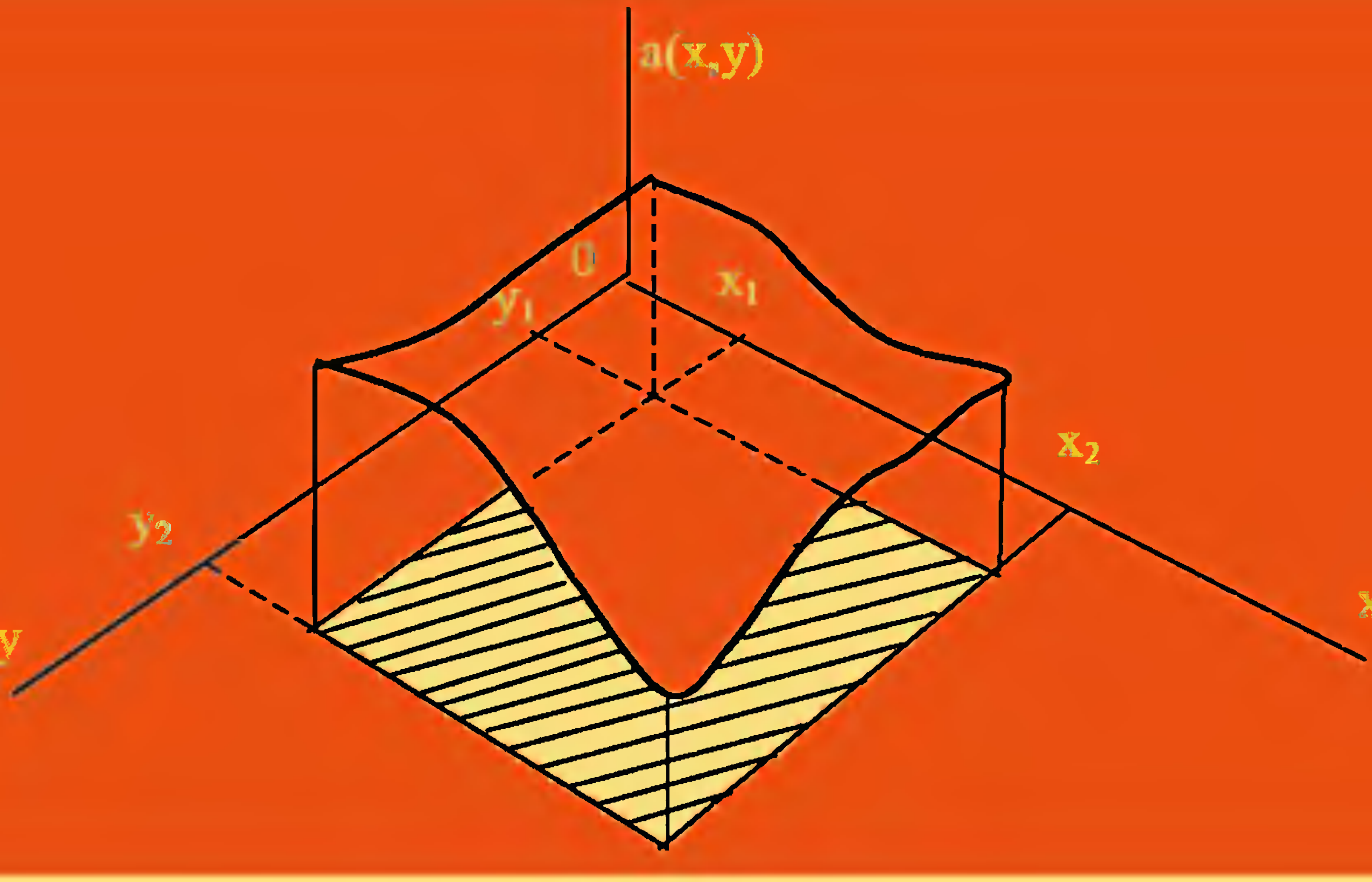
А.Б. Безруков С.С. Саитгараев

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ИГР



Челябинск 2001

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИАССКИЙ ФИЛИАЛ

А.Б.Безруков С.С.Саитгараев

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ИГР

Учебное пособие

Челябинск 2001

Оглавление

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

1.1. Предмет теории игр, ее цели и задачи

Особое место среди явлений или ситуаций, в которых возникает необходимость принятия обоснованных рациональных решений, занимают явления или ситуации, которые характеризуются наличием у участников данной ситуации несовпадающих интересов и различных путей достижения своих целей. Такие явления (ситуации) называются *конфликтными* (от латинского conflictus – столкновение).

Конфликт – это такая ситуация, в которой имеется более одного участника, цели которых не совпадают и действия которых не являются совершенно независимыми.

При этом в качестве конфликта можно рассматривать любое разногласие, любое несовпадение целей и интересов сторон. Такие конфликтные ситуации, методы обоснования принимаемых сторонами в этих ситуациях оптимальных или близких к ним решений и являются предметом изучения дисциплины “Теория игр”.

Игровые методы и модели в экономике связаны с применением математического аппарата теории игр и прилегающих разделов математики. Теорию игр считают одной из комплекса дисциплин, называемого исследованием операций. Это название родилось в штабных армейских кругах и связывается с планированием военных операций, которое обеспечивало бы наибольший возможный выигрыш и наименьшие возможные потери при всех (в том числе и наихудших) обстоятельствах.

Теория игр впервые была систематически изложена фон Нейманом (Neumann) и Моргенштерном (Morgenstern) только в 1944 г., хотя отдельные результаты были опубликованы еще в 20-е годы. Нейман и Моргенштерн написали оригинальную книгу, которая содержала, главным образом, экономические примеры, поскольку экономическому конфликту легче всего придать численную форму. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней математический аппарат для исследования стратегических решений.

Затем главное внимание снова стало уделяться экономическим проблемам. Среди социальных наук аппарат теории игр используется, главным образом, в психологии для анализа торговых сделок и переговоров, а также для изучения принципов формирования коалиций.

Конфликт следует представлять как ситуацию, в которой участвуют различные стороны – их называют “игроки”, или “лица”, или “участники”, – наделенные несовпадающими интересами.

Пример 1.1. В качестве типичного примера конфликтной ситуации, в которой сталкиваются противоречивые неантагонистические интересы сторон, можно привести задачу управления запасами предприятия, где в качестве сторон конфликта, игроков, выступают различные подразделения предприятия.

Производственный отдел заинтересован в возможно более длительном и непрерывном выпуске как можно большими партиями изделий одного наименования, т.е. в узкой номенклатуре выпускаемых изделий: такое производство снижает затраты на переналадку оборудования, на переобучение работников при переходе на выпуск нового изделия и т.д., а следовательно, снижает и общие производственные затраты.

Отдел сбыта заинтересован в больших запасах готовой продукции, чтобы удовлетворить запросы потребителя в любой момент времени. Вместе с тем отдел сбыта, стремясь продать как можно больше продукции, заинтересован в максимально широкой номенклатуре изделий.

Вследствие этого между производственным отделом и отделом сбыта часто возникает конфликт по поводу номенклатуры выпускаемой продукции.

Финансовый же отдел, стремясь минимизировать объем капитала, необходимого для функционирования предприятия, пытается уменьшить количество "связанных" оборотных средств. Поэтому он заинтересован в уменьшении запасов продукции до минимума.

Как видим, требования к размерам запасов и к номенклатуре выпускаемой продукции у разных подразделений предприятия оказываются различными, что создает типичную конфликтную ситуацию. Задача состоит в выработке рациональной стратегии и принятии оптимального решения, чтобы наилучшим образом удовлетворить требования сторон, участвующих в конфликте.

Конфликт может возникнуть также из различия целей, которые отражают не только несовпадающие интересы различных сторон, но и многосторонние интересы одного и того же лица. Например, конструктор обычно преследует многосторонние интересы, согласуя противоречивые технико-экономические требования, предъявляемые к конструкторскому изделию (минимизация габаритов и стоимости, максимизация надежности, обеспечение простоты в изготовлении и т.д.).

К конфликтным ситуациям относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом.

Наконец, прямо противоположные интересы различных сторон явно проявляются в непосредственной борьбе (военной, дипломатической, экономической, спортивной и т.п.).

1.2. Основные понятия теории игр

Математическая модель конфликтной ситуации называется *игрой*, стороны, участвующие в конфликте, – *игроками*, а исход конфликта – *выигрышем* или *платежом*.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется *ходом* игрока. Ходы могут быть личными и случайными.

Личный ход – это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). *Случайный ход* – это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Естественно, что игрок принимает решения по ходу игры. Однако теоретически можно предположить, что все эти решения приняты игроком заранее. Совокупность этих решений составляет его стратегию.

Стратегией игрока называется некоторый план или совокупность правил, по которым он совершает выбор решения при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Таким образом, в описании конфликта с игровой точки зрения должны быть отражены следующие три компоненты:

а) заинтересованные конфликтующие стороны (игроки, лица, участники) – их множество чаще всего обозначают $I=\{1,2,..., N\}$;

б) возможные способы действия каждой стороны $i \in I$ (их называют стратегиями) и определенный набор конечных состояний, которыми заканчивается игра;

в) интересы сторон, определяемые в виде платежей или выигрышей, соответствующих каждому возможному конечному состоянию.

Множество чистых стратегий i-го игрока будем обозначать $\{x_i\}$. При необходимости выделять из этого множества конкретную стратегию можно использовать верхний индекс: так, k-я стратегия i-го участника обозначится x_i^k. Разрешение конфликта или исход игры связывается с набором (вектором) $x=(x_1,x_2,...x_N)$, который называют ситуацией. При необходимости различать ситуации также можно использовать верхний индекс или семейство из N индексов, если их немного. Очевидно, что множество всех ситуаций является декартовым произведением множеств чистых стратегий $\prod_{i\in I}\{x_i\}$ и обозначается $\{X\}$.

При $I=\{1,2\}$, т.е. при $N=2$, это декартово произведение может быть представлено матрицей размера $m\times n$, где $m=\mathrm{card}\{x_1\}$ и

$n=card\{x_2\}$. При $N>2$ множество ситуаций представляется параллелепипедом размерности N. Заметим, что такое представление возможно, если число стратегий каждого участника конечно.

Интересы сторон в потенциально реализуемых ситуациях проявляются в том, что каждому i-му игроку в ситуациях x приписывается число, которое выражает степень удовлетворенности игрока i в данной ситуации.

Это число называют *выигрышем* и обозначают $H_i(x)$. Соответствие $H_i :\{x\}\to R$ называют функцией выигрыша i-го игрока. Каждая функция выигрыша из множества $\{H_i (x)\}$ задается, таким образом, на множестве ситуаций. В ряде случаев вместо указания выигрыша в той или иной ситуации задают отношение предпочтения (это отношение порядка либо доминирования) на множестве ситуаций для каждого игрока. Коренное отличие этих бинарных отношений состоит в том, что порядковые отношения всегда транзитивны, тогда как отношение доминирования нетранзитивно и может образовывать так называемый цикл Кондорсе (Condorcet): aDb, bDc, cDa , где D – отношение доминирования. С этим отношением придется встретиться и в дальнейшем изложении. Теория игр с предпочтениями пока еще недостаточно разработана и, кроме того, большинство социально-экономических и технико-экономических конфликтов может быть успешно описано и исследовано методами теории игр с выигрышами.

Для того чтобы найти *решение игры*, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию *оптимальности*, т.е. один из игроков должен получать *максимальный выигрыш*, когда второй придерживается своей наилучшей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей наилучшей стратегии. Такие стратегии называются *оптимальными*. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию *устойчивости*, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

При выборе оптимальной стратегии за основу рассуждений принимается предположение, что противник является, по меньшей мере, таким же разумным, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели. В теории игр все рекомендации вырабатывают, исходя именно из этих принципов; следовательно, в ней не учитываются элементы риска, неизбежно присутствующие в каждой реальной стратегии, а также возможные просчеты и ошибки каждого из игроков.

Если игра повторяется много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а *средний* *выигрыш (проигрыш) во всех партиях.* В этих случаях оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш.

Если игра содержит, кроме личных, случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий x_1^i, x_2^j есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае естественной оценкой ожидаемого выигрыша является его *среднее значение* (математическое ожидание).

Оптимальной стратегией в этом случае называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же, минимально возможный средний проигрыш).

Таким образом, конфликт будет представлять собой систему или кортеж длины 3: $(I; \underset{i \in I}{\mathrm{set}} \{x_i\}; \{ \underset{i \in I}{H_i} \})$; (1.1)

где: $\underset{i \in I}{\mathrm{set}} \{x_i\}$ – семейство множеств стратегий для совокупности игроков, $\{H_i\}$ – семейство функций выигрыша.

1.3. Классификация игр

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе. В частности:

1) ***в зависимости от числа игроков*** различают игры с двумя, тремя и более участниками. Игра называется *парной*, если в ней участвуют два игрока, и *множественной*, если число игроков больше двух;

2) ***в зависимости от возможности предварительной договоренности*** между игроками различают *кооперативные и некооперативные игры*. Игра называется *кооперативной*, если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется *некооперативной* (или бескоалиционной). Очевидно, что все антагонистические игры могут служить примером некооперативных игр;

3) ***по количеству стратегий*** различают *конечные* и *бесконечные* (или *непрерывные)* игры. В конечных играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий (например, в игре в орлянку игроки имеют по два возможных хода: они могут выбрать “орел” или “решку”). Соответственно, в бесконечных (непрерывных) играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий;

4) ***по свойствам функций выигрыша*** (платежных функций). Игры, в которых общая сумма выигрышей игроков равна нулю, т.е. выигрыш одного из игроков равен проигрышу (возможно и поражению) другого, или налицо прямой конфликт между игроками, называются *играми с нулевой суммой* или *антагонистическими* играми (например, игры в орлянку или в очко). Антагонистические игры моделируют конфликты двух сторон, интересы которых прямо противоположны; поэтому в антагонистическом конфликте у сторон нет почвы для согласования действий. Исход антагонистической игры оценивается вещественным числом, которое одна из сторон старается максимизировать, другая – минимизировать.

