех V по циклу длиной n, мы приходим к алгебраическому уравнению степени $2n$, удовлетворяемому значениями λ. Теперь на основании формул, использованных при доказательстве теоремы 2, можно сформулировать лемму.

Лемма. *Если (V, λ) и (V', λ') являются решениями уравнения (2), то для любого положительного действительного числа t множество всех индексов i, таких, что $V_i' \geqslant tV$, содержит все консеквенты его элементов, относящихся к V'.*

Можно сказать по-другому: множество всех i, такое, что $V_i > \frac{1}{t} V_i'$, содержит все консеквенты его элементов, относящихся к V. Если V и V' непропорциональны, то t может быть выбран так, чтобы оба эти множества были непустые. Тогда мы имеем два цикла и два независимых алгебраических уравнения, удовлетворяемые с помощью λ. Кроме того, имеется только конечное число уравнений, подлежащих проверке (самая высшая степень равна удвоенному числу индексов). Поэтому теорему 3 можно считать доказанной.

Теорема 4. *Решение уравнения (2) является нижней полунепрерывной функцией параметров.*

Это просто означает, что уравнения непрерывны, т. е. предел решений есть решение предела, что очевидно. Отсюда можно легко вывести следствие.

Следствие. *Решение уравнений (2) и (3) почти повсюду единственно и непрерывно.*

Непрерывность нарушается только на граничных поверхностях, на которых решение обычно неоднозначно. Действительно, мы можем рассматривать эти поверхности как места, где бой разбивается на несвязанные между собой части (мы уже отмечали эту неприятную возможность). Мы опускаем утомительную формализацию. Приводимое ниже утверждение является однозначным, и заинтересованный читатель может продолжить рассуждения теоремы *3* для его доказательства.

Утверждение. *Цены не являются единственными тогда и только тогда, когда бой разбивается на две части так, что никакое оружие в любой из частей не имеет оптимальной цели в другой части боя.*

Подчеркнем, что область, в которой настоящие значения являются несоответствующими, включает не просто сингулярные поверхности, но некоторые неизвестные соседние области.

Доказав существование и единственность (в большинстве случаев) решения уравнений (2) и (3), мы, естественно, желаем узнать, а как же вычислить решение. Аналитические рассуждения теоремы *1* можно продолжить приблизительными вычислительными методами, однако объем работы выходит за всякие пределы разумного. Наилучшим из имеющихся в нашем распоряжении методов является следующий хорошо известный и часто дающий неудовлетворительные результаты метод: задаться некоторыми значениями V_i и одним значением λ, подставить их в правую часть уравнения (2), получить в левой части новые значения, задаться новым значением λ и продолжать эту процедуру до тех пор, пока ошибка не будет мала или пока не остановится вычислительная машина. У нас имеется пример, когда при заданном правильном значении λ, но при плохом выборе значений V, этот метод, оказывается, не дает сходящихся результатов. Однако он обычно дает достаточно хорошие результаты за малое время для небольших количеств типов оружия.

Для важного особого случая, когда все a_i и α_i равны нулю, имеется конечный, но неосуществимый метод, описанный одним из авторов в работе [7]. Прогресс в деле изучения этих оценок может быть облегчен в результате разработки более совершенных вычислительных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Bellman. On an iterative procedure for obtaining the Perron root of a positive matrix. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 6, p. 719—725.
2. R. H. Brown. A stochastic analysis of Lanchester's theory of combat. Operations Research Office Technical Memorandum, ORO-T-323, 1955.
3. L. L. Dines. On a theorem of von Neumann. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1947, vol. 33, p. 329—331.
4. W. Feller. On the theory of stochastic processes. Proceedings of the Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Berkeley, 1949.
5. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, перевод с английского. Изд-во иностранной литературы, 1952.
6. J. R. Isbell. Finitary games. Contributions to the theory of games, vol. III.
7. J. R. Isbell. A stability problem in linear algebra. Ordnance Computer Research Report, 1956, vol. 3, p. 24—26.
8. L. H. Loomis. On a theorem of von Neumann. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1946, vol. 32, p. 213—215.
9. Ф. М. Морз и Дж. Е. Кимбелл. Методы исследования операций, перевод с английского. «Советское радио», 1956.
10. L. H. Shapley. Stochastic games. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1953, vol. 39, p. 1095—1100.
11. R. N. Snow. Contributions to Lanchester attrition theory. Project Rand Report № RA-15078, 1948.
12. C. Tompkins. Probabilistic problems and military evaluation; an example. The George Washington University Logistics Papers, Issue 2, 1950.
13. C. A. Truesdell. An essay toward a unified theory of special functions. Princeton, 1948.
14. J. von Neumann. Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, 1937, vol. 8, p. 73—83; перевод на англ. в Review Economic Studies, vol. 13, 1945—1946, p. 1—9.

РЕШЕНИЕ ИГР «БЛОТТО» В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ

Д. У. Блэкетт *. Бостонский университет

Игры Блотто [1] состоят в том, что два игрока (A и B) противостоящие друг другу на n независимых участках боя (обозначенных цифрами 1, 2, ..., n), должны распределить все свои силы (F и G подразделений соответственно) по этим участкам, причем каждый игрок не знает решения противной стороны. Платежом (т. е. численным значением выигрыша игрока A или потерь игрока B) на i-ом участке боя является функция $P_i(x, y)$, зависящая только от участка боя и от сил, назначенных на этот участок игроками A и B. Платежом всей игры является сумма платежей на отдельных участках боя.

Чистой стратегией для игрока A является распределение его сил по участкам боя. Такое распределение можно представить вектором $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i представляет ту часть сил игрока A, которую он назначил на i-ый участок боя. Для этого вектора должны удовлетворяться следующие условия: $x_i \geqslant 0$ для всех i и $\sum_{i=1}^{n} x_i = F$. Аналогично чистая стратегия игрока B может быть описана вектором $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, причем все $y_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{n} y_i = G$. Если игроки A и B применяют стратегии X и Y, то платеж равен

$$H(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i, y_i).$$

---

* D. W. Blackett. Pure strategy solutions of Blotto games. Naval Research Logistics Quarterly, 1958, vol. 5, p. 107—109.

Частные случаи игр Блотто, рассмотренные здесь, относятся к таким играм, которые могут быть решены в чистых стратегиях. Игра имеет решение в оптимальных чистых стратегиях

$$\overline{X}=(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \quad \text{и} \quad \overline{Y}=(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n),$$

если $H(X, \overline{Y}) \leqslant H(\overline{X}, \overline{Y}) \leqslant H(\overline{X}, Y)$ для всех стратегий X и Y. Другими словами, чистые стратегии $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ являются решением игры, если игрок A, выбирая стратегию $\overline{X}$, обеспечивает себе по крайней мере выигрыш $H(\overline{X}, \overline{Y})$. Одновременно, если игрок B выбрал стратегию $\overline{Y}$, то игрок A не получит более, чем H $(\overline{X}, \overline{Y})$. Таким образом, стратегии $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ являются оптимальными, если $K(X)=$ $=H(X, \overline{Y})$ имеет максимум при $\overline{X}$, а $L(Y)=H(\overline{X}, Y)$ имеет минимум при $\overline{Y}$.

Так как мы будем применять дифференциальное исчисление, предполагается, что функции $P_i(x, y)$ определены и имеют непрерывные вторые частные производные для всех действительных значений x и y $(0<x<F$ и $0<y<G)$. Те стратегии X и Y, для которых $x_i>0$ и $y_i>0$ при $i=1, \ldots, n$, будут называться внутренними стратегиями.

В настоящей статье даны необходимые условия, которые должны удовлетворяться, если внутренние стратегии $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ игры Блотто являются оптимальными. Поэтому буквами $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ будет обозначаться пара оптимальных внутренних стратегий.

Так как $L(Y)$ имеет минимум при $\overline{Y}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i=G$ для всех стратегий Y, то функция

$$Q(y_1, \ldots, y_{n-1})=L\left(y_1, \ldots, y_{n-1}, G-\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

должна иметь минимум, когда $y_1=\overline{y}_1, \ldots, y_{n-1}=\overline{y}_{n-1}$. Для этих значений $y_1, \ldots, y_{n-1}$ первые частные производные функции Q равны нулю. Обозначим буквами L_k и Q_k частные производные от L и Q по k-ой переменной при $Y=\overline{Y}$. Так как $Q_k=L_k-L_n=0$ для $k=1, \ldots, n-1$, то $L_1=L_2=\ldots=L_n$. Обозначим через P_k' значение первой частной производной от $P_k(x, y)$ по y при $x=\overline{x}_k$ и $y=\overline{y}_k$. Так как

$$L(Y)=\sum_{j=1}^{n} P_j(\overline{x}_j, y_j),$$

то $L_k=P_k'$ и $P_1'=\ldots=P_n'=-\beta$, где β есть некоторая постоянная величина. Производная P_k' представляет собой скорость, с которой дополнительные силы игрока B на k-ом участке боя вызвали бы увеличение выигрыша игрока A. Маргинальная полезность* сил игрока B на k-ом участке боя при $X=\overline{X}$ и $Y=\overline{Y}$ равна $-P_k'$. Первым необходимым условием, чтобы $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ были оптимальными стратегиями, является равенство маргинальных полезностей сил игрока B для всех участков боя, когда $X=\overline{X}$ и $Y=\overline{Y}$.

Второе необходимое условие, чтобы $L(Y)$ была минимальной при $\overline{Y}$, касается вторых частных производных функции Q. Пусть Q_{ij} и L_{ij} будут вторыми частными производными Q и L по i-ой и j-ой переменным при $Y=\overline{Y}$. Для соблюдения условия минимума функции при $\overline{Y}$ симметричная матрица порядка $(n-1)\times(n-1)$

$$M=\begin{Vmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1,\,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{n-1,1} & \cdots & Q_{n-1,\,n-1} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} L_{11}+L_{nn} & L_{nn} & \cdots & L_{nn} \\ L_{nn} & L_{22}+L_{nn} & \cdots & L_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{nn} & L_{nn} & \cdots & L_{n-1,n-1}+L_{nn} \end{Vmatrix}$$

* См. сноску на стр. 31.

должна быть положительной полуопределенной. Если через P''_k обозначить вторую производную $P_k(x, y)$ по y при $x=\overline{x}_k$ и $y=\overline{y}_k$, то $L_{kk}=P''_k$, и

$$M=\begin{Vmatrix} P''_1+P''_n & \ldots & P''_n \\ \vdots & & \vdots \\ P''_n & \ldots & P''_{n-1}+P''_n \end{Vmatrix}.$$

Из этого матричного уравнения можно вывести следующее условие.

Для любого числа k значений P''_i симметричная функция, образованная суммированием всех произведений $k-1$ из k чисел, является неотрицательной.

Так, например, для $k=2$

$$P''_i+P''_j\geqslant 0$$

при любом выборе i и j. Отсюда следует, что P''_i может быть отрицательной самое большее для одного из значений $i=1,\ldots,n$. Если $P''_j<0$, то $|P''_j|\leqslant|P''_i|$, $i=1,\ldots,n$.

Неравенство $P''_i\geqslant 0$ означает, что первая производная $P_i(x, y)$ по y уменьшается при $x=\overline{x}_i$, $y=\overline{y}_i$. Другими словами, маргинальная полезность сил игрока B уменьшается, и выигрыши игрока B подчиняются закону уменьшающегося результата при $x=\overline{x}_i$, $y=\overline{y}_i$.

Эти условия совместно с условиями, необходимыми для того, чтобы $K(X)$ имела максимум при $\overline{X}$, дают следующую теорему.

Теорема. *$\overline{X}$ и $\overline{Y}$ являются оптимальными внутренними чистыми стратегиями противников в игре Блотто с платежными функциями, имеющими непрерывные вторые производные.*

Вывод. Если игроки применяют стратегии X и Y, то:

1. Маргинальная полезность сил игрока A (игрока B) одинакова для всех участков боя.

2. Выигрыш игрока A (игрока B) подчиняется закону уменьшающегося результата на всех участках боя, за исключением, возможно, одного участка. Абсолютная скорость изменения маргинальной полезности имеет минимальное значение на этом исключительном участке.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. W. Blackett. Some Blotto games. Naval Research Logistics Quarterly, 1954, vol. 1, p. 55—60.

ТАКТИЧЕСКАЯ ВОЗДУШНАЯ ИГРА

Д. Р. Фулкерсон и С. М. Джонсон *. РЭНД-Корпорейшн, Санта-Моника, шт. Калифорния

Непрерывная модель тактического воздушного сражения определенной продолжительности между воздушными силами двух противников, наносящими удары по аэродромам или поддерживающими наземные силы, была предложена Арнольдом Менгелем из РЭНД-Корпорейшн в 1952 г.

В настоящей статье мы рассматриваем дискретную аналогию модели Менгеля как многоходовую игру, в которой обе стороны в любой период операции распределяют свои силы для одновременного выполнения двух задач. Каждая сторона испытывает за данный период времени определенные потери в результате аварий, катастроф и т. д. и, кроме того, теряет самолеты пропорционально интенсивности вражеских атак на ее аэродромы. Пополнения для каждой стороны происходят периодически, и их можно считать функциями времени. Предполагается, что платеж равен разности между общими числами самолетовылетов для поддержки наземных сил той и другой стороны за время операции.

В разделе *1* статьи дано подробное описание модели. В разделе *2* мы представляем платежную функцию в форме, нужной для последующего анализа. Начиная с раздела *3* мы сосредоточиваем внимание на симметричных операциях, в которых скорости потерь одинаковы для обеих сторон. Даны решения этого случая для операций конечной и бесконечной длительности. Оптимальные стратегии в случае операций конечной длительности заключаются для обеих сторон в ударах по аэродромам с максимальной интенсивностью в начале операции и

---

* D. R. Fulkerson and S. M. Johnson. A tactical air game. Operations Research, 1957, vol. 5, p. 704—712.

в переходе к поддержке наземных сил в дальнейшем. Для операций неограниченной длительности показано, что обе стороны должны или все время атаковать аэродромы, или все время наносить удары по наземным силам, в зависимости от величины потерь. Раздел 5 завершает статью числовым примером для симметричного случая и некоторыми примерами для несимметричного случая; при этом показано, что оптимальные стратегии в последнем случае могут быть более сложными.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Игра может быть описана следующим образом: пусть $p_1 \geqslant 0$ и $q_1 \geqslant 0$ суть первоначальные силы, которыми располагают соответственно Синие и Красные. Предполагается, что перед первым ходом обеим сторонам известны свои силы и силы противника, а также следующая дополнительная информация:

T — положительное целое число, обозначающее число периодов операции;

$r_n \geqslant 0$, $n = 1, \ldots, T-1$ — пополнения для Синих;

$r'_n \geqslant 0$, $n = 1, \ldots, T-1$ — пополнения для Красных;

a, $0 \leqslant a \leqslant 1$ — часть сил Синих, не уничтоженная огнем зенитной артиллерии, в результате аварий и т. д. в течение некоторого периода времени;

c, $0 \leqslant c \leqslant 1$ — часть сил Красных, не уничтоженная огнем зенитной артиллерии, в результате аварий и т. д. в течение некоторого периода времени;

$b > 0$ — ущерб, который наносит один самолет Красных при атаке аэродромов Синих;

$d > 0$ — ущерб, который наносит один самолет Синих при атаке аэродромов Красных;

ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ — коэффициент, учитывающий будущие периоды платежа.

В n-ый период, где $n = 1, \ldots, T$, Синие делают выбор величины x_n, $0 \leqslant x_n \leqslant p_n$, а Красные одновременно выбирают величину y_n, $0 \leqslant y_n \leqslant q_n$; эти выборы представляют собой количества самолетов, действующих против аэродромов противника, где

$$\begin{aligned} p_n &= \max(0,\ a p_{n-1} - b y_{n-1} + r_{n-1}), \\ q_n &= \max(0,\ c q_{n-1} - d x_{n-1} + r'_{n-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Остаток сил $p_n - x_n$ и $q_n - y_n$ автоматически высылается для ударов по наземным войскам. Синие хотят максимизировать, а Красные—свести к минимуму платеж

$$P(x, y) = \sum_{n=1}^{n=T} \rho^n [(p_n - x_n) - (q_n - y_n)]. \tag{2}$$

Так как обе стороны знают параметры a, b, c, d и p_n, q_n, r_n, r'_n в начале каждого периода, то ни один из противников, очевидно, никогда не выделит самолетов больше, чем их требуется для уничтожения сил противоположной стороны (включая пополнения, поступающие в течение данного периода). Следовательно, уравнения (1) могут быть заменены уравнениями

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= ap_n - by_n + r_n, \\ q_{n+1} &= cq_n - dx_n + r'_n, \end{aligned} \tag{1'}$$

где x_n и y_n ограничены неравенствами

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x_n &\leqslant \min\left(p_n, \frac{cq_n + r'_n}{d}\right), \\ 0 \leqslant y_n &\leqslant \min\left(q_n, \frac{ap_n + r_n}{b}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь следует сказать несколько слов относительно формы информации о пополнениях. Оказывается, что в симметричном случае, когда $a=c$, $b=d$, несущественно, известны ли пополнения заранее или о них сообщается только время от времени. Однако вряд ли в общем случае будут существовать решения в чистых стратегиях, если план организации пополнений не становится известным перед первым ходом. Задача нами и сформулирована в этом виде.

2. ДРУГАЯ ФОРМА ПЛАТЕЖНОЙ ФУНКЦИИ

Преобразуем выражение платежной функции. Повторное применение выражений (1′) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} p_n &= a^{n-1} p_1 - b \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i} y_i + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i} r_i, \\ q_n &= c^{n-1} q_1 - d \sum_{i=1}^{n-1} c^{n-1-i} x_i + \sum_{i=1}^{n-1} c^{n-1-i} r'_i, \end{aligned} \tag{4}$$

в результате чего уравнение (2) принимает следующий вид:

$$P(x,\ y)=\sum_{n=1}^{T}\rho^{n}\left(a^{n-1}p_1-b\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-1-i}y_i+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-1-i}r_i-x_n\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{T}\rho^{n}\left(c^{n-1}q_1-d\sum_{i=1}^{n-1}c^{n-1-i}x_i+\sum_{i=1}^{n-1}c^{n-1-i}r_i'-y_n\right),$$

или после приведения коэффициентов при x_n и y_n

$$P(x,\ y)=p_1\sum_{n=1}^{T}\rho^{n}a^{n-1}-q_1\sum_{n=1}^{T}\rho^{n}c^{n-1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{T-1}r_n\rho^{n+1}\sum_{i=0}^{T-n-1}(\rho a)^i-\sum_{n=1}^{T-1}r_n'\rho^{n+1}\sum_{i=0}^{T-n-1}(\rho c)^i+$$

$$+\sum_{n=1}^{T}x_n\rho^{n}\left[-1+\rho d\sum_{i=0}^{T-n-1}(\rho c)^i\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{T}y_n\rho^{n}\left[-1+\rho b\sum_{i=0}^{T-n-1}(\rho a)^i\right]. \qquad (5)$$

Для упрощения запишем это выражение в виде

$$P(x,\ y)=K+\sum_{n=1}^{T}(x_nf_n-y_ng_n), \qquad (6)$$

где

$$f_n=\rho^{n}\left[-1+\rho d\sum_{i=0}^{T-n-1}(\rho c)^i\right],$$

$$g_n=\rho^{n}\left[-1-\rho b\sum_{i=0}^{T-n-1}(\rho a)^i\right], \qquad (7)$$

а K есть остаток правой части уравнения (5). Так как множители в квадратных скобках выражений (7) монотонно уменьшаются при возрастании n, то f_n и g_n также уменьшаются монотонно до тех пор, пока они положительны, а после того, как они становятся отрицательными, их значения принимаются равными нулю.

Мы можем теперь рассмотреть следующий тривиальный случай:

Теорема 1. *Если $f_1 \leqslant 0$, $g_1 \leqslant 0$, то оптимальная стратегия Синих (Красных) состоит в выборе $x_n = 0$ $(y_n = 0)$ для всех значений n, т. е. обе стороны должны выделять авиацию только для поддержки наземных сил.*

Обозначив эти стратегии соответственно через x^0 и y^0, получим

$$P(x^0,\ y) = K - \sum_{n=1}^{T} y_n g_n, \quad P(x^0,\ y^0) = K,$$

$$P(x,\ y^0) = K + \sum_{n=1}^{T} x_n f_n.$$

По предположению $f_1 \leqslant 0$, следовательно $f_n \leqslant 0$ для любых n. Аналогично $g_n \leqslant 0$. Таким образом,

$$P(x^0,\ y) \geqslant P(x^0,\ y^0) \geqslant P(x,\ y^0).$$

Заметим, что условия теоремы 1 подтверждаются автоматически независимо от T, если $\rho(a+b) \leqslant 1$ и $\rho(c+d) \leqslant 1$, так как, например,

$$-1 + \rho b \sum_{i=0}^{\infty} (\rho a)^i = -1 + \rho b \frac{1}{1 - \rho a} \leqslant 0$$

означает, что $\rho(a+b) \leqslant 1$.

3. СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе мы предполагаем, что $a = c$, $b = d$ и что на основании теоремы 1 $f_1 (= g_1) > 0$. Поэтому имеется такое положительное целое число $N < T$, при котором $f_1 > f_2 > \ldots > f_N > 0$, $f_{N+1}, \ldots, f_T \leqslant 0$.

Докажем теорему 2.

Теорема 2. *В симметричном случае оптимальная стратегия Синих (Красных) состоит в выборе $x_n = \max$ $(y_n = \max)$ для $n = 1, \ldots, N$ и $x_n = 0$ $(y_n = 0)$ для*

$n > N$, т. е. обе стороны должны вложить максимальные усилия в удары по аэродромам в первоначальные интервалы времени $1, \ldots, N$, а затем атаковать наземные войска.

Прежде всего отметим, что независимо от тактики, проводимой в течение первых N периодов, удары по наземным силам должны быть отнесены на заключительный период кампании. Далее рассмотрим случай, когда $N=1$. Обозначим через x^0, y^0 стратегии, указанные в теореме; тогда

$$P(x^0,\ y) = K + (\max x_1 - y_1) f_1 - \sum_{n=2}^{T} y_n f_n,$$

$$P(x^0,\ y^0) = K + (\max x_1 - \max y_1) f_1,$$

$$P(x,\ y^0) = K + (x_1 - \max y_1) f_1 + \sum_{n=2}^{T} x_n f_n.$$

Так как

$$(\max x_1 - y_1) f_1 \geqslant (\max x_1 - \max y_1) f_1 \geqslant (x_1 - \max y_1) f_1,$$

а

$$\sum_{n=2}^{T} y_n f_n, \quad \sum_{n=2}^{T} x_n f_n \leqslant 0,$$

то мы получаем седловую точку $P(x^0,\ y) \geqslant P(x^0,\ y^0) \geqslant P(x,\ y^0)$ и, следовательно, теорема *2* справедлива для $N=1$.

Следует указать, что простые неравенства, которыми мы пользовались до сих пор, не очевидны для $N > 1$. Поэтому мы будем продолжать анализ, применяя метод индукции по N, но сначала мы докажем две леммы, которые будут полезны при применении метода индукции.

Лемма 1. *Если $\sum_{i=1}^{n} k_i \geqslant 0$ для $n=1, \ldots, N$ при строгом соблюдении неравенства для некоторого n и если $f_1 > f_2 > \ldots > f_N > 0$, то $\sum_{i=1}^{N} k_i f_i > 0$.*

Обозначив частные суммы $\sum_{i=1}^{n} k_i$ через K_n, где $K_0=0$, получим

$$\sum_{i=1}^{N} k_i f_i = \sum_{i=1}^{N} (K_i - K_{i-1}) f_i = \sum_{i=1}^{N-1} K_i (f_i - f_{i+1}) + K_N f_N > 0.$$

Лемма 2. *Пусть s_n, t_n, где $n=2,\ldots,N$, суть две произвольные последовательности нулей и единиц и предположим, что*

$$\alpha_n = -s_n b \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\beta_i - (1-s_n)\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\alpha_i,$$

$$\beta_n = -t_n b \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\alpha_i - (1-t_n)\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\beta_i, \quad (n=2,\ldots,N),$$

где $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, $b>0$, $0\leqslant a\leqslant 1$. Если $f_1>f_2>\ldots>f_N>0$, то $\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i-\beta_i)f_i>0$.

Согласно лемме *1*, поскольку $(\alpha_1-\beta_1)=1>0$, достаточно доказать, что все суммы $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)$, $n=2,\ldots,N$, неотрицательны. Прежде всего отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}\alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a^{n-i}\beta_i \leqslant 0$$

для всех n. Это очевидно для $n=1$ и, предполагая, что это справедливо и для $n-1$, получаем, что либо

$$\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\alpha_i - b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\beta_i \geqslant 0,$$

либо

$$\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\alpha_i - \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\alpha_i = 0$$

в зависимости от того, равно s_n единице или нулю. Такие же соотношения можно получить и для $\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}\beta_i$.

Для заданных последовательностей s_i, t_i длиной $n-1$ эти неравенства указывают, что минимум выражения $\alpha_n - \beta_n$ получается при $s_n = t_n = 0$. Чтобы убедиться в этом, напомним, что

$$\alpha_n - \beta_n = -b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\beta_i + b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\alpha_i,$$

если $s_n = 1$, $t_n = 1$;

$$\alpha_n - \beta_n = -b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\beta_i + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\beta_i,$$

если $s_n = 1$, $t_n = 0$;

$$\alpha_n - \beta_n = -\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\alpha_i + b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\alpha_i,$$

если $s_n = 0$, $t_n = 1$;

$$\alpha_n - \beta_n = -\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\beta_i,$$

если $s_n = 0$, $t_n = 0$.

Если $s_n = 1$, $t_n = 1$, то $\alpha_n - \beta_n \geqslant 0$, тогда как если $s_n = 0$, $t_n = 0$, то $\alpha_n - \beta_n \leqslant 0$.

Сравнение последнего выражения для $\alpha_n - \beta_n$ с каждым из двух других остающихся приводит к неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\alpha_i \geqslant b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\beta_i, \qquad b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\beta_i,$$

которые, конечно, справедливы, так как суммы слева неотрицательные, а суммы справа — неположительные.

Теперь предполагаем по индукции, что

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i) \geqslant 0, \quad (n = 1, \ldots, N-1).$$

Тогда, используя только что доказанное, получаем

$$\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i-\beta_i)\geqslant\sum_{i=1}^{N-1}(\alpha_i-\beta_i)-$$

$$-\sum_{i=1}^{N-1}a^{N-i}(\alpha_i-\beta_i)\geqslant\sum_{i=1}^{N-1}(1-a^{N-i})(\alpha_i-\beta_i).$$

Так как $1-a^{N-i}$ монотонно уменьшается при возрастании i, то лемма *1* и принятое по индукции предположение, что $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)\geqslant 0$, $n\leqslant N-1$, обеспечивает справедливость неравенства $\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i-\beta_i)\geqslant 0$. Это и требовалось доказать в лемме *2*.

Возвратимся к доказательству теоремы *2*. Теорема предполагается справедливой для всех игр, в которых продолжительность первоначального интервала меньше, чем N; это равнозначно предположению, что если предпосылки теоремы *2* справедливы, то обе стороны должны атаковать аэродромы с максимальной интенсивностью в периоды $2,\ldots,N$, а наземные силы только после этого. Что должны делать, например, Синие в первый период? Платежная функция $P(x, y)$ может теперь рассматриваться как функция только от x_1 и y_1. Используя выражения (3) и (4), получаем уравнения для x_n и y_n при $1<n\leqslant N$

$$x_n=\min\left[a^{n-1}p_1-b\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-1-i}y_i+\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-1-i}r_i,\right.$$

$$\left.\frac{1}{b}\left(a^n q_1-b\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-i}x_i+\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-i}r'_i+r'_n\right)\right],$$

$$y_n=\min\left[a^{n-1}q_1-b\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-1-i}x_i+\sum_{i=1}^{n-1}a^{n-1-i}r'_i,\right.$$

$$\frac{1}{b}\left(a^n p_1 - b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} y_i + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} r_i + r_n\right)\Bigg], \tag{8}$$

и так как x_n является кусочно-линейной функцией от x_1 то за исключением конечного числа значений x_1

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = -b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \qquad (1 < n \leqslant N)$$

или (9)

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = -\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\frac{\partial x_i}{\partial x_1} \qquad (1 < n \leqslant N),$$

в зависимости от того, могут ли Синие послать все свои силы против аэродромов Красных или нет. Аналогично имеем, что за исключением конечного числа точек

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -b\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i}\frac{\partial x_i}{\partial x_1} \qquad (1 < n \leqslant N)$$

или (10)

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \qquad (1 < n \leqslant N),$$

в зависимости от того, могут ли Красные послать все свои силы против аэродромов Синих или нет.

Теперь мы можем применить лемму *2* при $\alpha_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_1}$, $\beta_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}$ и $s_n = 1$ или 0 ($t_n = 1$ или 0) в соответствии с тем, могут или не могут Синие (Красные) атаковать аэродромы Красных (Синих) всеми своими силами в период n. При этом получаем

$$\frac{\partial P(x_1, y_1)}{\partial x_1} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1} - \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right) f_n > 0. \tag{11}$$

Другими словами, платеж возрастает монотонно с возрастанием x_1, и Синие должны сделать, таким образом, выбор $x_1 = \max$; аналогично платеж уменьшается с возрастанием y_1, и Красные должны сделать выбор $y_1 = \max$. Это завершает доказательство теоремы *2*.

Из доказанного видно, что в симметричном случае оптимальные стратегии не зависят от предположения, по которому планы пополнений известны заранее. Все, что нужно в первоначальной фазе игры, это предварительно перед каждым периодом объявлять пополнения этого периода, так чтобы каждая сторона знала, сколько самолетов потребуется, чтобы уничтожить силы противника. В дальнейшем мы рассмотрим несимметричный случай, в котором для одного из игроков важно иметь более полную информацию о пополнениях.

Несомненно также, что теорема *2* справедлива для более широкого класса весовых функций w_n платежа, чем случай $w_n = \rho^n$. Единственно, что требуется, это чтобы функция $f_n = -w_n + b \sum_{i=0}^{T-n-1} w_{n+1+i} a^i$ монотонно уменьшалась при $f_n > 0$, а при отрицательных значениях f_n сохраняла бы нулевое значение.

4. СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ, КАМПАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

На основе анализа игры конечной длительности можно интуитивно прийти к выводу, что если $T = \infty$ и если для обеспечения сходимости мы предположим, что $\rho > 1$ и что пополнения ограничены, то оптимальная стратегия для каждой стороны в бесконечной игре состоит в том, чтобы все время атаковать наземные силы, если $\rho(a+b) \leqslant 1$, или — воздушные силы противника, если $\rho(a+b) > 1$. Первая часть этого утверждения может быть доказана аналогично теореме *1*, так как платеж для бесконечной игры может быть записан в виде:

$$P(x, y) = K + \left[\frac{\rho b}{1-\rho a} - 1\right] \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (x_n - y_n), \qquad (12)$$

а если $\rho(a+b) \leqslant 1$, то $\frac{\rho b}{1-\rho a} - 1 \leqslant 0$.

С другой стороны, если $\rho(a+b)>1$, то для достаточно большого значения T получаем

$$f_1>f_2>\ldots>f_{T-k}>0;\ f_{T-k+1},\ldots,\ f_T\leqslant 0, \tag{13}$$

где k есть постоянное положительное целое число, не зависящее от T. Обозначим через x^0 стратегию, которая обеспечивает максимальное значение x_n для всех n в бесконечной игре, а через $(x^0,\ y)$ — игру, которая дает в результате использования стратегии x^0 против произвольной стратегии y платеж $P(x^0,\ y)$. Используя выражение (13) и предполагая, что $\rho<1$, можно привести стратегию x^0 к игре конечной длительности T с точностью до ε для достаточно больших значений T. Поэтому, если $P_T(x^0,\ y)$ является платежом в T-ходовой игре и V_T есть цена этой игры, то $P_T(x^0,\ y)\geqslant V_T-\varepsilon$ для достаточно большого T. Однако совершенно очевидно, что $P_T(x^0,\ y)$ стремится к $P(x^0,\ y)$, а V_T стремится к некоторой величине V; следовательно, $P(x^0,\ y)\geqslant V$. Аналогично $P(x,\ y^0)\leqslant V$. Таким образом, игра бесконечной длительности имеет цену $V=P(x^0,\ y^0)$, и x^0, y^0 являются оптимальными стратегиями противников. Это можно сформулировать в виде теоремы 3.

Теорема 3. *В симметричной игре бесконечной длительности с $\rho<1$ и с ограниченными пополнениями оптимальная стратегия Синих (Красных) состоит в выборе либо $x_n=0$ $(y_n=0)$ для всех n, либо $x_n=\max$ $(y_n=\max)$ для всех n, в зависимости от того, $\rho(a+b)\leqslant 1$ или $\rho(a+b)>1$.*

5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Приведем результаты вычислений при $a=c=0{,}9$; $b=d=0{,}2$; $T=20$; $\rho=1$; $r_n=r'_n=100$ для всех n.

Так как $f_{n-1}=af_n+a+b-1$, то $f_{20}=-1$; $f_{19}=0{,}1-0{,}9=-0{,}8$; $f_{18}=0{,}9(-0{,}8)+0{,}1=-0{,}62,\ldots$, $f_{14}=-0{,}062882$, $f_{13}>0$ и, таким образом, обе стороны должны наносить удары по аэродромам в течение первых 13 периодов, а по наземным средствам в течение оставшихся 7 периодов. Для $p_1=5000$, $q_1=5000$ цена игры будет равна 0; для $p_1=4000$, $q_1=5000$ цена игры составляет приблизительно $-15\,650$; для $p_1=3\,000$, $q_1=$

$=5000$ цена игры равна приблизительно $-24\,650$. В последнем случае силы Синих полностью уничтожаются во время четвертого периода, и Синие не имеют самолетов до пятнадцатого периода, когда Красные прекращают атаки аэродромов Синих. В конце игры Синие имеют 470 самолетов, а Красные — 1 345. Любая другая неоптимальная стратегия Красных значительно ухудшает результаты. Так, если предположить, что Красные в каждый период выделяют половину своих самолетов для действий против аэродромов Синих, то платеж при $p_1=3\,000$ становится равным $-16\,700$. Силы Синих не уничтожаются, и они кончают игру со 100 самолетами, а Красные — с 990 самолетами. Таким образом, эта неправильная стратегия Красных приблизительно эквивалентна тому, что Синим в начале игры предоставляется лишних 1 000 самолетов. Приведенные нами примеры подтверждают то, что платеж обычно довольно чувствителен к выбору стратегии.

Исходя из формы решения для симметричного случая, можно предположить, что в несимметричном случае оптимальные стратегии будут состоять в концентрации ударов по аэродромам в течение некоторой первоначальной фазы, а затем — по наземным силам. Точки изменения стратегий обоих игроков при этом будут в общем случае различными. Рассмотрим теперь пример с $T=5$, $\rho=1$, который покажет ошибочность этого утверждения.

Пусть

$$p_{n+1}=p_n-y_n+r_n;\quad q_{n+1}=-0{,}9\;x_n+100,$$

где $p_1=100$, $q_1=90$, $r_1=r_2=0$, $r_3=100$, $r_4=0$.

Подставляя эти значения в уравнение (5), получим

$$P(x,\;y)=210-0{,}1\,(x_1+x_2+x_3+x_4)-\\-x_5-(3y_1+2y_2+y_3)+y_5.$$

Допустим, что y^0 будет стратегией $y_n^0=\max$, $n=1$, 2, 3; $y_5^0=0$. Тогда

$$y_1^0=\min(90,\;100)=90;\quad y_2^0=\min(q_2,\;p_2)=\\=\min(q_2,\;10)=10,$$

так как $q_2=-0{,}9x_1+100\geqslant 10$, и

$$y_3^0=\min(q_3,\;p_3+100)=q_3=0{,}9x_2+100.$$

Следовательно,

$$P(x,\ y^0) = -180 - 0{,}1x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}1x_3 - 0{,}1x_4 - x_5.$$

Какая стратегия противодействия будет наилучшей для Синих? Легко видеть, что это будет стратегия $x_5 = x_4 = x_3 = 0$ (действительно, $p_3 = 0$ независимо от того, что предпринимают Синие в первые два периода, поэтому и $x_3 = 0$). Отсюда следует, что

$$x_2 = \max = \min\left(p_2,\ \frac{100}{0{,}9}\right) = p_2 = p_1 - y_1^0 = 10,$$

и так как верхний предел x_2 не зависит от x_1, то Синие должны выбрать $x_1 = 0$. Другими словами, если Красные в течение первых трех периодов атакуют аэродромы, а затем наземные силы, то для Синих лучше всего будет поражать наземные силы в течение первого периода, атаковать аэродромы в течение второго периода и снова атаковать наземные силы в течение оставшихся трех периодов. Обозначим эту стратегию Синих через x^0 и поищем для Красных наилучшую стратегию противодействия.

В нашем случае

$$P(x^0,\ y) = 210 - 0{,}1x_2^0 - 3y_1 - 2y_2 - y_3 + y_5,$$

или, так как $x_2^0 = 100 - y_1$,

$$P(x^0,\ y) = 200 - 2{,}9y_1 - 2y_2 - y_3 + y_5.$$

Отсюда $y_5 = 0$ в минимизирующем решении, а $y_3 = \max$. Так как $r_3 = 100$, то $y_3 = q_3$. Выбор y_2 не приводит к изменению q_3, а выбор максимального значения y_1 не приводит к уменьшению q_3. Поэтому (поскольку речь идет о y_3) мы должны взять максимальные значения y_1 и y_2. Таким образом,

$$y_2 = \min(q_2,\ p_2) = \min(100,\ 100 - y_1) = 100 - y_1,$$

и так как $-2{,}9y_1 - 2(100 - y_1) = -0{,}9y_1 - 200$, то, следовательно, $y_1 = \max = 90$. Поэтому x^0, y^0 есть седловая точка платежной функции $P(x,\ y)$.

Если в этом примере изменить пополнения так, чтобы $r_n = r_n' = 100$, то оптимальная стратегия Синих смещается так, что $x_1 = \max$, $x_2 = \max$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, а оптимальная стратегия Красных остается прежней. Чтобы убедиться в этом, заметим, что теперь

$$y_1^0 = \min(90,\ 100) = 90,$$

$$y_2^0 = \min(q_2,\ p_2 + 100) = q_2 = -0{,}9x_1 + 100,$$

$$y_3^0 = \min(q_3,\ p_3 + 100) = q_3 = -0{,}9x_2 + 100,$$

так что с точностью до постоянной получаем

$$P(x,\ y^0) = 1{,}7x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}1x_3 - 0{,}1x_4 - 0{,}1x_5.$$

Легко заметить, что это выражение имеет максимум при $x_1 = \max$, $x_2 = \max$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Другими словами, если Синие играют согласно этой стратегии, то для Красных не остается ничего лучшего, как выбрать стратегию y^0.

Таким образом, маловероятно, чтобы в несимметричном случае существовали решения в чистых стратегиях, если пополнения заранее неизвестны.

Наш последний пример показывает, что в несимметричном случае игрок должен всегда тщательно распределять свои силы между двумя задачами. Допустим, что

$$T = 5,\ \rho = 1,\ p_{n+1} = p_n - y_n + r_n,$$

$$q_{n+1} = 0{,}4q_n - 0{,}5x_n + r_n',$$

где

$$p_1 = 100,\quad q_1 = 50,\quad r_1 = 0,\quad r_2 = 10,\quad r_3 = 100,$$

$$r_4 = 0,\quad r_1' = 90,\quad r_2' = 0,\quad r_3' = 100,\quad r_4' = 0.$$

Тогда с точностью до постоянной

$$P(x,\ y) = -0{,}188x_1 - 0{,}22x_2 - 0{,}3x_3 - 0{,}5x_4 - \\ - x_5 - 3y_1 - 2y_2 - y_3 + y_5.$$

Обозначим через y^0 такую же стратегию Красных, как в предыдущем примере. Тогда

$$y_1^0 = \min(50,\ 100) = 50,$$

$$y_2^0 = \min(q_2,\ p_2 + 10) = \min(q_2,\ 60) = 60,$$

$$y_3^0 = \min(q_3,\ p_3 + 100) = q_3.$$

С точностью до постоянной, получаем

$$P(x,\ y^0)=0{,}012x_1+0{,}28x_2-0{,}3x_3-0{,}5x_4-x_5.$$

Следовательно, Синие должны применять стратегию $x_3^0=x_4^0=x_5^0=0$ и $x_2^0=\min(p_2,\ 0{,}8q_2)=\min(50{,}88-0{,}4x_1)$. Подставляем это решение в выражение для платежа; после этого нам остается найти максимум следующей функции от x_1:

$$P(x_1,\ x_2^0,\ x_3^0,\ x_4^0,\ x_5^0,\ y^0)=0{,}012x_1+14,\ \text{если}\ x_1\leqslant 95;$$

$$P(x_1,\ x_2^0,\ x_3^0,\ x_4^0,\ x_5^0,\ y^0)=-0{,}1x_1+24{,}64,\ \text{если}\ x_1>95.$$

Поэтому наилучшая стратегия противодействия стратегии y^0 означает выбор $x_1^0=95<\max x_1$. Так как можно показать, что $P(x^0,\ y)$ при стратегии y^0 достигает минимума, то мы имеем дело со случаем, когда один из игроков должен очень тщательно распределять свои силы.

Следует сказать, что в обоих примерах $\rho(c+d)<1$, $\rho(a+b)>1$. Мы приходим к выводу, что в случае $\rho(a+b)>1$, $\rho(c+d)>1$ обе стороны имеют оптимальные стратегии такого же характера, как в симметричном случае. Разница состоит в том, что переход от действий по аэродромам к действиям по наземным силам может происходить в другие моменты времени. Если g_n меняет знак позже, чем f_n, скажем, $g_n>0$ при $g_{N+1},\ldots,g_T\leqslant 0$, то оптимальная стратегия Красных состоит в выборе $y_n=\max$ для $n=1,\ldots,N$ и $y_n=0$ для $n>N$, и Синие изменяют свою стратегию раньше.

ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ТАКТИЧЕСКОЙ ВОЗДУШНОЙ ВОЙНЫ

Л. Д. Берковиц и *Мелвин Дрешер* *. РЭНД — Корпорейшн, Санта-Моника, шт. Калифорния

Проблема оптимального использования тактических воздушных сил для выполнения различных боевых задач, подобно многим другим военным проблемам, может рассматриваться как многоходовая игра между двумя противниками. В этой игре каждая из сторон стремится получить наибольший возможный платеж, характеризуемый выполнением некоторых задач в масштабе данного театра военных действий.

В ходе тактической воздушной кампании командование каждой из сторон стоит перед выбором многих возможных решений, определяющих исход кампании. Оно должно выбрать типы оружия для выполнения каждой конкретной задачи, объекты налетов, профиль задачи, тактику ее осуществления и т. д. Самым важным и основным решением в тактической воздушной войне является распределение самолетов для выполнения различных задач. Настоящая статья и посвящена проблеме принятия решения при распределении сил.

Мы изложим результаты игрового анализа упрощенной, но довольно реалистической модели тактической воздушной войны, рассматриваемой как многоходовая игра. Само собой разумеется, что наиболее важные заключения, которые следует извлекать из моделей такого типа, состоят не в точных количественных результатах, а в качественной стороне решения и в установлении природы этого решения. Наши результаты относятся не только к проблемам тактической воздушной войны,

---

* L. D. Berkowitz and Melvin Dresher. A game-theory analysis of tactical air war. Operations Research, 1959, vol. 7, p. 599—620.

но могут пролить некоторый свет на применение игрового моделирования военных ситуаций. Этот вопрос рассмотрен в заключительном разделе статьи.

Математические доказательства представленных здесь результатов даны в работах [1], [2] и [3]. Однако основная идея, лежащая в основе всего исследования, вместе с ее доказательством изложена в Приложении. В нем приводится также точная математическая формулировка игры в нормальной форме.

ВОЕННО-ВОЗДУШНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Тактическая воздушная война характеризуется рядом боевых действий или задач, выполняемых для осуществления определенной операции. Обычными являются следующие боевые действия:

Удары по военно-воздушным базам. Эти операции направлены против комплекса и системы управления военно-воздушных баз противника на данном театре с целью уничтожения самолетов, личного состава, технических средств и т. д.

Противовоздушная оборона. Она представляет собой противовоздушные операции, т. е. операции против ударов противника по воздушным базам.

Непосредственная авиационная поддержка. Объектами нападения при непосредственной авиационной поддержке являются скопления войск противника или его укрепленные позиции; целью непосредственной авиационной поддержки является помощь наземным войскам непосредственно на поле боя. Это осуществляется использованием огневой мощи самолетов против наземных целей.

Удары по коммуникациям. Эти операции проводятся для ослабления военного потенциала противника посредством ударов по его транспортным средствам.

Разведка. Наиболее важной функцией разведывательных операций является получение информации относительно объектов нападения.

Транспортировка по воздуху. В этих операциях самолеты используются для перевозки войск и военного оборудования.

В настоящей статье мы объединим непосредственную авиационную поддержку, удары по коммуникациям, разведку в интересах наземных сил и транспортировку по воздуху под общим названием «поддержка наземных операций» или «поддержка наземных войск». Разведка, направленная против воздушных сил противника, будет рассматриваться как часть задачи нанесения ударов по базам противника.

ФОРМУЛИРОВКА ИГРЫ

Мы рассматриваем тактическую военно-воздушную игру как последовательность операций или ходов, каждый из которых включает одновременно удары по базам, противовоздушную оборону и поддержку наземных сил, предпринимаемых обеими сторонами для осуществления некоторой тактической задачи, т. е. для получения некоторого выигрыша. Предположим, что в начале воздушных операций *Синие* имеют p самолетов, а их противник, *Красные*, имеют q самолетов. Рассмотрим какую-нибудь одну операцию в кампании, например, начальную операцию. Предположим, что в этой операции Синие выделили x самолетов для ударов по базам противника, u самолетов для противовоздушной обороны и $m=p-x-u$ самолетов для поддержки наземных сил. Предположим аналогично, что Красные в своей первой операции назначили y самолетов для ударов по базам, w самолетов для ПВО и $n=q-y-w$ самолетов для поддержки наземных сил. Перед этой начальной операцией и перед любой последующей операцией каждая сторона принимает решения, не зная распределения сил противника. Однако предполагается, что каждая сторона знает число самолетов, которым обладает ее противник.

Так как Красные назначили w самолетов для ПВО, то мы можем ожидать уменьшения числа самолетов Синих, которые прорвутся к воздушным базам. Число самолетов, перехваченных Красными, будет пропорционально числу w, например, cw, до тех пор, пока не будут перехвачены все самолеты Синих. Коэффициент пропорциональности c, или оборонительный потенциал Красных, зависит от характеристик самолетов и от высоты их полета, а также от характеристик их вооружения. Число самолетов Синих, которые прорвутся через оборону Красных, равно $x-cw$, если cw не превышает x. Если $cw>x$, то ни один самолет Синих не проникнет к объектам нападения. Поэтому число атакующих самолетов Синих, проникающих через оборону Красных, равно наибольшему из чисел $x - cw$ или 0, т. е. равно $\max(0, x - cw)$.

Целью ударов Синих по базам противника является ослабление военно-воздушных сил Красных посредством бомбардировки определенных объектов. При этом число уничтоженных самолетов будет зависеть от числа атакующих самолетов, прорвавшихся сквозь оборону Красных. Если предположить, что каждый прорвавшийся самолет Синих может уничтожить b самолетов противника, то начальная операция Синих против баз Красных может привести к уничтожению самое большее $b \max(0, x - cw)$ самолетов Красных. Число самолетов Красных, действительно уничтоженных в результате атаки Синих, зависит от числа самолетов Красных, находившихся на базах во время налетов. Коэффициент пропорциональности b, или наступательный потенциал Синих, зависит как от характеристик объектов нападения, так и от характеристик самолетов.

Предполагается, что воздушные силы Красных уменьшаются во время операции также в результате аварий и зенитного огня. Предположим, что эти потери пропорциональны общему числу самолетов, используемых Красными во время операции. Тогда эти потери равны aq, где a есть интенсивность потерь Красных.

Наконец, предположим, что воздушные силы Красных пополняются во время операции s самолетами. Это пополнение подвержено атакам Синих, но не может быть использовано Красными в течение операции.

Таким образом, число самолетов Красных, подвергающихся ударам во время операции, равно $q - aq + s$. Поэтому в результате начальных ударов Синих по базам противника будет уничтожено

$$\min[q - aq + s,\ b \max(0,\ x - cw)]$$

самолетов Красных.

Предполагается, что самолеты, участвующие в противовоздушной обороне, потерь не несут, а самолеты Красных, которые не смогли преодолеть ПВО Синих, возвращаются на свои базы. Иначе говоря, мы предполагаем, что потери сторон в результате воздушных боев незначительны по сравнению с другими потерями и что самолеты ПВО не допускают бомбардировки намеченных объектов атакующими самолетами, не обязательно сбивая их. Так, например, атакующий самолет может быть поврежден, но не настолько серьезно, чтобы не вернуться на свою базу; в результате противодействия он может развернуться, не дойдя до цели, наконец, он может, даже достигнув цели, настолько отклониться от боевого курса, что сброшенные им бомбы вызовут незначительный эффект, и т. д.

Если учесть все потери и пополнения, то после первой операции силы Красных будут равны

$$q_1 = q + s - aq - \min[q - aq + s,\ b\max(0,\ x - cw)] = \\ = \max[0,\ q + s - aq - b\max(0,\ x - cw)]. \qquad (1)$$

Точно таким же образом мы можем подсчитать силы Синих после первоначальной операции. Они будут равны

$$p_1 = \max[0,\ p + r - dp - e\max(0,\ y - ku)], \qquad (2)$$

где коэффициенты d, e и k имеют те же значения, что и коэффициенты a, b и c для Красных, а r есть пополнения самолетов Синих.

У Синих теперь имеется p_1 самолетов, которые они должны распределить для выполнения тех же трех задач во второй операции. В результате этой второй операции останется p_2 и q_2 самолетов для выполнения третьей операции. Этот процесс повторяется на протяжении всей кампании.

ПЛАТЕЖ

Рассмотрим использование Синими своих воздушных сил на протяжении кампании. Предположим, что их целью является поддержка наземных войск на поле боя и что результаты такой поддержки зависят от числа самолетов, выделенных для этого. Предположим, что можно создать для Синих платежную функцию, выражающую зависимость платежа в конце каждой операции кампании, определяемого глубиной продвижения наземных сил, от числа самолетов m, выделенных для наземной поддержки. Эта функция сильно зависит от характеристик наземных целей, т. е. от степени концентрации войск, транспортных средств и боеприпасов и от инженерного оборудования позиций. В настоящей работе мы не делаем попыток представить эту функцию в явном виде. Мы просто предполагаем, что платеж $S(m)$ является положительной функцией, возрастающей с возрастанием сил, выделяемых для наземной поддержки.

Так как наземные войска Синих должны продвигаться вперед в условиях воздействия самолетов Красных, поддерживающих свои наземные силы, то платеж Синих больше не равен $S(m)$, как указывалось выше, а будет меньше в соответствии с числом n самолетов, выделенных Красными для поддержки наземных войск. Если $T(n)$ есть функция, характеризующая продвижение наземных сил Красных, то результирующее продвижение наземных сил Синих равно

$$Y(m,\ n) = S(m) - T(n).$$

Это выражение представляет собой платеж Синим за один такой период или за одну операцию. Платеж за всю кампанию, состоящую из N операций, равен сумме платежей для каждой из N операций, т. е.

$$M = \sum^{N} [S(m) - T(n)].$$

Теперь проблема, перед которой стоит каждая из сторон, становится очевидной. При планировании очередного хода Синие хотели бы выделить большое число самолетов для поддержки наземных сил и тем самым увеличить значение $S(m)$, но, с другой стороны, им одновременно хотелось бы уничтожить воздушные силы Красных посредством ударов по базам с тем, чтобы величина $T(n)$ была мала или вообще равнялась нулю для последующих ходов. Кроме того, если они не предусмотрят выделения сил для противовоздушной обороны, то они могут понести большие потери в случае выделения Красными крупных сил для нанесения ударов по воздушным базам. Поэтому каждый игрок должен принимать во внимание возможности, имеющиеся в распоряжении его противника, и учитывать развитие событий в будущем.

В нашей модели тактической воздушной войны мы примем еще одно упрощение, состоящее в том, что мы будем считать платежные функции $S(m)$ и $T(n)$ линейными, например, $S(m)=m$, а $T(n)=n$. Тогда платеж для всей кампании будет равен

$$M(x, u; y, w)=\sum^{N}[(p-x-u)-(q-y-w)]. \qquad (3)$$

Синие желают сделать этот платеж как можно бо́льшим посредством выбора соответствующих значений x и u в каждой из N операций, а Красные хотят сделать его как можно меньшим, выбирая соответствующие значения y и w.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ ПО ДВУМ ЗАДАЧАМ

Мы начнем наш анализ модели тактической воздушной войны рассмотрением случая, когда потенциалы противовоздушной обороны c и k равны нулю. Это означает, что мы принимаем во внимание только две задачи: удары по базам и поддержку наземных сил, на выполнение которых должны выделяться самолеты. Уравнения (1) и (2) теперь будут иметь вид:

$$q_1=\max[0,\ q+s-aq-bx], \qquad (4)$$

$$p_1=\max[0,\ p+r-dp-ey], \qquad (5)$$

а уравнение платежа (3) сведется к

$$M(x, y)=\sum^{N}[(p-x)-(q-y)]. \qquad (6)$$

Этот вариант тактической военно-воздушной игры был сформулирован Фулкерсоном и Джонсоном [4], и ими было найдено решение для симметричных параметров, т. е. для $a=d$ и $b=e$. Полное решение для асимметричного варианта было позднее найдено Дрешером [3]. Мы приведем здесь полученные им результаты, подробные доказательства которых читатель может найти в работе [3]. Краткое описание метода доказательства приведено в Приложении.

Характерной особенностью решения тактической воздушной игры с распределением сил по двум задачам является то, что независимо от коэффициентов потерь, начальных условий и относительных сил сторон во время каждого данного хода обе стороны имеют оптимальные чистые стратегии. Хотя игрок делает каждый ход одновременно со своим противником, ему нет нужды прибегать к механизму случайного выбора или к обману. Это позволяет определить оптимальную стратегию каждого игрока, задавая для каждой операции кампании число самолетов, выделяемых для нанесения ударов по базам и для поддержки наземных сил. Эти оптимальные распределения зависят от коэффициентов потерь a, b, d, e и от числа операций, остающихся до конца данной кампании.

Для описания оптимальных стратегий введем некоторые обозначения. Из уравнения (4) видно, что если у Синих имеется достаточное число самолетов, то они могут уничтожить воздушные силы Красных, выделяя $x = \frac{(1-a)q+s}{b}$ самолетов для нанесения ударов по базам. Выделение большего числа самолетов для ударов по базам является расточительностью. Таким образом, можно назвать такое распределение, при котором Синие выделяют $\bar{x} = \min\left\{p, \frac{(1-a)q+s}{b}\right\}$ самолетов для ударов по базам Красных и $p-\bar{x}$ самолетов — для поддержки наземных войск, тактикой ударов по базам, так как оно воплощает тактику максимальных усилий по уничтожению воздушных сил противника на его базах. Такое распределение мы обозначим буквой A. Аналогично распределение, при котором Красные выделяют $\bar{y} = \min\left\{q, \frac{(1-d)p+r}{e}\right\}$ самолетов для ударов по базам, а оставшиеся $q-\bar{y}$ самолетов — для поддержки наземных сил, можно также назвать тактикой ударов по базам и обозначить также буквой A. Распределение, при котором один из игроков посылает все свои самолеты для поддержки наземных сил, будет обозначаться буквой G. Рассмотрим, наконец, такое распределение самолетов Синих, при котором они назначают $\bar{\bar{x}}$ самолетов, где $\bar{\bar{x}} < \bar{x}$, для ударов по базам, а остаток своих самолетов, $p-\bar{\bar{x}}$, —

для поддержки наземных войск. Применяя такую тактику, Синие уже не прилагают максимальных усилий для ударов по базам. Обозначим подобную тактику буквами (A, G). Аналогично обозначим буквами (A, G) такую тактику Красных, при которой они назначают для ударов по базам $\bar{\bar{y}}$ самолетов, где $\bar{\bar{y}} < \bar{y}$, и $q - \bar{\bar{y}}$ самолетов — для поддержки наземных войск.

Оптимальные стратегии игроков зависят от коэффициентов потерь. Вначале предположим, что $e - d > 0$ и $b - a > 0$. Смысл этих неравенств состоит в том, что ожидаемое число потерянных самолетов, приходящееся на одну сброшенную противником бомбу, больше ожидаемого числа самолетов, потерянных в результате аварий, зенитного огня и т. д., приходящегося на один самолетовылет. Оказывается, что оптимальная стратегия для каждой стороны требует начинать кампанию с серии распределений типа A и заканчивать ее серией распределений типа G. Моменты времени, в которые игроки должны переходить от тактики A к тактике G, будут в общем случае неодинаковыми для Синих и Красных. Они зависят от величин коэффициентов потерь.

Предположим теперь, что $e - d > 0$ и $b - a \leqslant 0$, т. е. Красные несут меньше потерь от налетов противника, чем от аварий. В этом случае характер оптимальной стратегии Красных не изменится. Они начинают кампанию серией атак типа A и заканчивают ее серией атак типа G. Оптимальная же стратегия Синих при этом несколько изменится. Они должны начинать серией атак типа (A, G), после чего следует одна операция с распределением типа A. Во всех остальных операциях Синие концентрируют все свои силы для поддержки наземных войск, т. е. применяют распределение типа G. Момент перехода Красных к поддержке наземных сил наступает позже, чем соответствующий момент для Синих.

Если $e - d \leqslant 0$ и $b - a > 0$, то только что сделанные выводы справедливы и при перемене ролей Синих и Красных.

Наконец, если $e - d \leqslant 0$ и $b - a \leqslant 0$, то у Синих и у Красных имеется одна и та же оптимальная стратегия, состоящая в том, что обе стороны выделяют самолеты только для поддержки наземных сил и совсем не выделяют самолетов для ударов по базам противника.

Все эти рассуждения сведены в табл. 1. В этой таблице нумерация ходов произведена от конца игры. Целые числа f и g, приведенные в таблице, определяют первую операцию (считая от конца игры), при которой происходит переход от поддержки наземных сил к ударам по аэродромам. Их можно найти следующим образом: число f равно наибольшему целому числу, для которого справедливо неравенство

$$\frac{1}{e} - \frac{1-(1-d)^f}{d} \geqslant 0.$$

В свою очередь число g равно наибольшему целому числу, для которого удовлетворяется неравенство

$$\frac{1}{b} - \frac{1-(1-a)^g}{a} \geqslant 0.$$

Заметьте, что если $e-d \leqslant 0$, то числа f не существует, а если $b-a \leqslant 0$, то не существует числа g. Мы можем в этих случаях положить их равными $+\infty$. Целое число t обозначает номер последней операции (считая от конца игры), при которой один игрок применяет тактику A, а другой — тактику G. Мы не оценивали t как функцию коэффициентов потерь.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ ПО ТРЕМ ЗАДАЧАМ

Возвратимся к более общей модели, в которой имеются все три типа задач: удары по базам, противовоздушная оборона и поддержка наземных войск. Мы увидим, что увеличение числа задач до трех приводит к существенным изменениям характера оптимальных тактик.

Для того чтобы упростить анализ, мы предположим, что Синие и Красные обладают одинаковыми оборонительными потенциалами, т. е. каждый самолет, выделенный для противовоздушной обороны, может предотвратить прорыв к объектам одного атакующего самолета. Иными словами, мы предполагаем, что $c=k=1$. Мы предполагаем также, что один атакующий самолет, которому удается проникнуть сквозь систему обороны, может уничтожить один самолет во время налета на аэродром, т. е. $b=e=1$, и что потери, вызванные неудачными

Таблица 1

Оптимальные распределения сил между двумя задачами

Коэффициенты потерь	Игрок	Оптимальное распределение во время n-го хода (считая от конца кампании)			
		$1 \leqslant n \leqslant \min(f+1, g+1)$	$\min(f+2, g+2) \leqslant n \leqslant t$	$n=t+1$	$t+2 \leqslant n \leqslant N$
$e-d>0,\ b-a>0$					
$f<g$	Синие	G	G	A	A
	Красные	G	A	A	A
$g<f$	Синие	G	A	A	A
	Красные	G	G	A	A
$g=f$	Синие	G	A	A	A
	Красные	G	A	A	A
$e-d>0,\ b-a\leqslant 0$					
$g=\infty$	Синие	G	G	A	(A, G)
	Красные	G	A	A	A
$e-d\leqslant 0,\ b-a>0$					
$f=\infty$	Синие	G	A	A	A
	Красные	G	G	A	(A, G)
$e-d\leqslant 0,\ b-a=0$					
$f=g=\infty$	Синие	G	G	G	G
	Красные	G	G	G	G

взлетами, авариями и зенитным огнем, незначительны. Наконец, мы предположим, что пополнения самолетов не производится, т. е. $r=s=0$. Тогда остаток самолетов в конце какой-нибудь операции будет для Красных

$$p_1 = \max[0,\ p - \max(0,\ y-u)],$$

а для Синих

$$q_1 = \max[0,\ q - \max(0,\ x-w)].$$

Мы должны подчеркнуть тот факт, что сделанные нами упрощающие предположения не оказывают никакого влияния на общую форму оптимальных стратегий. В следующем разделе мы покажем, как изменение величины противовоздушного оборонительного потенциала изменяет форму оптимальной стратегии.

Оптимальные стратегии для модели с тремя задачами отличаются от решения модели с двумя задачами в двух отношениях: во-первых, оптимальная тактика зависит от соотношения сил обеих сторон; во-вторых, оптимальный способ игры требует от одного из игроков применения смешанной стратегии. Мы дадим полное описание оптимального распределения тактических воздушных сил в зависимости от числа операций, которые предстоит провести, и от соотношения сил обеих сторон. При этом мы будем всегда предполагать, что в каждом рассматриваемом ходе Синие являются более сильной стороной, чем Красные, т. е. $p \geqslant q$. Следует подчеркнуть, что это не более как условное соглашение, необходимое для облегчения описания оптимальных стратегий, которое ни в коем случае не означает, что сторона, более сильная на данном этапе игры, будет всегда оставаться ею в течение всех последующих ходов. Однако само собой разумеется, что если игрок, который был более сильным в начале кампании, будет придерживаться оптимальной стратегии, он останется более сильной стороной на протяжении всей кампании.

Начнем наше исследование с качественного описания оптимальных стратегий. После этого мы дадим числовую таблицу, в которой будут подведены итоги относительно оптимальных стратегий для кампаний, состоящих самое большее из восьми операций. В заключение будет разобран пример, иллюстрирующий важность правильного распределения сил в начальной операции. Математическая теорема, на которой основан анализ, приведена в Приложении.

Ниже приведены свойства оптимальных стратегий.

Кампания заканчивается поддержкой наземных сил. Кампания всегда заканчивается серией операций по поддержке наземных сил, т. е. во время заключительного периода кампании как Синие, так и Красные концентрируют все свои силы для поддержки наземных войск. Во время этого заключительного периода обе стороны имеют одинаковые оптимальные стратегии, независимо от их начальных сил.

Синие (более сильная сторона) разделяют свои силы. За исключением заключительной фазы кампании оптимальные стратегии Синих и Красных все время сильно отличаются друг от друга. Во время любой из этих начальных операций более сильная сторона, т. е. Синие, применяет чистую стратегию. Иначе говоря, существует некоторое наилучшее распределение воздушных сил Синих между тремя задачами. Имеется некоторое критическое значение (приблизительно 2,7) отношения сил Синих и Красных, которое следующим образом определяет распределение самолетов Синих во время этих начальных операций: если отношение сил меньше этого критического значения, то оптимальная стратегия более сильной стороны во время начальных операций заключается в распределении самолетов между двумя задачами: ударами по базам и противовоздушной обороной, и в отказе от поддержки наземных войск. Количественно это распределение зависит от соотношения сил обеих сторон и от числа операций, которые должны быть проведены до конца кампании. Если соотношение сил Синих и Красных больше критического значения, то Синие должны все время распределять свои силы по трем задачам, независимо от имеющегося числа самолетов. Количество самолетов, выделяемых на выполнение каждой задачи, по-прежнему зависит от числа операций, которое остается до конца кампании.

Красные (более слабая сторона) смешивают свои стратегии и концентрируют свои силы. Более слабая воюющая сторона не может использовать какую-нибудь единственную стратегию, а должна применять политику обмана во время всех операций, за исключением заключительных. В отличие от своего противника, более слабая сторона не имеет какой-то одной наилучшей стратегии. Поэтому она должна применять смешанные стратегии, добиваясь при этом возможно большего платежа. Если она не слишком слабая, т. е. если отношение сил меньше критического значения, то она должна концентрировать все свои силы или на ударах по базам или на противовоздушной обороне. Решение, какую из этих задач предпочесть, принимается с помощью какого-нибудь механизма случайного выбора. Если Красные очень слабы, т. е. соотношение сил больше критического значения, то они назначают все свои самолеты на выполнение одной из трех задач, определяя свои частные способы действия опять-таки с помощью механизма случайного выбора. Другими словами, если один игрок значительно слабее своего противника, то он должен использовать возможность получения платежа в начальных операциях. Естественно, что для достижения максимального эффекта он должен правильно проводить тактику обмана, т. е. его механизм случайного выбора должен выбирать задачи в соответствии с определенными относительными частотами *.

Силы смешиваются и разделяются для выполнения одних и тех же задач. Интересно отметить, что в каждой операции Красные, более слабая сторона, маскируют свой выбор из тех же задач, которые выбраны Синими в их распределении сил. Так, если Красные очень слабы, то они маскируют свой выбор из всех трех задач, а Синие в это время должны распределить свои силы между всеми этими тремя задачами. Если же Красные не слишком слабы, то они проводят политику обмана уже относительно двух задач — удары по базам или противовоздушная оборона, а Синие разделяют свои силы между выполнением тех же самых двух задач.

В процессе кампании оборона Синих ослабевает. Как отмечалось выше, перед заключительной фазой кампании Синие разделяют свои силы на выполнение двух или трех задач одновременно. Количественно это разделение зависит от соотношения сил противника и от числа оставшихся операций. Однако по мере раззития кампании часть сил Синих, выделенная для противовоздушной обороны, уменьшается. В то же время часть сил Синих, выделенная для ударов по базам, возрастает. Во время этого периода вероятность того, что Красные будут атаковать базы Синих, уменьшается, а вероятность перехода Красных к обороне увеличивается.

Оборона Синих в течение длительной кампании. На начальной стадии сравнительно длительной кампании более сильная сторона обороняется от концентрированных атак более слабой стороны. Во время этого периода Синие выделяют для противовоздушной обороны приблизительно столько самолетов, сколько имеется у Красных. Напоминаем, что нами принято вполне определенное частное значение эффективности выполнения задачи противовоздушной обороны.

---

* То есть с определенными вероятностями. (*Прим. перев.*)

СВОДНАЯ ТАБЛИЦА

В табл. 2 суммированы оптимальные стратегии для кампаний, состоящих самое большее из восьми операций. В таблице даны оптимальные распределения сил для каждой операции (здесь номер операции равен числу оставшихся операций данной кампании) в зависимости от соотношения сил к моменту проведения этой операции. Однако цена игры, приведенная в последнем столбце таблицы, дана для кампании определенной длительности.

ПРИМЕР, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К НАЧАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Важность правильного распределения сил в начальной операции (а следовательно и в любой последующей операции) может быть наглядно показана с помощью следующего примера. Предположим, что к началу первой операции кампании, состоящей из пяти операций, у Синих было $p=85$ самолетов, а у Красных $q=68$ самолетов. Из табл. 2 мы видим, что цена игры в конце пятой операции для Синих при указанных выше условиях будет равна 108. Предположим, что при проведении первой операции Синие сконцентрировали все свои силы, т. е. все 85 самолетов, на ударах по базам противника, что не является оптимальной тактикой, а затем остающиеся операции они проводят по оптимальному плану. Тогда, если Красные на время первой операции назначат все свои силы, т. е. 68 самолетов, на противовоздушную оборону, то у Синих останется всего лишь 17 самолетов, а у Красных — ничего. Оптимальный план проведения последних четырех операций требует от Синих выделения всех 17 самолетов на поддержку наземных сил. В этом случае цена игры, т. е. кампании из пяти операций, будет равна 68. Таким образом, цена игры для Синих будет на 40% меньше, чем в случае, когда во время первой операции Синие назначают для ударов по базам 75 самолетов, а для противовоздушной обороны 10 самолетов.

Теперь предположим, что Красные, вместо применения смешанных стратегий, во время первой операции направили все свои самолеты для ударов по базам про-

Таблица 2

Оптимальные стратегии в тактической воздушной кампании, состоящей из нескольких операций (сильная сторона имеет p самолетов, слабая сторона q самолетов ($p>q$)

Период кампании	Длительность кампании (число операций, остающихся в кампании)	Соотношение начальных сил противников (отношение сил сильной стороны к силам слабой стороны) p/q	Оптимальное начальное распределение сильной стороны (число самолетов)			Оптимальное начальное распределение слабой стороны (вероятность распределения всех самолетов)			Математическое ожидание цены кампании (продвижение линии фронта)
			удары по базам	ПВО	поддержка наземных войск	удары по базам	ПВО	поддержка наземных войск	
I	1	1,00 до ∞	0	0	p	0	0	1	$p-q$
II	2	1,00 до ∞	0	0	p	0	0	1	$2(p-q)$
III	3	1,00 до 2,00	q	0	$p-q$	0,50	0,50	0	$3(p-q)$
	3	2,00 до ∞	$1,5q$	$0,5q$	$p-2q$	0,50	0,50	0	$3(p-q)$
IV	4	1,00 до 2,33	$0,5p+0,5q$	$0,5p-0,5q$	0	0,50	0,50	0	$4,5(p-q)$
	4	2,33 до ∞	$1,67q$	$0,67q$	$p-2,33q$	0,33	0,33	0,33	$4,00p-3,33q$
V	5	1,00 до 1,70	$0,41p+0,59q$	$0,59p-0,59q$	0	0,53	0,47	0	$6,35p-6,35q$
	5	1,70 до 2,45	$0,55p+0,36q$	$0,45p-0,36q$	0	0,45	0,55	0	$5,82p-5,45q$
	5	2,45 до ∞	$1,70q$	$0,75q$	$p-2,45q$	0,25	0,30	0,45	$5,00p-3,45q$
VI	6	1,00 до 1,44	$0,32p+0,68q$	$0,68p-0,68q$	0	0,56	0,44	0	$8,39p-8,39q$
	6	1,44 до 1,78	$0,40p+0,56q$	$0,60p-0,56q$	0	0,52	0,48	0	$8,00p-7,83q$
	6	1,78 до 2,51	$0,59p+0,22q$	$0,41p-0,22q$	0	0,41	0,59	0	$7,04p-6,12q$
	6	2,51 до ∞	$1,71q$	$0,80q$	$p-2,51q$	0,20	0,29	0,51	$6,00p-3,51q$
VII	7	1,00 до 1,29	$0,25p+0,75q$	$0,75p-0,75q$	0	0,58	0,42	0	$10,50p-10,50q$
	7	1,29 до 1,53	$0,29p+0,70q$	$0,71p-0,70q$	0	0,57	0,43	0	$10,26p-10,19q$
	7	1,53 до 1,84	$0,41p+0,51q$	$0,59p-0,51q$	0	0,50	0,50	0	$9,54p-9,09q$
	7	1,84 до 2,55	$0,63p+0,11q$	$0,37p-0,11q$	0	0,37	0,63	0	$8,21p-6,64q$
	7	2,55 до ∞	$1,72q$	$0,84q$	$p-2,55q$	0,17	0,28	0,55	$7,00p-3,55q$
VIII	8	1,00 до 1,25	$0,20p+0,80q$	$0,80p-0,80q$	0	0,60	0,40	0	$12,60p-12,60q$
	8	1,25 до 1,40	$0,22p+0,78q$	$0,78p-0,78q$	0	0,59	0,41	0	$12,48p-12,45q$
	8	1,40 до 1,59	$0,28p+0,69q$	$0,72p-0,69q$	0	0,56	0,44	0	$12,06p-11,86q$
	8	1,59 до 1,88	$0,42p+0,46q$	$0,58p-0,46q$	0	0,49	0,51	0	$11,03p-10,22q$
	8	1,88 до 2,58	$0,66p+0,01q$	$0,34p-0,01q$	0	0,34	0,66	0	$9,36p-7,07q$
	8	2,58 до ∞	$1,72q$	$0,86q$	$p-2,58q$	0,14	0,28	0,58	$8,00p-3,58q$

тивника, а все остальные четыре операции провели согласно оптимальному плану. В этом случае, если бы Синие выделили 17 самолетов для ударов по базам, а 68 — для противовоздушной обороны, то силы Красных уменьшились бы до 51 самолета, а у Синих сохранились бы все 85 самолетов. В конце кампании платеж Синих при этом будет равен $(9/2) \cdot (85-51) = 153$, т. е. почти на 50% выше, чем в случае применения Красными своей оптимальной стратегии проведения первой операции.

СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОТИВОВОЗДУШНОЙ ОБОРОНЫ

Теперь предположим, что потенциалы противовоздушной обороны c и k могут принимать произвольные значения между нулем и единицей, но сохраним при этом условие $c=k$. Представим множество оптимальных стратегий как функцию общего значения потенциала противовоздушной обороны k, где $0<k<1$. Мы по-прежнему предполагаем, что $b=e=1$ и $a=d=0$. Тогда остаток самолетов у Синих и Красных в конце первой операции будет соответственно

$$p_1 = \max[0,\ p - \max(y - ku)] \quad (0<k<1),$$
$$q_1 = \max[0,\ q - \max(x - kw)] \quad (0<k<1).$$

Оптимальные распределения сил по-прежнему определяются соотношением сил Синих (более сильной стороны) к силам Красных (более слабой стороны) и числом остающихся операций. Вообще любая кампания может быть разделена на три периода, каждый из которых состоит из аналогичных операций. Эти периоды мы будем называть (начиная с конца кампании) периодом поддержки наземных войск, периодом ударов по базам и вероятностным периодом. Следующие стратегии оптимальны для этих трех периодов.

Оптимальные стратегии во время периода поддержки наземных войск. В этот период входят две последние операции кампании. Во время этого периода оптимальной стратегией как Синих, так и Красных будет назначение всех сил на поддержку наземных войск.

Оптимальные стратегии во время периода ударов по базам. Периоду поддержки наземных сил предшествует ряд операций, во время которых Красные, т. е. более слабая сторона, назначают все свои силы q для осуществления ударов по базам Синих. Одновременно Синие, более сильная сторона, назначают q своих самолетов для ударов по базам, а $p-q$ самолетов для поддержки наземных сил. Число операций, входящих в этот период, равно $\tau-1$, где τ есть наибольшее целое число, которое меньше или равно $\frac{1}{k}$, т. е. $\tau=\left[\frac{1}{k}\right]$. Заметьте, что если k больше, чем $1/2$, то $\tau=1$ и периода ударов по базам в кампании нет. Следовательно, по мере уменьшения k до нуля длительность периода ударов по базам возрастает.

Оптимальные стратегии во время вероятностного периода. В общем случае периоду ударов по базам предшествует начальный период, который мы называем вероятностным. Если Синие немного сильнее, чем Красные, то они назначают q самолетов для ударов по базам, а $p-q$ самолетов для противовоздушной обороны. Если Синие умеренно сильнее Красных, то они назначают x^* самолетов (где $x^*>q$) для ударов по базам, а $p-x^*$ самолетов для противовоздушной обороны. Если, однако, Синие значительно сильнее Красных, то они разделяют свои силы на выполнение всех трех задач. Во время этих операций Красные, более слабая сторона, должны следовать одной из трех стратегий, перечисляемых ниже, в зависимости от своей относительной слабости:

1. Если Красные немного слабее Синих, то они должны концентрировать все свои силы на ударах по базам Синих.

2. Если Красные умеренно слабее Синих, то они должны концентрировать все свои силы либо на ударах по базам, либо на противовоздушной обороне, причем решение в каждом конкретном случае принимается с помощью механизма случайного выбора, подчиняющегося заданному распределению вероятностей.

3. Если Красные значительно слабее Синих, то они должны концентрировать свои силы на выполнении одной из трех задач, выбираемых, как и в предыдущем случае, в соответствии с заданным распределением вероятностей.

Продолжительность вероятностного периода равна $(N-\tau-1)$ операциям, где N — длительность кампании. При $N \leqslant \tau+1$ вероятностного периода вообще не должно существовать. Так происходит, если кампания непродолжительна или если потенциал противовоздушной обороны очень низок. Например, для того чтобы в кампании, состоящей из 21 операции, не было начального периода, требуется, чтобы потенциал противовоздушной обороны не превышал 0,05. Или же наоборот, при потенциале противовоздушной обороны, равном 0,05, любая кампания, состоящая более чем из 21 операции, должна включать в себя начальный вероятностный период.

За исключением ситуации, когда $N \leqslant \tau+1$ и когда, следовательно, отсутствует вероятностный период, оптимальные стратегии требуют от слабого игрока применения механизма случайного выбора. Следовательно, они сильно отличаются от оптимальных стратегий для случая, когда потенциал противовоздушной обороны равен нулю. Если, однако, $N > \tau+1$, то оптимальные стратегии по существу такие же, как в случае, когда $c=f=0$. Как уже отмечалось, если $k > {}^1/_2$, то среднего периода нет. При этом мы по существу имеем случай, когда потенциалы противовоздушной обороны обеих сторон равны единице.

Математические доказательства этих выводов даны в работе [2], а идеи, лежащие в их основе, изложены в Приложении.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ ИГР

В своем превосходном изложении метода моделирования игр Томас и Димер [5] определяют его как «...разумное использование реализаций партий в качестве важнейшего аппарата для формулирования игры, решения этой игры или для получения некоторого понятия о ее решении». Хотя основная цель нашей статьи состоит в формулировании военно-воздушной игры и в получении игрового решения проблемы определения оптимального распределения тактических воздушных сил данного театра военных действий между различными задачами, мы считаем, что наш анализ может быть использован при рассмотрении вопроса о возможности нахождения решений игр посредством моделирования. По нашему мнению игра, которую мы рассмотрели, дает дополнительные доказательства того, что метод моделирования не может служить полезным аппаратом для решения игр или получения сколько-нибудь существенной информации относительно решения. При этом мы считаем, что определение метода моделирования игр, данное выше, включает наряду с проигрыванием игры людьми проигрывание ее вычислительной машиной.

Тактическая воздушная игра принадлежит к таким ситуациям, которые часто исследуются с помощью моделирования. Она имеет дело с весьма реальной проблемой, которая может быть представлена в виде многоходовой игры, в которой каждый игрок одновременно со своим противником делает выбор из непрерывного множества альтернатив и в которой исход каждого хода оказывает влияние на все последующие ходы. Она безусловно значительно проще, чем большинство игровых моделей, изучаемых с помощью моделирования. Этот факт, однако, только укрепляет наше убеждение, что моделирование не может быть полезным при решении игр или при отыскании существенной информации относительно природы решения. Мы покажем, что природа решения тактической воздушной войны, рассмотренной в данной работе, такова, что весьма сомнительно, чтобы моделирование дало существенную информацию относительно решения данного типа игр. Так как мы не думаем, что чем сложнее проблема, тем проще ее решение, то мы считаем, что моделирование будет еще менее полезным при решении более сложных игр.

Оценивая полезность моделирования в качестве аппарата для решения игр, мы не требуем, чтобы оно приводило к аналитическим решениям, т. е. к оптимальным стратегиям. Главная причина этого состоит в том, что игра сама по себе является весьма несовершенной моделью и в качестве таковой сильно идеализируется. Поэтому значение аналитического решения состоит не в том, что оно позволяет исследователю подставить некоторые числа и получить на выходе другие числа, которые укажут ему правильный способ действия с точностью до трех (или одного) десятичных знаков. Напротив, имея аналитическое решение, исследователь может рассмотреть основные особенности решения, может различить и изучить существенные детали решения и может, таким образом, прийти к правильным действиям. Поэтому мы считаем уместным и своевременным спросить тех, кто пользуется моделированием, могут ли они определить по крайней мере основные особенности решения и наиболее важные детали.

Обратимся теперь к решению тактической воздушной игры с тремя задачами. Его важнейшие особенности следующие: а) оптимальное распределение в данной операции зависит от соотношения сил обеих сторон и от числа операций, оставшихся до конца кампании; б) оптимальные стратегии для более слабого игрока смешанные, т. е. включают случайный выбор. Две другие особенности решения имеют значение по крайней мере тогда, когда речь идет о моделировании. Во-первых, решения не являются непрерывными функциями. Во-вторых, важнейшие детали оптимальных стратегий не являются интуитивными по своему характеру. Например, если потенциал противовоздушной обороны k таков, что $0<k<1$, то существование трех периодов и зависимостей длительности вероятностного периода от k является такой особенностью, при выявлении которой интуиция бессильна. Внимательное изучение таблицы 1 или теоремы 1 в Приложении показывает, что точные численные или алгебраические характеристики оптимальных стратегий тоже, по всей вероятности, не могут быть получены с помощью только одной интуиции.

Спросим теперь обо всем этом у сторонника моделирования. Насколько успешно можно получать при моделировании наиболее важные характеристики решения? Первое затруднение состоит в том, что при моделировании трудно сделать правдоподобные предположения относительно решения. Поэтому для исследования игры требуется проиграть ее несколько раз. При этом возникает вопрос о методике исследования игры. Каким должен быть достаточно чувствительный метод исследования и сколько партий игры требуется реализовать для получения результата?

С первого взгляда следовало бы попробовать m различных распределений при каждом ходе каждой стороны. Если игра состоит из N ходов, то потребовалось бы проиграть m^{2N} партий. Скромное желание исследовать три распределения при каждом ходе игры, состоящей из пяти операций, потребовало бы проиграть 3^{10}, или приблизительно 59 000 партий. Более того, это исследование соответствовало бы только одной паре значений количеств самолетов, имеющихся у сторон в начале операции. Если требуется произвести испытания для r различных значений p (начальное число самолетов Синих) и для s различных значений q (начальное число самолетов Красных), то потребное число партий возрастает до $rs(m^{2N})$. Совершенно очевидно, что такую игру можно проиграть только на вычислительной машине, но даже в этом случае большое число партий сильно осложнит проблему истолкования результатов. Тем не менее главное возражение против только что описанной методики основано не на затруднениях, связанных с большим числом партий, которые необходимо проиграть, а на следующем более принципиальном факте. Оптимальные стратегии являются функциями числа операций (времени) и наличного числа самолетов у обеих сторон (переменных состояния), т. е. они имеют форму $f(p, q, n)$, где n есть число операций, p — число самолетов у Синих и q — число самолетов у Красных. С другой стороны, предложенная методика состоит по существу в испытании функций только числа операций, т. е. функций вида $g(n)$. Таким образом, описанная выше методика моделирования не обещает многого.

Для получения рациональной методики исследования необходимо выяснить зависимости оптимальных стратегий от величин p и q. Нам неизвестны сколько-нибудь удовлетворительные решения этой проблемы. Самый простой способ, который мы смогли придумать, это рассматривать области на плоскости (p, q) и производить распределения сил в зависимости как от ходов, так и от этих областей. Это, однако, может быстро привести к необходимости рассмотреть астрономическое число чистых стратегий. Если, например, при каждом ходе мы имеем t областей на плоскости (p, q) и желаем рассмотреть m распределений для каждой из областей, то для N-ходовой игры будет иметься m^{tN} возможных чистых стратегий для каждой стороны. При $m=3$, $t=9$ и $N=5$ мы получаем 3^{45}, или приблизительно $2{,}9 \times 10^{21}$ чистых стратегий для каждой стороны.

Можно возразить, что с помощью разумного выбора число альтернатив может быть уменьшено. Нам кажется, что это означает решение без доказательства. В самом деле, если учесть сложный неинтуитивный характер решения, то как узнать, что такое разумный выбор, не зная самого решения. Имеются другие причины, заставляющие нас возражать против описанной нами методики. Сейчас мы не будем их касаться, так как они присущи всем методам моделирования и мы рассмотрим их позднее.

По существу, применение моделирования для определения решения игры, осуществляемое либо человеком, либо вычислительной машиной, либо обоими вместе, является попыткой определить функции $f(p, q, n)$, которые давали бы оптимальные стратегии с помощью очень ограниченного числа выборок чистых стратегий. Хотя большое число партий, требуемое даже для скромного числа выборок стратегий, кажется нам серьезным препятствием для применения моделирования, мы чувствуем, что имеются более основательные причины, заставляющие нас быть пессимистичными относительно применения моделирования в качестве аппарата для определения решения игры. Эти причины, которые связаны с природой решения, мы сейчас и рассмотрим.

Наш пессимизм основывается, прежде всего, на том факте, что оптимальные стратегии являются функциями $f(p, q, n)$ сил сторон и числа операций, которые не всегда непрерывны. Мы уже упоминали некоторые трудности, возникающие из того, что стратегии являются функциями как p и q, так и n. Теперь мы утверждаем, что основное затруднение состоит в том, что само решение не является непрерывным. Моделирование в лучшем случае может дать информацию относительно некоторого конечного числа стратегий в дискретном множестве точек (p, q), а относительно промежуточных точек нельзя ничего сказать с какой-нибудь степенью уверенности из-за разрывов непрерывности. Даже если мы увеличим число рассматриваемых дискретных точек, все равно будут разрывы непрерывности между точками, и мы не сможем осуществить сколько-нибудь обоснованную интерполяцию. Можно показать, что в этом случае нельзя быть уверенным в правильности информации даже относительно выборочных точек. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, при моделировании рассматривается только конечное число распределений среди непрерывного множества (континуума) возможных распределений. Во-вторых, в процессе проведения партии силы сторон будут отличаться от тех, которые были взяты при выборке. Поэтому приходится либо считать такую точку одной из рассматриваемых точек, либо производить между ними интерполяцию.

Пожалуй, наиболее серьезным возражением против использования моделирования в качестве аппарата для изучения игр является тот факт, что решения многих игр состоят из смешанных стратегий. Поскольку мы имеем дело не с одноходовой матричной игрой, мы не видим, как повторение партий может привести к решению в смешанных стратегиях. Любая попытка составить матрицу результатов проигрываний одной стратегии против другой не может привести к сколько-нибудь значительным результатам. Такая матрица будет просто представлять результаты проигрывания некоторого конечного числа чистых стратегий из бесконечного числа чистых стратегий одного игрока против аналогичного множества стратегий другого игрока. Таким образом, решение такой матричной игры по существу ничего не дает.

Эта неспособность вскрыть необходимость применения случайного выбора или обмана является, очевидно, основным камнем преткновения на пути моделирования игр. Она не только держит игрока в неведении относительно его наилучшей стратегии, но может даже не сказать ему ничего о природе его наилучшей стратегии. Ошибочность применения такого метода определения наилучшего способа действий в ситуациях, когда этот метод часто неспособен давать такие рекомендации, очевидна. Если кто-либо серьезно заинтересован в применении моделирования игр при принятии решения, то пренебрежение смешанными стратегиями может привести его к неприятным последствиям. В качестве иллюстрации мы хотим привести последний абзац раздела «Пример, иллюстрирующий чувствительность решения по отношению к начальному распределению». Там Красные вместо смешанных стратегий применили чистую стратегию ударов по базам противника, и это повысило цену игры для Синих на 50%. Более того, эта частная чистая стратегия легко может рассматриваться командованием Красных на основании какой-нибудь доктрины или на основании опыта как «разумная» и «хорошая» стратегия. Чтобы получить грубое представление о том, что получится, если вместо применения смешанных стратегий все время придерживаться какой-нибудь одной чистой стратегии, достаточно подумать о том, что станет с игроком в покер, который никогда не блефует.

В заключение подытожим те основные причины, по которым мы считаем, что моделирование игр не может служить полезным орудием для определения решений игр. Во-первых, сложность решения приводит к необходимости проигрывать весьма большое число партий для исследования игры. Во-вторых, если даже это исследование произведено, тот факт, что решение является функцией положения и времени и может не быть непрерывным, приводит к весьма несовершенному представлению относительно решения. В-третьих, маловероятно, что с помощью моделирования игр могут быть получены указания о применении смешанных стратегий. Авторы уверены, что не может быть никаких сомнений относительно возможности применения моделирования для решения более сложных игр, так как нет никаких оснований считать, что чем сложнее становится задача, тем проще становится ее решение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе [1] дано доказательство следующей теоремы для модели с тремя задачами при $c=k=1$. Ниже приводится его сокращенное изложение. Обозначим через N длительность кампании, а через m — номер данного хода, отсчитываемый от конца кампании.

Теорема. *Если $N=1$ или 2, то цена игры равна*

$$V_N(p_N, q_N)=N(p_N-q_N).$$

Синие имеют оптимальную чистую стратегию $x_m=u_m=0$ для $m\leqslant N$. Красные имеют оптимальную чистую стратегию $y_m=w_m=0$ для $m\leqslant N$.

Если $N \geqslant 3$, то цена игры определяется $(N-2)$-кусочной линейной функцией

$$V_N(p_N, q_N) = A_N^i p_N - B_N^i q_N \ (i=1, 2, \ldots, N-2),$$

где постоянные A_N^i и B_N^i положительны и монотонно уменьшаются с возрастанием i для фиксированного значения N; величина верхнего индекса i определяется отношением p_N/q_N. Оптимальные стратегии двух игроков будут следующие:

1. При ходе $m=1,2$ (считая с конца) игроки выбирают

$$x_m = u_m = y_m = w_m = 0.$$

2. При ходе $m=3$, если $p_3 \geqslant q_3$, Синие выбирают такие значения x_3 и u_3, что

$$q_3 \leqslant x_3 \leqslant \min\left(\frac{p_3+q_3}{2};\ \frac{3q_3}{2}\right),$$

$$u_3 = x_3 - q_3.$$

Красные выбирают $y_3 = q_3$ или $w_3 = q_3$, каждую с вероятностью $1/2$.

3. При $(m+1)$-м ходе, где $3 \leqslant m \leqslant N-1$, если $p_{m+1} \geqslant q_{m+1}$, отношение p_{m+1}/q_{m+1} определяет целое число i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, и Синие делают выбор

$$x_{m+1} = \frac{(2m - A_m^i)\, p_{m+1} - (m - 2B_m^i)\, q_{m+1}}{m + B_m^i},$$

$$u_{m+1} = p_{m+1} - x_{m+1}$$

для $i=1, 2, \ldots, m-2$ и выбор

$$x_{m+1} = \left(2 - \frac{1}{B_m^{m-2}}\right) q_{m+1},$$

$$u_{m+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) q_{m+1}$$

для $i = m-1$, где постоянные A_m^i и B_m^i определяются игрой с продолжительностью m и с начальными условиями p_m, q_m. Красные выбирают y_{m+1} или

$w_{m+1}=q_{m+1}$ *с вероятностями* $\alpha_m^i=\frac{B_m^i}{m+B_m^i}$ и $\beta_m^i=\frac{m}{m+B_m^i}$ *соответственно для* $i=1, 2, \ldots, m-2$, *однако если* $i=m-1$, *то Красные выбирают* $y_{m+1}=q_{m+1}$ *с вероятностью* $\alpha_m^i=\frac{1}{m}$, *или* $w_{m+1}=q_{m+1}$ *с вероятностью* $\beta_m^i=\frac{1}{B_m^{m-2}}$, *или* $y_{m+1}=w_{m+1}$ *с вероятностью* $1-\frac{1}{m}-\frac{1}{B_m^{m-2}}$.

Постоянные теоремы A_N^i и B_N^i определяются по индукции следующим образом:

$$A_3^1=3,\ A_{n+1}^{n-1}=(A_n^{n-2}+1)\quad (n\geqslant 3),$$

$$B_3^1=3,\quad B_{n+1}^{n-1}=\left(4-\frac{1}{A_n^{n-2}}-\frac{1}{B_n^{n-2}}\right)\ (n\geqslant 3),$$

$$B_n^0=A_n^0=0\quad (n\geqslant 3),$$

$$A_{n+1}^i=\frac{A_n^{n-2}\,(2B_n^i+A_n^i)}{B_n^i+A_n^{n-2}},\quad B_{n+1}^i=\frac{3A_n^{n-2}\,B_n^i}{B_n^i+A_n^{n-2}}$$

$$(i\geqslant 1,\ n=i+2,\ i+3, \ldots).$$

Верхний индекс i связан с отношением p_N/q_N с помощью ступенчатой функции $\varphi(p_N/q_N)$. Для различных значений N точки, в которых функция делает скачки, определяются последовательностью $\lambda_N^i\ (i=1, \ldots, N-2)$, которую мы определим ниже. Функция $\varphi(p_N/q_N)=i$, если $\lambda_N^i\leqslant p_N/q_N\leqslant\leqslant\lambda_N^{i+1}$. Последовательности λ_N^i определяются по формулам

$$\lambda_3^1=1,$$

$$\lambda_n^{n-1}=+\infty\qquad (n=3,\ 4,\ 5, \ldots),$$

$$\lambda_n^{n-2}=B_n^{n-2}-1\qquad (n=4,\ 5,\ 6, \ldots),$$

$$\lambda_n^i=\frac{B_n^{i-1}-B_n^i}{A_n^{i-1}-A_n^i}\qquad (n=4,\ 5,\ 6,\ \ldots;\ i=1,\ 2,\ 3, \ldots, m-3).$$

Основная идея анализа тактической военной игры одинакова для каждого из трех рассмотренных случаев. Она состоит в доказательстве того, что если игра с длительностью $(N-1)$ ходов может быть решена, то игра с длительностью N ходов может быть приведена к рассмотрению начального, т. е. N-го, хода. Таким образом, задача по существу сводится к решению одноходовой игры. Детали решения результирующей одноходовой игры, однако, изменяются от случая к случаю и имеют очень сложный характер. Читателю, который пожелал бы познакомиться с этими деталями, мы рекомендуем обратиться к работам [1, 2 и 3], в которых приведены полные доказательства. Здесь же мы покажем, как осуществляется сведение к рассмотрению одного хода для случаев, в которых имеется противовоздушная оборона, т. е. при $c=k$, $0<k\leqslant 1$. Изменения, которые необходимо произвести для случая $k=0$, элементарны.

Во-первых, необходимо точно определить стратегии для игры в нормальной форме. В дальнейшем ходы будут нумероваться, начиная с конца игры, т. е. n-ый ход означает, что до конца игры остается n ходов. Предполагается также, что каждый игрок знает, как развивается игра от этапа к этапу, и что каждый игрок на любом этапе знает переменные состояния и весь предыдущий ход игры.

Чистые стратегии игры в нормальной форме определяются индуктивно по числу ходов. Любая стратегия Синих в одноходовой игре является точкой $X_1=(x_1, u_1)$, где $x_1\geqslant 0$, $u_1\geqslant 0$, и $x_1+u_1\leqslant p_1$. Аналогично любая стратегия Красных в одноходовой игре является точкой $Y_1(y_1, w_1)$, где $y_1\geqslant 0$, $w_1\geqslant 0$, $y_1+w_1\leqslant q_1$. Пусть σ_N есть какая-то стратегия Синих в N-ходовой игре. σ_N, безусловно, является функцией p_N и q_N. Тогда в $(N+1)$-ходовой игре Синие при $(N+1)$-ом ходе выбирают точку $X_{N+1}=(x_{N+1}, u_{N+1})$ треугольника Δ_{N+1}, определяемого условиями $x_{N+1}\geqslant 0, u_{N+1}\geqslant 0$, $x_{N+1}+u_{N+1}\leqslant p_{N+1}$. Одновременно Красные выбирают точку $Y_{N+1}=(y_{N+1}, w_{N+1})$ треугольника D_{N+1}, определяемого условиями $y_{N+1}\geqslant 0$, $w_{N+1}\geqslant 0$, $y_{N+1}+w_{N+1}\leqslant q_{N+1}$. Эти выборы приводят к следующим значениям переменных состояния p_N и q_N:

$$p_N = \max[0,\ p_{N+1} - \max(0,\ y_{N+1} - ku_{N+1})], \tag{7}$$

$$q_N = \max[0,\ q_{N+1} - \max(0,\ x_{N+1} - kw_{N+1})]. \tag{8}$$

Стратегия Синих σ_{N+1} в $(N+1)$-ходовой игре состоит тогда в выборе точки X_{N+1} в треугольнике Δ_{N+1} и определяется функцией Φ_N, которая связывает с каждой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}) в пространстве произведений $\Delta_{N+1}D_{N+1}$ некоторую стратегию σ_N в N-ходовой игре. Таким образом, σ_{N+1} может быть записана как $\sigma_{N+1} = (X_{N+1}, \Phi_N)$.

Аналогично, стратегия Красных τ_{N+1} в $(N+1)$-ходовой игре определяется как выбор точки Y_{N+1} и как некоторая функция Ψ_N, связывающая с каждой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}) некоторую стратегию τ_N в N-ходовой игре. Таким образом, $\tau_{N+1} = (Y_{N+1}, \Psi_N)$.

Смешанные стратегии игроков теперь могут быть определены по индукции таким же образом. В одноходовой игре смешанная стратегия для Синих представляет собой распределение вероятностей G_1 на Δ_1, а смешанная стратегия для Красных — распределение вероятностей H_1 на D_1. Предположим теперь, что смешанные стратегии для игр с длительностью N были ранее определены. Пусть G_N есть некоторая смешанная стратегия Синих в N-ходовой игре. Смешанная стратегия G_{N+1} в $(N+1)$-ходовой игре есть распределение вероятностей g_{N+1} на Δ_{N+1} и является, функцией Φ_N, которая связывает с каждой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}) смешанную стратегию в N-ходовой игре. Таким образом, смешанная стратегия в $(N+1)$-ходовой игре может быть записана, как $G_{N+1} = (g_{N+1}, \Phi_N)$. Аналогично, смешанная стратегия Красных H_{N+1} является распределением h_{N+1} на D_{N+1} и функцией Ψ_N и может быть записана, как $H_{N+1} = (h_{N+1}, \Psi_N)$.

Предположим, что в игре с длительностью N существуют стратегия G_N^* для Синих и стратегия H_N^* для Красных, обладающие следующими свойствами:

1. Если Синие придерживаются стратегии G_N^*, а Красные — стратегии H_N^*, то существует математическое ожидание $\mathrm{E}(G_N^*, H_N^*)$.

2. Для всех чистых стратегий Красных τ_N существует $\mathrm{E}(G_N^*, \tau_N)$, и

$$\mathrm{E}(G_N^*, \tau_N) \geqslant \mathrm{E}(G_N^*, H_N^*).$$

3. Для всех чистых стратегий Синих σ_N существует $\mathrm{E}(\sigma_N, H_N^*)$, и

$$\mathrm{E}(\sigma_N, H_N^*) \leqslant \mathrm{E}(G_N^*, H_N^*).$$

В этом случае говорят, что игра имеет цену $V_N(p_N, q_N)$, равную

$$V_N(p_N, q_N) = \mathrm{E}(G_N^*, H_N^*).$$

При этом говорят, что G_N^* является оптимальной стратегией Синих, а H_N^* — оптимальной стратегией Красных. Цена игры, как это подчеркнуто в обозначении, является функцией начальных условий. В остающейся части Приложения мы будем повсюду опускать индекс N и писать, например, $\mathrm{E}(G, H)$ вместо $\mathrm{E}(G_N, H_N)$ или $\mathrm{E}(G_1, H_1)$ вместо $\mathrm{E}(G_{N+1}, H_{N+1})$.

Предположим, что игра с длительностью N имеет цену $V(p, q)$, непрерывную по p и q, и что у Синих и Красных имеются оптимальные стратегии G^* и H^*. Введем обозначения

$$L_1(X_1, Y_1) \equiv (p_1 - x_1 - u_1) - (q_1 - y_1 - w_1)$$

и

$$M_1(X_1, Y_1) \equiv L_1(X_1, Y_1) + V(p, q),$$

где p и q определяются из p_1 и q_1 посредством выбора (X_1, Y_1) и с помощью уравнений (7) и (8). Пусть

$$G_1^* = (g_1^*, G^*), \ H_1^* = (h_1^*, H^*),$$

где g_1^* есть распределение вероятностей на Δ_1, а h_1^* есть распределение вероятностей на D_1. Мы выведем достаточные условия для того, чтобы g_1^* и h_1^* удовлетворяли условию оптимальности стратегий G_1^* и H_1^* в $(N+1)$-ходовой игре.

Согласно общепринятым определениям

$$\mathrm{E}(G_1^*,\ H_1^*)=\iint L_1(X_1,\ Y_1)\,dg_1^*\,dh_1^*+\iint \mathrm{E}(G^*,\ H^*)\,dg_1^*dh_1^*=$$
$$=\iint L_1(X_1,\ Y_1)\,dg_1^*\,dh_1^*+\iint V(p,\ q)\,dg_1^*\,dh_1^*=$$
$$=\iint M_1(X_1,\ Y_1)\,dg_1^*\,dh_1^*. \tag{9}$$

Далее, если $\tau_1=(Y_1,\ \Psi)$ при $\Psi(X_1,\ Y_1)=\tau$, то

$$\mathrm{E}(G_1^*,\ \tau_1)=\int L_1(X_1,\ \ Y_1)\,dg_1^*+\int \mathrm{E}(G^*,\ \tau)\,dg_1^*\geqslant$$
$$\geqslant\int L_1(X_1,\ Y_1)\,dg_1^*+\int V(p,\ q)\,dg_1^*=\int M_1(X_1,\ Y_1)\,dg_1^* \tag{10}$$

для любых значений τ_1.

Аналогично, если $\sigma_1=(X_1,\ \Phi)$, то

$$\mathrm{E}(\sigma_1,\ H_1^*)\leqslant\int M_1(X_1,\ Y_1)\,dh_1^* \tag{11}$$

для любых значений σ_1. Так как в уравнении (9) мы показали, что цена $\mathrm{E}(G_1^*,\ H_1^*)$ существует, то для того, чтобы показать, что G_1^* и H_1^* являются оптимальными стратегиями, мы должны доказать, что $\mathrm{E}(\sigma_1,\ H_1^*)\leqslant\leqslant\mathrm{E}(G_1^*,\ H_1^*)\leqslant\mathrm{E}(G_1^*,\ \tau_1)$ для всех чистых стратегий Синих σ_1 и для всех чистых стратегий Красных τ_1. Из уравнений (9), (10) и (11) следует, что достаточные условия оптимальности стратегий G_1^* и H_1^* принимают следующий вид:

$$\int M_1(X_1,\ Y_1)\,dg_1^*\geqslant\iint M_1(X_1, Y_1)\,dg_1^*\,dh_1^*$$

для любых значений Y_1 и

$$\int M_1(X_1, Y_1)\,dh_1^*\leqslant\iint M_1(X_1,\ Y_1)\,dg_1^*\,dh_1^*$$

для всех значений X_1.

Только что доказанное нами положение может быть сформулировано несколько по-другому. Если было найдено решение игры с длительностью N и эта игра имеет цену $V(p,\ q)$, то решение $(N+1)$-ходовой игры получается посредством решения одноходовой игры Γ_1 с платежной функцией $M_1(X_1, Y_1)=L_1(X_1, Y_1)+V(p,\ q)$, где $V(p,\ q)$

получается из p_1 и q_1 посредством выбора X_1, Y_1 и с помощью уравнений (7) и (8). Цена $(N+1)$-ходовой игры равна цене игры Γ_1. Если оптимальные стратегии Синих и Красных в игре Γ_1 суть g_1^* и h_1^*, а в N-ходовой игре — G^* и H^*, то оптимальными стратегиями в $(N+1)$-ходовой игре будут стратегии (g_1^*, G^*) для Синих и (h_1^*, H^*) — для Красных.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Berkovitz and M. Dresher. A multimove infinite game with linear payoff. Pacific J. of Math. (печатается).
2. L. D. Berkovitz and M. Dresher. Optimal employment of tactical air forces in theater air tasks—II; a game theoretic analysis, RAND Memorandum RM-2137, March 1958.
3. M. Dresher. Optimal tactics in a multistrike air campaign, RAND Memorandum RM-1335, October 1954.
4. D. R. Fulkerson and S. M. Johnson. A tactical air game, Operations Research, 1957, vol. 5, p. 704—712.
   Д. Р. Фулкерсон и С. М. Джонсон. Тактическая воздушная игра (см. настоящий сборник).
5. C. J. Thomas and W. L. Deemer, Jr. The role of operational gaming in operations research. Operations Research, 1957, vol. 5, p. 1—27.
   К. Дж. Томас и У. Л. Димер. Роль моделирования игр в исследовании операций (см. настоящий сборник).

ИГРОВОЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ ТИПОВ САМОЛЕТОВ В ТАКТИЧЕСКОЙ ВОЗДУШНОЙ ВОЙНЕ

Л. Д. Берковиц и *Мелвин Дрешер**. РЭНД-Корпорейшн, Санта-Моника, шт. Калифорния

Распределение тактических воздушных сил по различным боевым заданиям составляет одну из важнейших проблем при проведении тактической воздушной кампании. Принимая во внимание возможные решения противника, мы желаем определить оптимальный план использования своих тактических ресурсов. Сформулированная в такой форме, эта задача распределения является задачей теории стратегических игр.

В статье [1] мы рассмотрели распределение тактических воздушных сил по различным боевым задачам, представив проблему в виде парной игры с нулевой суммой. Предполагалось, что обе стороны имеют самолеты только одного типа, которые надлежало распределить по трем задачам: для ударов по базам противника, для противовоздушной обороны и для поддержки наземных операций.

В игре, рассматриваемой в настоящей статье, предполагается, что каждая сторона имеет два различных типа самолетов, которым мы дадим условные названия «бомбардировщик» и «истребитель». Бомбардировщики могут использоваться только для ударов по базам или для наземной поддержки, а истребители — только для противовоздушной обороны или для наземной поддержки.

Введение в тактическую игру двух различных типов самолетов приводит к совершенно иным и более слож-

---

* L. D. Berkovitz and Melvin Dresher. Allocation of two types of aircraft in tactical air war; a game-theoretic analysis. Operations Research, 1960, vol. 8, p. 694—706.

ным оптимальным тактикам даже для кампаний малой продолжительности. В работе [1] показано, что если имеются только задачи ударов по базам и наземной поддержки, то обе стороны имеют оптимальные чистые стратегии. Если добавляется третья задача, то одна сторона имеет оптимальную чистую стратегию, а другая — смешанную стратегию. В отличие от этого, если требуется распределить два типа самолетов по трем задачам, то обе стороны могут иметь оптимальные смешанные стратегии. Чтобы показать на примере сложность этого последнего случая, мы рассмотрим оптимальные тактики, т. е. оптимальное распределение самолетов, для сравнительно короткой кампании.

ФОРМУЛИРОВКА ТАКТИЧЕСКОЙ ВОЕННОЙ ИГРЫ

Мы рассматриваем военно-воздушную игру как серию операций или ходов, каждый из которых состоит в одновременных ударах по базам противника, в противовоздушной обороне и в поддержке наземных войск. Каждая сторона предпринимает эти действия с целью выполнения поставленной задачи на данном театре военных действий или с целью получения определенного платежа.

Предположим, что в начале кампании одна из сторон, которую мы назовем Синими, имеет воздушные силы, состоящие из B бомбардировщиков и F истребителей, а противная сторона, Красные, имеют β бомбардировщиков и Φ истребителей.

Исследуем теперь какую-нибудь операцию кампании, например первую операцию. Предположим, что Синие выделяют x своих бомбардировщиков для нанесения ударов по базам, а остающиеся $B—x$ бомбардировщиков — для поддержки наземных сил. Некоторая доля этих x бомбардировщиков, например rx бомбардировщиков, где $0 \quad r \leqslant 1$, направляется против аэродромов базирования бомбардировочной авиации противника, а остаток, т. е. $(1—r)x$ самолетов,— против аэродромов истребительной авиации. Предположим, что во время этой операции Синие также направляют u из своих F истребителей для противовоздушной обороны, а остаток, т. е. $F—u$ истребителей,— для наземной поддержки. Следовательно, во время этой начальной операции $B+F-x-u$ самолетов Синих принимают участие в наземной поддержке.

Аналогично предположим, что во время первоначальной операции Красные выделяют ξ бомбардировщиков для ударов по аэродромам противника, а остаток, т. е. $\beta-\xi$ самолетов, — для поддержки наземных сил. Часть этих ξ бомбардировщиков, допустим $\rho\xi$, где $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, назначается для атаки аэродромов бомбардировочной авиации противника, а остаток, т. е. $(1-\rho)\xi$ самолетов, — для атаки аэродромов вражеской истребительной авиации. Предположим также, что μ из Φ своих истребителей Красные выделяют для противовоздушной обороны и $\Phi-\mu$ — для поддержки наземных операций. Число самолетов Красных, принимающих участие в наземной поддержке во время начальной операции, составляет, таким образом, $\beta+\Phi-\xi-\mu$.

При выборе этих распределений игроки знают как свои силы, так и силы противника. Однако ни одна из сторон не знает распределения сил своего противника вплоть до окончания операции.

Рассмотрим теперь результат описанной выше операции. Истребители, которых Красные назначили для противовоздушной обороны, уменьшат число бомбардировщиков Синих, прорвавшихся к воздушным базам Красных, но не окажут никакого влияния на операции по наземной поддержке. Предположим, что число атакующих самолетов, которым не удалось прорваться к целям, пропорционально числу μ, например, равно $c\mu$, если только число атакующих самолетов Синих не чрезмерно велико, т. е. если $c\mu > x$. Постоянная c называется противовоздушным оборонительным потенциалом, так как она является мерой эффективности самолетов ПВО. Мы полагаем, что истребители Красных не могут различить, какие из атакующих бомбардировщиков Синих предназначены для налета на бомбардировочные базы Красных, а какие — на базы истребителей.

Будем считать, что истребители распределяются случайно и равновероятно по всем самолетам противника, участвующим в налете.

Таким образом, число бомбардировщиков Синих, прорвавшихся через оборону Красных, равно $x-c\mu$ до тех пор, пока $c\mu < x$. Если же $c\mu > x$, то ни один самолет Синих не проникнет к цели. Следовательно, число бомбардировщиков Синих, проникших сквозь оборону Красных, равно

$$\max(0,\ x - c\mu).$$

Из прорвавшихся бомбардировщиков $r\max(0,\ x - c\mu)$ бомбардировщиков будут атаковать бомбардировочные базы Красных, а $(1-r)\max(0,\ x-c\mu)$ — базы истребителей Красных. Поэтому число бомбардировщиков Синих, атакующих бомбардировочные базы Красных, равно

$$\max[0,\ r(x - c\mu)],$$

а число бомбардировщиков Синих, налетающих на базы истребителей Красных, равно

$$\max[0,\ (1-r)(x - c\mu)].$$

Бомбардировщики Синих, проникшие к своим целям, будут уничтожать посредством бомбардировки вражеские самолеты, находящиеся на аэродромах.

Пусть каждый прорвавшийся бомбардировщик Синих может уничтожить b_1 вражеских бомбардировщиков или b_2 вражеских истребителей и пусть во время операции все самолеты Красных подвержены опасности уничтожения. Тогда число бомбардировщиков Красных, уничтоженных Синими во время начальной операции, равно

$$\min\{\beta,\ b_1\max[0,\ r(x - c\mu)]\},$$

а число уничтоженных истребителей Красных равно

$$\min\{\Phi,\ b_2\max[0,\ (1-r)(x - c\mu)]\}.$$

Мы предполагаем, что потери воздушных сил Красных в результате аварий и действий наземных сил противника малы, и ими можно в дальнейшем пренебречь. Кроме того, мы предполагаем, что самолеты, выделенные для ПВО и наземной поддержки, не несут никаких потерь и что бомбардировщики Красных, которым не удалось проникнуть сквозь оборону Синих, возвращаются на свои базы. Иначе говоря, мы предполагаем, что потери во время воздушных боев незначительны по сравнению с другими потерями и что самолеты ПВО предотвращают проникновение вражеских бомбардировщиков, не обязательно сбивая их. Итак, мы видим, что во время начальной операции численность бомбардировочной авиации Красных уменьшилась до

$$\beta_1 = \max\{0,\ \beta - b_1 \max[0,\ r(x - c\mu)]\}\ \textit{самолетов},$$

а истребительная авиация Красных уменьшилась до

$$\Phi_1 = \max\{0,\ \Phi - b_2 \max[0, (1 - r)(x - c\mu)]\}\ \textit{самолетов}.$$

Точно таким же образом мы можем подсчитать влияние этой начальной операции на силы Синих. В конце первой операции у Синих останется

$$B_1 = \max\{0,\ B - d_1 \max[0,\ \rho(\xi - eu)]\}\ \textit{бомбардировщиков}$$

и

$$F_1 = \max\{0,\ F - d_2 \max[0,\ (1 - \rho)(\xi - eu)]\}\ \textit{истребителей},$$

где e, d_1 и d_2 имеют тот же смысл, что и c, b_1 и b_2 для Красных.

Итак, для проведения следующей, второй, операции у Синих имеется B_1 бомбардировщиков и F_1 истребителей. В результате этой второй операции останется B_2, F_2, β_2, Φ_2 самолетов и т. д. Такой процесс повторяется в течение всей кампании, состоящей из заранее определенного числа операций.

ПЛАТЕЖ

В нашей модели функцией тактических воздушных сил является поддержка наземных сил, и качество выполнения этой функции зависит от числа самолетов, выделенных для поддержки наземных операций. С другой стороны, противник также желает помочь своим наземным силам, выделяя для этой цели определенное число самолетов. При этом некоторая доля усилий сторон по наземной поддержке может скомпенсироваться. Поэтому мы будем считать, что помощь, оказываемая воздушными силами наземным войскам Синих, или, иначе говоря, платеж Синим, в данной операции может измеряться разностью между числами боевых вылетов для наземной поддержки Синих и Красных, т. е.

$$(B + F - x - u) - (\beta + \Phi - \xi - \mu).$$

Здесь молчаливо предполагается, что при наземной поддержке бомбардировщики и истребители одинаково эффективны. Платеж M Синим за всю кампанию, состоящую из N операций, есть сумма платежей для каждой из операций, т. е.

$$M = \sum^{N} [(B + F - x - u) - (\beta + \Phi - \xi - \mu)].$$

Теперь совершенно очевидна задача, стоящая перед каждой из сторон. Синие, например, желали бы выделить большое число самолетов для наземной поддержки и тем самым увеличить платеж в данной операции. Им, однако, приходится думать одновременно об уничтожении самолетов Красных посредством ударов по аэродромам для того, чтобы Красные не смогли выделить в последующих операциях сколько-нибудь значительных сил для поддержки своих наземных войск. Кроме того, если Синие не подумают о противовоздушной обороне, а противник нанесет сильные удары по аэродромам, они могут понести большие потери в самолетах. Таким образом, каждый игрок должен смотреть в будущее и учитывать возможности противника.

ЗНАЧЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Из описания игры и определения платежной функции очевидно, что оптимальные тактики зависят от значений постоянных b_1, b_2, c, e, d_1 и d_2, а также от величины начальных сил, т. е. от B и F для Синих и от β и Φ для Красных. Так как главная цель настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, как зависят оптимальные распределения двух типов самолетов от величины начальных сил, то мы примем для всех шести постоянных определенные значения. Для удобства вычислений положим, что $b_1 = b_2 = c = e = d_1 = d_2 = 1$. Иначе говоря, мы предполагаем, что различные задачи выполняются с одинаковой эффективностью.

Теперь наличное число самолетов Синих в конце какой-нибудь одной операции равно

$$B_1 = \max\{0,\ B - \max[0,\ \rho(\xi - u)]\},$$

$$F_1 = \max\{0,\ F - \max[0,\ (1 - \rho)(\xi - u)]\},$$

а наличное число самолетов Красных равно

$$\beta_1 = \max\{0,\ \beta - \max[0,\ r(x - \mu)]\},$$

$$\Phi_1 = \max\{0,\ \Phi - \max[0,\ (1 - r)(x - \mu)]\}.$$

И, наконец, мы предположим, что в начале кампании число истребителей у обоих противников одинаково, т. е. $F=\Phi$. Для облегчения анализа нашей задачи будем считать, что в начале кампании $F=\Phi=1$; это просто означает, что в начале кампании мы в качестве единицы наших измерений вместо одиночного самолета берем истребительную авиацию в целом.

Хотя мы сформулировали игру для произвольного числа операций, мы найдем оптимальные тактики для кампаний, состоящих из трех операций. Полное математическое доказательство полученных результатов дано в работе [2]. Тем не менее в Приложении мы приводим краткое описание методики, использованной для получения этих результатов, и метода доказательства. В Приложении дана также точная математическая формулировка игры в нормальной форме.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТАКТИКИ ПРИ ОДИНАКОВЫХ СИЛАХ

Мы начнем с описания оптимальных тактик для частного случая, когда Синие и Красные в начале кампании имеют одинаковые военно-воздушные силы, т. е. $B=\beta$ и $F=\Phi=1$. Кроме того, мы ограничимся рассмотрением кампании, состоящей из трех операций.

Рассмотрим сначала первый ход игры. Природа оптимальной тактики зависит от численности бомбардировочной авиации. Обозначим ее через k, т. е. $B=\beta=k$. Тогда оптимальные тактики будут следующими.

Оптимальные тактики в первой операции

Если $k \geqslant 2$, то каждая сторона назначает все свои бомбардировщики для ударов по аэродромам, а все свои истребители — для противовоздушной обороны. Из числа бомбардировщиков, выделенных для ударов по базам противника, $\frac{k}{k+1}$-ая доля должна атаковать аэродромы базирования бомбардировочной авиации, а $\left(1-\frac{k}{1+k}\right)$-ая доля — аэродромы истребителей.

Если $1 \leqslant k \leqslant 2$, то каждая сторона должна применять случайный выбор между всеми тремя задачами. Каждая из сторон посылает все бомбардировщики для атаки баз противника и все истребители для ПВО с вероятностью $\frac{1}{2}(k-1)$. Каждая сторона посылает все свои бомбардировщики для ударов по базам и все свои истребители для наземной поддержки с вероятностью $\frac{1}{2}(2-k)$. Каждая из сторон посылает все свои бомбардировщики для наземной поддержки и все истребители — для ПВО с вероятностью $^1/_2$. Из бомбардировщиков, назначаемых для ударов по базам, $\frac{k}{k+1}$-ая часть направляется против аэродромов бомбардировочной авиации, а остаток — против аэродромов истребителей.

Если $k \leqslant 1$, то каждая сторона должна также применять случайный выбор, но между двумя задачами. На этот раз назначение всех бомбардировщиков для ударов по базам и всех истребителей для ПВО должно производиться с вероятностью $^1/_2$, назначение всех бомбардировщиков и всех истребителей для наземной поддержки должно производиться также с вероятностью $^1/_2$. Как и раньше, из бомбардировщиков, назначенных для ударов по аэродромам, $\frac{k}{k+1}$-ая часть выделяется для атаки аэродромов бомбардировочной авиации, а остальные — для атаки аэродромов истребителей. Вообще говоря, эти тактики не являются единственными оптимальными тактиками.

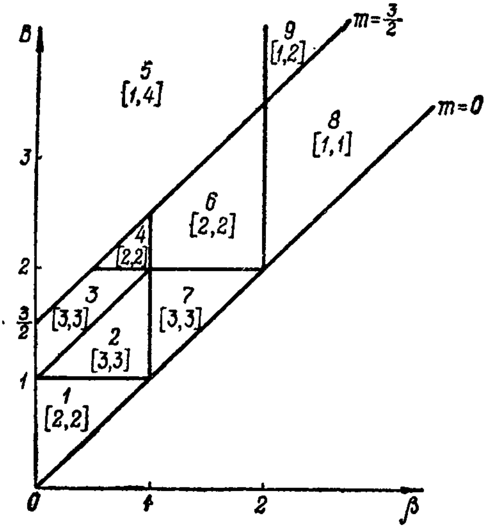
Оптимальные тактики для двух последних ходов

Оптимальные тактики для двух последних ходов игры одинаковы у обоих игроков и состоят в концентрации всех ресурсов для наземной поддержки.

Интересной особенностью оптимальных тактик является то, что, хотя силы обеих сторон одинаковы, оба игрока должны применять случайный выбор при довольно широком диапазоне начальных условий. В этом заключается отличие от случая с одним типом самолетов, когда обе стороны при равных силах имеют чистые стратегии и не нуждаются в случайном выборе [1].

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТАКТИКИ ПРИ НЕОДИНАКОВЫХ СИЛАХ БОМБАРДИРОВОЧНОЙ АВИАЦИИ

Теперь мы откажемся от предположения, что в начале кампании каждая сторона имеет одинаковую по силе бомбардировочную авиацию. Предположение о том, что $F=\Phi=1$, сохраняется. Так как эффективность самолетов обеих сторон одинакова, то для того, чтобы определить оптимальные тактики, мы ограничимся случаем, когда бомбардировочная авиация Синих вначале сильнее бомбардировочной авиации Красных или же они равны по силе, т. е. $B \geqslant \beta$. В противном случае, т. е. при $\beta \geqslant B$, оптимальные тактики получаются из случая $B \geqslant \beta$ посредством перемены ролей Синих и Красных.



Области на плоскости (B, β). Числа в квадратных скобках указывают характер оптимального способа игры в данной области. Так, [1, 4] означает, что Синие применяют случайный выбор в отношении одной стратегии, т. е. используют чистую стратегию, а Красные применяют случайный выбор между 4-мя стратегиями.

Для описания оптимальных тактик необходимо рассмотреть несколько случаев, отличающихся друг от друга величиной разности m между числом бомбарди-

Цена игры и оптимальные выборы для начального хода

Область плоскости (B, β) (см. рисунок)		Цена игры	Оптимальные выборы Синих		Оптимальные выборы Красных	
№	описание		выбор (x, u)	вероятность	выбор (ξ, μ)	вероятность
1	$0 \leqslant m \leqslant 1$ $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ $0 \leqslant B \leqslant 1$	$^7/_2 m$	(B, β) $(0, 0)$	$^1/_2$ $^1/_2$	(β, B) $(0, 0)$	$^1/_2$ $^1/_2$
2	$0 \leqslant m \leqslant 1$ $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ $1 \leqslant B \leqslant 2$	$^7/_2 m$	(B, β) $(B, 0)$ $(0, 0)$	$^1/_2$ 0 $^1/_2$	$(\beta, 1)$ $(\beta, 0)$ $(0, 1)$	$^1/_2(B-1)$ $^1/_2(2-B)$ $^1/_2$
3	$1 \leqslant m \leqslant {^3/_2}$ $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ $1 \leqslant B \leqslant 2$	$^7/_2 m + \dfrac{(m-1)(B-2)}{2(2-m)}$	(B, β) $(B, 0)$ $(0, 0)$	$^1/_2$ $^1/_2(m-1)/(2-m)$ $^1/_2(3-2m)/(2-m)$	$(\beta, 1)$ $(\beta, 0)$ $(0, 1)$	$^1/_2\beta/(2-m)$ $^1/_2(2-B)/(2-m)$ $^1/_2$
4	$1 \leqslant m \leqslant {^3/_2}$ $^1/_2 \leqslant \beta \leqslant 1$ $2 \leqslant B \leqslant {^5/_2}$	$4m + {^1/_2}\beta - 1$	(B, β) $(B, 0)$	$^1/_2$ $^1/_2$	$(\beta, 1)$ $(0, 1)$	$^1/_2$ $^1/_2$
5	$^3/_2 \leqslant m$ $0 \leqslant \beta \leqslant 2$	$3m + {^1/_2}\beta + {^1/_2}$	$(\beta + {^3/_2},\ {^1/_2}\beta)$		$(\beta, 1)$ $(\beta, 0)$ $(0, 1)$ $(0, 0)$	$^1/_4$ $^1/_4$ $/_4$ $^1/_4$
6	$0 \leqslant m \leqslant {^3/_2}$ $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ $2 \leqslant B \leqslant {^7/_2}$	$4m + {^1/_2}\beta - 1$	$(B, 1)$ $(B, 0)$	$^1/_2\beta$ $1 - {^1/_2}\beta$	$(\beta, 1)$ $(0, 1)$	$^1/_2$ $^1/_2$
7	$0 \leqslant m \leqslant 1$ $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ $1 \leqslant B \leqslant 2$	$^7/_2 m$	$(B, 1)$ $(B, 0)$ $(0, 1)$	$^1/_2(\beta-1)$ $^1/_2(2-\beta)$ $^1/_2$	$(\beta, 1)$ $(\beta, 0)$ $(0, 1)$	$^1/_2(B-1)$ $^1/_2(2-B)$ $^1/_2$
8	$0 \leqslant m \leqslant {^3/_2}$ $2 \leqslant \beta$	$4m$	$(B, 1)$	1	$(\beta, 1)$	1
9	$^3/_2 \leqslant m$ $2 \leqslant \beta$	$3m + {^3/_2}$	$(\beta + {^3/_2}, 1)$	1	$(\beta, 1)$ $(\beta, 0)$	$^1/_2$ $^1/_2$

ровщиков Синих и бомбардировщиков Красных в начале кампании, т. е.

$$m = B - \beta.$$

Природа оптимальных тактик зависит от соотношения сил Синих и Красных. Каждая возможная комбинация начальных сил бомбардировочной авиации Синих и Красных задается парой чисел (B, β) и, следовательно, может быть представлена точкой на плоскости (B, β) при $B \geqslant \beta$. На рисунке показана разбивка плоскости (B, β) на девять областей. Для каждой из этих областей мы опишем оптимальные тактики при начальном ходе.

Оптимальные тактики при начальном ходе

Оптимальное распределение самолетов по различным задачам во время первой операции показано в таблице. Из числа бомбардировщиков Синих, выделенных для налетов на аэродромы, $\frac{\beta}{\beta+1}$-ая часть посылается против аэродромов бомбардировочной авиации, а $\frac{1}{\beta+1}$-ая часть—против аэродромов истребителей. Из числа бомбардировщиков Красных, назначенных для действий против воздушных баз противника, $\frac{B}{B+1}$-ая часть атакует базы бомбардировщиков, а $\frac{1}{B+1}$-ая часть — базы истребителей. Вообще говоря, эти тактики не являются единственными. Тактики, рекомендующие случайный выбор, являются самыми простыми в том смысле, что никакой случайный выбор при малом числе чистых стратегий не является оптимальным.

Оптимальные тактики во время двух последних ходов

Оптимальное решение для обеих сторон во время двух последних ходов состоит в назначении всех самолетов для поддержки наземных войск. Оптимальность этого решения не зависит от предположения, что $F = \Phi$.

Часть плоскости (B, β), для которой $0 \leqslant m \leqslant {}^3/_2$, можно рассматривать, как множество начальных условий, при которых силы противников приблизительно равны. Для этой части плоскости можно сказать, что противники поступают одинаково, если под этим подразумевается, что у них имеется одинаковое число случайных выборов. В областях *1*, *7* и *8* полосы $0 \leqslant m \leqslant {}^3/_2$ одинаковость стратегий обоих игроков выражена еще сильнее. Часть границы каждой из этих областей составляет отрезок линии $m=0$, и тот характер оптимальных стратегий, который получается для этих отрезков, сохраняется для всей области. И действительно, в этих областях оба игрока имеют в точности такие же одинаковые оптимальные стратегии, какие они имеют на линии $m=0$. В области *8* каждый игрок посылает все свои бомбардировщики для атаки воздушных баз и все свои истребители — для ПВО. В области *7* каждый игрок производит случайный выбор между следующими тремя тактиками: все бомбардировщики — против аэродромов, а все истребители — для ПВО; все бомбардировщики — против аэродромов, а все истребители — для поддержки наземных сил; все бомбардировщики — для поддержки наземных сил, а все истребители — для ПВО. В области *1* оба игрока или выделяют все свои силы для ударов по базам и для ПВО ($x=B$, $u=\beta$ для Синих и $\xi=\beta$, $\mu=B$ для Красных) или выделяют все самолеты для наземной поддержки, выбирая $x=u=\xi=\mu=0$, причем обе тактики выбираются с вероятностью 1/2. Так как в области *1* у каждого игрока силы бомбардировочной авиации слабее сил истребительной авиации противника, то нет необходимости использовать все истребители для ПВО. Поэтому для ПВО назначается только такое число истребителей, которое достаточно для отражения налета наибольшего возможного числа бомбардировщиков противника. Следует также отметить, что область *8* является единственной областью, в которой оба игрока обладают чистыми оптимальными стратегиями.

Часть плоскости (B, β), которая лежит выше линии $m={}^3/_2$, может рассматриваться как множество начальных условий, при которых Синие сильнее Красных Если $m \geqslant {}^3/_2$, то у Синих имеются чистые оптимальные стратегии, а Красные должны использовать случайный выбор.

В заключение мы обращаем внимание читателя на любопытное свойство области *3*. Это — единственная область, в которой цена игры не является линейной функцией B и β.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математическая формулировка игры

Пусть нумерация ходов начинается с конца игры, т. е. n-ый ход означает, что до конца игры остается n ходов. Распределения сил игроков во время n-го хода следующим образом определяют распределения сил во время $(n-1)$-го хода:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= \max[0,\ B_n - \rho_n \max(0,\ \xi_n - u_n)], \\ F_{n-1} &= \max[0,\ F_n - (1-\rho_n)\max(0,\ \xi_n - u_n)], \\ \beta_{n-1} &= \max[0,\ \beta_n - r_n \max(0,\ x_n - \mu_n)], \qquad (1) \\ \Phi_{n-1} &= \max[0,\ \Phi_n - (1-r_n)\max(0,\ x_n - \mu_n)]. \end{aligned}$$

Для N-ходовой игры платеж Синим равен

$$\sum_{n=1}^{n=N} [(B_n + F_n - x_n - u_n) - (\beta_n + \Phi_n - \xi_n - \mu_n)]. \qquad (2)$$

Предполагается, что оба игрока знают, как проходит игра, а именно: оба игрока обладают информацией, выраженной уравнениями (1). Далее предполагается, что на любой стадии игры оба игрока знают распределения сил и всю предшествующую историю игры. Иначе говоря, перед n-ым ходом оба игрока знают N, B_N, F_N, β_N, Φ_N и x_i, u_i, r_i, ξ_i, μ_i, ρ_i для $i=N$, $N-1, \ldots, n+2$, $n+1$. Так как им известны также и уравнения (1), то, следовательно, перед n-ым ходом им известны также B_i, F_i, β_i, Φ_i для $i=N$, $N-1, \ldots, n+1$, n.

Теперь чистые стратегии игры в нормальной форме могут быть определены посредством индукции по числу ходов в игре. Любая стратегия Синих в одноходовой игре является выбором точки $X_1 = (x_1,\ u_1,\ r_1)$ внутри параллелепипеда $0 \leqslant x_1 \leqslant B_1$, $0 \leqslant u_1 \leqslant F_1$, $0 \leqslant r_1 \leqslant 1$. Аналогично любая стратегия Красных является выбором точки $Y_1 = (\xi_1, \mu_1, \rho_1)$ внутри параллелепипеда $0 \leqslant \xi_1 \leqslant \beta_1$, $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \Phi_1$, $0 \leqslant \rho_1 \leqslant 1$. Пусть σ_N будет некоторой стратегией Синих в N-ходовой игре. Совершенно очевидно, что σ_N является функцией от B_N, F_N, β_N, Φ_N. В $(N+1)$-ходовой игре во время $(N+1)$-го хода Синие выбирают точку $X_{N+1} = (x_{N+1}, u_{N+1}, r_{N+1})$ внутри параллелепипеда D_{N+1}, определяемого неравенствами

$$0 \leqslant x_{N+1} \leqslant B_{N+1},\ 0 \leqslant u_{N+1} \leqslant F_{N+1},\ 0 \leqslant r_{N+1} \leqslant 1,$$

и одновременно Красные выбирают точку $Y_{N+1} = (\xi_{N+1}, \mu_{N+1}, \rho_{N+1})$ внутри параллелепипеда Δ_{N+1}, определяемого неравенствами

$$0 \leqslant \xi_{N+1} \leqslant \beta_{N+1},\ 0 \leqslant \mu_{N+1} \leqslant \Phi_{N+1},\ 0 \leqslant \rho_{N+1} \leqslant 1.$$

Эти выборы позволяют с помощью уравнений (1) определить переменные состояния B_N, F_N, β_N, Φ_N. Тогда стратегия Синих σ_{N+1} в $(N+1)$-ходовой игре определяется как выбор X_{N+1} в D_{N+1} и как функция Λ_N, которая связывает с каждой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}) пространства $D_{N+1} \times \times \Delta_{N+1}$ стратегию σ_N в N-ходовой игре. Таким образом, σ_{N+1} может быть записана как

$$\sigma_{N+1} = (X_{N+1}, \Lambda_N).$$

Аналогично стратегия Красных τ_{N+1} в $(N+1)$-ходовой игре определяется как выбор Y_{N+1} и как функция Ψ_N, которая связывает с каждой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}) стратегию τ_N в N-ходовой игре. Таким образом, τ_{N+1} может быть записана как

$$\tau_{N+1} = (Y_{N+1}, \Psi_N).$$

Смешанные стратегии игроков могут быть определены теперь таким же образом. Для одноходовой игры смешанная стратегия Синих есть распределение вероятностей G_1 по параллелепипеду D_1, а смешанная стратегия Красных есть распределение вероятностей H_1 по параллелепипеду Δ_1. Предположим теперь, что мы смогли определить смешанные стратегии для N-ходовой игры. Пусть G_N есть смешанная стратегия Синих в N-ходовой игре. Смешанная стратегия G_{N+1} в $(N+1)$-ходовой игре является распределением вероятностей g_{N+1} по параллелепипеду D_{N+1} и функцией λ_N, которая связывает с каждой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}) некоторую смешанную стратегию G_N в N-ходовой игре. Таким образом, смешанная стратегия в $(N+1)$-ходовой игре может быть записана как

$$G_{N+1} = (g_{N+1}, \lambda_N).$$

Смешанная стратегия Красных H_{N+1} определяется аналогично распределением h_{N+1} по Δ_{N+1} и функцией Ψ_N и может быть записана как

$$H_{N+1} = (h_{N+1}, \Psi_N).$$

Достаточные условия для оптимальных стратегий

Предположим, что в N-ходовой игре существуют смешанные стратегии Синих G_N^* и смешанные стратегии Красных H_N^* со следующими свойствами:

1. Если Синие выбирают стратегию G_N^*, а Красные — стратегию H_N^*, то существует математическое ожидание $E(G_N^*, H_N^*)$.

2. Для любой стратегии Красных τ_N, существует $E(G_N^*, \tau_N)$, причем $E(G_N^*, \tau_N) \geqslant E(G_N^*, H_N^*)$.

3. Для любой стратегии Синих σ_N существует $E(\sigma_N, H_N^*)$, причем $E(\sigma_N, H_N^*) \leqslant E(G_N^*, H_N^*)$.

В этом случае говорят, что игра имеет цену $V_N = V_N(B_N, F_N, \beta_N, \Phi_N)$, равную

$$V_N(B_N, F_N, \beta_N, \Phi_N) = E(G_N^*, H_N^*);$$

при этом говорят, что G_N^* — оптимальная стратегия Синих, а H_N^* — оптимальная стратегия Красных. Как видно из обозначения, цена игры является функцией начальных условий B_N, F_N, β_N, Φ_N.

Введем обозначения

$$L_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) = B_{N+1} + F_{N+1} - x_{N+1} - \\ - u_{N+1} - \beta_{N+1} - \Phi_{N+1} + \xi_{N+1} + \mu_{N+1}$$

и

$$M_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) = L_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) + \\ + V_N(B_N, F_N, \beta_N, \Phi_N),$$

где B_N, F_N, β_N, Φ_N получаются из B_{N+1}, F_{N+1}, β_{N+1}, Φ_{N+1} с помощью уравнений (1) и выборов (X_{N+1}, Y_{N+1}). Мы можем теперь сформулировать лемму, которая дает нам возможность решить игру по индукции.

Лемма. *Пусть N-ходовая игра имеет цену $V_N(B_N, F_N, \beta_N, \Phi_N)$ и оптимальные стратегии G_N^* и H_N^* для Синих и Красных соответственно. Пусть g_{N+1}^* есть распределение по D_{N+1}, а h_{N+1}^* — распределение по Δ_{N+1}, причем*

$$\int M_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) dg_{N+1}^* \geqslant \iint M_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) dg_{N+1}^* dh_{N+1}^*$$

$$\text{для всех } Y_{N+1}, \tag{3}$$

$$\int M_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) dh_{N+1}^* \leqslant \iint M_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) dg_{N+1}^* dh_{N+1}^* \tag{4}$$

$$\text{для всех } X_{N+1}.$$

Тогда $(N+1)$-ходовая игра имеет цену

$$V_{N+1}(B_{N+1}, F_{N+1}, \beta_{N+1}, \Phi_{N+1}) = \\ = \iint M_{N+1}(X_{N+1}, Y_{N+1}) dg_{N+1}^* dh_{N+1}^*,$$

а ее оптимальные стратегии суть $G_{N+1}^* = (g_{N+1}^*, \lambda_N^*)$ для Синих и $H_{N+1}^* = (h_{N+1}^*, \Psi_N^*)$ для Красных, где λ_N^* есть функция, связывающая G_N^* с любой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}), а Ψ_N^* есть функция, связывающая H_N^* с любой точкой (X_{N+1}, Y_{N+1}).

Доказательство этой леммы такое же, как приведенное в работе [1] для аналогичных условий, и поэтому мы его здесь не повторяем.

Решение для $N = 1$ и 2

При $N=1$ исследование уравнения платежа (2) показывает, что как у Синих, так и у Красных имеются оптимальные чистые стратегии, состоящие в выборе $x_1=u_1=0$ для Синих и в выборе $\xi_1=\mu_1=0$ для Красных. Выбор значений r_1 и ρ_1 в этом случае может быть, очевидно, самым произвольным. Цена игры равна

$$V_1=B_1+F_1-\beta_1-\Phi_1.$$

Из леммы следует, что для $N=2$ достаточно рассмотреть

$$M_2(X_2,\ Y_2)=B_2+F_2-\beta_2-\Phi_2-x_2-u_2+$$
$$+\xi_2+\mu_2+[B_1+F_1-\beta_1-\Phi_1].$$

С помощью уравнений (1) величины в квадратных скобках могут быть выражены через величины с индексом 2. После исследования величин коэффициентов x_2, u_2, ξ_2, μ_2 видно, что оптимальным выбором для Синих будет $x_2=u_2=0$ при произвольном значении r_2, а оптимальным выбором для Красных будет $\xi_2=\mu_2=0$ также при произвольном значении ρ_2. Цена двухходовой игры равна

$$V_2=2(B_2+F_2-\beta_2-\Phi_2).$$

Решение для $N=3$

Из леммы следует, что при $N=3$ достаточно рассмотреть игру с платежом

$$M_3(X_3,\ Y_3)=B_3+F_3-\beta_3-\Phi_3-x_3-u_3+$$
$$+\xi_3+\mu_3+2[B_2+F_2-\beta_2-\Phi_2].$$

Можно показать, что поскольку оптимальными выборами для $i=1,\ 2$ являются $x_i=u_i=\xi_i=\mu_i=0$, то оптимальное значение для r_3 равно $\frac{\beta_3}{\beta_3+\Phi_3}$, а для ρ_3 равно

$\frac{B_3}{B_3+F_3}$. Дальнейшее доказательство заключается в проверке того, что стратегии, приведенные в таблице, удовлетворяют уравнениям (3) и (4). Можно заметить, что так как мы сначала определили оптимальные значения r_3 и ρ_3, мы можем теперь положить $X_3=(x_3, u_3)$ и $Y_3=(\xi_3, \mu_3)$ в уравнениях (3) и (4). Проверка, хотя и отнимает много труда и времени, все же очень простая. Она приведена в работе [2].

Более трудной задачей, чем проверка, является отгадывание оптимальных стратегий или, иначе говоря, выбор «кандидатов» для проверки. В случае равных сил бомбардировочной авиации использовалась следующая процедура. Сначала было сделано пробное предположение, что оптимальные стратегии состоят из ступенчатых функций с конечным числом скачков и что эти скачки имеют место в экстремальных точках пространств стратегий. После этого была составлена конечная матричная игра с платежом $M_3(X_3, Y_3)$ и со стратегиями, выбранными по экстремальным точкам пространств стратегий D и Δ. Затем определялось решение полученной матричной игры, и найденные для нее оптимальные стратегии были испробованы на оптимальность в полной игре посредством подстановки их в уравнения (3) и (4). Если, однако, $k \leqslant 1$, то на основании эвристических соображений можно видеть, что некоторые экстремальные точки доминируют над другими граничными точками. Например, из структуры игры совершенно очевидно, что при $k \leqslant 1$ стратегия $(k, 1)$ приводит к излишнему расходу истребителей Синих и что стратегия (k, k) будет доминировать над стратегией $(k, 1)$. Поэтому матричная игра была в этом случае расширена, чтобы включить подобные стратегии.

В случае неодинаковых начальных сил бомбардировочной авиации для отгадывания оптимальных стратегий была использована комбинация метода, применявшегося в симметричном случае, т. е. метода образования конечной матричной игры, с методом, который может быть назван методом «искажения и непрерывности». В нем ключом к природе оптимальных стратегий является знание решений в смежных областях, которые использовались для отгадывания оптимальных стратегий или для модификации соответствующих матричных игр. Этот процесс особенно эффективен, если имеется возможность определить цену игры в некоторой области, используя свойство непрерывности и зная значения цены игры в смежных областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Berkovitz and Melvin Dresher. A game-theory analysis of tactical air war. Operations Research, 1959, vol. 7, p. 599—620.
Л. Д. Берковиц и Мелвин Дрешер. Игровой анализ тактической воздушной войны (см. настоящий сборник).
2. L. D. Berkovitz and Melvin Dresher. A multimove allocation game. The RAND Corp., Paper P-1533, October 1958.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОРОНИТЕЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ, СОСТОЯЩЕЙ В ОДИНАКОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПО ВСЕМ ЦЕЛЯМ

Джон Э. Уолш *. System Development Corporation, Санта-Моника, шт. Калифорния

Рассмотрим такую ситуацию, когда силы нападения, состоящие из определенного числа боевых единиц и являющиеся однородными с точки зрения обороняющейся стороны, проходят через некоторый сектор обороны. Против участников налета, пока они находятся в этом секторе, назначается известный потенциал сил обороны, имеющих приблизительно однородный характер. Нами будет исследоваться задача оптимального распределения этого оборонительного потенциала между атакующими единицами.

С точки зрения обороны все участники налета такого типа обычно неразличимы ни по их виду, ни по их боевой нагрузке, ни по цели налета, ни по маршрутам, ведущим к этой цели. Здесь под «боевой нагрузкой» подразумевается потенциал разрушения или противодействия (*degradation potential*), который несет каждый участник налета или который контролируется им с целью применения против обороны. Эта нагрузка используется либо в рассматриваемом оборонительном секторе, либо в некоторой точке маршрута, достигаемой после прохождения этого сектора.

Невозможность различить участников налета и их случайное расположение в момент, когда они подвергаются воздействию со стороны обороны, часто приводят к тому,

* John E. Walsh. Optimum properties for defense strategy of equal attack against all targets. Operations Research, 1959, vol. 7, p. 249—255.

что на каждого участника налета назначается одинаковое воздействие. В статье показано, что подобная практика, являющаяся обычно результатом интуитивного подхода к вопросу, обладает выгодными свойствами с точки зрения обороны. Действительно, для большого класса ситуаций, имеющих практическое значение, одинаковое воздействие по всем целям представляет оптимальную оборонительную стратегию с точки зрения теории игр. Таким образом, подобная оборонительная стратегия, помимо сравнительной простоты реализации, обладает и другими преимуществами, говорящими в ее пользу.

Оптимальность такой стратегии сохраняется даже в тех случаях, когда обороняющаяся сторона обладает бо́льшей информацией и бо́льшими возможностями, чем обычно. При анализе предполагается, что оборона располагает дополнительными разведывательными данными, позволяющими разделить всех участников налета на группы, в пределах которых участники имеют одинаковую боевую нагрузку, маршрут и боевое задание. Внутри группы все ее члены считаются неразличимыми, и сделано предположение, что в среднем каждому члену группы оказывается одинаковое противодействие со стороны обороны. Предполагается также, что оборона способна атаковать каждого члена группы раздельно, причем на эффективность атаки члены других групп не оказывают никакого влияния. Показано, что и в такой усовершенствованной системе обороны назначение одинаковой степени воздействия на каждую боевую единицу нападения является для важного класса ситуаций оптимальной оборонительной стратегией с точки зрения теории игр.

Для рассматриваемых ситуаций предполагается, что «среднее» выживание, приходящееся на члена группы *, может быть выражено как функция отношения величины оборонительного потенциала, назначенного против данной группы, к числу членов группы, когда она входит в сектор обороны. Предполагается, что логарифм этой функции существует и имеет строго монотонную первую производную. Функциональная форма среднего

* Отношение среднего числа боевых единиц противника, прорвавшихся через систему обороны, ко всем боевым единицам, участвующим в налете. (*Прим. перев.*)

выживания на члена группы считается одинаковой для каждой группы. Это предположение представляется разумным в силу однородного характера сил нападения и обороны. Здесь слово «среднее» может означать ожидаемые величины, но не исключена возможность других значений этого слова. Таким образом, среднее число членов какой-нибудь группы, уцелевших в данном секторе, будет равно численному составу этой группы, умноженному на «среднее» выживание, приходящееся на одного члена.

Предполагается, что критерий «среднего» выживания для группы может быть выражен в виде дифференцируемой строго монотонной функции от среднего числа уцелевших членов этой группы. Эта функция не обязательно должна быть одной и той же для каждой группы, и единственным дополнительным условием, наложенным на эти функции, является то, что все они должны возрастать в одинаковом направлении. Общий критерий для всего налета относительно рассматриваемого оборонительного сектора принят равным сумме критериев для индивидуальных групп. Если же в качестве меры эффективности взять произведение частных критериев, то результат получится по существу таким же, т. е. одинаковое воздействие и в этом случае является оптимальной оборонительной стратегией. Удовлетворительная ненулевая функция критерия для каждой группы может быть получена практически для всех возможных случаев, представляющих интерес. С помощью логарифмирования и, возможно, перемены знака, ненулевая мера эффективности, получаемая перемножением частных критериев, может быть преобразована в эквивалентную суммарную меру эффективности, удовлетворяющую требуемым условиям.

Рассматриваемый тип меры эффективности пригоден для широкого круга ситуаций. Использование отношения оборонительного потенциала к числу членов группы в качестве аргумента функции «среднего» выживания на каждого члена группы оказывается вполне приемлемым для случая равномерного распределения воздействия внутри групп. Действительно, такая переменная уже использовалась для этой цели во многих моделях «нападения — обороны» (см., например, [1]). Требование существования логарифма функции «среднего» выживания на одного члена группы сводится просто к тому, чтобы эта функция была положительной. Требование того, чтобы логарифм этой функции имел строго монотонную первую производную, является более серьезным, но не очень ограничивающим. Это условие означает, что функция должна быть непрерывной и либо строго монотонной, либо такой, чтобы ее крутизна меняла свой знак лишь один раз; иными словами, она должна быть гладкой, т. е. без волнистостей. Действительно, эта функция будет непрерывной и строго монотонной для любого типа разумной наступательно-оборонительной ситуации. Кроме того, требование «гладкости», очевидно, не является сильно ограничивающим, если принять во внимание точность, с которой может быть определена такая функция. В следующем разделе дано подтверждение общего характера этих логарифмических требований, основанное на том, что им удовлетворяет важный класс функций «среднего» выживания на члена группы.

Свобода выбора формы функции выживания позволяет учесть действие помех, создаваемых или контролируемых членами группы в целях подавления обороны. Могут быть также учтены многие эффекты типа запаздывания (*timing effects*).

Среднее число членов группы, уцелевших в данном секторе, по всей видимости, является разумным аргументом функции критерия для группы. Допустимые формы функции критерия для группы и способность этой функции сильно меняться от группы к группе указывают на возможность рассмотрения ситуаций значительно более общего типа. Кроме того, практически для всех важных случаев одна и та же оптимальная оборонительная стратегия получается как при использовании меры эффективности, получающейся в результате сложения, так и при использовании меры эффективности, вычисляемой перемножением частных критериев. Таким образом, мера эффективности рассматриваемого типа пригодна для важного класса оборонительно-наступательных ситуаций.