Прямой противоположностью играм такого типа являются *игры с ненулевой суммой* или *неантагонистические* игры, которые описывают конфликты, в которых интересы игроков не являются диаметрально противоположными (в частности, эти интересы могут совпадать). В этих играх не исключаются и компромиссные решения.

В играх с ненулевой суммой имеют место, как правило, и конфликты, и согласованные действия игроков. Частным случаем неантагонистических игр являются игры с постоянной разностью, в которых игроки и выигрывают, и проигрывают одновременно, так что им выгодно действовать сообща.

В специальной литературе по теории игр и смежным вопросам бескоалиционную игру обозначают обычно прописной греческой буквой Γ (гамма).

Бескоалиционные игры с выигрышами образуют базовый класс игр, который определяет основные теоретико-игровые понятия и терминологию.

Можно говорить об игре с одним игроком; тогда каждая стратегия из множества $\{x_1\}$ уже составляет ситуацию, а игра Γ из (1.1.) оказывается просто функцией $H = H_1 : \{x\} = \{x_1\} \to R$. Однако теория функций как самостоятельный раздел математики и теория игр подходят к своим предметам с различных точек зрения.

Из класса бескоалиционных игр можно выделить подкласс так называемых антагонистических игр.

В таких играх $I = \{1,2\}$, $x = (x_1, x_2)$ и $H_1(x_1, x_2) = -H_2(x_1, x_2)$ (1.2.)

То есть выигрыш 1-го и 2-го игроков равны по величине и противоположны по знаку (игра с нулевой суммой).

Как уже упоминалось выше, функции выигрыша задаются на множестве ситуаций. Тогда если игра конечна и игроков всего 2, то множество ситуаций представляется матрицей, а семейство функций выигрыша – двумя матрицами, так как N = 2. Можно вместо 2 матриц записать одну матрицу с векторными (длины 2) элементами, лежащими в R^2.

Так как в антагонистической игре $H_1(x) = - H_2(x)$, игру достаточно описать с помощью единственной матрицы со скалярными элементами, лежащими в R. Поэтому бесконечные игры 2 игроков называют также биматричными играми, а антагонистические игры – матричными.

Игра, в которой число игроков бесконечно, а роль всякого конечного множества игроков в формировании ситуации несущественна, называется *неатомической*. Неатомические игры представляют собой математические модели, адекватно отражающие свойства массового поведения.

Наряду с бескоалиционными играми существуют игры коалиционные (в том числе кооперативные игры). Пусть из множества игроков I выделяется подмножество (коалиция) $K \subset I$. Тогда можно рассматривать игру некоторой коалиции против множества игроков $S = I \setminus K$, то есть рассматривать коалицию как группового игрока.

Рассмотренные игры предполагают одновременную реализацию игроками или коалициями своих стратегий из множества располагаемых. Даже если игра повторяется многократно, всякий раз ее участники оказываются в одном и том же положении в смысле степени информированности о поведении других участников. Каждый сеанс игры заканчивается реализацией некоторой ситуации, и новая игра начинается так, как если бы предыдущие игры не проводились вообще. То есть при многократном повторении игры она не утрачивает качества "одноразовости". Вместе с тем во многих содержательных и практически важных приложениях динамика развития конфликта и информированность игроков о фактически складывающейся обстановке приводят к понятию многошаговой игры как многошагового процесса принятия решения (выбора нужной стратегии) каждым из участников игры.

Ранее рассмотренные игры имели дело с одношаговым процессом принятия решения, то есть выбора стратегии каждым игроком. Частым и наиболее изученным случаем многошаговых игр являются позиционные игры, понятие о которых восходит к работам Э.Цермело (Zermelo).

Изучение конфликтов, а следовательно, и игровых моделей можно проводить в различных аспектах: дескриптивном – выявляющем, какие ситуации могут складываться; нормативном – устанавливающем, какое поведение участников следует считать оптимальным; конструктивном – указывающем, как создавать требуемые ситуации или стратегии; и прогностическом – занимающимся прогнозированием фактического исхода конфликта.

Теория игр в ее современном состоянии занимается, главным образом, нормативным аспектом изучения. В связи с этим можно выделить три основные задачи теории игр:

– выработку принципов оптимальности;
– установление их реализуемости;
– отыскание оптимальных реализаций.

Основными содержательными чертами оптимальности в отношении к множеству возможных исходов игры можно считать соображения об индивидуальной или групповой (коллективной) рациональности (выгодности), устойчивости и справедливости. Очевидно, что каждый участник конфликта может рассчитывать на некоторый гарантированный выигрыш (если он стремится максимизировать выигрыш) или на некоторый гарантированный проигрыш, то есть выигрыш со знаком "минус" (если он стремится минимизировать проигрыш), в том случае, когда реализуется неблагоприятный для него исход.

Множество исходов, в которых выигрыш i-го игрока, по крайней мере, не меньше его гарантированного результата, образует множество индивидуально рациональных исходов игрока i. Это множество будет обозначать IR_i. Объединение $\bigcup_{i\in I} IR_i = IR$ составляет множество индивидуально рациональных исходов игры.

Групповую рациональность для случая коалиционной игры или соглашения можно усмотреть в следующем: пусть в игре могут быть реализованы 2 исхода: x^1 и x^2. Если при этом исход x^1 выгоднее хотя бы одному участнику, а исход x^2 для прочих участников не лучше, чем исход x^1, то говорят, что исход x^1 доминирует над исходом x^2 в смысле Парето (В. Парето (Pareto) – видный итальянский экономист). Исходы конфликта, которые не доминируют ни над какими другими, называются оптимальными по Парето, или эффективными. Множество эффективных исходов будем обозначать PO.

При исследовании коалиционных игр, или соглашений пересечение множеств $IR \cap PO$ принято называть переговорным множеством. Исходы из переговорного множества обладают свойством индивидуальной и групповой рациональности, то есть в определенном понимании являются оптимальными. В условиях компактности множеств стратегий $\{x_i\}$ (в данном случае – ограниченности и замкнутости), а также непрерывности функции выигрыша переговорное множество всегда непусто.

Устойчивость исхода, или решения игры по Нэшу (Nash), которую также называют равновесием, можно интерпретировать как своего рода черту оптимальности. *Устойчивым* или *равновесным исходом,* в смысле Нэша, считают исход $X^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_i^*, ..., X_N^*)$, для которого $H_i(X^* || X_i) \leq i(X^*)$ при всех $i \in I$ и $X_i \neq X_i^*$ (1.3)

Здесь через X_i и X обозначены i -я смешанная стратегия и ситуация в смешанных стратегиях (о смешанных стратегиях смотрите ниже), а через $X^* || X_i$ тот факт, что в векторе X^* i-я компонента X_i^* заменена на $X_i \neq X_i^*$. Это означает, что игрок i отклоняется от своей равновесной (оптимальной по Нэшу) стратегии в одностороннем порядке, тогда как все прочие участники конфликта их придерживаются, и это отклонение не влечет улучшения его результата.

Множество равновесных по Нэшу исходов обозначается NE.

В условиях выпуклости и компактности множеств $\{x_i\}$ для всех $i \in I$, непрерывности по $\{x\}$ и квазивогнутости по x_i функции выигрыша H_i (x) множество $NE \neq \varnothing$, если прочие, отличные от i-го, игроки придерживаются фиксированных стратегий.

Понятие справедливости для различных классов игр истолковывается по-разному. Это понятие будем вводить по мере изучения классов игр.

1.4. Способы описания игр

Существует ряд способов описания и анализа конкретных игр.

Один из приемов описания игр состоит в том, что игра представляется в виде *топологического дерева* (рис.1.1), на котором выделяются начальная вершина игры А, промежуточные вершины (позиции) и множество конечных вершин, отвечающих окончательным позициям игры, то есть указывается, какие ходы могут делать игроки, какой информацией во время игры они располагают, какие варианты можно выбирать и какими могут быть предельные размеры выигрышей в конце игры.

Игра, описанная таким образом, называется игрой в *развернутой (экстенсивной) форме.* На рис.1.1 показано дерево игры для упрощенной игры двух лиц в покер. В этой игре ставка каждого из игроков равна 5 долларам. После сдачи карт на руках у игроков остается определенное количество карт. Набор карт может быть либо старшим (С), либо младшим (М). У игрока 1 имеется две возможности: либо раскрыть карты (Р), либо повышать игру (В). При раскрытых картах старшая карта выигрывает банк; если карты игроков равны, то банк делится пополам.

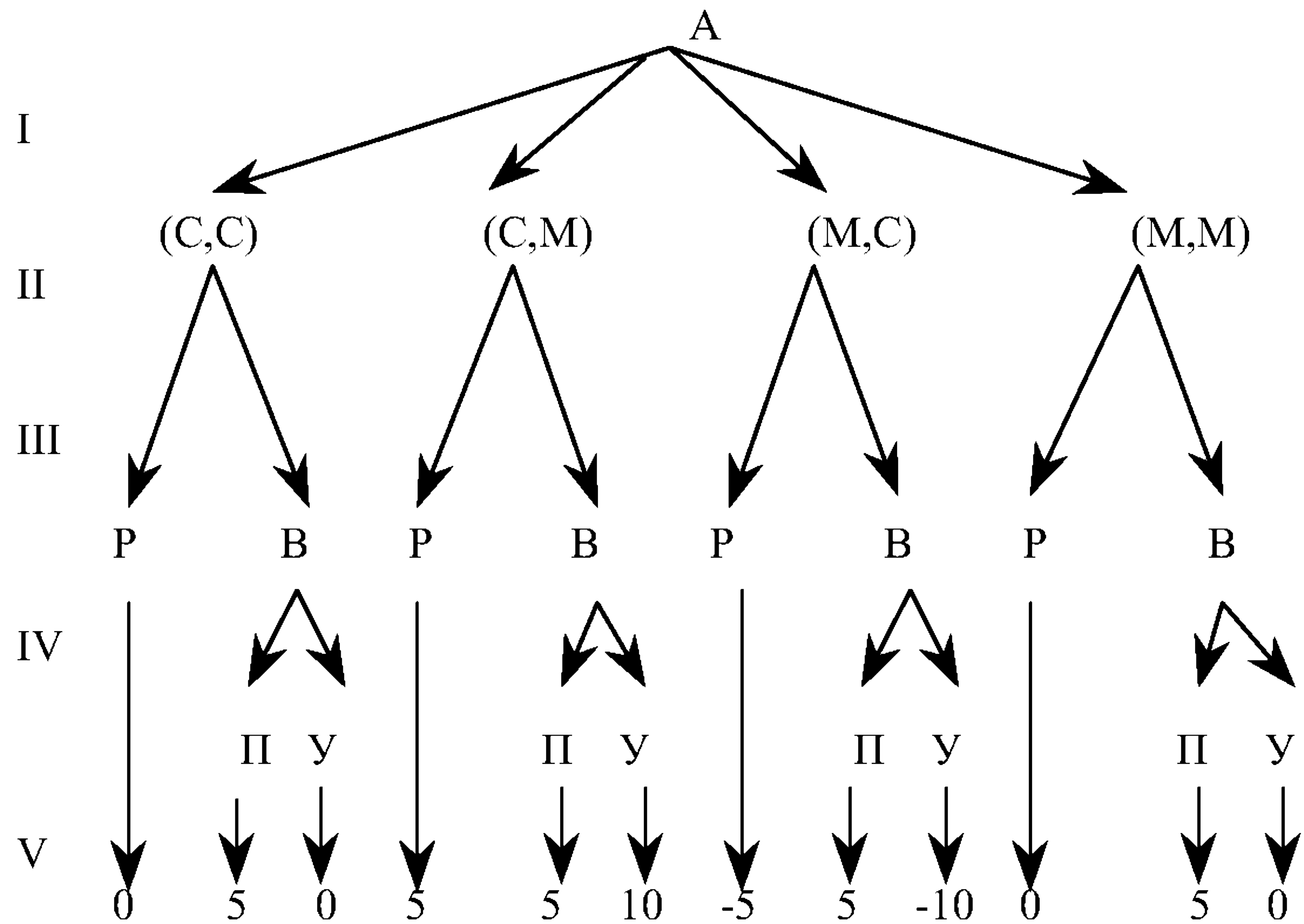


Рис. 1.3. Дерево игры для игры в развернутой форме (на примере упрощенной игры двух лиц в покер со ставкой 5 долл.):

I – ход 1: определение ставок и сдача карт (случайный ход);
II – ситуация после сдачи карт: С-старшая, М-младшая;
III – ход 2: игрок 1 либо раскрывает карты (Р), либо повышает игру (В);
IV – ход 3: если игрок 1 повышает игру (В), то игрок 2 пасует (П) или уравнивает игру (У);
V – выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2)

Если игрок 1 повышает игру, то он вкладывает в банк еще 5 долларов. У игрока 2 после этого имеется 2 альтернативы: либо пасовать (П), либо уравнивать (У). Если он пасует, то игрок 1 выигрывает банк при любых картах. Если же игрок 2 уравнивает игру, то он вносит в банк еще 5 долларов, после чего либо старшая карта выигрывает банк, либо при равных картах банк делится пополам. На дереве игры (рис. 1.1) изображены все возможные ситуации игры и указаны соответствующие им платежи.

Другой способ описания игры состоит в том, что рассматриваются все возможные стратегии каждого игрока и определяются платежи, соответствующие любой возможной комбинации стратегии всех игроков. Описанная таким образом игра называется *игрой в нормальной форме.* Нормальная форма игры двух участников может состоять из двух платежных матриц, показывающих, какую сумму получает каждый из игроков при любой из возможных пар стратегий. Обычно эти две матрицы выражают в форме единой матрицы, показанной на рис. 1.2.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Стратегия игрока 2} \\
\text{Стратегия игрока 1} &
\begin{array}{c|cccccc}
 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_j^2 & \cdots & S_m^2 \\
\hline
x_1^1 & (H_{11}^1, H_{11}^2) & (H_{12}^1, H_{12}^2) & \cdots & \cdots & \cdots & (H_{1m}^1, H_{1m}^2) \\
x_2^1 & (H_{11}^1, H_{11}^2) & (H_{12}^1, H_{12}^2) & \cdots & \cdots & \cdots & (H_{1m}^1, H_{1m}^2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_i^1 & \cdots & \cdots & \cdots & (H_{ij}^1, H_{ij}^2) & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_n^1 & (H_{n1}^1, H_{n1}^2) & (H_{n2}^1, H_{n2}^2) & \cdots & \cdots & \cdots & (H_{nm}^1, H_{nm}^2)
\end{array}
\end{array}
$$

Рис. 1.2. Платежная матрица для игры двух участников

Платежная матрица имеет размер $n \times m$, где n – число возможных стратегий игрока 1, m – число возможных стратегий игрока 2. Элементами этой матрицы являются пара чисел, первое из которых определяет величину выигрыша игрока 1, второе – игрока 2. Игрок 1 (иногда его называют игроком А) выбирает одну из n стратегий, обозначенных символами $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1$; каждой стратегии соответствует строка матрицы. Игрок 2 (игрок В) выбирает одну из m стратегий $x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2$; каждой стратегии этого игрока соответствует столбец матрицы. Пара чисел на пересечении строки и столбца, которые соответствуют стратегиям, выбранным игроками, показывает величину выигрыша каждого из них. Например, если игрок 1 (игрок А) выбирает стратегию x^1_i (или A_i), а игрок 2 (игрок В) – x^2_j (или B_j), то выигрыши игроков 1 и 2 равны, соответственно, H^1_{ij} и H^2_{ij} ($i= \overline{1,n}$; $j= \overline{1,m}$). Предполагается, что каждому из игроков известны все элементы платежных матриц.

Игра называется *игрой с полной информацией*, если в ней нельзя делать одновременно несколько ходов и если результаты случайных ходов и предыдущих личных ходов полностью известны каждому игроку (игра в шашки, шахматы, в крестики-нолики). И, наоборот, игра называется *игрой с полной информацией*, если игрокам неизвестны некоторые выборы, сделанные при случайных ходах. Например, игра в покер, в которой, прежде всего, неизвестно, какие карты находятся на руках у противника.

1.5. Классификация и учет неопределенностей

Теория игр имеет дело с проблемами, характерной чертой которых является конфликтность и *неопределенность*. С понятием “конфликтность” мы уже более или менее разобрались. Теперь рассмотрим, что же такое “неопределенность”.

Неопределенность в общем смысле представляет собой понятие, отражающее отсутствие однозначности.

Различают два типа неопределенности: неопределенность, обусловленную внутренними свойствами объектов, и неопределенность, связанную с неполнотой сведений об объектах.

Различают также неопределенности, описываемые вероятностными законами, то есть неопределенности, связанные со случайностью тех или иных событий, характеризующих обстановку операции, а также неопределенности, заключающиеся в отсутствии некоторых необходимых априорных сведений для отыскания оптимальных стратегий. В теории игр рассматриваются неопределенности второго типа. Неопределенность результата игры вызывается различными причинами, которые, несколько условно, можно разбить на три группы:

1. В качестве первого источника неопределенности можно назвать особенности правил игры, которые зачастую вызывают такое разнообразие в ее развитии, что предсказать результат игры заранее невозможно. Источники неопределенности такого вида называются комбинаторными, а соответствующие игры – *комбинаторными играми* (например, шахматная игра). Комбинаторная сложность игр носит исторически преходящий характер, благодаря использованию соответствующего математического аппарата и вычислительной техники. Для целого ряда комбинаторных игр найдены выигрышные комбинации путем решения логических задач не слишком большого объема.

2. Другим источником неопределенности является влияние случайных факторов. Игры, в которых исход оказывается неопределенным исключительно в результате случайных причин, называются – *азартными* (игры в кости; игра, состоящая в отгадывании, какой стороной выпадет монета; рулетка). Случайные события обладают свойством повторяемости и статистической устойчивости, поэтому удается дать их описание в терминах теории вероятностей. Скрытыми источниками случайностей обычно считаются причинно обусловленные, но мало изученные природные процессы и непреднамеренные стечения обстоятельств.

3. Третий источник неопределенности состоит в отсутствии информации о действиях противника, о его стратегии. Игры такого рода называются *стратегическими*. Сознательное противодействие или

коллективные устремления непредсказуемы в деталях и могут оцениваться лишь в целом, на уровне допустимых пределов своих проявлений (например, разумных, физически осуществимых пределов). Все, что находится за этими пределами, должно быть отброшено; все, что заключено в них, рассматривается в плане гипотез.

На практике это приводит к выработке рекомендаций типа: “ориентироваться на худший случай”, “обеспечить гарантию от неожиданностей” и др., положенных в основу известного принципа гарантированного результата.

Принцип гарантированного результата – это стратегия, основанная на непредсказуемости действий противоборствующей стороны и ориентированная на “худший случай” с целью обеспечения гарантии от неожиданностей.

Учет неопределенностей создает большие практические трудности и требует от исследователя (и всей оперирующей стороны) серьезных усилий.

Игнорирование неопределенностей при построении реальной модели или попытка их исключения путем введения разного рода допущений и предположений может привести к ошибкам, которые нельзя уменьшить вероятностным расчетом и их последствия могут быть катастрофическими.

В теории игр необходимо признавать наличие неопределенностей, рассматривать их как важнейший элемент проблемы и принимать их во внимание при разработке моделей процесса и при выработке рекомендаций.

2. КОНЕЧНЫЕ ПАРНЫЕ ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

2.1. Некоторые свойства матричных игр

Конечная игра $n \times m$, описанная в нормальной форме, может быть представлена платежной матрицей, приведенной на рис.1.2. Элементами этой матрицы является пара чисел, первое из которых W^1_{ij} определяет величину выигрыша игрока 1 (игрока А) при применении этим игроком i-й стратегии, игроком 2 (игроком В) – j-й стратегии. Второе число W^2_{ij} определяет выигрыш игрока 2 (игрока В) при применении игроками тех же стратегий. Для упрощения записи иногда выигрыш игрока А при i-й стратегии игрока А и j-й стратегии игрока В обозначается a_{ij}, выигрыш игрока В при тех же стратегиях – b_{ij}, сами стратегии записывают в виде A_i и B_j, соответственно.

Как было отмечено ранее, существуют игры, в которых общая сумма выигрышей игроков равна нулю, то есть выигрыш одного из игроков равен проигрышу (возможно и поражению) другого, то есть налицо прямой конфликт между игроками. Такие игры называются *играми с нулевой суммой* или *антагонистическими* играми. В этих играх можно записать $a_{ij} + b_{ij} = 0$, то есть $a_{ij} = - b_{ij}$.

В такой ситуации, если игра представлена в нормальной форме, вполне достаточно исследовать *платежную матрицу* только игрока А, которая может быть представлена в виде, приведенном в табл. 2.1, либо в виде матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $i=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$, элементами которой являются выигрыши a_{ij}, соответствующие стратегиям A_i и B_j. Часто в матричных играх используют "обезличенное" обозначение платежной матрицы $H=\{h_{ij}\}$, зависимость выигрыша от стратегий игроков обозначают $H(x_1,x_2)$.

Таблица 2.1

Платежная таблица игры n×m

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	H_{11}	H_{12}	...	H_{1j}	...	H_{1m}
A_2	H_{21}	H_{22}	...	H_{2j}	...	H_{2m}
.	...	...	...	...	...	...
A_i	H_{i1}	H_{i2}	...	H_{ij}	...	H_{im}
.	...	...	...	...	...	...
A_n	H_{n1}	H_{n2}	...	H_{nj}	...	H_{nm}

Платежная матрица игры n×m

$$H=\begin{Vmatrix} H_{11} & H_{12} & .. & H_{1j} & ... & H_{1m} \\ H_{21} & H_{22} & .. & H_{2j} & ... & H_{2m} \\ ... & ... & .. & ... & ... & ... \\ H_{i1} & H_{i2} & .. & H_{ij} & ... & H_{im} \\ ... & ... & .. & ... & ... & ... \\ H_{n1} & H_{n2} & .. & H_{nj} & ... & H_{nm} \end{Vmatrix}$$

Для антагонистических игр

$$H_1(x_1,x_2) = - H_2(x_1,x_2).$$

Таким образом, антагонистическая игра суть тройка

$$Г=(\{x_1\},\{x_2\}, H(\{x_1\}\times\{x_2\})), \qquad (2.1)$$

где $\{x_1\}$и $\{x_2\}$- непустые множества, и $H : \{x\}= \{x_1\}\times\{x_2\}\rightarrow R$.

Две антагонистические игры Г и $Г^1$ называются аффинно или стратегически эквивалентными, если:

$Г^1 = (\{x_1^1\},\{x_1^2\},H^1)$, $\{x_1^1\} = \{x_1\}$, $\{x_2^1\} = \{x_2\}$ и существует такое вещественное а и положительное k, что $H^1 = kH+a$.

Стратегическая эквивалентность обозначается $Г^1 \sim Г$. Отношение стратегической эквивалентности рефлексивно ($Г \sim Г$), симметрично ($Г^1 \sim Г \Rightarrow Г \sim Г^1$) и транзитивно

$$(Г^1\sim Г \text{ и } Г^{II}\sim Г^1 \Rightarrow Г^{II}\sim Г^1).$$

Другой вид эквивалентности затрагивает стратегии участников. Так, игры $Г=(\{x_1\},\{x_2\}, H)$ и $Г^1=(\{x_1^1\},\{x_2^1\}, H^1)$ считаются изоморфными, если существуют такие однозначные отображения $\pi_1 : \{x_1\} \to \{x_1^1\}$ и $\pi_2 : \{x_2\} \to \{x_2^1\}$, что $H^1 (\pi_1 x \pi_2) = H(x)$.

Изоморфность игр также обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности, то есть является отношением эквивалентности. Изоморфизм антагонистической игры на себя называется автоморфизмом. Таким образом, автоморфизм предлагает только перенумерацию стратегий игроков, т.е. произвольную перестановку строк и столбцов в матрице выигрышей H.

2.2. Экстремумы и седловые точки. Проблемы равновесия

В матричной игре формата m x n 1-й игрок, m стратегий которого соответствуют строкам матрицы, обычно считается максимизирующим игроком, то есть стремящимся максимизировать свой выигрыш. Второй игрок, n стратегий которого соответствуют столбцам матрицы, считается минимизирующим игроком, то есть стремящимся минимизировать свой проигрыш (выигрыш со знаком “минус”).

Выбирая стратегию x_1^i, игрок A должен рассчитывать, что игрок B ответит на нее той из стратегий x_2^j, для которой выигрыш для игрока A минимален (игрок B стремится “навредить” игроку A). Обозначим через α^i наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии x_1^i для всех возможных стратегий игрока B (наименьшее число в i-й строке платежной матрицы), то есть $\alpha^i = \min\limits_{j=1,m} h_{ij}$ или

$$\alpha^i = \min_{x_2} H(x \in \{x\} = \{x_1\} \times \{x_2\}) = \min_j H(x_1^i, x_2^j) . \qquad (2.2)$$

Игрок A, зная о такой тактике игрока B, стремится выбирать свою стратегию таким образом, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш, то есть среди всех чисел $\alpha^i \neq (i = \overline{1,n})$ выберем наибольшее: $\alpha = \max\limits_{i=1,n} \alpha^i$ или

$$\alpha = \max_{x_1} \min_{x_2} H(x) = \max_i \min_j H(x_1^i, x_2^j) = \max_i \alpha^i , \qquad (2.3)$$

где $\alpha^i = \min\limits_{x_2} H(x) = \min\limits_j H(x_1^i, x_2^j)$.

Данная наибольшая величина из наименьших значений выигрыша 1-го игрока α называется **нижней ценой игры**, или **максиминным выигрышем (максимином).**

Это *гарантированный выигрыш игрока А при любой стратегии игрока В.*

Стратегия, соответствующая максимину, называется ***максиминной стратегией.***

Аналогичным образом в данной игре Г может рассуждать 2-й игрок. Поскольку он является минимизирующим игроком, его поведение будет ориентировано на получение минимакса.

$$\beta = \min_{x_2} \max_{x_1} H(x) = \min_{j} \max_{i} H(x_1^i, x_2^j) = \min_{j} \beta^j , \qquad (2.4)$$

где $\beta^j = \max_{x_1} H(x) = \max_{i} H(x_1^i, x_2^j)$.