Одним из наших основных предположений является применимость используемой меры эффективности как к обороне, так и к нападению. При правильном выборе функции среднего выживания на члена группы и функции критерия это требование почти всегда может быть удовлетворено, хотя бы приблизительно. При этом предположении взаимодействие обороны с нападающей стороной эквивалентно игре двух игроков с нулевой суммой. Поэтому оптимальные оборонительная и наступательная стратегии могут быть определены на основе теории игр.

Для исследования свойств решений этой игры отношение потенциала поражения к численному составу группы рассматривается как непрерывная переменная. Многие случаи могут быть приближенно сведены к этой упрощенной ситуации. К ней можно мысленно прийти, если назначение долей нападающих единиц и единиц оборонительного потенциала заменить назначением целых единиц, произведенным на вероятностной основе. Дальнейшим упрощением является предположение, что решение игры существует, когда как обороняющаяся, так и атакующая сторона назначают ненулевое воздействие по всем рассматриваемым группам. Тогда оптимальность стратегии, состоящей в равномерном воздействии, может быть доказана методами дифференциального исчисления. Тщательный, но реалистический выбор рассматриваемых групп позволяет сделать это упрощение приемлемым почти для всех ситуаций, представляющих интерес.

Обстановка такова, что каждая сторона выбирает свою стратегию, не зная, какую стратегию выбрал противник. В явном виде стратегии, доступные атакующей стороне, состоят в различных способах назначения фиксированного числа атакующих единиц в состав групп рассматриваемых типов; на это назначение накладывается условие, что ни одна из групп не останется без воздействия. Предполагается, что число единиц, назначенных в каждую группу, становится известным обороне как только атакующие силы входят в рассматриваемый сектор. Стратегия обороны состоит в заранее выбранной «доктрине обстрела», которая устанавливает, какое число единиц потенциала поражения должно быть назначено на каждого члена группы. Это число может меняться от группы к группе, причем единственное ограничение состоит в том, чтобы не было групп, оставшихся без воздействия. Любое выбранное распределение должно удовлетворять условию, чтобы было задействовано установленное число оборонительных единиц, т. е. для каждого из рассматриваемых типов нападающих групп нападающая сторона должна назначать определенное число членов группы, а оборона принимает фиксированную «доктрину обстрела» на каждого члена группы.

Следующий раздел статьи «Обозначения и предположения» содержит принятые при выводе обозначения, а также техническое описание принятых предположений. В последнем разделе «Анализ и результаты» приводится доказательство того, что равномерное воздействие по атакующим боевым единицам является оптимальной оборонительной стратегией для рассматриваемых ситуаций.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим произвольный, но фиксированный сектор обороны. При изложении предположений и при анализе приняты следующие обозначения:

G — число имеющихся у нападающей стороны комбинаций различных маршрутов, бомбовой нагрузки и объектов нападения, т. е. число рассматриваемых атакующих групп;

g — индекс для обозначения атакующих групп ($g = 1, \ldots, G$);

m_g — число боевых единиц в g-ой группе;

$M = \sum_{g=1}^{G} m_g$ — общее число атакующих единиц (фиксированное число);

k_g — число единиц потенциала поражения, назначаемых против g-ой группы;

$K = \sum_{g=1}^{G} k_g$ — общий (фиксированный) потенциал поражения, выделенный против всех атакующих единиц;

$a_g = \dfrac{k_g}{m_g}$ — часть потенциала поражения, назначенная на одного члена g-ой группы;

$S(a_g)$ — „среднее“ выживание на одного члена g-ой группы;

$W_g[m_g S(a_g)]$ — критерий среднего выживания для g-ой группы.

Независимыми переменными, находящимися в распоряжении обороняющейся стороны, являются a_g (ограниченные условиями $a_g > 0$ и $\sum_{g=1}^{G} m_g a_g = K$), а в распоряжении атакующей стороны — m_g (ограниченные условиями $m_g > 0$ и $\sum_{g=1}^{G} m_g = M$). Условие $\sum_{g=1}^{G} m_g a = K$ накладывает ограничения на a_g, а не на m_g. Величины m_g и $m_g a_g$ не обязательно должны быть целыми числами.

В предыдущем разделе было дано словесное описание принятых предположений. Некоторые из них непосредственно при анализе не используются, но зато используются для мотивировки других предположений. Кроме того, ни одно из предположений не было выражено в приемлемой математической форме. Ниже дано техническое описание предположений, принятых при выводе результатов данной статьи.

1. Для нападающей и обороняющейся сторон существует одна и та же мера эффективности для рассматриваемого сектора.

2. Общая для обеих сторон мера эффективности может быть представлена в виде

$$\sum_{g=1}^{G} W_g [m_g S(a_g)],$$

где для $0 < x < \infty$; $S(x) > 0$ функция $\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{d \ln S(x)}{dx}$ строго монотонна. Кроме того, для $0 < y < \infty$ функции $W_g [y]$ дифференцируемы, строго монотонны и возрастают в одном и том же направлении.

3. Стратегия обороны состоит в выборе допустимого множества величин $a_1, \ldots, a_G$, а стратегия нападающей стороны — в выборе допустимого множества величин $m_1, \ldots, m_G$. Каждая сторона выбирает свою стратегию, не зная выбора противника.

4. Существуют такая оптимальная оборонительная стратегия, для которой все $a_g > 0$, и такая оптимальная наступательная стратегия, для которой все $m_g > 0$.

При этих предположениях задача состоит в том, чтобы показать, что оптимальной оборонительной стратегией является условие $a_1=a_2=\ldots=a_G$.

Пример функции $S(x)$

Важным классом функций «среднего» выживания на одного члена группы являются функции вида

$$S(x)=1-\left(\frac{1}{A}\right)(1-e^{-Ax}) \quad (0<A<\infty).$$

Для функции $S(x)$, имеющей такую форму,

$$\frac{S'(x)}{S(x)}=\left[\left(\frac{1}{A}-1\right)e^{Ax}-\frac{1}{A}\right]^{-1}$$

является строго монотонной функцией от x при $A\neq 1$. Поэтому результаты статьи справедливы для этого типа функций $S(x)$, кроме случая $A=1$. Легко, однако, показать из соображений непрерывности, что условие $a_1=$ $=\ldots=a_G$ является оптимальной стратегией для обороны и в случае, когда $A=1$. Таким образом, результаты статьи справедливы для рассмотренного класса функций $S(x)$.

АНАЛИЗ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе содержится подробное доказательство того, что доктрина одинакового воздействия является оптимальной игровой стратегией для усовершенствованной обороны. Раздел завершается доказательством того, что все a_g обязательно имеют одинаковую величину для любой ненулевой комбинации величин $a_1, \ldots, a_G$, $m_1, \ldots, m_G$, которая является седловой точкой функции критерия эффективности $\sum_{g=1}^{G} W_g[m_g S(a_g)]$. Для рассматриваемых ситуаций седловая точка критерия эффективности является решением соответствующей игры.

Так как функция $W_g[m_g S(a_g)]$ дифференцируема как по a_g, так и по m_g, и существует такое решение в виде седловой точки, которое не является граничным значением, то для вычисления производных могут быть применены методы дифференциального исчисления. Пусть λ и ρ — множители Лагранжа (постоянные относительно a_g и m_g) Тогда любая седловая точка $a_1, \ldots, a_G, m_1, \ldots, m_G$, для которой все значения не равны нулю (т. е. эта точка не является граничной), должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial}{\partial a_g}\left\{\sum_{k=1}^{G} W_k[m_k S(a_k)] - \lambda\left[\sum_{k=1}^{G} m_k a_k - K\right]\right\} =$$
$$= W'_g[m_g S(a_g)]\, m_g S'(a_g) - m_g \lambda = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial m_g}\left\{\sum_{k=1}^{G} W_k[m_k S(a_k)] - \rho\left[\sum_{k=1}^{G} m_k - M\right]\right\} =$$
$$= W'_g[m_g S(a_g)]\, S(a_g) - \rho = 0$$

при $g = 1, \ldots, G$.

Так как m_g, $S(a_g)$ и $W'_g[m_g S(a_g)]$ не равны нулю, то

$$\frac{S'(a_g)}{S(a_g)} = \frac{\lambda}{\rho}.$$

Так как $\frac{S'(x)}{S(x)}$ является строго монотонной функцией от x, то только единственное значение x может удовлетворить уравнению

$$\frac{S'(x)}{S(x)} = \text{const}.$$

Это означает, что $a_1 = \ldots = a_G$ для любой седловой точки при ненулевых значениях. Однако по предположению имеется такое решение в форме седловой точки, для которого все a_g и m_g не равны нулю. Это доказывает, что равномерное распределение воздействия является оптимальной оборонительной стратегией для рассматриваемых наступательно-оборонительных ситуаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. John E. Walsh. Inadequacy of cost per „kill" as measure of effectiveness. Operations Research, 1957, vol. 5, p. 750—764. Джон Э. Уолш. Недостаточность стоимости поражения цели в качестве критерия эффективности (см. настоящий сборник).

НЕКОТОРЫЕ ТАКТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ И ВЫБОР ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ОРУЖИЯ

Херберт К. Уэйсс *. Aeroneutronic Systems, Inc.,
Лос Анжелос, шт. Калифорния

Одной из важнейших проблем, встречающихся при анализе систем вооружения, является учет взаимных связей, существующих между различными видами вооружения при их совместных действиях на протяжении одного боя. Мы предлагаем подразделить вооружение на «главное» и «поддерживающее». Такая классификация позволяет заглянуть в сущность некоторых из этих связей.

Различие между «главным» и «поддерживающим» оружием было подмечено Клаузевицем [1], который указывал, что «...армия, состоящая только из артиллерии, является абсурдом с военной точки зрения... Армия, состоящая только из пехоты, не только возможна, но и много сильнее». Однако «... сочетание различного оружия в войне приводит к более совершенному использованию сил».

В качестве более современного примера можно привести статьи Галлуа [2, 9], который считает, что функция легких истребителей-штурмовиков сил НАТО состоит в действиях во время таких ситуаций, когда продвижению наземных сил противника в период стратегического взаимного применения ядерного оружия препятствует укрепленная полоса. «Линия фронта может сдерживаться наземными силами, которые поддерживаются самолетами, предназначенными для выполнения ограниченной задачи предотвращать концентрацию войск противника вблизи оборонительных позиций... удерживаемых наземными частями...»

---

* Herbert K. Weiss. Some differential games of tactical interest and the value of a supporting weapon system. Operations Research, 1959, vol. 7, p. 180—196.

В настоящей статье эти мысли использованы в качестве переходной ступени к простой математической модели, в которой характерные черты обоих примеров воплощены в степени, достаточной, чтобы представлять практический интерес. В этой модели реальные тактические проблемы настолько сильно упрощены, что ее не следует всерьез применять к реальным системам вооружения. Тем не менее, при построении модели мы должны делать выбор между достаточно сложной моделью, которая бы точно представляла действительную тактическую ситуацию, и достаточно простой моделью, с помощью которой можно было бы рассмотреть основные взаимосвязи. Мы выбрали второй способ на том основании, что общие результаты, полученные посредством такой модели, всегда могут быть использованы в качестве руководства для исследования более сложных моделей с помощью вычислительных машин. В то же время простая модель может помочь понять важнейшие связи, которые трудно проследить в более сложной модели.

УПРОЩЕННАЯ ТАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ

Предположим, что обе стороны находятся в соприкосновении, т. е. в пределах досягаемости систем оружия, имеющихся у обеих сторон. Силы каждой стороны состоят из двух типов систем вооружения, главной системы и второстепенной. Каждая второстепенная система может атаковать или главную, или второстепенную систему вооружения противника. Каждая главная система может атаковать только главную систему противника. Если имеется потребность придать этой идеализации физический облик, то можно представить себе главную систему в виде пехоты, а второстепенную систему в виде артиллерии, как у Клаузевица. На рис. 1 изображена эта ситуация. Представим действия сторон в виде следующих функций времени:

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_{21}x_2 - \psi k_{41}x_4, \quad \frac{dx_3}{dt} = -(1-\psi)\, k_{43}x_4,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -k_{12}x_1 - \varphi k_{32}x_3, \quad \frac{dx_4}{dt} = -(1-\varphi)\, k_{34}x_3, \qquad (1)$$

где x_1, x_2 — число единиц главной системы вооружения (численность пехоты) у Красных и Синих в момент t,

x_3, x_4 — число единиц второстепенной системы вооружения (артиллерии или авиации) у Красных и Синих в момент t,

k_{ij} — скорость, с какой одна единица оружия i-того типа может поражать единицы вооружения j-го типа,

ψ, φ — часть уцелевших единиц 4-го и 3-го типов, действующих против систем вооружения 1-го и 2-го типов.

Бой считается закончившимся тогда и только тогда, когда либо x_1, либо x_2 станет равным нулю. Красные стремятся максимизировать, а Синие минимизировать величину

$$U = x_1 - x_2, \text{ когда } x_1 \text{ или } x_2 = 0. \tag{2}$$

Задача заключается в выборе (ψ, φ), как функции времени. Задача этого типа у разных авторов носит различные названия: «дифференциальная игра» у Айзекса [10], «игра по планированию огня» у Айсбелла и Мэрлоу [5, 6], «тактическая воздушная игра» у Фулкер-

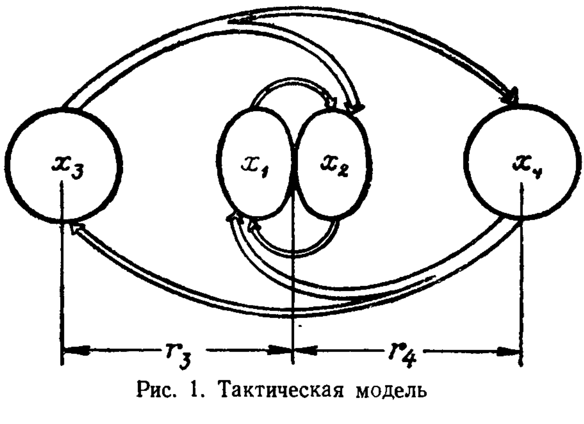


Рис. 1. Тактическая модель

сона и Джонсона [4] и т. д. Автор настоящей статьи также занимался некоторыми характеристиками решения при ограничивающих условиях [3].

Дальнейшее упрощение приводит задачу к такому виду, который позволяет ясно видеть большинство интересных характеристик, входящих в уравнения (1), и одновременно избежать затемняющих смысл сложных алгебраических выражений. Это достигается предположением, что $k_{21}=k_{12}=0$.

Это равноценно следующей ситуации: Красным и Синим удалось заставить сконцентрировать друг против друга единицы главной системы вооружения (рис. 1). Каждая из этих систем поддерживается второстепенной системой вооружения настолько быстро и эффективно, что это может решить исход боя до того, как оружие главных систем сможет нанести существенное поражение.

Каждая сторона теперь решает в каждый момент времени, что должна атаковать ее второстепенная система — главную или второстепенную систему противника. Сторона проигрывает бой, если она теряет всю свою «авиацию» * или всю свою пехоту. Это следует из того, что если какая-нибудь сторона потеряет свою авиацию, в то время как ее пехота остается прикованной к своим позициям пехотой противника, то авиации противника ничего не стоит уничтожить эту пехоту. Если же она раньше потеряет всех своих людей, то не сможет удерживать пехоту противника в виде сконцентрированных целей, пехота противника рассредоточится и захватит уцелевшую артиллерию или авиационные базы. Совершенно очевидно, что когда мы употребляем в тексте ради краткости слово «авиация», мы подразумеваем только очень ограниченные действия воздушных сил.

Произведем следующую замену переменных:

$$y_1=x_1k_{43}\frac{\sqrt{k_{34}}}{k_{41}},\quad y_3=x_3\sqrt{k_{34}},\quad t_1=t\sqrt{k_{43}k_{34}}.$$
$$y_2=x_2k_{34}\frac{\sqrt{k_{43}}}{k_{32}},\quad y_4=x_4\sqrt{k_{43}}. \tag{3}$$

В результате мы получаем следующие простые уравнения:

$$\dot{y}_1=-\psi y_4,\quad \dot{y}_2=-\varphi y_3,\quad \dot{y}_3=-(1-\psi)\,y_4,$$
$$\dot{y}_4=-(1-\varphi)\,y_3, \tag{4}$$

* Для простоты мы используем слово «авиация», предпочитая его «артиллерии» или «поддерживающей системе вооружения».

в которых точка сверху букв означает производную по времени t_1. Игра заканчивается, как только одна из переменных y_i станет равной нулю. Сторона, у которой это произошло, считается потерпевшей поражение. Мы будем называть тот момент, когда какая-нибудь из переменных y_i первой достигнет нуля, «концом игры». Цена игры для Красных равна y_{1s}, если они выигрывают, и $-y_{2s}$, если выигрывают Синие. Здесь индекс относится к значениям в конце игры, причем цена игры V аналогична цене (2) для уравнений (4). Цена игры для Синих равна этим значениям цены игры, взятым с обратным знаком.

Чтобы получить оптимальные значения ψ и φ, поступим следующим образом:

а) рассмотрим в качестве единственных возможных значений φ и ψ только 1 или 0; предположим, что эти значения постоянны в течение игры, и определим минимаксные решения;

б) покажем, что решения, которые допускают изменение величин ψ и φ в течение игры, являются неоптимальными. При этом у нас будут возможные комбинации тактик, которые вместе с результатами приведены в табл. 1. В этой таблице применены следующие обозначения:

t_e — время, оставшееся до конца игры (время до превращения y_i в 0),

$y_{is} = y_i$ в момент t_e,

y_{i1} — начальное значение y_i.

Обозначим также через $V(\psi, \varphi)$ цену игры для Красных, получающуюся в результате выбора (ψ, φ) обоими игроками.

Случай 1: $y_{31}/y_{41} < 1{,}0$

Разделим плоскость y_{11}/y_{31}, y_{21}/y_{41} на три области: A, B и C, как показано на рис. 2. Оптимальные стратегии будут определяться для каждой из этих областей.

Область А. В этой области $2y_{21}y_{41} \leqslant y_{31}^2$, $y_{11}y_{31} \geqslant y_{21}y_{41}$ и $y_{31} < y_{41}$. Поэтому

$$y_{21} < \frac{1}{2} y_{41}. \qquad (5)$$

Таблица 1

Выбор Синих	Выбор Красных	Условия	t_e	y_{1s}	y_{2s}	y_{3s}	y_{4s}	Победитель
1	1	$y_{11}y_{31} \geqslant y_{21}y_{41}$	$\frac{y_{21}}{y_{31}}$	$y_{11}-\frac{y_{21}y_{41}}{y_{31}}$	0	y_{31}	y_{41}	Красные
		$y_{11}y_{31} \leqslant y_{21}y_{41}$	$\frac{y_{11}}{y_{41}}$	0	$y_{21}-\frac{y_{11}y_{31}}{y_{41}}$	y_{31}	y_{41}	Синие
0	1	$2y_{21}y_{41} \leqslant y_{31}^2$	$\frac{y_{31}-\sqrt{y_{31}^2-2y_{21}y_{41}}}{y_{41}}$	y_{11}	0	$\sqrt{y_{31}^2-2y_{21}y_{41}}$	y_{41}	Красные
		$2y_{21}y_{41} \geqslant y_{31}^2$	$\frac{y_{31}}{y_{41}}$	y_{11}	$y_{21}-\frac{y_{31}^2}{2y_{41}}$	0	y_{41}	Синие
1	0	$2y_{11}y_{31} \leqslant y_{41}^2$	$\frac{y_{41}-\sqrt{y_{41}^2-2y_{11}y_{31}}}{y_{31}}$	0	y_{21}	y_{31}	$\sqrt{y_{41}^2-2y_{11}y_{31}}$	Синие
		$2y_{11}y_{31} \geqslant y_{41}^2$	$\frac{y_{41}}{y_{31}}$	$y_{11}-\frac{y_{41}^2}{2y_{31}}$	y_{21}	y_{31}	0	Красные
0	0	$y_{31} > y_{41}$	$\frac{1}{2}\lg\frac{y_{31}+y_{41}}{y_{31}-y_{41}}$	y_{11}	y_{21}	y_{31}	0	Красные
		$y_{31} < y_{41}$	$\frac{1}{2}\lg\frac{y_{41}+y_{31}}{y_{41}-y_{31}}$	y_{11}	y_{21}	0	y_{41}	Синие

Обращаясь к табл. 1, находим, что

$$V(1,1)=y_{11}-y_{21}\frac{y_{41}}{y_{31}},\quad V(0,\ 1)=y_{11},\quad V(0,\ 0)=-y_{21},$$

$$V(1,\ 0)=\begin{cases} y_{11}-\dfrac{y_{41}^2}{2y_{31}}, & \text{если}\quad 2y_{11}y_{31}\geqslant y_{41}^2,\\ -y_{21}, & \text{если}\ 2y_{11}y_{31}\leqslant y_{41}^2. \end{cases} \tag{6}$$

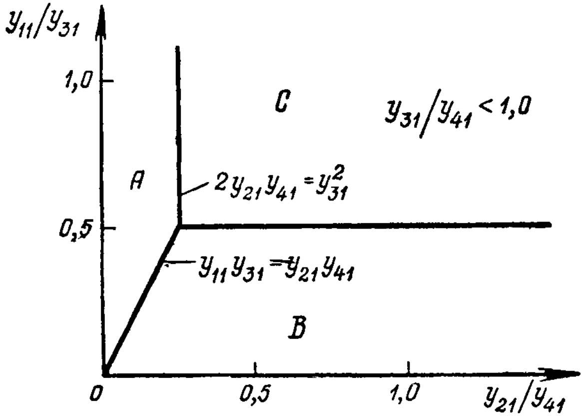


Рис. 2. Области определения оптимальных стратегий.

Подставляя функции цены (6) в игровую матрицу

	$\psi=0$	$\psi=1$	$\min\psi$
$\varphi=0$	$-y_{21}$	$y_{11}-y_{41}^2/2y_{31}$ или $-y_{21}$	$-y_{21}$
$\varphi=1$	y_{11}	$y_{11}-y_{21}y_{41}/y_{31}$	$y_{11}-y_{21}y_{41}/y_{31}$
$\max\varphi$	y_{11}	$y_{11}-y_{21}y_{41}/y_{31}$	

мы сразу видим, что

$$\max_{\varphi}\ \min_{\psi} V(\psi,\ \varphi)=\min_{\psi}\ \max_{\varphi} V(\psi,\ \varphi)=$$
$$=V(1,\ 1)=y_{11}-y_{21}y_{41}/y_{31}. \tag{7}$$

В этой игре имеется седловая точка, и оптимальной стратегией в области A является чистая стратегия (1, 1).

Область B. В этой области $y_{21}y_{41} \geqslant y_{11}y_{31}$, $y_{11} \leqslant \frac{1}{2} y_{31}$ $y_{31} < y_{41}$. Поэтому

$$2y_{11}y_{31} < y_{41}^2 \tag{8}$$

и из табл. 1

$$V(1,1) = -y_{21} + y_{11}y_{31}/y_{41},\ V(1,0) = -y_{21},\ V(0,0) = -y_{21}$$

$$V(0,1) = \begin{cases} y_{11}, & \text{если } 2y_{21}y_{41} \leqslant y_{31}^2 \\ -y_{21} + y_{31}^2/2y_{41}, & \text{если } 2y_{21}y_{41} \geqslant y_{31}^2 \end{cases} \tag{9}$$

и так как согласно (8) $y_{11}y_{31}/y_{41} \leqslant y_{31}^2/2y_{41}$, то

$$\max_{\varphi}\min_{\psi} V(\psi,\varphi) = \min_{\psi}\max_{\varphi} V(\psi,\varphi) = \\ = V(1,\ 1) = -y_{21} + y_{11}y_{31}/y_{41}. \tag{10}$$

Область C. В этой области

$$2y_{21}y_{41} \geqslant y_{31}^2,\ y_{11} \geqslant \frac{1}{2} y_{31},\ y_{31} < y_{41}. \tag{11}$$

Обращаясь к табл. 1, находим, что

$$V(1,\ 1) = \begin{cases} y_{11} - y_{21}y_{41}/y_{31}, & \text{если } y_{11}y_{31} \geqslant y_{21}y_{41}, \\ -y_{21} + y_{11}y_{21}/y_{41}, & \text{если } y_{11}y_{31} \leqslant y_{21}y_{41}, \end{cases}$$

$$V(0,\ 1) = -y_{21} + y_{31}^2/2y_{41},\quad V(0,\ 0) = -y_{21}, \tag{12}$$

$$V(1,\ 0) = \begin{cases} y_{11} - y_{41}^2/2y_{31}, & \text{если } 2y_{11}y_{31} \geqslant y_{41}^2, \\ -y_{21}, & \text{если } 2y_{11}y_{31} \leqslant y_{41}^2. \end{cases}$$

Можно сделать вывод, что независимо от значений цен V(1, 1) и V(1, 0), данных в табл. 1 и определяемых знаком неравенств, благодаря условиям (11) справедливо соотношение

$$\max_{\varphi}\min_{\psi} V(\psi,\ \varphi) = \min_{\psi}\max_{\varphi} V(\psi,\varphi) = \\ = V(0,1) = -y_{21} + y_{31}^2/2y_{41}. \tag{13}$$

Поэтому мы делаем заключение, что для случая $y_{31}/y_{41} < 1{,}0$ и для всех значений y_{21} и y_{11} оптимальными стратегиями будут чистые стратегии, причем мы показали, что они являются функциями начальных условий.

Для того чтобы суммировать полученные результаты, был начерчен рисунок 3,*а*. Он такой же, как рис. 2, только на нем нанесены оптимальные стратегии (ψ, φ) в областях A, B и C. Кроме того, в каждой области отмечена выигравшая сторона. И, наконец, на нем нанесены линии, соединяющие постоянные значения отношения y_{1s}/y_{11}, когда выигрывают Красные, и постоянные значения отношения y_{2s}/y_{41}, когда выигрывают Синие. Значения этих отношений, связанные с каждой такой линией, можно отсчитать в точке пересечения линий с какой-нибудь осью координат. Так, линия с надписью «Ничья», соответствующая случаю, когда y_{1s} и y_{2s} одновременно становятся равными нулю в конце игры, проходит через начало координат.

Случай 2: $y_{31}/y_{41}>1{,}0$

Этот случай исследуется так же, как и случай 1. На рис. 3,*б* графически показаны три области, которые могут быть использованы для подтверждения существования оптимальных чистых стратегий. Стратегии, победители и линии постоянных значений y_{1s}/y_{31} и y_{2s}/y_{41} нанесены точно так же, как на рис. 3,*а*.

Случай 3: $y_{31}/y_{41}=1{,}0$

Разделим плоскость y_{11}/y_{31}, y_{21}/y_{41} на три области.

Область A_1. В этой области

$$y_{21}/y_{41}\geqslant\frac{1}{2},\quad y_{11}/y_{31}\geqslant\frac{1}{2}. \tag{14}$$

Нам необходимо теперь условиться относительно цены $V(0,0)$. Так как в этом случае бой происходит только между поддерживающими системами и может продолжаться бесконечно долго, то в этом смысле бой оканчивается ничьей, поскольку здесь нет ни победителя, ни побежденного в нашем первоначальном понимании. Согласно этой интерпретации $V(0,0)=0$. С другой стороны, главные системы остаются при этом неизменными. Поэтому в соответствии с нашим предположением о том, что поддерживающие системы сами по себе не имеют никакой ценности, можно считать, что в этом случае цена игры в любой момент времени равна $V(0,0)=$ $=x_{11}-x_{21}$. Оказывается, что оба предположения относи-

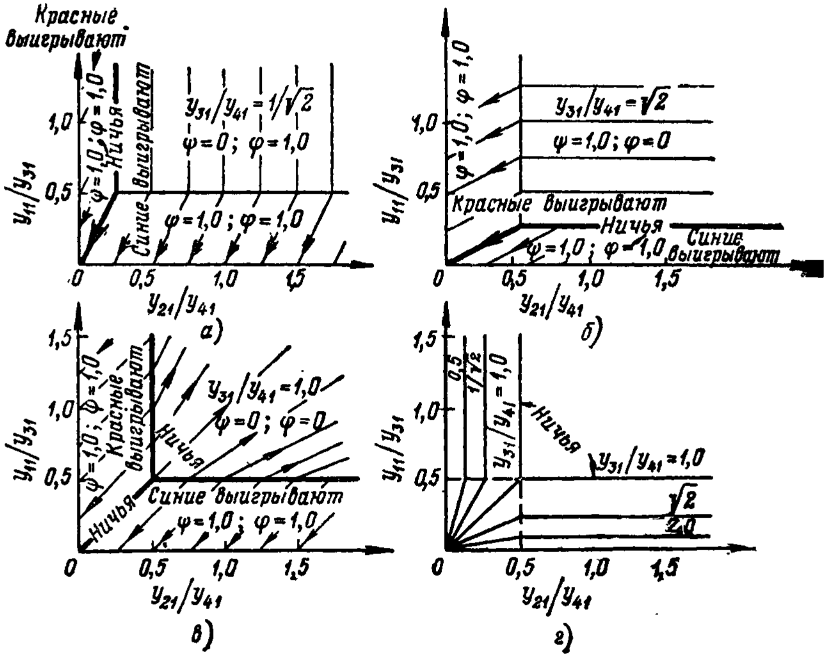


Рис. 3. Решения и оптимальные стратегии.

тельно значения $V(0,0)$ дают одни и те же оптимальные стратегии. Таким образом, учитывая (14) и только что приведенные рассуждения, мы получаем

$$V(0,0)=y_{11}-y_{21} \text{ или } 0, \quad V(1,1)=y_{11}-y_{21},$$
$$V(0,1)=-y_{21}+\frac{1}{2}y_{31}, \quad V(1,0)=y_{11}-\frac{1}{2}y_{41} \tag{15}$$

и приходим к выводу, что

$$\max_{\varphi}\min_{\psi} V(\psi,\varphi)=\min_{\psi}\max_{\varphi} V(\psi,\varphi)=V(0,0). \tag{16}$$

Область B_1. В этой области

$$y_{21}/y_{41}<\frac{1}{2}, \quad y_{11}/y_{31}<\frac{1}{2}, \tag{17}$$

$$V(0,0)=y_{11}-y_{21} \text{ или } 0, \quad V(1,1)=y_{11}-y_{21},$$
$$V(1,0)=-y_{21}, \quad V(0,1)=y_{11}, \tag{18}$$

откуда оптимальная стратегия должна быть $(1,1)$.

Области C_1, D_1. В этих областях $y_{21}/y_{41} \geqslant \frac{1}{2}$, $y_{11}/y_{31} \leqslant \frac{1}{2}$ и $y_{21}/y_{41} \leqslant \frac{1}{2}$, $y_{11}/y_{31} \geqslant \frac{1}{2}$, соответственно. Применяя непосредственно методы, использованные выше, находим, что оптимальными стратегиями для обоих случаев являются стратегии (1, 1).

На рис. 3,*в* графически показаны оптимальные стратегии для всех начальных условий, для случая $y_{31}=y_{41}$, а также нанесены линии постоянных значений y_{1s}/y_{31}, y_{2s}/y_{41} и для стратегии (0, 0) — значение $y_{1s}/y_{31} - y_{2s}/y_{41}$.

Наконец, на рис. 3,*г* показаны такие сочетания y_{11}/y_{31}, y_{21}/y_{41} и y_{31}/y_{41}, для которых игра оканчивается вничью.

На этом заканчивается определение оптимальных стратегий при ограничивающем условии, что ψ и φ могут принимать только значения, равные 0 или 1. Теперь мы приступим к доказательству того, что чистым стратегиям (ψ, φ), которые были получены выше, следует отдать предпочтение по сравнению с теми, в которых ψ и φ могут меняться в ходе игры или могут принимать значения в пределах между 0 и 1.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Следует отметить, что теория дифференциальных игр находится в начальной стадии развития и поэтому, по-видимому, не существует еще общих теорем, с помощью которых можно было бы строго доказать, что либо существуют решения желаемого вида, либо решения, полученные методами, использованными нами, являются обязательно желаемыми решениями. Однако к такой форме может быть приведено столь большое количество интересных военных проблем, что мы надеемся нашей статьей стимулировать дальнейшие математические исследования.

Согласно Айзексу [10] метод состоит в рассмотрении выборов, доступных обеим сторонам, в непосредственной близости к поверхности, соответствующей состоянию окончания игры ($y_i=0$). Здесь оптимальные стратегии очевидны, а решение можно получить, возвращаясь от точки, соответствующей состоянию окончания игры. Таким образом, можно построить пучок траекторий, каждая из которых соответствует постоянному значению V и оканчивается на выбранной поверхности, соответствующей состоянию окончания игры. Взяв сечение пучка в момент t и просматривая все возможные выборы на предшествующем отрезке времени dt, мы ищем такое решение, чтобы

$$\max_{\varphi} \min_{\psi} \dot{V} = \min_{\psi} \max_{\varphi} \dot{V} = 0. \tag{19}$$

Вообще

$$\dot{V} = V_1 \dot{y}_1 + V_2 \dot{y}_2 + V_3 \dot{y}_3 + V_4 \dot{y}_4, \tag{20}$$

где $V_j = \frac{\delta V}{\delta y_j}$; значения $\dot{y}_j$ в отличие от значений V_j не основаны на оптимальной траектории.

Из уравнений (4) следует, что

$$\dot{V} = \psi y_4 (-V_1 + V_3) + \varphi y_3 (-V_2 + V_4) - V_3 y_4 - V_4 y_3. \tag{21}$$

Рассмотрим траектории, оканчивающиеся победой Синих при $\varphi = 1,0$, $\psi = 1,0$, т. е. игру, оканчивающуюся положением, когда $y_{1s} = 0$:

$$V = -y_{21} + y_{31} y_{11} / y_{41}. \tag{22}$$

Для этого случая

$$V_1 = y_{31}/y_{41}, \quad V_2 = -1, \quad V_3 = y_{11}/y_{41}, \quad V_4 = -y_{31} y_{11}/y_{41}^2;$$

$$\dot{V} = -\psi (y_{31} - y_{11}) + \varphi y_{31} (1 - y_{11} y_{31}/y_{41}^2) - y_{11} + y_{11} y_{31}^2/y_{41}^2;$$

$$\varphi = 1,0, \text{ пока } y_{11} y_{31}/y_{41}^2 < 1, \quad y_{11}/y_{31} < (y_{41}/y_{31})^2; \tag{23}$$

$$\psi = 1,0, \text{ пока } y_{31} > y_{11}, \quad y_{11}/y_{31} < 1,0$$

и $\max\limits_{\varphi} \min\limits_{\psi} \dot{V} = \min\limits_{\psi} \max\limits_{\varphi} \dot{V} = 0$, что и требовалось. Так как оба эти предела включают ранее установленные границы, то решение справедливо в этих границах.

$$y_{11}/y_{31} \leqslant \frac{1}{2} (y_{41}/y_{31})^2, \quad y_{41}/y_{31} \leqslant 1,0,$$

$$y_{11}/y_{31} \leqslant \frac{1}{2}, \quad y_{41}/y_{31} = 1,0. \tag{24}$$

Аналогичным образом можно показать, что ранее полученные стратегии с победой Красных также оптимальны.

Исследуем теперь те случаи, которые оканчиваются при

$$y_{3s}=0, \text{ т. е. при } \psi=0,\ \varphi=1,0:$$

$$V=-y_{21}+y_{31}^2/2y_{41},\ V_1=0,\ V_2=-1,0, \qquad (25)$$

$$V_3=y_{31}/y_{41},\ V_4=-y_{31}^2/2y_{41}^2,$$

$$\dot{V}=\psi y_{31}+\varphi y_{31}(1-y_{31}^2/2y_{41}^2)-y_{31}+y_{31}^2/2y_{41}^2, \qquad (26)$$

откуда $\psi=0$ для всех значений $y_{1,2,3,4}$,

$$\varphi=1,0, \text{ если } (y_{31}/y_{41})^2<2,0. \qquad (27)$$

Но так как нам требуется решение только для $y_{31}/y_{41}<1,0$, то наш предыдущий выбор (0,1) утверждается.

Для частного случая $y_{31}=y_{41}$ в области $y_{11}/y_{31}>\frac{1}{2}$, $y_{21}/y_{41}>\frac{1}{2}$ вышеописанный метод неприменим. В этой области оптимальная стратегия, определенная при предположении, что могут выбираться только либо 0, либо 1, была (0,0). Для того чтобы определить последствия какой-нибудь другой стратегии, разрешим одной из сторон, скажем, Красным, использовать стратегию $(0,\varphi\neq0)$ в течение небольшого интервала времени δt. Тогда в конце этого интервала с точностью до членов с δt в первой степени

$$y_{42}/y_{32}=1+\varphi\delta t>1,$$

$$y_{12}/y_{32}=(1+\delta t)(y_{11}/y_{31})>y_{11}/y_{31}, \qquad (28)$$

$$y_{22}/y_{42}=[1-(1-\varphi)\delta t](y_{21}/y_{41})-\varphi\delta t<y_{21}/y_{41},$$

и сравнивая рис. 3,*в* с рис. 3,*а*, мы видим, что за исключением начальных точек, лежащих рядом с „ничейной" границей $2y_{22}y_{42}=y_{32}^2$, результатом этого отклонения Красных будет более уверенная победа Синих. Вблизи „ничейной" границы Синие выигрывают, если $2y_{22}y_{42}>y_{32}^2$. С точностью до членов с δt в первой степени

$$2y_{22}y_{42}-y_{32}^2=y_{41}^2[(2y_{21}/y_{41})-1]\geqslant0, \qquad (29)$$

где φ было взято равным 1,0, так как такое значение максимизирует это выражение. Поэтому мы делаем вывод, что для всех точек в области $y_{11}/y_{31} \geqslant \frac{1}{2}$, $y_{21}/y_{41} \geqslant \frac{1}{2}$ отклонения от стратегии $(0,0)$ приводят отклоняющуюся сторону к потерям.

ПОСЛЕДСТВИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОДНОЙ СТОРОНОЙ НЕОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ

Обратите внимание на то, что в дифференциальной игре каждая сторона должна непрерывно следить за параметрами y_i, так как ее оптимальная стратегия зависит от этих величин. Так, хотя стратегии (ψ, φ) фиксированы, поскольку обе стороны играют оптимальным образом, однако если одна из сторон отклонится от оптимального поведения и выберет какую-нибудь неоптимальную стратегию, то это может завести y_i в ходе игры в такую область, где противник может быть вынужден также сменить стратегию, чтобы продолжать игру оптимальным образом. Иначе говоря, $\psi_{\text{opt}} = \psi(y_1, y_2, y_3, y_4)$; $\varphi_{\text{opt}} = \varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Полученные до сих результаты могут быть сформулированы следующим образом.

Заданы x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, k_{34}, k_{32}, k_{41} и уравнения (3) и (4); оптимальные тактики и результаты игры определены. Результаты показаны на рис. 3. Далее желательно исследовать «баланс сил» с учетом расхода денежных средств.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИКСИРОВАННОГО БЮДЖЕТА

Одной из дополнительных альтернатив, имеющихся у реальных противников в игре описанного в этой статье типа, может быть начальное распределение фиксированного бюджета между системами вооружения. Этот выбор производится перед началом игры. Предполагая, что игра проводится оптимальным образом, мы ищем ответ на вопрос, как должна каждая сторона первоначально распределить выделенный ей бюджет между системами оружия.

Пусть одна единица системы оружия типа i стоит c_i долларов. Тогда расходы каждой из сторон можно записать в следующем виде:

$$\$_1 = c_1 x_1 + c_3 x_3, \quad \$_2 = c_2 x_2 + c_4 x_4. \tag{30}$$

Требуется определить

$$f_1 = c_1 x_1/\$_1, \quad f_2 = c_2 x_2/\$_2,$$
$$f_3 = 1 - f_1, \quad f_4 = 1 - f_2. \tag{31}$$

Дадим определение более общей формы игры: бюджет Синих равен $\$_2$; он фиксирован и известен обеим сторонам. Красные стремятся уравновесить свои силы с силами Синих (способом, который должен быть определен), выбирая бюджет $\$_1$. Далее Красные и Синие одновременно выбирают f_1 и f_2, определяя таким образом распределение расходов $\$_1$ и $\$_2$ между типами систем вооружения. Значения f_1 и f_2 не обязательно должны быть известны Синим и Красным, соответственно. Затем происходит бой в соответствии с оптимальными стратегиями (ψ, φ), определенными раньше.

Так как результат U можно предсказать при оптимальном выборе (ψ, φ) и при заданных $(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41})$, то как Синие, так и Красные перед началом игры могут определить для всех возможных значений (f_1, f_2) такое значение $\$_1$, которое привело бы игру к ничейному результату, т. е. к $U = 0$.

Затем Красные выбирают такое значение f_1, чтобы минимизировать $\$_1$, а Синие выбирают такое значение f_2, чтобы максимизировать $\$_1$. Мы хотим показать, что существует решение

$$\$_1^* = \min_{f_1} \max_{f_2} \$_1(f_1, f_2) = \max_{f_2} \min_{f_1} \$_1(f_1, f_2). \tag{32}$$

Если оно существует, то Красные выбирают $\$_1^*$.

Выражение, определяющее связь между $(y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41})$, принимает одну из четырех форм в зависимости от неравенств $y_{11}/y_{31} \gtrless \frac{1}{2}$; $y_{21}/y_{41} \gtrless \frac{1}{2}$. Мы рассмотрим все эти случаи в отдельности.

Для того чтобы упростить обозначения, мы опустим второй индекс в символах x_{i1}, y_{i1}, имея в виду, что речь идет о начальных значениях.

Вначале рассмотрим область

$$y_1/y_3 \leqslant \frac{1}{2}, \quad y_2/y_4 \leqslant \frac{1}{2},$$

т. е.

$$x_1/x_3 \leqslant k_{41}/2k_{43}, \quad x_2/x_4 \leqslant k_{32}/2k_{34}. \tag{33}$$

Здесь $\psi=1{,}0$, $\varphi=1{,}0$, и если бой оканчивается вничью, то

$$k_{32}x_1x_3=k_{41}x_2x_4. \tag{34}$$

Тогда

$$(\$_1/\$_2)^2=[k_{41}c_1c_3f_2(1-f_2)]/[k_{32}c_2c_4f_1(1-f_1)]$$

и

$$\min_{f_1}\max_{f_2}\$_1(f_1,f_2)=\max_{f_2}\min_{f_1}\$_1(f_1,f_2)=$$

$$=\$_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\$_2[(c_1c_3k_{41})/(c_2c_4k_{32})]^{1/2}. \tag{35}$$

Следовательно, в этой области каждая сторона распределяет свои расходы между системами вооружения поровну. Уравнение (35), конечно, подчиняется ограничениям (33), и поэтому оно справедливо только в том случае, если $k_{41}c_1\geqslant 2k_{43}c_3$, $k_{32}c_2\geqslant 2k_{34}c_4$.

Затем рассмотрим область

$$y_1/y_3\leqslant\frac{1}{2},\quad y_2/y_4\geqslant\frac{1}{2}. \tag{36}$$

Здесь $\psi=1{,}0$; $\varphi=0$, и если бой заканчивается вничью, то

$$2k_{34}x_1x_3=k_{41}x_4^2,\ (\$_1/\$_2)^2=[k_{41}c_1c_3(1-f_2)^2]/[2k_{34}f_1(1-f_1)], \tag{37}$$

$$\min_{f_1}\max_{f_2}\$_1(f_1,f_2)=\max_{f_2}\min_{f_1}\$_1(f_1,f_2)=\$_1\left(\frac{1}{2},\ f_2^*\right)=$$

$$=\$_2[2k_{41}c_1c_3/k_{34}]^{1/2}/[c_4+(k_{32}c_2/2k_{34})], \tag{38}$$

где $f_2^*=k_{32}c_2/(k_{32}c_2+2k_{34}c_4)$, т. е. минимакс лежит на границе $y_2/y_4=1/2$.

Аналогичное выражение может быть получено для случая $y_1/y_3\geqslant\frac{1}{2}$, $y_2/y_4\leqslant\frac{1}{2}$. Было найдено, что минимакс лежит на границе $y_1/y_3=\frac{1}{2}$.

Если, наконец, $y_1/y_3\geqslant\frac{1}{2}$, $y_2/y_4\geqslant\frac{1}{2}$, то для ничьей

$$k_{32}x_3^2=k_{41}x_4^2,\ (\$_1/\$_2)^2=(k_{41}/k_{32})[c_3(1-f_2)/c_4(1-f_1)]^2, \tag{39}$$

$$\min_{f_1}\max_{f_2} \$_1(f_1, f_2) = \max_{f_2}\min_{f_1} \$_1(f_1, f_2) = \$_1(f_1^*,\ f_2^*) =$$
$$= \$_2(k_{41}c_1 + 2k_{43}c_3)/(k_{32}c_2 + 2k_{34}c_4), \qquad (40)$$

где $f_1^* = k_{41}c_1/(k_{41}c_1 + 2k_{43}c_3)$ и $f_2^* = k_{32}c_2/(k_{32}c_2 + 2k_{34}c_4)$, т. е. решение находится в точке $y_1/y_3 = \frac{1}{2}$, $y_2/y_4 = \frac{1}{2}$.

Результаты для всех четырех случаев суммированы на рис. 4. Распределение бюджета для Синих, определяемое отношением f_2/f_4, зависит только от величины $k_{32}c_2/2k_{34}c_4$, а для Красных, определяемое отношением f_1/f_3, зависит только от $k_{41}c_1/2k_{43}c_3$.

Заметим, что $k_{32}c_2$ — это скорость, с какой одна единица системы x_3 уничтожает вложения Синих в систему x_2. Поэтому $k_{32}c_2/k_{34}c_4$ есть отношение скоростей, с которыми система x_3 может уничтожать вложения в си-

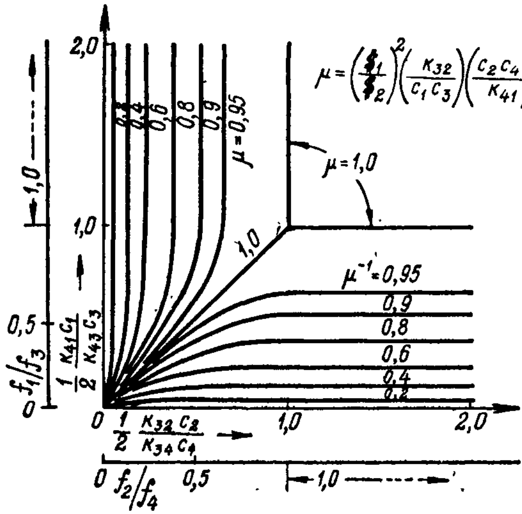


Рис. 4. Результаты оптимизации по стоимости.

стему x_2 по сравнению с вложениями в систему x_4. По мере возрастания этого отношения, начиная от очень малой величины, Синие выделяют все возрастающую долю своего бюджета — но не больше половины — на главную систему x_1.

Если, однако, поддерживающая система очень уязвима (и дорога), то бóльшая часть бюджета, практически почти весь бюджет, расходуется на нее. Это происходит потому, что в нашей простой модели только поддерживающее вооружение может наносить урон противнику.

Величина μ, показанная на рис. 4, равна

$$\mu = (\$_1/\$_2)^2 \, (k_{32}c_2c_4/k_{41}c_1c_4). \tag{41}$$

Она позволяет подсчитать минимальное отношение бюджетов Красных и Синих, необходимое для обеспечения равновесия сил. Мы теперь в состоянии ответить на следующий вопрос: каким должно быть отношение бюджетов ($\$_1/\$_2$), чтобы обеспечить ничью, и какая доля бюджета должна быть выделена на каждый тип вооружения, если заданы коэффициенты эффективности k_{32}, k_{41}, k_{34}, k_{43} и стоимости боевых единиц c_1, c_2, c_3, c_4.

ВЛИЯНИЕ РАССТОЯНИЯ

Теперь мы определим оптимальное расстояние, на котором следует размещать оружие. Для того чтобы получить некоторое представление о том, какую функцию следует применять для изображения зависимости эффективности поражения от расстояния, рассмотрим характеристики некоторых типичных образцов артиллерийского и авиационного вооружения. Мы приводим их в Приложении.

Во всех случаях уменьшение расстояния увеличивает эффективность поражения. Поэтому в случае ситуации, представленной уравнением (31), когда поддерживающая система сама не подвергается атаке, оптимальное расстояние стремится сократиться до нуля.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением симметричного случая, когда бюджеты и боевые возможности вооружения обеих сторон одинаковы. Будем искать такое симметричное решение, при любом малом отклонении от которого отклоняющаяся сторона несет потери. Заметим, что в лучшем случае это требование приводит к единственной седловой точке в точке симметрии. Вопрос о том, не могут ли большие отклонения привести к лучшим стратегиям, должен быть решен рассмотрением значений переменных во всем диапазоне их изменения.

Рассматривая случай, когда поддерживающая система подвергается атаке [уравнение (41)], обозначим

$$\mu = (\$_1/\$_2)^2 \tag{42}$$

и вычислим $\delta \log \mu/\delta r_3$, где r_3 есть расстояние от переднего края обороны системы x_3.

В соответствии с нашим намерением исследовать только область вблизи точки симметрии, где $k_{32}=k_{41}$, $k_{34}=k_{43}$, $c_1=c_2$ и т. д., мы имеем

$$\delta k_{34}/\delta r_3 = \delta k_{43}/\delta r_3, \tag{43}$$

так как небольшое изменение расстояния r_3 изменяет эффективность действий системы x_3 против системы x_4 ровно настолько же, насколько оно изменяет эффективность действий системы x_4 против системы x_3. Следовательно, $\delta k_{41}/\delta r_3=0$. Поэтому

$$\frac{\delta \log \mu}{\delta r_3} = -\frac{c_2 k_{32}/c_4 k_{34}}{1+\frac{1}{2}(c_2 k_{32}/c_4 k_{34})} \frac{\delta \log k_{32}}{\delta r_3}, \tag{44}$$

и поскольку $\delta \log k/\delta r_3 < 0$, то $\delta \log \mu/\delta r_3 > 0$.

Однако Красные желают минимизировать эту величину и поэтому стремятся уменьшить r_3 до нуля. Поэтому мы приходим к выводу, что для этой модели, в силу того, что k_{32} монотонно уменьшается с увеличением r_3, оптимальным значением r_3 является нуль. Аналогичные заключения можно сделать и относительно r_4.

Это заключение, однако, не всегда справедливо в несимметричном случае.

ВЛИЯНИЕ КОЛИЧЕСТВА И СТОИМОСТИ ВООРУЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь проблему определения оптимального значения k_{43}. Найдем производную от $\log \mu$ по c_4:

$$\frac{\delta \log \mu}{\delta c_4} = \frac{\delta \log k_{43}}{\delta c_4} + \frac{2\delta \log \left[c_3 + \frac{1}{2}(k_{41}/k_{43})\, c_1\right]}{\delta c_4} - \\ - \frac{2\delta \log \left[c_4 + \frac{1}{2}(k_{32}/k_{34})\, c_2\right]}{\delta c_4}. \tag{45}$$

В поисках какого-нибудь локального оптимума положим все параметры одинаковыми в точке решения. Это дает

$$\frac{\delta \log \mu}{\delta c_4} = \frac{1}{k_{43}} \frac{\delta k_{43}}{\delta c_4} + \frac{2\delta \left[\frac{1}{2} c_2 (k_{41}/k_{43}) - c_4\right] \Big/ \delta c_4}{\frac{1}{2} c_2 (k_{41}/k_{43}) + c_4} = 0. \tag{46}$$

Используя величину $\sqrt{k_{34}}$, мы придем, наконец, к выражению

$$\frac{\delta\left[c_4-\frac{1}{2}c_2(k_{41}/k_{43})\right]}{\delta\sqrt{k_{34}}}=\frac{c_4+\frac{1}{2}c_2(k_{41}/k_{43})}{\sqrt{k_{34}}}. \tag{47}$$

Теперь при оценке численности вооружения отношение k_{41}/k_{43} остается почти неизменным, так как увеличение бомбовой нагрузки обычно приводит к возрастанию эффективности действий против обеих систем x_1 и x_3. Поэтому

$$\delta\sqrt{k_{43}}/\delta c_4=\sqrt{k_{43}}\Big/\left[c_4+\frac{1}{2}c_2(k_{41}/k_{43})\right]. \tag{48}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ТИПОВ ВООРУЖЕНИЯ

Принимая во внимание резкое падение эффективности артиллерийского оружия при возрастании веса для одной и той же дальности (см. рис. 5) и полагая, что

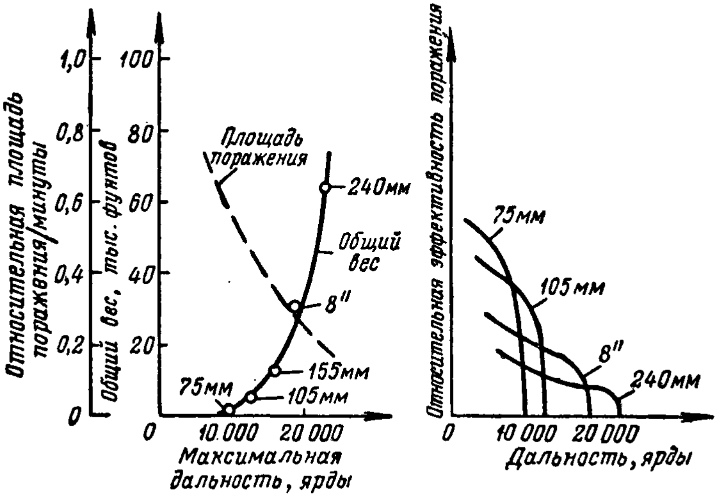


Рис. 5. Характеристики артиллерии.

стоимость оружия приблизительно пропорциональна его весу, мы приходим к выводу, что артиллерийское оружие, лучше всего удовлетворяющее требованиям простой ситуации, описанной в настоящей статье, должно быть ближнего действия, малого калибра и с высокой скорострельностью.

Для авиационного вооружения, наоборот, бомбовая нагрузка возрастает с увеличением общего веса. Поэтому эффективность должна возрастать почти пропорционально стоимости (рис. 6). Если

$$k_{43} = \alpha c_4^{1+\Delta}, \tag{49}$$

где Δ очень мало, и

$$k_{41}/k_{43} = \beta = \mathrm{const}, \tag{50}$$

то выбор c_4 в области, определенной уравнением (35) не имеет почти никаких преимуществ, за исключением того, что максимум в этой области немного выше. Это

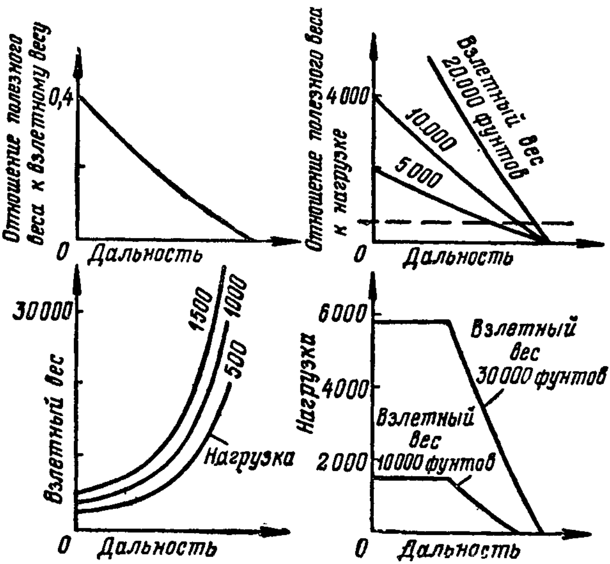


Рис. 6. Характеристики авиации.

приводит решение к границе области, в которой справедливо уравнение (4). Подставляя (49) в (48) и полагая $\delta(k_{43})^{1/2}/\delta c_4 = 0$, мы получаем

$$c_4 = \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{k_{41}}{k_{43}}\right)(1 + 2\Delta). \tag{51}$$

Таким образом, мы отдаем предпочтение тяжелым самолетам, но легким артиллерийским орудиям.

Чтобы получить представление о том, какой тип самолета могут рекомендовать наши простые формулы, вспомним, что в Корее военно-воздушные силы США нанесли наземным войскам потери в 150 раз большие, чем авиации противника. Тогда, согласно уравнению (51), $c_4/c_2=75$. Если считать расходы на одного пехотинца равными 10 000 долларов, то самолет «оптимальных размеров» должен был бы стоить 750 000 долларов, что не так уж сильно отличается от стоимости истребителя-бомбардировщика того типа, который применялся в Корее.

Эти далеко идущие обобщения следует, конечно, привести к терминологии основной модели. Предполагалось, что местоположение всех целей, как главных, так и второстепенных, всегда известно, так что эффективность поражения цели ограничена только мощью оружия. Тогда выбор легкого артиллерийского оружия объясняется тем, что для типов артиллерии, приведенных в Приложении, эффективность падает настолько быстро, а вес возрастает настолько сильно при возрастании максимального расстояния, что выгоднее иметь большое количество легкого, скорострельного оружия, используемого с малых расстояний. В действительном бою цели обнаруживаются не настолько быстро, чтобы можно было использовать максимальную скорострельность оружия. В этом случае более выгодно использовать дальнобойную артиллерию, которая, к тому же, позволяет при меньшем ее количестве перекрывать более широкие участки фронта. Эти соображения не включены в нашу модель.

Что касается авиации, то на практике увеличение вдвое бомбовой нагрузки обычно не приводит к удвоению эффективности, приходящейся на один вылет, опять-таки из-за трудности отыскания цели.

Кроме того, стоимость всей системы вооружения не совсем пропорциональна весу оружия. Эта зависимость несколько слабее. При оценке стоимости реальной системы вооружения следует также учитывать эксплуатационные и ремонтные расходы, снабжение и т. д.

Наконец, эффективность «пехотинцев» не включена в нашу модель. Если эффективность действий поддерживающего вооружения против пехоты приближается к нулю, то восстановление членов уравнения (1), содержащих k_{12} и k_{21}, приведет к некоторой границе, ниже которой никакого поддерживающего вооружения не следует заказывать.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРУЖИЯ

Чтобы получить основу для определения функциональной зависимости эффективности вооружения от расстояния и стоимости, изучим некоторые физические характеристики артиллерии и авиации при атаке наземных сил.

В приведенной ниже таблице даны характеристики гаубиц, имеющихся в армии США [7].

Тип	Вес с лафетом (в фунтах)	Вес снаряда (в фунтах)	Начальная скорость (*в фут/сек*)	Дальность (в ярдах)	Скорострельность	Относительная площадь поражения на снаряд*
75-*мм* M1A1	1 940	18	1 250	9 760	6/мин	1
105-*мм* M2A1	4 980	33	1 550	12 500	4/мин	1,22
155-*мм* M1	12 800	95	1 850	16 000	2/мин	1,75
8″ M1	31 700	200	1 950	18 510	0,5/мин	2,24
240-*мм*	64 525	360	2 300	25 250	1/мин	2,72

* Относительная площадь поражения на снаряд взята пропорциональной $W_p^{1/3}$, как указано в работе [8].

На рис. 5 показана зависимость максимальной дальности от общего веса, а также площадь, поражаемая в минуту, в зависимости от дальности, для каждого типа оружия при максимальной дальности. На меньших расстояниях площадь, поражаемая в минуту, возрастает вследствие увеличения точности. Кривые зависимости эффективности от расстояния также приведены на рис. 5.

Для авиационного вооружения мы можем написать, что $w_{t0} = w_{\text{горюч}} + w_{\text{бомб}} + w_{\text{основн}}$. В первом приближении горючее, потребное для полета на расстояние R миль, равно

$$\frac{w_{\text{горюч}}}{w_{t0}} = 1 - e^{-R/R_x} \approx \frac{R}{R_x},$$

где $w_{горюч}$ — вес горючего,

w_{t0} — взлетный вес самолета,

R_x — постоянная для самолетов с одним и тем же отношением подъемной силы к силе сопротивления, крейсерской скоростью и удельным потреблением горючего.

Среднее значение отношения $w_{основн}/w_{t0}$ равно 0,6 (хотя оно занижено для очень малых самолетов). На рис. 6 мы прежде всего показали зависимость расстояния от отношения $w_{полезн}/w_{t0}$, затем зависимость $w_{полезн}$ от R для различных значений w_{t0}. Не вся полезная нагрузка приходится на долю бомбовой нагрузки и горючего. Сюда, например, не входит вес летчика, радио- и радиолокационного оборудования, бомбоприцела и т. д. Поэтому мы нанесли линию минимального веса в 500 фунтов. Затем мы вычертили зависимость w_{t0} от расстояния. И, наконец, мы показали зависимость бомбовой нагрузки от расстояния для двух типов самолетов. Существует предельная бомбовая нагрузка, определяемая ограничениями по объему. Ясно, что чем больше самолет, тем больше его возможности в отношении бомбовой нагрузки.

При малых и средних расстояниях, однако, бомбовая нагрузка примерно пропорциональна общему весу самолета. Поражение, которое может быть достигнуто посредством бомбовой нагрузки данного веса, зависит от типа оружия на самолете. Если у каждой стороны будет иметься совершенная информация относительно расположения целей, то скорость их поражения одним самолетом можно считать приблизительно пропорциональной бомбовой нагрузке, т. е. общему весу, а следовательно стоимости. Таким образом, авиационное вооружение существенно отличается от артиллерийского, у которого скорость поражения уменьшается по мере роста общего веса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karl von Clausewitz. On War. Modern Library, New York, 1943, p. 237.
2. Pierre M. Gallois. Lighter, slower, cheaper, NATO's light strike fighter programme. Interavia, 1957, vol. XII, p. 893.
3. Herbert K. Weiss. Lanchester-type models of warfare. Proc. First International Conf. Operational Res., Oxford, September 1957.

4. D. R. Fulkerson and S. M. Johnson. A tactical air game. Opns. Res., 1957, vol. 5, p. 704—712.
Д. Р. Фулкерсон и С. М. Джонсон. Тактическая воздушная игра (см. настоящий сборник).
5. J. R. Isbell and W. H. Marlow. Methods of mathematical tactics. Logistics Papers, № 14, The George Washington University Logistics Research Project, September 1956.
6. J. R. Isbell and W. H. Marlow. Attrition Games. Naval Res. Log. Quart., 1956, vol. 3, p. 71—94.
Дж. Р. Айсбел и У. Х. Мэрлоу. Игры на уничтожение (см. настоящий сборник).
7. The Army Almanac. U. S. Governement Printing Office, 1950.
8. Congressional Record, 10 July 1956, p. 12380.
9. Pierre M. Gallois. Light strike fighters for the defense of Europe. Interavia, 1958, vol. XIII, p. 38.
10. Rufus J. Isaacs. Differential games. The RAND Corporation, RM-1391, RM-1399, RM-1411, RM-1486, 1954, 1955, vols. I—IV.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ БЮДЖЕТА МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ОРУЖИЯ УСТРАШЕНИЯ

*Джэймс М. Добби**. Группа оценки операций, Массачусетский технологический институт, Александрия, шт. Вирджиния.

Проблемы распределения ограниченных усилий часто встречаются в исследовании операций. Одной из самых первых проблем такого типа явилась задача распределения ограниченных поисковых возможностей для максимизации вероятности обнаружения цели, когда известна только функция распределения местоположения цели. Подобная проблема рассматривалась в [1]. Ее решение может быть найдено непосредственным применением дифференциального и вариационного исчислений.

Проблема усложняется, если противник может оказать противодействие, зная или не зная распределение усилий в данный момент. Такие парные игры могут быть двухсторонними, когда каждый игрок делает ходы, не зная ходов своего противника, или односторонними, когда один игрок знает все ходы своего противника. Наша проблема представляет пример игры последнего типа [минорантная игра, по обозначению фон Неймана (см., например, [2], стр. 100)], когда цена этой игры не равна цене другой (мажорантной) односторонней игры. Обычно в таких случаях проблема сильно усложняется.

НАШИ ЦЕЛИ И КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Мы желаем распределить определенные усилия (в условиях холодной войны это будут, вероятнее всего, доллары) между различными системами устрашения для того, чтобы предотвратить новую всеобщую войну.

---

* James M. Dobbie. On the allocation of effort among deterrent systems. Operations Research, 1959, vol. 7, p. 335—346.

Вообще говоря, наша цель состоит в том, чтобы удержать противника от развязывания всеобщей войны. Трудно установить, какие факторы важны для достижения этой цели и в какой степени они способствуют предотвращению войны. Чтобы избежать дальнейших споров по этому широко обсуждавшемуся вопросу, мы предположим, что самым существенным фактором является наша способность нанести ответный удар в случае, если противник развяжет войну. Поэтому наша цель состоит в максимизации нашей способности к ответному удару.

Поскольку дело касается наших сил устрашения, цель противника будет заключаться в минимизации нашей способности к ответному удару посредством выделения части своего начального удара (или всего удара) для действий по системам устрашения. Эту часть начального удара обычно называют упреждающим ударом (*blunting effort*). Мы будем предполагать, что противник может распределить этот упреждающий удар по нашим системам устрашения, имея ограниченные средства и обладая полной информацией относительно нашего распределения усилий между этими системами.

Для любого заданного распределения наших усилий между различными системами устрашения противник будет стараться так распределить свой упреждающий удар, чтобы минимизировать способность к ответному удару, сохраняющуюся после упреждающего удара. Следовательно, самое лучшее, что мы можем сделать, это распределить наши усилия по устрашению так, чтобы максимизировать этот минимум. Таким образом, наша задача состоит в определении минимаксного решения, в то время как задача противника сводится к простой минимизации.

До сих пор ничего не было сказано относительно влияния времени на нашу проблему. Совершенно очевидно, что все соревнующиеся альтернативы будут меняться с течением времени. Кроме того, величины параметров, характеризующих возможности систем, будут также меняться со временем. Следовательно, необходимо выделить один или несколько моментов времени, представляющих интерес, и ограничить рассмотрение теми альтернативами с соответствующими значениями параметров, которые в это время доступны для анализа.

Следует понять, что мы не пытаемся достичь абсолютного максимума нашей способности к ответному удару для этого момента времени, так как в другой момент времени такое решение может, вероятно, дать недопустимо низкое значение этой способности. Как функция времени наша политика распределения должна стремиться к максимизации минимальной способности к ответному удару. Другой фактор, который следует принять во внимание, это время, потребное для восстановления способности к ответному удару при появлении какой-нибудь новой системы. Предварительное определение такого времени затруднено ошибками в определении времени создания новых систем и их стоимости.

Чтобы избежать некоторых из только что рассмотренных нами трудностей или, хотя бы, создать иллюзию этого, мы ограничим наш анализ двумя новыми системами, действующими в достаточно отдаленном будущем, когда существующие в настоящее время системы можно будет считать неэффективными. Этими двумя системами являются система ракет с неподвижными стартовыми позициями, такая, как система «Титан», и система ракет меньшей дальности, но с подвижными стартовыми позициями, такая, как система «Поларис», базирующаяся на подводных лодках. Тем не менее, наша модель пригодна для сравнения любых других неподвижных и подвижных систем.

Существенное различие между двумя системами состоит в том, что подвижность и скрытность способствуют лучшей защите боеготовой развернутой части подвижной системы против упреждающего удара, так как противник должен сначала обнаружить эти боевые единицы. С другой стороны, месторасположение большей части наших боевых единиц, расположенных на неподвижных базах, вероятно, будет известно нашему противнику.

Мы предполагаем, что к противнику будет поступать информация о расположении наших постоянных баз по разведывательным каналам. Затраты на получение этой информации не повлияют на эффективность упреждающего удара, так как масштабы разведывательной деятельности, вероятно, мало бы изменились, если бы такой системы вообще не существовало. Мы предполагаем также, что непосредственно перед упреждающим ударом не производится никакой разведки для выявления дополнительных подразделений этой системы.

С другой стороны, мы предполагаем, что в любое время часть подвижной системы развернута таким образом, что прежде, чем она может быть успешно атакована, должны быть приложены значительные усилия для обнаружения, сопровождения и локализации этих подразделений. Эти усилия полностью направлены на снижение эффективности упреждающего удара противника. Предполагается, что месторасположение неразвернутых единиц известно противнику, хотя предположение о том, что часть этих сил не удалось обнаружить, нисколько не усложняет математические выкладки.

В целях удобства мы будем в дальнейшем считать систему с неподвижной базой наземной системой, а систему с подвижной базой — морской системой. Для обозначения параметров наземной системы мы будем пользоваться индексом l, а морской системы — индексом s. Введем следующие обозначения:

b — число позиций (или баз) типа l (или s),
n — число ракет на каждой базе,
h — огневая мощь ракеты*,
c — стоимость базы,
f — часть наземных баз, обнаруженных противником заблаговременно,
d — часть подразделений морского базирования, развернутая на море,
r — число экипажей самолетов, выделенных для поиска и атаки подразделений, развернутых на морских базах,
u — число ракет противника, действующих против подразделений наземного базирования или против неразвернутых морских подразделений,

* Выражается с помощью какой-нибудь удобной единицы разрушения, такой, как площадь городской застройки, разрушенная до данного уровня разрушения или хуже. Это позволяет учитывать различные боевые головки, точность, надежность и т. д. Очевидно, что h должна уменьшаться с увеличением bn для того, чтобы скомпенсировать уменьшение досягаемости подходящих целей и дублирование разрушения. С другой стороны, влияние возрастания разрушения на промышленное производство и на моральное состояние населения возрастает, вероятно, значительно быстрее, чем физическое разрушение.

$\exp(-k_l)$ — вероятность того, что наземная база уцелеет после запуска по ней одной ракеты (в случае индекса s имеются в виду неразвернутые подразделения морского базирования),

$\exp(-k_r)$ — вероятность того, что развернутое подразделение морского базирования не будет обнаружено одним экипажем самолета, выделенного для этой цели,

g — вероятность того, что развернутое подразделение морского базирования уцелеет после того, как оно будет обнаружено,

B_0 — общий бюджет, выделенный на наземные базы и подразделения морского базирования,

U_0 — общие усилия противника, выраженные в эквивалентных ракетах.

Тогда ожидаемое число наших боеспособных подразделений, уцелевших после упреждающей атаки, равно приблизительно*

$$N = b_l n_l h_l \left[(1-f) + f e^{-k_l u_l / f b_l}\right] +$$

$$+ b_s n_s h_s \left[(1-d) e^{-k_s u_s/(1-d) b_s} + d e^{-r k_r} + d g (1 - e^{-r k_r})\right]. \quad (1)$$

Наши суммарные затраты и суммарные усилия противника можно записать в следующей форме:

$$B_0 = b_l c_l + b_s c_s, \quad (2)$$

$$U_0 = u_l + u_s + ar, \quad (3)$$

где a — отношение стоимости одного экипажа самолета, выделенного для обнаружения и атаки подразделений морского базирования, к стоимости одной ракеты, используемой против наземной базы.

Нормализуем выражения (2) и (3), полагая

$$y_1 = \frac{b_l c_l}{B_0}, \quad y_2 = \frac{b_s c_s}{B_0}, \quad x_1 = \frac{u_l}{U_0}, \quad x_2 = \frac{u_s}{U_0}, \quad x_3 = \frac{ar}{U_0}.$$

---

* Если по одной базе выпущено две и более ракет, то вероятность сохранения базы равна произведению частных вероятностей сохранения. При этом мы подразумеваем, что ошибки некоррелированы (а на самом деле некоторые из них скоррелированы) и что ущерб не накапливается, что не совсем так. Однако для наших целей такое допущение возможно.

Тогда уравнения (1), (2) и (3) примут следующий вид:

$$N = a'y_1 + b'y_2 + ay_1 e^{-\alpha x_1/y_1} + by_2 e^{-\beta x_2/y_2} + cy_2 e^{-\gamma x_3}, \qquad (4)$$

$$y_1 + y_2 = 1, \qquad (5)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad (6)$$

где коэффициенты a', b', a, b, c, α, β, γ могут быть легко выражены через первоначальные параметры. Величины x_1, x_2, x_3 суть те части упреждающего удара противника, которые направлены против подразделений наземного базирования, неразвернутых подразделений морского базирования и развернутых подразделений морского базирования. Величины y_1 и y_2 суть части нашего бюджета, выделенные на системы наземного базирования и системы морского базирования.

Мы будем предполагать, что противник делает свой выбор $(x) = (x_1, x_2, x_3)$ после нашего выбора $(y) = (y_1, y_2)$, имея полную информацию относительно нашего выбора *. Будем также предполагать, что цель противника — минимизировать N. У нас же имеются две разумные цели. Первой целью является максимизация N при ограничениях, налагаемых фиксированным бюджетом и вышеупомянутым предположением о том, что противнику известен наш выбор. Вторая цель — минимизировать общую стоимость затрат, необходимых для получения заданных минимальных сил, уцелевших после упреждающей атаки. Были рассмотрены обе формулировки и между решениями (y) для заданной группы параметров не оказалось существенной разницы. Мы рассмотрим только решение, связанное с первой целью.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

При любом выборе (y) противник сделает свой выбор (x) так, чтобы минимизировать N. Самое лучшее, что мы можем сделать, это произвести наш выбор (y) так, чтобы максимизировать этот минимум. Следовательно, наша задача состоит в решении игры с максиминным результатом, в то время как перед противником

* Выборы ограничены дискретными числами. Если решение получено в результате непрерывных вариаций, следует брать дискретные значения вблизи полученных решений.

стоит просто задача минимизации. При принятых нами предположениях минимаксная игра не может быть применена. Интересно, однако, отметить, что минимаксная игра легко решается. К несчастью, функция N не имеет седловой точки, и минимаксное решение не может быть использовано для определения максиминного решения.

При заданном выборе (y) мы сначала сделаем такой выбор (x), чтобы минимизировать N. Как показано в Приложении, выборы (x) лежат в области, ограниченной треугольником, изображенным на рис. 1. Минималь-

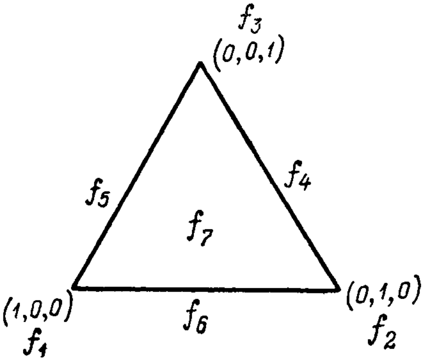


Рис. 1. Треугольная область решений.

ное значение N может иметь место на одной из вершин, на одной из сторон или же внутри треугольника. Точки, в которых имеет место минимум, зависят от величины параметров, и от конкретного выбора (y). Минимальное значение N есть функция выбора (y), но эта функция зависит от точки треугольника, в которой имеет место минимум. Имеется семь функций, соответствующих трем вершинам, трем сторонам и внутренней части треугольника.