Величина β называется **верхней ценой игры** или **минимаксным выигрышем (минимаксом)**. Это *гарантированный проигрыш игрока В.* Стратегия, соответствующая минимаксу, называется ***минимаксной стратегией.***

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" минимаксной и максиминной стратегий, называется ***принципом минимакса.*** Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника, и гарантирует игроку А выигрыш не менее максиминного выигрыша, а игроку В – проигрыш не более минимаксного.

Пример 2.1. Определим нижнюю и верхнюю цены игры и соответствующие стратегии для игры с платежной матрицей, приведенной в табл. 2.2.

В этой игре участник А стремится поразить самолеты участника В, а тот стремится избежать поражения, то есть преследует прямо противоположный интерес.

Таблица 2.2

A \ B	x_2^1	x_2^2	x_2^3	α_i
x_1^1	0,9	0,4	0,2	0,2
x_1^2	0,3	0,5	0,8	0,3
x_1^3	0,5	0,6	0,2	0,2
β^j	0,9	0,6	0,8	α=0,3 β=0,6

При выборе стратегии x_1^1 (первая строка матрицы) минимальный выигрыш игрока А равен α^1 = min(0,9; 0,4; 0,2) = 0,2 и соответствует стратегии x_2^3 игрока B. При выборе стратегии x_1^2 (вторая строка матрицы) минимальный выигрыш равен α^2 = min(0,3; 0,6; 0,8) = 0,3, он достигается при стратегии x_2^1. При выборе стратегии x_1^3 (третья строка матрицы) минимальный выигрыш равен α^3= min (0,5; 0,7; 0,2) = 0,2, он достигается при стратегии x_2^3.

Нижняя цена игры α= max(α_1, α_2, α_3)= max(0,2; 0,3; 0,2) = 0,3. Таким образом, гарантируя себе максимальный выигрыш при любой стратегии игрока B, игрок A должен выбрать стратегию x_1^2, то есть x_1^2 является наиболее осторожной (максиминной) стратегией игрока A; пользуясь этой стратегией он гарантирует себе, что будет, например, поражать самолеты в среднем не менее, чем 0,3 (30%) всех случаев.

Рассмотрим возможные стратегии игрока B. Выбирая стратегию x_2^1 (первый столбец таблицы), игрок B понимает, что игрок A ответит стратегией x_1^1, чтобы максимизировать свой выигрыш (проигрыш игрока B). Следовательно, максимальный проигрыш игрока B при выборе им стратегии x_2^1 равен β^1 = max(0,9; 0,3; 0,5) = 0,9. Аналогично, максимальный проигрыш игрока B (выигрыш A) при выборе им стратегии x_2^2 (второй столбец) равен β^2=max(0,4; 0,5; 0,6) = 0,6. При выборе стратегии x_2^3 максимальный проигрыш игрока B равен β^3 = max(0,2; 0,8; 0,2) = 0,8.

Верхняя цена игры β = min(0,9; 0,6; 0,8) = 0,6 наиболее осторожной (минимаксной) стратегией игрока B является x_2^2; применяя, например, этот самолет, противник может быть уверен, что он будет поражаться не более чем в 0,6 (60%) всех случаев.

Нетрудно заметить, что в проведенном анализе каждая из сторон была ориентирована на худшую с ее точки зрения ситуацию – минимальный выигрыш или максимальный проигрыш при любой фиксированной стратегии. Обе стороны должны были улучшить, насколько возможно, свое положение, выбирая максиминную и минимаксную стратегии с целью ослабить (и даже исключить) зависимость получаемых результатов от действий противника. В этом находит свое выражение принцип *гарантированного результата*, предполагающего, как было замечено, отсутствие риска и связанных с ним нежелательных последствий.

На этом примере удобно продемонстрировать одно важное свойство минимаксных стратегий – их *неустойчивость*. Пусть мы (игрок A) применяем свою наиболее осторожную (максиминную) стратегию x_1^2, а противник свою наиболее осторожную (минимаксную) стратегию x_2^2. До тех пор, пока оба противника придерживаются этих стратегий, средний выигрыш равен 0,5; он больше нижней, но меньше верхней цены игры. Теперь допустим, что противнику стало известно, что мы применяем стратегию x_1^2; он немедленно ответит на нее стратегией x_2^1 и сведет выигрыш к 0,3. В свою очередь, на стратегию x_2^1 у нас есть хороший ответ: стратегия x_1^1, дающая нам выигрыш 0,9 и т.д.

Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

В задаче, рассмотренной выше, верхняя и нижняя цены игры различны: $\alpha \neq \beta$. Такие игры, как мы убедились, являются неустойчивыми.

Существует класс игр, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней, то есть $\alpha = \beta$.

Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то их общее значение называется ***чистой ценой игры***, или ***ценой игры***, и обозначается греческой буквой ν (ню). Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются оптимальными стратегиями, а их совокупность – *оптимальным решением*, или *решением игры*.

В этом случае игрок A получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения игрока B) выигрыш ν, а игрок B добивается минимального гарантированного (вне зависимости от поведения игрока A) проигрыша ν.

Пара чистых стратегий x_1^i и x_2^j дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент h_{ij} является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют ***седловой точкой***; (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз – в другом). Этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется ***седловой точкой матрицы***, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку*.

Ситуация $x = (x_1^*, x_2^*)$ будет соответствовать седловой точке, если $(x_1^*, x_2^*) = \arg\max_{x_1} \min_{x_2} H(x) = \arg\min_{x_2} \max_{x_1} H(x)$. (2.5)

Если $\nu = 0$, игра считается справедливой.

Если $\nu>0$, то игра несправедлива с точки зрения 2-го игрока, а если $\nu<0$, то игра несправедлива с точки зрения 1-го игрока.

Справедливость либо несправедливость в таком понимании заложены уже изначально в самих условиях игры, поэтому такая несправедливость не может быть ликвидирована путем некоторого специального способа выбора стратегий "обиженным" игроком. Вектор (x_1^*, x_2^*) принадлежит декартову произведению

$$\{x\} = \{x_1\} \times \{x_2\}.$$

Для антагонистической игры существенно, что максимин ищется 1-м игроком, а минимакс 2-м. Кроме того, не требуется аналитичность экстремумов.

В случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной "устойчивостью": если одна сторона придерживается своей минимаксной стратегии, то для другой может быть только невыгодным отклоняться от своей. Заметим, что в этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.

Положение, при котором ни одна из сторон не имеет никаких разумных оснований для изменения своей стратегии, называется ***ситуацией равновесия***.

В играх с седловой точкой такая ситуация возникает и сохраняется сколь угодно долго, если стороны А и В используют соответствующие стратегии, называемые в этом случае ***чистыми стратегиями***.

Итак, для каждой игры с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих сторон, отличающуюся следующими свойствами:

1) если обе стороны придерживаются своих оптимальных стратегий, то средний выигрыш равен чистой цене игры, одновременно являющейся ее нижней и верхней ценой;

2) если одна из сторон придерживается своей оптимальной стратегии, а другая отклоняется от своей, то от этого отклоняющаяся сторона может только потерять и ни в коем случае не может увеличить свой выигрыш.

Класс игр, имеющих седловую точку, представляет большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

В теории игр доказывается следующая теорема:

Теорема 2.1. *Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и, следовательно, каждая такая игра имеет решение, т.е. существует пара оптимальных стратегий той и другой стороны, дающая средний выигрыш, равный цене игры.*

Существует иной по форме подход к определению седловой точки.

Ситуация (x_1^*, x_2^*) считается приемлемой для игрока 1, если

$$H(x_1, x_2^*) \le H(x_1^*, x_2^*) \text{ при любом } x_1 \in \{x_1\}\ . \qquad (2.6)$$

Подобным же образом ситуация (x_1^*, x_2^*) считается приемлемой для игрока 2, если

$$H(x_1^*, x_2^*) \le H(x_1^*, x_2) \text{ при любом } x_2 \in \{x_2\}\ . \qquad (2.7)$$

Ситуация $(x_1^*,\ x_2^*)$ называется равновесной, оптимальной по Нэшу или седловой точкой игры, если выполняется двойное неравенство, полученное объединением (2.6) и (2.7):

$$H(x_1, x_2^*) \le H(x_1^*, x_2^*) \le H(x_1^*, x_2)$$

при любых $x_1 \in \{x_1\}, x_2 \in \{x_2\}$. (2.8)

Если обозначить множество приемлемых для 1-го игрока ситуаций через G_1, а игрока 2 – через G_2, то множество всех равновесных ситуаций G игры Г определится как пересечение $G = G_1 \bigcap G_2$, $G = NE$ – множество Нэша. (2.9)

Заметим, что значение выигрыша во всех равновесных точках одинаково.

Если (x_1^*, x_2^*) и $(x_1^\wedge, x_2^\wedge)$ – седловые точки игры Г, то ситуации $(x_1^*, x_2^\wedge)$ и $(x_1^\wedge, x_2^*)$ также будут седловыми точками. Однако могут существовать ситуации, значение выигрыша при реализации которых равно $H(x_1^*, x_2^*)$ и которые тем не менее не являются ситуациями равновесия.

Ниже приводятся примеры матричных игр, не имеющих седловой точки и имеющих таковую.

Пример 2.2: Игра без седловой точки.

	x_2^1	x_2^2	x_2^3	α^i
x_1^1	10	3	6	3
x_1^2	12	4	1	1
β	12	4	6	$\alpha = 3$ $\beta = 4$

$\alpha = \max\{3; 1\} = 3$,

$\beta = \min\{12, 4,6\} = 4$,

$\alpha \ne \beta$ – седловой точки нет.

Пример 2.3: Игра с седловой точкой.

	x_2^1	x_2^2	x_2^3	α^i
x_1^1	12	3	5	3
$\boxed{x_1^2}$	10	4	6	4
β^j	12	4	6	$\alpha = 4$ $\beta = 4$

$\alpha = \max\{3; 4\} = 4$,

$\beta = \min\{12, 4, 6\} = 4$,

$\nu = \alpha = \beta = 4$,

(x_1^2, x_2^2) – седловая точка (обведена квадратом).

При рассмотрении примеров 2.2 и 2.3, а также при попытке составить самостоятельно игру, имеющую седловую точку в чистых стратегиях, можно убедиться, что игры с седловой точкой не такое частое явление, как может показаться на первый взгляд.

Наличие седловой точки можно считать признаком оптимальности ситуации из (2.9) в смысле устойчивости и в смысле обеспечения игроками гарантированных результатов.

2.3. Упрощение матричных игр

Прежде чем перейти к этому вопросу, приведем строгие определения для отношения доминирования D и для множества Парето-оптимальных (эффективных) альтернатив.

Пусть имеются две альтернативы x^i и x^j из множества альтернатив $\{x^r\}$, тогда

$$x^i D x^k \Leftrightarrow \{(\forall_j = \overline{1;n})\}[f_j(x^i) \geq f_j(x^k)]\&,$$
$$\& (\exists_{jo} \in \{1,..,n\})[f_{jo}(x^i) > f_{jo} x^k]\}. \qquad (2.10)$$

Выражение 2.10 можно пояснить следующим образом: пусть имеется конечное множество альтернатив $\{x^r\}$ и $r = \overline{1,m}$.

Применительно к матричной игре их можно рассматривать как стратегии 1-го (максимизирующего) игрока. Пусть также имеется множество целевых функций f_j, заданных на множестве $\{x^r\}$ и $j = \overline{1,n}$. Применительно к матричной игре их можно рассматривать как функции выигрыша 1-го игрока в ситуациях, когда 2-й игрок выбирает j-ю стратегию из n располагаемых. При этом i-я стратегия 1-го игрока доминирует над k-й стратегией тогда и только тогда, когда для всех j (стратегий 2-го игрока) целевая функция f_j (выигрыш 1-го игрока в ситуации $(x_1, x_2^j))$ при альтернативе x^i, то есть при i-й стратегии 1-го игрока, принимает значение, по крайней мере, не меньшее, чем при альтернативе x^k $(f_j(x_i) \geq f_j(x^k))$, и найдется, по крайней мере, одно такое j_o, что $(f_{j0}(x^i) > f_j(x^k)$, то есть имеет место строгое неравенство. Другими словами, стратегия x^i 1-го игрока доминирует над его стратегией x^k, если каждый элемент строки i матрицы выигрышей H не меньше соответствующего элемента строки k, и, по крайней мере, для одной пары элементов матрицы H h_{it} и h_{kt} в некотором столбце t имеет место строгое неравенство $h_{it} > h_{kt}$.

Для 2-го игрока доминирование $x^j D x^p$ означает, что каждый элемент столбца j матрицы H не больше соответствующего элемента столбца p и, по крайней мере, для одной пары элементов h_{tj} и h_{tp} в некоторой строке t имеет место строгое неравенство $h_{tj} < h_{tp}$.

Если рассматривать выражение 2.10 применительно ко 2-му игроку, то знаки ≥ и > следует заменить на противоположные, множество $\{x^r\}$ считать множеством стратегий 2-го игрока, а целевые функции f_j – функциями проигрыша 2-го игрока в ситуациях, когда 1-й игрок применяет j-ю стратегию.

Множество Парето-оптимальных альтернатив можно определить следующим образом:

$$P = \{x^i \mid (\forall x^i, x^k \in \{x^r\})[x^i \overline{D} x^k]\} . \qquad (2.11)$$

Так как отношение доминирования D является бинарным отношением на множество $\{x^r\}$, то его можно понимать как множество векторов из $\{x^r\}^2$. Тогда $\overline{D} = \{x^r\}^2 \setminus D$ – дополнительное к D отношение.

Таким образом, с целью упрощения исходной игры Г вычеркиваются дублирующие друг друга альтернативы по строкам и по столбцам матрицы H, а также доминирующие альтернативы. В результате упрощения игры ее участники станут располагать множествами чистых стратегий, оптимальных по Парето. Заметим, что после очередных вычеркиваний могут возникнуть новые эпизоды дублирования и доминирования стратегий, которые не наблюдались в исходной игре. Ниже приводится пример упрощения матричной игры.

Пример 2.4. Упрощение игры 5×5.

	x_2^1	x_2^2	x_2^3	x_2^4	x_2^5
x_1^1	4	7	2	3	4
x_1^2	3	5	6	8	9
x_1^3	4	4	2	2	8
x_1^4	3	6	1	2	4
x_1^5	3	5	6	8	9

Стратегии x_1^2 и x_1^5 дублируют друг друга, поэтому можно вычеркнуть, например, 5-ю строку. Стратегия x_1^4 доминирует над стратегией x_1^1 ($x_1^1 D x_1^4$), и строка 4 также подлежит вычеркиванию. С позиций игрока 2 можно усмотреть, что $x_2^1 D x_1^4$, $x_2^3 D x_2^4$, $x_2^3 D x_2^5$, и поэтому столбцы 2, 4, 5 вычеркиваются. После только что выполненных вычеркиваний обнаруживается, что стратегии x_1^1 и x_1^3 стали взаимно дублирующими и поэтому подлежит вычеркиванию, например, 3-я строка. В результате упрощения получилось игра Г′ с матрицей выигрышей Н′ размера 2×2.

	x_2^1	x_2^3
x_1^1	4	2
x_1^2	3	6

2.4. Смешанные стратегии и смешанное расширение матричной игры

На практике наиболее распространенным является случай, когда платежная матрица не имеет седловой точки, то есть $\alpha \neq \beta$. Ситуации, которые могут при этом возникнуть, мы рассмотрели в задаче 2.1 (раздел 2.2). Анализируя матрицы таких игр, пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной – единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну единственную чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

Кроме того, как отмечено выше, игры в чистых стратегиях часто оказываются неустойчивыми в случае информированности сторон о действиях друг друга.

В таких ситуациях каждой стороне необходимо как-то скрыть свое поведение от противника, чтобы ослабить влияние информационного фактора и получить желаемое преимущество. Это трудно осуществить, ориентируясь только на разумный выбор конкретных стратегий, так как любые рассуждения могут быть воспроизведены противником. В то же время полный отказ от рационального начала и переход, например, к бессистемному поиску вариантов решений означал бы прекращение игры как таковой и замену ее неуправляемым случайным процессом.

Приемлемый компромисс достигается здесь путем обоснованного, разумного введения элемента случайности в действия сторон так, что каждый отдельный ход остается непредсказуемым, но вся совокупность ходов обладает вполне определенными, заранее заданными свойствами. Другими словами, участники конфликта чередуют (смешивают) в случайном порядке свои стратегии в соответствии со специально разработанной схемой, обеспечивающей нужную частоту (вероятность) реализации каждой из $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n$, $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^m$ стратегий.

Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, называются ***смешанными стратегиями***.

Смешанную стратегию i-го игрока будем обозначать X_i. Всякая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. Например, чистая k-я стратегия i-го игрока x_i^k есть вектор (0,...,1,...,0), где k-я компонента равна 1, а остальные равны нулю.

Если чистые стратегии 1-го игрока в матричной игре пронумерованы числами 1,2,...,m, то каждая стратегия $X_i \in \{X_1\}$ может быть представлена как вектор

$$X_1 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m),\ \xi_i \geq 0 \text{ при } i = \overline{1,m} \quad \text{и} \sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1\,, \qquad (2.12)$$

где $\xi_i = x_1(i)$ – вероятность выбора 1-м игроком чистой стратегии i. Аналогично, множество всех смешанных стратегий 2-го игрока будет состоять из векторов

$$X_2 = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),\quad \eta_j \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 1\,, \qquad (2.13)$$

где $\eta_j = x_2(j)$ – вероятность выбора 2-м игроком чистой стратегии j. Выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) при использовании смешанных стратегий зачастую обозначают P_a и P_b.

Говоря языком теории вероятностей, можно ситуацию сформулировать следующим образом.

Если ξ_i – вероятность появления события A_i (события, состоящего в том, что игрок A выберет стратегию A_i), то можно говорить о распределении вероятностей на множестве стратегий стороны А, причем всегда

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1. \qquad (2.14)$$

то есть событие, состоящее в реализации некоторой допустимой стратегии на очередном ходе, является достоверным.

Оказывается, что, применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, то есть пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может изменяться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.

Высказанное утверждение составляет содержание так называемой *теоремы о минимаксе – основной теоремы теории игр*, доказанной фон Нейманом в 1928 году. Известные доказательства теоремы весьма сложны, поэтому приведем только ее формулировку:

В конечной игре двух лиц с нулевой суммой и полной информацией имеется, по крайней мере, одно решение в области смешанных стратегий, то есть имеет место равенство H_1=H_2 при $\alpha \neq \beta$.

Теорема о минимаксе указывает на существование ситуации равновесия для случая $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, оптимальных стратегий, то есть решений игры, позволяющих добиваться среднеожидаемого выигрыша $v = H_1 = H_2$. Величина v называется ***ценой игры***. Из приведенных выше оценок следует

$$\alpha \le v \le \beta. \qquad (2.15)$$

Действительно, α есть минимальный гарантированный выигрыш, который мы можем себе обеспечить, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии включают в себя в качестве частного случая и все чистые, то, допуская, кроме чистых, еще и смешанные стратегии, мы, во всяком случае, не ухудшаем своих возможностей, следовательно, $v \ge \alpha$.

Аналогично противник, применяя чистые и смешанные стратегии, не увеличивает свой проигрыш, то есть $v \le \beta$, откуда следует неравенство (2.15).

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий.

Смешанной стратегией X_1 игрока А называется применение чистых стратегий $x_1^1, x_1^2, ..., x_1^i, ..., x_1^n$ с вероятностями $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_i, ..., \xi_n$ причем сумма вероятностей равна 1, то есть $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$ $\xi_1 = 1$. Смешанные стратегии игрока А записываются в виде матрицы

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^i, \ldots, x_1^n \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n \end{bmatrix}$$

или в виде строки $X_1 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n)$. Аналогично смешанные стратегии игрока В обозначаются:

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^i, \ldots, x_2^m \\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_j, \ldots, \eta_m \end{bmatrix}$$

или $X_2 = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_j, \ldots, \eta_m)$, где сумма вероятностей появления стратегий равна 1, то есть $\sum_{j=1}^{m} \eta_j = 1$.

Пусть $X_1^* = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ и $X_2^* = (\eta_{\ddot{1}}, \eta_{\ddot{2}}, \ldots, \eta_{\ddot{m}})$ – пара оптимальных стратегий. В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Чистые стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока с отличной от нуля вероятностью, называются его *активными* или *полезными* стратегиями.

Оказывается, что решение игры обладает еще одним замечательным свойством, сформулированным в теореме об активных стратегиях:

Теорема 2.2. *Если один из участников игры придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то ожидаемый выигрыш останется неизменным и равным* v *независимо от характера действий другого участника в пределах его активных стратегий.*

Противник при этом, например, может пользоваться любой из своих активных ("полезных") стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

Теорема имеет большое практическое значение – она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

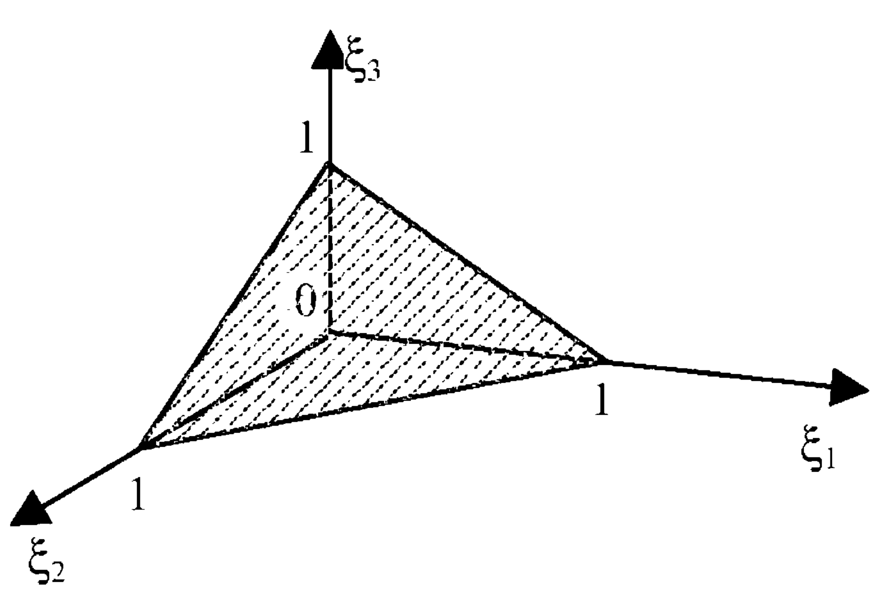


Рис. 2.1

Множества смешанных стратегий 1-го и 2-го игроков будут образовывать, соответственно, (m-1)- и (n-1)-мерные фундаментальные (т.е. натянутые на орты) симплексы в m- и n-мерных евклидовых пространствах. На рис.2.1 изображено множество смешанных стратегий игрока, располагающего 3 чистыми стратегиями.

Множество ситуаций в смешанных стратегиях для матричной игры определяется как декартово произведение:

$$\{X\}=\{X_1\}\times\{X_2\}\,. \qquad (2.16)$$

Смешанным расширением матричной игры является тройка:

$$\Gamma=(\{X_1\},\{X_2\},H(X))\,. \qquad (2.17)$$

Это смешанное расширение также является антагонистической игрой, причем в этой игре множества чистых стратегий каждого игрока с учетом условий (2.12), (2.13) будут бесконечными. Таким образом, при переходе к смешанным стратегиям происходит как бы бесконечное "дробление" матрицы исходной игры в чистых стратегиях.

Даже интуитивно очевидно, что такая "сильно дробная" матрица будет доставлять игре, по крайней мере, одну седловую точку. Строгое доказательство этого факта опирается на теорему о неподвижной точке либо на теорему об отделимости выпуклого множества от точки в евклидовом пространстве. Оно достаточно громоздко и здесь опускается.

Применение смешанных стратегий превращает игру в некоторое случайное испытание, исходом которого является ситуация $X=(X_1, X_2)$.

Отсутствие какого-либо обмена информацией между игроками (т.к. антагонистическая игра в принципе бескоалиционна) делает их случайные выборы своих чистых стратегий независимыми. Поэтому если игроки применяют смешанные стратегии X_1 и X_2, то каждая ситуация в чистых стратегиях (x_1 и x_2) реализуются с вероятностью $X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)$. Отсюда математическое ожидание выигрыша 1-го игрока можно вычислить:

$$H(X)=H(X_1,X_2)=\sum_{x_1\in\{x_1\}}\sum_{x_2\in\{x_2\}} H(x_1,x_2)\cdot X_1(x_1)\cdot X_2(x_2) \qquad (2.18)$$

или в матричной векторной форме:

$$H(X)=H(X_1,X_2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\cdot\xi_i\cdot\eta_j=X_1 H X_2^T\,. \qquad (2.19)$$

Выражения (2.18), (2.19) приводят к понятию смешанного расширения матричной игры.

Как упоминалось выше, в смешанном расширении любая матричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия. Ситуация (X_1^*,X_2^*) считается равновесной (устойчивой по Нэшу) если для любых X_1, X_2 выполняется неравенство

$$H(X_1,X_2^*)\le H(X_1^*,X_2^*)\le H(X_1^*,X_2)\,. \qquad (2.20)$$

Стратегия каждого игрока называется оптимальной, если существует стратегия другого игрока, в паре с которой она образует ситуацию равновесия. Каждый игрок имеет хотя бы одну оптимальную стратегию. Множество всех ситуаций равновесия есть декартово произведение множеств оптимальных стратегий 1-го и 2-го игроков, соответственно, выигрыши во всех ситуациях равновесия одинаковы и равны цене игры. Таким образом, всякую тройку (X_1^*, X_2^*, ν) можно считать решением матричной игры.

Спектром смешанной стратегии игрока в конечной антагонистической игре называется множество тех его чистых стратегий, для которых $\xi \neq 0$ (если это 1-й игрок) и $\eta \neq 0$ (если 2-й игрок). Чистые стратегии, входящие в спектр оптимальных стратегий, называются активными стратегиями. Можно сформулировать теорему о дополняющей нежесткости, аналогичную теореме в линейном программировании: если X_2 произвольная оптимальная смешанная стратегия игрока 2 в матричной игре Г и для чистой стратегии $x_1^{i_0}$ игрока 1 имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ji_0}\eta_j < \nu, \text{ то } \xi_{i_0} = 0. \qquad (2.21)$$

В иной, контрапозитарной форме эту теорему можно сформулировать таким образом: если стратегия $x_1^{i_0}$ игрока 1 входит в спектр некоторой его оптимальной смешанной стратегии, то для любой оптимальной стратегии второго игрока $\sum_{j=1}^{n} h_{i_0 j}\eta_j = \nu$. (2.22)

Двойственную теорему можно сформулировать для чистой стратегии $x_2^{j_0}$ игрока 2.