Пусть одна из переменных y_i, например y_2, изменяется от 0 до 1 при заданных значениях параметров, как показано на рис. 2. Для любого значения y_2 может быть использована одна и только одна из семи функций. Используемая функция будет изменяться при изменении y_2. Таким образом, интервал $0 \leqslant y_2 \leqslant 1$ можно разбить на такие подынтервалы, чтобы на каждом из них было минимальное значение N, определяемое одной из семи функций. В результате мы будем поставлены перед проблемой определения максимума составной функции на всем интервале.

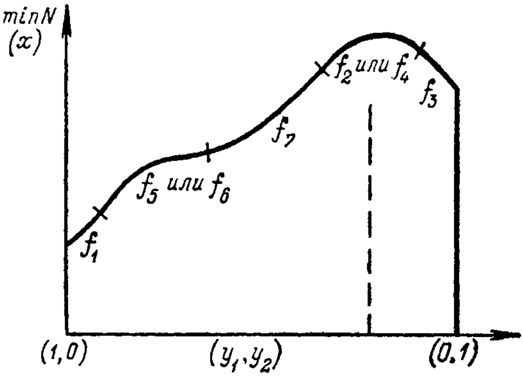


Рис. 2. График функции $\min\limits_{x} N$ для определения максимального решения.

В Приложении показывается, что аналитически решить эту проблему очень трудно. Как обычно принято в таких случаях, мы должны обратиться к быстродействующей вычислительной машине.

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ

Иллюстрацией нашего метода может служить особый случай, который легко поддается изучению и который имеет место, если предположить, что неразвернутые подразделения морского базирования будут эффективно поражены при атаках противника, не направленных специально против этих подразделений. Если мы исключим из выражения для N член, содержащий x_2, заменим x_3 на $1-x_1$, а y_2 на $1-y_1$, то N можно представить в виде функции двух переменных x_1 и y_1. Тогда мы должны рассматривать поверхность, определяемую этим уравнением, в пространстве (x_1, y_1, N) в пределах квадрата $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant y_1 \leqslant 1$, т. е. мы имеем

$$N = b' + (a' - b')\, y_1 + a y_1 e^{-\alpha x_1/y_1} + c\,(1 - y_1)\, e^{-\gamma(1-x_1)}.$$

Если $y_1=0$, то минимальное значение N, очевидно, получается при $x_1=0$. По мере увеличения y_1 минимальное значение N будет по-прежнему при $x_1=0$ для некоторых значений параметров, при условии, что y_1 не принимает слишком больших значений. Для $y_1=1$ минимум, очевидно, имеет место при $x_1=1$. Для значений y_1, немного меньших единицы, минимум по-прежнему будет при $x_1=1$. Для средних значений y_1 минимальное значение N будет иметь место при некоторых значениях x_1 между 0 и 1. Эти значения x_1 и само минимальное значение N будут зависеть от y_1.

Совершенно очевидно, что N есть выпуклая функция от x_1. Поэтому минимальное значение N будет иметь место при $x_1=0$, если производная от N по x_1 будет в этой точке положительной. Точно также минимум будет иметь место при $x_1=1$, если производная будет в той же точке отрицательной. Если не соблюдается ни одно из этих условий, то минимум имеет место при значении x_1 между 0 и 1.

Удобно ввести следующие обозначения:

$$A=a\alpha, \quad C=c\gamma, \quad A'=Ae^{-\alpha}, \quad C'=Ce^{-\gamma}.$$

Тогда условия и минимальные значения N можно свести в следующую таблицу:

Таблица

Случай	Минимум при (x_1, x_3)	Условия	Минимальное значение N
1	$(0,\ 1)$	$A \leqslant C'y_2$	$f_1=a'y_1+b'y_2+ay_1+cy_2e^{-\gamma}$
2	$(x_1^0,\ x_3^0)$	$C'y_2<A$; $Ae^{-\alpha/y_2}<Cy_2$	$f_2=a'y_1+b'y_2+\left(\frac{y_1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)\times$ $\times\left[A^{y_1/\alpha}(C'y_2)^{1/\gamma}\right]^{\frac{1}{y_1/\alpha+1/\gamma}}$
3	$(1,\ 0)$	$Cy_2 \leqslant Ae^{-\alpha/y_1}$	$f_3=a'y_1+b'y_2+ay_1e^{-\alpha/y_1}+cy_2$

Следовательно,

$$x_1^0=y_1\left[\gamma+\ln\left(\frac{A}{Cy_2}\right)\right]\Big/(\alpha+\gamma y_1), \quad x_3^0=1-x_1^0.$$

Очевидно, что случая *1* не будет, если A больше C'. Если $A<C'$, то максимальным значением функции f_1 на ее интервале является наибольшее из двух значений на

концах, т. е. при $y_1=0$ и $y_1=1-\frac{A}{C'}$. Аналогично, максимум функции f_3 на своем интервале будет равен наибольшему из двух концевых значений, так как f_3 есть выпуклая функция от y_1. Верхнее концевое значение равно $y_1=1$. Нижнее концевое значение получается в результате решения уравнения

$$C(1-y_1)=Ae^{-\frac{\alpha}{y_1}}. \qquad (7)$$

Таковы участки функций f_1 и f_3.

Функция f_2 применяется для значений y_1 между $1-\frac{A}{C'}$ (или 0, если это выражение отрицательно) и решением уравнения (7). Аналитическое решение здесь затруднительно. Практически максимум определялся приближенно путем вычисления f_2 на интервалах внутри применяемого диапазона и выбором максимального результата. Наконец, максиминное значение N определялось выбором максимального значения функций f_1, f_2 и f_3 в пределах диапазонов их применения.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Были произведены вычисления решений (y_1, y_2) более чем для 2000 различных комбинаций параметров. Для некоторых комбинаций параметров было получено решение (1,0), т. е. рекомендовалось весь бюджет израсходовать на наземные базы. Для некоторых же комбинаций получалось решение (0,1), т. е. рекомендовалось весь бюджет выделить на ракеты, устанавливаемые на подводных лодках. И, наконец, в некоторых случаях решение было смешанным *.

Выбор параметров производился посредством предварительной оценки значения каждого параметра для интересующего нас времени. Она основана в свою очередь на оценке наших возможностей в данный момент,

* Не следует путать смешанное решение со «смешанной стратегией». Стратегией называется пара чисел (y_1, y_2), удовлетворяющих условиям $y_1, y_2 \geqslant 0$, $y_1+y_2=1$. Поэтому решение (0,3; 0,7) является точно такой же чистой стратегией, как решение (0,1), но оно является смешанным решением в том смысле, что оно касается *обеих* систем.

на разведывательных данных о возможностях противника и на оценке их возможных изменений в будущем После этого выбирались значения по обе стороны от этих оценочных значений, чтобы учесть возможные отклонения и колебания.

Влияние некоторых из этих параметров показано на графиках рис. 3 и 4. Значения параметров, не указанных

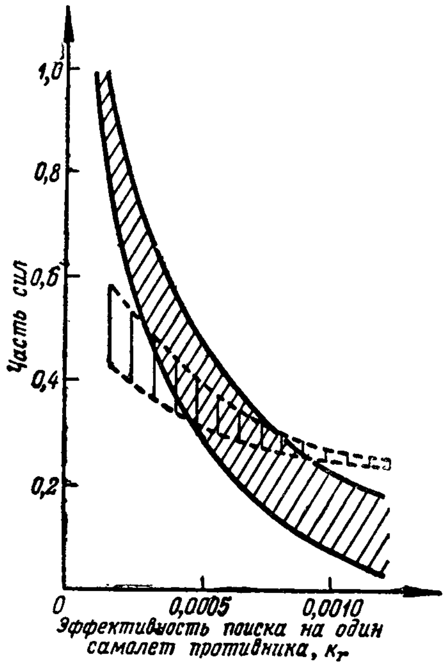


Рис. 3. Влияние эффективности поиска.

Сплошными линиями показана часть сил y_2, базирующаяся на подводных лодках; пунктирными линиями показаны остающиеся силы.

на графиках, взяты такие, которые являются оптимальными для рассматриваемого периода времени. На рис. 3 сплошными линиями обозначены кривые зависимости части y_2, т. е. сил, базирующихся на подводных лодках, в решении максиминной задачи. Пунктирными линиями обозначены кривые зависимости общего остаточного потенциала устрашения после упреждающего удара противника. Верхние кривые соответствуют случаю, когда

$d = {}^2/_3$ (часть развернутых боевых единиц, базирующихся на подводных лодках), а нижние кривые — случаю, когда $d = {}^1/_2$. Из этих кривых видно, что эффективность поиска вражеской авиацией боевых единиц, развернутых на подводных лодках, оказывает большое влияние на решение и значительно меньшее влияние на результат.

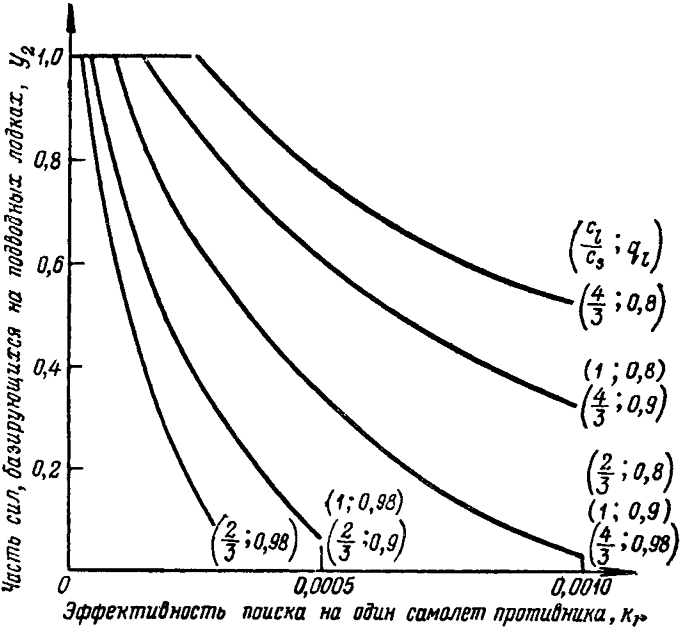


Рис. 4. Влияние различных параметров.

На рис. 4 показано влияние отношения стоимости ракет к вероятности непоражения наземных баз. Там, где около одной кривой нанесены две или более групп значений параметров, это означает, что кривые проходят очень близко друг к другу, и чтобы их не перепутать, они все объединены в одну кривую.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РЕШЕНИЕ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧИ

Обозначим через x_1, x_2, x_3 части упреждающего удара противника, направленные против наших наземных баз, морских неразвернутых боевых единиц и морских развернутых боевых единиц, соответственно. Обозначим через y_1 и y_2 части нашего бюджета, выделенные на ракеты «земля — земля» и на ракеты «подводная лодка — земля», соответственно. Тогда математическое ожидание ракет, уцелевших после упреждающего удара при условиях, перечисленных в статье, будет приблизительно равно *

$$N = a'y_1 + b'y_2 + ay_1 e^{-\alpha x_1/y_1} + by_2 e^{-\beta x_2/y_2} + cy_2 e^{-\gamma x_3}. \quad (8)$$

Будем сокращенно записывать это выражение как $N(x, y)$.

Если мы предположим, что противник делает свой выбор $(x) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ после нашего выбора $(y) \equiv (y_1, y_2)$ и знает этот наш выбор, то мы можем вместо N рассматривать $N(x^0, y)$, где $(x^0) \equiv (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ есть множество значений x, которое минимизирует N для нашего выбора (y). Если наша цель состоит в максимизации значения N, то самое лучшее, чего мы можем достичь, это значения $V = \max\limits_y \min\limits_x N(x, y)$.

Задача заключается в том, чтобы определить такой наилучший выбор (y), при ограничениях

$$x_i \geqslant 0, \ \Sigma x_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9)$$

$$y_j \geqslant 0, \ \Sigma y_j = 1 \quad (j = 1, 2). \quad (10)$$

Сначала рассмотрим N как функцию от x_1, x_2, x_3 и запишем его в следующем виде:

$$N = G + H e^{-hx_1} + J e^{-jx_2} + K e^{-kx_3}. \quad (11)$$

Значения букв могут быть получены из сравнения выражений (11) и (8). Мы желаем найти минимальное значение N при ограничениях (9).

Здесь мы можем заменить x_3 разностью $(1 - x_1 - x_2)$ в выражении для N, а условия (9) заменить условиями

$$x_1, \ x_2 \geqslant 0; \ x_1 + x_2 \leqslant 1. \quad (12)$$

---

* Производная от третьего члена не может быть использована, если $y_1 = 0$, так как она начинается со значения q_l вероятности, что наша наземная позиция уцелеет от одной ракеты противника. В этом случае третий член должен быть приравнен нулю. Точно так же четвертый член должен быть приравнен нулю, если $y_2 = 0$. Хотя эти члены стремятся к соответствующим пределам, некоторые производные в этих предельных случаях не будут иметь физического смысла.

Тогда $N = F(x_1, x_2)$ будет уравнением поверхности в трехмерном пространстве, и мы должны определить его минимальное значение в пределах треугольника, заданного уравнениями (12). Однако проще отказаться от такого пространственного представления и рассматривать N как функцию трех переменных (x_1, x_2, x_3) в пределах треугольника с вершинами (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1).

Имеется семь различных форм функции минимума в зависимости от того, в какой точке имеет место минимум — на одной из трех вершин, на одной из трех сторон или внутри треугольника. Ограничениями для этих семи случаев будут неравенства, связывающие H, h и т. д., которые становятся неравенствами на (y_1, y_2). Таким образом, интервал от $(y_1, y_2) = (1,0)$ до $(0,1)$ может быть разбит на участки так, что к каждому из них будет применима одна из семи функций. Максимум функций $\min N$ для всего интервала можно найти, если определить максимумы для каждого участка, а затем выбрать наибольший из них.

Так как N есть сумма простых отрицательных экспоненциальных функций, причем каждая из них является функцией одной переменной, то, очевидно, что N — выпуклая функция. Поэтому локальный минимум будет минимумом для всей интересующей нас области. Для того чтобы точка была локальным минимумом, необходимо, чтобы направленные производные во всех возможных направлениях были либо положительны, либо равны нулю.

Направленная производная в точке (x_1, x_2, x_3) в направлении, заданном направляющими косинусами (λ, μ, υ) будет равна

$$\frac{dN}{ds} = -\lambda Hh\, e^{-hx_1} - \mu Jj\, e^{-jx_2} - \nu Kk\, e^{-kx_3}.$$

В точке (1, 0, 0) направленная производная в направлении $(0, u_2, u_3)$, где $u_2 + u_3 = 1$, будет равна

$$\frac{dN}{ds} = \frac{Hh\, e^{-h} - u_2 Jj - u_3 Kk}{\sqrt{1 + u_2^2 + u_3^2}}.$$

Мы накладываем условие, чтобы она была неотрицательной для всех значений (u_2, u_3), так что $u_2 + u_3 = 1$,

$u_2 \geqslant 0, u_3 \geqslant 0$. Это справедливо тогда и только тогда, когда

$$Hh\, e^{-h} \geqslant \max(Jj,\ Kk),$$

или, выражая через y_1 и y_2,

$$A\, e^{-x/y_1} \geqslant \max(B,\ Cy_2), \tag{13}$$

где $A = a\alpha$, $B = b\beta$, $C = c\gamma$.

Если $Ae^{-\alpha} < B$, то никакое значение (y_1, y_2) не может удовлетворить условию (13). В этом случае мы должны заменить условие (13) особым значением $y_2 = 0$, для которого минимальное значение N имеет место всегда при (1, 0, 0). Трудность заключается в том, что, как указывалось в примечании к выражению (8), в этом случае третий член выражения (11) должен быть опущен, и это отразится на правой части условия (13). Если это сделано, то условие (13) удовлетворяется при $y_2 = 0$. Следовательно, выборы (y_1, y_2), которые дают минимум при выборе $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$, состоят из $y_2 = 0$, $y_1 = 1$ и значений, удовлетворяющих условию (13).

Для $y_2 = 0$ минимальное значение N равно $a' + ae^{-\alpha}$ Для других значений, удовлетворяющих условию (13), функция будет иметь вид

$$f = N(1, 0, 0) = a'y_1 + (b' + b + c)\, y_2 + ay_1\, e^{-\alpha/y_1}.$$

Заменим y_2 на $1 - y_1$; следовательно, $f_1 = F(y_1)$. Тогда

$$\frac{d^2F}{dy_1^2} = \frac{a\alpha^2\, e^{-\alpha/y_1}}{y_1^3}.$$

Следовательно, $F(y_1)$ — выпуклая функция. Поскольку мы ищем максимум функции F, то достаточно проверить концевые точки. Этими точками являются точка $y_1 = 1$ и решение уравнения, полученного из неравенства (13). Если правая сторона выражения (13) равна B, что обычно имеет место, и $A\, e^{-\alpha} \geqslant B$ (условие для решения, удовлетворяющего граничным условиям), то решение будет

$$y_1^0 = \frac{\alpha}{\ln(A/B)}.$$

Таблица 2

Сводная таблица минимальных условий и функций

Случай	Минимум	Условия	Минимум N
1	$(1,\ 0,\ 0)$	$y_2=0$ плюс решения уравнения $Ae^{-\alpha/y_1} \geqslant \max(B,\ Cy_2)$	$f_1=\begin{cases} a'+ae^{-\alpha}, & \text{если } y_2=0 \\ (a'+a\,e^{-\alpha/y_1})\,y_1+(b'+b+c)\,y_2, & \\ \text{если } y_2\neq 0 & \end{cases}$
2	$(0,\ 1,\ 0)$	$Be^{-\beta/y_2} \geqslant \max(A,\ Cy_2)$	$f_2=(a'+a)\,y_1+(b'+c+b\,e^{-\beta/y_2})\,y_2$
3	$(0,\ 0,\ 1)$	$Cy_2e^{-\gamma} \geqslant \max(A,\ B)$	$f_3=(a'+a)\,y_1+(b'+b+c\,e^{-\gamma})\,y_2$
4*	$(0,\ x_2',\ x_3')$	$Be^{-\beta/y_2}<Cy_2<Be^{\gamma}$ $\left(\frac{B}{A}\right)^{y_2/\beta}\left(\frac{Cy_2}{A}\right)^{1/\gamma} \geqslant e$	$f_4=(a'+a)\,y_1+b'y_2+\left(\frac{y_2}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\times$ $\times\left[B^{y_2/\beta}(Cy_2)^{1/\gamma}e^{-1}\right]^{\frac{1}{y_2/\beta+1/\gamma}}$
5*	$(x_1'',\ 0,\ x_3'')$	$Ae^{-\alpha/y_1} \leqslant Cy_2 \leqslant Ae^{\gamma}$ $\left(\frac{A}{B}\right)^{y_1/\alpha}\left(\frac{Cy_2}{B}\right)^{1/\gamma} \geqslant e$	$f_5=a'y_1+(b'+b)\,y_2+\left(\frac{y_1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\right)\times$ $\times\left[A^{y_1/\alpha}(Cy_2)^{1/\gamma}e^{-1}\right]^{\frac{1}{y_1/\alpha+1/\gamma}}$

* Координаты минимумов:

Случай 4. $x_2'=\left(\gamma+\ln\frac{B}{Cy_2}\right)\Big/\left(\frac{\beta}{y_2}+\gamma\right)$, $x_3'=\left(\frac{\beta}{y_2}+\ln\frac{Cy_2}{B}\right)\Big/\left(\frac{\beta}{y_2}+\gamma\right)$;

Случай 5. $x_1''=\left(\gamma+\ln\frac{A}{Cy_2}\right)\Big/\left(\frac{\alpha}{y_1}+\gamma\right)$, $x_3''=\left(\frac{\alpha}{y_1}+\ln\frac{Cy_2}{A}\right)\Big/\left(\frac{\alpha}{y_1}+\gamma\right)$.

Продолжение табл. 2

Случай	Минимум	Условия	Минимум N
6*	$(x_1''', \ x_2''', \ 0)$	$Ae^{-\alpha/y_1} \leqslant B \leqslant Ae^{\beta/y_2}$ $\left(\frac{Cy_2}{A}\right)^{y_1/\alpha}\left(\frac{Cy_2}{B}\right)^{y_2/\beta} \leqslant e^{-1}$	$f_6 = a'y_1 + (b'+c)\,y_2 + \left(\frac{y_1}{\alpha}+\frac{y_2}{\beta}\right) \times$ $\times\left[A^{y_1/\alpha}B^{y_2/\beta}e^{-1}\right]^{\frac{1}{y_1/\alpha+y_2/\beta}}$
7*	$(x_1^0, \ x_2^0, \ x_3^0)$	$\left(\frac{B}{A}\right)^{y_2/\beta}\left(\frac{Cy_2}{A}\right)^{1/\gamma} < e$ $\left(\frac{A}{B}\right)^{y_1/\alpha}\left(\frac{Cy_2}{B}\right)^{1/\gamma} < e$ $\left(\frac{Cy_2}{A}\right)^{y_1/\alpha}\left(\frac{Cy_2}{B}\right)^{y_2/\beta} > e^{-1}$	$f_7 = a'y_1 + b'y_2 + \left(\frac{y_1}{\alpha}+\frac{y_2}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \times$ $\times\left[A^{y_1/\alpha}B^{y_2/\beta}(Cy_2)^{1/\gamma}e^{-1}\right]^{\frac{1}{y_1/\alpha+y_2/\beta+1/\gamma}}$

* Координаты минимумов:

Случай 6. $x_1''' = \left(\frac{\beta}{y_2}+\ln\frac{A}{B}\right)\Big/\left(\frac{\alpha}{y_1}+\frac{\beta}{y_2}\right), \quad x_2''' = \left(\frac{\alpha}{y_1}+\ln\frac{B}{A}\right)\Big/\left(\frac{\alpha}{y_1}+\frac{\beta}{y_2}\right);$

Случай 7. $x_1^0 = \frac{y_1}{\alpha}\left(1+\frac{y_2}{\beta}\ln\frac{A}{B}+\frac{1}{\gamma}\ln\frac{A}{Cy_2}\right)\Big/\left(\frac{y_1}{\alpha}+\frac{y_2}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right),$

$$x_2^0 = \frac{y_2}{\beta}\left(1+\frac{y_1}{\alpha}\ln\frac{B}{A}+\frac{1}{\gamma}\ln\frac{B}{Cy_2}\right)\Big/\left(\frac{y_1}{\alpha}+\frac{y_2}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

$$x_3^0 = \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{y_1}{\alpha}\ln\frac{Cy_2}{A}+\frac{y_2}{\beta}\ln\frac{Cy_2}{B}\right)\Big/\left(\frac{y_1}{\alpha}+\frac{y_2}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

Тогда можно вычислить величину $F(y_1^0)$ и сравнить ее с $F(1)=a'+a\,e^{-\alpha}$. Само собой разумеется, что если

$$F(0)=b'+b+c<F(1),$$

то $F(1)$ является максимумом для всего интервала $0\leqslant y_1\leqslant 1$, и нет никакой необходимости вычислять y_1^0 или величину $F(y_1^0)$.

На этом заканчивается анализ вершины $(1, 0, 0)$. Анализ двух других вершин аналогичен. Для стороны, на которой $x_1=0$, мы найдем минимум N согласно выражению (11), если положим $x_1=0$ в точке

$$x_2'=\frac{\ln(Jj/Kk\,e^{-k})}{j+k};\quad x_3'=\frac{\ln(Kk/Jj\,e^{-j})}{j+k}. \tag{14}$$

Таблица 3

Необходимые условия

Случай	Условия*
1	$B<A'$
2	$A<B'$ и $C<B'$
3	$A<C'$ и $B<C'$
4	$A<B$ и $A<C$
5	$B<A$ и $B<C$
6	Простых условий не существует, обычно получаемый случай
7	Простых условий не существует

* $A'=Ae^{-\alpha}$; $B'=Be^{-\beta}$; $C'=Ce^{-\gamma}$.

Величины x_2' и x_3' в сумме дают 1, так что условия (9) будут удовлетворены, если две величины под знаками логарифмов в выражениях (14) не меньше единицы. Если перейти к переменным y, то это условие примет вид

$$B\,e^{-\beta/y_2}<Cy_2<Be^{\gamma}. \tag{15}$$

Теперь вычислим направленную производную в точке $(0, x_2', x_3')$ в общем направлении внутрь. Условие неотрицательности этих производных сводится к условию

$(B/A)^{y_2/\beta}(Cy_2/A)^{1/\gamma} > \mathrm{e}$. Соответствующая функция минимума будет

$$f_4 = (a' + a)\,y_1 + by_2' + (y_2/\beta + 1/\gamma)\left[B^{y_2/\beta}(Cy_2)^{1/\gamma}\mathrm{e}^{-1}\right]^{\frac{1}{y_2/\beta + 1/\gamma}}. \tag{16}$$

Теперь надо решить задачу определения пары (y_1, y_2), которая максимизировала бы f_4 при соблюдении трех неравенств.

Условия того, что минимум будет иметь место на двух других сторонах, а также соответствующая функция минимума могут быть получены таким же образом. Условие того, что минимум будет в какой-нибудь внутренней точке, состоит в том, чтобы направленная производная в этой точке была неотрицательной во всех направлениях.

Эти условия и функции минимума для всех семи случаев сведены в табл. 2. Для первых трех случаев может быть определено максимальное значение функции минимума в соответствующем диапазоне решений (y_1, y_2). Метод аналогичен методу, рассмотренному выше для случая *1*. Для последних четырех случаев, однако, аналитическое решение не может быть найдено. При этом следует рекомендовать использование вычислительной техники.

Для любого y_2 в интервале $0 \leqslant y_2 \leqslant 1$ применима одна из семи групп условий. При изменении y_2 от 0 до 1 нам желательно выбрать подходящий случай, вычислить значения соответствующих функций минимума, а затем выбрать максимум этих значений на всем интервале. На практике y_2 может принимать форму дискретного множества равномерно распределенных точек.

При $y_2 = 0$ минимальное значение равно $a' + a\mathrm{e}^{-\alpha}$. Для малых значений y_2 применимы случаи *1*, *5* или *6*. В середине интервала обычно применим случай *7*. Для значений y_2, близких к *1*, применимы случаи *2*, *3*, *4*. Для некоторых комбинаций параметров могут быть использованы только некоторые из этих случаев.

Для того чтобы решить, какие случаи следует исследовать для данной комбинации параметров, полезно использовать простую сводку необходимых условий. Если условия не удовлетворяются, это значит, что не существует таких значений y_2, для которых применим данный случай. Эти условия приведены в табл. 3 и могут быть легко получены из табл. 2. Необходимые условия для первых трех случаев очевидны. Чтобы получить условия для случая *4*, следует неравенство $Cy_2 \leqslant Be^{\gamma}$ подставить в последнее неравенство случая *4* в табл. 2. Тогда левая часть будет меньше или равна $e\,(B/A)^{(y_2/\beta)+(1/\gamma)}$. Но при $B < A$ она должна быть меньше, чем e. Следовательно, чтобы получить случай *4*, необходимо, чтобы $B > A$. Другие неравенства в случаях *4* и *5* получаются таким же способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. O. Koopman. The theory of search, III. The optimum distribution of searching effort. Operations Research, 1957, vol. 5, p. 613—626.
2. J. von Neumann and O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1953.

НЕДОСТАТОЧНОСТЬ СТОИМОСТИ ПОРАЖЕНИЯ ЦЕЛИ В КАЧЕСТВЕ КРИТЕРИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ

*Джон Э. Уолш**. Локхид Эркрафт Корпорейшн, Бэрбанк, шт. Калифорния

Стоимость уничтожения противника является общепринятым критерием относительной ценности различных соревнующихся элементов системы обороны. Если элементы системы обороны применяются так, что они не влияют друг на друга, то этот критерий оказывается достаточным для многих ситуаций. Если, однако, имеется взаимодействие между элементами системы обороны, то сравнение, основанное на этом критерии, получающемся не из рассмотрения всей системы обороны в целом, может привести к неправильным выводам. В настоящей статье приведен анализ, показывающий, что подобные положения часто встречаются. Для проведения такого анализа была разработана несколько упрощенная математическая модель, описывающая действия и результаты атаки противника на систему обороны. Математическая модель позволяет производить частично аналитическое изучение умеренно сложных ситуаций и может оказаться полезной во многих областях работ по исследованию операций в военном деле.

В настоящей статье не рассматривается вопрос о критериях эффективности вообще. В ней изучается только один критерий эффективности, часто применяемый при выборе оптимальных систем вооружения для обороны. Этот критерий эффективности основан на использовании минимальной стоимости поражения цели, определяемой без учета взаимодействия элементов всей системы обороны в целом.

---

* John E. Walsh. Inadequacy of cost per „kill" as measure of effectiveness. Operations Research, 1957, vol. 5, p. 750—764.

Сложность проблемы оценки какой-нибудь законченной военной системы обороны почти всегда огромна. Трудности возрастают, если учесть возможность применения противником различных типов атак, с одной стороны, и возможность изменять оборонительную группировку, с другой стороны. В результате этого существует тенденция, выбирая элементы и их относительную численность при создании системы обороны, игнорировать рассмотрение системы в целом. Использование указанного критерия для сравнения относительной ценности возможных элементов обороны без учета свойств всей системы в целом представляет собой определенный компромисс. Применение такого критерия часто оправдывают, утверждая, что при этом получается небольшая потеря точности по сравнению с методом рассмотрения системы в целом. В статье показано, что для многих типов ситуаций эта потеря в действительности может быть большой. Слово «поражение» используется нами в общем смысле как уничтожение или как отражение вражеской атаки и может применяться к кораблям, самолетам, танкам и т. д.

Рассмотрим упрощенную математическую модель, которая использована для представления действий и результатов вражеских атак против системы обороны. В ней группа объектов обороняется от атак противника. Чтобы достичь этих объектов, противник должен пройти последовательно через несколько оборонительных секторов. Размер ущерба, наносимого объектам, зависит от величины потенциала разрушения, который сохранится у противника после прохождения всех секторов, т. е. предполагается, что противник следует по одному маршруту, проходящему через несколько отдельных зон (или секторов) обороны и заканчивающемуся у группы объектов.

Результат действий противника определяется величиной потенциала разрушения, который сохранится у него после прохождения всех секторов обороны. Противник старается выбрать такую стратегию, которая максимизировала бы эту величину, в то время как оборона стремится выбрать такую стратегию, которая минимизировала бы ее. Таким образом, рассматриваемая ситуация представляет собой игру с двумя игроками и с нулевой суммой, причем оборона должна выбрать свою стратегию первой. Зная оборонительную стратегию, противник выбирает свою стратегию. В настоящей статье слово «стратегия» используется в том смысле, в котором оно применяется в теории игр, а не в военном деле. Предлагаемый анализ пригоден для различных соотношений сил атакующего противника и обороны. Тем не менее метод, применяемый для оценки результатов, более пригоден для случаев, когда силы обеих сторон примерно одинаковы или когда оборона сильнее атакующего противника.

Противник обладает некоторым фиксированным числом единиц нападения (например, бомбардировщиков) нескольких различных типов. Некоторые типы атак выполняются единицами, не обладающими потенциалом разрушения и используемыми для понижения эффективности (подавления) обороны в одном или в нескольких секторах (например, бомбардировщик — постановщик помех). Стратегии, доступные противнику, состоят в различных распределениях общего количества единиц нападения по типам атак. При этом тип единицы нападения, применяемой для подавления обороны, определяется не только степенью подавления, но также и тем сектором обороны, где эти меры подавления применяются.

Секторы обороны построены так, что только один тип элементов обороны может быть применен в каждом секторе. Так как сектор является основной единицей системы обороны, то тип средства, применяемого в данном секторе, может быть выбран на основе критерия минимальной стоимости поражения единицы средств нападения. Однако количества средств, выбранные для данных секторов, не обязательно определяются на основе этого критерия. Если бы это было так, то все секторы, кроме одного, с наименьшим значением этого критерия для его средств, были бы лишены средств вообще. Целью данной статьи является сравнение результатов в случае, когда для определения количества оборонительных средств применяется вышеназванный критерий, и в случае, когда для этого выбора применяется более оптимальный метод.

Значение критерия стоимости поражения известно для каждого оборонительного средства, и общий бюджет для всех секторов обороны задан. Стратегии, доступные обороне, состоят в изменении распределения бюджета между секторами. Предполагается, что избранная обороной стратегия известна противнику и может быть использована им для выбора своей стратегии. С другой стороны, предполагается, что оборона знает общее число единиц нападения, которое может быть использовано противником, и все возможные типы его атак. Однако оборона не знает, какое количество единиц нападения в действительности будет использовано противником в каждом из этих различных типов атак.

Каждая единица нападения вызывает определенное снижение эффективности обороны того сектора, в который она входит. Этот эффект равен нулю или больше нуля и позволяет учесть влияние тактик, применяемых противником и обороной данного сектора. Величина эффекта подавления обороны зависит от рассматриваемого сектора и от типа атаки противника. В первом секторе обороны входящая в него единица оказывает одинаковый эффект на оборону для всех, кроме одного, типов атаки. Во втором секторе входящая в него единица оказывает на оборону одинаковый эффект подавления для всех типов атаки, кроме двух, и один из них, возможно, является как раз тем типом, который выделялся в первом секторе. В третьем секторе входящая в него единица оказывает одинаковый эффект подавления для всех типов атаки, кроме трех, и два из них являются как раз теми, которые выделялись во втором секторе, и т. д. Эти ограничения в отношении типов вражеских атак не являются чересчур сковывающими, но принятие их сильно упрощает определение оптимальной стратегии противника.

Способность поражения цели для каждого типа оборонительных средств оценена независимо от свойств системы обороны в целом. Потенциал поражения для единицы обороны данного типа определяется средним значением потенциала разрушения, которым обладают пропускаемые единицы противника, при независимом действии этой оборонительной единицы против единицы нападения, т. е. частостью выживания единицы нападения в таких условиях. Предполагается, что каждая единица нападения, независимо от типа атаки, несет при этом один и тот же урон. Это могут быть, например, бомбардировщики одного типа, но с различными видами груза. Если единицы, применяемые для каждого типа атаки, выбраны соответствующим образом, то это предположение часто является удовлетворительным приближением. Стоимость, приходящаяся на единицу потенциала обороны, и есть то, что имеется в виду, когда мы говорим об отношении стоимости к эффективности поражения цели.

Чтобы перейти от оборонительного потенциала к действительным цифрам эффективности поражения в рамках системы обороны, введена функция отношения оборонительного потенциала данного сектора к степени снижения эффективности этого сектора в результате действий противника. Эта функция определяется той частью единиц нападения, входящих в данный сектор, которая прорывается через него к следующему сектору. В эту же функцию заложены некоторые другие зависимости, определяемые тактиками противника и обороны в данном секторе. Предполагается, что каждая единица нападения, независимо от типа, несет одинаковый урон в данном секторе обороны. Таким образом, через данный сектор прорывается одна и та же часть от общего числа единиц нападения каждого типа.

Небоевые потери среди единиц нападения учитываются посекторно. Для каждого сектора обороны задается коэффициент, учитывающий небоевые потери противника в данном секторе. Этот коэффициент определяет ту часть единиц нападения, которая осталась после боевых потерь и после небоевых потерь в данном секторе. Каждая единица нападения несет один и тот же урон от небоевых потерь независимо от ее типа. Для обороны боевые и небоевые потери учтены при определении оборонительного потенциала.

Предлагаемая математическая модель в сочетании с методом, применяемым для превращения оборонительного потенциала в действительное поражение, может быть применена во многих типах оборонительных ситуаций, имевших место в прошлом, и может оказаться полезной также в настоящем и будущем. Отличительной чертой этой модели является то, что приблизительно оптимальная стратегия противника может быть определена аналитически. Зная эту стратегию противника, можно определить приблизительно оптимальную оборонительную стратегию, минимизируя функцию распределения бюджета обороны между различными секторами.

Таким образом, в рассматриваемой игровой проблеме без чрезмерно большой вычислительной работы могут быть найдены приблизительное значение цены игры и приблизительно оптимальные стратегии обеих сторон.

Анализ результатов применения этой математической модели показывает, что имеется много ситуаций, когда оптимальная оборонительная стратегия не требует концентрации всего бюджета в секторе с минимальным значением отношения стоимости к эффективности поражения. Величина проигрыша, получающегося при использовании стратегии, основанной на минимизации этого критерия, в сравнении с применением оптимальной оборонительной стратегии, зависит от исследуемой ситуации. Численный пример, приведенный в конце статьи, показывает, что этот проигрыш может быть значительным.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим математическую модель, которая используется для оценки результатов атаки противника против системы обороны. У этой модели имеется ценное свойство, состоящее в том, что приблизительно оптимальная стратегия противника может быть определена аналитическим путем без чрезмерно больших вычислений. Получив эту приблизительно оптимальную стратегию противника, не представляет большого труда с помощью метода последовательных приближений или другого метода определить и приблизительно оптимальную стратегию обороняющейся стороны. Полученная таким способом приблизительно оптимальная стратегия обороны обеспечивает защиту против любой стратегии, доступной противнику. Исход атаки оценивается на основе понятий теории игр, т. е. считается, что величина потенциала разрушения, сохранившаяся после прохождения противником всех секторов обороны, равна тому потенциалу, который получается, если противник и обороняющаяся сторона используют свои приблизительно оптимальные стратегии.

По своей природе любая реальная ситуация атаки и обороны включает большое количество факторов По этому математическая модель содержит значительное количество обозначений и сложных выражений. В статье использованы следующие обозначения:

i — номер сектора $(i=1, \ldots, s \geqslant 2)$; противник проходит сначала первый сектор, затем второй, ... и, наконец, сектор s;

n_i — число оборонительных единиц, размещенных в i-ом секторе;

$c_i = c_i(n_i)$ — стоимость одной оборонительной единицы i-го сектора;

k_i — поражающая способность одной оборонительной единицы i-го сектора;

K_i — общий оборонительный потенциал i-го сектора, $K_i = k_i n_i$;

B — общий бюджет обороны, выделенный для всех секторов, $B = n_1 c_1 + \ldots + n_s c_s$;

j — индекс типа атаки противника $(j=1, \ldots, t)$;

N_j — число вражеских единиц, входящих в район обороны и участвующих в j-ом типе атаки;

N — общее число вражеских единиц, входящих в район обороны, $N = N_1 + \ldots + N_t$;

$N_j^{(i)}$ — число вражеских единиц, участвующих в j-ом типе атаки и проникших через все секторы $1, \ldots, i$; $N_j^{(0)} = N_j$;

$D_i^{(j)}$ — эффект снижения эффективности обороны i-го сектора, вызываемый вражеской единицей, участвующей в j-ом типе атаки для $j \leqslant i$; $D_0^{(j)} = 0$; $D_i^{(0)} = 0$;

D_i — общий эффект снижения эффективности обороны в i-ом секторе, вызываемый единицей нападения для всех типов атаки, для которых $j > i$; $D_0 = 0$;

f_i — часть вражеских единиц из числа вошедших в i-ый сектор, которая уцелела после боевых потерь в этом секторе;

$a_i = a_i(n_1, \ldots, n_i)$ — часть вражеских единиц, которая, уцелев после боевых потерь в i-ом секторе, уцелела также после небоевых потерь в этом секторе;

F_i — часть вражеских единиц из числа вошедших в i-ый сектор, которая уцелела от боевых и небоевых потерь в этом секторе, $F_0 = 1$;

P_j — потенциал разрушения объектов одной вражеской единицы, выполняющей j-ый тип атаки;

P — величина потенциала разрушения объектов, сохранившаяся после прохождения всех секторов обороны, $P = P_1 N_1^{(s)} + \ldots + P_t N_t^{(s)}$;

$A_i = A_i(n_1, \ldots, n_i)$ — некоторая величина в выражении для f_i;

$B_i = B_i(n_1, \ldots, n_i)$ — некоторая величина в выражении для f_i.

Здесь P является величиной, которую противник старается максимизировать, а оборона — минимизировать.

Теперь свойства математической модели могут быть описаны с помощью нескольких соотношений:

$$N_j^{(i)} = F_1 \ldots F_i N_j \quad (i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, t);$$

$$f_i = 1 - A_i \left[B_i + \left(D_i \sum_{u=i+1}^{t} N_u^{(i-1)} + \sum_{u=1}^{i} D_i^{(u)} N_u^{(i-1)}\right)/K_i\right]^{-1},$$

где A_i и B_i выбраны так, чтобы f_i была неуменьшающейся функцией от N_i. Величина f_i ограничена значениями 0 и 1; поэтому значения f_i меньше нуля считаются равными 0, а значения больше единицы считаются равными единице.

$$P_j = 0 \text{ для } j \leqslant s,\ t \geqslant s + 1;$$

$$D_i^{(i)} \geqslant \max\left[D_i, D_i^{(1)}, \ldots, D_i^{(i-1)}\right].$$

Выражение для f_i может быть переписано в виде

$$f_i = 1 - A_i \left\{B_i + \left(\prod_{v=0}^{i-1} F_v\right)\left[ND_i + \sum_{u=0}^{i-1}\left(D_i^{(u)} - D_i\right) N_u + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(D_i^{(i)} - D_i\right) N_i\right]/K_i\right\}^{-1}.$$

В этом случае величина N_i выражена явно.

Выясним смысл этих пяти соотношений. Выражение для $N_j^{(i)}$ основано на предположении, что в пределах одного сектора все типы вражеских единиц подвержены уничтожению в одной и той же степени. Выражение для f_i может быть представлено в виде

$$f_i = 1 - \frac{A_i}{B_i + x_i},$$

где

$$x_i = \frac{\textit{снижение эффективности обороны сектора } i}{\textit{потенциал средств обороны сектора } i}.$$

Если правильно выбрать значения A_i и B_i, то с помощью функций этого типа можно аппроксимировать многие ситуации, представляющие интерес. По всей видимости f_i должна быть неуменьшающейся функцией от x_i, и A_i совместно с B_i должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить этому условию. При вычислении выражения для x_i предполагается, что все типы атак, за исключением $j=1, \ldots, i$, вызывают одно и то же подавление обороны в секторе i. Это ограничение тесно связано с последними тремя из пяти соотношений. Все эти ограничения являются следствиями метода, применяемого для определения типов атаки противника, и не очень сильно уменьшают универсальность математической модели.

Типы атак противника определяются не только типом оружия и методом его доставки, но также и тем, где это оружие применяется в первый раз. Так, применение одного и того же оружия по одному и тому же методу представляет различные типы атак, если оно имеет место в разных секторах обороны. Типы атак с $j \leqslant s$ используются исключительно для подавления обороны и не содержат потенциала разрушения объектов. Это приводит к условию, что $P_j=0$ для $j \leqslant s$. Главное назначение j-го типа атаки состоит в подавлении сектора j (при $j \leqslant s$). Если противник не в состоянии вызвать более сильное подавление обороны в секторе i, чем то, которое было достигнуто единицами, просто проходившими через этот сектор, то

$$D_i^{(i)} = D_i \geqslant D_i^{(u)} \quad (u=0, \ldots, i-1);$$

в противном случае противник обладал бы большей способностью подавления обороны в секторе i, чем предполагалось. Если $D_i^{(i)} = D_i$, то нуль есть оптимальное значение для N_i. В соответствии с предположением во всех случаях для подавления обороны каждого сектора назначается один тип атаки (тип i для сектора i). Так как по крайней мере один тип атаки должен содержать потенциал разрушения объекта, если хотят, чтобы атака имела хоть какую-нибудь ценность, то должно выполняться неравенство $t \geqslant s+1$. Последнее соотношение, касающееся $D_i^{(i)}$, возникло из требования, чтобы тип атаки, вызывающий наибольшее подавление сектора i, использовался в секторе i.

Используя вышеприведенные соотношения и определения, можно выразить результирующий потенциал P как функцию $N_1, \ldots, N_t$ и $n_1, \ldots, n_{s-1}$. Здесь n_s можно исключить с помощью уравнения

$$n_s c_s = B - n_1 c_1 - \ldots - n_{s-1} c_{s-1},$$

так как $n_s c_s$ есть монотонно возрастающая функция от n_s для любой неабсурдной ситуации. Первым шагом анализа ситуации „атака — оборона" является определение оптимальной стратегии противника, которую мы будем обозначать через $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_t$. Оптимальная стратегия противника максимизирует P и является функцией от $n_1, \ldots, n_{s-1}$, т. е. каждое $\hat{N}_j$ есть функция от $n_1, \ldots, n_{s-1}$. При использовании оптимальной стратегии противника P также становится функцией от $n_1, \ldots, n_{s-1}$. Оптимальной стратегией обороны является множество значений $n_1, \ldots, n_{s-1}$, которое минимизирует выражение для P.

Непосредственное определение $\hat{N}_j = \hat{N}_j(n_1, \ldots, n_{s-1})$ с помощью зависимости $P = P(N_1, \ldots, N_t; n_1, \ldots, n_{s-1})$ может потребовать огромной вычислительной работы. Приблизительное определение оптимальной стратегии противника, однако, может быть легко выполнено с помощью некоторых критериев. Эти критерии получаются на основе приблизительной оценки, которая дает достаточно точные результаты. Метод состоит в том, что сначала рассматривается сектор *1* и вычисляется критерий оценки важности вражеских единиц, уцелевших в этом секторе. Этот критерий является функцией от N_1, а не от $N_2, \ldots, N_t$. Величина $\hat{N}_1$ является тем значением N_1, которое максимизирует эту функцию важности вражеских единиц, уцелевших в секторе *1*. Приблизительное выражение для $\hat{N}_1$ представляет собой не слишком сложную аналитическую функцию от $n_1, \ldots, n_{s-1}$. Получив $N_1 = \hat{N}_1$, вычисляют критерий важности вражеских единиц, уцелевших в секторе 2. Этот критерий является функцией от N_2, а не от $N_3, \ldots, N_t$. Затем в качестве $\hat{N}_2$ берется то значение N_2, которое максимизирует критерий важности для сектора 2.

В общем случае, если известны $N_1 = \hat{N}_1, \ldots, N_{i-1} = \hat{N}_{i-1}$, то можно получить критерий оценки боевых единиц, уцелевших в секторе i. Этот критерий является функцией от N_i, но не от $N_{i+1}, \ldots, N_t$. Величиной $\hat{N}_i$ является то значение N_i, которое максимизирует критерий важности для сектора i. Выражения для $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_s$ получаются таким же способом. При $j > s$ все $\hat{N}_j$ равны нулю, за исключением тех, для которых P_j имеет максимальное значение. Любое допустимое распределение $(N - \hat{N}_1 - \ldots - \hat{N}_s)$ единиц, не используемых для подавления оборонительных секторов, среди возможных $\hat{N}_j$, не равных нулю (для $j > s$), представляет оптимальное решение. Таким образом, применение подобных критериев дает сравнительно легкий метод определения $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_t$.

Рассмотрим определение критерия важности вражеских единиц, уцелевших в секторе i $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Здесь $N_1 = \hat{N}_1, \ldots, N_{i-1} = \hat{N}_{i-1}$; они являются известными функциями от $n_1, \ldots, n_{s-1}$. Из математической модели получаем

$$f_i = 1 - A_i \left\{ B_i + \left(\prod_{v=0}^{i-1} F_v \right) \left[N D_i + \sum_{u=0}^{i-1} (D_i^{(u)} - D_i) \hat{N}_u + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (D_i^{(i)} - D_i) N_i \right] / K_i \right\}^{-1},$$

так что $F_i = a_i f_i$ есть функция от N_i, но не от $N_{i+1}, \ldots, N_t$. После определения $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_{i-1}$ и N_i величины $N_{i+1}, \ldots, N_t$ являются по-прежнему произвольными. Они должны быть неотрицательными целыми числами и подчиняться условию

$$N_{i+1} + \ldots + N_t = N - \hat{N}_1 - \ldots - \hat{N}_{i-1} - N_i.$$

Таким образом, поскольку вражеские единицы типа j (при $j > i$), уцелевшие в секторе i, неразличимы по важности, их важность при выходе из сектора i можно считать одинаковой. Поэтому общая важность единиц типов $t > i$ на данной стадии может быть представлена выражением

$$\left(\prod_{v=1}^{i} F_v\right)(N - \hat{N}_1 - \ldots - \hat{N}_{i-1} - N_i).$$

Если бы была известна относительная важность $W_i^{(u)}$ вражеской единицы типа $u\,(u \leqslant i)$, уцелевшей в секторе i, по сравнению с важностью вражеских единиц типа $j > i$, то $\hat{N}_i$ представляло бы собой такое значение N_i, которое максимизировало бы величину

$$\left(\prod_{v=1}^{i} F_v\right)\left(N - \hat{N}_1 - \ldots - \hat{N}_{i-1} - N_i + W_i^{(i)} N_i + \right.$$
$$\left. + \sum_{u=0}^{i-1} W_i^{(u)} \hat{N}_u\right).$$

Эта величина является функцией от N_i, но не от $N_{i+1}, \ldots, N_t$. Значение $W_i^{(u)}$ можно приблизительно оценить, рассматривая вражеские единицы типа u как эквиваленты единиц типа $i+1$ при $i < s$. Подавление сектора $i+1$, вызываемое вражеской единицей типа u, равно $D_{i+1}^{(u)}$, в то время как для единицы типа $i+1$ оно равно $D_{i+1}^{(i+1)}$. Таким образом, выбор

$$W_i^{(u)} = D_{i+1}^{(u)} / D_{i+1}^{(i+1)} \qquad (u = 1, \ldots, i < s)$$

оказывается разумным, если результирующее значение не слишком велико (например, $\leqslant 1/2$). Если $i = s$, то $W_i^{(u)} = 0$, так как вражеская единица типа $u \leqslant s$ теперь уже не имеет никакой цены; $W_i^{(0)} = 0$ по определению. Ограничение величины $W_i^{(u)} \leqslant 1/2$ не является существенным. Крайне редки ситуации, когда важность неиспользуемой вражеской единицы не превышает по крайней мере в 2 раза важность единицы, которая уже осуществила свое основное действие.

Теперь рассмотрим определение приблизительно оптимальной формы $\hat{N}_i$ (т. е. $j=i\leqslant s$). Если $D_i^{(i)}=D_i$, то $\hat{N}_i=0$. Если же $D_i^{(i)}\neq D_i$, то возможны два случая: $\hat{N}_i$ равно либо нулю, либо целой части выражения

$$\frac{1}{2}-\frac{\gamma_i}{\delta_i}+\frac{1}{\delta_i}\sqrt{A_i\left(\gamma_i+\alpha_i\frac{\delta_i}{\beta_i}\right)}, \tag{1}$$

где

$$\alpha_i=N-\sum_{u=0}^{i-1}(1-W_i^{(u)})\hat{N}_u \quad (\hat{N}_0=0),$$

$$\beta_i=1-W_i^{(i)}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\gamma_i=B_i+\left(\prod_{v=0}^{i-1}F_v\right)\left[ND_i+\sum_{u=0}^{i-1}(D_i^{(u)}-D_i)\hat{N}_u\right]/K_i,$$

$$\delta_i=\left(\prod_{v=0}^{i-1}F_v\right)(D_i^{(i)}-D_i)/K_i.$$

Здесь $\hat{N}_i$ принимается равным нулю тогда и только тогда, когда величина выражения (1) отрицательна или величина $(\alpha_i-\beta_iN_i)f_i$, где N_i равно целой части выражения (1), не превосходит величины этого выражения при $N_i=0$.

Знания $\hat{N}_1=\hat{N}_1(n_1,\ldots,n_{s-1}),\ldots,\hat{N}_s=\hat{N}_s(n_1,\ldots,n_{s-1})$ достаточно, чтобы определить $P=P(n_1,\ldots,n_{s-1})$ независимо от значений $\hat{N}_{s+1},\ldots,\hat{N}_t$. То есть

$$P=(\max_j P_j)\left(\prod_{v=1}^{s}F_v\right)(N-\hat{N}_1-\ldots-\hat{N}_s),$$

где $N_1=\hat{N}_1,\ldots,N_s=\hat{N}_s$ в выражениях для $F_1,\ldots,F_s$.

Остается определить допустимое множество значений $n_1,\ldots,n_{s-1}$, минимизирующее P. Эта задача минимизации может быть решена методом последовательных приближений, итерационными методами и т. д. (см., например, [1]). Использование минимизирующего множества значений $n_1, \ldots, n_{s-1}$ дает наилучшую защиту против всех допустимых стратегий противника и поэтому является оптимальной оборонительной стратегией. Предположим, что оборона использует эту стратегию. Тогда максимальное значение P, достигаемое противником, будет равно приблизительно тому значению, которое получится при использовании выражений, выведенных для $\hat{N}_j$ в этой статье. Это происходит благодаря тому, что значения $\hat{N}_j$ определяются требованием, чтобы P был максимальным для данного множества $n_1, \ldots, n_{s-1}$.

На этом заканчивается описание математической модели и метода, применяемого для определения приблизительно оптимальных стратегий противника и обороны. Если s не достаточно мало, описанная процедура может потребовать большой вычислительной работы. Однако применение приближенного аналитического метода определения оптимальной стратегии противника уменьшает объем вычислений по крайней мере на один порядок по сравнению с непосредственными расчетами.

ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Ниже детально рассматривается числовой пример с тем, чтобы продемонстрировать метод, описанный в предыдущем разделе. Этот пример показывает, какие большие потери получаются при использовании критерия минимального отношения стоимости к эффективности вместо оптимальной оборонительной стратегии.

Число секторов обороны было принято равным $s=2$, а число типов атак противника $t=4$. Хотя выбор таких малых чисел снижает величину относительных потерь при определении оборонительной стратегии, однако это дает возможность продемонстрировать существенные свойства метода без чрезмерно больших вычислений.

Центральное выражение, использованное при определении f_i, основано на пуассоновской аппроксимации биномиального распределения вероятностей. Биномиальное распределение отражает идеализированную ситуацию, в которой все единицы противника и обороны статистически независимы. Кроме того, вероятность того, что данная единица обороны атакует данную единицу противника, одинакова для всех комбинаций единиц обороны и противника и не зависит от того, была ли единица противника уже атакована и уничтожена.

Используя распределение Пуассона, получаем

$$f_i = \exp\left[-\frac{K_i}{D_i \sum\limits_{u=i+1}^{4} N_u^{(i-1)} + \sum\limits_{u=1}^{i} D_i^{(u)} N_u^{(i-1)}}\right].$$

Хорошее приближение к этому выражению в интересующей нас области получается, если положить

$$A_i = 1{,}17, \quad B_i = 0{,}86.$$

В этом случае

$$f_i = 1 - 1{,}17\left[0{,}86 + \left(D_i \sum_{u=i+1}^{4} N_u^{(i-1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{u=1}^{i} D_i^{(u)} N_u^{(i-1)}\right)/K_i\right]^{-1}.$$

Для примера были приняты следующие значения величин:

$c_1 = 1{,}00$ единица стоимости,
$c_2 = 0{,}25$ единицы стоимости,
$k_1 = 0{,}4$,
$k_2 = 0{,}2$,
$B = 3\,000$ единиц стоимости,
$N = 500$ единиц противника,
$D_1 = D_2 = D_1^{(2)} = D_2^{(1)} = 1$,
$D_1^{(1)} = 3, \ D_2^{(2)} = 10$,
$a_1 = a_2 = 1$,
$P_1 = P_2 = 0, \ P_3 = 0{,}8, \ P_4 = 1$ единица потенциала разрушения.

Вычислим стоимость поражения цели для обоих оборонительных секторов. Для сектора *1* она равна 2,5, а для сектора *2* — всего лишь 1,25. Иначе говоря, стоимость поражения цели для сектора *1* вдвое больше, чем для сектора *2*. Поэтому в соответствии с критерием минимального значения стоимости, деленной на эффективность поражения цели, оптимальной стратегией обороны должна была бы быть стратегия $n_1 = 0$, $n_2 = 12\,000$. Однако, как будет показано ниже, эта стратегия далека от оптимальной, и потери от ее применения вместо применения истинной оптимальной стратегии велики.

Первым шагом в решении является определение выражения для $\hat{N}_1 = \hat{N}_1(n_1)$. Величина $\hat{N}_1$ равна или нулю, или целой части выражения (1) при $i=1$. Соответствующие величины, входящие в (1), равны

$$A_1 = 1{,}17,\ \alpha_1 = N = 500,$$
$$\beta_1 = 1 - D_2^{(1)}/D_2^{(2)} = 0{,}9,$$
$$\gamma_1 = B_1 + ND_1/K_1 = 0{,}86 + \frac{1\,250}{n_1},$$
$$\delta_1 = (D_1^{(1)} - D_1)/K_1 = \frac{5}{n_1}.$$

Таким образом, $\hat{N}_1$ равно или нулю, или целой части выражения

$$-249{,}5 - 0{,}172\,n_1 + \sqrt{188{,}5\,n_1 + 0{,}04025\,n_1^2}\,. \quad (2)$$

Если выражение (2) отрицательно или если выражение $(\alpha_1 - \beta_1 N_1) f_1$ больше при $N_1 = 0$, чем при N_1, равном целой части выражения (2), то берется нулевое значение $\hat{N}_1$.

Далее определим $\hat{N}_2 = \hat{N}_2(n_1)$ для вычисленного значения $\hat{N}_1 = \hat{N}_1(n_1)$. Здесь n_2 выражено через n_1 посредством соотношения $n_2 = \frac{3\,000 - n_1}{0{,}25}$ и

$$A_2 = 1{,}17,\ \alpha_2 = N - \hat{N}_1 = 500 - \hat{N}_1,$$
$$\beta_2 = 1 - W_2^{(2)} = 1,$$
$$F_1 = 1 - 1{,}17\,[0{,}86 + (1250 + 5N_1)/n_1]^{-1} \quad (0 \leqslant F_1 \leqslant 1),$$
$$\gamma_2 = B_2 + F_1\,[ND_2 + (D_2^{(1)} - D_2)N_1]/K_2 = 0{,}86 + \frac{625F_1}{3000 - n_1};$$
$$\delta_2 = F_1\,(D_2^{(2)} - D_2)/K_2 = \frac{11{,}25\,F_1}{3000 - n_1}.$$

Таким образом, $\hat{N}_2$ равно или нулю, или целой части выражения

$$-55 - 0{,}0764\,(3\,000 - n_1)/F_1 +$$
$$+\sqrt{(57{,}6 - 0{,}104\,\hat{N}_1)(3000 - n_1)/F_1 + 0{,}00795(3000 - n_1)^2/F_1^2}\,. \quad (3)$$

Нулевое значение придается $\hat{N}_2$, если (3) отрицательно или если значение $(\alpha_2-\beta_2 N_2) f_2$ больше, когда $N_2=0$, чем когда N_2 — целая часть выражения (3).

Если известны $\hat{N}_1$ и $\hat{N}_2$, то легко вычислить приблизительно оптимальную стратегию противника. Величина $\hat{N}_3$ равна нулю, так как $P_3 < P_4$. Тогда $\hat{N}_4 = N - \hat{N}_1 - \hat{N}_2 = 500 - \hat{N}_1 - \hat{N}_2$. Остается определить оптимальную стратегию обороны, которую мы обозначим через $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$.

Так как $\max P_j = \text{const}$, то $\hat{n}_1$ есть такое значение n_1, которое минимизирует выражение

$$(F_1 F_2)(500-\hat{N}_1-\hat{N}_2), \tag{4}$$

где F_1 — то же выражение, которое было использовано при определении $\hat{N}_2$, в то время как

$$F_2 = 1 - 1{,}17\,[0{,}86 + (625 + 11{,}25\hat{N}_2)/(3\,000 - n_1)]^{-1},$$
$$(0 \leqslant F_2 \leqslant 1).$$

Проверка показывает, что выражение (4) имеет единственный относительный минимум в области допустимых значений n_1. Вычисление $\hat{n}_1$ состоит в подсчете значений выражения (4) для нескольких значений n_1 вблизи минимизирующего значения. Затем $\hat{n}_1$ определяется графически на основе рассмотренных значений n_1 и соответствующих значений выражения (4).

Для начала рассмотрим случай, когда $n_1 = 0$. Это как раз та стратегия обороны, которая получается, если в качестве критерия эффективности берется отношение стоимости к поражающей способности. При этом выражение (2) отрицательно, так что $\hat{N}_1(0)=0$; F_1 равна единице при $n_1=0$. В результате $\hat{N}_2(0)$ равно либо нулю, либо целой части выражения

$$-55 - 0{,}0764\,(3\,000) +$$
$$+ \sqrt{57{,}6\,(3\,000) + 0{,}00795\,(3\,000)^2} \approx 209.$$

Для $N_2 = 0$ величина $(\alpha_2 - \beta_2 N_2) f_2$ равна нулю, а для $N_2 = 209$ она равна 107. Следовательно, приблизительно оптимальной стратегией противника в случае $n_1=0$ будет $\hat{N}_1=0$; $\hat{N}_2=209$, $\hat{N}_3=0$ и $\hat{N}_4=291$. Таким образом, поскольку $\max P_j=1$ и $\alpha_2=F_1=1$, величина $P=P(0)=107$. Иначе говоря, для случая $n_1=0$ через все секторы обороны проникнут цели со 107 единицами потенциала разрушения.

Далее рассмотрим случай, когда $n_1=1\,500$. Тогда $\hat{N}_1$ (1500) равно либо нулю, либо целой части выражения

$$-249{,}5-0{,}172\,(1500)+$$
$$+\sqrt{(188{,}5)\,(1500)+0{,}04025\,(1500)^2}\approx 103.$$

Для $N_1=0$ $(\alpha_1-\beta_1 N_1)\,f_1=155$, а для $N_1=103$ $(\alpha_1-\beta_1 N_1)f_1=$ $=173$. Таким образом, $\hat{N}_1\,(1500)=103$, $F_1=0{,}425$. Аналогично, $\hat{N}_2\,(1500)$ равно либо нулю, либо целой части выражения

$$-55-\frac{0{,}0764\,(1500)}{0{,}425}+$$
$$+\sqrt{\frac{(46{,}9)\,(1\,500)}{0{,}425}+\frac{0{,}00795\,(1\,500)^2}{(0{,}425)^2}}\doteq 188.$$

Для $N_2=0$ $(\alpha_2-\beta_2 N_2)\,f_2=33$, а для $N_2=188$ $(\alpha_2-\beta_2 N_2)f_2=$ $=188$. Поэтому приблизительно оптимальная стратегия противника для случая $n_1=1\,500$ будет $\hat{N}_1=103$, $\hat{N}_2=$ $=188$, $\hat{N}_3=0$, $\hat{N}_4=209$. Тогда, поскольку $\max P_j=1$, $\alpha_2=1$, $F_1=0{,}425$, величина $P=P\,(1500)=50$. Иначе говоря, если $n_1=1500$, то через все секторы обороны будет пропущено только 50 единиц потенциала разрушения.

Производя аналогичным образом вычисления для случаев, когда $n_1=1100$, 1900, 2300, получим

$$\hat{N}_1\,(1100)=67,\quad \hat{N}_2\,(1100)=210,\quad \hat{N}_3\,(1100)=0,$$
$$\hat{N}_1\,(1900)=132;\quad \hat{N}_2\,(1900)=165,\quad \hat{N}_3\,(1900)=0,$$
$$\hat{N}_1\,(2300)=160,\quad \hat{N}_2\,(2300)=132,\quad \hat{N}_3\,(2300)=0,$$
$$\hat{N}_4\,(1100)=223,\quad P\,(1100)=58;$$
$$\hat{N}_4\,(1900)=203,\quad P\,(1900)=47;$$
$$\hat{N}_4\,(2300)=208,\quad P\,(2300)=48{,}5.$$

График, построенный по результатам расчетов для $n_1=0$, 1100, 1500, 1900, 2300, дает следующую приблизительно оптимальную стратегию обороны

$$\hat{n}_1=2000, \quad \hat{n}_2=4000.$$

Из этого же графика видно, что приблизительно оптимальной стратегией противника будет $\hat{N}_1(2000)=138$, $\hat{N}_2(2000)=157$, $\hat{N}_3(2000)=0$, $\hat{N}_4(2000)=205$, а $P=P(2000)=46{,}5$. Иначе говоря, если как обороняющаяся сторона, так и противник применяют приблизительно оптимальные стратегии, то только 46,5 единиц потенциала разрушения проникнут через все секторы обороны.

В заключение сравним результат, получающийся, когда используется приблизительно оптимальная стратегия обороны, с тем результатом, который получается, если стратегия обороны определяется на базе минимума отношения стоимости к поражающей способности. Здесь противник всегда использует свою приблизительно оптимальную стратегию для данной стратегии обороны. Если применяется приблизительно оптимальная стратегия обороны, то только 46,5 единиц потенциала разрушения проникают через все секторы обороны против 107 единиц, проникающих во втором случае. Таким образом, применение оптимальной стратегии обороны вместо критерия эффективности, основанного на отношении «стоимость/поражающая способность», существенно улучшает эффективность обороны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении содержится доказательство того, что $\hat{N}_i(n_1, \ldots, n_{s-1})$ равно либо нулю, либо целой части выражения (1). Нулевое значение берется в том случае, когда выражение (1) отрицательно или когда выражение $(\alpha_i - \beta_i N_i) f_i$ меньше при $N_i=0$, чем когда N_i равно целой части выражения (1). Одновременно $N_i=0$, если $D_i^{(i)}=D_i$, т. е. $\delta_i=0$.

По предположению f_i есть неуменьшающаяся функция от N_i для допустимых значений N_i. Кроме того, $D_i^{(i)} \geqslant \max[D_i^{(1)}, \ldots, D_i^{(i-1)}]$, так что $\delta_i \geqslant 0$. Эти два условия требуют, чтобы $\gamma_i+\delta_i N_i$ была неуменьшающейся функцией от N_i, которая не меняет знак при допустимых значениях N_i. Если $\delta_i=0$, то не будет никакого выигрыша в степени подавления обороны, если противник использует тип атаки i; поэтому $N_i=0$. Эти интуитивные соображения согласуются с непосредственным использованием этого критерия. При $\delta_i=0$ критерий представляет собой монотонно убывающую функцию от N_i, так что максимизирующим значением будет $N_i=0$.

Остается случай, когда $\delta_i>0$. Тогда $\gamma_i+\delta_i N_i$ есть возрастающая функция от N_i, не меняющая знака для всех допустимых значений N_i. Если $A_i=0$ или $\gamma_i<0$, то f_i обязательно должна равняться единице для всех допустимых N_i. Для $A_i=0$ это следствие очевидно. Если $\gamma_i<0$, то A_i должно быть обязательно неотрицательным, так как $\delta_i>0$, и нуль есть возможное значение для N_i. Отсюда вытекает, что F_i должна равняться по крайней мере единице для всех допустимых значений N_i. Анализ, аналогичный проделанному для $\delta_i=0$, показывает, что $N_i=0$, если $\delta_i>0$, но $A_i<0$ или $\gamma_i<0$.

В заключение рассмотрим случай, когда $\delta_i>0$, $A_i\neq 0$, $\gamma_i\geqslant 0$. Тогда $\gamma_i+\delta_i N_i$ есть монотонно возрастающая неотрицательная функция от N_i. Отсюда следует, что $A_i>0$ и следовательно $f_i<1$ для всех допустимых N_i. При определении величины N_i, которая обеспечивает максимальное значение критерия, f_i может быть положена равной своему несокращенному выражению. Это допустимо, так как для $f_i>0$ величина f_i равна этому несокращенному выражению, в то время как ситуации, в которых $f_i=0$, исключаются по другим соображениям. Исключив, таким образом, ненулевые множители, независимые от N_i, мы приходим к проблеме определения величины N_i, при которой достигается относительный максимум функции

$$\left[1-\frac{A_i}{\gamma_i+\delta_i N_i}\right](\alpha_i-\beta_i N_i) \qquad (5)$$

для заданных $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_{i-1}$.

Определим относительный максимум выражения (5), рассматривая его как функцию от N_i. Дифференцируя (5) по N_i, получим условие получения максимизирующего значения N_i

$$\frac{\delta_i A_i(\alpha_i-\beta_i N_i)}{(\gamma_i+\delta_i N_i)^2}-\beta_i\left(1-\frac{A_i}{\gamma_i+\delta_i N_i}\right)=0,$$

где $\gamma_i+\delta_i N_i\neq 0$ для допустимых значений N_i. Сокращая на коэффициенты, не равные нулю, и группируя члены, получаем следующее выражение:

$$(\gamma_i+\delta_i N_i)^2=A_i\left(\gamma_i+\frac{\alpha_i\delta_i}{\beta_i}\right).$$

Отсюда следует, что если существует допустимое значение N_i, которое придает выражению (5) значение относительного максимума, то оно равно наибольшему целому числу, содержащемуся в выражении (1). Если эта величина отрицательна, то относительного максимума выражения (5) для $N_i<0$ не существует. Тогда максимизирующим значением будет $N_i=0$. Если величина выражения (1) больше нуля, то выбор между $\hat{N}_1=0$ и $\hat{N}_1$, равным целой части выражения (1), производится на основании прямого сравнения значений выражения $(\alpha_i-\beta_i N_i)f_i$ для обоих случаев. Имеется верхний предел α_i/β_i для допустимых значений N_i. Этот предел, однако, не есть возможное значение N_i, так как критерий равен нулю при $N_i=\alpha_i/\beta_i$.

Расширение математической модели

Математическая модель, представленная в этой статье для рассмотрения действий и результатов атаки противника против обороны, может использоваться в ситуациях более общих, чем было предусмотрено при ее выводе. На нее наложено условие, чтобы атака проходила через заданное множество секторов в определенном порядке (сначала сектор *1*, затем сектор *2*,..., наконец, сектор *s*). Не во всех реальных ситуациях это условие удовлетворяется. Однако многие очень сложные ситуации могут быть разбиты на части так, чтобы каждая из них удовлетворяла условию, наложенному на нашу модель. Тогда соответствующее применение нашей модели к каждой из этих частей совместно с методом определения приблизительно оптимальных стратегий противника может сильно упростить определение приблизительно оптимальной стратегии противника для всей ситуации в целом. Если известна приблизительно оптимальная стратегия противника, то приблизительно оптимальная стратегия обороны может быть часто найдена с помощью стандартных методов определения максимального значения функции.

Согласно нашей модели, все атакующие единицы должны проходить через все секторы обороны. Для единиц, предназначенных для разрушения объектов, это верно. Однако часть остающихся единиц типа $i \leqslant s$ может прекращать атаку в конце сектора i, сектора $i+1$ и т. д. Это можно учесть, умножая величину $D_u^{(i)}$ на коэффициент $g_i(u)$. Он равен той части начального числа единиц типа i, которая должна продолжать атаку в секторе $u \geqslant i$. Величина $g_i(u)$ является обязательно невозрастающей функцией от u.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Friedman and L. J. Savage. Planning experiments seeking maxima. Techniques of statistical analysis. McGraw-Hill, New York, 1947, p. 363—372.

ОПТИМАЛЬНЫЙ СОСТАВ И БОЕВОЙ ПОРЯДОК РАЗНОРОДНОЙ ПО СОСТАВУ СИСТЕМЫ ЛОКАЛЬНОЙ ПРОТИВОВОЗДУШНОЙ ОБОРОНЫ

*Мартин Л. Лейбовиц и Джералд Дж. Либерман**.
Стэнфордский исследовательский институт, Менло Парк, шт. Калифорния

Почти все системы локальной противовоздушной обороны состоят из нескольких типов оборонительного оружия. Подобное дублирование является необходимым. Система ПВО должна быть готова к отражению целого спектра приемов налета, доступных противнику. Вследствие большой разницы в тактико-технических требованиях либо совсем невозможно, либо экономически невыгодно создать один единственный тип оборонительного оружия, который был бы эффективен против всех возможных видов налета. На некотором этапе планирования системы обороны подобная разнородность характеристик оружия приводит к необходимости решить вопрос о наилучшем сочетании различных типов оружия. Иначе говоря, требуется определить, сколько оружия какого типа должно быть предусмотрено в системе обороны.

В настоящей статье описан метод решения этой задачи в случае идеализированной оборонительной ситуации, справедливой для некоторых симметричных оборонительных систем, использующих зенитные управляемые снаряды. Тем не менее, нам кажется, что описанный метод применим к более широкому диапазону проблем военного планирования .

---

* Martin L. Leibowitz and Gerald J. Lieberman. Optimal composition and deployment of a heterogeneous local air-defense system. Operations Research, 1960, vol. 8, p. 324—337.

МОДЕЛЬ НАЛЕТА

Оперативный «бюджет» нападающей стороны в каждой отдельной операции характеризуется уровнем усилий, вложенных в налет, M_0. Определенные усилия, вложенные в налет, могут быть реализованы посредством одного из m типов налета, причем в рамках одной операции может быть применен только один тип налета. Отдельные типы налета характеризуются индексом j, где $j=1,2, ..., m$, и различаются друг от друга по «стоимости» одной атакующей единицы, по разрушительному потенциалу, которым обладает одна атакующая единица, и по ее уязвимости со стороны каждого подразделения системы обороны.

Стоимость одной атакующей единицы, C_j, используется для определения числа атакующих единиц в j-ом типе налета. Если обозначить через M_j это число единиц, то $M_j=\frac{M_0}{C_j}$. Другими словами, для заданного уровня усилий, вложенных в налет, при атаке легких бомбардировщиков должно, по-видимому, участвовать больше самолетов, чем при атаке тяжелых бомбардировщиков.

Разрушительный потенциал одной атакующей единицы, e_j, характеризует тот факт, что тяжелый бомбардировщик может нести бóльшую бомбовую нагрузку, чем легкий. Поэтому общий разрушительный потенциал j-го типа налета без учета потерь, наносимых системой обороны, равен $e_jM_j=e_j\frac{M_0}{C_j}$.

Уязвимость определенного типа атаки выражается математическим ожиданием числа атакующих единиц, K_{ij}, уничтоженных подразделениями обороны, оснащенными оружием i-го типа. Имеется n различных типов оборонительного оружия, характеризующихся индексом i, где $i=1, 2, ..., n$. Совершенно очевидно, что при расчете уязвимости учтены многие физические параметры налета: скорость и высота полета, эффективная отражающая поверхность бомбардировщиков и т. д.

МОДЕЛЬ ОБОРОНЫ

Общий бюджет, выделенный для создания и эксплуатации локальной системы обороны, равен C_0. Если через N_i обозначить число подразделений, оснащенных

i-ым оборонительным оружием, а через C_i — первоначальную стоимость i-го оружия и стоимость его эксплуатации, приходящуюся на одно подразделение, оснащенное этим оружием, то возможна реализация любой комбинации оружия ($N_1, N_2, \dots, N_n$), удовлетворяющей неравенству $\sum_{i=1}^{n} C_i N_i \leqslant C_0$. Все оружие i-го типа равномерно распределено вдоль окружности с радиусом R_i и с центром, совпадающим с обороняемым объектом. Обороняющаяся сторона может выбирать величину радиуса

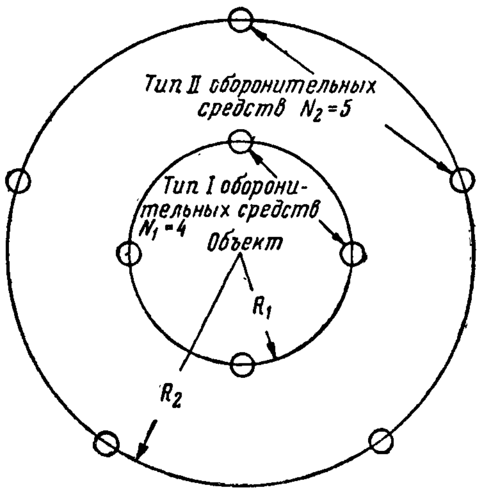


Рис. 1. Группировка средств противовоздушной обороны.

са R_i по своему желанию. Так как боевой порядок каждого типа оружия представляет собой отдельную окружность, то система обороны в целом состоит из нескольких концентрических кольцевых оборонительных поясов, окружающих обороняемый район (рис. 1). Такой боевой порядок основан на предположении о равной вероятности налета со всех сторон.

Эффективность действий одного оборонительного подразделения с оружием i-го типа, расположенного на окружности радиуса R_i, против j-го типа налета характеризуется математическим ожиданием числа целей,

$K_{ij}(R_i)$, пораженных этим подразделением до того, как атакующие единицы достигли рубежа бомбометания. Этот параметр является функцией характеристик цели (скорости, высоты, эффективной отражающей поверхности и т. д.) и характеристик оборонительного подразделения (работное время, дальность действия, пропускная способность, условная вероятность поражения цели ракетой при состоявшемся наведении и т. д.). Действительное число сбитых целей зависит также от положения оборонительного подразделения на окружности боевого

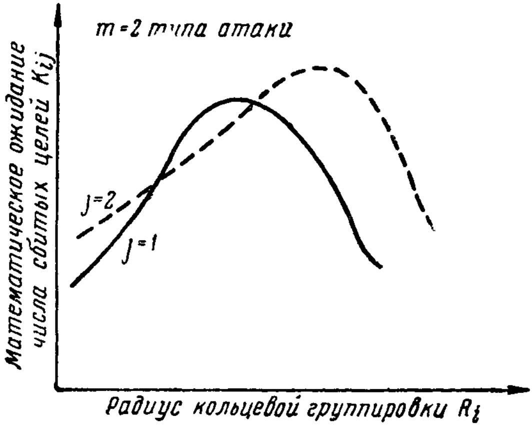


Рис. 2. Математическое ожидание числа целей, сбитых отдельным подразделением средств обороны i-го типа.

порядка относительно направления налета. Однако с помощью усреднения математического ожидания числа сбитых целей по всем возможным направлениям атаки величину K_{ij} можно сделать независимой от расположения оборонительной единицы на кольце обороны (рис. 2). (Вычисление математического ожидания числа сбитых целей $K_{ij}(R_i)$ является непростой задачей, и то, что в статье этот вопрос рассмотрен вкратце, не следует истолковывать как попытку преуменьшить сложность проблемы. Так как, однако, содержание статьи сфокусировано на модели сбалансированной обороны, то функция математического ожидания числа сбитых целей считается заданной.)

КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Атакующая сторона старается максимизировать ущерб, наносимый объекту при заданном уровне усилий, вложенных в налет. Этот ущерб является монотонно возрастающей функцией числа бомб, пропущенных системой обороны. Аналогично, обороняющаяся сторона стремится минимизировать бомбовый потенциал, пропущенный через рубежи обороны, с учетом ограничений, накладываемых бюджетом обороны. Поэтому в качестве критерия эффективности как налета, так и обороны, принято число бомб, пронесенных через систему обороны.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Атакующая сторона должна выбрать один из m типов атаки. Обороняющаяся сторона может, во-первых, выбрать любую возможную комбинацию оборонительного оружия, а во-вторых, она обладает полным контролем относительно радиусов боевых порядков выбранной комбинации оружия. В некоторых случаях обороняющаяся сторона может осуществить только начальный контроль за боевыми порядками. Это имеет место, например, когда оборона состоит из стационарных сооружений. С другой стороны, если оборонительное оружие подвижно, то обороняющаяся сторона может осуществлять более или менее непрерывный контроль за построением боевых порядков. В статье рассмотрены оба случая.

Предполагается, что обе стороны действуют разумно и обладают полной информацией относительно значений параметров задачи. Далее предполагается, что нападающая сторона знает выбранную противником комбинацию типов вооружения, а в случае стационарных сооружений, знает и боевые порядки.

С точки зрения обороняющейся стороны задача заключается в определении такой комбинации оружия и боевых порядков, которые минимизируют математическое ожидание числа пропущенных бомб.

МОДЕЛЬ СБАЛАНСИРОВАННОЙ ОБОРОНЫ

Если противник выбрал j-ый тип атаки, то система обороны действует против N_j атакующих единиц, каждая из которых несет e_j бомб. Если обороняющаяся сторона выбрала k-ую возможную комбинацию средств, где $k = 1, 2, \ldots, s$, оборона должна состоять из $N_1^{(k)}$ подразделений первого типа, $N_2^{(k)}$ подразделений второго типа и в общем случае из $N_i^{(k)}$ подразделений i-го типа. Имеется бесконечное число вариантов размещения на местности этих средств обороны. Для удобства изложения, однако, предполагается, что число таких вариантов конечно. Так y-ый вариант размещения означает, что все средства первого типа размещены на окружности радиуса $R_1^{(y)}$, все средства второго типа — на окружности радиуса $R_2^{(y)}$ и в общем случае все средства i-го типа — на окружности радиуса $R_i^{(y)}$, где $y = 1, 2, \ldots, r$. Если обороняющаяся сторона выбрала k-ую комбинацию и y-ый вариант размещения, то математическое ожидание числа пораженных целей, достигаемое всей системой обороны, будет равно

$$Q_{kyj} = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij}(R_i^{(y)}).$$

(В этом выражении предполагается, что математическое ожидание числа сбитых целей Q_{kyj} не зависит от размеров налета M_j. Это предположение накладывает на нашу модель сильные ограничения, так как оно справедливо только в некоторых частных случаях, например, когда число атакующих целей во много раз превосходит оборонительный потенциал системы обороны. Тем не менее, общность метода при этом не уменьшается, так как всегда можно линейные выражения заменить соответствующими функциями Q_{kyj}. Хотя введение более сложных выражений может сильно усложнить вычисление значений Q_{kyj}, можно показать, что при этом форма оптимальных решений не меняется.)

Математическое ожидание числа целей, прорвавшихся через все рубежи обороны, равно числу целей, вылетевших с баз, M_j, минус математическое ожидание числа сбитых целей, Q_{kyj}, т. е.

$$M_j - Q_{kyj} = \frac{M_0}{C_j} - \sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij}(R_i^{(y)}).$$

И, наконец, математическое ожидание числа бомб, пронесенных сквозь системы обороны, B_{kyj}, равно

$$B_{kyj}=e_j(M_j-Q_{kyj}).$$

Рассмотрим сначала случай, когда средства обороны размещены стационарно. В тот момент, когда атакующая сторона должна принять решение относительно типа атаки, она, по предположению, обладает полной информацией о составе и расположении средств обороны. Поэтому такую ситуацию можно рассматривать как игру с полной информацией. Следовательно, как у нападающей, так и у обороняющейся стороны имеются оптимальные чистые стратегии, а игра имеет цену. Решение этой игры легко находится следующим образом. Перед нападающей стороной имеется система обороны с фиксированными k-ой комбинацией средств и y-ым их расположением. Если атакующая сторона выбрала j-ый тип атаки, то математическое ожидание платежа будет B_{kyj} бомб. Естественно, что она выберет тот тип атаки, j^*, который максимизирует число бомб, пронесенных через оборону, т. е.

$$B_{kyj^*}=\max_j B_{kyj}.$$

Обороняющаяся сторона, наоборот, выберет такие k^*-ую комбинацию и фиксированное расположение средств y^*, чтобы минимизировать B_{kyj^*}, т. е.

$$B=B_{k^*y^*j^*}=\min_{k,\,y} B_{kyj^*}.$$

Таким образом, нападающая сторона выберет j^*-ый тип атаки и будет уверена в том, что по крайней мере B бомб проникнет через оборону, в то время как обороняющаяся сторона выберет k^*-ую комбинацию и y^*-ое расположение средств и будет уверена, что к объекту будет пронесено не более чем B бомб (рис. 3).

В более общем случае, когда расположение оборонительных средств не фиксировано, атакующая сторона знает комбинацию средств обороны, но ничего не знает относительно радиусов колец боевых порядков. Игра перестает быть игрой с полной информацией, и оптимальное решение потребует применения смешанных стратегий. Необходимость смешанных стратегий можно пояснить, если предположить, что допустимы только решения игры в чистых стратегиях. Тогда, если обороняющаяся сторона играет осторожно, то она разместит

k-ую комбинацию (предполагая, что индекс k фиксирован в самом начале) так, чтобы минимизировать наилучший платеж, который может получить нападающая сторона. Другими словами, осторожная обороняющаяся сторона

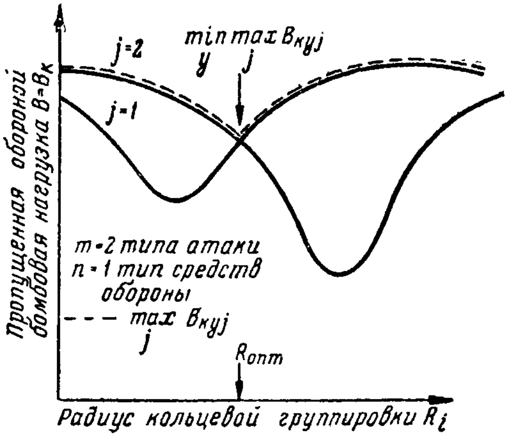


Рис. 3. Оптимальная группировка для стационарного размещения.

полагает, что нападающая сторона правильно отгадывает вариант размещения и в соответствии с этим применяет j^*-ый тип атаки, при котором $\max_j B_{kyj} = B_{kyj_*}$.

Обороняющаяся сторона тогда выберет такое значение $y = y^*$, которое минимизирует B_{kyj^*}, т. е.

$$\min_y B_{kyj^*} = B_{ky^*j^*}.$$

Принимая такое решение, обороняющаяся сторона исходит из предположения, что нападающей стороне удастся выбрать именно такой тип атаки, который наилучшим образом использует имеющиеся слабые места обороны. При этом она проявляет максимальную осторожность. Вообще же обороняющаяся сторона может достичь лучших результатов, если она применит какую-нибудь более «рискованную» стратегию размещения средств обороны. Обратимся к рис. 4. Наиболее осторожная стратегия определяется пересечением двух кривых, нанесенных для двух типов атаки. Предположим, однако, что обороняющаяся сторона вынуждена использовать смешанную стратегию, состоящую из попеременного использования стратегий R' и R''. Если бы порядок использования этих стратегий был случайным, то нападающая сторона была бы не в состоянии определить, какое размещение средств выбрала оборона в данный момент времени. В некоторых случаях нападающий может правильно угадать стратегию обороны, получая при этом более высокий платеж, однако, даже в этом «удачном» случае этот платеж не на много выше гарантированного платежа, получаемого при применении чистой

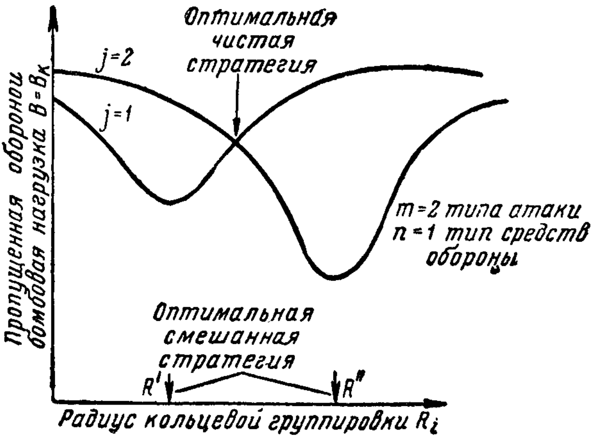


Рис. 4. Чистые и смешанная стратегии для подвижной обороны.

стратегии. С другой стороны, если нападающему не удается правильно разгадать стратегию обороны, и он выбирает, например, тип атаки $j=1$ против размещения средств R', то его платеж значительно меньше, чем платеж при использовании чистой стратегии. Можно строго доказать, что оборона всегда может улучшить свой результат, используя смешанную, т. е. рискованную, стратегию. Это же справедливо, конечно, и в отношении нападающей стороны. Доказательство этого утверждения является основной теоремой теории некооперативных игр * с нулевой суммой.

---

* Некооперативные игры — игры, в которых не допускается абсолютно никакой связи между игроками до начала игры. (*Прим. перев.*).

Возникает вопрос: оправдывается ли риск, заключенный в смешанной стратегии, если в игре на карту поставлено само существование противников? Будет ли капитану тонущего флагманского корабля легче от мысли, что выбранная им смешанная стратегия в результате многократного повторения оказывается наилучшей? Этот вопрос имеет некоторые интересные следствия, которые будут рассмотрены позднее. А сейчас мы предположим, что оба игрока желают применить смешанные стратегии.

Можно легко сформулировать выражение математического ожидания цены смешанной стратегии. Пусть w_j есть вероятность того, что нападающий применит j-ый тип атаки и пусть f_y есть вероятность того, что оборона выбрала y-ый тип размещения средств. Тогда, предполагая индекс k фиксированным, получаем, что математическое ожидание числа пропущенных обороной бомб равно $\sum_{y=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} f_y w_j B_{kyj}$, где $\sum_{j=1}^{m} w_j = \sum_{y=1}^{r} f_y = 1$. Оптимальные значения $w_j = w_{j*}$ и $f_y = f_{y*}$ определяются из условия

$$B_k = \min_f \max_w \sum_{y=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} f_y w_j B_{kyj} =$$

$$= \max_w \min_f \sum_{y=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} f_y w_j B_{kyj} = \sum_{y=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} f_{y*} w_{j*} B_{kyj}.$$

Таким образом, нападающий, применяя свою оптимальную смешанную стратегию, может гарантировать, что по крайней мере B_k бомб будет пропущено обороной. Одновременно оборона может быть уверена в том, что не более B_k бомб проникнет через оборонительные рубежи. Поскольку нападающий знает смешанную стратегию, выбранную обороной, то B_k является единственным критерием ценности k-ой комбинации средств и, следовательно, оборона выберет ту k-ую комбинацию средств, при которой минимизируется величина B_k. Результирующая уцелевшая бомбовая нагрузка, B, является ценой всей игры для обеих сторон.

РЕШЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИ СБАЛАНСИРОВАННОЙ ОБОРОНЫ

Если число альтернативных стратегий может быть в результате наблюдения уменьшено до достаточно малого числа доминирующих стратегий, то уравнения модели сбалансированной обороны разрешимы. Такое условие соблюдается в одном случае, имеющем практическое значение.

Первым шагом является исключение возможно большего числа подчиненных стратегий. Для фиксированного индекса k любой j^*-ый тип атаки, удовлетворяющий неравенству

$$e_{j^*}\left[\frac{M_0}{C_{j^*}}-\sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij^*}(R_i)\right] \leqslant e_j\left[\frac{M_0}{C_j}-\sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij}(R_i)\right]$$

для $j \neq j^*$ и для всех R_i, может уверенно рассматриваться как подчиненная стратегия и может быть исключен из множества доступных стратегий нападения при оценке k-ой комбинации средств. Подобные стратегии могут быть легко отобраны. Аналогично любое размещение y^*, такое, что удовлетворяется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij}(R_i^{(y^*)}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij}(R_i^{(y)})$$

для $y \neq y^*$ и для любого индекса j, может быть исключено при оценке k-ой комбинации средств.

И наконец, любая комбинация k^* может быть исключена из рассмотрения, если для $k \neq k^*$, при любых значениях j и при любых значениях y справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^{(k^*)} K_{ij}(R_i^{(y)}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij}(R_i^{(y)}).$$

Если при каждой k-ой возможной комбинации средств m_k' есть число неподчиненных стратегий нападения, r_k' — число неподчиненных стратегий размещения и s' — множество неподчиненных возможных комбинаций средств, то для стационарной обороны требуется только подсчитать значения $\sum\limits_{k \in s'} m_k' r_k'$ и выполнить указанные выше операции.

Задача для подвижной обороны может быть сведена к выражению

$$B = \min_k \min_f \max_w \sum_{y \in r'_k} f_y \sum_{j \in m'_k} w_j e_j \times$$
$$\times \left[\frac{M_0}{C_j} - \sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij} (R_i^{(y)}) \right] = \min_k B_k,$$

где

$$B_k = \min_f \max_w \sum_{j \in m'_k} w_j e_j \left[\frac{M_0}{C_j} - \sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij} (R_i^{(y)}) \right].$$

Для фиксированного значения k игра может быть представлена матрицей

$$\| B_{kyj} \| = \left\| e_j \left[\frac{M_0}{C_j} - \sum_{i=1}^{n} N_i^{(k)} K_{ij} (R_i^{(y)}) \right] \right\| = \| e_j (M_j - Q_{kyj}) \|.$$

У этой матрицы имеется r'_k строк и m'_k столбцов. Цену игры B_k можно найти, рассматривая матрицу $\| B_{kyj} \|$ как двойственную задачу линейного программирования и используя стандартную вычислительную программу. Всего будет s' таких матриц и s' решений B_k, характеризующих ценность каждого варианта предполагаемой системы обороны. Наилучшей системой будет, естественно, та, для которой B_k имеет наименьшее значение.

ПРИМЕР

Рассмотрим две подвижные системы зенитных управляемых снарядов. Первая система, которую мы назовем оружием A, особенно эффективна против высоколетящих целей, в то время как вторая система, оружие B, наиболее эффективна против низколетящих целей. Задача заключается в определении соотношения количеств оружия A и оружия B, которое обеспечивало бы наиболее эффективную сбалансированную оборону.

Следующая тактическая ситуация считается типичной: точечному объекту угрожает налет истребителей-бомбардировщиков. Атакующие самолеты могут пытаться проникнуть как на малых высотах ($j=1$), так и на больших высотах ($j=2$). Из этих двух возможных типов атак маловысотный вариант является более «дорогим» из-за сложности решения вопросов управления и навигации. По этой причине нападающая сторона может выделить только 14 самолетов для атаки на малой высоте ($M_0=M_1=14$; $C_1=1$), в то время как для проведения более «дешевого» варианта атаки на большой высоте она может выделить 20 самолетов ($M_2=20$; $C_2=0{,}7$). С другой стороны, эффективность атаки выше при атаке на малых высотах, потому что маловысотный истребитель-бомбардировщик обладает вдвое большим разрушительным потенциалом, чем высотный ($e_1=1$, $e_2=0{,}5$).

Эффективность обоих типов оборонительного оружия против истребителей-бомбардировщиков показана в табл. 1. Стоимость оружия A равна 50 единицам, оружие B стоит 25 единиц, а общий бюджет системы обороны составляет 100 единиц стоимости.

Первым делом следует перечислить все возможные комбинации средств

k	Количество оружия A	Количество оружия B
1	2	0
2	1	2
3	0	4

Далее необходимо составить платежную матрицу для каждой возможной комбинации средств. Этот процесс значительно упрощается, если использовать то обстоятельство, что некоторые значения радиусов боевых порядков являются строго подчиненными стратегиями (см. табл. 1). Остаются две неподчиненные стратегии размещения:

$y=1$, оружие A на кольце $R=0$,
оружие B на кольце $R=10$;
$y=2$, оружие A на кольце $R=10$,
оружие B на кольце $R=20$.

Тактическая игра, связанная с любой из этих комбинаций, характеризуется платежной матрицей

$$\| B_{kyj} \| = \| e_j [M_j - N_A^{(k)} K_{Aj} (R_A^{(y)}) - N_B^{(k)} K_{Bj} (R_B^{(y)})] \|.$$

Таблица 1

Значение потенциала поражения $K_{ij}(R_i)$ для двух типов оборонительного оружия

Радиус кольцевого боевого порядка, R_i	Оружие A		Оружие B	
	атака на малой высоте ($j=1$)	атака на большой высоте ($j=2$)	атака на малой высоте ($j=1$)	атака на большой высоте ($j=2$)
0	0	6	0	0
10	1	2	3	1
20	0,5	1	0,5	0

Элементы матриц легко подсчитать

$$k=1 \qquad \begin{array}{c|cc|} & j=1 & j=2 \\ \hline y=1 & 14 & 4 \\ y=2 & 12 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$k=2 \qquad \begin{array}{c|cc|} & j=1 & j=2 \\ \hline y=1 & 8 & 6 \\ y=2 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$k=3 \qquad \begin{array}{c|cc|} & j=1 & j=2 \\ \hline y=1 & 2 & 8 \\ y=2 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Третьим шагом является решение тактической игры. В нашем примере эти решения легко находятся. Если оптимальные смешанные стратегии обороны и нападающей стороны выразить в виде (f_1, f_2) и (w_1, w_2), соответственно, то

k	Оптимальная стратегия обороны	Оптимальная стратегия нападения	Цена игры
1	(0,1)	(1,0)	12
2	(1/3, 2/3)	(2/3, 1/3)	7,33
3	Любая из двух	(0,1)	8

Четвертым и последним шагом является определение той комбинации оборонительного оружия, при которой ущерб объекту минимальный. Так как этот ущерб характеризуется ценой соответствующей тактической игры, очевидно, что оптимальной является комбинация $k=2$.

Таким образом, оборона должна состоять из одного подразделения, оснащенного оружием A, и двух подразделений, оснащенных оружием B.

СПРАВЕДЛИВОСТЬ СМЕШАННОЙ СТРАТЕГИИ. ОГРАНИЧЕНИЯ, ПРИСУЩИЕ КРИТЕРИЮ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Использование математического ожидания числа пропущенных бомб в качестве критерия эффективности является серьезным компромиссом. Первое возражение заключается в том, что потерям нападающей стороны не придается никакого веса, за исключением того, что они влияют на выполнение задачи налета. Это неверно, потому что самолет, который уцелеет и вернется на свою базу, обладает определенной ценностью, так как он может быть использован повторно. Вторая трудность касается требований, которые теория игр предъявляет к природе платежной функции. Чтобы смешанные стратегии имели смысл, платежная функция должна описывать профиль предпочтений игроков *, т. е. должна быть линейной функцией полезности **. Например, предположим, что имеются два платежа A и B, такие, что оборона решает использовать смешанную стратегию, в которой оба платежа получаются с одинаковой вероятностью 0,5. Для того чтобы эта смешанная стратегия правильно описывала профиль предпочтений игрока, необходимо, чтобы значение цены смешанной стратегии $0{,}5V(A)+0{,}5V(B)$ было равно среднему значению индивидуальных платежей $V(0{,}5A+0{,}5B)$. Иначе говоря,

$$0{,}5V(A)+0{,}5V(B)=V(0{,}5A+0{,}5B).$$

* Профиль предпочтений игрока — множество доступных игроку альтернатив (стратегий), упорядоченное по признаку предпочтения их этим игроком. Например, если игрок предпочитает стратегию z стратегии x, а стратегию x стратегии y, то его профиль предпочтения будет $R\{z, x, y\}$. (*Прим. перев.*)

** Функция полезности (utility function) — функция, численно характеризующая предпочтение одной альтернативы (стратегии) по сравнению с другими альтернативами. Она играет роль критерия, позволяющего устанавливать степень полезности (ценности) различных альтернатив для лица, принимающего решение. (*Прим. перев.*)

Чтобы пояснить это, рассмотрим следующий пример. Пусть платежами являются количества бомб, которые проникают сквозь оборону; пусть $A=10$ бомб, $B=0$ бомб, $C=5$ бомб. Теперь предположим, что объект имеет такую структуру, что бомбардировка менее чем десятью бомбами приносит незначительный ущерб, но зато бомбардировка десятью и большим числом бомб вызывает полное разрушение объекта. Очевидно, что если оборона должна выбирать между уверенным платежом в пять бомб $V=V(C)$ и смешанной стратегией, в которой платежи в десять бомб и в ноль бомб могут появляться с одинаковой вероятностью 0,5, то $V=0{,}5V(A)+0{,}5V(B)$, и обороняющаяся сторона должна предпочесть уверенный платеж в пять бомб. В этом случае

$$0{,}5V(10)+0{,}5V(0)<V(0{,}5\times 10+0{,}5\times 0)=V(5),$$
$$0{,}5V(A)+0{,}5V(B)<V(0{,}5A+0{,}5B)=V(C),$$

и смешанная платежная функция неточно описывает профиль предпочтений игрока.

Поэтому задача в том виде, в котором она сформулирована, дает лишь качественное описание ситуаций, в которых:

1) разрушение объекта имеет столь большое значение для нападающей стороны, что число самолетов, возвращающихся после выполнения задания, имеет сравнительно незначительную важность и

2) ущерб, наносимый объекту, может быть приблизительно представлен в виде линейной функции от числа бомб, пронесенных к объекту.

Во многих случаях оба эти условия нарушаются. Поэтому, если это возможно, желательно сформулировать более точный критерий эффективности. В некоторых случаях, например, достаточно хорошей платежной функцией будет математическое ожидание ущерба, понесенного обороной, минус математическое ожидание ущерба, понесенного нападающей стороной. В любом случае, однако, основной метод решения остается неизменным.

Вернемся к вопросу о допустимости применения смешанных стратегий к существующим реальным играм, когда неблагоприятный исход одного из ходов исключает возможность повторения партии игры. Если платежная функция точно описывает профиль предпочтений игрока и если справедливость этого описания инвариантна к линейным преобразованиям, тогда даже в случае реальных игр игроки должны предпочесть оптимальную смешанную стратегию оптимальной чистой стратегии. Другими словами, истинная платежная функция должна учитывать важность сохранности объекта. На это можно, вообще говоря, возразить, что такую идеальную платежную функцию невозможно получить на практике и, в частности, что функция математического ожидания числа пронесенных бомб наверняка не выполняет этого условия. Следует помнить, однако, что рассматриваемая проблема касается планирования решения, исход которого окажет влияние на все множество возможных тактических игр. Поэтому в известном смысле тактическая игра будет повторяться несколько раз, независимо от того, приведет или не приведет какая-нибудь из партий к полному уничтожению. Вследствие этого в случае подвижной обороны вполне оправдано применение смешанных стратегий.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА В ДРУГИХ ОБЛАСТЯХ

Игровая математическая модель, разработанная для неоднородной локальной обороны, является по существу моделью оценки комбинации оружия одноцелевого действия. Ценность любой такой комбинации может быть выражена через решения соответствующей тактической игры. Один и тот же общий метод может быть приложен к целому ряду проблем планирования, смысл которых заключается в выборе одной программы из множества возможных программ, причем каждая отдельная программа приводит к своей тактической игре. Существует большое количество военных проблем этого типа:

1. Возможности нападающей и обороняющейся сторон изменяются с течением времени. Однако те варианты обороны, которые характеризуются возрастанием ее мощи, могут в большей или меньшей степени сравниваться с первоначальным построением обороны. Какова должна быть экономическая программа развертывания обороны, чтобы она удовлетворяла требованиям необходимой эффективности в течение каждого заданного периода времени?

2. Имеется несколько точечных объектов, обладающих различной важностью. Каков должен быть оптимальный оборонительный локальный комплекс?

3. Оборонительные средства распределены равномерно по заданной площади таким образом, что тип группировки каждого вида оборонительного оружия можно характеризовать расстоянием между подразделениями этих средств. Какова должна быть их оптимальная комбинация?

4. Нападающая сторона желает увеличить число нападающих средств для какой-то одной операции. Какова должна быть оптимальная комбинация средств нападения, если заданы характеристики каждого типа оружия и известна группировка оборонительных средств? Какова должна быть эта оптимальная комбинация, если действительная группировка обороны неизвестна? (Эта задача приводит к игре, платежная функция которой является решением соответствующей тактической игры.)

5. Имеется несколько типов самолетов, отличных от самолетов, производящих атаку, которые должны проникнуть в обороняемый район для того, чтобы выполнить свое задание (например, транспортные самолеты, самолеты-разведчики и т. д.). Какова будет их оптимальная тактика, имеющая целью проникновение через систему обороны?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема оптимального построения неоднородной локальной системы противовоздушной обороны может быть сведена к игровой модели. Оборона принимает решение по выбору некоторого комплекса оборонительного оружия. Это решение становится известным нападающей стороне. После этого обе стороны разыгрывают тактическую игру, в которой они стремятся наиболее эффективно использовать имеющиеся в их распоряжении комплексы оружия. Поскольку тактические игры используются только для оценки различных стратегий планирования, они представлены в виде некоторой обобщенной ситуации. Абстрактный характер тактической игры сильно упрощает решение всей проблемы в целом.

Наиболее актуальные тактические ситуации слишком сложны для игрового анализа. Это привело к распространенному мнению о безнадежности практического применения теории игр к военным проблемам. Рассмотрим типичную проблему планирования комплекса вооружения: выбрать такую комбинацию оружия, которая была бы эффективной во всех возможных тактических ситуациях. Если общее число возможных тактических ситуаций велико, тогда решения по планированию должны по необходимости базироваться на некотором абстрактном прототипе типичной тактической ситуации. Этот прототип обычно сравнительно прост и поэтому позволяет провести игровой анализ. Таким образом, возможно, что теория игр сделает свой наибольший вклад в военное дело в области планирования вооружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Bailey. Applications of operations-research techniques to airborne weapon system planning. Operations Research, 1953, vol. 1, p. 187—199.
2. L. D. Berkovitz and M. Dresher. Optimal employment of tactical air forces in theater air tasks; a game-theoretic analysis. Research Memorandum RM-1877, The RAND Corporation, Santa Monica, 1957.
3. T. E. Caywood and C. J. Thomas. Applications of game theory in fighter versus bomber combat. Operations Research, 1955, vol. 3, p. 402—411.
   Т. Э. Кэйвуд и С. Дж. Томас. Применение теории игр к воздушному бою между истребителем и бомбардировщиком (см. настоящий сборник).
4. G. B. Dantzig. Algorithm for computing optimum distribution of local defense. Research Memorandum RM-914, The RAND Corporation, Santa Monica, 1952.
5. M. Dresher and O. Gross. Local defense of targets of equal value. Research Memorandum RM-320, The RAND Corporation, 1950.
6. D. R. Fulkerson and S. M. Johnson. A tactical air game. Operations Research, 1957, vol. 5, p. 704—712.
   Д. Р. Фулкерсон и С. М. Джонсон. Тактическая воздушная игра (см. настоящий сборник)
7. O. G. Haywood, Jr. Military decision and game theory. Operations Research, 1954, vol. 2, p. 365—385.
8. Р. Д. Льюс и Х. Райфа. Игры и решения. Перевод с английского. Издательство иностранной литературы, 1961.
9. A. Karchere and F. Hoeber. Combat problems, weapon systems and the theory of allocation. Operations Research, 1953, vol. 1, p. 286—302.
10. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. Перевод с английского. ГИФМЛ, М., 1960.
11. J. E. Walsh. Inadequacy of cost per „kill" as a measure of effectiveness. Operations Research, 1957, vol. 5, p. 750—764.
    Дж. Э. Уолш. Недостаточность стоимости поражения цели в качестве критерия эффективности (см. настоящий сборник).

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР ДЛЯ ОЦЕНКИ АТОМНОГО ОРУЖИЯ

Дж. К. Хэйл и *Х. Х. Уик**. Сэндиа Корпорейшн, Албукерк, шт. Нью Мексико

ВВЕДЕНИЕ

Опубликованная за последнее время литература о выборе и оценке атомного оружия делает уместными в начале статьи некоторые замечания относительно использования игрового подхода и теории Ланчестера. Широко распространен метод оценки вооружения, состоящий в выборе моделей оружия и цели и в подсчете ущерба. Результаты такого детального расчета после критической обработки могут оказать помощь при оценке оружия. Однако имеются основания предполагать, что в будущих войнах обе стороны будут обладать атомным оружием и обе стороны будут вынуждены создавать средства защиты от его действия. Одним из основных способов защиты, рассматриваемым в настоящей статье, является способ расположения противостоящих друг другу войск на поле боя.

То, что расположение войск играет важную роль, можно видеть на простом примере. Если войска противника сосредоточены в пределах длинной узкой полосы близко к нашим войскам, то применение с нашей стороны атомного оружия большой мощности было бы неэффективным. Гораздо эффективнее было бы применить несколько бомб малой мощности. С другой стороны, при рассредоточенном расположении войск более эффективным будет применение оружия большой мощности (военный аспект рассредоточения войск будет рассмотрен позднее).

Эти соображения приводят к необходимости выбора

---

* J. K. Hale and H. H. Wicke. An application of game theory to special weapon evaluation. Naval Research Logistics Quarterly, 1957, vol. 4, p. 347—356.

мощности атомного оружия и боевых порядков войск. В настоящей статье рассмотрена простая ситуация, в которую входят эти элементы, для того чтобы получить хотя бы общие рекомендации по этим вопросам. Эта модель может быть уточнена во многих отношениях, но даже первое приближение дает понятие о некоторых тенденциях и указывает на необходимость дальнейших исследований вопроса.

Наиболее важно, однако, что обе стороны нуждаются в ответах на эти вопросы (и на многие другие вопросы), чтобы избежать поражения. Как нетрудно показать, применение одного типа атомного оружия и одного типа боевых порядков войск может привести к тяжелым потерям. Легко понять также, что при заданной системе оружия можно всегда применить такую тактику, которая сделает неэффективным применение этой системы оружия, если только стороны не вынуждены придерживаться одного определенного типа боевых порядков по другим соображениям, например, по условиям местности. Таким образом, следует применять по крайней мере две различные системы оружия и два различных типа боевых порядков. Для того чтобы точно установить, какой стратегии следует придерживаться, самым подходящим аппаратом, по-видимому, является непрерывная игра, в которой стратегии каждого игрока состоят из всех возможных комбинаций типов оружия и типов боевых порядков при ограничениях, накладываемых бюджетом, численностью войск, условиями местности, военными целями и т. д. Такая игра выходит далеко за пределы возможностей современной вычислительной техники. Поэтому в статье мы рассматриваем сильно упрощенный вариант этой игры.

Следует наложить некоторые ограничения на типы боевых порядков, которые могут быть использованы. Например, очень хорошим способом защиты от атомного оружия было бы рассредоточить войска так, чтобы каждый солдат находился на расстоянии 100 миль от ближайшего солдата. Очевидно, что с военной точки зрения такой метод совершенно неэффективен. Для того чтобы иметь возможность оценивать эффективность боевых порядков, использована теория Ланчестера. Основная часть статьи посвящена вопросу о применении этой теории для оценки боевых порядков.

МЕТОД

Предположим, что каждый солдат обладает определенной огневой мощью, не зависящей от численности группы. Как для обороняющейся, так и для атакующей стороны существует некоторая «основная» группа, численность которой наиболее оптимальна с тактической точки зрения. Поэтому численность групп, входящих в определенные боевые порядки, измеряется числом таких основных групп и является функцией общей численности войск и численности основной группы. Следовательно, можно задаваться потерями, наносимыми каждой такой основной группе в результате применения атомного оружия. Предположим, что у нападающей стороны имелось n основных групп и что после применения обороняющейся стороной атомного оружия в каждой нападающей группе A_i осталось n_i бойцов, каждый из которых обладает огневой мощью K *. Предположим далее, что обороняющаяся сторона состоит из m основных групп и что после применения нападающей стороной атомного оружия в каждой обороняющейся группе D_i осталось m_i бойцов, каждый из которых обладает огневой мощью L. После этого оставшиеся группы A_i и D_i вступают в бой друг с другом (характер боя зависит от расположения войск) по одной группе с каждой стороны за один раз. Ожидаемое число уничтоженных бойцов, как функция продолжительности боя, подчиняется закону уничтожения Ланчестера, т. е. если группа A_i сражается с группой D_i и если ожидаемое число остающихся бойцов в любой момент времени t равно y (для нападающей стороны) и x (для обороняющейся стороны), то

$$\frac{dy}{dt} = -Lx, \quad \frac{dx}{dt} = -Ky \tag{1}$$

при начальных условиях

$$y(0) = m_i, \quad x(0) = n_i.$$

Принимая во внимание время, в течение которого группы ведут бои, перегруппировываются и т. д., и многократно повторяя применение этого закона, можно определить победителя, или, точнее, можно определить ожидаемое

* Можно предположить, что огневая мощь каждого бойца изменяется с изменением численности групп, но мы в нашей статье полагали, что огневая мощь неизменна.

число бойцов, уцелевших на каждой стороне, как функцию времени. Если назвать «временем уничтожения» то время, в течение которого одна сторона теряет полностью своих людей, то в качестве платежа можно принять число бойцов, уцелевших у нападающей стороны, или число бойцов, уцелевших у обороняющейся стороны, по окончании времени уничтожения.

Если ожидаемое число уцелевших бойцов является неприемлемой платежной функцией, то можно использовать более общие уравнения Ланчестера для вероятности того, что в момент t у нападающей и обороняющейся сторон остается некоторое определенное число бойцов. С такими более общими уравнениями можно познакомиться в статье Дж. Р. Айсбела и У. Х. Мэрлоу «Игры на уничтожение» (см. перевод в настоящем сборнике). В нашей статье в целях иллюстрации идеи будут использованы только уравнения (1).

Расчеты, связанные с применением общего метода, описанного выше, очень сложны. Поэтому мы будем предполагать, что число бойцов, уцелевших непосредственно после боя двух групп, определяется решением уравнений Ланчестера (1) для времени уничтожения. Кроме того, предполагается, что ошибки сброса бомб равны нулю, а отношение K/L огневой мощи нападающей стороны к огневой мощи обороняющейся стороны равно единице.

Оставшаяся часть статьи посвящена рассмотрению трех примеров, иллюстрирующих применение этого метода. Хотя деление на основные группы является искусственным, тем не менее полученные результаты содержат полезную информацию.

ПРИМЕРЫ

1. Атомное оружие имеется только у обороняющейся стороны

Рассмотрим ситуацию непосредственной поддержки войск, при которой атомное оружие имеется только у обороняющейся стороны. Предположим, что оборонительные силы состоят из M человек, каждый из которых обладает огневой мощью K; все бойцы размещены в пределах прямоугольника 600×3600 ярдов *. В данной

---

* 1 *ярд*=0,914 *м*. (*Прим. перев.*)

задаче конфигурация боевых порядков обороняющейся стороны не играет никакой роли. Предположение о прямоугольной форме боевых порядков сделано потому, что эта же форма используется в других примерах. Напа-

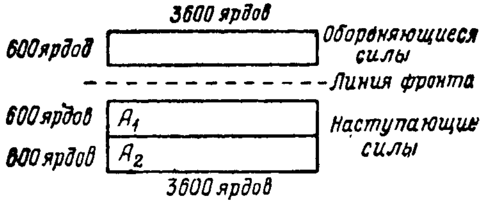


Рис. 1. Боевая ситуация, в которой у наступающей стороны имеется две группы A_1 и A_2.

дающая сторона с общим численным составом в N бойцов, каждый из которых обладает огневой мощью L, распределяет своих бойцов по основным группам, размещенным в пределах прямоугольников размером 600×3600 ярдов. Таких групп может быть несколько. Нападающая сторона всегда располагает свои основные группы так, как показано на рис. 1. Предполагается, что огневая мощь, приходящаяся на одного бойца нападающей стороны, не зависит от распределения общего числа бойцов N. Кроме того, $L/K = 1$.

Перед обороняющейся стороной стоит задача выбора типа оружия, а перед нападающей стороной — задача выбора числа основных групп W, на которое следует разбить свои силы. Для упрощения расчетов предположим, что в распоряжении обороняющейся стороны имеется четыре типа атомного оружия, характеристики которых

Таблица 1

Типы оружия, имеющиеся у обороняющейся стороны

Типы оружия	1	2	3	4
Число бомб	1	2	3	4
Радиус поражения (в ярдах)	1100	950	850	550

приведены в табл. 1, а нападающая сторона может разделить свои силы только на одну, две, три или четыре группы. Для каждого типа оружия имеется фиксированное множество точек прицеливания, выбранных на некоторой линии, параллельной линии фронта (рис. 1) и расположенной так, чтобы не поразить свои войска. Предполагая, что ошибки бомбометания равны нулю, можно легко подсчитать эффективность применения данного типа оружия против любых боевых порядков нападающей стороны. Иначе говоря, если известно, что боевой порядок состоит из k основных групп, можно подсчитать число бойцов нападающей стороны N_{ij}, оставшихся в группе A_i, $i=1, 2, ..., k$, после того, как обороняющаяся сторона применила атомное оружие типа j, $j=1, 2, ..., 4$. Значения этих величин приведены в табл. 2.

Таблица 2

Число бойцов, уцелевших в каждой группе A_i нападающей стороны после применения обороняющейся стороной атомного оружия, если нападающая сторона состоит из k основных групп и имеет общую численность N бойцов

Число групп, k	Группы	Типы атомного оружия			
		1	2	3	4
1	A_1	$0,67N$	$0,3N$	$0,348N$	$0,061N$
2	A_1	$0,33N$	$0,153N$	$0,174N$	$0,031N$
	A_2	$0,19N$	0	0	$0,197N$
3	A_1	$0,22N$	$0,091N$	$0,116N$	$0,021N$
	A_2	$0,126N$	0	0	$0,129N$
	A_3	$0,126N$	$0,031N$	$0,087N$	$0,33N$
4	A_1	$0,167N$	$0,076N$	$0,087N$	$0,015N$
	A_2	$0,095N$	0	0	$0,098N$
	A_3	$0,095N$	$0,035N$	$0,087N$	$0,25N$
	A_4	$0,167N$	$0,227N$	$0,25N$	$0,25N$

В нашем случае теория Ланчестера применяется следующим образом. Предположим, что нападающая сторона выбрала боевой порядок с двумя основными группами, а обороняющаяся сторона выбрала первый тип оружия. После взрыва у нападающей стороны остается $0,33N$ бойцов в группе A_1 и $0,19N$ бойцов в группе A_2. Далее предполагается, что первую атаку производит группа A_1, а затем атакует группа A_2, причем каждая новая атака производится против бойцов обороняющейся стороны, уцелевших после предыдущей атаки. Подобная тактика согласно теории Ланчестера всегда приводит к полному уничтожению одной группы. Количество бойцов, оставшихся по окончании всех атак, приведено в табл. 3. Отрицательные числа в таблице соответствуют уничтожению нападающей стороны. Функция $g(x) = (\operatorname{sgn} x)\sqrt{|x|}$* и $H=(M/N)^2$. Числа, приведенные в таблице, нормализованы относительно N, но это не оказывает никакого влияния на решение игры.

Таблица 3

Общая платежная матрица игры, в которой атомным оружием обладает только обороняющаяся сторона

Число групп, k	Типы атомного оружия			
	1	2	3	4
1	$g\,(0{,}445-H)$	$g\,(0{,}090-H)$	$g\,(0{,}121-H)$	$g\,(0{,}004-H)$
2	$g\,(0{,}145-H)$	$g\,(0{,}023-H)$	$g\,(0{,}030-H)$	$g\,(0{,}040-H)$
3	$g\,(0{,}070-H)$	$g\,(0{,}009-H)$	$g\,(0{,}021-H)$	$g\,(0{,}127-H)$
4	$g\,(0{,}074-H)$	$g\,(0{,}058-H)$	$g\,(0{,}078-H)$	$g\,(0{,}135-H)$

Заметим, что если $x_2 > x_1$, то $g(x_2) > g(x_1)$. Если же $x_2 > x_1 > 0$, то $g(x_2) - g(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$. Если $x_2 > 0 > x_1$, то $g(x_2) - g(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{|x_1|} > 0$. И, наконец, если $0 > x_2 > x_1$, то $|x_1| > |x_2|$ и $g(x_2) - g(x_1) = -\sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_1|} > 0$. На основании этого легко видеть, что для любого значения H все элементы второго столбца меньше соответствующих элементов первого и третьего столбцов. Поэтому обороняющаяся сторона никогда не будет применять оружие первого и третьего типа, и игра сводится к игре с платежной матрицей, приведенной в виде табл. 4.

Проводя аналогичные рассуждения, можно видеть, что элементы четвертой строки новой матрицы больше соответствующих элементов второй и третьей строки для любого значения H. Поэтому нападающая сторона никогда не будет разделять свои силы на две и три основных группы. Платежная матрица окончательной игры дана в табл. 5.

---

* sgn x обозначает алгебраический знак x.

Таблица 4

Платежная матрица игры, эквивалентной начальной игре

Число групп, k	Типы атомного оружия	
	2	4
1	g (0,090—H)	g (0,004—H)
2	g (0,023—H)	g (0,040—H)
3	g (0,009—H)	g (0,127—H)
4	g (0,058—H)	g (0,135—H)

Таблица 5

Платежная матрица окончательной игры

Число групп, k	Типы атомного оружия	
	2	4
1	g (0,090—H)	g (0,004—H)
4	g (0,058—H)	g (0,135—H)

Для любого значения H оптимальная стратегия нападающей стороны состоит в том, что она с некоторой вероятностью разделяет свои силы на четыре группы и с некоторой вероятностью вообще не делит свои силы. Оптимальная же стратегия обороняющейся стороны состоит в применении оружия второго и четвертого типов с некоторыми вероятностями. На рис. 2 показаны эти оптимальные стратегии, а также цена игры в зависимости от $(M/N)^2$.

Некоторые точки на этих графиках представляют особый интерес. Например, точка, в которой цена игры становится равной нулю, может быть использована для определения эффективности атомного оружия, выраженной с помощью числа пораженных бойцов. Иначе говоря, если обороняющаяся сторона обладает атомным оружием, а нападающая сторона нет, тогда обороняющейся стороне достаточно иметь численность бойцов, равную 0,28 численности бойцов нападающей стороны, чтобы уравновесить силы наступающей стороны.

Можно сказать еще по-другому: если у обеих сторон вначале имелись одинаковые силы, например по 1000 бойцов, то у обороняющейся стороны останется 950 бойцов, а у нападающей стороны не уцелеет никто.

2. Атомное оружие имеется у обеих сторон

В этом примере условия боя остаются теми же, что в примере 1, за исключением того, что силы обороняющейся стороны теперь также могут разбиваться на группы. Кроме того, предполагается, что обороняющаяся

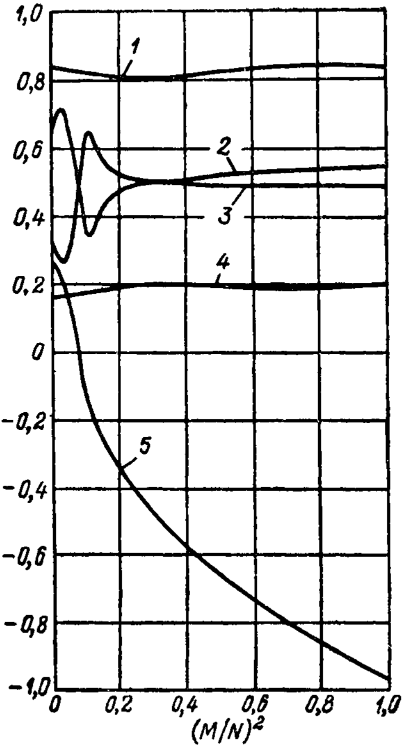


Рис. 2. Кривые зависимости решения игры, в которой атомным оружием обладает только обороняющаяся сторона, от отношения $(M/N)^2$:

1 — вероятность использования обороняющейся стороной второго типа оружия; *2* — вероятность того, что наступающая сторона разделит свои войска на четыре группы; *3* — вероятность того, что наступающая сторона не будет делить свои войска на группы; *4* — вероятность использования обороняющейся стороной четвертого типа оружия; *5* — цена игры, в которой только обороняющаяся сторона обладает атомным оружием.

сторона лучше защищена от атомного оружия. Поэтому радиусы поражения оружия наступающей стороны взяты меньше, чем для обороняющейся стороны. В табл. 6

Таблица 6

Типы атомного оружия, имеющиеся у нападающей и обороняющейся сторон

	Типы оружия нападающей стороны		Типы оружия обороняющейся стороны	
	1	2	1	2
Количество атомного оружия	2	4	2	4
Радиус зоны поражения (в ярдах)	720	400	950	550

приведены характеристики оружия, имеющегося у обеих сторон. Обе стороны могут либо разбить свои силы на четыре основные группы, либо не разбивать их.

Если использовать метод, описанный в примере 1 и обозначить через (i, j) стратегию, состоящую из выбора j-го типа оружия и боевого порядка, состоящего из i групп, то можно вычислить платежную матрицу, приведенную в виде табл. 7.

Применяя те же рассуждения, что и в примере 1, можно видеть, что для любого значения H обороняющаяся сторона всегда будет предпочитать стратегию (1,1) стратегии (4,1) и стратегию (1,2) стратегии (4,2). Поэтому такая игра 4×4 равноценна игре 4×2 со стратегиями обороняющейся стороны (1,1) и (1,2). Кроме того, в этой новой игре наступающая сторона будет

Таблица 7

Общая платежная матрица игры, в которой обе стороны обладают атомным оружием

Стратегии нападающей стороны	Стратегии обороняющейся стороны			
	(1,1)	(1,2)	(4,1)	(4,2)
(1,1)	$g\,(0{,}090-0{,}620H)$	$g\,(0{,}004-0{,}620H)$	$g\,(0{,}090-0{,}101H)$	$g\,(0{,}004-0{,}101H)$
(1,2)	$g\,(0{,}090-0{,}204H)$	$g\,(0{,}004-0{,}204H)$	$g\,(0{,}090-0{,}163H)$	$g\,(0{,}004-0{,}163H)$
(4,1)	$g\,(0{,}056-0{,}620H)$	$g\,(0{,}135-0{,}620H)$	$g\,(0{,}056-0{,}101H)$	$g\,(0{,}135-0{,}101H)$
(4,2)	$g\,(0{,}056-0{,}204H)$	$g\,(0{,}135-0{,}204H)$	$g\,(0{,}056-0{,}163H)$	$g\,(0{,}135-0{,}163H)$

всегда предпочитать стратегию (1,2) стратегии (1,1) и стратегию (4,2) стратегии (4,1). Платежная матрица окончательной игры приведена в виде табл. 8.

Таблица 8

Общая платежная матрица игры, эквивалентной игре, в которой обе стороны обладают атомным оружием

Стратегии нападающей стороны	Стратегии обороняющейся стороны	
	(1,1)	(1,2)
(1,2)	$g\ (0{,}090-0{,}204H)$	$g\ (0{,}004-0{,}204H)$
(4,2)	$g\ (0{,}056-0{,}204H)$	$g\ (0{,}135-0{,}204H)$

Из табл. 8 видно, что для любого значения H оптимальная стратегия нападающей стороны должна состоять в применении второго типа атомного оружия и в построении войск в виде четырех групп или одной группы с определенными вероятностями. Обороняющаяся же сторона не должна делить свои войска на группы и должна применять атомное оружие первого и второго типов с определенными вероятностями. На рис. 3 приведены графики зависимости этих оптимальных стратегий и цены игры от величины $(M/N)^2$. Обратите внимание, что в решение игры 4×4, матрица которой дана в виде табл. 7, не входят стратегии (1,1) и (4,1) для нападающей стороны и стратегии (4,1) и (4,2) для обороняющейся стороны.

Точка на рис. 3, в которой цена игры становится равной нулю, может служить мерой мощности взрыва атомной бомбы, выраженной через численный состав войск. Иначе говоря, если обе стороны обладают атомным оружием и обороняющаяся сторона подвергается атаке без предупреждения, то ей достаточно иметь 0,60 численности войск противника, чтобы уравновесить силы наступающей стороны.

Можно сказать и по-другому: если у обеих сторон вначале имелись одинаковые силы, например по 1 000 бойцов, то у обороняющейся стороны после боя останется 360 человек, в то время как у наступающей стороны не уцелеет никто.

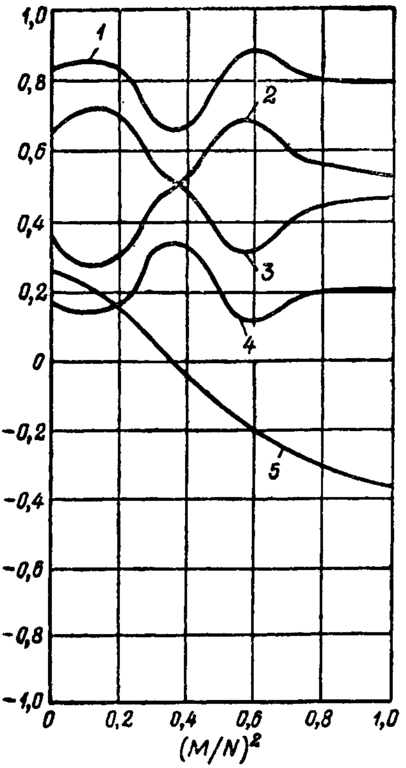


Рис. 3. Кривые зависимости решения игры, в которой обе стороны обладают атомным оружием, от отношения $(M/N)^2$:

1 — вероятность применения обороняющейся стороной стратегии (1,1); *2* — вероятность применения наступающей стороной стратегии (1,2); *3* — вероятность применения наступающей стороной стратегии (1,2); *4* — вероятность применения обороняющейся стороной стратегии (1,2); *5* — цена игры, в которой обе стороны обладают атомным оружием.

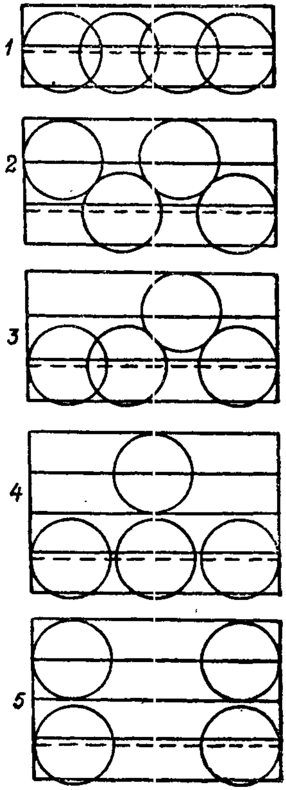


Рис. 4. Возможные программы прицеливания для обороняющейся стороны.

Прямоугольниками представлены основные группы наступающей стороны. Кругами показан эффект оружия, применяемого обороняющейся стороной. Цифрами обозначены различные ситуации. Силы обороняющейся стороны, не показанные на рисунке, расположены ниже сил наступающей стороны.

3. Оптимальный выбор точек прицеливания в случае, когда атомное оружие имеется только у обороняющейся стороны

В этом примере рассматриваются те же условия боя, что и в первом примере, за исключением того, что у обороняющейся стороны имеется лишь одна система вооружения, состоящая из четырех одинаковых атомных бомб с радиусом поражения 550 ярдов каждая. Обороняющаяся сторона может выбирать одну из пяти возможных программ прицеливания, показанных на рис. 4. Применяя метод, описанный в примере 1, получим платежную матрицу игры в виде табл. 9.

Совершенно очевидно, что нападающая сторона всегда будет предпочитать сосредоточение своих войск в одну группу, а не разделение их на две группы. Поэтому игра сводится к игре 3×5, которая получается исключением из табл. 9 второй строки.

Таблица 9

Общая платежная матрица игры, в которой обороняющаяся сторона обладает атомным оружием и имеет возможность выбирать различные программы прицеливания

Число групп, k	Программы прицеливания				
	1	2	3	4	5
1	$g\,(0{,}445-H)$	$g\,(0{,}226-H)$	$g\,(0{,}090-H)$	$g\,(0{,}075-H)$	$g\,(0{,}265-H)$
2	$g\,(0{,}145-H)$	$g\,(0{,}078-H)$	$g\,(0{,}036-H)$	$g\,(0{,}060-H)$	$g\,(0{,}158-H)$
3	$g\,(0{,}070-H)$	$g\,(0{,}065-H)$	$g\,(0{,}080-H)$	$g\,(0{,}096-H)$	$g\,(0{,}100-H)$
4	$g\,(0{,}074-H)$	$g\,(0{,}098-H)$	$g\,(0{,}108-H)$	$g\,(0{,}093-H)$	$g\,(0{,}079-H)$

Эта игра имеет решение только для одного значения H, а именно для $H=0{,}08$ Цена игры равна 0,075; нападающая сторона применяет свои стратегии *1*, *3* и *4* с вероятностями 0,24, 0,45 и 0,31, а обороняющаяся сторона применяет свои стратегии *1*, *3* и *4* с вероятностями 0,21, 0,03 и 0,76.

Интересно отметить изменения цены игры для различных сокращенных игр при $H=0{,}08$. Если, например, нападающая сторона может применять только свои стратегии *1* и *4*, то цена игры возрастет до 0,077. Если же она может применять три стратегии — первую, вторую и четвертую, — то цена игры будет 0,076.

Заметим также, что в оптимальную программу прицеливания входят не только те методы прицеливания, которые оптимальны против каждого отдельного способа расположения войск в отдельности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье представлен метод комбинированного использования классической теории сражения Ланчестера с теорией игр для выбора оптимальных стратегий в сражениях с применением атомного оружия. При использовании этого метода на примере, когда атомным оружием обладает только обороняющаяся сторона, было показано, что нападающая сторона должна либо максимально рассредоточить свои силы, либо не рассредоточивать их совсем. Обороняющаяся сторона должна использовать смешанную стратегию, состоящую в применении двух бомб средней мощности или четырех бомб малой мощности.

Если атомным оружием обладают обе стороны, то нападающая сторона должна всегда применять четыре атомных бомбы малой мощности и смешанную стратегию в отношении рассредоточения своих войск. С другой стороны, обороняющиеся войска не должны рассредоточиваться и должны применять смешанную стратегию в отношении типа атомного оружия.

В случае, когда у обороняющейся стороны имеется лишь один тип оружия и когда она стремится оптимизировать свою программу прицеливания, показано, что, оптимальная программа прицеливания включает в себя не только те программы прицеливания, которые оптимальны при действиях против каждого из возможных способов рассредоточения нападающей стороны.

Модель, рассмотренная в настоящей статье, далека от действительности. Тем не менее, авторы считают, что даже такое элементарное рассмотрение может выявить интересные тенденции. Модель можно приблизить к действительности по двум направлениям — включить в нее время боевого соприкосновения различных групп (этот вопрос был затронут в начале раздела о методе) и получить более реалистическую модель основной группы (этот вопрос также рассматривался в том же разделе).

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР К АНАЛИЗУ ТАНКОВОЙ ДУЭЛИ

Л. Э. Сашриссон *. Шведский исследовательский институт национальной обороны

Предварительная оценка характеристик проектируемого оружия может быть получена, вероятно, наилучшим образом, если заставить его принять участие в предполагаемом сражении; особенно часто приходится рассматривать дуэль между определенным типом оружия и каким-то противником. В статье описывается модель дуэли между двумя танками и решается связанная с этой моделью игровая задача. Показано, что имеются возможности еще большего обобщения модели и что используемые методы пригодны для анализа других, более общих боевых ситуаций.

ОБЩИЕ ДОПУЩЕНИЯ

Предположим, что два танка, A и B, движутся навстречу друг другу по прямой линии. Командир каждого танка может выбирать скорость своего танка от максимального до минимального значения. В интересах последующего математического анализа минимальное значение скорости должно быть больше нуля. В этом случае танки не могут отступать, так как это означало бы, что они движутся с отрицательной скоростью.

Каждый танк может находиться только в одном из двух возможных состояний: он может быть либо исправным, либо небоеспособным. Цель каждого участника дуэли состоит в том, чтобы перевести танк своего противника из первого состояния во второе. Предполагается,

* L. E. Zachrisson. A tank duel with game-theoretic implications. Naval Research Logistics Quarterly, 1957, vol. 4, p. 131—138.

что эффективность огня не зависит от скорости передвижения танков. Что касается времени стрельбы, то принято несколько нереальное допущение о том, что вероятность открытия огня в течение небольшого интервала времени dt не зависит от момента времени t, пока танк остается боеспособным. Предполагается также, что у танков имеются неограниченные запасы боеприпасов.

Вероятность повреждения танка A за время dt обозначим как $p(x)dt$, где x — расстояние между танками. Обозначим соответствующую вероятность для танка B через $q(x)dt$. Ясно, что $p(x)$ [или $q(x)$] зависит частично от собственной бронезащищенности танка A [танка B] и частично от эффективности огня и скорострельности оружия противника. В рассматриваемой здесь модели дуэли заложено предположение о том, что величины, характеризующие бронезащищенность и эффективность оружия, могут быть так скомбинированы, чтобы дать значение такой вероятности.

Танк A имеет скорость u, которая может меняться от минимального значения u' до максимального значения u''. Для танка B соответствующие величины обозначены через v, v' и v''. Когда расстояние между танками уменьшится до нуля, они не смогут разойтись, и дуэль продолжается на месте встречи до тех пор, пока не будет поражен тот или другой танк.

С математической точки зрения наиболее важными параметрами дуэли являются вероятности $S(x)$ и $T(x)$ того, что танк A или танк B, соответственно, будет поражен в конце дуэли при условии, что оба танка были невредимыми, когда между ними было расстояние x. При этом предполагается, что оба танка движутся со скоростями $u(x)$ и $v(x)$, соответственно.

Так как согласно правилам игры в конце ее должен быть поражен какой-нибудь один из двух танков, а вероятность одновременного поражения обоих танков равна нулю, то для $x \geqslant 0$ мы получаем

$$S(x) + T(x) = 1.$$

Если дуэль начинается на расстоянии $x = x_0$, то танк A будет стремиться максимизировать $T(x_0)$. Танк B, наоборот, стремится максимизировать $S(x_0)$ или, согласно только что написанному уравнению, минимизировать $T(x_0)$. Таким образом, интересы обоих танков прямо противоположны. Это приводит к ситуации, характерной для парной игры с нулевой суммой.

Поэтому с точки зрения танка A функция $T(x_0)$ является подходящей функцией распределения в смысле теории игр. Выбор стратегии в смысле теории игр означает здесь выбор скорости танка при условиях, сложившихся в рассматриваемый момент времени, т. е. при данном расстоянии x и при данной скорости вражеского танка. Таким образом, выбор стратегии для танка A сводится к определению функции f двух переменных, связывающей u с x и v.

$$u=f(x, v).$$

Для танка B, соответственно, выбор стратегии означает выбор функции

$$v=g(x, u).$$

Если решить эти два уравнения относительно u и v, то станет очевидным, что при выборе скорости танка принимается во внимание только расстояние x. Этот результат получается из интуитивных соображений, однако решение нашей проблемы таково, что ни один из участников дуэли ничего не выиграет, если будет принимать во внимание скорость вражеского танка. Определенная таким образом игра состоит из платежной функции $T(x_0)$ и стратегий $u(x)$ и $v(x)$ непрерывного, а не дискретного типа.

Эта игра является игрой с полной информацией (если не обращать внимания на то, что ни один из противников не знает, в каком состоянии находится другой противник в данный момент времени). Поэтому имеется полное основание предполагать, что игра обладает седловой точкой. Тем не менее, нельзя заранее утверждать, что это свойство сохраняется и в нашем случае, так как теорема о том, что игра с полной информацией имеет седловую точку, была доказана только для дискретных конечных игр. Мы все же докажем, что в нашей игре также имеется седловая точка, которая и определяет оптимальные стратегии.

Утверждение, что пара стратегий $\{u^*(x), v^*(x)\}$ является седловой точкой, означает, что при $\{u^*(x), v^*(x)\}$ функция T максимальна по u и минимальна по v. Иначе говоря, это означает, что если танк B придерживается своей стратегии $v^*(x)$, то танк A будет всегда в худшем, или во всяком случае не в лучшем, положении, если он откажется от соответствующей своей стратегии [так как $T(u, v^*) < T(u^*, v^*)$].

ЦЕНТРАЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Сначала следует получить дифференциальное уравнение для $T(x)$. Вероятность того, что танк B будет выведен из строя на дистанции $x+\Delta x$, если к этой дистанции оба танка пришли неповрежденными, равна $T(x+\Delta x)$. Следует отметить, что танк B может быть поврежден или в интервале между $x+\Delta x$ и x, или позже. Время, за которое дистанция между танками уменьшается на Δx, может быть получено из следующего уравнения относительно Δt:

$$\Delta x = (u+v)\,\Delta t + o(\Delta t), \tag{1}$$

где, как обычно, $o(\Delta t)$ означает величину, малую по сравнению с Δt, т. е., используя язык математики, можно сказать, что если $k = o(\Delta t)$, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{k}{\Delta t} = 0.$$

Вероятность того, что танк B будет уничтожен в течение интервала Δt, равна $q\Delta t + o(\Delta t)$, и аналогично вероятность уничтожения танка A в течение интервала Δt равна $p(\Delta t) + o(\Delta t)$. Следовательно, вероятность того, что в течение этого интервала ни один из танков не будет поврежден, равна $1-(p+q)\,\Delta t + o(\Delta t)$, так как вероятность того, что они будут повреждены одновременно, равна $o(\Delta t)$. (Сравните этот вывод с результатами, приведенными в книге W. Feller „An Introduction to Probability Theory and Its Applications“, vol. 1, p. 386—391*.) Поэтому вероятность уничтожения танка B в более позднее время равна

$$[1-(p+q)\,\Delta t + o(\Delta t)]\,T(x),$$

и, таким образом, мы получаем уравнение

$$T(x+\Delta x) = q\Delta t + o(\Delta t) + [1-(p+q)\,\Delta t + o(\Delta t)]\,T(x).$$

---

* См. русский пер. У. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее применения, гл. XVII, изд-во иностранной литературы, 1952.

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta t}=\frac{dT}{dt}=q-(p+q)T. \qquad (2)$$

С учетом уравнения (1) получим

$$\frac{dT}{dx}=\frac{p+q}{u+v}\left(\frac{q}{p+q}-T\right). \qquad (3)$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение. Аналогично можно получить второе уравнение

$$\frac{dS}{dt}=\frac{p+q}{u+v}\left(\frac{p}{p+q}-S\right). \qquad (3')$$

Именно из-за этих уравнений нам понадобилось предположить, что u и v не могут одновременно уменьшиться до нуля, так как в этом случае мы не смогли бы производить деление на $u+v$. Поэтому мы и приняли, что $u \geqslant u'>0$ и $v \geqslant v'>0$.

Складывая уравнения (3) и (3′), получим

$$\frac{d}{dx}(S+T)=\frac{p+q}{u+v}[1-(S+T)]. \qquad (3'')$$

Из этого уравнения следует, что если $S(x)+T(x)=1$ для некоторого значения x, то это уравнение удовлетворяется тождественно, так как $S+T=1$ является решением дифференциального уравнения. Тогда, очевидно, что $S(0)+T(0)=1$. Это означает, что танки не могут пройти мимо друг друга без того, чтобы один из них не был уничтожен.

Возвратимся к уравнению (3). Это — дифференциальное уравнение первого порядка, которое при предположении, что функции непрерывны, имеет одно и только одно решение, так как $u(x)$ и $v(x)$ являются функциями только от x, если значение T задано для какого-нибудь одного значения x. Теперь мы можем легко получить величину $T(0)$:

$$T(0)=\frac{q(0)}{p(0)+q(0)}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) можно получить также и следующим образом: когда x становится равным нулю, тогда T, как функция от t, является решением уравнения (2). Но так как T должна быть здесь независимой от t, то решение уравнения (2) является постоянной величиной $T(0)$.

Теперь мы попытаемся обосновать гипотезу относительно оптимальных стратегий. В дальнейшем мы приведем более строгое доказательство справедливости этой гипотезы.

Большое значение для нас имеет функция

$$R(x)=\frac{q(x)}{p(x)+q(x)}. \tag{5}$$

В соответствии с уравнением (3) нам могут встретиться следующие случаи.

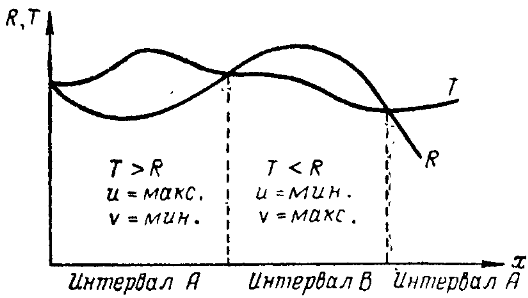
Если $T=R$, то $\frac{dT}{dx}=0$.

Если $T>R$, то $\frac{dT}{dx}<0$.

Если $T<R$, то $\frac{dT}{dx}>0$.

Так как для танка A выгоднее, чтобы $T(x_0)$ была как можно больше, то в его интересах, чтобы $\frac{dT}{dx}$ была как можно больше для любого значения x. Для танка B справедливо противоположное положение. Согласно приведенному выше делению на различные случаи, при $T>R$ мы имеем $\frac{dT}{dx}=0$, и при этих условиях танк A желает сделать $\left|\frac{dT}{dx}\right|$ как можно меньше, т. е. сделать как можно меньше выражение $\frac{p+q}{u+v}$. Чтобы добиться этого, он должен сделать u как можно больше, т. е. он должен добиться того, чтобы $u=u''$. Точно так же танк B должен сделать как можно больше $\left|\frac{dT}{dx}\right|$, что означает, что он уменьшает v до возможного предела, т. е. добивается, чтобы $v=v'$. При $T<R$ перед нами возникает диаметрально противоположная ситуация: в этом случае $\frac{dT}{dx}$ положительна, так что танк A должен сделать $\left|\frac{dT}{dx}\right|$ как можно больше, а танк B — как можно меньше. Они достигают этого, выбирая $u=u'$ и $v=v''$.

Таким образом, оптимальное управление танком A заключается в том, что на некоторых участках он движется с максимальной скоростью, а на некоторых — с минимальной. Танк B должен двигаться с минимальной скоростью, когда танк A движется с максимальной, и наоборот. Теперь возникает вопрос: при каком значении x должна произойти перемена скоростей? Это должно произойти, очевидно, при пересечении кривых T и R, так как скорости определены для $T \neq R$. Однако кривая T зависит от программы изменения скорости, которой должны придерживаться противники вплоть до расстояния $x=0$, а командир танка A, конечно, не знает



намерений противника. Единственным разумным ответом на вопрос о том, какая же кривая T должна определять момент изменения скоростей, является выбор кривой T в предположении, что оба танка до конца следуют оптимальной модели, описанной выше. Таким образом, мы пришли к следующей гипотезе, иллюстрация которой дана на рисунке. Каждый из противников имеет одну-единственную определенную оптимальную стратегию, а именно, решение уравнения (3) построено так, что $T(0)=R(0)$ и так, что u принимает свое максимальное значение, а v — свое минимальное значение для $T>R$, в то время как для $T<R$ u принимает свое минимальное значение, а v — максимальное. При этом ось x оказывается разделенной на интервалы A, в которых $T>R$, и интервалы B, в которых $T<R$. Оптимальная стратегия танка A состоит в движении с максимальной скоростью в интервалах A и с минимальной скоростью —

в интервалах B. Оптимальные стратегии танка B противоположны стратегиям танка A. Цена игры $T(x_0)$ равна ординате кривой T в точке $x = x_0$.

НОВАЯ ФОРМУЛИРОВКА ГИПОТЕЗЫ И ЕЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Сформулируем теперь нашу гипотезу в более общем виде. Дифференциальное уравнение (3), рассматривавшееся нами, является частным примером класса дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dT}{dx} = f(x, T; u, v), \tag{6}$$

где правая часть является функцией величин, заключенных в скобки. Рассмотрим для некоторого заданного дифференциального уравнения этого вида следующую игру между игроками A и B: игрок A может выбирать u как функцию от x, а игрок B может выбирать v. При этих выборах u и v и при соответствующих предположениях относительно правой части уравнения (6) это уравнение имеет единственное решение, которое принимает заданное значение $T(0) = T_0$ при $x = 0$. В частности, функция $T(x)$ точно определена для любого значения x. Игрок A должен максимизировать $T(x_0)$, а цель игрока B состоит в минимизации этой же функции.

Как легко видеть, только что приведенная формулировка означает, что игроки принимают участие в игре, «локализованной» в каждой точке (x, T), причем игрок A стремится максимизировать функцию f в правой части уравнения (6), а игрок B стремится минимизировать ее. Если правая часть, рассматриваемая как функция параметров u и v, имеет седловую точку, то эти локальные игры имеют следующее решение:

$$\max_u \min_v f(x, T; u, v) = \min_v \max_u f(x, T; u, v) = F(x, T). \tag{7}$$

В уравнении (3) действительно имеется седловая точка, а именно $u = u''$ и $v = v'$ для $T > R$ и $u = u'$ и $v = v''$ для $T < R$. Решение первоначальной игры, которая состоит из локальных игр и которую мы поэтому назовем общей игрой, получается посредством решения дифференциального уравнения

$$\frac{dT^*}{dx} = F(x, T^*) \tag{8}$$

с заранее заданным значением $T^*(0)=T_0$. Но величина $T^*(x_0)$, определяемая из уравнения (8), есть цена игры, а оптимальные значения $u(x)$ и $v(x)$, которые мы обозначим как $u^*(x)$ и $v^*(x)$, определяются из условия удовлетворения уравнению (7) в каждой точке $[x, T^*(x)]$ интегральной кривой в интервале от $x=0$ до $x=x_0$.

Главную трудность при строгом математическом анализе общей задачи представляет доказательство того, что функции $u^*(x)$ и $v^*(x)$, определенные приведенным выше способом, являются достаточно «хорошими». В действительности, если производная $R(x)$ имеет только конечное число нулевых значений на конечном отрезке оси x, то функции будут кусочно-непрерывными и даже кусочно-постоянными, и в этом случае затруднений нет.

Краеугольным камнем доказательства является приводимая ниже без доказательства лемма.

Лемма. Если $Y(x)$ есть непрерывная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{dY}{dx} \leqslant g[x, Y(x)], \tag{9}$$

то функция $y(x)$, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \tag{10}$$

при $y(0)=Y(0)$ никогда не будет меньше, чем $Y(x)$ для $x>0$. Здесь предположено, что функция $g(x, y)$ является достаточно хорошей.