2.5. Аналитический метод решения игр 2×2

Пусть игра 2×2 задана платежной матрицей

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Пусть седловой точки нет и, следовательно, нижняя цена игры не равна верхней: $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальную смешанную стратегию игрока А .

$$X_1^* = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ \xi_1^x & \xi_2^x \end{bmatrix}$$

Она отличается тем свойством, что, каковы бы ни были действия противника (если только он не выходит за пределы своих “полезных” (активных) стратегий), выигрыш будет равен цене игры ν. В игре 2×2 обе стратегии противника являются “полезными”, – иначе игра имела бы решение в области чистых стратегий (седловую точку).

Значит, если мы придерживаемся своей оптимальной стратегии X_1^*, то противник может пользоваться любой из своих чистых стратегий x_2^1, x_2^2, не изменяя среднего выигрыша ν.

То есть, если игрок B использует чистую стратегию x_2^1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы), выигрыш игрока A, применяющего смешанную стратегию, равен цене игры ν: $h_{11}\cdot\xi_1^*+h_{21}\cdot\xi_2^*=\nu$.

Тот же средний выигрыш получает игрок A, если 2-й игрок применяет стратегию x_2^2, т.е. $h_{12}\cdot\xi_1^*+h_{22}\cdot\xi_2^*=\nu$. Учитывая, что $\xi_1^*+\xi_2^*=1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии X_1^* и цены игры ν:

$$\begin{aligned} &h_{11}\cdot\xi_1^*+h_{21}\cdot\xi_2^*=\nu\ ,\\ &h_{12}\cdot\xi_1^*+h_{22}\cdot\xi_2^*=\nu\ ,\\ &\xi_1^*+\xi_2^*=1\ . \end{aligned} \qquad (2.23)$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию

$$\xi_1^*=\frac{h_{22}-h_{21}}{h_{11}+h_{22}-h_{12}-h_{21}}, \qquad (2.24)$$

$$\xi_2^*=\frac{h_{11}-h_{12}}{h_{11}+h_{22}-h_{12}-h_{21}}$$

и цену игры

$$\nu=\frac{h_{22}\cdot h_{11}-h_{12}\cdot h_{21}}{h_{11}+h_{22}-h_{12}-h_{21}} \qquad (2.25)$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании X_2^* – оптимальной стратегии игрока B, получаем, что при любой чистой стратегии игрока A (x_1^1 или x_1^2) средний проигрыш игрока B равен цене игры ν, т.е.

$$\begin{aligned} &h_{11}\cdot\eta_1^*+h_{12}\cdot\eta_2^*=\nu\ ,\\ &h_{21}\cdot\eta_1^*+h_{22}\cdot\eta_2^*=\nu\ ,\\ &\eta_1^*+\eta_2^*=1\ . \end{aligned} \qquad (2.26)$$

Тогда оптимальная стратегия $X_2(\eta_1^*,\ \eta_2^*)$ определяется формулами:

$$\eta_1^*=\frac{h_{22}-h_{12}}{h_{11}+h_{22}-h_{12}-h_{21}}, \qquad (2.27)$$

$$\eta_2^*=\frac{h_{11}-h_{21}}{h_{11}+h_{22}-h_{12}-h_{21}}.$$

2.6. Графоаналитический метод решения игр 2×n и m×2

Решение игры 2×2 допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть игра задана матрицей H= (h_{ij}), i, j=1,2, приведенной ниже

B / A	x_2^1	x_2^2
x_1^1	h_{11}	h_{12}
x_1^2	h_{21}	h_{22}

Возьмем участок оси абсцисс длиной 1 (как сумма вероятностей $\xi_1+\xi_2=1$) – рис. 2.2. Левый конец участка (точка с абсциссой x=0) будет изображать стратегию x_1^1, правый конец участка (x=1) – стратегию x_1^2. Проведем через точки x_1^1 и x_1^2 два перпендикуляра к оси абсцисс: ось I-I и ось II-II. На оси I-I будем откладывать выигрыши при стратегии x_1^1, на оси II-II – выигрыши при стратегии x_1^2. Рассмотрим стратегию противника x_2^1; она дает две точки на осях I-I и II-II с ординатами, соответственно, h_{11} и h_{21}. Проведем через эти точки прямую $x_2^1 - x_2^1$.

Очевидно, если мы будем применять смешанную стратегию

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}$$

а игрок B – чистую стратегию x_2^1, то наш средний выигрыш, равный $h_{11}\cdot\xi_1 + h_{21}\cdot\xi_2$, изобразится точкой M на прямой $x_2^1 - x_2^1$; абсцисса этой точки равна ξ_2. Прямую $x_2^1 - x_2^1$, изображающую выигрыш при стратегии x_2^1, условно будем называть “стратегией x_2^1”.

Очевидно, точно таким же способом может быть построена и стратегия x_2^2 (рис. 2.3).

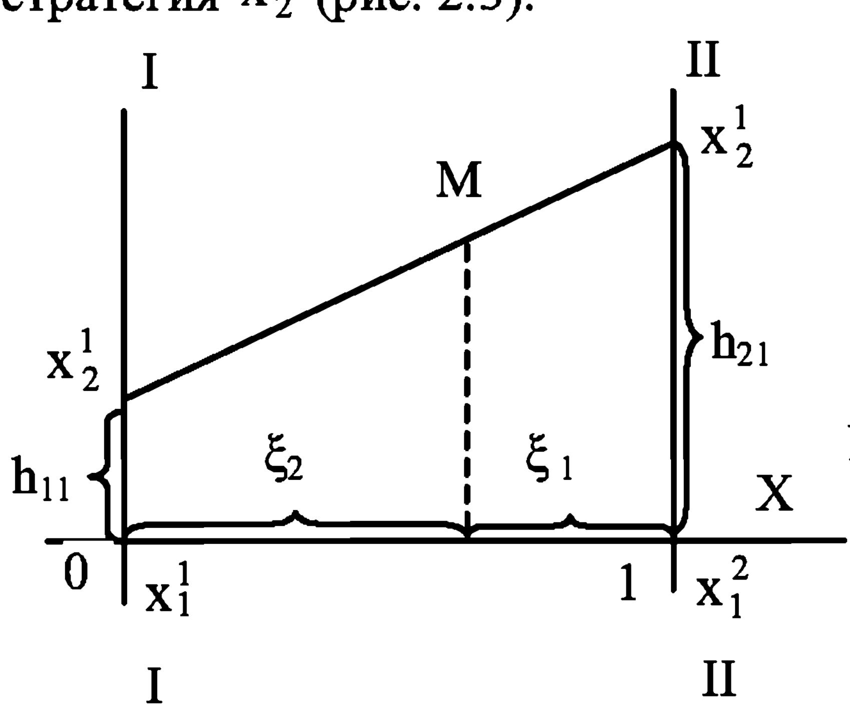


Рис. 2.2

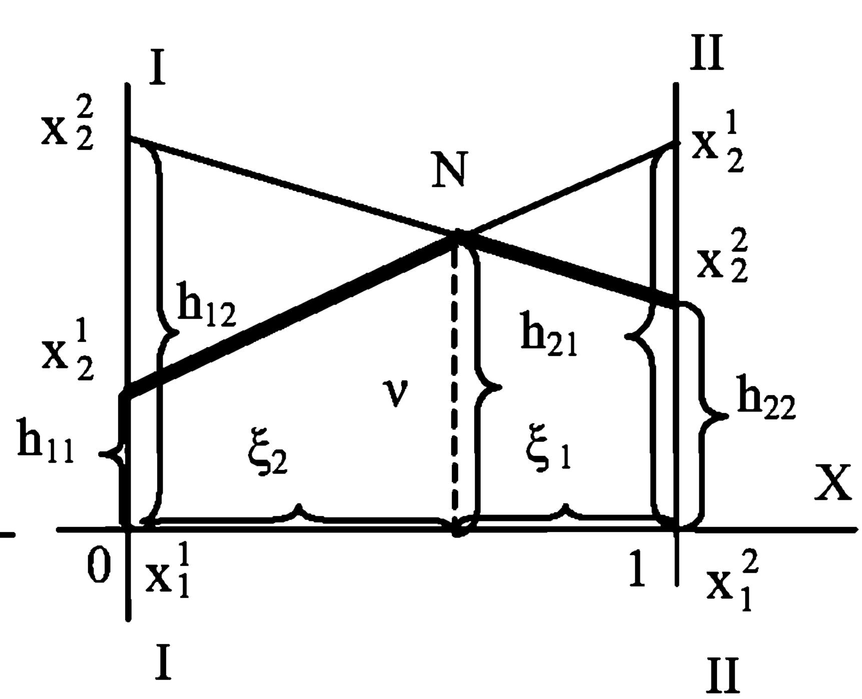


Рис. 2.3

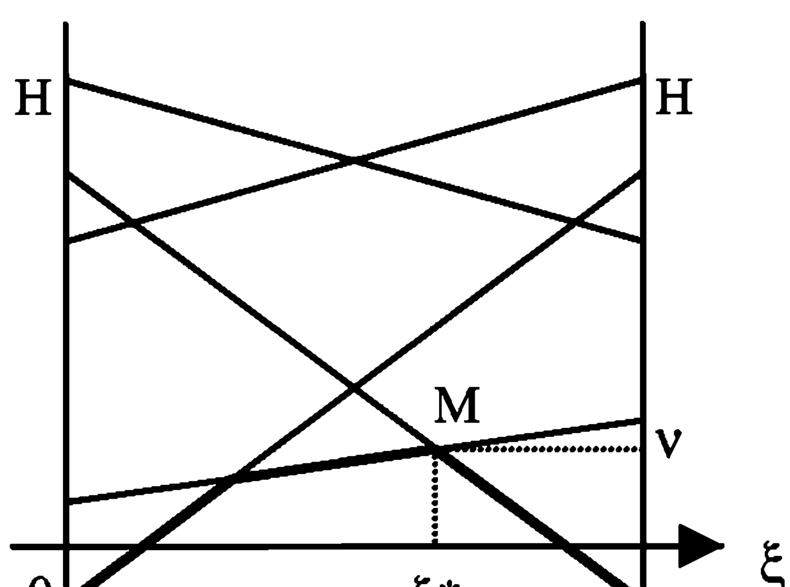
Нам нужно найти оптимальную стратегию X_1^*, то есть такую, для которой минимальный выигрыш (при любом поведении B) обращался бы в максимум. Для этого построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях x_2^1, x_2^2, то есть ломаную $x_2^1 - N - x_2^2$, отмеченную на рис. 2.3 жирной линией. Эта нижняя граница будет выражать минимальный выигрыш игрока A при любых смешанных его стратегиях; точка N, в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума, и определяет решение и цену игры. Нетрудно убедиться, что ордината точки N есть цена игры v, а ее абсцисса равна ξ_2^* – частоте применения стратегии x_1^2 в оптимальной смешанной стратегии X_1^*.

Геометрическая интерпретация дает возможность представить наглядно также нижнюю и верхнюю цену игры.

Пусть в игре Г 1-й игрок имеет чистые стратегии x_1^1 и x_1^2, а 2-й игрок – n чистых стратегий x_2^1, $x_2^2, \ldots,$ x_2^n. Тогда фундаментальный симплекс смешанных стратегий 1-го игрока есть отрезок [0;1]. Координата ξ на этом отрезке есть вероятность применения x_1^1. Теперь допустим, что 2-й игрок выбрал j-ю чистую стратегию x_2^j. В этом случае выигрыш 1-го игрока (или проигрыш 2-го) будет зависеть от ситуации (x_1^i, x_2^j), то есть от вероятности $\xi = X(x_1^i)$, так как 2-й игрок уже выбрал стратегию

$$x_2^j : H_1 = X_1[H]_{(\cdot)j} = \xi \cdot h_{1j} + (1-\xi) \cdot h_{2j} \quad .$$

Этот выигрыш линейно зависит от ξ и изображается на графике прямой линией. Каждой j-й стратегии 2-го игрока будет соответствовать своя прямая (рис. 2.4).



M – точка “пика”

Рис.2.4

Графиком функции от переменной ξ $\min H_1 = \min X_1 H_{(\cdot)j} = = \min[\xi \cdot h_{1j} + (1-\xi)h_{2j}]$ будет нижняя огибающая семейства прямых, которая на рис. 2.4 выделена жирной обводкой. Эта функция вогнута (выпукла вверх) и ее максимум есть $\max_{X_1}\min_{j} X_1 H_{(\cdot)j}$, (точка M на рис. 2.4). Абсцисса точки M есть оптимальная в смысле равновесности стратегия 1-го игрока ξ^*, а ордината – цена игры в смешанных стратегиях v.

Точка пика может иметь абсциссу, равную 0 или 1, а также равную произвольному числу из интервала (0;1). В первом случае оптимальная стратегия 1-го игрока есть чистая $\xi^*=0$, во втором – $\xi^*=1$, а оптимальные стратегии 2-го игрока – это те его чистые стратегии, которым соответствуют прямые, подходящие к пиковой точке (с отрицательным наклоном, если $\xi^*=0$ и с положительным, если $\xi^*=1$). Все линейные комбинации этих чистых стратегий также будут оптимальными для 2-го игрока.