Отождествим Y с T^*, y с T, а $g(x, y)$ с $f[x, T, u^*(x), v^*(x)]$, где $v(x)$ есть стратегия, которая отклоняется от стратегии, соответствующей седловой точке, т. е. $v^*(x)$; тогда

$$f(x, T;\ u^*, v^*) \leqslant f(x, T;\ u^*, v).$$

Так как производная от T^* по x равна первому члену этого неравенства при замене T на T^*, то можно применить неравенство (9), и поэтому

$$T(x_0) \geqslant T^*(x_0).$$

Это означает, что если игрок A придерживается стратегии $u^*(x)$, а игрок B использует вместо стратегии $v^*(x)$ другую стратегию $v(x)$, то результирующее значение T будет больше или во всяком случае не меньше. Иначе говоря, игрок B ухудшает для себя результат игры, отказываясь от стратегии v^*. Точно так же игрок A ухудшит результат игры для себя, если откажется от стратегии u^*. Это, однако, равноценно утверждению, что стратегии $u^*(x)$ и $v^*(x)$ являются координатами седловой точки для всей игры с результирующей ценой игры $T^*(x_0)$. Таким образом, наша гипотеза верна, и игру следует проводить так, как описано выше.

ЗАМЕЧАНИЯ

Приведем несколько дополнительных замечаний относительно рассмотренного решения:

1. Оказывается, что оптимальная стратегия в этой игре состоит в том, чтобы выбирать оптимальное поведение в каждый момент времени, т. е. чтобы интересы, преследуемые игроками на ближних и дальних дистанциях, совпадали. Следствием этого является то, что данное решение применимо не только для частного случая, когда танки начинают сближение с некоторого фиксированного значения дистанции x_0, но и для более общего случая с произвольным значением x_0.

2. Мы можем допустить, чтобы минимальные скорости u' и v' равнялись нулю. Структура T остается неизменной. Стратегия не является единственной, так как в точке пересечения кривых T и R танк, который начал двигаться с максимальной скоростью, может с таким же успехом оставаться неподвижным в течение любого времени. Это следует из уравнения (2). Здесь p и q не изменяют своего значения, когда танки находятся в движении. То же самое справедливо и для $T=\frac{q}{p+q}=R$. Ясно, что огонь с дальней дистанции обычно менее точен, чем с ближних дистанций, а решение оставаться на месте потребует большего расхода боеприпасов на дальних расстояниях, чем на ближних. Если учитывать снабжение боеприпасами, которым мы до сих пор пренебрегали, то задача сильно усложнится.

3. Кривая R зависит только от соотношения p и q, а не от их суммы. Кривая T, наоборот, зависит и от суммы. Уравнение (3) показывает, что для больших значений T и R, соответствующих ближним дистанциям, на-

клон кривой становится большим, и кривая T значительно расходится с кривой R. Это совпадает с интуитивным соображением о том, что участник игры вряд ли может заранее предполагать, как он будет вести себя на близких расстояниях, а вероятность того, что бой будет закончен на большом расстоянии, довольно велика.

ОБОБЩЕННАЯ МАРКОВСКАЯ ИГРА

Уравнение (6) является обобщением дифференциального уравнения, которое мы вывели в начале нашего анализа модели боя. Теперь можно вернуться к модели боя и обобщить ее. Можно также рассмотреть случаи, когда вероятности p и q зависят от скоростей u и v при условии, что для любого значения $0 \leqslant x \leqslant x_0$ и любого значения $0 \leqslant T \leqslant 1$ правая часть уравнения (3) имеет седловую точку в плоскости u, v. Например, если у танка B нет гироскопической стабилизации или она недостаточна, то вероятность поражения танка A становится функцией скорости танка B. В этом случае, если танк A имеет совершенную гироскопическую стабилизацию, задача имеет седловую точку и разрешима.

Другое обобщение, открывающее широкие перспективы для увеличения числа ситуаций, состоит в том, что танк может находиться иногда в промежуточных положениях, когда цена игры сильно уменьшается, но не падает до нуля. Отсюда легко перейти к рассмотрению более общих боевых ситуаций.

Предположим, что боевая ситуация между двумя противными сторонами может существовать только при конечном числе условий, которым мы дадим номера $1, 2, \dots, N$. Эти условия могут заключаться в выборе определенного боекомплекта или географического положения. Сторона A стремится довести бой до такого конечного состояния, при котором противная сторона B будет уничтожена. Сторона B имеет противоположную цель.

Если бой характеризуется условием i, то вероятность того, что он за время Δt перейдет в состояние j, равна $r_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$. Вероятность перехода r_{ij} зависит от некоторых параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (параметров λ), которыми управляет сторона A, и от других параметров μ, которыми управляет сторона B. Таким образом, задача состоит в следующем: существует ли у стороны A выбор параметров λ, а у стороны B — выбор параметров μ, которые давали бы наилучшие результаты, соответствующие их задачам в этом бою?

Можно, оказывается, составить систему дифференциальных уравнений, в которых зависимыми переменными были бы вероятности $T_i(t)$ победы стороны A, если бой в момент времени t находится в i-ом состоянии ($i=1, 2, ..., N$). Здесь r_{ij} входят в виде коэффициентов. Эта система уравнений является обобщением уравнения (3).

В конце концов, если мы будем анализировать бой по вышеописанной схеме, мы придем к рассмотрению такой модели, которую можно было бы назвать «*марковским боем*». Цепь Маркова может рассматриваться как последовательность ситуаций, характеризуемых матрицей вероятностей перехода. В марковской игре эти вероятности перехода зависят от множеств параметров, контролируемых игроками. Для того чтобы у игры была нулевая сумма, вероятность того, что игра закончится положением, не предусмотренным правилами игры, должна равняться нулю.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР К ВОЗДУШНОМУ БОЮ МЕЖДУ ИСТРЕБИТЕЛЕМ И БОМБАРДИРОВЩИКОМ

Т. Э. Кэйвуд и *С. Дж. Томас* *. Институт исследования воздушного оружия, Чикагский университет, Чикаго, шт. Иллинойс

В своей книге «Теория игр и экономное поведение» Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн указали на возможность применения теории игр к военным проблемам. Вслед за окончанием второй мировой войны различные организации, занимающиеся оценкой систем вооружения, действительно начали применять основные идеи парных игр с нулевой суммой к исследованию воздушного боя между истребителем и бомбардировщиком и развивать методы решения бесконечных игр как полезных моделей сражений этого вида.

Основой настоящей статьи является работа, проведенная ее авторами в Институте исследования воздушного оружия при Чикагском университете. Другие работы, связанные с представленным здесь материалом, указаны в библиографии.

Теория игр является хорошим аппаратом оценки перспективных или проектируемых систем вооружения. Такие оценки обычно основаны на расчетных характеристиках этих систем при типичных боевых условиях. Вычисление этих характеристик неизбежно требует указания определенных тактик, которые сравнительно легко поддаются изменениям со стороны любого из противников. Имеет смысл предположить, что оба эти противника являются «разумными» с точки зрения теории игр.

Хотя в статье рассматривается один частный тип систем вооружения, а именно система вооружения одиночного самолета, тем не менее основные идеи можно

---

* T. E. Caywood and C. J., Thomas. Applications of the game theory in fighter versus bomber combat. Operations Research, 1955, vol. 3, p. 402—411.

непосредственно применить к другим системам. Однако в целях ясности изложения мы не будем касаться этих обобщений.

Система наступательного оружия самолета-перехватчика и система оборонительного оружия бомбардировщика созданы для осуществления воздушного боя между перехватчиком и бомбардировщиком. Мы будем рассматривать воздушный бой одиночного перехватчика против одиночного бомбардировщика, оправдывая себя тем, что такой бой является составной частью более сложной воздушной операции. Для наших целей необходимо фиксировать большинство факторов такого боя. Например, мы будем считать постоянными тип, скорость, высоту и курс полета рассматриваемого самолета, свойства и характеристики его вооружения, включая боекомплект, точность системы управления огнем и полную эффективность залпа. Позднее мы будем варьировать количество бортового оружия для того, чтобы определить оптимальное значение этого количества, но сейчас мы просим читателя считать его неизменным. Даже когда значения всех этих переменных фиксированы (как это могло бы быть для уже построенного самолета), оба противника имеют в своем распоряжении выбор определенных тактик, которые могут кардинально изменять исход боя. Эти выборы касаются дистанции открытия огня и порядка изменения темпа стрельбы во время боя. Выбор такой тактики на основе теории игр позволяет обоим противникам вести огонь наиболее оптимальным образом.

Для успешного применения теории игр к подобной проблеме потребовалось предположить, что игра имеет нулевую сумму. Будущие исследования, вероятно, позволят снять это ограничение. В настоящее же время приходится предположить, что платежная функция одинакова для обоих противников и что их цели противоположны. В нашем случае в качестве такой платежной функции выбрана вероятность поражения бомбардировщика. Перехватчик желает максимизировать, а бомбардировщик — минимизировать этот платеж. Точно так же могут быть рассмотрены другие типы платежных функций, такие как вероятность поражения перехватчика или математическое ожидание времени выживания бомбардировщика. Здесь уместно указать еще на одно условие.

Предполагается, что каждый противник не в состоянии продолжать бой после того, как он поражен. Поэтому оружие бомбардировщика имеет своим назначением уничтожение перехватчика до того, как перехватчик сам собьет бомбардировщик.

Рассмотрим один пример, показывающий, почему совместное рассмотрение программ ведения огня перехватчика и бомбардировщика может иметь большое значение. Предположим, что две системы вооружения, подлежащие сравнению, одинаковы во всех отношениях, за исключением вида зависимости, связывающей вероят-

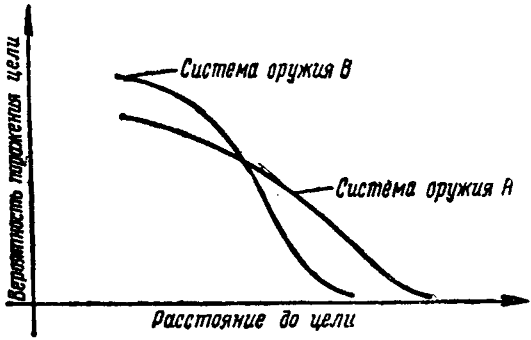


Рис. 1.

ность поражения с дистанцией ведения огня. Пусть, например, эффективность огня системы A выше на больших расстояниях и хуже на малых расстояниях, чем у системы B. Кривые вероятности поражения цели могут иметь вид, показанный на рис. 1.

Очевидно, практический выбор дистанции открытия огня для систем вооружения A и B не должен быть одинаковым. Действительно, разумный выбор должен, по-видимому, зависеть от вероятности выживания самолета, несущего данную систему. Так, если имеется малая вероятность того, что самолет останется невредимым до тех пор, пока расстояние до цели не станет достаточно малым, то система A будет лучше, чем система B. Так как эта вероятность выживания является функцией вооружения самолета-цели, а также программы ведения им огня, то совместное рассмотрение программ ведения огня обоими противниками весьма существенно.

Тактика ведения огня может легко изменяться от кампании к кампании, от боя к бою или даже в процессе боя. Худшие и неудачные тактики должны постепенно вымирать. Ведь стрелков, применяющих хорошие программы ведения огня, уцелеет больше, чем тех, которые не используют таких программ, а уцелевшие научат этим лучшим программам других. Мы считаем, что именно здесь игровая модель наиболее подходит для оценки будущих или проектируемых систем вооружения. Она особенно удобна для оценок на будущее, т. е. в таких условиях, когда разведка не может доставить информацию относительно тактики ведения огня противником. С другой стороны, использование опыта предыдущих воздушных боев, вероятно, более уместно, когда даются советы летчикам или стрелкам относительно программы ведения огня во время выполнения задания в следующий день. Кроме того, в некоторых ситуациях при попытке применить игровой подход может вызвать затруднение выбор подходящей единой платежной функции, если у противников совершенно различные цели.

При различных формулировках дуэльных боев в виде игр было использовано множество разнообразных стратегий. Из них в первую очередь будет рассмотрена дуэль с одним залпом, т. е. атака, при которой каждый самолет стреляет только один раз, например, одним управляемым снарядом или серией ракет или же самолет стреляет в действительности несколько раз, но в целях простоты все очереди искусственно собраны в один залп. При такой формулировке чистая стратегия для каждого из противников просто указывает дистанцию или время, когда он должен произвести свой залп при условии, что к тому времени он не будет сам сбит.
при условии, что к тому времени он не будет сам сбит.
Смешанная же стратегия указывает распределение вероятностей, в соответствии с которым этот момент открытия огня изменяется от дуэли к дуэли.

Игровые модели, наиболее подходящие для описания воздушного боя, являются примером так называемых «бесшумных» дуэлей. Они получили свое название из-за того, что назначенные заранее моменты открытия огня неизменны в процессе боя, как если бы ни один из игроков не слышал и не видел того, что его противник уже произвел стрельбу. Поэтому он не может воспользоваться этой дополнительной информацией для того, чтобы быстро изменить свою тактику. В «громкой» дуэли с одним залпом, наоборот, если один из участников боя слышит или видит залп, произведенный его противником, и если он не будет при этом сбит, то он может задержать свой залп до тех пор, пока не достигнет такого пункта, в котором вероятность поражения максимальна. Хотя дуэли между самолетами обычно рассматривают как бесшумные, потому что остается слишком мало времени, чтобы эффективно использовать ту информацию, которая поступает в процессе боя, следует отметить, что разница между бесшумной и громкой дуэлью постепенно стирается при переходе к изучению дуэлей с несколькими залпами.

Следующий пример простой дуэли с одним залпом может служить для иллюстрации некоторых полезных идей. Как и во всех последующих примерах нам удобнее сейчас предположить, что влияние времени полета снаряда либо пренебрежимо мало, либо оно учтено при формулировании игры, что может быть легко сделано. Шкала времени для этого примера выбрана так, что началу атаки соответствует время 0, а концу (выходу из атаки) — время 1. Чистой стратегией любого игрока будет некоторое число в пределах от 0 до 1. Платеж (вероятность поражения бомбардировщика), если перехватчик стреляет с расстояния x, а бомбардировщик с расстояния y, принят равным x для $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ и $x(1-y)$ для $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$.

Для такой модели (в которой огонь обоих противников одинаково эффективен при одинаковой дистанции открытия огня) оптимальной стратегией бомбардировщика будет открытие огня с вероятностью, равной $0{,}414/y^3$ для $y \geqslant 0{,}414$ и равной нулю в противном случае. Оптимальной стратегией перехватчика является открытие огня с суммарной вероятностью, равной $0{,}293/x^3$ для $x \geqslant 0{,}293$ и равной нулю при меньших дистанциях, плюс вероятность ведения огня в момент времени 1, т. е. в конце атаки, равная 0,293.

Стратегия перехватчика оптимальна в том смысле, что она гарантирует ожидаемую вероятность поражения бомбардировщика, равную по меньшей мере 0,414, независимо от того, какой стратегии придерживается бомбардировщик. Стратегия же бомбардировщика оптимальна в том смысле, что при ее осуществлении вероятность поражения бомбардировщика не превышает 0,414, независимо от того, какую стратегию применяет перехватчик. Этот общий предел 0,414 и есть цена игры.

Интересно посмотреть, что получится, если использовать более простые стратегии, чем оптимальная. Наилучшей чистой стратегией для бомбардировщика является ведение огня всегда с дистанции $x=1/2$. Это гарантирует ему, что вероятность его поражения не превысит $1/2$. С другой стороны, самое большее, чего может достичь перехватчик, придерживаясь одной чистой стратегии, это обеспечить вероятность поражения бомбардировщика не менее $1/4$, что значительно меньше цены игры 0,414. В то же время, если бы перехватчик придерживался смешанной стратегии, стреляя с дистанции $x=1/2$ с вероятностью $2/3$ и с дистанции $x=1$ с вероятностью $1/3$, то было бы получено математическое ожидание цены игры, равное по меньшей мере $1/3$.

Существует обобщение вышеописанной игры, имеющее особое значение. В этом случае мы предполагаем, что эффективность огня бомбардировщика в s раз больше, чем у перехватчика. Платежная функция принимает вид

$$x \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$$

и

$$x(1-y)^s \text{ для } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1,$$

где, как и раньше, перехватчик стреляет с расстояния x, а бомбардировщик — с расстояния y. Интересно отметить, что цена игры при этом приблизительно равна $\dfrac{1}{1+\sqrt{2s}}$.

Может показаться естественным обобщение дуэли с одним залпом до дуэли с $m \times n$ залпами путем введения многомерных совместных распределений вероятностей точек открытия огня. Однако, за небольшими исключениями, эта возможность не была использована, во-первых, из-за математических трудностей и, во-вторых, потому что при этом не было ясно, как получить достаточно реалистические модели.

По мере возрастания числа залпов целесообразнее сконцентрировать внимание на скорости ведения огня. В качестве простого примера можно положить скорость огня равной нулю, за исключением интервала времени в несколько секунд, когда она принимает свое максимальное значение. Такая модель очень проста по идее, но для некоторых значений параметра оптимальные стратегии являются смешанными. Если, с другой стороны, считать скорость огня некоторой случайной функцией, то такое начальное усложнение компенсируется существованием оптимальных чистых стратегий. Были найдены достаточно простые методы определения этих оптимумов или хороших приближений к ним как для случая неограниченной скорости огня, так и для случая ограниченной скорости.

Все эти различные типы стратегий тесно связаны друг с другом, что является интересным и полезным для нас фактом. Предположим, например, что некоторая данная атака характеризуется в одном случае скоростью огня, а во втором — описывается как дуэль с одним залпом. Тогда скорость огня $v(t)$ дает при первом типе описания значения платежей, очень близкие к тем, которые получаются с помощью функций распределения вероятностей $\frac{v(t)}{N}$* при втором типе описания, где N — общее число залпов. Существует аналогичная связь между описанием атаки, при котором скорость огня равна нулю, за исключением импульсного скачка до максимального значения, и описанием, при котором скорость может быть произвольной при соблюдении ограничений по общему числу залпов и по максимальной скорости огня. Смешивание двух ступенчатых функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$ с вероятностями p_1 и p_2, рекомендуемое по первому описанию, дает результаты не на много хуже, чем при использовании второго типа описания атаки, а именно при использовании выражения

$$v(t) = p_1 v_1(t) + p_2 v_2(t).$$

Точно также легко показать приблизительную обратимость результатов для случаев ограниченной и неограниченной скорости огня.

Существование таких взаимосвязей указывает на то, что часто можно сначала решить задачу дуэли в максимально простой математической форме, а затем использовать полученные таким образом оптимальные страте-

* Под функцией распределения вероятностей здесь понимаются указания о том, с какой вероятностью должна использоваться та или иная чистая стратегия, входящая в оптимальную смешанную стратегию. (*Прим. перев.*)

гии для построения простейшей реалистической модели при незначительной потере точности. Иллюстрируем это примером, в котором у перехватчика имеется только один залп, дающий при стрельбе в момент t вероятность поражения бомбардировщика

$$\frac{t}{40} \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant 40,$$

а бомбардировщик может выстрелить 2 000 снарядов, выпускаемых равномерно при вероятности поражения перехватчика одним снарядом

$$\frac{t}{80\,000} \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant 40.$$

Оптимальной стратегией бомбардировщика является скорость огня $v(t)$, где

$$v(t) = 0 \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant 20,$$

$$v(t) = \frac{80\,000}{t^2} \text{ для } 20 \leqslant t \leqslant 40,$$

а оптимальной стратегией перехватчика является функция распределения вероятностей $q(t)$, где

$$q(t) = 0 \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant 20,$$

$$q(t) = \frac{20}{t^2} \text{ для } 20 \leqslant t \leqslant 40$$

плюс вероятность того, что огонь будет открыт при $t = 40$, т. е. в конце атаки, равная $1/2$.

Вероятность поражения бомбардировщика, получаемая при использовании этих оптимальных стратегий, равна 0,5, т. е. цене игры. Замечая, что ни одна из оптимальных стратегий не требует открытия огня раньше момента $t=20$, можно попробовать проверить, включено ли это свойство в более простые функциональные формы. Бомбардировщик, например, может выстрелить свои 2000 снарядов с постоянной скоростью 100 снарядов в секунду в интервал времени от $t=20$ до $t=40$. Перехватчик точно так же может использовать равномерное распределение вероятностей в интервале от $t=20$ до $t=40$. Максимальное значение потерь, получающихся в результате этих отклонений от оптимальных стратегий, довольно мало. Бомбардировщик при постоянной скорости огня может обеспечить себе вероятность поражения не больше 0,541, если перехватчик применяет свою лучшую контрстратегию. Аналогично, перехватчик, применяющий равномерное распределение, может быть уверен, что вероятность поражения не будет ниже 0,463 при использовании бомбардировщиком своей лучшей контрстратегии. Если же оба противника применяют стратегии равномерного распределения, то платеж становится равным 0,528. Применение перехватчиком стратегии равномерного распределения против оптимальной стратегии бомбардировщика дает платеж 0,500, а применение бомбардировщиком стратегии равномерного распределения против оптимальной стратегии перехватчика дает платеж 0,501. Эти цифры показывают, насколько сравнимы результаты стратегий, наиболее удобных на практике в реальных ситуациях, и стратегий, наиболее удобных для математического анализа.

Условия этого примера могут быть использованы также для иллюстрации зависимости вероятности поражения бомбардировщика от боекомплекта снарядов на борту бомбардировщика и от максимальной скорости огня бомбардировщика. Оптимальная стратегия для бомбардировщика требует применения скорости огня 220 снарядов в секунду. Эта скорость может быть снижена до 50 снарядов в секунду с сохранением возможности выпустить все предназначенное число снарядов, хотя многие из них должны быть при этом выпущены настолько рано, что их эффективность очень мала. Дальнейшее понижение скорости огня, однако, приводит к уменьшению общего числа выпущенных снарядов. Приведенные справа выборочные значения вероятности поражения бомбардировщика P_B в зависимости от максимальной скорости огня бомбардировщика n_B и от общего числа выпущенных бомбардировщиком снарядов N_B показывают, что она значительно сильнее зависит от N_B, чем от n_B.

n_B	N_B	P_B
200	2000	0,500
100	2000	0,508
75	2000	0,537
50	2000	0,607
40	1600	0,670
30	1200	0,741
20	800	0,819
10	400	0,905
0	0	1,000

Такая сравнительно небольшая чувствительность к максимальной скорости огня связана, по существу, с обратимостью различных формулировок игры. Вероятность P_B зависит также от N_F — числа снарядов, выпущенных перехватчиком, а также от других параметров вооружения самолетов, участвующих в дуэли. Эту зависимость можно приблизительно выразить формулой

$$P_B = \frac{E_F}{E_F + E_B},$$

в которой E_F и E_B суть величины эффективностей огня перехватчика и бомбардировщика соответственно. Функция E_F, например, зависит не только от N_F, но также и от точности огня перехватчика и от уязвимости цели, т. е. бомбардировщика.

Углубляя постепенно знание природы моделей, используемых в типовых проблемах оценки вооружения, и знакомясь более близко со взаимосвязями только что описанного типа, мы получаем возможность ввести поддающиеся анализу формулировки более общих проблем. В частности, значительный интерес вызывает вопрос о снятии ограничений, касающихся постоянства веса вооружения бомбардировщика. Например, может оказаться желательным снять какое-нибудь другое оборудование и за его счет усилить вооружение. Или же оборонительный потенциал бомбардировщика может быть повышен уменьшением вооружения за счет усиления пассивной обороны, например, за счет уменьшения уязвимости бомбардировщика или за счет применения радиолокационных помех. В такой более общей проблеме старое ограничение относительно постоянства веса вооружения W_A заменяется новым ограничением

$$W_A + W_P = W_O,$$

где W_O есть общий вес оборонительного оборудования, а W_P — вес, отведенный на создание различных форм пассивной обороны. Между прочим, следует отметить, что вес используется здесь как условная характеристика ограничений, так как в некоторых задачах может понадобиться замена или добавление новых ограничений по таким переменным, как объем оборудования и др.

Поскольку имеются большой опыт и определенные данные относительно уязвимости самолета, то естественно будет в первой работе, посвященной воздушному бою, ограничить рассмотрение мер по пассивной обороне учетом мероприятий по повышению неуязвимости самолета, таких, как установка брони, систем нейтрального газа и протектированных топливных баков. Совершенно очевидно, что увеличение веса самолета, связанное с мерами по уменьшению его уязвимости, приводит к уменьшению уязвимой площади бомбардировщика точно так же, как увеличение веса вооружения приводит к увеличению числа снарядов в боекомплекте бомбардировщика. Если при заданных системе вооружения бомбардировщика и типе атаки перехватчика вероятность поражения бомбардировщика выражена как функция его уязвимой площади и располагаемого числа снарядов, то эта вероятность может быть, в свою очередь, выражена в зависимости от веса оборудования активной обороны, т. е. от вооружения, и от веса оборудования пассивной обороны, т. е. оборудования, связанного с уменьшением уязвимости. Имея в своем распоряжении такую функцию и первоначальные ограничения по общему весу, отведенному для оборонительных мероприятий, можно определить оптимальное распределение этого заданного общего «оборонительного» веса между перечисленными двумя категориями оборонительных мероприятий.

Несмотря на кажущуюся простоту такой схематической последовательности мероприятий, ее преобразование в приемлемую аналитическую процедуру требует некоторой осторожности. В одной из начальных работ по этому вопросу получилось, например, что оптимальное распределение состоит в том, чтобы оборудование заданного веса состояло либо только из одного вооружения, либо только из оборудования, обеспечивающего неуязвимость; никаких промежуточных распределений не было. Сомнения в справедливости такого заключения привели к пересмотру модели. При этом обнаружилось, что математические затруднения состояли в комбинировании двух формул, каждая из которых выглядела совершенно правдоподобной, если ее рассматривать саму по себе. Как было найдено позже, для обеих формул имеется подходящая замена, дающая новую пару, которая уже не приводит к необоснованным крайностям при распределении веса. При дальнейшем развитии модели оба сомнительных соотношения были заменены более точными выражениями.

В настоящее время наибольший интерес представляет первая из вышеупомянутых формул, а именно формула, связывающая вероятность поражения бомбардировщика с его уязвимой площадью и с числом снарядов, выделенных для проведения боя бомбардировщиком. Подозрение о том, что реалистическое включение тактики ведения огня в такое выражение сделает его неподдающимся решению, привело к применению формулы, основанной на предположении, что каждый участник дуэли всегда стреляет в некоторой типичной точке, лежащей на линии его курса.

Непригодность такого предположения для изучения вопроса о распределении веса объясняется невозможностью отражать изменения тактики ведения огня, возникающие при изменении веса оборудования активной обороны. Были введены два улучшения; одно было получено в виде точного решения для однозалпового варианта дуэли, а другое — в виде приближенного решения для варианта с непрерывной стрельбой. Каждое из этих улучшений привело к выражению вероятности поражения бомбардировщика в виде монотонно убывающей функции от безразмерного параметра, характеризующего относительную огневую мощь. Максимизация этой функции может теперь служить основой для распределения веса оборонительного оборудования бомбардировщика. Наиболее примечательно то, что включая в модель тактику ведения огня (чего мы раньше избегали в целях простоты), мы пришли к более простым формулировкам, чем те, которые получились при первом приближении.

Параметр относительной огневой мощи s зависит от числа снарядов, которое бомбардировщик расходует при своей обороне, и уязвимой площади бомбардировщика. Для некоторых атак перехватчика зависимость вероятности поражения бомбардировщика от s в более общей модели является по существу такой же, какая была найдена раньше для модели с однозалповой дуэлью.

Для обычных типов зависимости числа снарядов в боекомплекте бомбардировщика от веса активного оборонительного оборудования и зависимости уязвимой площади бомбардировщика от веса пассивного оборонительного оборудования может быть построен график, иллюстрирующий оптимальное распределение оборонительного веса, аналогичный графику, изображенному на рис. 2.

Область выше кривой соответствует недостаточности пассивной обороны, а область ниже кривой — недостаточности активной обороны. Оптимальное распределение заданного общего оборонительного веса определяется точкой пересечения кривой с линией $W_A + W_P = W_O$.

Легко видеть, что для получения рекомендаций относительно полного распределения оборонительного веса бомбардировщика в модель должны быть включены до-

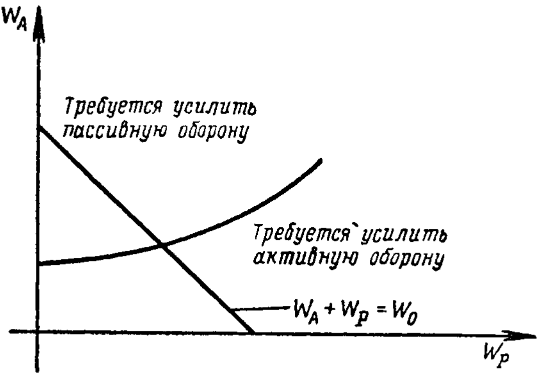


Рис. 2.

полнительные соображения, помимо рассмотренных. Многие из них приведут просто к увеличению масштаба модели, к различиям в порядках или типах. Некоторые же потребуют новых идей и более широкого применения теории игр. При рассмотрении, например, различных типов атак, которым может подвергаться бомбардировщик, важно отметить, что общая величина усилий по противодействию ограничена точно так же, как общий оборонительный вес бомбардировщика. Это приводит к рассмотрению игр по обороне бомбардировщика, в которых неопределенность относительно типа атаки противника отражена в перечислении возможных типов атак, имеющихся у перехватчика. Исследование этих игр, имеющих новый характер, обещает привести, если учесть опыт предшествующей работы, к еще более интересным применениям и проблемам.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Dresher. Games of strategy. Mathematics Magazine, 1951, vol. 93.
2. J. M. Danskin and L. Gillman. A game over function space. Rivista Mat. Univ. Parma, 1953, vol. 4, p. 83—94.

ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Х. Э. Скарф и *Л. С. Шэпли**. РЭНД-Корпорейшн,
Калифорнийский технологический институт

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье мы рассмотрим отдельный класс игр с неполной информацией. Характерной особенностью состояния информации в этих играх является то, что каждый игрок узнает о ходах своего противника с опозданием на некоторый фиксированный отрезок времени. Можно сказать, что игроки производят каждый свою последовательность выборов $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ из постоянных конечных множеств $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ в следующем порядке: $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ Состояние информации таково, что игрок *1* (или *2*), выбирая a_n (или b_n), имеет информацию о ходах противника вплоть до b_{n-k}-го (или a_{n-l}-го) хода, включая этот ход, а также обо всех своих предыдущих ходах. Необходимо, чтобы k было положительно, а l — неотрицательно. Платежом будет некоторая функция этих двух последовательностей выборов. В работе [9] доказана общая теорема о том, что для игр этого типа непрерывность платежной функции является достаточным условием существования цены игры и оптимальных стратегий для обоих игроков.

Величину $\lambda=k+l-1$ назовем *интервалом задержки* данной игры. В случае полной информации $\lambda=0$. Этот случай уже ранее привлекал к себе внимание [2, 4], и целью нашей статьи является обобщение некоторых свойств игр с полной информацией на игры с положи-

* H. E. Scarf and L. S. Shapley. Games with partial information. Contributions to the theory of games, vol. III, ed. M. Dresher, A. W. Tucker and P. Wolfe., Annales of Math. Studies, N 39, Princeton, 1957, p. 213—229.

тельными интервалами задержки. Для иллюстрации тех свойств, которые мы хотим обобщить, предположим на время, что платежная функция непрерывна. Обозначим через $V^+(a_1, \ldots, b_n)$ цену игры с полной информацией, в которой первые n ходов обоих игроков были зафиксированы в следующем порядке: $a_1, b_1, \ldots, b_n$, а платежная функция такая же, как у исходной игры. Свойство игр с полной информацией выражаться через подыгры * состоит в том, что игра, которая заканчивается после хода b_n и платежная функция которой равна $V^+(a_1, \ldots, b_n)$, имеет ту же цену, что и исходная игра, а оптимальные стратегии закончившейся игры могут быть непосредственно связаны с оптимальными стратегиями исходной игры [2].

Это утверждение относительно оптимальных стратегий станет, очевидно, более понятным, если мы вкратце опишем функциональные уравнения таких подыгр. Более подробно эти уравнения будут рассмотрены в последующих разделах статьи. Примером функциональных уравнений для игр с полной информацией являются уравнения

$$V^+(a_1, \ldots, b_n) = \max_{a_{n+1}} \min_{b_{n+1}} V^+(a_1, \ldots, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}),$$

и их связь с оптимальными стратегиями определяется тем, что если игрок *1*, будучи информирован о конкретных выборах $a_1, \ldots, b_n$, делает ход a_{n+1}, который максимизирует

$$\min_{b_{n+1}} V^+(a_1, \ldots, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}),$$

то эта стратегия и есть оптимальная стратегия. Оптимальные стратегии игрока *2* выводятся из соответствующего множества функциональных уравнений, имеющих вид

$$V^-(a_1, \ldots, b_n, a_{n+1}) = \min_{b_{n+1}} \max_{a_{n+2}} V^-(a_1, \ldots, b_{n+1}, a_{n+2}).$$

Случай, когда $k=1$, $l=1$ и $\lambda=1$, представляет так называемую «одновременную игру». В этом случае свой-

* Подыгры (subgames) — игры более низкого порядка, на которые может быть разбита сложная игра. (*Прим. перев.*)

ство разбиваться на подыгры может быть выражено функциональными уравнениями

$$V(a_1, \ldots, b_n) = \max_{p(a_{n+1})} \min_{q(b_{n+1})} \sum_{\substack{a_{n+1} \\ b_{n+1}}} p(a_{n+1})\, q(b_{n+1})\, V(a_1, \ldots, b_{n+1}) =$$

$$= \min \max \ldots,$$

где p и q суть распределения вероятностей, а $V(a_1, \ldots, b_n)$ — цена подыгры, в которой первые n ходов обоих игроков фиксированы, а далее игра проходит как одновременная игра, заканчиваясь тем же платежом. Если игрок *1*, будучи осведомленным относительно выборов $a_1, \ldots, b_n$, выбирает ход a_{n+1} с распределением вероятностей $p(a_{n+1})$, которое максимизирует

$$\min_{b_{n+1}} \sum_{a_{n+1}} p(a_{n+1})\, V(a_1, \ldots, b_{n+1}),$$

то эта совокупность распределений, называемая стратегией поведения, и есть оптимальная стратегия. То же самое можно сказать относительно игрока *2*.

Как только мы перейдем к рассмотрению случая, когда задержка больше единицы, так свойства представления игры с помощью подыгр не будет существовать. Основная причина этого состоит в том, что если мы зафиксируем начальные ходы обоих игроков и будем информировать их только относительно тех ходов противников, которые они имеют право знать, то информация, доступная одному игроку, будет все время отличаться от информации, доступной другому игроку. Мы никогда не придем к такой ситуации, которая была бы похожа на начало новой игры, и поэтому подыгр не будет.

Для того чтобы пояснить это замечание, приведем ряд диаграмм, описывающих различные типы состояния информации. Смысл диаграмм будет ясен из рассмотрения примеров. Диаграмма для случая полной информации будет

$$a_1 \to b_1 \to a_2 \to b_2 \ldots,$$

а диаграмма для игры с $k=1$, $l=1$ и $\lambda=1$ будет

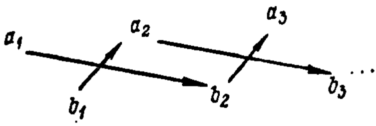
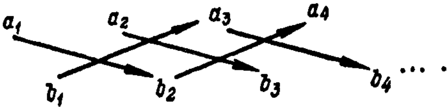


Диаграмма для $k=2$, $l=1$ и $\lambda=2$ имеет вид



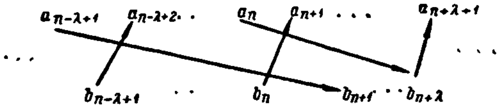
Подыгры в первой диаграмме имеют место после любой начальной последовательности ходов. Во второй диаграмме они имеют место после любой начальной последовательности ходов, которая заканчивается ходом игрока *2*. Легко видеть, что это происходит в тех точках, в которых оба игрока имеют одинаковый запас информации. На последней диаграмме отмечен тот факт, что в игре с задержкой, равной двум, нет ни одной точки, где бы у обоих игроков был одинаковый запас информации.

Как мы увидим, можно ввести совокупность игр, связанных с некоторой игрой, имеющей задержку больше единицы, которые играют роль, сходную с ролью подыгр, описанных для случаев $\lambda=0, 1$, и которые приводят к функциональным уравнениям более сложным, чем рассматривавшиеся раньше. Будет также показано, что у любой игры с задержкой информации имеются два связанные с ней функциональные уравнения, из которых можно вывести оптимальные стратегии любого игрока. Следует отметить, что эти функциональные уравнения были изучены Айзексом [5, 6], Карлиным [5, 7] и Дубинсом [3] для частной игры с задержкой, равной двум.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ПОДЫГРЫ ($k=1$, $l=\lambda>0$)

Зафиксируем некоторое значение $\lambda>0$ и рассмотрим случай $k=1$, $l=\lambda$. Ясно, что любая другая форма состояния информации с тем же значением задержки может быть преобразована в рассматриваемый случай посредством перенумерации ходов одного из игроков и добавления нескольких фиктивных ходов в начале игры. Мы сочли, однако, более удобным рассматривать раздельно различные комбинации величин (k, l) при одной и той же задержке (§ 4) и ввести отдельную группу функциональных уравнений для каждой комбинации. Это означает, конечно, что каждая такая отдельная игра будет иметь несколько типов подыгр и несколько групп функциональных уравнений. В частности, подыгры и функциональные уравнения, рассматриваемые в этом параграфе $(k=1, l=\lambda)$, могут быть применены при соответствующей перенумерации к произвольным играм с задержкой, равной λ.

Диаграмма для этого случая имеет вид

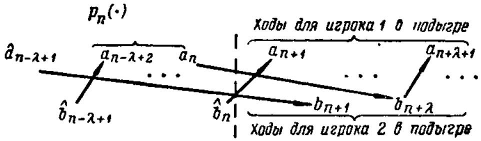


Обобщенная подыгра, которую мы собираемся ввести, будет описана совокупностью параметров, суммирующих информацию, доступную обоим игрокам в начале подыгры. Эта информация состоит из двух частей:

1. Вся информация, которая будет доступна игроку *2* после того, как он сделает n-ый ход исходной игры. Эта совокупность информации, которую мы обозначим через I_n, состоит из характеристик первых n ходов игрока *2* и первых $n-\lambda+1$ ходов игрока *1*. Как видно из диаграммы, эта информация будет к тому времени доступна и игроку *1*.

2. Совместное распределение вероятностей ходов $a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n$, которое мы обозначим через $p_n(\cdot)$.

Диаграмма для этой подыгры имеет следующий вид:



Обозначение $\hat{b}_n$ и т. д. использовано для того, чтобы показать, что эти выборы фиксированы и включены в характеристики подыгры. Подыгра протекает следующим образом:

ходы $a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n$ рандомизируются* согласно распределению $p_n(\cdot)$ и сообщаются игроку *1*, но не игроку *2*. После этого игрок *1* выбирает a_{n+1}, а затем игрок *2* выбирает b_{n+1}. Выбор $a_{n-\lambda+2}$, получаемый в результате рандомизации, объявляется игроку *2*. Выбор b_{n+1} сообщается обоим игрокам после того, как он сделан, но согласно информационным условиям выбор a_{n+1} держится в секрете от игрока *2* до тех пор, пока он не готов сделать ход $b_{n+\lambda+1}$. После этого производятся ходы a_{n+2} и b_{n+2}, соответственно, и выбор $a_{n-\lambda+3}$ объявляется игроку *2*. Эта последовательность ходов продолжается до тех пор, пока не будут объявлены все случайные ходы, после чего игра продолжается с использованием схемы состояния информации, принятой для исходной игры. Платежом по определению будет платеж исходной игры. Когда нам случится упоминать эту подыгру, мы будем обозначать ее как $G_n = G_n[I_n;\ p_n(\cdot)]$. Исходная игра будет поэтому обозначаться как G_0.

Методы, изложенные в работе [9], могут быть использованы для того, чтобы показать, что игра G_n имеет цену и оптимальные стратегии, если ее платежная функция непрерывна, а в нашем случае легко видеть, что цена является непрерывной функцией совместного распределения вероятностей, характеризующего игру. Следующий параграф статьи посвящен выводу функциональных уравнений, связанных с этими подыграми, и мы будем предполагать при этом, что платежная функция непрерывна. Позднее мы рассмотрим справедливость таких функциональных уравнений для других случаев.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ($k=1$, $l=\lambda$)

Обозначим цену игры G_n через $V[I_n;\ p_n(\cdot)]$. Определим некоторую частную стратегию игрока *1* в этой игре следующим образом. Пусть он сделает свой первый ход a_{n+1} согласно распределению вероятностей $x(a_{n+1}|a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$. (Мы обозначаем зависимость этих ходов от результатов

* Процесс рандомизации состоит в применении механизма случайного выбора (жребия) для определения применяемых чистых стратегий из числа тех, которые входят в смешанную стратегию. (*Прим. перев.*)

рандомизации обычным способом.) После того как игрок *2* сделает ход $\hat{b}_{n+1}$ и если рандомизированное значение выбора $a_{n-\lambda+2}$ обозначить через $\hat{a}_{n-\lambda+2}$, то игрок *1* обладает полностью информацией $I_{n+1}=(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-\lambda+2}, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_{n+1})$ плюс, конечно, остальные рандомизированные значения выборов a. Пусть он затем продолжает игру, осуществляя оптимальную стратегию в игре $G_{n+1}[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot|\hat{a}_{n-\lambda+2})]$, где $p_{n+1}(\cdot|\hat{a}_{n-\lambda+2})$ есть совместное распределение вероятностей выборов $a_{n-\lambda+3}, \ldots, a_{n+1}$, образуемое в результате комбинации $p_n(\cdot)$ с $x(a_{n+1}|a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$ и при условии $a_{n-\lambda+2}=\hat{a}_{n-\lambda+2}$. Посмотрим, что может получить игрок *1*, используя стратегию этого вида, если он сообщит игроку *2* в начале игры G_n, что это именно та стратегия, которую он будет использовать. В этом случае общий фонд информации после того, как оба игрока сделали свои первые ходы в игре G_n, и после того, как выбор $\hat{a}_{n-\lambda+2}$ сообщен игроку *2*, равен точно I_{n+1} и $p_{n+1}(\cdot|\hat{a}_{n-\lambda+2})$, т. е. это — общий фонд с вероятностью $p(\hat{a}_{n-\lambda+2})$, выведенной из вероятности $p_n(\cdot)$. Игроку *1*, конечно, известны также другие результаты рандомизации. При таком выборе стратегии игрока *1* он получит по меньшей мере

$$V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot|\hat{a}_{n-\lambda+2})].$$

Игрок *1* не может определить результат рандомизации для $a_{n-\lambda+2}$, так что в начале игры G_n он может гарантировать себе только математическое ожидание цены, т. е.

$$\sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2})\, V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot|\hat{a}_{n-\lambda+2})].$$

Поскольку игрок *1* не может диктовать выбор $\hat{b}_{n+1}$, он может быть уверен только в получении

$$\min_{\hat{b}_{n+1}} \sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2})\, V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot|\hat{a}_{n-\lambda+2})];$$

и, наконец, если он выбирает $x(a_{n+1} | a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$ разумно, то мы можем заключить, что

$$V[I_n;\ p_n(\cdot)] \geqslant$$
$$\geqslant \max_{x(a_{n+1} | a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)} \min_{\hat{b}_{n+1}} \sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I^{\bullet}_{n+1};$$
$$p_{n+1}(\cdot | \hat{a}_{n-\lambda+2})].$$

Следующим шагом будет замена этого неравенства равенством, и это можно осуществить с помощью следующих рассуждений. Пусть $x^*(a_{n+1} | a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$ будет начальной компонентой оптимальной стратегии поведения игрока *1* в игре G_n. Так как стратегия является оптимальной, то она может быть сообщена игроку *2* без опасности уменьшить ожидаемый платеж игроку *1*. Пусть игрок *2* выбирает $\hat{b}_{n+1}$ так, чтобы минимизировать

$$\sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ p^*_{n+1}(\cdot | \hat{a}_{n-\lambda+2})],$$

где $p^*_{n+1}(\cdot | \hat{a}_{n-\lambda+2})$ составлена из $p_n(\cdot)$ и $x^*(a_{n+1} | a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$ обычным путем. Тогда с вероятностью $p(\hat{a}_{n-\lambda+2})$ общий фонд информации, доступной обоим игрокам, равен I_{n+1}. Если теперь игрок *2* будет играть в соответствии со своей оптимальной стратегией в игре $G_{n+1}[I_{n+1};\ p^*_{n+1}(\cdot | \hat{a}_{n-\lambda+2})]$, то очевидно, что он не даст игроку *1* получить ожидаемый платеж, превышающий

$$\sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ p^*_{n+1}(\cdot | \hat{a}_{n-\lambda+2})],$$

который, согласно способу выбора b_{n+1}, равен

$$\min_{\hat{b}_{n+1}} \sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ p^*_{n+1}(\cdot | \hat{a}_{n-\lambda+2})].$$

Так как игрок *1* по предположению играет оптимальным образом, то это последнее выражение должно быть не меньше, чем $V[I_n,\ p_n(\cdot)]$, и мы, таким образом, получаем

$$V[I_n;\ p_n(\cdot)] \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x(a_{n+1} | \ldots a_n)} \min_{\hat{b}_{n+1}} \sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot | \hat{a}_{n-\lambda+2})].$$

Объединяя это выражение с приведенным ранее неравенством, мы получим искомое функциональное соотношение

Теорема 1. *Пусть G_n есть игра с задержкой (записанной как $k=1$, $l=\lambda$), имеющая непрерывную платежную функцию. Пусть $V[I_n;\ p_n(\cdot)]$ есть цена подыгры, в которой информация обоих игроков относительно прошлого равна $I_n=(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-\lambda+1}, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n$ и в которой предыдущие $(\lambda-1)$ ходов игрока 1 определяются совместным распределением вероятностей $p_n(\cdot)=p(a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$. Тогда*

$$V[I_n;\ p_n(\cdot)]=$$

$$=\max_{x(a_{n+1} \mid a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)} \min_{\hat{b}_{n+1}} \sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) \times$$

$$\times V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot \mid \hat{a}_{n-\lambda+2})],$$

где

$$p(\hat{a}_{n-\lambda+2})=\sum_{a_{n-\lambda+3}, \ldots, a_n} p(\hat{a}_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$$

и

$$p_{n+1}(\cdot \mid \hat{a}_{n-\lambda+2})=\frac{p(\hat{a}_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)\, x(a_{n+1} \mid \hat{a}_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)}{p(\hat{a}_{n-\lambda+2})}.$$

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ИГРОКА 1

В этом параграфе мы покажем, что класс оптимальных стратегий игрока *1* в игре с задержкой λ может быть выведен из функциональных уравнений, которые мы получили в предыдущем параграфе. Как и раньше, мы предполагаем, что игра представлена в форме $k=1$, $l=\lambda>0$. Оптимальные стратегии для случая $\lambda=0$ получаются с помощью процедуры, упомянутой во введении.

Первое из функциональных уравнений связывает цену игры G_0 (действительную цену самой игры) с ценой игры $G_1[I_1;\ p_1(\cdot)]$. Для $\lambda \geqslant 2$ первое уравнение будет

$$V=\max_{x(a_1)} \min_{\hat{b}_1} V[I_1;\ p_1(\cdot)],$$

причем $I_1 = \hat{b}_1$ и $p_1(\cdot) = x(a_1)$. Определим компоненты стратегии поведения игрока 1 с помощью следующего рекурсивного метода. Пусть $x(a_1)$ выбрано так, чтобы максимизировать

$$\min_{\hat{b}_1} V[I_1;\ p_1(\cdot)].$$

Назовем такое максимизирующее распределение $x^*(a_1)$. В общем случае, если известны $x^*(a_1)$, $x^*(a_2 \mid a_1;\ b_1), \ldots, x^*(a_n \mid a_1, \ldots, a_{n-1};\ b_1, \ldots, b_{n-1})$, то мы можем для каждого $I_n = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-\lambda+1},\ \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n)$ образовать совместное распределение вероятностей $p_n^*(\cdot)$, получаемое как следующее произведение $(\lambda - 1)$ множителей:

$$x^*(a_n \mid \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-\lambda+1}, \ldots, a_{n-1};\ \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_{n-1}) \ldots$$

$$\ldots x^*(a_{n-\lambda+2} \mid \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-\lambda+1};\ \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_{n-\lambda+1}).$$

Тогда $x^*(a_{n+1} \mid \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-\lambda+1}, \ldots, a_n,\ \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n)$ выбирается равным любому $x(a_{n+1} \mid a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$, которое максимизирует

$$\min_{\hat{b}_{n+1}} \sum p^*(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ p_{n+1}^*(\cdot \mid \hat{a}_{n-\lambda+2})].$$

Задавая I_n все возможные значения, мы получим компоненту полной стратегии поведения

$$x^*(a_{n+1} \mid a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n).$$

Мы хотим показать, что этот метод выбора компонент стратегии поведения для игрока 1 приводит к оптимальной стратегии. Предположим, что была выбрана именно такая последовательность. Пусть последовательность функций $V^*(I_n)$ будет равна $V(I_n;\ p_n^*(\cdot)]$. Они обладают тем свойством, что

1) $\min\limits_{b_{n+1}} \sum x^*(a_{n-\lambda+2} \mid a_1, \ldots, a_{n-\lambda+1};\ b_1, \ldots, b_{n-\lambda+1}) \times$
$\times V^*(I_{n+1}) = V^*(I_n),$

2) $\min\limits_{\hat b_1} V^*(I_1) = V$ и

3) $V^*(I_n)$ при $n \to \infty$ равномерно стремится к пределу $M(a, b)$, где M — платежная функция.

Свойство *1* является прямым следствием определений. Свойство *2* получается в результате применения первоначального функционального уравнения. Свойство *3* является непосредственным следствием непрерывности платежной функции, которая означает, что цены подыгр подходят близко к платежной функции для больших фиксированных начальных отрезков.

Предположим теперь, что стратегия (x^*) противопоставлена произвольной смешанной стратегии игрока *2*, которая представлена в форме стратегии поведения последовательностью условных распределений $y(b_{n+1} | a_1, \ldots, a_{n-\lambda+1}; b_1, \ldots, b_n)$. Эти две стратегии образуют меру в пространстве всех последовательностей выборов a и b, обладающую тем свойством, что

$$\text{Вер}(\hat a_1, \ldots, \hat a_n; \hat b_1, \ldots, \hat b_n) = x^*(\hat a_1) \ldots$$
$$\ldots x^*(\hat a_n | \hat a_1, \ldots, \hat a_{n-1}; \hat b_1, \ldots, \hat b_{n-1})\, y(\hat b_1) \ldots$$
$$\ldots y(\hat b_n | \hat a_1, \ldots, \hat a_{n-\lambda}; \hat b_1, \ldots, \hat b_{n-1}),$$

а функции $V(I_n)$ превращаются в последовательность случайных переменных. Тогда

$$\mathrm{E}[V^*(I_{n+1}) | I_n] = \mathrm{E}[V^*(I_{n+1}) | \hat a_1, \ldots, \hat a_{n-\lambda+1}, \hat b_1, \ldots, \hat b_n)] =$$
$$= \sum_{\substack{\hat a_{n-\lambda+1}, \ldots, \hat a_{n+1} \\ \hat b_{n+1}}} \frac{\text{Вер}(\hat a_1, \ldots, \hat a_{n+1}, \hat b_1, \ldots, \hat b_{n+1})}{\text{Вер}(\hat a_1, \ldots, \hat a_{n-\lambda+1}, \hat b_1, \ldots, \hat b_n)} V^*(I_{n+1}),$$

что, в свою очередь, равно

$$\sum_{\hat a_{n-\lambda+2},\ \hat b_{n+1}} x^*(\hat a_{n-\lambda+2} | \hat a_1, \ldots, \hat a_{n-\lambda+1}; \hat b_1, \ldots, \hat b_{n-\lambda+1}) \times$$
$$\times y(\hat b_{n+1} | \hat a_1, \ldots, \hat a_{n-\lambda+1}; \hat b_1, \ldots, \hat b_n) V^*(I_{n+1}),$$

потому что I_{n+1} не зависит от $\hat{a}_{n-\lambda+3}, \ldots, \hat{a}_{n+1}$. Свойство *1* указывает на то, что последнее выражение не меньше, чем $V^*(I_n)$, и, следовательно,

$$\mathrm{E}[V^*(I_{n+1}) \mid I_n] \geqslant V^*(I_n).$$

Если мы произведем интегрирование по переменным, определяющим условие, и используем свойство *2*, то получим

$$\mathrm{E}[V^*(I_{n+1})] \geqslant V,$$

а использование свойства *3* дает

$$\mathrm{E}[M] \geqslant V;$$

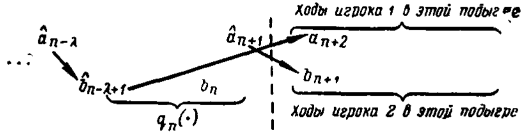
это доказывает, что наша стратегия оптимальна.

Здесь может возникнуть вопрос о том, какие оптимальные стратегии игрока *1* можно получить из функциональных уравнений по описанному выше методу. Легко придумать примеры, в которых этот метод даст не все оптимальные стратегии игрока *1*. Совершенно справедливо (но мы не будем сейчас этого доказывать), что класс стратегий, получаемых из функциональных уравнений, включает класс «наилучших» стратегий игрока *1* [8, стр. 84] (если мы не принимаем во внимание те части стратегии, которые относятся к ситуациям меры нуль).

Теорема 2. *Если компоненты стратегии поведения игрока 1 выбираются рекурсивно согласно описанному выше методу, то эта стратегия является оптимальной.*

5. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ИГРОКА 2

Для того чтобы получить оптимальные стратегии игрока *2*, необходимо игру представить в форме $k=\lambda+1$, $l=0$. Диаграмма для n-ой подыгры в этом случае будет



Игра характеризуется величинами $I_n = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n+1}, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_{n-\lambda+1})$ и $q_n(\cdot) = \text{Вер}(b_{n-\lambda+2}, \ldots, b_n)$. Мы замечаем, что первый ход в этой подыгре делает игрок *2*. Если обозначить ее цену через $V[I_n;\ q_n(\cdot)]$, то функциональное уравнение будет

$$V[I_n;\ q_n(\cdot)] =$$

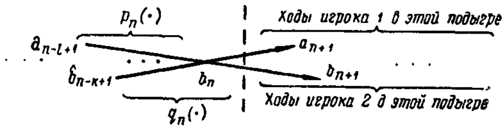
$$= \min_{y(b_{n+1} \mid b_{n-\lambda+2}, \ldots, b_n)} \max_{\hat{a}_{n+2}} \sum q(\hat{b}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ q_{n+1}(\cdot \mid \hat{b}_{n-\lambda+2})].$$

Из этого функционального уравнения можно рекурсивным способом вычислить оптимальную стратегию игрока *2*, используя тот же метод, что в § 4.

6. ОБОБЩЕННЫЕ ПОДЫГРЫ (С ДРУГИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ k И l)

В этом параграфе мы рассмотрим представление нашей игры с задержкой λ для произвольных значений k и l ($k>1$, $l>0$, $\lambda=k+l-1$). Для каждого значения величин (k, l) будет иметься два класса подыгр, в зависимости от того, какой игрок начинает игру первым. Эти случаи будут являться обобщением игр, рассмотренных в § 3, или игр, рассмотренных в § 5. Ниже мы ограничимся использованием игр, рассмотренных в § 3.

Диаграмма n-ой подыгры имеет вид



Эта подыгра характеризуется, прежде всего, информационным фондом, известным обоим игрокам после того, как игрок *2* сделал свой n-ый ход. В этом случае информация будет состоять из характеристик первых $n-l+1$ ходов игрока *1* и первых $n-k+1$ ходов игрока *2*, например, $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-l+1}, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_{n-k+1}) = I_n$. Нам дана также произвольная пара совместных распределений вероятностей $p_n(\cdot) = \text{Вер}(a_{n-l+2}, \ldots, a_n)$ и $q_n(\cdot) =$

$=$Вер$(b_{n-k+2},\dots, b_n)$. Игра обозначается как $G_n\,[I_n; p_n(\cdot); q_n(\cdot)]$ и протекает следующим образом: ходы $a_{n-l+2}, \dots, a_n$ рандомизируются в соответствии с $p_n(\cdot)$ и сообщаются игроку *1*, но не игроку *2*. Одновременно ходы $b_{n-k+2}, \dots, b_n$ рандомизируются в соответствии с $q_n(\cdot)$ и сообщаются игроку *2*, но не игроку *1*. После этого игроки поступают так, как поступали бы в исходной игре с той же самой платежной функцией $M(a, b)$. Мы по-прежнему предполагаем, что эта функция непрерывна, так что общая теорема, приведенная в работе [9], применима, и игра имеет цену, которую мы обозначим через $V[I_n; p_n(\cdot); q_n(\cdot)]$. Как и раньше, существует последовательность функциональных соотношений, имеющих форму

$$V[I_n;\ p_n(\cdot);\ q_n(\cdot)] =$$

$$= \max_{x(a_{n+1}\mid a_{n-l+2},\dots,a_n)}\ \min_{y(b_{n+1}\mid b_{n-k+2},\dots,b_n)} \times$$

$$\times \sum p(\hat{a}_{n-l+2})\, q(\hat{b}_{n-k+2})\, V \times$$

$$\times [I_{n+1}; p_{n+1}(\cdot\mid a_{n-l+2}); q_{n+1}(\cdot\mid b_{n-k+2})] = \min\max\dots$$

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в § 3, и мы не будем его повторять.

Нам хотелось бы показать основную разницу между функциональными уравнениями для этого случая и функциональными уравнениями, рассмотренными в §§ 3 и 4. Там мы показали, каким образом из этих функциональных уравнений можно рекурсивным способом определить оптимальные стратегии игрока *1*. Соответствующая процедура для данного случая будет иметь следующий вид: предположим, что $x^*(a_1), \dots, x^*(a_n \mid a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-k})$ уже определены. Тогда для любого $I_n = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-l+1}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n-k+1})$ мы должны рассмотреть игру $G_n[I_n;\ p_n(\cdot);\ q_n(\cdot)]$ с $p_n(\cdot)$, определяемым выражением

$$p_n(\cdot) = x^*(a_{n-l+2} \mid \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-l+1}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n-\lambda+1}) \dots$$

$$\dots x^*(a_n \mid \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1}, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n-k}),$$

и с некоторым $q_n(\cdot)$, которое мы оставляем на время неопределенным. Тогда $x(a_{n+1} \mid a_{n-l+2}, \ldots, a_n)$ должно выбираться так, чтобы максимизировать

$$\min_{y(b_{n+1} \mid b_{n-k+2}, \ldots, b_n)} \sum p(\hat{a}_{n-l+2}) \times$$

$$\times q(\hat{b}_{n-k+2}) V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot \mid \hat{a}_{n-l+2});\ q_{n+1}(\cdot \mid \hat{b}_{n-k+2})].$$

Совершенно ясно, что этот выбор будет зависеть от $q_n(\cdot)$, и мы будем в состоянии показать только, что выбранная нами стратегия оптимальна против некоторой частной стратегии игрока *2*.

Это означает, что для получения оптимальной стратегии игрока *1* при произвольной паре (k, l), представляющей $\lambda > 0$, мы должны преобразовать это представление в форму $k=1$, $l=\lambda$ посредством перенумерации ходов одного из игроков и добавления нескольких пустых (фиктивных) ходов в начале игры, а затем воспользоваться методом теоремы *2*. Для получения оптимальных стратегий игрока *2* мы должны произвести преобразование в форму $k=\lambda+1$, $l=0$.

ЗАМЕЧАНИЯ

При нашем анализе мы настойчиво подчеркивали, что платежная функция непрерывна. Это позволяло нам утверждать, что каждая рассматриваемая подыгра имеет как цену, так и оптимальные стратегии для обоих игроков и что существует по крайней мере один пункт в доказательстве справедливости функционального уравнения, в котором существование оптимальной стратегии специально используется. Имеются другие условия, при которых можно показать, что наши подыгры имеют цену. Например, в работе [9] показано, что если платежная функция полунепрерывна сверху (снизу), то у каждой подыгры будут иметься цена и оптимальная стратегия для игрока *1* (*2*). Возникает вопрос о справедливости функциональных уравнений, связывающих цены этих подыгр. Можно показать, что модификация рассуждений, приведенных в § 3, приводит к тому же функциональному уравнению с заменой max min на max inf (sup min).

Справедливо также, что оптимальные стратегии того игрока, который обладает ими в полунепрерывном случае, могут быть также получены с помощью функциональных уравнений. С другой стороны, по функциональным уравнениям очень мало можно сказать относительно стратегий другого игрока. Чтобы пояснить это, предположим, что платежная функция полунепрерывна снизу, так что максимизирующий игрок не обязательно должен иметь оптимальную стратегию. Будем рекурсивно назначать стратегии игрока *1* посредством выбора $x(a_{n+1} \mid a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)$, обеспечивающего точность $\frac{\varepsilon}{2^n}$ в

$$\min_{\hat{b}_{n+1}} \sum p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot \mid \hat{a}_{n-\lambda+2})],$$

и, как прежде, определим $V^*(I_n) = V[I_n;\ \overset{*}{p}_n(\cdot)]$. Тогда справедливо, что против любой стратегии игрока *2* мы имеем $\mathrm{E}[V^*(I_{n+1}) \mid I_n] \geqslant V^*(I_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$, и поэтому $\mathrm{E}[V^*(I_n)] \geqslant \geqslant V - \varepsilon$. Но полунепрерывность снизу ослабляет свойство *3*, приведенное в § 4, приводя его к виду

$$3')\quad \overline{\lim_{a,b \to \hat{a},\hat{b}}} M(\hat{a}, \hat{b}) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} V^*(I_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} V^*(I_n) \geqslant M(\hat{a}, \hat{b}).$$

В результате мы можем сделать заключение, что

$$\mathrm{E}\ [\lim_{a,b \to \hat{a},\hat{b}} M(a, b)] \geqslant V - \varepsilon,$$

а не

$$\mathrm{E}[M(\hat{a}, \hat{b})] \geqslant V - \varepsilon.$$

Даже не вводя условия полунепрерывности платежной функции, имеет смысл говорить о функциональных уравнениях. Если не накладывать никаких условий на платежную функцию и если можно найти такое решение функциональных уравнений

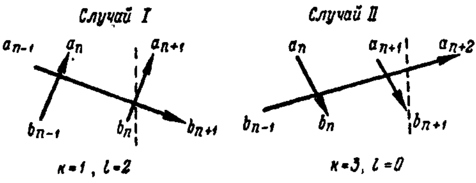
$$V[I_n;\ p_n(\cdot)] =$$

$$= \max_{x(a_{n+1} \mid a_{n-\lambda+2}, \ldots, a_n)} \min_{\hat{b}_{n+1}} \Sigma p(\hat{a}_{n-\lambda+2}) V[I_{n+1};\ p_{n+1}(\cdot \mid \hat{a}_{n-\lambda+2})],$$

которое обладало бы свойством $V[I_n;\ p_n(\cdot)] \to M(\hat{a},\ \hat{b})$, то стратегия игрока *1*, полученная рекурсивно из этих уравнений, будет гарантировать ему получение по крайней мере $V[I_0]$ против любой стратегии игрока *2*.

ПРИМЕР

Полезно показать, что вышеописанная методика может быть применена к известной игре «бомбардировщик против военного корабля», чтобы получить функциональные уравнения (см. работы [3, 5, 6 и 7]). Мы сделаем это двумя способами в соответствии с двумя схемами:



(a_1 и a_2 — фиктивные ходы)

Выборы b_i равны или 0, или 1. Выборы a_i будут равны 0, 1, 2 или θ (пропуск). Первый выбор $a_n \neq \theta$ интерпретируется как предсказание того, что

$$b_n + b_{n+1} = a_n \qquad \text{или} \qquad b_{n-2} + b_{n-1} = a_n$$

(в случае I) (в случае II).

Игрок, делающий выборы a, получает платеж, равный 1, за правильное предсказание и 0 — за неправильное предсказание или за отсутствие предсказания. Этот платеж полунепрерывен снизу. Поэтому оптимальные стратегии обеспечены только игроку, делающему выборы b. Такой вывод совпадает с выводами работы Блекуэла [1].

В случае I мы замечаем, что обобщенная подыгра $G_n[I_n;\ p_n(\cdot)]$ тривиальна, если в I_n любой выбор $a_i \neq \theta$. С другой стороны, $G_n[I_n;\ p_n(\cdot)]$ и $G_m[I'_m;\ p_m(\cdot)]$ совершенно изоморфны при условии, что $p_n = p_m$, $b_n = b'_m$ и что все выборы a_i, a'_i принадлежат к виду θ (т. е. что более ранние выборы b_i, b_i' не играют никакой роли). Следовательно, можно написать

$$V_n[I_n;\ p_n] = f_\nu(x_0,\ x_1,\ x_2),\ \text{если}\ n \geqslant 1,$$

где $\nu = b_n$ и $x_\alpha = p_n(\alpha)$. Кроме того, вследствие симметрии $f_0(x_0,\ x_1\ x_2) = f_1(x_2,\ x_1,\ x_0)$. Следовательно, функциональные уравнения теоремы I при $n \geqslant 1$ сводятся к одному уравнению

$$f_0(x,\ y,\ z) = \max_{u,v,w} \min \begin{cases} tf_0(u,\ v,\ w) + x \\ tf_0(w,\ v,\ u) + y, \end{cases} \tag{1}$$

где $t = 1 - x - y - z$, а u, v, w должны быть неотрицательными, и их сумма должна быть меньше или равна единице. Первое уравнение для цены игры при $n = 0$ имеет вид

$$V = V_0 = \max_{x,y,z} \min \begin{cases} f_0(x,\ y,\ z) \\ f_0(z,\ y,\ x). \end{cases}$$

Уравнение (1) совпадает с уравнением (34) в статье Айзекса [6], лежащим в основе его анализа ε-оптимальных стратегий для игрока, делающего выборы a. Единственной «идеальной» (локально оптимальной) стратегией будет $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ (т. е. никогда не предсказывать), что явно неоптимально.

В случае II игра $G_n[I_n;\ q_n(\cdot)]$ снова тривиальна, если любой выбор $a_i \neq \theta$ в I_n, в то время как другие игры совершенно независимы от *всех* b_i в I_n. Таким образом, мы имеем

$$V_n[I_n;\ q_n(\cdot)] = g(x),\ \text{если}\ n \geqslant 1,$$

где $x = q_n(0)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Вследствие симметрии $g(x) = g(1 - x)$. Поэтому функциональные уравнения, приведенные в § 5, сводятся к

$$g(x) = \min_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} \max \begin{cases} xu & \{0\} \\ x(1-u) + (1-x)v & \{1\} \\ (1-x)(1-v) & \{2\} \\ xg(u) + (1-x)g(v) & \{\theta\} \end{cases} \tag{2}$$

при $V = V_0 = \min\limits_x g(x)$.

Здесь нет никакого максимума, так как a_2 есть в этом случае автоматический пропуск. Это функциональное уравнение подверглось исчерпывающему изучению. Из него следует, что для {3} можно выбрать минимизирующее значение x^*, обладающее тем свойством, что если мы положим в {2} $x = x^*$, то минимум достигается при $u = x^*$, $v = 1 - x^*$. Это чрезвычайно облегчает описание оптимальной стратегии игрока, делающего выборы b. Он должен всегда выбирать $b_{n+1} = b_n$ с вероятностью x^* и $b_{n+1} = 1 - b_n$ с вероятностью $1 - x^*$. Имеются основания предполагать, что в других аналогичных случаях такого явления не будет, например, в варианте данного примера при $\lambda = 3$; однако теория этого вопроса еще не ясна.

ЛИТЕРАТУРА

1. David Blackwell. The prediction of sequences, The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1570, October 12, 1955.
2. Norman Dalkey. Equivalence of information patterns and essentially determinate games. Annals of Mathematics Study № 28, Princeton, 1953, p. 217—243.
3. L. E. Dubins. A discrete evasion game. Contributions to the theory of games, vol. III, Annals of Math. Studies № 39, Princeton, 1957, p. 231—255.
   Л. Э. Дубинс. Дискретная игра на уклонение от преследования (см. настоящий сборник).
4. David Gale and F. M. Stewart. Infinite games with perfect information. Annals of Math. Studies № 28, Princeton, 1953, p. 245—266.
5. Rufus Isaacs and Samuel Karlin. A game of aiming and evasion. The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1316, August 6, 1954.
6. Rufus Isaacs. The problem of aiming and evasion. Naval Research Logistics Quarterly, 1955, vol. 2, p. 47—67.
7. Samuel Karlin. An infinite move game with a lag. Contributions to the theory of games, vol. III, Annals of Math. Studies № 39, Princeton, 1957, p. 257—272.
   С. Карлин. Бесконечноходовая игра с запаздыванием (см. настоящий сборник).
8. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. ГИФМЛ, М, 1960.
9. Herbert Scarf and L. S. Shapley. Games with information lag. The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1320, August 10, 1954.

ДИСКРЕТНАЯ ИГРА НА УКЛОНЕНИЕ ОТ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

*Л. Э. Дубинс**. Технологический институт Карнеги

Имеется группа факторов, играющих важную роль при определении эффективности систем вооружения, относительно которой мы обладаем недостаточными знаниями. Эти факторы связаны с такими понятиями как *тактика, боевой порядок, преследование, уклонение от преследования, маневрирование* и *поиск*. В этой области работали многие исследователи. Во время второй мировой войны и в первые послевоенные годы основные усилия математиков были направлены на решение классических задач воздушного перехвата и поиска морских целей. По большей части такие задачи были «односторонними»: при заданном поведении противника требовалось найти способ оптимизации результата своих собственных действий. Однако с развитием теории парных игр с нулевой суммой началось исследование возможностей перехода к более реалистическим «двусторонним» задачам, в которых каждый из участников может выбирать свои действия из нетривиального класса возможных стратегий. Первыми работами в этой области, по-видимому, являются статьи [1 и 2].

Даже игры на преследование, в которых на каждом этапе каждый игрок обладает полной информацией о предыдущих действиях своего противника, в общем случае оказываются очень сложными. Поэтому для приобретения некоторых знаний относительно таких игр желательно рассматривать относительно простые ситуации. Вследствие большой сложности игр на преследование с неполной информацией еще важнее найти нетри-

---

* L. E. Dubins. A discrete evasion game. Contributions to the theory of games, vol. III, 1957, p. 231—255.

виальные примеры этого типа, которые были бы одновременно относительно свободными от усложняющих факторов. Задачей такого общего характера является интересная проблема о корабле, маневрирующем так, чтобы минимизировать вероятность его поражения бомбардировщиком, летящим над ним, сформулированная Руфусом П. Айзексом из РЭНД-Корпорейшн и представленная им на конференции Американского общества по исследованию операций 16 мая 1953 г.

Проблема идеализирована, так как предполагается, что корабль представляет собой точку на плоскости. Предположено также, что у бомбардировщика имеется только одна бомба и что ошибок прицеливания и балли-

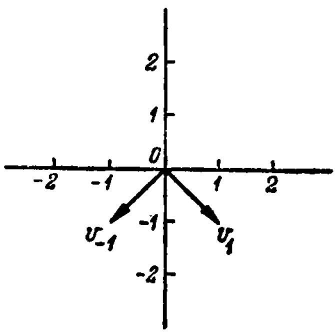


Рис. 1.

стических ошибок не существует; иначе говоря, бомбардировщик может поразить бомбой любую точку на плоскости, какую он пожелает. Живучесть корабля также не принимается во внимание. Следовательно, можно считать, что попадание в корабль эквивалентно его уничтожению. Затруднение для бомбардировщика сформулировано в виде предположения, что бомба достигает плоскости, в которой находится корабль, через две единицы времени после сброса. Далее предполагается, что преследуемая сторона может за одну единицу времени переместиться на одну единицу расстояния либо в юго-восточном, либо в юго-западном направлении и что она не должна оставаться на месте. В нулевой момент преследуемый находится в начале координат.

Пусть v_{-1} будет вектором $(-1, -1)$, а v_{+1} — вектором $(+1, -1)$, как показано на рис. 1. В момент t_1 преследуемый будет либо в точке v_{-1}, либо в точке v_{+1}. Далее, если в момент t_k он находится в некоторой точке x, то в момент t_{k+1} он будет находиться либо в точке $x+v_{-1}$, либо в точке $x+v_{+1}$. Отсюда следует, что если в момент t_k преследуемый находится в точке x, то в момент t_{k+2} он будет в одной из следующих трех точек (рис. 2):

$$w_1 = x + 2v_{-1},$$

или

$$w_2 = x + v_{-1} + v_{+1},$$

или

$$w_3 = x + 2v_{+1}.$$

Далее предположено, что бомбардировщик может сбросить свою бомбу только в момент t_k, где k есть неотрицательное целое число. Предполагается, что в момент t_k как бомбардировщик, так и преследуемый знают путь, пройденный преследуемым до сих пор. Иначе говоря, в момент t_k обе стороны знают положение, в котором преследуемый находился в моменты t_0, t_1, ..., t_k.

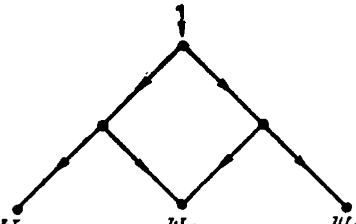


Рис. 2.

Теперь ясно, что если бомбардировщик должен сбросить бомбу в момент t_k, то вследствие того, что бомба коснется плоскости корабля только в момент t_{k+2}, он должен сбрасывать ее так, чтобы она попала в одну из трех точек w_1, w_2 или w_3. Об этих точках мы будем говорить как о лежащих относительно положения преследуемого в момент t_k *влево на два шага, впереди и вправо на два шага*. Несколько неожиданным, но истинным является тот факт, что бомбардировщик может поразить корабль с вероятностью более одной трети. Если бы бомбардировщик должен был сбросить бомбу обязательно в нулевой момент или в момент t_1, то корабль смог бы сманеврировать так, что вероятность его выживания была бы $^2/_3$. Если, однако, на бомбардировщик не наложено такого ограничения, то он может обеспечить вероятность поражения корабля более одной трети. Теперь мы перейдем к более подробному анализу.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИГРЫ

Для наших целей удобно описать игру с помощью двух множеств S_1 и S_2, называемых множествами стратегий, и действительной функции $F(\ldots, \ldots)$, определенной на множестве $S_1 \times S_2$. Действительное число $F(s_1, s_2)$ будет называться ожидаемым платежом второму игроку, если первый игрок выберет стратегию s_1, а второй — стратегию s_2. Говорят, что игра имеет цену α, если для любого значения $\varepsilon > 0$ существуют стратегии $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$, такие, что $F(t, s_2) \geqslant \alpha - \varepsilon$ для всех t в S_1, и такие, что $F(s_1, t) \leqslant \alpha + \varepsilon$ для всех t в S_2. Легко показать, что игра имеет самое большее одну цену. Когда игра имеет цену α, то говорят, что стратегия $s_1 \in S_1$ является оптимальной стратегией для первого игрока, если для любой стратегии $s_2 \in S_2$ справедливо неравенство $F(s_1, s_2) \leqslant \alpha$. Оптимальная стратегия для второго игрока может быть определена аналогично. Легко, конечно, привести пример игры, не имеющей цены, или игры, у которой есть цена, но в которой ни у одного игрока нет оптимальных стратегий, или игры, имеющей цену, но в которой только один игрок имеет оптимальную стратегию.