Если абсцисса пика $0<\xi^*<1$, то графически это выглядит как пересечение в одной точке не менее 2 прямых, хотя бы две из которых имеют разные по знаку наклоны (рис. 2.4). Уравнения этих двух прямых имеют вид:

$$H = h_{2j_1} + \xi(h_{1j_1} - h_{2j_1}), \tag{2.28}$$

$$H = h_{2j_2} + \xi(h_{1j_2} - h_{2j_2}), \tag{2.29}$$

то есть 1-я прямая соответствует выбору вторым игроком стратегии j_1, а 2-я – выбору стратегии j_2.

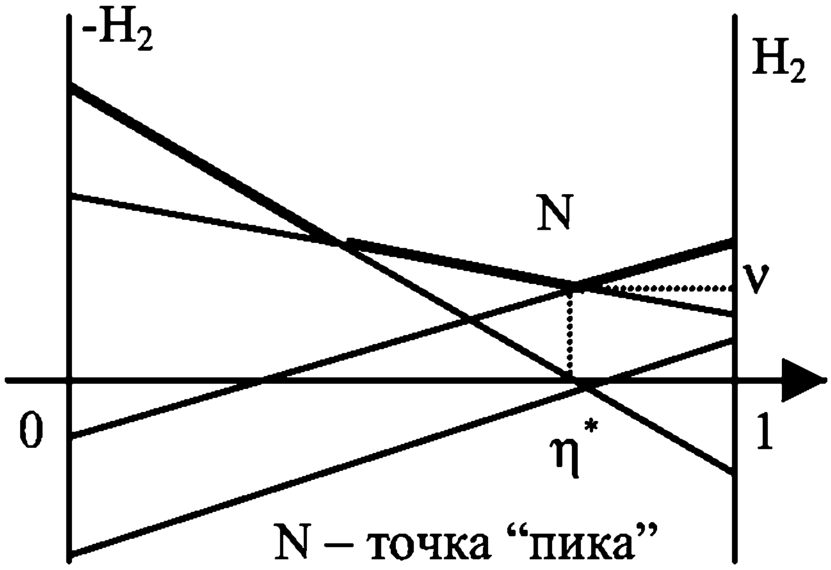
Если 2-й игрок откажется от всех прочих стратегий кроме j_1 и j_2 , то в новой игре формата 2×2 цена игры и оптимальная стратегия 1-го игрока ξ^* останутся прежними. Это означает, что оперируя только стратегиями j_1 и j_2 , 2-й игрок может позволить 1-му игроку получить лишь гарантированный результат v. Таким образом, оптимальная стратегия 2-го игрока может быть получена как линейная форма стратегий j_1 и j_2 с вероятностными весами η^* и $1-\eta^*$. Для вычисления η^* используется формула:

$$\eta^* = \frac{h_{2j_2} - h_{1j_1}}{h_{1j_1} - h_{1j_2} - h_{2j_1} - h_{1j_2}}. \tag{2.30}$$

Пусть теперь в матричной игре Г 1-й игрок имеет m чистых стратегий, а 2-й игрок – только 2 чистых стратегии. Графоаналитическое решение такой игры сходно с решением игры формата 2×n. Смешанная стратегия 2-го игрока в этом случае имеет вид $X_2=(\eta;\ 1-\eta)$, и их множество принадлежит отрезку [0;1].

Если 1-й игрок выбрал i-ю чистую стратегию, а 2-й игрок –смешанную стратегию X_2, то выигрыш 1-го игрока (т.е. проигрыш 2-го) будет равен: $H = H_{i(\cdot)} \cdot X_2^T = h_{i_1}\eta + h_{i_2}(1-\eta)$. (2.31)

Зависимость этого выигрыша от переменных η линейна, а график есть прямая линия. Графиком функции $H_{i(\cdot)} \cdot X_2 = \max[h_{i_1}\eta + h_{i_2}(1-\eta)]$ будет являться уже не нижняя, а верхняя огибающая семейства прямых, соответствующих чистым стратегиям 1-го игрока. Абсцисса нижней точки(пика) этой огибающей есть η^*, т.е. оптимальная стратегия 2-го игрока; ордината – цена игры v (см. рис. 2.5).



N – точка "пика"

Рис.2.5

Можно решить задачу, заменив знак выигрыша на обратный, превратив игрока 2 из "проигрывающего" в "выигрывающего". В этом случае задача m×2 решается аналогично задаче 2×n (рис. 2.4)

Для игры формата m×2 можно записать формулу для ξ^*, подобную формуле (2.30):

$$\xi^* = \frac{h_{i_2 2} - h_{i_2 1}}{h_{i_1 1} - h_{i_2 2} - h_{i_2 1} - h_{i_2 2}}. \qquad (2.32)$$

Зная η^* и ξ^*, можно найти цену игры, подставляя эти значения в (2.19).

2.7. Общие методы решения конечных игр

В общем случае решение игры n×m представляет довольно трудную задачу, причем сложность задачи и объем необходимых для решения вычислений резко возрастает с увеличением n и m. Однако эти трудности не носят принципиального характера и связаны только с очень большим объемом расчетов, который в ряде случаев может оказаться практически невыполнимым. Принципиальная сторона метода отыскания решения остается при любом n и m одной и той же.

Проиллюстрируем это на примере игры 3×m. Дадим ей геометрическую интерпретацию – уже пространственную. Три наши стратегии x_1^1, x_1^2 и x_1^3 изобразим тремя точками на плоскости Х0У; первая лежит в начале координат (рис. 2.6), вторая и третья – на осях 0Х и 0У на расстояниях 1 от начала.

Через точки x_1^1, x_1^2 и x_1^3 проводятся оси I-I, II-II и Ш-Ш, перпендикулярные к плоскости Х0У. На оси I-I откладываются выигрыши при стратегии x_1^1, на осях II-II и Ш-Ш – выигрыши при стратегиях x_1^2, x_1^3. Каждая стратегия противника x_2^j изобразится плоскостью, отсекающей на осях I-I, II-II и Ш-Ш отрезки, равные выигрышам при соответствующих стратегиях x_1^1, x_1^2 и x_1^3 и стратегии x_2^j.

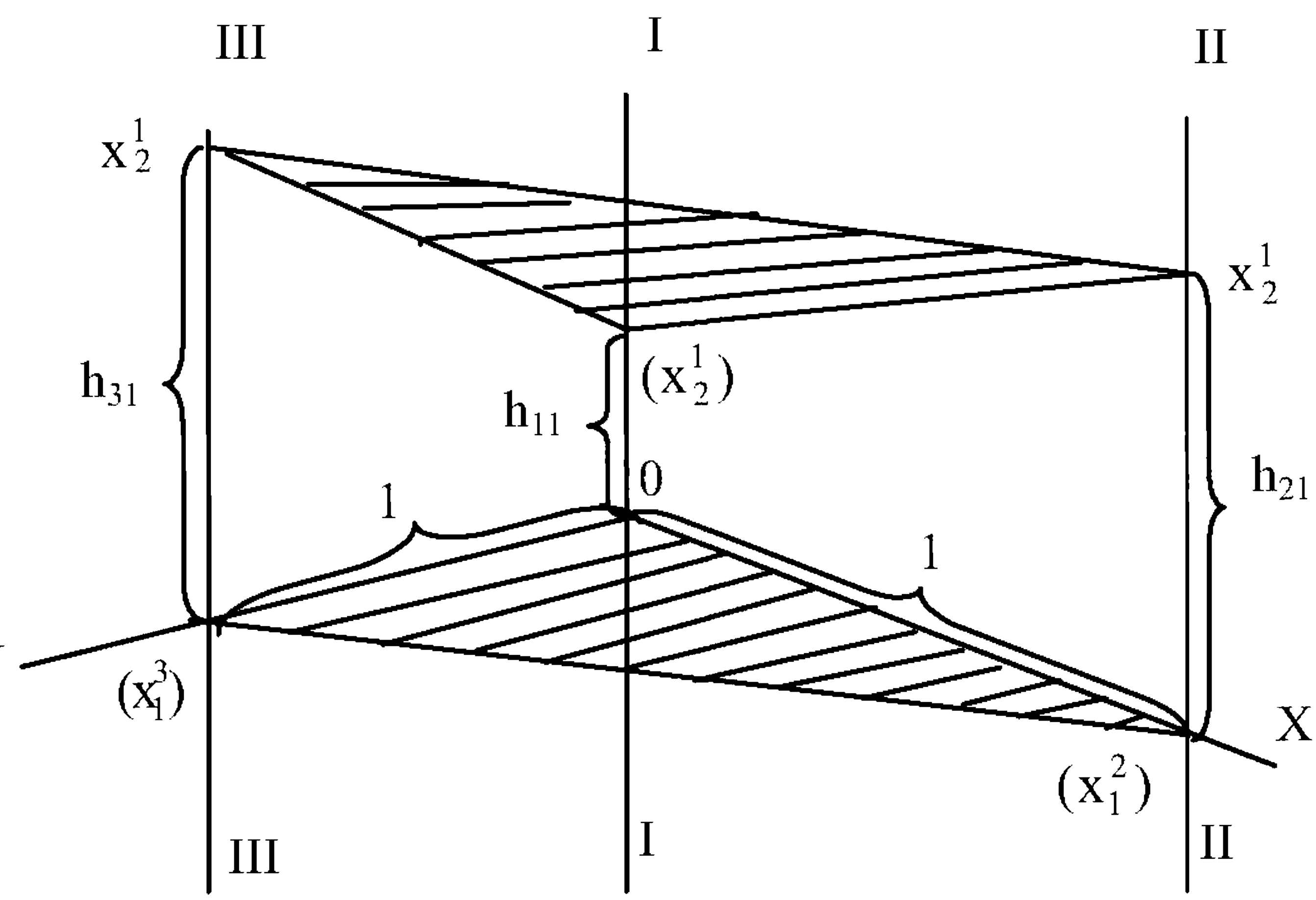


Рис. 2.6

Построив таким образом все стратегии противника, мы получим семейство плоскостей над треугольником x_1^1, x_1^2 и x_1^3 (рис. 2.7).

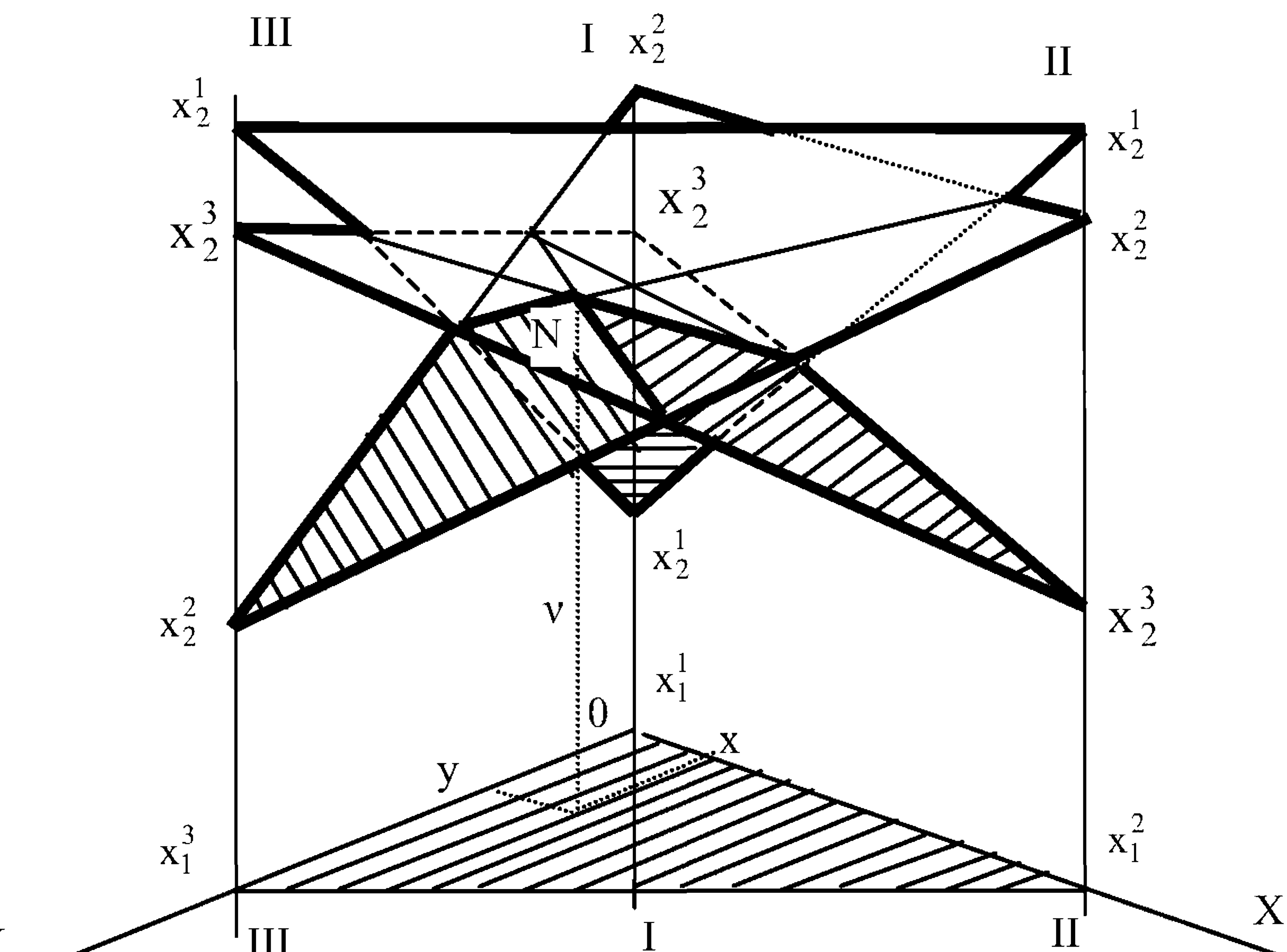


Рис. 2.7

Для этого семейства также можно построить нижнюю границу выигрыша, как мы это делали в случае 2×m, и найти на этой границе точку N с максимальной высотой над плоскостью X0У. Эта высота и будет ценой игры ν.