Определим теперь два особых множества S_1 и S_2; но прежде необходимо дать определение пути. Множество P путей состоит из всех конечных последовательностей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_i = R$ или $\alpha_i = L$ для любого i, за исключением нулевой последовательности. Тогда стратегия $s_1 \in S_1$ есть функция от P в замкнутом интервале $[0, 1]$, где $s_1(p)$ соответствует вероятности, с которой первый игрок (преследуемый) перемещается вправо после прохождения пути p. Стратегия $s_2 \in S_2$ есть функция от P на подмножестве $W\{[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]\}$, определенном элементами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in W$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant 1$, где α_1, α_2 и α_3 соответствуют условным вероятностям, с которыми второй игрок (бомбардировщик) сбрасывает бомбу на два шага влево, вперед или на два шага вправо от точки, где преследуемый завершил свой путь p. При этом предполагается, что преследуемый прошел путь p, а преследователь до этого не сбросил свою бомбу.

Определим теперь бесконечную последовательность игр G_n для $n \geqslant 2$, где каждая игра имеет S_1 и S_2 в качестве множеств стратегий и где G_n соответствует такой ситуации, в которой бомбардировщик должен сбросить свою бомбу до того, как преследуемый сделает свой $(n-1)$-ый ход. Для этого мы устанавливаем, что при любом $n \geqslant 2$ функция ожидаемого платежа $F_n(s_1, s_2)$ есть сумма произведений вероятности того, что преследуемый выберет этот путь при известной s_1, на вероятность того, что он будет поражен в тот момент, когда он достигнет конца этого пути при известной s_2; суммирование ведется по всем путям $p=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ длиной n. Таким образом, множества стратегий S_1 и S_2 и функция ожидаемого платежа $F_n(s_1, s_2)$ определяют игру G_n.

Дадим теперь определение бесконечной игры G, которая интересует нас в этой статье прежде всего. Для любой последовательности s_i стратегий множества S_1 и любой $s \in S_1$, мы говорим, что s_i сходится к s тогда и только тогда, когда $s_i(p)$ для любого пути p сходится к $s(p)$. Это, конечно, обычная слабая сходимость. Множество S_1 есть топологическое пространство в этой топологии. Тогда легко видеть, что для любого $s_2 \in S_2$ и любого значения n функция $F_n(s_1, s_2)$ непрерывна по s_1. Легко видеть также, что для любых $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$ функция $F_n(s_1, s_2)$ есть монотонная неубывающая функция от n, ограниченная сверху значением 1. Таким образом, $F_n(s_1, s_2)$ имеет предел, который мы назовем $F(s_1, s_2)$. Игру со стратегиями S_1 и S_2 и функцией $F(s_1, s_2)$ мы обозначим через G. Обычная теория конечных игр говорит, что любая игра G_n имеет цену игры φ_n, и легко видеть, что φ_n есть монотонная неубывающая функция, ограниченная сверху значением 1. Пусть φ будет пределом функции φ_n, который должен существовать.

Любая игра G_n не только имеет цену, но в ней игроки *1* и *2* обладают оптимальными стратегиями. В частности, при любом значении n $\exists\, s_n \in S_1$, такая, что $F_n(s_n, t) \leqslant \varphi_n$ для всех $t \in S_2$*. Из теоремы Тихонова следует, что $\exists$ подпоследовательность множества s_n, которая сходится к $s \in S_1$. Пусть s_{m_k} будет подпоследовательностью s_n, которая сходится к s. Тогда для всех $t \in S_2$ и для $m_k \geqslant n$ получим

$$F_n(s_{m_k}, t) \leqslant F_{m_k}(s_{m_k}, t) \leqslant \varphi_{m_k} \leqslant \varphi,$$

а также

$$\lim_{m_k \to \infty} F_n(s_{m_k}, t) = F_n(s, t).$$

Поэтому

$$F_n(s, t) \leqslant \varphi.$$

Вычисляя предел этого последнего уравнения при $n \to \infty$, мы получим $F(s, t) \leqslant \varphi$ для всех $t \in S_2$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, при котором $|\varphi - \varphi_n| < \varepsilon/2$. Теперь выберем $v \in S_2$ так, чтобы для любых $u \in S_1$ выполнялось условие $F_n(u, v) \geqslant \varphi_n - \varepsilon/2$, что может быть сделано, так как G_n имеет цену φ_n. Это означает, что $F(u, v) \geqslant F_n(u, v) \geqslant \varphi_n - \varepsilon/2 \geqslant \varphi - \varepsilon$ для всех $u \in S_1$. Таким образом, игра G имеет цену φ, а s есть оптимальная стратегия для игрока *1* (преследуемого), которая существует согласно нашему доказательству. Так как $\varphi_2 = 1/3$ и $\varphi_2 \leqslant \varphi$, то $1/3 \leqslant \varphi$. Нетрудно видеть, что $\varphi < 1/2$. В следующем разделе мы покажем, что $\varphi = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

2. ЦЕНА ИГРЫ И ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ДЛЯ ПРЕСЛЕДУЕМОГО

В этом разделе мы покажем, что цена игры G равна $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$, и определим все оптимальные стратегии преследуемого.

Мы будем называть стратегию s преследуемого особой стратегией, если при любом пути $p \in P$ условные вероятности того, что преследуемый в дальнейшем переместится

---

* Символ $\exists\, x$ означает: «существует x, такое, что ...» (*Прим. ред.*)

на два шага влево или на два шага вправо, равны каждая φ или меньше, а их сумма больше или равна $1-\varphi$.

Если выразить это несколько более формально, то s есть особая стратегия, если для любого пути p, где $p=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, справедливы следующие три неравенства:

$$\left.\begin{aligned} & s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, R) \leqslant \varphi; \\ & [1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]\,[1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, L)] \leqslant \varphi; \\ & 1-[s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]\,[s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, R)]- \\ & -[1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]\,[1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, L] \leqslant \varphi. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{A})$$

Непосредственная проверка показывает, что каждая особая стратегия преследуемого является оптимальной стратегией. Теперь мы покажем, что каждая оптимальная стратегия является особой. Предположим обратное, т. е. что имеется какая-то оптимальная стратегия, которая не является особой, и пусть n есть наименьшее целое число, для которого существует такой путь $p=(\alpha_1, \ldots, a_n)$ длиной n, который не обладает свойствами, определенными неравенствами (А).

Так как цена игры $\varphi<{}^1\!/_2$ и так как p есть путь *наименьшей* длины, при которой условие (А) нарушается, то для любого пути q, являющегося начальной частью пути p, справедливо соотношение $0\leqslant s(q)<1$. Поэтому оптимальная стратегия предписывает, чтобы преследуемый перемещался по пути p с вероятностью $\Delta>0$.

Если преследуемый придерживается пути p, то имеется точка, в которую он прибудет через два шага с вероятностью $q>\varphi$. Рассмотрим следующую стратегию бомбардировщика. Пусть он не сбрасывает бомбу до тех пор, пока преследуемый не сделает n ходов. Если преследуемый придерживался пути p, то бомбардировщик наверняка сбросит бомбу в то место, в которое преследуемый придет с вероятностью q. Если же преследуемый не придерживается пути p, то после n ходов бомбардировщик выберет такую стратегию, которая обеспечивает уничтожение преследуемого с вероятностью $\varphi-\varepsilon$. Таким образом, полная вероятность уничтожения преследуемого будет равна

$$\Delta\cdot q+(1-\Delta)(\varphi-\varepsilon)=\Delta(\varphi+q-\varphi)+(1-\Delta)(\varphi-\varepsilon)=$$
$$=\varphi+\Delta(q-\varphi)-\varepsilon(1-\Delta).$$

Пусть ε есть любое положительное число, при котором удовлетворяется условие $\Delta(q-\varphi)>\varepsilon(1-\Delta)$.

Если бы s не была особой стратегией, то, как мы показали, у бомбардировщика была бы такая стратегия, при которой вероятность уничтожения преследуемого была бы больше φ. Но это невозможно, и поэтому оптимальная стратегия преследуемого является особой стратегией.

Рассмотрим такую стратегию преследуемого, при которой он вначале перемещается влево с вероятностью θ, а затем после этого хода перемещается в том же направлении также с вероятностью θ. Рассматривая рис. 3,

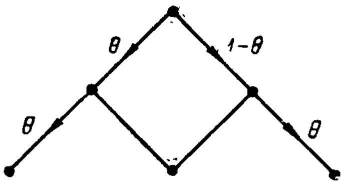


Рис. 3.

мы видим, что через две единицы времени преследуемый переместится влево на две единицы с вероятностью θ^2 и вперед с вероятностью $1-\theta$. Если он выберет θ так, чтобы $\theta^2=1-\theta$, то бомбардировщик не сможет уничтожить его с вероятностью бо́льшей, чем $1-\theta$. Таким образом, цена игры φ наверняка должна быть равна $1-\theta$ или меньше. Легко проверить, что $1-\theta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, и поэтому цена игры φ равна $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ или меньше. Эта цифра была получена Айзексом, и он предположил, что это и есть цена игры. Мы покажем, что его предположение было правильным. Отметим также, что $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}$.

Теперь мы покажем, что если s — особая стратегия преследуемого и если p — любой путь, то вероятность, с которой преследуемый перемещается вправо в момент, когда он завершил путь p, равна или меньше θ (где θ есть положительный корень квадратного уравнения $\theta^2=1-\theta$), так же, как и вероятность того, что он будет перемещаться влево. Иначе говоря, мы покажем, что $1-\theta\leqslant s(p)\leqslant\theta$. Предположим противоположное. Очевидно, достаточно предположить, что для некоторого пути p вероятность того, что преследуемый будет в дальнейшем перемещаться влево, равна h_0, где $h_0 > \theta$. Вскроем имеющееся здесь противоречие. Значения символов можно определить из рис. 4.

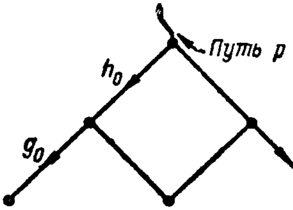


Рис. 4.

Так как стратегия s является особой, то $h_0 g_0 \leqslant \varphi$ и $1 - h_0 g_0 - h_1(1 - h_0) \leqslant \varphi$. Складывая эти неравенства, мы получим, что $1 - h_1(1 - h_0) \leqslant 2\varphi$, откуда следует, что

$$h_1 \geqslant \frac{1 - 2\varphi}{1 - h_0},$$

так как мы можем предположить, что $h_0 \leqslant 2\varphi \leqslant 2(1 - \theta) < 1$, а поэтому можем разделить обе части на $1 - h_0$.

Аналогично, обращаясь к рис. 5, чтобы получить значения символов, и используя то, что s — особая стратегия, мы по-

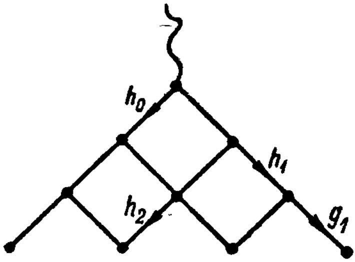


Рис. 5.

лучаем, что $h_1 g_1 \leqslant \varphi$ и $1 - h_1 g_1 - h_2(1 - h_1) \leqslant \varphi$. Складывая эти неравенства, как прежде, мы получим, что $1 - h_2(1 - h_1) \leqslant 2\varphi$, откуда следует, что

$$h_2 \geqslant \frac{1 - 2\varphi}{1 - h_1}.$$

Вновь должно удовлетворяться условие $h_1 < 1$, так как иначе стратегия s не будет особой. Можно по индукции определить h_n и прийти к заключению, что

$$h_n \geqslant \frac{1-2\varphi}{1-h_{n-1}}$$

и $h_n \leqslant 2\varphi < 1$. Покажем, что h_n есть монотонная неубывающая функция. Совершенно очевидно, что если $h_n \geqslant h_{n-1}$, то $h_{n+1} \geqslant h_n$. Поэтому достаточно показать, что $h_1 \geqslant h_0$. Это будет доказано, если показать, что

$$h_0 \leqslant \frac{1-2\varphi}{1-h_0},$$

что мы и сделаем. Иначе говоря, мы желаем показать, что $h_0(1-h_0) \leqslant 1-2\varphi$. Мы знаем, что полином $x(1-x)$ имеет максимум в точке $x={}^1/_2$ и уменьшается при $x > {}^1/_2$. Так как по предположению $h_0 > \varphi$ и $\varphi > {}^1/_2$, то

$$h_0(1-h_0) < \theta(1-\theta) = \theta - \theta^2 = (1-\theta^2) - \theta^2 =$$
$$= 1 - 2\theta^2 = 1 - 2(1-\theta) \leqslant 1 - 2\varphi.$$

Последнее равенство получается на основании того, что $1-\theta=\theta^2$, а последнее неравенство основано на доказанном ранее факте, что $\varphi \leqslant 1-\theta$. Таким образом, мы показали, что $h_0(1-h_0) \leqslant 1-2\varphi$ и тем самым завершили доказательство того, что h_n есть монотонная неубывающая функция. Так как h_n ограничена сверху значением 2φ и является неубывающей, то $h_n \to h$. Так как

$$h_n \geqslant \frac{1-2\varphi}{1-h_{n-1}},$$

то

$$h \geqslant \frac{1-2\varphi}{1-h}.$$

Таким образом, $h(1-h) \geqslant 1-2\varphi$, откуда следует, что $h(1-h) \geqslant 1-2\theta^2$, так как $\varphi \leqslant \theta^2$. С другой стороны, $\theta(1-\theta) = 1-2\theta^2$, и так как полином $x(1-x)$ уменьшается при $x > {}^1/_2$, то $h \leqslant \theta$. Но мы предположили, что $h_0 > \theta$ и $h \geqslant h_0$. Это невозможно, и поэтому мы доказали, что если s есть особая стратегия преследуемого, то для любого пути p справедливо соотношение $1-\theta \leqslant s(p) \leqslant \theta$.

Теперь мы покажем, что для любой особой стратегии s и нетривиального пути p (т. е. для любого пути, отличающегося от нулевого), если $p=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\alpha_n=R$, то $s(p) \geqslant \theta$; но если $\alpha_n=L$, то $s(p) \leqslant 1-\theta$. По интуитивным соображениям мы утверждаем, что для любой особой стратегии s преследуемый всегда будет продолжать двигаться в направлении своего последнего хода с вероятностью не меньшей, чем θ. Очевидно, достаточно предположить, что

$$p=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \text{ где } \alpha_n=L.$$

Иначе говоря, n-ый ход производится влево. Так как s есть особая стратегия, то мы получаем (см. рис. 6)

$$[1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]\, s(p)+s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \times$$
$$\times [1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, R)] \leqslant \varphi.$$

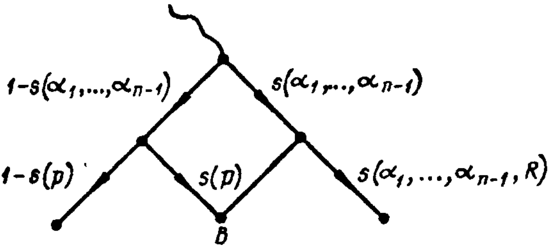


Рис. 6.

Теперь, поскольку в последнем разделе было показано, что

$$s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, R) \leqslant \theta,$$

то

$$[1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})]\, s(p)+s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(1-\theta) \leqslant \varphi.$$

Кроме того, раньше было показано, что $\varphi \leqslant 1-\theta$. Поэтому мы получаем

$$[1-s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})]\, s(p)+s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(1-\theta) \leqslant 1-\theta,$$

откуда следует, что

$$s(p) \leqslant 1-\theta.$$

Таким образом, в результате изложенного в предыдущих разделах статьи мы пришли к заключению, что для любой особой стратегии s и для нетривиального пути p, если $p=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$s(p)=s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=\theta$$

при условии, что $\alpha_n=R$, и

$$s(p)=s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1-\theta$$

при условии, что $\alpha_n=L$. Если же p есть тривиальный путь, то было показано, что $1-\theta \leqslant s(p) \leqslant \theta$.

Следовательно, мы показали, что если s есть какая-нибудь особая стратегия, то преследуемый сделает свой первый ход вправо с вероятностью, заключенной между $(1-\theta)$ и θ, и в дальнейшем будет продолжать свое движение в направлении последнего хода с вероятностью θ. Кроме того, легко видеть, что для любой подобной стратегии преследуемого имеется стратегия бомбардировщика, при которой он уничтожает преследуемого с вероятностью $1-\theta$.

Поскольку было показано, что любая оптимальная стратегия преследуемого является особой, то против любой оптимальной стратегии преследуемого может быть применена стратегия преследователя, гарантирующая поражение преследуемого с вероятностью $1-\theta$. Так как ранее было показано, что у преследуемого имеется оптимальная стратегия, то цена игры должна быть равна $1-\theta$ или больше. Однако одновременно было показано, что цена игры может быть равна $1-\theta$ или меньше. Поэтому цена игры равна $1-\theta$. Теперь легко видеть. что любая стратегия преследуемого, состоящая в движении вправо на первом ходу с вероятностью, заключенной в замкнутом интервале $[1-\theta, \theta]$, и в последующем движении в направлении последнего хода с вероятностью θ, является его оптимальной стратегией. Но поскольку любая оптимальная стратегия является особой, а любая особая стратегия должна удовлетворять условиям (А), то можно считать, что нами найдены все оптимальные стратегии преследуемого. В частности, мы подтвердили предположение Айзекса относительно цены игры.

3. СТРАТЕГИИ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЯ

В этом разделе мы покажем, что у преследователя, т. е. у бомбардировщика, нет оптимальных стратегий. Предположим обратное, т. е. что преследователь обладает оптимальной стратегией. Тогда должен наступить момент, когда он начнет сбрасывать бомбы с положительной вероятностью, причем легко показать допустимость предположения, что он сбрасывает бомбы с положительной вероятностью с самого начала. Обозначим через α, β и γ вероятности, с которыми преследователь сбрасывает бомбу влево на две единицы расстояния, вперед и вправо на две единицы расстояния относительно положения преследуемого в нулевой момент времени, как показано на рис. 7.

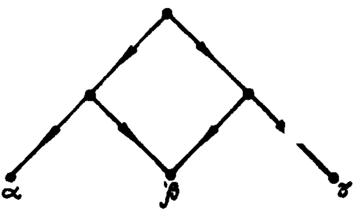


Рис. 7.

В этом разделе мы докажем, что $\alpha=\beta=\gamma=0$, и, следовательно, мы придем к противоречию, которое означает, что у преследователя нет оптимальной стратегии.

Обозначим через Δ вероятность того, что преследователь не сбросит бомбу вначале $(\Delta=1-\alpha-\beta-\gamma)$. Ясно, что мы можем предположить $\alpha\leqslant\gamma$, а случай, когда $\gamma\leqslant\alpha$, можно рассматривать по аналогии. Рассмотрим следующую стратегию преследуемого. Вначале он перемещается влево с вероятностью 1. При следующем ходе он продолжает движение в направлении своего последнего хода с вероятностью $1-\varphi$, где, как и раньше, $\varphi=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ есть цена игры. Тогда вероятность поражения преследуемого равна вероятности его поражения при сбросе бомбы преследователем вначале плюс вероятность поражения преследуемого в дальнейшем. Первая из этих вероятностей равна $(1-\varphi)\alpha+\varphi\beta$, а вторая вероятность меньше или равна $\Delta \cdot \varphi$. Таким образом, вероятность поражения преследуемого равна или меньше, чем

$$(1-\varphi)\alpha+\varphi\beta+\Delta\cdot\varphi,$$

что равноценно выражению

$$(1-\varphi)\alpha+\varphi\beta+(1-\alpha-\beta-\gamma)\varphi,$$

что, в свою очередь, равно

$$(1-\varphi)\alpha+\varphi-(\alpha+\gamma)\varphi,$$

что, наконец, равно

$$\varphi+\alpha-(2\alpha+\gamma)\varphi. \qquad (1)$$

Для $\alpha<\gamma$ последнее выражение меньше, чем

$$\varphi+\alpha-(2\alpha+\alpha)\varphi,$$

что, в свою очередь, равно

$$\varphi+(1-3\varphi)\alpha,$$

что меньше или равно φ, так как $(1-3\varphi)$ меньше нуля.

Предположение $\alpha<\gamma$ приводит к заключению, что преследуемый обладает такой стратегией, для которой вероятность его поражения меньше φ, т. е. меньше цены игры. Таким образом, у преследуемого имеется оптимальная стратегия $\alpha=\gamma$. Повторяя рассуждения от выражения (1) и далее, мы приходим к выводу, что $\alpha=0$, а следовательно, $\alpha=\gamma=0$. Теперь мы покажем, что для $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\beta>0$ у преследуемого имеется стратегия, обеспечивающая ему вероятность его поражения меньше φ.

Чтобы доказать существование такой стратегии для преследуемого, мы сочли необходимым ввести вспомогательное семейство игр. Для любого действительного числа u в замкнутом интервале $[0, 1]$ мы определим игру G_u, которая эвристически является модификацией первоначальной игры G, полученной в результате принуждения преследуемого перемещаться во время первого хода вправо с вероятностью u. Тогда мы покажем, что у каждой игры G_u имеется цена $V(u)$ и что для каждой игры G_u преследуемый имеет оптимальную стратегию s_u.

Анализ аналогичен анализу, приведенному в первом разделе, и мы будем поэтому кратки. В первом разделе мы определили игру G_n для любого значения $n \geqslant 2$. Мы определим игру $G_{n, u}$ для любого u в интервале $[0, 1]$ и для любого $n \geqslant 2$ как игру G_n, ограниченную рассмотрением только тех $s_1 \in S_1$, для которых $s_1(0) = u$ (0 есть нулевой путь). Точнее, множеством стратегий первого игрока (преследуемого) в игре $G_{n, u}$ будет $S_1(u)$, подмножество множества S_1, состоящее из всех $s_1 \in S_1$, удовлетворяющих условию $s_1(0) = u$. Множеством стратегий второго игрока (преследователя) будет, как и раньше, S_2. Платежная функция $F_{n, u}(s_1, s_2)$ будет такой же, как F_n, за исключением того, что она ограничена подмножеством множества $S_1 \times S_2$, а именно подмножеством $S_1(u) \times S_2$.

Легко видеть, что $S_1(u)$ есть замкнутое подпространство пространства S_1 в топологии слабой сходимости. Для любого u в интервале $[0, 1]$, для любого $s_1 \in S_1(u)$ и любого $s_2 \in S_2$ платежная функция $F_{n, u}(s_1, s_2)$ является монотонной неубывающей функцией от n, ограниченной сверху значением 1. Таким образом, $F_{n, u}(s_1, s_2)$ имеет предел, который мы назовем $F_u(s_1, s_2)$. Мы называем игрой G_u игру со стратегиями $S_1(u)$ и S_2 и платежной функцией F_u.

Некоторая модификация обычной теории конечных игр показывает, что любая игра $G_{n, u}$ имеет цену $\varphi_n(u)$ и что $\varphi_n(u)$ является монотонной неубывающей функцией, ограниченной сверху значением 1. Пусть $V(u)$ будет как раз тем пределом, который должен в этом случае существовать. Тогда, поскольку $S_1(u)$ есть компактное множество, рассуждения, подобные тем, которые приведены в разделе *1*, показывают, что $V(u)$ есть цена игры G_u и что преследуемый обладает оптимальной стратегией s_u. Совершенно очевидно, что F_u представляет собой функцию F, ограниченную множеством $S_1(u) \times S_2$. Отсюда следует, что $V(u) \geqslant \varphi$, цены игры G.

Кроме того, на основании нашего знания оптимальных стратегий преследуемого для игры G, можно сделать вывод, что $V(u) = \varphi$ для всех u в замкнутом интервале $[\varphi, 1-\varphi]$ и $V(u) > \varphi$ для всех других u в замкнутом интервале $[0, 1]$. Помимо этого, легко видеть, что $V(u)$ симметрична относительно точки $u = {}^1/_2$. Пока мы определим функцию $V(u)$ в явном виде для полуоткрытого интервала $[1-\varphi, 1]$, а затем вследствие симметрии будем знать функцию $V(u)$

на всем замкнутом интервале [0, 1]. Однако перед определением функции $V(u)$ объясним, почему мы так поступаем.

Напомним, что мы продолжаем доказывать отсутствие оптимальных стратегий у преследователя для игры G. Мы уже указывали, что если бы у него была такая стратегия, то мы должны были бы предположить, что она предписывает ему сбрасывать бомбу вначале с некоторой положительной вероятностью. Мы же показали, что он должен сбрасывать бомбу с вероятностью, равной нулю, как на две единицы расстояния влево от начального положения преследуемого, так и на две единицы вправо. Таким образом, он сбрасывает бомбу с вероятностью $\beta > 0$ вперед относительно начального положения преследуемого и он задерживает сброс бомбы с вероятностью $1-\beta$ (см. рис. 8).

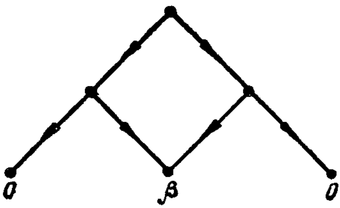


Рис 8

Теперь мы хотим показать, что существует такая стратегия преследуемого, которая сводит на нет любую подобную стратегию бомбардировщика. Иначе говоря, мы хотим показать, что для любой $\beta > 0$ существует такая стратегия преследуемого, при которой вероятность его поражения меньше φ, цены игры G. Наше доказательство того, что у преследователя нет оптимальной стратегии, будет тогда закончено. Предположим, что преследуемый перемещается вначале вправо с вероятностью, равной 1, а следующий ход делает вправо с вероятностью u. Тогда преследуемый будет поражен при его следующем ходе с вероятностью $\beta(1-u)$. Так как для преследуемого в игре G_u существует оптимальная стратегия, то он может выбрать такую стратегию, чтобы вероятность, с какой он должен быть поражен на следующем ходу, была меньше или равнялась $(1-\beta)V(u)$. Таким образом, преследуемый обладает такой стратегией, для которой вероятность его уничтожения меньше или равна

$$\beta(1-u)+(1-\beta)V(u).$$

Поэтому нам требуется только показать, что для любой $\beta>0$ существует такое значение u в интервале $[0, 1]$, что

$$\beta(1-u)+(1-\beta)V(u)<\varphi.$$

Пусть $\theta=1-\varphi$. Вспоминая, что $V(\theta)=\varphi$, получаем

$$\begin{gathered}\beta(1-u)+(1-\beta)V(u)=\beta[1-\theta-(u-\theta)]+\\+(1-\beta)[V(u)-V(\theta)+\varphi]=\beta[(1-\theta)-\beta(u-\theta)]+\\+(1-\beta)[V(u)-V(\theta)]+(1-\beta)\varphi=\\=\beta\varphi-\beta(u-\theta)+(1-\beta)[V(u)-V(\theta)]+\\+(1-\beta)\varphi=\varphi-\beta(u-\theta)+(1-\beta)[V(u)-V(\theta)]=\\=\varphi-\beta(u-\theta)\left\{1-\frac{1-\beta}{\beta}\left[\frac{V(u)-V(\theta)}{u-\theta}\right]\right\}.\end{gathered}$$

Поэтому нужно только показать, что существует такое $u>\theta$, что

$$\frac{1-\beta}{\beta}\left[\frac{V(u)-V(\theta)}{u-\theta}\right]<1.$$

Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{\substack{u\to\theta\\ u>\theta}}\frac{V(u)-V(\theta)}{u-\theta}=0. \tag{2}$$

Для того чтобы доказать (2), мы должны ближе познакомиться с функцией $V(u)$ в полуоткрытом интервале $\theta<u\leqslant 1$. Прежде всего докажем следующий факт.

Если φ — цена игры G и если $u\geqslant 1-\varphi$, то

$$V(u)=\min_{1-\theta\leqslant s\leqslant 1}\max\left[\frac{1-(1-u)s}{2},\ u\varphi+(1-u)V(s)\right]. \tag{3}$$

Выражения от (4) до (12), которые мы приводим ниже, используются только для доказательства уравнения (3). Для вывода уравнения (3) нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для любого значения* u, $0 \leqslant u \leqslant 1$,

$$V(u) = \min_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant s \leqslant 1}} \max [ur,\ 1 - ur - (1-u)s,\ uV(r) + (1-u)V(s)]. \tag{4}$$

Мы не приводим строгого доказательства и ограничимся эвристическим доказательством. В начале преследователь имеет четыре альтернативы: сбросить бомбу сразу влево, вперед или вправо или же подождать и сбросить бомбу позднее. Если бы он знал стратегию преследуемого, то он выбрал бы ту альтернативу из четырех, для которой вероятность поражения была бы наибольшей. Преследуемый, обладая оптимальной стратегией, выбирает поэтому ту стратегию, которая минимизирует максимальную из четырех вероятностей поражения. Поэтому мы и получаем выражение (4) (см. рис. 9).

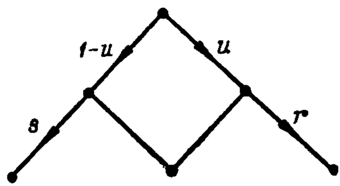


Рис. 9.

Теперь мы переходим к доказательству уравнения (3). Если $0 \leqslant s \leqslant 1$ и если $1 - \varphi \leqslant u$, то

$$(1-u)s \leqslant 1 - u \leqslant \varphi \leqslant uV(r) + (1-u)V(s),$$

так как $\varphi \leqslant V(r)$ и $\varphi \leqslant V(s)$.

Поэтому, если

$$0 \leqslant s \leqslant 1 \text{ и } 0 \leqslant r \leqslant 1 \text{ и } 1 - \varphi \leqslant u,$$

мы получаем

$$\max [ur,\ 1 - ur - (1-u)s,\ (1-u)s,\ uV(r) + (1-u)V(s)] =$$
$$= \max [ur,\ 1 - ur - (1-u)s,\ uV(r) + (1-u)V(s)]. \tag{5}$$

Из выражений (5) и (4) следует, что

$$V(u)=\min_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq s\leq 1}} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ uV(r)+(1-u)V(s)]. \tag{6}$$

Если $r>1-\varphi$, то $ur>u(1-\varphi)$, и поэтому для любого значения s, $0\leqslant s\leqslant 1$, получаем

$$\max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ uV(r)+(1-u)V(s)]> \\ >u(1-\varphi).$$

С другой стороны,

$$\max[u(1-\varphi),\ 1-u(1-\varphi)-(1-u)(1-\varphi),\ uV(1-\varphi)+ \\ +(1-u)V(1-\varphi)]=u(1-\varphi).$$

Поэтому, используя выражение (6), получаем

$$V(u)=\min_{\substack{0\leq r\leq 1-\varphi\\ 0\leq s\leq 1}} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ uV(r)+ \\ +(1-u)V(s)]. \tag{7}$$

Кроме того, если $r<{}^1/_2$, то для любого значения s, $0\leqslant s\leqslant 1$, получаем

$$1-ur-(1-u)s\geqslant 1-ur-(1-u)=u(1-r)>\frac{u}{2}>ur.$$

Поэтому

$$\max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ uV(r)+ \\ +(1-u)V(s)]\geqslant\max\left[\frac{u}{2},\ 1-\frac{u}{2}- \right. \\ \left. -(1-u)s,\ uV\left(\frac{1}{2}\right)+(1-u)V(s)\right].$$

Теперь, используя выражение (7), получаем

$$V(u)=\min_{\substack{1/2\leq r\leq 1-\varphi\\ 0\leq s\leq 1}} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ uV(r)+ \\ +(1-u)V(s)]. \tag{8}$$

Кроме того, так как $V(r)=\varphi$ для ${}^1/_2\leqslant r\leqslant 1-\varphi$, мы приходим к выражению

$$V(u)=\min_{\substack{1/2\leq r\leq 1-\varphi\\ 0\leq s\leq 1}} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ u\varphi+(1-u)V(s)]. \tag{9}$$

Одновременно, если $0 \leqslant s \leqslant 1-\varphi$, то

$$\max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ u\varphi+(1-u)V(s)] \geqslant$$
$$\geqslant \max[ur,\ 1-ur-(1-u)(1-\varphi),\ u\varphi+(1-u)V(1-\varphi)].$$

Используя выражение (9), мы приходим к

$$V(u)=\min_{\substack{1/2\leqslant r\leqslant 1-\varphi\\ 1-\varphi\leqslant s\leqslant 1}} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ u\varphi+(1-u)V(s)]. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что

$$ur=1-ur-(1-u)s \Longleftrightarrow r=\frac{1-(1-u)s}{2u}.* \tag{11}$$

Кроме того, для $1-\varphi \leqslant s$

$$\frac{1-(1-u)s}{2u} \leqslant \frac{1-(1-u)(1-\varphi)}{2u} = \frac{1-1+u+\varphi(1-u)}{2u} =$$
$$= \frac{u+\varphi(1-u)}{2u} = \frac{u(1-\varphi)}{2u} + \frac{\varphi}{2u} = \frac{1-\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2u} \leqslant \frac{1-\varphi}{2} +$$
$$+ \frac{\varphi}{2(1-\varphi)} = \frac{1-\varphi}{2} + \frac{(1-\varphi)^2}{2(1-\varphi)} = \frac{1-\varphi}{2} + \frac{1-\varphi}{2} = 1-\varphi.$$

И, кроме того,

$$\frac{1-(1-u)s}{2u} \geqslant \frac{1-(1-u)1}{2u} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1-(1-u)s}{2u} \leqslant 1-\varphi.$$

Итак, нами доказано, что единственное значение r, удовлетворяющее условию $ur=1-ur-(1-u)s$, находится в интервале $[1/2,\ 1-\varphi]$. Так как ur является монотонно возрастающей функцией от r и $1-ur-(1-u)s$ является монотонно убывающей функцией от r, то

$$\min_r \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s] =$$

* Символ $\Longleftrightarrow$ означает взаимное соответствие. (*Прим. ред.*

$$= \min_{1/2 \leqslant r \leqslant 1-\varphi} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s] =$$

$$= u\,\frac{1-(1-u)s}{2u} = \frac{1-(1-u)s}{2}.$$

$$\min_{\substack{1/2 \leqslant r \leqslant 1-\varphi \\ 1-\varphi \leqslant s \leqslant 1}} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ u\varphi+(1-u)V(s)] =$$

$$= \min_{1-\varphi \leqslant s \leqslant 1}\ \min_{1/2 \leqslant r \leqslant 1-\varphi} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s,$$

$$u\varphi+(1-u)V(s)] =$$

$$= \min_{1-\varphi \leqslant s \leqslant 1}\ \min_{1/2 \leqslant r \leqslant 1-\varphi} \max\{\max[ur,\ 1-ur-(1-u)s],\ u\varphi +$$

$$+(1-u)V(s)\} =$$

$$= \min_{1-\varphi \leqslant s \leqslant 1} \max\{\min_{1/2 \leqslant r \leqslant 1-\varphi} \max[ur,\ 1-ur-(1-u)s],\ u\varphi +$$

$$+(1-u)V(s)\} =$$

$$= \min_{1-\varphi \leqslant s \leqslant 1} \max\left[\frac{1-(1-u)s}{2},\ u\varphi+(1-u)V(s)\right]. \qquad (12)$$

Теперь, используя выражение (10), получаем

$$V(u) = \min_{1-\varphi \leqslant s \leqslant 1} \max\left[\frac{1-(1-u)s}{2},\ u\varphi+(1-u)V(s)\right].$$

Таким образом, мы, наконец, вывели соотношение (3). На основании этого соотношения и того факта, что $V(1)={}^1/_2$, легко видеть, что

$$V(u) = \frac{u}{2} \Longleftrightarrow u\varphi+(1-u)V(1) \leqslant \frac{u}{2} \Longleftrightarrow u\varphi +$$

$$+(1-u)\frac{1}{2} \leqslant \frac{u}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2(1-\varphi)} \leqslant u \leqslant 1. \qquad (13)$$

Очевидно, что для любого значения s, удовлетворяющего условию $1-\varphi \leqslant s \leqslant 1$, существует одно и только одно значение u, которое удовлетворяет условию:

$$\frac{1-(1-u)s}{2} = u\varphi + (1-u)V(s). \qquad (14)$$

Таким образом, мы доказали справедливость определения функции $u(s)$ для $1-\varphi \leqslant s \leqslant 1$, где $u(s)$ есть единственное число u, удовлетворяющее условию (14). Легко убедиться, что

$$u(s) = \frac{2V(s)+s-1}{2V(s)+s-2\varphi}. \qquad (15)$$

Теперь мы покажем, что $u(s)$ строго возрастает в интервале $1-\varphi\leqslant s\leqslant 1$. Благодаря соотношению (15) достаточно показать, что $V(s)$ строго возрастает для $1-\varphi\leqslant s\leqslant 1$. Из результатов раздела *1* мы легко выводим, что $1-\varphi$ есть максимальное значение s, для которого $V(s)=V(^1/_2)=\varphi$. Мы покажем теперь, что $V(s)$ является выпуклой функцией от s для $0\leqslant s\leqslant 1$. Отсюда будет следовать, что $V(s)$ строго возрастает в интервале $1-\varphi\leqslant s\leqslant 1$. Так как $V(s)$ есть предел $V_n(s)$, достаточно показать, что $V_n(s)$ выпуклая для всех $n\geqslant 2$. Один из способов доказать это состоит в том, чтобы выразить V_n по индукции через V_{n-1} следующим образом:

$$V_2(u)=\min_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant 1}}\max\,[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ (1-u)s] \tag{16}$$

и для $n>2$

$$V_n(u)=\min_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant 1}}\max\,[ur,\ 1-ur-(1-u)s,\ (1-u)s,\ uV_{n-1}(r)+ \\ +(1-u)V_{n-1}(s)]. \tag{17}$$

Легко видеть, что $V_2(u)$—выпуклая функция. Действительно, график $V_2(u)$ имеет вид, показанный на рис. 10.

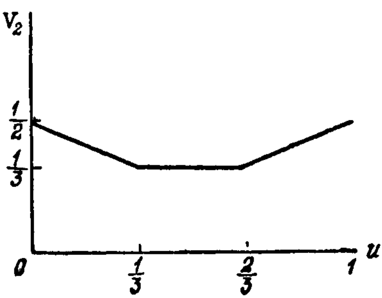


Рис. 10.

Доказательство того, что $V_n(u)$ является выпуклой функцией, находится теперь с помощью непосредственной индукции по n с использованием уравнения (17). Опуская подробности, которые утомительны, но просты, мы приходим к заключению:

$$\textit{Функция } V(s) \textit{ выпукла для } 0\leqslant s\leqslant 1. \tag{18}$$

В результате рассуждений, следующих за выражением (15), мы получаем

Функция $V(s)$ *строго возрастает для* $1-\varphi \leqslant s \leqslant 1$. (19)

Из выражений (19), (15) мы легко выводим, что для $1-\varphi \leqslant \leqslant s \leqslant 1$

Функция $u(s)$ *является строго возрастающей.* (20)

Так как $u(s)$ строго возрастает и так как легко показать, что $u(1-\varphi)=1-\varphi$ и что

$$u(1)=\frac{1}{2(1-\varphi)}<1,$$

то для $1-\varphi<s<1$ следует, что

$$1-\varphi<u(s)<1. \tag{21}$$

Теперь мы используем выражение (3) для доказательства того, что при $1-\varphi<u(s)<1$

$$V[u(s)]=$$

$$=\min_{1-\varphi\leqslant t\leqslant 1} \max\left\{\frac{1-[1-u(s)]t}{2},\ u(s)\varphi+[1-u(s)]V(t)\right\}. \tag{22}$$

Так как $\frac{1-[1-u(s)]t}{2}$ является убывающей функцией от t, а $u(s)\varphi+[1-u(s)]V(t)$ — возрастающей функцией от t и так как эти обе функции равны для $t=s$, то из выражения (22) следует, что для $1-\varphi \leqslant s \leqslant 1$

$$V[u(s)]=\frac{1-[1-u(s)]s}{2}=u(s)\varphi+[1-u(s)]V(s). \tag{23}$$

Кроме того, так как $0<u(s)<1$ и $\varphi<V(s)$, то из выражения (23) следует, что $\varphi<V[u(s)]<V(s)$. Тогда согласно выводу (19) следует, что $u(s)<s$. Поэтому мы установили, что для $1-\varphi<s\leqslant 1$

$$1-\varphi<u(s)<s. \tag{24}$$

Определим теперь следующим образом строго убывающую последовательность p_n точек в интервале $[1-\varphi, 1]$:

$$p_0=1,$$
$$p_{n+1}=u(p_n). \tag{25}$$

Тот факт, что p_n является строго убывающей последовательностью точек в интервале $[1-\varphi, 1]$, следует, конечно, из соотношения (24).

Напомним читателю, что мы доказываем соотношение (2). Поскольку было показано, что $V(u)$ есть выпуклая функция, достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V(p_n)-V(\theta)}{p_n-\theta}=0. \tag{26}$$

Для доказательства удобно рассмотреть функцию T, определяемую следующим образом:

$$T(s, V)=(s', V'), \tag{27}$$

где

$$s'=\frac{2V+s-1}{2V+s-2\varphi},$$

$$V'=\frac{1-(1-s')s}{2}.$$

Функция T определена на всех точках (s, V) в плоскости, которые не лежат на линии $2V+s-2\varphi=0$.

$$\{u(s),\ V[u(s)]\}=T[s, V(s)]. \tag{28}$$

Это равенство следует непосредственно из определения функции T и из соотношений (15) и (23).

С функцией T связано несингулярное линейное преобразование A евклидова трехмерного пространства на себя, определяемое следующим образом:

$$A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1',\ \alpha_2',\ \alpha_3'),$$

где

$$\alpha_1'=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,$$

$$\alpha_2'=\varphi\alpha_1+\alpha_2-\varphi\alpha_3,$$

$$\alpha_3'=\alpha_1+2\alpha_2-2\varphi\alpha_3.$$

Таким образом, преобразование A можно рассматривать как матричное преобразование строчных векторов

$$A=\left\|\begin{matrix} 1 & \varphi & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -\varphi & -2\varphi \end{matrix}\right\|.$$

Связь между T и A следующая. Если $2V+s-2\varphi\neq 0$, то

$$T(s, V)=(s', V'),$$

где

$$A(s, V, 1)=(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$$

и

$$s'=\frac{\alpha_1'}{\alpha_3'}; \quad V'=\frac{\alpha_2'}{\alpha_3'}.$$

Так как преобразование A отображает двухмерные подпространства на двухмерные подпространства, то функция T отображает линии на линии. Легко видеть, что характеристические корни преобразования A равны $(1-\varphi)$, $(1-\varphi)^2$ и $(1-\varphi)^3$. Легко видеть также, что соответствующие характеристические векторы равны соответственно

$$\varphi_1=[1-\varphi, (1-\varphi)^2, 1],$$

$$\varphi_2=[(1-\varphi)^2, (1-\varphi)^2, 1],$$

$$\varphi_3=(0, \frac{1}{2}, 1).$$

Отношение

$$\frac{V(p_n)-V(\theta)}{p_n-\theta}$$

равно наклону линии, проходящей через две точки $[\theta, V(\theta)]$ и $[p_n, V(p_n)]$. Кроме того, согласно определению (25)

$$[p_{n+1}, V(p_{n+1})]=\{u(p_n), V[u(p_n)]\}.$$

В силу соотношения (28) мы получаем

$$\{u(p_n), V[u(p_n)]\}=T[p_n, V(p_n)].$$

Отсюда

$$[p_{n+1}, V(p_{n+1})]=T[p_n, V(p_n)].$$

Поэтому

$$[p_{n+1}, V(p_{n+1})]=T^{n+1}[p_0, V(p_0)]=T^{n+1}\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\frac{V(p_n)-V(\theta)}{p_n-\theta}$$

равно наклону линии, проходящей через две точки $[\theta, V(\theta)]$ и $T^n\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Пусть l есть линия, проходящая через точки $[\theta, V(\theta)]$ и $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Так как $[\theta, V(\theta)]$ есть фиксированная точка под T, то $T^n(l)$ есть линия, проходящая через $[\theta, V(\theta)]$ и $T^n\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Кроме того, линия l не проходит через точку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Иначе говоря, линия l не проходит через фиксированную точку, соответствующую характеристическому корню с наименьшим абсолютным значением. Поэтому в соответствии с леммой, приводимой ниже, наклон линии $T^n(l)$ стремится к наклону линии, проходящей через точки $[(1-\theta), (1-\theta)^2]$ и $[(1-\theta)^2, (1-\theta)^2]$, который равен нулю. Поэтому отношение

$$\frac{V(p_n) - V(\theta)}{p_n - \theta}$$

сходится к нулю и, таким образом, доказательство того, что преследователь не имеет оптимальной стратегии, закончено.

Лемма. *Пусть A будет несингулярным линейным преобразованием пространства E^3 (евклидово трехмерное пространство) на себя, а P — множеством всех векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, в котором $\alpha_3 = 1$. Предположим, что φ_1, φ_2 и φ_3 — три различные собственные вектора преобразования A и что они лежат в пространстве P. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — соответствующие собственные корни, причем $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$. Пусть l будет линией, лежащей в пространстве P и не проходящей через φ_3. Пусть $S(l)$ — подпространство пространства E^3, порожденное линией (l). Предположим далее, что $A^n[S(l)]$ не параллельна P и что l_n есть линия в P, определяемая пересечением P с $A^n[S(l)]$.*

Тогда наклон линии l_n стремится к наклону линии, проходящей через φ_1 и φ_2. Кроме того, для каждого вектора v в P, не лежащего на линии, соединяющей φ_2 и φ_3, существует такое число N, при котором для всех значений $n \geqslant N$ существует ска-

ляр u_n, *удовлетворяющий условиям, что* $u_n A^n(v) \in P$ *и что* $u_n A^n(v)$ *сходится к* φ_1.

Мы не приводим доказательства этой леммы, так как оно может быть получено непосредственно. Оно представляет собой замаскированный вариант теоремы относительно итераций коллинеации действительной проективной плоскости.

Теперь мы закончили наше доказательство отсутствия оптимальной стратегии у преследователя.

Следует отметить, что в виде побочного результата мы показали, как вычислить $V(u)$ для произвольного значения u. А именно $V(u)$ является кусочно линейной функцией на полуоткрытом интервале $[1-\theta, 1]$. Она линейна на любом замкнутом подынтервале $[p_{n+1}, p_n]$. В силу симметрии $V(u)$ относительно $u = {}^1/_2$ функция $V(u)$ известна на всем интервале $[0, \varphi]$. Как было показано выше, ее значение на интервале $[\varphi, 1-\varphi]$ равно φ. В заключение мы отмечаем, что для любого значения u, если $1-\varphi < u \leqslant 1$, можно определить с помощью конечного числа шагов оптимальную стратегию преследуемого в игре G_u. Интересно, что для любого значения u, если $0 \leqslant u \leqslant 1$, существует оптимальная стратегия преследуемого s_u в игре G_u и, кроме того, для любого значения u существует целое число $N(u)$, такое, что для любого пути p, равного по длине $N(u)$ или больше его, стратегия s_u предписывает, чтобы после прохождения пути p преследуемый продолжал движение в том же направлении, какое было в предыдущем ходу, с вероятностью $1-\varphi$, как это было и в игре G.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья была написана в 1953 г. С тех пор в печати появился ряд статей, в которых рассматривается тот же вопрос. В работе [5] Айзекс и Карлин подтвердили основные результаты нашей статьи, добившись при этом значительно большей краткости. В работе [3] Айзекс рассмотрел стратегии бомбардировщика или стрелка, определяемые с точностью ε, и дал общее описание игр на преследование и уклонение от преследования. Сокращенный вариант этого отчета появился в виде статьи [4]. В другой статье Карлина [6] содержится более краткое доказательство основных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. R P Isaacs Games of pursuit The RAND Corporation, Research paper P-257, November 1951.
2. R P Isaacs. A pursuit game with incomplete information. The RAND Corporation, Research Memorandum RM-791, March 1952.
3. R. P. Isaacs A game of aiming and evasion, General discussion of the marksman's strategies. The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1385.
4. R. P Isaacs. The problem of aiming and evasion. Naval Research Logistics Quarterly, 1955, vol. 2, p. 47—67.
5. R. P. Isaacs and S. Karlin. A game of aiming and evasion. The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1316.
6. S Karlin. An infinite move game with a lag. Contributions to the theory of games, 1957, vol. III, p. 257—272.
   С. Карлин Бесконечноходовая игра с запаздыванием (см. настоящий сборник).

БЕСКОНЕЧНОХОДОВАЯ ИГРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Сэмюэль Карлин *. Стэнфордский университет

В настоящей статье содержится анализ частного случая игры с бесконечным числом ходов. Так как лишь немногие многоэтапные игры были действительно решены и почти не существует их общей теории, нам кажется, что полный анализ такой нетривиальной стохастической игры имеет определенную ценность.

Некоторые вопросы общей теории игр с запаздыванием были изучены Скарфом и Шэпли [1]. Дубинс [2] к той же задаче подошел по-другому. Его и наша работы проводились независимо, и применяемые нами методы, кажется, совершенно различны. Кроме того, мы пошли дальше по пути получения точной информации о природе оптимальных стратегий. Р. Айзекс разработал третий метод решения этой проблемы [3].

ДУЭЛЬ МЕЖДУ БОМБАРДИРОВЩИКОМ И КОРАБЛЕМ

Эту дуэль можно описать следующим образом: в начале каждой единицы времени корабль S может переместиться на одну единицу расстояния вправо или влево. Бомбардировщик B, имеющий только одну бомбу, может все время наблюдать за кораблем S, в то время как корабль не имеет сведений относительно точного положения бомбардировщика B. Бомбардировщик желает сбросить бомбу на корабль, но может это сделать только в моменты, совпадающие с перемещениями корабля. Следует принять во внимание запаздывание от момента сброса до момента падения бомбы в воду, рав-

---

* Samuel Karlin An infinite move game with a lag. Contributions to the theory of games, vol. III, 1957, p 257—272.

ное двум единицам времени. Платеж бомбардировщику равен единице, если он уничтожил (поразил) корабль, и нулю — в противном случае.

Мы рассмотрим также усеченную игру G_n, в которой бомбардировщик должен сбросить бомбу во время первых n единиц времени. Тогда корабль может маневрировать самое большее $(n+2)$ раза до окончания игры.

Пусть $g_n(x)$ есть цена игры для бомбардировщика, если первое действие корабля состоит в том, что он движется влево с вероятностью x. Пусть c и d — условные вероятности перемещения корабля влево во время его второго хода, если его первый ход был влево или вправо соответственно. По истечении двух единиц времени корабль S будет находиться или влево в 2 единицах расстояния от исходной точки (с вероятностью xc), или в начальной исходной точке [с вероятностью $x(1-c)+$ $+(1-x)d$], или вправо в 2 единицах [с вероятностью $(1-x)(1-d)$]. Предполагая, что бомбардировщик B попадает в цель с идеальной точностью, мы видим, что если он сбрасывает бомбу в начальный момент, то ожидаемое значение платежа будет равно xc, или $x(1-c)+$ $+(1-x)d$*, или $(1-x)(1-d)$, в зависимости от того, в какую точку он прицеливался. С другой стороны, если B не сбросил бомбу в начальный момент, то самое большее, что он может получить, — это $xg_{n-1}(c)+$ $+(1-x)g_{n-1}(d)$. Совершенно очевидно, что оптимальный платеж, который B может получить, равен максимальной из этих четырех величин. Сохраняя x неизменной, S может, в лучшем случае, сделать так, чтобы минимизировать этот максимум относительно переменных c и d. Поэтому, для $n \geqslant 1$

$$g_n(x)=\min_{c,d}\max\begin{cases} xc \\ x(1-c)+(1-x)d \\ (1-x)(1-d) \\ xg_{n-1}(c)+(1-x)g_{n-1}(d) \end{cases} \qquad (1)$$

* Здесь в тексте оригинала допущена явная ошибка. (*Прим. перев.*)

в то время, как

$$g_0(x) = \min_{c,d} \max \begin{cases} xc \\ x(1-c) + (1-x)d^* \\ (1-x)(1-d). \end{cases} \qquad (2)$$

Непосредственный расчет, показывает, что $g_0(x) = \frac{1}{3}$, если $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$, $g_0(1) = g_0(0) = \frac{1}{2}$ и что g_0 является линейной функцией в остальных частях единичного интервала.

Анализ и решение функциональных уравнений (1) и (2) очень полезны для нахождения решения игры. Направим наше внимание на анализ этих соотношений. Для этого нам будут полезны следующие простые леммы. Пусть $V_n = \min_x g_n(x)$.

Лемма 1. *Функция g_n симметрична относительно $x = \frac{1}{2}$, т. е. $g_n(x) = g_n(1-x)$ и $g_n\left(\frac{1}{2}\right) = V_n$.*

Доказательство. Симметрия видна сразу из того, что замена x на $(1-x)$ в уравнении (1) эквивалентна перемене местами c и d. Если x_n дает $\min g_n(x)$, то это же дает и $(1-x_n)$. Но эти вероятности являются частями оптимальной стратегии для S в игре G_n. Смесь оптимальных стратегий сама оптимальна; следовательно, при $x = \frac{1}{2}$, g_n минимизируется.

Лемма 2. *Функции $g_n(x)$ равномерно непрерывны или точнее $|g_n(x \mp \varepsilon) - g_n(x)| \leqslant \varepsilon$ для $n \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$*

Доказательство получается в результате непосредственного расчета по уравнениям (1).

Лемма 3. $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$.

Доказательство. В игре с $(n+1)$ ходами B может применить оптимальную стратегию для игры G_n и получить самое меньшее $g_n(x)$.

Следствием лемм *2* и *3* является лемма *4*.

---

* Здесь в тексте оригинала допущена явная ошибка (*Прим. перев*)

Лемма 4. Функции g_n равномерно сходятся к функции g и

$$g(x)=\min_{c,d}\max\begin{cases} cx \\ x(1-c)+(1-x)d \\ (1-x)(1-d) \\ xg(c)+(1-x)g(d). \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим через P_0 следующую марковскую стратегию для S. Она называется марковской потому, что всякое перемещение S на любой стадии игры зависит только от действительного перемещения S на предыдущем ходу. Дадим точное описание этой стратегии: S начинает перемещение в любом из двух направлений с равной вероятностью ($x=1/2$). В любой момент S будет продолжать перемещение в том же направлении, в котором он двигался на предыдущем ходу, с вероятностью

$$p=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

а в противоположном направлении с вероятностью

$$1-p=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Эта стационарная стратегия обладает следующим интересным свойством.

Лемма 5. *Если S применяет P_0, то, независимо от стратегии, применяемой B, максимальный ожидаемый платеж бомбардировщику B будет*

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство. Можно непосредственно проверить, что согласно P_0 через две единицы времени максимальное значение вероятности того, что S находится в одном из своих трех возможных положений, равно $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Формулировка леммы следует из этого факта.

Замечание. Эта лемма справедлива также для игры G, допускающей бесконечное число ходов.

Следствие 1. *Игра* G_n *имеет цену* V_n, *меньшую, чем*

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство. Игру G_n можно рассматривать как конечную матричную игру, все элементы которой равны либо 0, либо 1. Поэтому цена игры должна быть рациональным числом. Так как

$$V_n \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

то мы должны иметь

$$V_n < \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Следствие 2.

$$\frac{1-2V_n}{1-V_n} > V_n.$$

Доказательство. В противном случае мы получили бы

$$V_n^2 - 3V_n + 1 \leqslant 0$$

или

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant V_n \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

что невозможно в силу следствия *1*.

Наш основной результат содержится в следующей теореме:

Теорема 1. *Минимальное значение игры* $g\ (x)$ *равно* $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, *что достигается на интервале* $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Доказательство. Согласно лемме *4*, $V_n = \min g_n(x)$ сходится к V. Кроме того, согласно леммам *2* и *4*, $g(x)$ симметрична. Пусть t — наименьшее значение x, для которого $g(x) = V$. Пусть c и d будут значениями, соответствующими t, так что

$$V = g(t) = \max \begin{cases} ct \\ (1-c)t + d(1-t) \\ (1-d)(1-t) \\ tg(c) + (1-t)\,g(d). \end{cases} \qquad (4)$$

Из последней строчки этого выражения следует, что $t \leqslant c$, $d \leqslant 1-t$. Это значит, что $(1-c)t+d(1-t) \geqslant t^2+t(1-t)=t$, а это ввиду (4) требует, чтобы $t \leqslant V$. Покажем теперь, что возможность неравенства $t<V$ также исключена $\left(\text{конечно}, V \leqslant \frac{1}{2}\right)$. В самом деле, если мы предположим обратное, то

$$V \geqslant (1-d)(1-t)$$

и

$$V \geqslant (1-c)t+d(1-t) \geqslant t^2-d(1-t).$$

Складывая эти неравенства, мы получим $2V \geqslant t^2+1-t$. Так как (t^2+1-t) — строго уменьшающаяся функция на интервале $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $t<V \leqslant \frac{1}{2}$, то мы приходим к выводу, что $2V>V^2+1-V$ или $V>\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Так как, согласно лемме 5, $V_n<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $V_n \to V$, то мы пришли к противоречию. Поэтому $t=V$. Далее мы заключаем, что второе выражение в уравнении (4) больше или равно V. Однако равенство должно выдерживаться и поэтому $1-c=d=V$. Тогда $V \geqslant (1-d)(1-t)=(1-V)^2$, а это означает, что

$$V \geqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Так как согласно лемме *5* всегда справедливо обратное неравенство, то

$$V=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Наконец, с помощью уравнений (4) легко проверить, что $g(x)=V$ тогда и только тогда, когда $V \leqslant x \leqslant 1-V$ при выборе

$$d=1-c=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

С помощью теоремы *1* мы приходим к теореме *2*.

Теорема 2. *Бесконечная дуэль бомбардировщика с кораблем имеет цену игры*

$$V=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Оптимальная стратегия S (кроме первого хода) совпадает со стратегией P_0 (согласно лемме 5).

Доказательство. Бомбардировщик B может придерживаться оптимальной стратегии для игры G_n (при n достаточно большом) и, таким образом, добиться, чтобы $V_n \geqslant V - \varepsilon$ (теорема *1*). S может удержать B от получения платежа большего, чем V, придерживаясь стратегии P_0. Таким образом, игра определена и имеет цену

$$V = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство теоремы *1* показывает, что для любого начального хода S, после которого следует перемещение влево с вероятностью x, где $V \leqslant x \leqslant 1 - V$, вероятности перемещения влево на втором ходу, в соответствии с тем, куда был направлен первый ход, влево или вправо, однозначно равны

$$d = 1 - c = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Повторяя это рассуждение, можно полностью определить все последующие перемещения в согласии с предписаниями стратегии P_0. На этом доказательство теоремы *2* можно считать завершенным.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УСЕЧЕННОЙ ИГРЫ G_n

Следующая серия лемм служит для выявления некоторых характеристик тонкой структуры оптимальных стратегий. Для этой цели мы исследуем более подробно функции g_n.

Лемма 6*. *g_n есть выпуклая функция $n = 0, 1, \ldots$*

Доказательство. Так как функция, тождественно равная нулю, является, конечно, выпуклой, то для доказательства по индукции выпуклости функций $g_0, g_1, \ldots$

* Доказательство этой леммы было предложено рецензентом и заменило более сложные рассуждения автора.

достаточно установить, что сохраняющий непрерывность нелинейный оператор T, определяемый соотношениями

$$\mathrm{T}\, g(x) = \min_{c,\, d \in [0,1]} \max \begin{cases} xc \\ x(1-c)+(1-x)d \\ (1-x)(1-d) \\ xg(c)+(1-x)g(d) \end{cases} \quad x \in [0,\, 1],$$

сохраняет одновременно выпуклость. Поэтому, пусть g есть непрерывная выпуклая функция на интервале $[0,\, 1]$. Мы покажем, что $\mathrm{T}g$ есть выпуклая функция. Для этой цели рассмотрим семейство парных игр с нулевой суммой Γ_x с пространствами чистых стратегий $S_{\mathrm{I}}=(1,\, 2,\, 3,\, 4)$, $S_{\mathrm{II}}=\{(c,\, d) | c,\, d \in [0,\, 1]\}$ и платежом, равным $M_x(i; c, d)$:

	$i \diagdown$	II $(c,\, d)$
I	1	xc
	2	$x(1-c)+(1-x)d$
	3	$(1-x)(1-d)$
	4	$xg(c)+(1-x)g(d)$

Теперь, поскольку g — выпуклая функция, легко видеть, что для любого $i \in S_{\mathrm{I}}$ платежная функция M_x выпуклая одновременно по c и d, т. е. выпуклая на $(c,\, d)$. Так как M_x, кроме того, непрерывна, то согласно хорошо известному выводу теории игр для игрока II в игре Γ_x имеется оптимальная чистая стратегия и, следовательно,

$$\mathrm{T}g(x) = \mathrm{Val}\,(\Gamma_x)^*. \tag{5}$$

Теперь мы замечаем, что M_x имеет форму

$$M_x(i;\, c,\, d) = xP(i,\, c)+(1-x)\,Q(i,\, d),$$

где P и Q определены в тексте. Если теперь мы включим в M_x смешанные стратегии ξ для игрока I, как это общепринято (посредством интегрирования), то мы сохраним форму, т. е.

$$M_x(\xi;\, c,\, d) = xP(\xi,\, c)+(1-x)\,Q(\xi,\, d).$$

---

* $\mathrm{Val}\,(\Gamma_x)$ — цена игры Γ_x. (*Прим. перев.*)

Поэтому

$$\min_{c,\, d} M_x(\xi;\ c,\ d) = x \min_c P(\xi,\ c) + \\ + (1-x) \min_d Q(\xi,\ d),$$

так как c и d разделены, а x и $(1-x)$ суть неотрицательные относительные константы. Наконец, мы получаем

$$\max_\xi \min_{c,\, d} M_x(\xi;\ c,\ d) = \\ = \max_\xi [x \min_c P(\xi,\ c) + (1-x) \min_d Q(\xi,\ d)].$$

Но левая часть этого соотношения согласно знаменитой минимаксной теореме для непрерывных игр равна в точности цене игры и, следовательно, в силу (5) равна $Tg(x)$. С другой стороны, правая часть, очевидно, является выпуклой по x, так как она представляет собой максимум совокупности линейных функций. Это доказывает свойство сохранения выпуклости оператором Т, а следовательно, и всю лемму.

Лемма 7. *Для $n \geqslant 2$, если $g_n(x) = V_n$ на интервале*

$$\left[\frac{1-2V_n}{1-V_n},\ \frac{V_n}{1-V_n}\right],$$

то $\frac{1}{2} < V_n < V_{n+1}$ и $g_{n+1}(x) = V_{n+1} = \min_\xi g_{n+1}(\xi)$ тогда и только тогда, когда x содержится в интервале

$$\left[\frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}},\ \frac{V_{n+1}}{1-V_{n+1}}\right].$$

Кроме того, V_{n+1} есть единственный корень уравнения $g_n(x) = x$.

Доказательство. На основании симметрии $g_n(x)$ и леммы 2 мы имеем

$$V_{n+1} = g_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \min_d \max \begin{cases} \frac{1}{2}(1-d) \\ d \\ g_n(d). \end{cases}$$

Если мы рассмотрим изменение d в диапазоне

$$\frac{1}{2} \geqslant d \geqslant \frac{1-2V_n}{1-V_n},$$

то

$$g_n(d) = V_n < \frac{1-2V_n}{1-V_n} \leqslant d,$$

где второе неравенство основано на следствии 2. Поэтому при таком ограничении выбора d кораблем S наилучшим возможным действием корабля будет

$$\frac{1-2V_n}{1-V_n}.$$

Однако при изменении d от $\frac{1-2V_n}{1-V_n}$ до нуля функция $g_n(d)$ непрерывно уменьшается от V_n до $1/2$ (согласно лемме 6). Следовательно, существует единственное значение d_0 в диапазоне $\frac{1}{3} < d_0 < \frac{1}{2}$ $\left(\text{при } V_n > \frac{1}{3}\right)$, для которого

$$V_n < g(d_0) = d_0 < \frac{1-2V_n}{1-V_n}.$$

Ясно также, что $d_0 = V_{n+1} = g_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ есть цена усеченной игры G_{n+1}. Кроме того, $1-c=d=d_0$. Далее, если $x \leqslant \frac{1}{2}$, то $g_{n+1}(x) = d_0$ при условии только, что $(1-d_0)(1-x) \leqslant d_0$.

Это эквивалентно тому, что

$$\frac{1}{2} \geqslant x \geqslant \frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}.$$

Благодаря симметрии $g_{n+1}(x)$ лемма, таким образом, доказана для $n \geqslant 3$.

Доказательство нашего вывода для $n=2$ может быть получено дополнительно с помощью несложных рассуждений.

Лемма 8. *При* $x < \frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}$ *соответствующие значения* c и d *в (3) для* $g_{n+1}(x)$ *определяются, как единственное решение уравнений*

$$(1-x)(1-d) = x(1-c) + (1-x)d = \\ = xg_n(c) + (1-x)g_n(d), \qquad (6)$$

что справедливо за исключением окрестности точки $x=0$, *где имеют смысл только два первых уравнения. В этом случае* $c=1$, *а* $d=\frac{1}{2}$.

Доказательство. Покажем сначала, что значения c и d, соответствующие $g_{n+1}(x)$, не могут быть определены с помощью только уравнения

$$x(1-c)+(1-x)d = xg_n(c)+(1-x)g_n(d) \qquad (7)$$

или, что то же,

$$x[1-c-g_n(c)] = (1-x)[g_n(d)-d]. \qquad (8)$$

Предположим, что это так и что $g_{n+1}(x)$ есть минимум функции $x(1-c)+(1-x)d$, где c и d связаны уравнением (7). Обратим внимание сначала на то, что функция $1-c-g_n(c)$ есть уменьшающаяся выпуклая функция при изменении c от 0 до 1. Аналогично $g_n(d)-d$ есть уменьшающаяся выпуклая функция. Для $x<\frac{1}{2}$ легко видеть, что для любого значения c единственное значение $d(c)$ определяется уравнением (8). Далее, функция $d(c)$ есть монотонно возрастающая функция от c. Посредством дифференцирования можно легко показать, что минимум функции $xg_n(c)+(1-x)g_n(d)$ достигается тогда, когда c и d связаны уравнением (8) для значений $d=1-c$. В этом случае мы должны были бы получить $g_{n+1}(x)=d$. Но лемма 7 доказывает, что это невозможно для

$$x < \frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}.$$

Точно так же ни одна другая пара уравнений не может одна полностью определить c и d, за исключением окрестности точки $x=0$, где мы должны иметь $c=1$ и $d=\frac{1}{2}$; эти значения получаются как экстремальные решения уравнений $(1-x)(1-d)=(1-x)d+x(1-c)$. Теперь остается только показать, что решение уравнений (6) единственно. Равенство первых двух выражений показывает, что c и d связаны линейной зависимостью. Тогда $y(d)=xg_n(c)+(1-x)g_n(d)$, как функция от d, выпукла. Но линейное выражение $z(d)=(1-x)(1-d)$ может пересекаться с y самое большее один раз, так как $z(0)>$ $>y(0)$. Это доказывает утверждение, что уравнение (6) имеет единственное решение.

Вследствие этой единственности мы делаем вывод, что решения c и d уравнения (6) являются непрерывными функциями от x. Теперь мы покажем, что c и d возрастают при изменении x от $\frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}$ до нуля.

Достаточно показать, что возрастает d, так как соотношение (8) указывает на монотонность изменения c и d в одном направлении при возрастании x.

Вспомним, что, когда $x=\frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}$, мы имеем $d=$ $=1-c=V_{n+1}$ (согласно лемме 7) и, когда x близко к нулю, $d=\frac{1}{2}$, а $c=1$. Далее легко видеть непосредственно из (6), что если $x\leqslant\frac{1}{2}$, то $d\leqslant\frac{1}{2}$.

Далее мы замечаем, как и при доказательстве леммы 7, что $d>V_{n+1}$ для $x<\frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}$. В самом деле, если бы согласно (8) и лемме 7 d равнялось V_{n+1}, то $c=1-d$, а $g_{n+1}(x)$ определялась бы неравенством $(1-x)(1-d)>$ $>(1-x)d+x(1-c)$. Однако тогда утверждение, что величина $(1-x)(1-d)$ может быть сделана меньше небольшим увеличением d, было бы противоречием. Это означает, что для x немного меньше, но вблизи от $\frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}$ справедливо неравенство $\frac{\partial d}{\partial x}<0$.

Покажем теперь, что если $\frac{\partial d}{\partial x} < 0$ для окрестности точки $\frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}}$, то эта производная сохраняет свой знак при уменьшении x. Это основано на следующих трех наблюдениях:

а) При увеличении d и x

$$c = 1 - \frac{1-x}{x}(1-2d)$$

также возрастает. Следовательно, если d становится больше V_{n+1}, то c также возрастает до величины больше, чем $1-V_{n+1}$, и, таким образом, $c > 1-d$ до тех пор, пока $d > V_{n+1}$. Для таких значений c и d мы имеем $g_n(c) > > g_n(d)$.

б) Поскольку g_n выпукла и $g_n'(1) = \frac{1}{2}$, мы имеем $\frac{1}{2} \geqslant g_n'(c) \geqslant 0$ (вопреки тому факту, что g_n есть кусочно-линейная функция, применение производных может быть оправдано стремлением к упрощению рассуждений и не оказывает влияния на строгость нашего доказательства. Действительно, все производные существуют, за исключением конечного числа значений).

с) Непосредственными вычислениями из уравнений (6) можно получить

$$-\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{g_n'(c)[2(1-d)-c]+(1-d)+g_n(c)-g_n(d)}{(1-x)[2g_n'(c)+1+g_n'(d)]}. \tag{9}$$

Это выражение строго положительно в силу неравенств $1 > |g_n'(d)|$; $g_n(c) > g_n(d)$; $|cg_n'(c)| \leqslant \frac{1}{2} < 1-d$. Следовательно, если $-\frac{\partial d}{\partial x}$ положительна вблизи

$$x = \frac{1-2V_{n+1}}{1-V_{n+1}},$$

то предыдущие рассуждения показывают, что утверждение о положительности производной $\frac{\partial d}{dx}$ становится сильнее, если справедливы уравнения (6) и x уменьшается от значения

$$x = \frac{1 - 2V_{n+1}}{1 - V_{n+1}}.$$

Резюмируя выводы приведенного выше анализа, мы имеем следующую теорему.

Теорема 3. *Функция g_n выпукла и достигает своего минимума V_n на интервале значений x*

$$\left[\frac{1-2V_n}{1-V_n}, \frac{V_n}{1-V_n}\right].$$

Кроме того, $V_{n+1} > V_n > \frac{1}{3}$ для $n \geqslant 2$. При изменении x от 0 до $\frac{1-2V_{n+1}}{1-V_n}$ соответствующие значения c и d для $g_{n+1}(x)$ в (3) уменьшаются. Более точно, d меняется от 1/2 до V_{n+1}, а c уменьшается от 1 до $1 - V_{n+1}$. Если $V_{n+1} < d < \frac{1}{2}$ и соответственно $1 - V_{n+1} < c < 1$, то c и d однозначно определяются уравнениями (6).

Из этой теоремы *3* можно получить новое доказательство теоремы *1*, если положить $n = \infty$.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ БОМБАРДИРОВЩИКА

С помощью теоремы *3* можно получить дополнительные качественные характеристики оптимальной стратегии бомбардировщика. Рассмотрим сначала усеченную игру G_n, в которой B должен сбрасывать бомбу в течение первых n единиц времени. Обозначим через p_m^n вероятность того, что B сбросит бомбу в момент m в игре G_n. Другими словами, p_m^n есть сумма всех вероятностей того, что B сбросит бомбу в момент m, принимая во внимание все возможные траектории движения корабля S. Можно, конечно, разложить p_m^n на ее составные части, описывающие тонкую структуру задачи, т. е. куда и с какой вероятностью B прицеливается в одно из возможных положений S на m-ом этапе игры. Для наших целей, однако, достаточно иметь дело с величиной p_m^n. Теперь следует установить, что $p_m^n > 0$, где $n > 1$, $n \geqslant m \geqslant 0$. Предположим, что в какой-то момент m_0 вероятность $p_{m_0}^n = 0$. Тогда, если S придерживается во время первых $m_0 + 1$ шагов своей оптимальной стратегии в игре G_{m_0-1}, а затем применяет оптимальную стратегию в игре G_{n-m_0-1}, то самое большее, что может получить B, это

$$V_{m_0-1} \sum_{i=1}^{m_0-1} p_i^n + V_{m-m_0-1} \sum_{i=m_0+1}^{n} p_i^n < V_n. \tag{10}$$

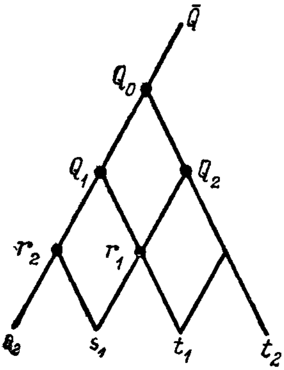
Это неравенство основано на теореме 3, которая утверждает, что $V_j < V_n$ для $j < n$. Поскольку это приводит к противоречию, мы делаем вывод, что для любой оптимальной стратегии B имеется положительная вероятность того, что он может сбрасывать бомбу на каждом ходу.

Нашей следующей задачей является доказательство того, что для B не существует оптимальной стратегии в игре с бесконечным числом ходов. Предположим, что такая стратегия существует и что B следует этой оптимальной стратегии. Пусть S придерживается своей оптимальной стратегии P_0 с небольшими изменениями, которые будут указаны позднее. Предположим, что во время хода, предшествующего моменту, когда B решил сбросить бомбу, S двигался вправо. Тогда из самой природы стратегии P_0 следует, что B должен прицеливаться либо в ту точку, в которой корабль находится в настоящий момент, либо в точку, расположенную на две единицы расстояния вправо. Обозначим через r_1 и r_2 вероятности того, что B будет прицеливаться в эти две точки. Через одну единицу времени возможны два исхода:

а) S продолжает движение вправо;

б) S повернул в обратном направлении.

Те же самые рассуждения показывают, что в случае а) S сбрасывает бомбу, прицеливаясь в текущее положение цели с вероятностью s_1 и прицеливаясь вправо на две единицы с вероятностью s_2. В случае б) он прицеливается в текущее положение с вероятностью t_1 и влево на две единицы с вероятностью t_2. Следующая схема может помочь понять эти операции.



Если B сбрасывает бомбу в момент, когда он видит S в точке Q_0, тогда, согласно нашим рассуждениям, он прицеливается с вероятностью r_1 в одну точку и с вероятностью r_2 — в другую точку, как показано на схеме. Аналогично, если B сбрасывает бомбу в точке Q_1, то вероятность того, что он поразит цель, находящуюся в одной точке, равна s_1, а вероятность поражения цели в другой точке равна s_2. Такую же интерпретацию можно придать вероятностям t_1 и t_2. При этом мы можем записать следующие соотношения:

$$s_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2} = r_1 - r_2, \tag{11}$$

$$t_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2} = r_1. \tag{12}$$

Посмотрим, каков будет платеж, если S отклоняется от своей стратегии только в точке Q_1 таким образом, что он продолжает движение влево с вероятностью γ и изменяет направление движения с вероятностью $(1-\gamma)$. После этого S продолжает действовать соответственно стратегии P_0. Подсчитаем условный платеж для B при условии, что S перемещался от $\bar{Q}$ к Q_0. Полный ожидаемый платеж для B в соответствии с тремя имеющимися возможностями равен

$$r_2\frac{\sqrt{5}-1}{2}\gamma+r_1\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}(1-\gamma)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]+s_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\gamma+s_1\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}+$$
$$+t_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2+t_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Подставляя $\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\varepsilon$, получим

$$(r_2+r_1)\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\left[(s_2+s_1)\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\right.$$
$$\left.+(t_2+t_1)\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\frac{3-\sqrt{5}}{2}+$$
$$+\varepsilon\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(r_2-r_1+s_2\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Однако

$$(r_2+r_1)+(s_2+s_1)\frac{\sqrt{5}-1}{2}+(t_2+t_1)\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

есть условная вероятность того, что B сбросит бомбу в последующие два хода при условии, что S переместился от $\bar{Q}$ в Q_0. Так как согласно стратегии P_0 платеж для B равен

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

то, поскольку ε имеет любой знак, должно выполняться условие

$$r_1-r_2=s_2\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Соотношение (12) выводится на основании аналогичных рассуждений посредством замены стратегии P_0 для S только в точке Q_2 на случайную смесь стратегий.

Аналогичная группа уравнений получается, если S выбрал перемещение влево. Мы используем эти уравнения, чтобы доказать, что у бомбардировщика не существует оптимальной стратегии. Обозначим через p_1 вероятность сброса бомбы бомбардировщиком в первый ход. Очевидно, что в этом случае B должен прицеливаться в точку начального положения S. Как и в случае уравнения (12), мы получим

$$r_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2} \geqslant p_1,$$

причем мы считаем точку Q_0 на нашей схеме начальной исходной точкой корабля S. Уравнение (11) означает, что $r_1 \geqslant r_2$. Таким образом, мы приходим к выводу, что любая из составляющих вероятностей p_2 сброса бомбы на втором ходу больше, чем $\dfrac{p_1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Повторяя те же рассуждения для последовательного применения (11) и (12), мы получим, что вероятность бомбометания в последующие ходы возрастает в $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ раз.

Так как сумма вероятностей должна равняться единице, то единственно возможным объяснением этого положения может быть то, что $p_1=0$. После первого шага ситуация симметрична относительно начального положения. Поэтому мы приходим к заключению, что вероятность сброса бомбы на любом ходу должна равняться нулю. Таким образом, доказывается теорема 4.

Теорема 4. *В бесконечной игре у B нет оптимальной стратегии. В любой усеченной игре G_n существует положительная вероятность сброса бомбы на любом ходу.*

Уравнения (11) и (12), интересные сами по себе, подсказывают построение специальной стратегии для B в любой усеченной игре, имеющей эффективность ε. Мы, однако, не разбираем здесь этот вопрос.

В заключение статьи следует заметить, что можно получить другое доказательство первой части теоремы 4, основываясь на том, что $g'(V)=0$. Это выполнено в статье Дубинса [2].

ЛИТЕРАТУРА

1 H E S c a r f a n d L. S S h a p l e y Games with partial information. Contributions to the theory of games, 1957, vol III, p. 213—229.
Х. Э. С к а р ф и Л. С. Ш э п л и Игры с неполной информацией (см настоящий сборник)

2 L E. D u b i n s A discrete evasion game Contributions to the theory of games, 1957, vol. III, p. 231—255
Л Э Д у б и н с. Дискретная игра на уклонение от преследования (см настоящий сборник).

3 R. I s a a c s The problem of aiming and evasion. Naval Research Logistics Quarterly, 1955, vol 2, p 47—67

РОЛЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИГР В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ

Клэйтон Дж Томас и *Уолтер Л. Димер, мл.**. Отделение анализа операций штаба ВВС США, Вашингтон, округ Колумбия

1. ВВЕДЕНИЕ

Научное исследование реальной конфликтной ситуации обычно приводит к изучению более простой конфликтной ситуации, которая может быть сформулирована в виде игры, т. е. некоторого множества правил, полностью определяющих возможные направления развития конфликта. Под изучением игры понимается ее формулирование, решение и указания относительно ее использования. При таком изучении применяются два основных метода: использование аналитической теории игр и использование моделирования игр. До сих пор недостаточно ясно понимали, что как аналитический метод, так и метод моделирования, несмотря на их различие, требуют применения модели реальной ситуации. Ни один из этих методов не связан непосредственно с самой действительностью. Более того, только в том случае, если действительность представлена в виде строго сформулированной игры вместе с полным набором правил, ее решение поддается определению. В своих усилиях по отысканию решения такой игры сторонники аналитического метода и сторонники метода моделирования должны исходить от одной и той же отправной точки, а именно от правил игры. Процесс моделирования игр сильно страдает от отсутствия строгого метода определения требуемого объема выборки партий игры. Этот объем (хотя и не

* Clayton J. Thomas and Walter L Deemer, jr. The role of operational gaming in operations research. Operations Research, 1957, vol 5, p 1—27.

известен точно) гораздо больше, чем обычно предполагают. В то время как из вероятностных соображений необходимо, чтобы выборка партий была адекватной *статистически,* то обстоятельство, что проблема носит характер соревнования, требует, чтобы она была адекватной *стратегически.* Как раз это последнее требование часто и не учитывается.

Моделирование игр является одним из самых изменчивых и парадоксальных разделов всей теории исследования операций. Провозглашенное в качестве нового аппарата исследования ситуаций соревнования, моделирование игр происходит от старых военных игр, с помощью которых в военных академиях издавна изучают тактику. Применяемое для изучения серьезных и важных проблем, моделирование игр сопровождается таким же азартом, который характерен для салонных игр. Моделирование игр часто использует статистический метод Монте-Карло, требующий больших выборок, и в то же время при таком моделировании иногда ограничиваются одной-двумя партиями игры. Некоторые из наиболее сложных применений моделирования игр требуют месяцев работы, хотя иной раз моделирование игр используется, чтобы высказать заключение, основываясь на одном вечере такой игры.

Эти парадоксы объясняются разнообразием методов, исторически предшествовавших моделированию, и разнообразием его современных приложений. Моделирование является популярной и развивающейся областью, которая охватывает постоянно меняющийся арсенал методов. В то время как некоторые методы исчезают, другие выступают на первый план. Точно так же постоянно меняется круг людей, применяющих моделирование практически.

Хотя такая изменчивость часто способствует внедрению новых идей, она может, однако, помешать детальному анализу и разумному выбору этих новых идей, что весьма существенно для здоровой творческой деятельности. Ни один единичный пример применения не в состоянии характеризовать все стороны такого изменчивого предмета, как моделирование игр. Более того, отдельные особенности, характерные для текущей практики, могут оказаться негодными в будущем. Поэтому существует опасность отказа от какого-нибудь метода, давшего случайно неверные результаты. С другой стороны, существует еще бóльшая опасность принять и рекомендовать какой-нибудь негодный метод, не обращая внимания на некоторые случаи его непригодности на том основании, что ни один из примеров не может заслуживать доверия.

Наша статья о роли моделирования игр перед лицом таких препятствий, которые являются неизбежными до окончательной кристаллизации методологии, преследует двойную цель. Во-первых, сам аморфизм * предмета предоставляет возможность посредством его тщательного рассмотрения наклонить всю ветвь будущего, уцепившись за веточку настоящего. Во-вторых, и это более важно, опыт показывает, как трудно распознать случаи, когда моделирование либо ведет к ошибочным результатам, либо оказывается хуже других методов. Поэтому внимательное исследование может помочь выявить истинную роль моделирования игр.

Такого исследования не встречалось до сих пор нигде в литературе по моделированию, с которой мы знакомы. В большинстве опубликованных работ приводятся частные заключения, основанные на отдельных примерах, и почти не рассматривается роль моделирования игр, как метода. В работах Муда и Шпехта [9] и Пирмена и Уайтмора [11], касающихся методологии, высказаны некоторые сомнения относительно границ области применения моделирования игр, которые разделяем и мы. В статье Смита [13] предлагается рассмотреть рациональную сущность моделирования игр. Ни одна из этих работ, однако, не прибегает к помощи теории стратегических игр, которая, по нашему мнению, может оказаться существенной при исследовании моделирования игр, как общего метода.

Поэтому в настоящей статье мы подчеркиваем, как важно иметь прочные основы при выяснении вопроса о том, где может оказаться полезным моделирование игр. Во второй части статьи содержатся некоторые элементы, необходимые при разумном исследовании вопроса: определения, теоретические основы, иллюстративный пример. Среди определений имеется определение *моделирования игр*, позволяющее отличить его от *имитирова-*

* Аморфизм — бесформенность, аномальность (*Прим перев*)

ния («симулирования») и от *метода Монте-Карло,* с которыми его часто путают, и связывающее его с понятием *о партии игры.* Поэтому в качестве основы для дальнейшего изучения дан краткий очерк теории стратегических игр. Далее на иллюстративном примере показываются два различных подхода к одной простой игровой ситуации. В третьей части, следующей за этой неизбежной и длительной подготовительной стадией, произведено практическое сравнение метода моделирования игр и других методов. В заключение на базе теории, изложенной во второй части, и сравнений, проведенных в третьей части, в четвертой части сформулированы наши выводы.

По сравнению с выводами большинства авторов работ по моделированию наши выводы относительно роли моделирования осторожны, более того, пессимистичны. Мы не искали этих непопулярных выводов и не предвидели их. Скорее всего, они сами постепенно овладели нами. Когда теоретические исследования во второй части обнаружили невероятную сложность ситуаций соревнования, оставалась еще возможность того, что каким-то таинственным способом эти трудности, непреодолимые для других методов, могут быть устранены моделированием игр. В третьей части, однако, показано, что, несмотря на уникальные преимущества в некоторых отношениях, моделирование игр, применяемое в качестве практического метода исследования, очень часто дает худшие результаты, чем другие способы. Желательно, конечно, дальнейшее изучение этого вопроса, и оно, может быть, даст более убедительные и обнадеживающие доказательства потенциальных возможностей моделирования. А пока, видимо, бремя доказательств, теоретических или практических, следует возложить на тех, кто горячо защищает идею применения моделирования для решения игр.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРИМЕР

В этой части мы излагаем основы дальнейшего материала статьи. Мы должны ввести наиболее существенные понятия и дать тщательные определения. Для объяснения некоторых понятий и определений мы пользуемся иллюстративными примерами.

Трудно прийти к общему соглашению о терминологии, принятой в настоящее время в области моделирования игр, поскольку терминология, исторически сложившаяся в этой области, претерпела сильные изменения.

Традиционные военные игры, метод Монте-Карло, салонные игры и теория игр фон Неймана — Моргенштерна, — все они выдвинули свои идеи и свою терминологию. Помимо этого исторически сложившегося смешения, часто возникают различные местные толкования, вызванные желанием удовлетворить нужды частных проблем.

Из этого ошеломляющего изобилия иногда совершенно противоречивых понятий мы выбрали то, что отвечает нашим частным интересам. Поскольку значительная часть нашего материала базируется на теории стратегических игр, то многие термины в нашей статье почерпнуты именно из теории игр. Если какой-нибудь термин обычно применяется также в другом значении, то мы стараемся ограничить его смысл тем значением, которое он имеет в теории игр.

В разделе *А* данной части установлено, что существо моделирования игр заложено в партии игры. С другой стороны, в этом разделе произведено разграничение между *моделированием игр, имитированием* и *методом Монте-Карло*. В популярной литературе все эти три термина применяются так, как будто бы они являются синонимами. Мы считаем, поэтому, полезным выявить различия и использовать существующие здравые основания для того, чтобы связать эти термины с совершенно различными понятиями.

В разделе *В* дан очерк теории стратегических игр. Мы хотим, чтобы читатель понял, чтó желательно получать в результате решения игры. В интересах краткости изложения мы дали только то, что нам казалось существенным. Для читателя, который хотел бы углубить свои знания, мы приводим список наиболее полезной литературы.

В разделе *С* рассмотрено приложение метода моделирования игр и других методов к проблеме простого поиска, которая сформулирована в виде игры. Наша цель при этом — показать некоторые приемы применения этих альтернативных методов и дать читателю возможность почувствовать их вкус. Изучив приведенный пример, можно убедиться, что как моделирование, так и другие методы помогают лучше понять проблему, но не дают ее полного решения.

А. Имитирование, метод Монте-Карло и моделирование игр

По духу и методике имитирование, метод Монте-Карло и моделирование игр обнаруживают очевидное сходство. И в самом деле, некоторые авторы считают, что сходство переходит в тождественность, и полагают, что моделирование игр является частным случаем имитирования или метода Монте-Карло. Так, Рич [12] пишет: «С современной точки зрения военная игра является не чем иным, как частным видом имитирования», а Смит [13] определяет моделирование игр так: «..применение метода Монте-Карло для решения игр». С другой стороны, Кашен [2] иллюстрирует моделирование игр применением комбинации методов имитирования и Монте-Карло для решения такой проблемы, которая в обычном смысле не является игрой вообще. При таких прецедентах в литературе, естественно, что в обиходе все три термина часто рассматривают как синонимы, обозначающие некоторый достаточно неясный предмет.

Признавая отмеченное выше сходство, желательно, тем не менее, для ясности связать термины имитирование, метод Монте-Карло и моделирование игр со своими понятиями Такое уточнение почти не нарушает их первоначального значения и не противоречит существующей практике. Например, выделение термина «имитирование» основано на дифференциации его общего или словарного значения, которое приложимо почти ко всем методам решения проблем, и его более узкого значения, которое может быть связано до некоторой степени с современным использованием *физических моделирующих устройств.* При рассмотрении термина *Метод Монте-Карло* мы приводим его формальное определение, но указываем, что его обычное применение часто несколько менее ограничено. В заключение этого раздела дано определение *моделирования игр,* которое отражает, по нашему мнению, самое его существо.

Имитирование (симулирование) является существительным, происходящим от глагола *имитировать* (симулировать), который согласно словарю Вебстера означает «принимать вид чего-нибудь, не будучи им в действительности». Указывается также, что выражение «принимать вид» часто предполагает извинительную мотивировку, а не намерение ввести в заблуждение, а *имитировать* означает принять вид посредством изображения определенных признаков. Эти замечания относятся к применению слова *имитирование* (симулирование) для описания поведения людей. В этом случае обычно принято осуждать то, что симулирование связано с отвлечением от реальности. Важно отметить, однако, что в самом корне успешно развивающегося *технического имитирования* должна лежать нереальность. Если бы можно было иметь дело непосредственно с реальностью, то не было бы нужды в имитировании. Эта мысль подсказывает возможность перефразировать определение Вебстера: *имитировать* означает достичь существа чего-нибудь, не будучи им в действительности.

Более обычное применение слова *имитирование* в техническом смысле относится к частному случаю определения, данного выше, и означает использование физических имитирующих устройств. В этой области существуют различные тренажеры от имитатора управления из кабины летчика-истребителя до имитатора мостика боевого корабля. Имеются испытательные установки, которые создают искусственные внешние условия, ожидаемые в процессе действительной работы. Существуют такие способы решения технических проблем, которые позволяют определять свойства какой-нибудь физической системы посредством изучения аналогичной, но более удобной, вторичной физической системы. Так, например, имеется метод исследования процесса разрыва боевой головки снаряда посредством использования источника радиации и счетчика Гейгера. Другие возможности в этом направлении описаны у Кашена [2] и Рича [12].

Очень важно отметить значение для успешного технического *имитирования* как в общем, так и в частном смысле достижения «существа чего-нибудь, не будучи им в действительности». Например, кабина Линка * вы-

* «Кабина Линка» — распространенное название тренажера — имитатора условий слепого полета. (*Прим. перев.*)

полняет свое назначение лучше, чем реальный самолет, именно потому, что она не является действительным самолетом. Из всех свойств летящего самолета были извлечены и воплощены в тренажере те свойства, которые наиболее полезны для тренировки летчика. Добавление к тренажеру нескольких реактивных двигателей и фюзеляжа с полным оперением было бы имитацией признаков, но было бы плохой моделью. В области решения проблем справедливы те же принципы, что и для целей тренировки. Мы должны осудить тенденцию вводить при имитировании различные ненужные детали, чтобы достичь «видимости» действительности, так как все, что нам требуется, это — существо. Дурные последствия чрезмерной тщательности при имитировании хорошо показаны на примере, приведенном в статье Хэрли [5].

Метод Монте-Карло является техническим термином, который первоначально применялся в духе определения Хаусхолдера [4]: «Метод Монте-Карло может быть кратко определен как способ изучения искусственной стохастической модели какого-нибудь физического или математического процесса. Этот способ, безусловно, не нов. Более того, теория стохастических процессов была предметом изучения уже в течение длительного времени, и новизна метода Монте-Карло заключается не в этом. Она заключается в предположении, что если какое-нибудь уравнение, полученное в невероятностном контексте, требует численного решения, которое трудно получить с помощью стандартных численных методов, то, возможно, существует некоторый стохастический процесс с распределениями или параметрами, удовлетворяющими этому уравнению. Благодаря этому может оказаться более эффективным построить такой процесс и накопить необходимые статистические данные, чем пытаться использовать стандартные численные методы».

Главное отклонение общепринятого значения от только что приведенного заключается в широком распространении практики применения слов «метод Монте-Карло» для характеристики почти любого метода, включающего рассмотрение распределения вероятностей. Немногие в настоящее время ограничивают этот метод изучением «искусственной стохастической модели». Главная опасность такого расширения области применения заключается в ошибочном представлении, что для изучения стохастических процессов стандартные методы совершенно не подходят. Поэтому в любом возможном определении метода важно подчеркнуть, что *метод Монте-Карло* является таким методом, в котором необходимо производить выборку из стохастического процесса и осуществлять статистическую оценку. Относительные достоинства метода Монте-Карло и стандартных методов зависят от свойств изучаемых проблем, которые трудно поддаются определению.

Теперь, когда нами предложены определения методов *имитирования* и *Монте-Карло,* полезно рассмотреть иллюстративную задачу, которая может быть решена как этими методами, так и более стандартными или аналитическими методами. Подобный выбор методов имеется, например, при исследовании свойств очереди, в которой поступление и обслуживание клиентов подчиняется некоторому определенному случайному закону. Стандартный или аналитический метод состоит в составлении системы дифференциальных уравнений и в их точном или приближенном решении с помощью бумаги и карандаша или с помощью вычислительной машины. Метод Монте-Карло, как правило, использует электронные вычислительные машины для получения случайных чисел, представляющих поступление и обслуживание. Метод имитирования, рассматриваемый в ограниченном смысле, как использование физических моделирующих устройств, может для введения требуемого случайного элемента использовать, например, некоторый источник радиации.

Хотя методы *имитирования* и *Монте-Карло* часто применяются при моделировании игр, тем не менее нам кажется, что существо *моделирования игр* заключается в том, что его основой являются реализации партий игры (*разыгрывание* игры). Существует *разыгрывание* для *формулирования* игры, разыгрывание для *решения* игры, разыгрывание для *обучения* игре. Таким образом, мы определяем *моделирование игр* как научное использование разыгрывания в качестве основного инструмента для формулирования игры, решения игры или для обучения игре.

Теперь мы можем связать наше определение *моделирования игр* с определениями *имитирования* и *метода Монте-Карло,* приведенными раньше. Следует отметить, что широкое значение слова «имитирование» включает в себя понятие моделирования игр, точно так же, как оно включает в себя способы решения проблем или тренировки людей. С другой стороны, физические имитирующие устройства и методы Монте-Карло часто используются при моделировании игр, но не являются существенными для него. Наше определение, например, включает в себя и такой процесс, при котором два партнера играют подряд много партий в игру «тик-так-ту» * для того, чтобы выявить свои оптимальные стратегии, как пример моделирования игр, в котором не используются ни физические имитирующие устройства, ни методы Монте-Карло. В связи с этим следует отметить, что в нашем определении моделирования игр мы избегаем такого толкования, при котором проблема нахождения максимума или минимума могла бы рассматриваться как игра с одним игроком.

В нашем определении моделирования игр сильный упор сделан на термины *партия* и *игра*. Несмотря на интуитивную ясность, эти термины требуют разъяснения и иллюстрации. Раздел *В* имеет своей основной задачей дать очень краткий обзор некоторых в высшей степени полезных работ в этой области. Эти работы являются теоретическими разработками идей, высказанных первоначально фон Нейманом и Моргенштерном [14].

В. Теория стратегических игр как основа моделирования игр

В предложенном нами определении указывается, что с помощью моделирования игр осуществляется формулирование игр, решение игр или обучение играм. Поэтому знакомство с теорией игр поможет разумному анализу моделирования игр. Возможность оценивать структуру игр и природу их решений помогает анализировать процесс моделирования игр и судить об его результатах.

В рамках настоящей статьи мы можем дать только самое слабое представление о полезности теории игр. Это мы и попытаемся сделать в остальной части главы. Однако мы настоятельно советуем заинтересованным

---

* Детская игра с карандашом и бумагой, широко распространенная в Англии и в США (*Прим перев.*)

читателям расширить свои знания за пределы даваемого нами обзора. По теории игр имеются пособия любого научного уровня. Мы укажем некоторые из них. Книга фон Неймана и Моргенштерна [14] является, конечно, классическим введением в теорию игр. Многие выдающиеся результаты, достигнутые в дальнейшем, включены в сборники, издаваемые Куном и Тэкером [6,7]. Тщательно составленная книга Мак-Кинси [8] является текстом на уровне студенческих знаний. Вильямс [15] создал исключительно удачную популярную книгу.

Наш очерк теории игр посвящен исключительно парным играм с нулевой суммой. Этот тип игр имеет важное значение по двум причинам. Во-первых, классики теории игр стремились свести анализ более общих игр к анализу этого основного типа игр. Во-вторых, большинство теоретических работ и практически все моделирование игр связано с этим типом игр.

Название *парная* означает, что в игре принимают участие две заинтересованные стороны, причем одна из них или обе могут состоять из групп людей, имеющих одинаковые интересы, поскольку речь идет об игре. Так, конфликт между двумя нациями может рассматриваться как парная игра. Обе мировые войны являются еще более сложными примерами, в которых каждый игрок соответствует группе союзных стран. Если обратиться к области салонных игр, то бридж есть парная игра, каждый «игрок» которой состоит из двух союзных партнеров. Шахматы, конечно, являются совершенно очевидной парной игрой.

Дальнейшее сужение парной игры до игры с *нулевой суммой* означает, что интересы игроков диаметрально противоположны. То, что проигрывает один игрок, выигрывает другой. Таким образом, не существует никаких возможностей для взаимно выгодного сотрудничества. Предметом моделирования игр в прошлом и настоящем являются главным образом игры с нулевой суммой. Если в будущем, однако, будет рассматриваться, например, конфликт между двумя соревнующимися крупными компаниями по производству автомобилей, то игра с нулевой суммой может оказаться несостоятельной для представления общих интересов обеих корпораций, состоящих в желательности расширения общего спроса на автомашины. Многие подобные примеры ситуаций, выходящих за рамки игр с нулевой суммой, включают в себя экономические тонкости такого же характера.

Одной из больших заслуг фон Неймана и Моргенштерна [14] является доказательство того, что любая игра с конечным числом чистых стратегий может быть представлена в *нормальной форме*, которая очень наглядно демонстрирует стратегическую структуру игры. Многие игры настолько сложны и запутаны, что записать их в полной нормальной форме либо совсем невозможно, либо нерационально. Эта форма, однако, является настолько важным идейным орудием, что мы попытаемся описать несколько подробнее ее природу.

Для понимания нормальной формы игры существенную роль играет понятие *чистой стратегии*. Формально чистая стратегия игрока в какой-нибудь игре есть некоторое правило или доктрина, которая предписывает ему произвести некоторый частный выбор из всех мыслимых альтернатив и из всех возможных ситуаций, независимо от того, какая ему доступна информация относительно результатов случайных процессов и действий других игроков. Действительное перечисление чистых стратегий в реальных играх может вызвать затруднения. В самом деле, реальные игры настолько сложны, что получили специальное название *игр в развернутой форме*. Чистая стратегия должна включать в себя всю последовательность выборов и решений, сделанных игроком в процессе одной партии игры в развернутой форме, какой бы сложной она ни была.

Разрешив осложнения относительно чистых стратегий игры, мы можем теперь заменить *развернутую форму* сравнительно простой *нормальной формой*. Во время партии игры в нормальной форме игрок делает только один выбор, а именно выбор одной из своих чистых стратегий. После того как такой комплексный выбор сделан и сообщен беспристрастному посреднику, последний может проследить весь ход игры, как если бы использовалась *развернутая форма* игры. Чистые стратегии показывают, что́ должны делать игроки на каждом этапе игры, причем игроки могут использовать механические устройства для внесения эффекта случайности, предусмотренного правилами игры.

Таким образом, пара чистых стратегий парной игры в *нормальной форме*, по одной на каждого игрока, полностью определяет исход партии игры в *развернутой форме*, если исключить эффект случайности. Когда в игре имеется элемент случайности, а следовательно распределение вероятности исходов для каждой данной пары стратегий, пользуются соответствующим ожидаемым значением исхода игры. Согласно постулатам о полезности, введенным фон Нейманом и Моргенштерном, именно в этом ожидаемом значении и должен быть заинтересован каждый игрок.

Игра в своей *нормальной форме* может быть представлена в виде матрицы или таблицы, строки которой соответствуют чистым стратегиям одного из игроков, а столбцы — чистым стратегиям другого игрока. Числа в клетках матрицы обозначают ожидаемые результаты или *платежи*, откуда происходит название *платежная матрица*. В действительности существуют две различные платежные матрицы, для каждого игрока своя. Однако благодаря тому, что игра имеет нулевую сумму, элементы одной матрицы равны элементам другой матрицы, но с обратным знаком. Поэтому достаточно иметь одну матрицу, скажем, матрицу платежей игроку I от игрока II или от Красных Синим.

В качестве примера платежной матрицы игры в нормальной форме рассмотрим следующую таблицу

Стратегии Красных	Стратегии Синих		
	первая	вторая	третья
Первая . .	6	5	4
Вторая . .	10	20	3

Две строки соответствуют двум чистым стратегиям Красных, а три столбца — трем чистым стратегиям Синих. Элементы матрицы представляют собой платежи Синих Красным. Так, например, если Красные применяют свою вторую чистую стратегию, а Синие — свою первую чистую стратегию, то ожидаемый выигрыш Красных равен 10, а ожидаемый проигрыш Синих — тоже 10.

У этой игры очень простая структура. Каждый игрок имеет одну чистую стратегию, которую он должен применять в каждой партии игры, если он хочет играть оптимальным образом. Для Красных, например, оптимальной является их первая чистая стратегия, применяя которую, они гарантируют себе платеж или 6, или 5, или 4, т. е. по меньшей мере 4. Оптимальная стратегия Синих — третья. Применяя ее, они обеспечивают себе ожидаемый проигрыш 4 или 3, т. е. не больше, чем 4. Поскольку Красные могут обеспечить себе выигрыш не менее, чем 4, а Синие могут добиться проигрыша не более, чем 4, то комбинация обеих оптимальных стратегий дает ожидаемый платеж ровно 4. Таким образом величина 4 есть *цена игры.*

Элемент «4» воплощает в себе то, что носит название *седловая точка.* Если строки *платежной матрицы* соответствуют выборам максимизирующего игрока, а столбцы — выборам минимизирующего игрока, то *седловой точкой* матрицы является тот элемент матрицы, который одновременно является максимумом в своем столбце и минимумом в своей строке. Каждый игрок имеет оптимальную чистую стратегию тогда и только тогда, когда *платежная матрица* имеет *седловую точку.*

В качестве примера платежной матрицы игры с более сложными оптимальными стратегиями рассмотрим матрицу

Стратегии Красных	Стратегии Синих	
	первая	вторая
Первая . .	4	2
Вторая . .	1	7

У этой матрицы нет седловой точки. Ни у одного из игроков нет единственной чистой стратегии, которая была бы оптимальной. Самое большее, на что могут рассчитывать Красные, применяя какую-нибудь одну чистую стратегию, — это получить 2. Самое меньшее, что могут потерять Синие, — это 4. Разрыв между платежами 2 и 4 указывает на необходимость применения *смешанных стратегий.* У каждого игрока имеется своя оптимальная смешанная стратегия. Оптимальная стратегия Красных состоит в смешивании первой стратегии с вероятностью $^3/_4$ со второй стратегией с вероятностью $^1/_4$. Для этого у них должен быть какой-то механизм случайного выбора, чтобы устранить какую бы то ни было закономерность в своих выборах от одной партии к другой. Эта смесь стратегий обеспечивает Красным выигрыш 3,25, который не зависит от выбора Синих, т. е.

$$(3/4)\times 4+(1/4)\times 1=3{,}25=(3/4)\times 2+(1/4)\times 7.$$

Оптимальная смешанная стратегия Синих состоит из их первой стратегии, применяемой с вероятностью $^5/_8$, и их второй стратегии, применяемой с вероятностью $^3/_8$. Для осуществления этой смешанной стратегии они также должны иметь механизм случайного выбора. Эта смешанная стратегия дает Синим проигрыш 3,25, который не зависит от выбора Красных, т. е.

$$(5/8)\times 4+(3/8)\times 2=3{,}25=(5/8)\times 1+(3/8)\times 7.$$

Так как Красные могут обеспечить себе выигрыш не менее 3,25, а Синие могут гарантировать проигрыш не более 3,25, то комбинация их оптимальных смешанных стратегий дает платеж точно 3,25. Это и есть *цена игры.*

Одна из наиболее важных теорем книги [14] утверждает, что любая парная игра с нулевой суммой, нормальной формой которой является матрица с конечным числом чистых стратегий, имеет *цену игры.* В наших двух примерах мы попытались показать характерные свойства цены игры. Точное определение цены игры и методы ее вычисления читатель может найти в рекомендованной нами литературе.

Основной целью, которую мы преследовали в этом кратком очерке, было дать понятие о теории игр для того, чтобы в дальнейшем облегчить обсуждение моделирования игр. Нам кажется, что опыт, приобретенный при анализе простых игр, может оказать большую пользу при суждении о потенциальных возможностях использования моделирования для изучения сложных игр. Опыт, получаемый при обращении с чистыми стратегиями и платежными матрицами, помогает представить, в чем состоит решение игры. Пример, приведенный в разделе *C*, предназначен в дальнейшем для иллюстрации некоторых понятий, введенных нами в этом разделе, и для понимания применения проигрывания игр при их изучении.

С. Пример исследования игровой ситуации методом моделирования и аналитическими методами

Проблема, рассмотренная в этом разделе, выбрана нами исключительно в виде иллюстративного примера. Мы не преследовали цели дать количественную оценку методов. Пожалуй, невозможно найти такую игровую ситуацию, которая была бы признана типовой всеми исследователями. Мы, конечно, также не собираемся объявить наш пример типовым. Единственное достоинство этого примера для наших целей состоит в его очевидной пригодности для применения различных методов решения.

В работе Морза [10] рассмотрена интересная проблема, описание которой приводится ниже.

Подводная лодка должна пройти через пролив и не быть обнаруженной патрульным самолетом, который пролетает над проливом туда и обратно каждый день. Подводная лодка может избежать обнаружения, погружаясь в воду, но мы предположим, что она в погруженном состоянии может проплыть самое большое a километров и что это расстояние меньше длины пролива. Она может погружаться и всплывать несколько раз, но общее расстояние, проплываемое ею под водой, не должно превышать a километров.

Предполагается, что пролив настолько широкий, что самолет может сделать только несколько полетов за день. Поэтому самолет должен ежедневно выбирать себе участок пролива для патрулирования. Если он выбирает широкую часть пролива, то число пересечений пролива уменьшится, и вероятность обнаружения, даже если лодка всплывает на поверхность в этом участке, будет меньше, чем при патрулировании в узкой части пролива.

Морз дает аналитическое решение сформулированной задачи.

Для наших целей удобно немного изменить формулировку задачи. Мы примем, что патрулирование осуществляют два самолета. Пролив может быть представлен для наших целей в виде квадратов.

Ниже представлена одна из возможных ситуаций. Здесь приведены возможные значения входных параметров:

Участки пролива (квадраты)	A	B	C	D
Вероятность обнаружения, когда самолет патрулирует на данном участке и подводная лодка всплывает на этом участке	0,20	0,40	0,60	0,80

Подводная лодка должна всплыть в двух различных квадратах. Каждый самолет может патрулировать только в одном квадрате. Если в квадрате, в котором всплывает подводная лодка, нет патрулирующих самолетов, то вероятность обнаружения равна нулю. Если же в этом квадрате патрулирует один самолет, то вероятность обнаружения равна той величине, которая записана в соответствующем столбце. И, наконец, если в каждом квадрате, в котором всплывает лодка, патрулирует один самолет, то полная вероятность обнаружения равна сумме частных вероятностей минус их произведение.

При такой формулировке задачи имеется десять возможных стратегий поиска и шесть возможных стратегий всплытия лодки. Вероятности обнаружения для результирующих комбинаций приведены в табл. 1. Для наших целей мы будем считать таблицу *1 платежной*

Таблица 1

Вероятность обнаружения в игре „Поиск самолетом подводной лодки"

Стратегии поиска	Стратегии всплытия подводной лодки					
	AB	*AC*	*AD*	*BC*	*BD*	*CD*
AA	0,36	0,36	0,36	0,00	0,00	0,00
AB	0,52	0,20	0,20	0,40	0,40	0,00
AC	0,20	0,68	0,20	0,60	0,00	0,60
AD	0,20	0,20	0,84	0,00	0,80	0,80
BB	0,64	0,00	0,00	0,64	0,64	0,00
BC	0,40	0,60	0,00	0,76	0,40	0,60
BD	0,40	0,00	0,80	0,40	0,88	0,80
CC	0,00	0,84	0,00	0,84	0,00	0,84
CD	0,00	0,60	0,80	0,60	0,80	0,92
DD	0,00	0,00	0,96	0,00	0,96	0,96

матрицей парной игры с нулевой суммой, в виде которой может быть представлена наша задача.

Десять строк соответствуют десяти чистым стратегиям командира, организующего воздушное патрулирование. Шесть столбцов соответствуют шести чистым стратегиям командира подводной лодки. Командира воздушного патруля мы назовем Красной стороной, а командира подводной лодки — Синей стороной.

Прежде чем перейти к описанию двух различных подходов к решению этой игры, мы считаем уместным высказать следующее предупреждение. На практике игра, которую формулируют в качестве модели некоторой ситуации соревнования, часто зависит от аппарата, который собираются применить для ее решения. Вполне вероятно, что ни сторонник моделирования, ни его противник не выбрали бы в точности этот вариант, который выбрали мы. Даже два различных исследователя, применяющие один и тот же общий метод, могут по-разному подходить к решению задачи. Наша цель, однако, чисто иллюстративная. Мы искали формулировку, достаточно сложную, чтобы задача не имела очевидного решения, и в то же время достаточно простую, чтобы ее можно было решить. Кроме того, мы хотели иметь такую задачу, которая позволяла бы применять различные методы решения. Анализ достоинств и недостатков мы производим в части *3* статьи.

В тех же демонстрационных целях мы считаем полезным принять позу беспристрастного наблюдателя. Вы, читатель, и мы, авторы, обладаем привилегией знать содержание таблицы *1*, т. е. *платежной матрицы*. Что же касается бедного исследователя, то мы предположим, что ему она не только неизвестна, но у него даже нет никаких средств для ее вычисления. Это соответствует обычно встречающимся ситуациям, содержание которых настолько сложно, что записать *нормализованную игру,* представляющую данную ситуацию, в явной форме трудно или даже невозможно. Поскольку мы взираем на усилия исследователя с высоты, то мы можем в качестве критерия качества его результатов принять «истинное» решение. Это положение похоже на то, как если бы мы пробирались наощупь в четырехмерное пространство, наблюдая усилия двухмерного существа понять третье измерение, которое нам хорошо известно.

Начнем с противника моделирования игр, которому доступна первая, исходная, таблица. Он знает, что должно существовать нечто вроде таблицы *1*, но для него она находится в густом тумане. У него нет надежды вычислить все элементы матрицы. По своему прошлому опыту он, однако, кое-что знает относительно структуры простых игр. Он надеется, что и в этой игре он обнаружит знакомые ему элементы. Таким образом, у него есть надежда заглянуть несколько поглубже в сущность игры.

Одним из приемов, который он может использовать, является построение более простой игры, которая представляла бы ту же самую основную конфликтную ситуацию. Так как исходная таблица дает очень громоздкую матрицу, он может заменить ее следующей таблицей, отражающей упрощение входных данных поисковой игры:

Квадраты	*AB*	*CD*
Вероятность обнаружения (при поиске одним самолетом)	0,30	0,70

В этой упрощенной игре он может ограничить возможные районы всплытия лодки квадратами *AB* и *CD*. Самолеты также могут производить поиск только в квадратах *AB* или *CD*. Для двух самолетов полная вероятность обнаружения получается из вероятностей, записанных в таблице, в результате удвоения и вычитания квадрата этих вероятностей. Так, при вероятности 0,3 полная вероятность равна 0,51, а при вероятности 0,7 полная вероятность равна 0,91. Числа 0,3 и 0,7, записанные в таблице, он рассматривает, конечно, как грубые округления элементов первой таблицы.

Используя упрощенную таблицу вместо первой таблицы, наш противник моделирования игр заменяет таблицу *1* таблицей *2*. Получившуюся упрощенную игру

Таблица 2

Упрощенная платежная матрица

Красные	Синие	
	AB	*CD*
AB	0,51	0,00
CD	0,00	0,91

решить очень просто. Оба игрока имеют одну и ту же оптимальную смешанную стратегию. Они должны выбирать квадраты AB и CD с частотами, относящимися как 91 : 51. Иначе говоря, стратегии выбора квадратов AB и CD должны использоваться с частотами 91/142 и 51/142. Цена игры равна приблизительно 0,327.

Решив эту упрощенную игру, исследователь может теперь возвратиться к первоначальной проблеме, имея уже о ней некоторое представление. Его может заинтересовать вопрос относительно эффективности стратегий AB и CD в игре бо́льших размеров. Хотя у него нет возможности вычислить все элементы таблицы *1*, он может получить ту ее часть, которая приведена в таблице *3*. Применяя стратегии AB и CD с частотами 92 : 52, Красные могут гарантировать математическое ожидание выигрыша около 0,332. Если только Синие будут применять другие стратегии, кроме AB и CD, то выигрыш Красных будет еще больше. Таким образом, 0,332 есть нижний предел цены первоначальной игры.

Таблица 3

Платежная матрица с выбранными строками

Стратегии Красных	Стратегии Синих					
	AB	AC	AD	BC	BD	CD
AB	0,52	0,20	0,20	0,40	0,40	0,00
CD	0,00	0,60	0,80	0,60	0,80	0,92

Верхний предел цены первоначальной игры может быть найден точно так же. Если сторонник аналитических методов попробует применять AB и CD в качестве стратегий, избранных Синими, то скоро обнаружит, что использование стратегии CD дает результаты хуже, чем при использовании комбинации стратегий AC и AD. Тогда он может составить таблицу *4* точно так же, как он составил таблицу *3*. Применяя стратегии AB, AC и AD с частотами 2 : 1 : 1, Синие могут гарантировать себе максимальный ожидаемый проигрыш не более 0,40. Таким образом, 0,40 есть верхний предел цены первоначальной игры.

С помощью различных приемов противник моделирования игр получил некоторое представление относительно игры. Он нашел пределы изменения оптимального значения вероятности обнаружения, отклоняющиеся от среднего значения 0,37 на несколько сотых. Следовательно, он нашел некоторые смешанные стратегии, которые, хотя и не являются точно оптимальными, но гарантируют получение цены игры в определенных пределах. Существуют, конечно, и другие методы, которые может использовать исследователь, но и те, которые он применил, дают ему некоторое понятие относительно имеющихся возможностей.

Таблица 4

Платежная матрица с выбранными столбцами

Стратегии Красных	Стратегии Синих		
	AB	*AC*	*AD*
AA	0,36	0,36	0,36
AB	0,52	0,20	0,20
AC	0,20	0,68	0,20
AD	0,20	0,20	0,84
BB	0,64	0,00	0,00
BC	0,40	0,60	0,00
BD	0,40	0,00	0,80
CC	0,00	0,84	0,00
CD	0,00	0,60	0,80
DD	0,00	0,00	0,96

Возвратимся теперь к стороннику моделирования игр, в распоряжении которого есть первая таблица. Ему кажется, что разыгрывая игру так, чтобы это как можно больше походило на действительность, он может получить о ней довольно значительные сведения. Поэтому его усилия направлены не столько на анализ игры, сколько на продумывание хороших методов разыгрывания ее.

Так как сторонник моделирования использует метод разыгрывания, он должен попросить игроков принять на себя роль Синих и Красных. В каждой команде должен быть по крайней мере один человек (иногда в них входит по нескольку человек). К участию в игре можно привлечь специалистов. Так, Красные могут привлечь в свою команду человека, имеющего опыт в воздушном патрулировании, а Синие — человека, знакомого с плаванием на подводной лодке. В то время как противник моделирования может консультироваться у экспертов в поисках идей, которые можно было бы использовать для решения проблемы, сторонник моделирования стремится использовать знания эксперта, привлекая его к разыгрыванию игры.

Обычно сторонник моделирования должен физически разделить обе команды. Каждой команде должна быть предоставлена отдельная комната с картой и другим техническим оборудованием, необходимым для разыгрывания игры. Между комнатами Синих и Красных должна быть комната для *контрольного персонала.* В этой комнате должны также иметься карта и прочее оборудование, возможно более богатое, чем в комнатах Красных и Синих. Подобная организация розыгрыша с тремя отдельными комнатами привела к термину *учение с тремя картами,* который часто применяют для обозначения *военной игры* или *моделирования игры* в противоположность аналитическим методам. Аналитические методы часто называют *учениями с одной картой.*

Одной из функций контрольного персонала является снабжение команд той информацией или разведывательными данными, которые им дозволено знать. Как только одна из команд принимает какое-нибудь решение, так контрольный персонал оценивает его влияние на ход игры в соответствии с правилами игры. Решение может дать одной из команд или обеим командам вместе дополнительную информацию. Эта информация передается контрольным персоналом.

Разыгрывание нашей игры может служить иллюстрацией относительных ролей команд Красных и Синих и контрольного персонала. В каждой партии игры команда Красных выбирает две буквы из букв от A до D для обозначения района поиска. Этот выбор сообщается контрольному персоналу. Точно так же команда Синих выбирает две различные буквы от A до D для обозначения квадрата всплытия и извещает о своем выборе контрольный персонал. Контрольный персонал сравнивает выборы команд, производит все вычисления, которые необходимы для определения результата партии, и затем сообщает некоторые результаты партии каждой команде.

При расчете и передаче результатов партии у контрольного персонала имеется две возможности. Одна, близкая по духу к методу Монте-Карло, заключается в использовании случайных чисел. Если по крайней мере один из квадратов всплытия совпадает с квадратом патрулирования, то вероятность обнаружения отлична от нуля. Случайные числа могут использоваться для определения того, состоится ли в действительности в данной партии игры обнаружение лодки. Тогда обеим командам сообщается информация в форме «цель обнаружена в квадрате А» или «цель не обнаружена».

Таблица 5

Выборочные результаты моделирования, записанные Красными

Партия	Стратегия	Результат
1	*CD*	Обнаружена в квадрате *C*
2	*AC*	Обнаружена в квадрате *C*
3	*AD*	Не обнаружена
4	*AA*	Обнаружена в квадрате *A*
5	*AB*	Не обнаружена
6	*AD*	Не обнаружена
7	*DD*	Обнаружена в квадрате *D*

Другая возможность, имеющаяся у контрольного персонала, заключается в использовании ожидаемых значений. Вероятность обнаружения может быть вычислена, как прежде. Теперь, однако, вместо вытягивания случайного числа, командам может быть сообщена сама эта вероятность. Эта вероятность обнаружения эквивалентна ожидаемому значению той части партий, которая проводится по правилам, приведенным в предыдущем разделе и которая заканчивается обнаружением лодки.

Чтобы показать, в каком виде записывается информация, удобнее предположить, что контрольный персонал использует метод случайных чисел. Тогда Красные могут записать результаты вроде тех, которые помещены в таблице *5*. Результаты Синих для тех же партий игры могут быть представлены в виде таблицы *6*. Контрольный персонал, конечно, знает обе эти таблицы.

После ряда таких партий сторонник моделирования желает приступить к выводу заключений из получен-

Таблица 6

Выборочные результаты моделирования, записанные Синими

Партия	Стратегия	Результат
1	*AC*	Обнаружена в квадрате *C*
2	*CD*	Обнаружена в квадрате *C*
3	*BC*	Не обнаружена
4	*AC*	Обнаружена в квадрате *A*
5	*AC*	Не обнаружена
6	*AB*	Не обнаружена
7	*CD*	Обнаружена в квадрате *D*.

ных результатов. Однако число партий, записанных в форме таблиц *5* и *6*, слишком мало, чтобы опытный сторонник моделирования использовал их для этой цели. Хотя встречаются игры, значительно более сложные, чем наша, но которые достаточно проиграть один-два раза, чтобы получить важные выводы, большинство сторонников моделирования потребует более длинной серии партий. Тем не менее, на практике он должен балансировать между предполагаемой стоимостью дополнительных партий и той ожидаемой информацией, которую они могут дать.

По-видимому не существует простого правила для определения выгоды, получаемой от дополнительных партий игры. Используя нашу привилегию знать платежную матрицу, недоступную во многих случаях исследователю, мы можем видеть, что в нашем случае требуется самое меньшее 60 партий для того, чтобы испытать каждую стратегию Красных против каждой стратегии Синих. У каждой такой пары стратегий имеется биномиально распределенный результат в действительной игре, что еще больше увеличивает объем выборки, необходимый для получения надежных выводов.

Влияние объема выборки на достоверность ответа, получаемого сторонниками моделирования, зависит также от того, на какой вопрос должен быть дан ответ. Так как ожидаемый результат игры не является столь же чувствительной функцией платежной матрицы, как оптимальные стратегии, то иногда цена игры может быть оценена значительно раньше того, как выявятся оптимальные стратегии. В этом процессе, однако, жизненно важно, чтобы выборка партий была адэкватна стратегически точно так же, как она адэкватна статистически. Если Синие, например, упорствуют в применении какой-то очень глупой стратегии, то Красные, по всей вероятности, узнают очень немного о том, как следует играть против более умного противника.

Большинство сторонников моделирования прекрасно знает о важной роли, которую играет искусство участников игры, входящих в команды Красных и Синих. Некоторая часть процесса моделирования игр уходит на то, чтобы опрашивать обоих командиров и выяснять, в чем состоят разумные основы их действий. Кроме того, члены команд поощряются, если у них имеется некоторый опыт в проведении аналогичных операций в действительной жизни и если они могут критиковать степень реалистичности представления действительной конфликтной ситуации в виде игры.

Интересно отметить, что эти усилия по достижению максимальной реалистичности могут привести сторонника моделирования к формулированию таблицы *2*, полученной ранее совсем другим способом. Опытные командиры, играющие за Красных и Синих, могут, например, прийти к заключению о необходимости ввести в игру дополнительные ограничения. Если, скажем, подводная лодка должна сначала всплыть, а затем оставаться в погруженном состоянии или сначала погрузиться, а затем всплыть, то у Синих остаются только две чистые стратегии, указанные в таблице *2*. Аналогичные ограничения в отношении способов поиска могут свести выборы Красных также к чистым стратегиям, помещенным в таблице *2*.

Чтобы закончить нашу иллюстрацию, мы предположим, однако, что сторонник моделирования твердо убежден в реалистичности игры, соответствующей таблице входных параметров. Он предпринял шаги, которые по его мнению достаточны для обеспечения достаточно высокого уровня искусства при проигрывании игры. Он учел все факторы, которые, как он считает, могут повлиять на объем выборки партий игры. Он тщательно следит за результатами партий, как только они становятся известными.

Объединяя все эти соображения, сторонник моделирования начинает делать свои заключения. Возможно, после 50 или 100 партий при благоприятных условиях он чувствует, что знает цену игры с точностью 0,05. Для того чтобы предохранить себя против неблагоприятных обстоятельств или обеспечить бóльшую точность, разумный исследователь может пожелать провести по меньшей мере несколько сотен партий. Он наверняка потребует такого количества партий прежде, чем прийти к выводу по такому тонкому вопросу, как выбор оптимальной стратегии.

Проследив как противника, так и сторонника моделирования за их работой по разрешению поставленной задачи, интересно посмотреть, как же выглядит на самом деле полное решение. Оптимальная стратегия Красных состоит в смешивании трех чистых стратегий *BC*, *BD* и *CD* с вероятностями 7/13, 5/13 и 1/13. Оптимальная стратегия Синих требует от них смешивания трех чистых стратегий *AB*, *AC* и *AD* с вероятностями 6/13, 4/13 и 3/13. Цена игры равна 24/65, что равно приблизительно 0,369.

Рассмотрев детально один пример, мы попытались показать некоторые из наиболее важных особенностей обоих альтернативных методов. В этой части мы старались избегать сравнительных оценок этих методов. Анализ их преимуществ и недостатков отнесен в следующую часть.

3. СРАВНЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА

В этой части выполнено сравнение обоих методов в применении к играм, встречающимся на практике. Оно основано на примере, приведенном в разделе *С* части *2*. На этом примере мы покажем расхождения, которые встречаются при удовлетворении требований практики.

Вначале важно подчеркнуть, что многие из обязательных этапов тщательного исследования ситуации соревнования не зависят от применения того или иного метода в конце исследования. Так, в примере, приведенном в разделе *С* части *2*, перед тем как начать применение метода моделирования или аналитического метода для решения задачи, требовалось знать таблицу входных параметров. Получение таких параметров может потребовать на практике комплексного исследования воздушных операций, операций подводных лодок и процессов обнаружения. При изучении больших проблем получение таких входных данных часто требует больше усилий, чем рассмотрение стратегических элементов, в которых метод моделирования и аналитический метод соревнуются в качестве соперников. Некоторая оценка объема этой вспомогательной работы была дана в отчете [1]. Поэтому важно, чтобы о достоинствах обоих методов не судили по качеству предварительных исследований, которые необходимы для их применения.

При рассмотрении различных подходов к изучению игр всегда имеется субъективный элемент. Различные наблюдатели, анализируя различные примеры практического применения, иногда приходят к выводу, что один подход лучше другого. Однако, даже если различные наблюдатели рассматривают один и тот же пример, то, как отметил Смит [13], они все равно могут прийти к различным заключениям относительно ценности данного метода, потому что они думают при этом о различных проблемах.

Помимо этой трудности, имеется другая трудность, особенно при моделировании игр, состоящая в том, что невозможно определить, когда же можно считать проблему решенной. Эта особенность была совершенно ясно показана в нашем примере с поиском подводной лодки. В то время как аналитический метод показал, что цена игры должна заключаться в пределах от 0,34 до 0,40, результаты моделирования были в этом отношении менее уверенными. При моделировании вообще нет способов узнать с уверенностью, когда выборка партий адэкватна как стратегически, так и статистически требуемому решению.

Неспособность моделирования игр давать такие же доказательства, какие дают аналитические методы, подсказывает некоторые интересные исследовательские проблемы. Было бы полезно, например, тщательно исследовать для простых игр, вроде игры, рассмотренной в разделе *C* части *2*, когда известно точное решение, способность различных методов розыгрыша игры давать приблизительное решение. В работе Флада [3], являющегося пионером в этом вопросе, намечен один интересный подход к этой важной проблеме.

Несмотря на отсутствие логических доказательств, моделирование игр вдохнуло в своих сторонников замечательную веру в его результаты. Иногда совершенно неправдоподобный результат принимается с особым вкусом именно благодаря его неправдоподобности. Правдоподобные же результаты часто принимаются как сомнительные.

В чем заключается источник этой веры, в которой моделирование далеко превзошло все другие методы? Частично его можно объяснить отсутствием опровержения, которое сопутствует отсутствию доказательств. Однако более важной причиной, вероятно, является то ударение, которое делается при моделировании на имитацию действительности. Сам акт розыгрыша игры может вызвать у его участников сильный энтузиазм. Когда игра отображает какую-нибудь действительную ситуацию соревнования из военной или промышленной области, игроку легко вообразить себя действительным участником этой борьбы. Более того, игры, к которым применяется моделирование, часто сознательно усложняются. Раз в игру введены в изобилии различные знаки и признаки, имитирующие реальность, она может иметь весьма сильное сходство с первоначальной ситуацией соревнования.

При оценке достоинств такого усложнения, которым часто сопровождается моделирование игр, полезно различать стадии формулирования игры, ее решения и обучения ей. Эти стадии соответствуют задачам, решаемым моделированием и упоминаемым в нашем определении моделирования игр. Увеличение сложности и детализации игры может облегчить завершение одной стадии за счет затруднения решения на другой стадии.

Имитация действительности, получаемая за счет усложнения и детализации игры, дает наибольший эффект на стадии обучения игре. Хотя по времени эта стадия является последней и начинается после формулирования и решения игры, она выступает на первое место при демонстрации сильных сторон моделирования игр С этой стадией можно легко связать проблему «продажи», так как законная реклама состоит в информации об истинных достоинствах товара. Совершенно бесспорно, что моделирование игр часто возбуждает интерес, связанный с эффектностью третьей, показной стадии. Как заметили Мад и Шпехт [9], «любую игру можно сделать настолько возбуждающей воображение, что человек будет принимать на веру самые невероятные факты».

Поскольку важно, что приняты на веру были именно факты, причем, может быть, самые невероятные, то люди вынуждены рассматривать также и стадии формулирования и решения игр. Здесь становится очевидным, что тщательное придание видимости правдоподобия не является бесспорным благом. Оно требует такого рабского труда, который может значительно превосходить получаемое за него вознаграждение.

При формулировании игры приходится иметь дело с противоречивыми целями, которые могут быть причиной двусмысленного отношения к проблеме детализации игры. С одной стороны, желательно сформулировать такую игру, решение которой соответствовало бы исследуемой ситуации соревнования. Это поощряет все большее наращивание деталей в стремлении как можно лучше имитировать действительность. С другой стороны, желательно так сформулировать игру, чтобы ее решение было возможным, по крайней мере с требуемой точностью. Это ограничение заставляет стремиться к прекращению наращивания деталей.

Наиболее резкое различие между методом моделирования и аналитическим методом проявляется именно в степени, в которой при формулировании игры признается эта дилемма. Часто целью применения аналитических методов является определение верхнего и нижнего пределов, как в примере, рассмотренном в разделе *2.C* (0,40 и 0,34). Если дополнительные детали препятствуют достижению этой цели, то результатом будет неудача в достижении требуемой точности, что проявляется в чрезмерно большой разнице между предельными значениями. При использовании моделирования игр, как отмечалось раньше, такого надежного критерия адэкватности предлагаемого решения нет. Таким образом, часто неизвестно, насколько усложнение игры затрудняет ее решение. Вследствие этого при моделировании игр существует стремление к преувеличению желательности усложнения игры, и нередко в качестве предела такого усложнения признается только невозможность программирования задачи для решения на вычислительной машине.

Хотя это часто не хотят признавать, чрезмерное усложнение моделирования игр вдвойне уменьшает его эффективность в качестве метода решения. Во-первых, по мере усложнения структуры игры требуется все большее число партий для того, чтобы получить достаточное число стратегий одного игрока против такого же достаточного числа стратегий другого игрока. Во-вторых, при ограниченных возможностях число партий, которое может быть проиграно, уменьшается, так как усложнение игры приводит к увеличению времени проведения партии.

Общую тенденцию к чрезмерной детализации при моделировании игр можно рассматривать как другой пример неоправданного увлечения «видимостью действительности», которое уже отмечалось при обсуждении понятия моделирования в разделе *А* второй части статьи. Здесь легко впасть в ошибку. Путь поиска «существа реальности» труден, а цель трудно распознаваема. Часто считают, что включением дополнительных деталей в модель достигается бо́льшая уверенность в постижении этой сущности. Когда (как в случае моделирования игр) возрастание трудности решения легко ускользает от внимания, искушение расширить модель становится все сильнее и сильнее.

Однако при моделировании игр этому искушению следует сопротивляться наиболее упорно. Уступить ему — значит питать иллюзии. Результатом чрезмерного усложнения игры является не только двойное уменьшение эффективности решения, упомянутое выше, но и трудность интерпретации результатов моделирования. Имеется стремление забыть, что игра не есть сама действительность. «Видимость действительности», столь полезная при обучении, становится опасной при использовании результатов моделирования.

Наше общее исследование сильных и слабых сторон моделирования игр по сравнению с другими методами обнаружило общее убеждение в необходимости имитировать реальность на всех стадиях моделирования. С нашей точки зрения, столь сильная имитация всех признаков действительности является выгодной при обучении игре, невыгодной при решении игры и имеет сомнительную ценность при формулировании игры. Существуют, однако, другие точки зрения, которые отличаются от нашей тем, что их сторонники не пользуются стандартной теорией игр или любой другой теорией, дающей четкие критерии решения игры. Сторонники этих точек зрения, следовательно, недооценивают трудности получения решения и опасность попыток получить слишком много.

Поэтому полезно рассмотреть некоторые из таких наиболее распространенных точек зрения. Они часто принимают форму утверждений о преимуществах моделирования игр над другими методами. Чаще всего высказываются утверждения о превосходстве моделирования игр в следующих случаях:

1) торговая реклама и обучение решению игр,

2) извлечение информации от неразговорчивых экспертов,

3) возбуждение воображения,

4) введение в игру состояния разведки,

5) решение проблем, не имеющих явно выраженных факторов и в которых важен только контекст,

6) объединение знаний экспертов,

7) определение уравновешенных сил и оценка маргинальных полезностей,

8) испытание чувствительности в широком диапазоне,

9) введение в игру действительных распределений вероятностей.

Некоторые из этих утверждений, а иногда и все сразу, могут быть найдены в работах, перечисленных в конце статьи. Мы не собираемся, однако, упоминать личности. Нас не интересует приоритет. Перечисленные выше утверждения собраны не только из литературных источников. По большей части они отражают взгляды практиков — сторонников моделирования игр, которые часто высказываются при разговорах. То, что они появляются и в печати, не увеличивает их справедливости.

В свете наших высказываний в начале статьи первое утверждение кажется нам обоснованным. Независимо от того, насколько велика ценность полученного решения, партия игры, используемая при моделировании, полезна тем, что она дает информацию об этом решении. Кроме того, некоторые люди получают более глубокое убеждение в процессе розыгрыша, чем при обычном чтении, особенно если они не искушены в аналитических методах.

Второе, третье и четвертое утверждения одинаковы в том отношении, что они касаются тех областей, где моделирование игр может принести пользу, но не обладает особым превосходством над другими методами. Такие понятия, как извлечение информации, возбуждение воображения и введение состояния разведки, весьма субъективны и сильно зависят от темперамента. Любой сторонник аналитических методов понимает важность использования знаний экспертов при формулировании адэкватной игры и при изобретении искусных стратегий в качестве возможных решений. Точно так же любой сторонник аналитических методов понимает важность возбуждения воображения для охвата всех существенных элементов ситуации соревнования, одним из которых часто является состояние разведки, т. е. степень осведомленности одного игрока относительно выбора другого игрока в данной партии игры. За исключением общего признания важности этих вопросов различные исследователи, использующие аналитические методы, выбирают совершенно расходящиеся пути достижения цели.

Существует много различных методов, с помощью которых исследователь может достичь целей, поставленных вторым, третьим и четвертым пунктами списка. Вероятно, большинство исследователей выскажутся в пользу включения в исследование реальных розыгрышей игры. Они сильно расходятся, однако, в отношении степени их зависимости от этих розыгрышей. Искусный опрос иногда оказывается более эффективным, чем розыгрыш игры, в качестве средства извлечения информации у экспертов. Эти эксперты, кстати, часто бывают довольно разговорчивыми, в то время как многие неразговорчивые люди не являются экспертами. Стимулируя воображение, моделирование игр не является единственным способом составления мысленной программы проверки. Ни моделирование игр, ни другие методы не дадут нам полной уверенности в том, что мы включили в эту программу все, что должны были бы включить. Вопрос о разведке противника, однако, почти никогда не упускается сторонниками моделирования игр. Так, в иллюстративной игре в разделе *C* этот элемент представлен тем, что ни один из игроков не знает текущего хода своего противника. Раз у игры имеется такое свойство, то ее можно решить либо аналитически, либо моделированием, как показано в разделе *C*.

Пятый, шестой и седьмой пункты особенно относятся к решению игр, представляющих сложные ситуации соревнования. Примером такой ситуации может быть проблема распределения бюджета обороны между бомбардировщиками B-52 и авианосцами. Такая проблема характерна своим развитым «контекстом», потребностью в знаниях экспертов и противоречивостью суждений относительно точки равновесия. Если исследование основано на игровой модели, то эта модель должна включать некоторые существенные элементы для того, чтобы быть достаточно убедительной. Поэтому вопрос заключается в том, какой метод лучше для формулирования и решения такой игры, аналитический или моделирования.

Существо пятого, шестого и седьмого пунктов таково, что, по-видимому, моделирование игр выгоднее других методов, если рассматриваемая проблема достаточно сложна. Многие из наших предшествующих рассуждений подтверждают это. Мы указывали, что при использовании моделирования игр имеется тенденция включать в формулирование игры больше подробностей, чем при других методах. Иногда это приводит к увеличению убедительности игры, но это верно лишь тогда, когда эти подробности подбираются по принципу их уместности, а не по принципу численности. Формулирование игры еще не означает завершения проблемы. Сама игровая модель приносит пользу лишь в том случае, если можно найти соответствующее приближение к решению. Как уже указывалось ранее, моделирование часто оказывается несостоятельным для достижения этой цели, и признание этой несостоятельности еще больше усугубляет ее. Поэтому моделирование может стать опасным, если оно используется неискусным исследователем и без достаточной осторожности. Таким образом, моделирование игр иногда обладает преимуществами в области этих трех пунктов, но чаще оно оказывается несостоятельным, так как сложность приводит к затемнению проблемы.

Восьмой и девятый пункты похожи друг на друга, главным образом, в том, что с ними связаны неприятные заблуждения. Одним из преимуществ систематического использования понятий, определений и элементарной теории является помощь в раскрытии и устранении подобных заблуждений. Так, наша статья уже заложила некоторые основы, относящиеся к двум последним пунктам.

Затруднение с восьмым пунктом состоит в непонимании трудности решения игры с помощью моделирования. Мы уже видели, что для достижения статистической и стратегической адэкватности требуется реализовать большую выборку партий, хотя никто не знает хорошего общего критерия. Проверка чувствительности в широком диапазоне, однако, состоит в решении многих игр, соответствующих многим значениям параметров. При поверхностном рассмотрении это может напоминать проблему решения некоторой чрезвычайно сложной игры. Тем не менее, эти две проблемы совершенно различны. Следует заметить, кроме того, что если возможно аналитическое решение, то оно соответствует по духу проблеме испытания чувствительности. Таким образом, заблуждение состоит как в переоценке моделирования, так и в недооценке аналитических методов.

Девятый пункт очень часто связан с тем заблуждением, что якобы аналитические методы могут лучше всего представлять распределения вероятностей с помощью ожидаемых значений, в то время как моделирование игр позволяет легко включать полное распределение. Проблемы поиска, рассмотренной в разделе *C*, достаточно, чтобы развенчать подобное утверждение. Ведь именно в саму игру включено распределение, и это может быть достигнуто различными способами, как показано в рассмотренном нами примере. Так, игры с распределением часто решаются аналитическими методами, а сторонники моделирования игр иногда используют ожидаемые значения для того, чтобы представить распределение вероятностей.

Резюмируя обсуждение всех девяти пунктов, можно сказать, что имеются четыре совершенно различные группы. К первой группе относятся те применения, в которых преимущества моделирования совершенно очевидны. Следующая группа относится к такой области, в которой моделирование, не обнаруживая особых преимуществ, может быть вполне полезным. Третья группа представляет опасные и экстравагантные мнения, которые заводят моделирование в опасную зону, где можно не заметить его слабых сторон. Последние два пункта связаны с неприятным заблуждением относительно сильных и слабых сторон моделирования и аналитических методов.

Если поставить себе задачу оценить соперничающие методы, то необходимо отказаться от бесстрастного анализа заявлений обеих сторон. С одной стороны, можно представить себе исследователя, выбравшего моделирование игр. Может быть, он совершенно выдохся, пытаясь применять аналитические методы. Во всяком случае, его привлекла непосредственность метода моделирования. При формулировании игры для проигрывания он, создавая физическую модель, старается буквально изобразить действительность. Каждый раз, разыгрывая партию игры, он стремится уловить хотя бы общее очертание правильного решения. Предвидя тот день, когда в его распоряжении будет еще бо́льшая вычислительная машина, он стремится еще больше усложнить игру, чтобы создать еще бо́льшую видимость реальности. Хотя и не существует формального критерия, указывающего момент достижения адэкватного решения, он интуитивно чувствует, когда он может уверенно сделать заключения. С каждой удачной партией игры его расположение к розыгрышу игры возрастает.

Представьте себе, с другой стороны, исследователя, который отвернулся от моделирования и пришел к аналитическим методам. Вполне возможно, что он уже провел несколько игр и сыт ими по горло. Продолжение розыгрыша кажется ему бессмысленным и утомительным. Его одолевает беспокойное стремление заглянуть поглубже в суть проблемы. Он желает понять сущность стратегического конфликта в игре. У него появляется тенденция удалить многие детали, которые искусственно затемняют сердцевину проблемы. Во всяком случае, его пленяет ясный свет разума. Он может изучить более простую параллельную игру либо выяснить свойства первоначальной игры. Какой бы путь он ни выбрал, он настаивает на точной формулировке проблемы и на точных результатах. Хотя формальные критерии часто не могут указать, когда более простая игра является адэкватной заменой более сложной игры, он будет решать этот вопрос интуитивно до тех пор, пока не сможет решить более сложную игру. С каждой стадией развития анализа его расположение к игре возрастает.

Мы нарисовали читателю такие крайние положения для того, чтобы лучше оценить заявления сторонников соперничающих методов. Здесь следует отметить эмоциональную сторону вопроса, так как суждения о соперничающих методах почти неизбежно уводят нас за рамки разумного. Это часто опасно, но не всегда плохо. Важно то, что мы не прекращаем честных поисков понимания и разумного выбора.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краткое изложение теории в части *2* и обзор практики в части *3* указывают на выдающиеся свойства метода моделирования игр и аналитических методов для исследования ситуаций соревнования. Моделирование игр завоевало широкую популярность, которая способствовала тому, что оно стало, по-видимому, наилучшим методом обучения играм и их показа. Однако его возможности в отношении решения игр, хотя и не изучены до конца, очень далеки от того, чего от него обычно ожидают. При моделировании, в частности, отсутствуют уверенные критерии адэкватности решения, которые имеются у аналитических методов. Поэтому при формулировании игр для их моделирования имеется тенденция игнорировать многие проблемы решения и ввести чрезмерное усложнение, пытаясь как можно лучше имитировать действительность. Эта видимость реальности иногда настолько сильная, что она приводит к заблуждениям. Они состоят в приписывании аналитическим методам ограничений, которых у них нет, и в игнорировании ограничений, которые присущи моделированию игр. Наиболее серьезным ограничением моделирования игр является, пожалуй, то, что для получения надежного решения требуется большая выборка партий игры. Поэтому его применение часто приводит либо к нежелательным издержкам, либо к ошибкам.

Эти общие свойства приводят к некоторым непосредственным выводам. Там, где есть неправильные суждения, там должны быть поиски разъяснений. Там, где имеются нерешенные проблемы, там должна быть исследовательская работа. И, наконец, там, где преимущества и недостатки перемешаны, там должно быть слияние методов. Итак, мы пришли к следующим выводам:

1. Сильные стороны аналитических методов должны разъясняться и использоваться полнее и шире.

2. Необходимо продолжать исследование процессов, в силу которых моделирование игр приводит к их приблизительному решению, а также разработку достаточных условий адэкватной точности решений.

3. До разработки более удовлетворительных методов решений с помощью моделирования, его следует использовать главным образом при обучении играм и при их формулировании.

4. Аналитические методы, дающие менее удовлетворительные результаты при обучении, следует использовать в первую очередь при формулировании и решении игр.

ЛИТЕРАТУРА

1. CORG, War gaming manual (Secret), Combat Developments Section, Continental Army Command, 1956
2. Walter E. Cushen. Operational gaming in industry, в сб. „Operations Research for Management", vol. II, Joseph Mc Closkey and John M Coppinger (eds), The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1956.
3. M. M. Flood. Game-learning theory and some decision-making experiments, в сб. „Decision processes", Thrall, Coombs and Davis (eds), Wiley, New York, 1954
4. A S. Householder et al (eds) Monte Carlo method, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, № 12, U. S. Government Printing Office, Washington, 1951
5. W. V. Hurley Manifestations of technical collectivism. Photographic Engineering, 1956, vol 7, № 1.
6. H W Kuhn and A. W Tucker (eds). Contributions to the Theory of Games. Annals of Mathematics Study № 24, Princeton University Press, Princeton, 1950.
7. H W Kuhn and A W. Tucker (eds). Contributions to the Theory of Games—II, Annals of Mathematics Study № 28, Princeton University Press, Princeton, 1953.

8 Дж Мак-Кинси Введение в теорию игр, ГИФМЛ, М, 1960
9 A. M Mood and R D. Specht Gaming as a technique of analysis, P-579. The RAND, Corporation, October, 19, 1954.
10. P. M. Morse Mathematical problems in operations research. Bulletin of American Mathematical Society, July 1948, vol. 54, p 602—621
11. J. P. T Pearman and W. F. Whitmore. Memorandum for the Director, O. E G., Subject: Limitations on the predictive use of war-gaming techniques; Invited Paper to be given at the ORSA meeting, 20 November 1954, November 4, 1954.
12. R. P. Rich. Simulation as an aid in model building. Operations Research, February 1955, vol. 3, p 15—19.
13. N. M. Smith, Jr. A rationale for operational gaming; paper presented to 8-th National Meeting of the ORSA, Ottawa, Canada, January 10, 1956.
14. John von Neumann and Oskar Morgenstern. Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, Princeton, 1950.
15. Дж. Д. Вильямс. Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр. Перевод с английского. «Советское радио», 1960

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Раздел первый

Дж Р Айсбел и У. Х. Мэрлоу. Игры на уничтожение . . 9
Д. У. Блэкетт. Решение игр „Блотто" в чистых стратегиях 50
Д. Р. Фулкерсон и С. М. Джонсон Тактическая воздушная игра 55
Л. Д. Берковиц и М. Дрешер. Игровой анализ тактической воздушной войны 71
Л. Д. Берковиц и М. Дрешер. Игровой анализ распределения двух типов самолетов в тактической воздушной войне 103

Раздел второй

Дж. Э. Уолш. Оптимальные свойства оборонительной стратегии, состоящей в одинаковом воздействии по всем целям . . 122
Х. К Уэйсс Некоторые тактические дифференциальные игры и выбор поддерживающей системы оружия 131
Дж. М Добби. О распределении бюджета между различными типами оружия устрашения 156

Раздел третий

Дж. Э. Уолш. Недостаточность стоимости поражения цели в качестве критерия эффективности 176
М. Л. Лейбовиц и Дж. Дж Либерман. Оптимальный состав и боевой порядок разнородной по составу системы локальной противовоздушной обороны 198
Дж. К. Хэйл и Х. Х. Уик. Применение теории игр для оценки атомного оружия 217

Раздел четвертый

Л. Э. Сашриссон. Применение теории игр к анализу танковой дуэли 231
Т. Э. Кэйвуд и С. Дж. Томас. Применение теории игр к воздушному бою между истребителем и бомбардировщиком . . 243

Раздел пятый

Х Э. Скарф и Л. С. Шэпли. Игры с неполной информацией 256
Л. Э. Дубинс. Дискретная игра на уклонение от преследования 275
С. Карлин. Бесконечноходовая игра с запаздыванием 303

Раздел шестой

К. Дж. Томас и У. Л. Димер. Роль моделирования игр в исследовании операций 322

Формулу на стр. 269, набранную из-за малого формата неправильно, следует читать так·

$$V[I_n;\ p_n(\cdot);\ q_n(\cdot)] = \max_{x(a_{n+1}|a_{n-l+2}, \ldots, a_n)} \ \min_{y(b_{l+1}|b_{n-k+2}, \ldots, b_n)} \Sigma p(\hat{a}_{n-l+2})\, q(\hat{b}_{n-k+2}) \times$$

$$\times V[I_{n+1};\ \ p_{n+1}(\cdot|\hat{a}_{n-l+2});\ q_{n+1}(\cdot|\hat{b}_{n-k+2})] = \min\max\ldots$$

К зак. 464