Частоты ξ_1, ξ_2, ξ_3 стратегий x_1^1, x_1^2 и x_1^3 в оптимальной стратегии X_1 будут определяться координатами (x, y) точки N, а именно: $\xi_2 = x$; $\xi_3 = y$; $\xi_1 = 1 - \xi_2 - \xi_3$.

Однако такое геометрическое построение даже для случая 3×m нелегко осуществимо и требует больших затрат времени и усилий воображения. В общем же случае игры оно переносится в n-мерное пространство и теряет всякую наглядность, хотя употребление геометрической терминологии в ряде случаев может оказаться полезным. При решении игр n×m на практике удобнее пользоваться не геометрическими аналогиями, а расчетными аналитическими методами, тем более, что для решения задачи на вычислительных машинах эти методы единственно пригодны.

Универсальным методом решения матричных игр в смешанных стратегиях является метод линейного программирования. Опираясь на утверждение, что один из игроков не может улучшить свой результат, отступая от оптимальной стратегии, если его оппонент придерживается ее, можно записать следующую систему неравенства с позиции 1-го игрока:

$$X_1 H^T \geq \nu\,(1,1,\ldots,1) \qquad (2.33)$$

или в развернутой форме:

$$\begin{cases} h_{11}\xi_1 + h_{21}\xi_2 + \ldots + h_{m1}\xi_m \geq \nu, \\ h_{12}\xi_1 + h_{22}\xi_2 + \ldots + h_{m2}\xi_m \geq \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{1n}\xi_1 + h_{2n}\xi_2 + \ldots + h_{mn}\xi_m \geq \nu. \end{cases} \qquad (2.34)$$

Разделим неравенства на $\nu>0$ (если $\nu<0$, то следует перейти к стратегически эквивалентной игре Г', для которой все $h_{ij}>0$, а значит, и $\nu>0$).

$$\begin{aligned} &h_{11}p_1 + h_{21}p_2 + \ldots + h_{m1}p_m \geq 1, \\ &h_{12}p_1 + h_{22}p_2 + \ldots + h_{m2}p_m \geq 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &h_{1n}p_1 + h_{2n}p_2 + \ldots + h_{mn}p_m \geq 1, \end{aligned}$$

где $p_i = \dfrac{\xi_i}{\nu} \geq 0$ для всех $i = \overline{1,m}$. (2.35)

Так как $\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1$, то $\sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{\nu}$, но ν – это цена игры, которую следует максимизировать, а следовательно, следует минимизировать линейную форму $L = p_1 + p_2 + ... + p_m \to \min$.

Таким образом, задача нахождения X_1^* свелась к задаче линейного программирования с n ограничениями и m переменными, которая может быть сформулирована следующим образом: *определить значения переменных $p_i \geq 0$, $i=\overline{1,n}$, так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (2.35) и при этом линейная функция*

$$L = p_1+p_2+ ... +p_n \tag{2.36}$$

обращалась в минимум.

При определении оптимальной стратегии 2-го игрока $X_2^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_m^*)$ исходим из того, что средний проигрыш игрока В не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок А. То есть переменные $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$ удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot\eta_1 + a_{12}\cdot\eta_2 + \ldots + a_{1m}\cdot\eta_m \leq \nu, \\ &a_{21}\cdot\eta_1 + a_{22}\cdot\eta_2 + \ldots + a_{2m}\cdot\eta_m \leq \nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\cdot\eta_1 + a_{n2}\cdot\eta_2 + \ldots + a_{nm}\cdot\eta_m \leq \nu. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Если обозначить $q_j = \eta_j/\nu$, $j = \overline{1, m}$, (2.38)

то получим систему неравенств:

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot q_1 + a_{12}\cdot q_2 + \ldots + a_{1m}\cdot q_m \leq 1, \\ &a_{21}\cdot q_1 + a_{22}\cdot q_2 + \ldots + a_{2m}\cdot q_m \leq 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\cdot q_1 + a_{n2}\cdot q_2 + \ldots + a_{nm}\cdot q_m \leq 1. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Переменные q_j, ($j = \overline{1, m}$) удовлетворяют условию $q_1 + q_2 + ... + q_m = 1/\nu$ (из равенства $\eta_1 + \eta_2 + ... +\eta_m =1$).

Если учесть, что игрок В стремится минимизировать гарантированный выигрыш, то есть найти $\max(1/\nu)$, игра сведется к следующей задаче: *определить значения переменных $q_j \geq 0$, $j=\overline{1, m}$, которые удовлетворяют системе неравенств (2.39) и максимизируют линейную функцию $M = q_1 + q_2 + ... + q_m$.* (2.40)

Здесь присутствуют m ограничений и n переменных.

Составив расширенные матрицы для рассмотренных задач убеждаемся в следующем:

– одна матрица получилась из другой транспонированием;

– знаки неравенств поменялись на противоположные;

– экстремумы линейных функций имеют противоположный смысл;

– свободные члены системы ограничений и коэффициенты линейных функций поменялись местами.

Кроме того, значения оптимумов в этих задачах совпадают, то есть $L_{min}=M_{max}$.

Таким образом, задачи линейного программирования (2.35) – (2.36) и (2.39) – (2.40) являются взаимно-двойственными. Очевидно, при определении оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно-двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности.

* * * * * *

Итак, с учетом вышеизложенного можно рекомендовать следующую схему решения произвольной конечной игры размера n×m:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока А являются те, которым соответствуют строки с элементами, заведомо меньшими, чем элементы других строк; для игрока В – столбцы с элементами, заведомо большими, чем элементы других столбцов.

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей чистые стратегии игроков будут оптимальными, а цена игры совпадает с верхней и нижней ценами.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера 2×2 возможно применение аналитического метода, для игр размера 2×2, 2×m, n×2 – графического или сочетания графического и аналитического методов решения, для игр размера n×m рекомендуется симплексный метод.

2.8. Приближенные методы решения игр

Часто на практике встречаются ситуации, когда нет необходимости в определении точного решения игры; достаточно найти приближенное решение, дающее средний выигрыш, близкий к цене игры. Ориентировочное знание цены игры v может дать уже простой анализ матрицы и определение нижней (α) и верхней (β) цен игры. Если α и β близки, практически нет надобности заниматься поисками точного решения, а достаточно выбрать чистые минимаксные стратегии.

В случаях, когда α и β не близки, можно получить приемлемое для практики решение с помощью численных методов решения игр, из которых мы вкратце рассмотрим *метод итераций*.

Идея метода итераций сводится к следующему. Разыгрывается "мысленный эксперимент", в котором противники А и В применяют друг против друга свои стратегии. Эксперимент состоит из последовательности элементарных игр, каждая из которых имеет матрицу заданной игры. Начинается с того, что мы (игрок А) выбираем произвольно одну из своих стратегий, например x_1^i. Противник на это отвечает той своей стратегией x_2^j , которая наименее выгодна для нас, то есть обращает выигрыш при стратегии x_1^i в минимум. На этот ход мы отвечаем той своей стратегией x_1^k, которая дает максимальный средний выигрыш при применении противником стратегии x_2^j. Далее – снова очередь противника. Он отвечает на нашу пару ходов x_1^i и x_1^k той своей стратегией x_2^s, которая дает нам наименьший средний выигрыш при этих двух стратегиях (x_1^i , x_1^k), и так далее. На каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на любой ход другого игрока той стратегией, которая является оптимальной относительно всех его предыдущих ходов, рассматриваемых как некоторая смешанная стратегия.

Если такой процесс продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну пару ходов (элементарную игру), будет стремиться к цене игры, а частоты $\xi_1,\dots,\xi_n$; $\eta_1,\dots,\eta_m$, с которыми встречаются стратегии игроков в этом розыгрыше, будут приближаться к частотам, определяющим оптимальные стратегии.

Расчеты показывают, что сходимость метода очень медленная, однако для быстродействующих счетных машин это не является препятствием.

Пример 2.5. Проиллюстрируем применение метода на примере игры 3×3, с матрицей:

A \ B	x_2^1	x_2^2	x_2^3
x_2^1	8	2	4
x_2^2	4	5	6
x_2^3	1	7	3

В таблице 2.3 приведены первые 18 шагов итерационного процесса.

В первом столбце дан номер элементарной игры (пары ходов) n; во втором – номер i выбранной стратегии игрока А; в последующих трех – “накопленный выигрыш” за первые n игр при стратегиях противника x_2^1, x_2^2, x_2^3. Минимальное из этих значений отмечено значком *.

Таблица 2.3

n	i	x_2^1	x_2^2	x_2^3	j	x_1^1	x_1^2	x_1^3	V'	V”	V*
1	3	1*	7	3	1	8*	4	1	1	8	4,50
2	1	9	9	7*	1	12*	10	4	3,5	6	4,45
3	1	17	11*	11	2	14	15*	11	3,67	5,00	4,33
4	2	21	16*	17	2	16	20*	18	4,00	5,00	4,50
5	2	25	21*	23	2	18	25*	25	4,20	5,00	4,60
6	2	29	26*	29	2	20	30	32*	4,33	5,33	4,82
7	3	30*	33	32	1	28	34*	33	4,29	4,86	4,57
8	2	34*	38	38	1	36	38*	34	4,25	4,75	4,50
9	2	38*	43	44	1	44*	42	35	4,23	4,89	4,56
10	1	46	45*	48	2	46	47*	42	4,50	4,70	4,60
11	2	50*	50	54	1	54*	51	43	4,55	4,91	4,72
12	1	58	52*	58	2	56	56*	50	4,33	4,66	4,49
13	2	62	57*	64	2	58	61*	57	4,38	4,70	4,54
14	2	66	62*	70	2	60	66*	64	4,43	4,71	4,56
15	2	70	67*	76	2	62	71	71*	4,47	4,73	4,60
16	3	71*	74	79	1	70	75*	72	4,44	4,69	4,56
17	2	75*	79	85	1	78	79*	73	4,41	4,65	4,53
18	2	79*	84	91	1	86*	83	74	4,39	4,78	4,58
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Далее идет номер j стратегии, выбранной противником, и, соответственно, накопленный выигрыш за n игр при стратегиях x_1^1, x_1^2, x_1^3; из этих значений отмечено максимальное. Отмеченные значения определяют выбор ответной стратегии другого игрока. В следующих графах последовательно приведены: минимальный средний выигрыш V', равный минимальному накопленному выигрышу, деленному на число игр n; максимальный средний выигрыш V", равный максимальному накопленному выигрышу, деленному на n, и их среднее арифметическое V* = (V' + V")/2. При увеличении n все три величины V', V" и V* будут приближаться к цене игры v, но величина V*, естественно, будет приближаться к ней сравнительно быстрее.

Преимущество итерационного метода решения игр в том, что объем и сложность вычислений сравнительно слабо возрастают по мере увеличения числа стратегий n и m.

2.9. Прямоугольник ситуаций и решение игр

Рассмотрим матричную игру 2×2 с матрицей выигрышей

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть X_1 – произвольная смешанная стратегия 1-го игрока (в частности, она может быть и чистой). Пусть $\xi_1 = \xi$ – вероятность применения первой чистой стратегии, тогда вероятность 2-й чистой стратегии $\xi_2 = 1-\xi$. Для смешанной стратегии 2-го игрока по аналогии $X_2=(\eta,\ 1-\eta)$. Так как в записях стратегий участвуют лишь переменные ξ и η, то ситуацию X можно обозначить парой чисел (ξ, η). Геометрически всякую ситуацию (ξ^o, η^o) можно понимать как точку на единичном квадрате ситуаций, включая его границы (см. рис. 2.8).

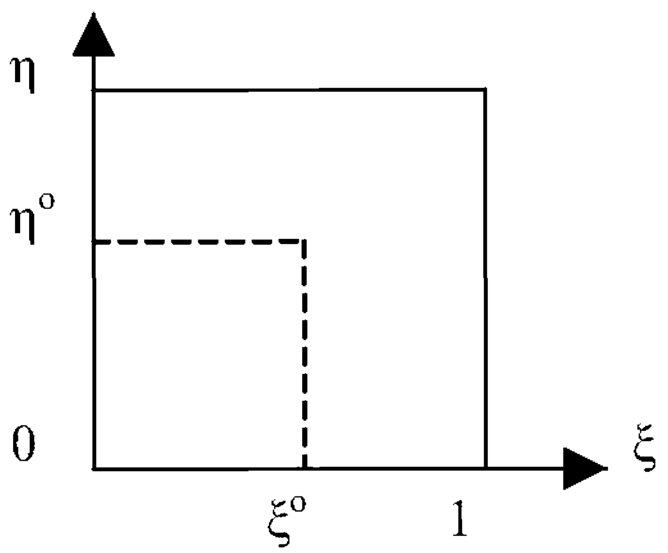


Рис.2.8

Ситуация (ξ, η) будет равновесной, если она приемлема для обоих игроков. Поэтому для описания седловых точек игры опишем множества ситуаций, приемлемых для отдельных игроков и изобразим их на единичном квадрате ситуаций. Приемлемость ситуации (X_1, X_2) или (ξ, η) для 1-го игрока можно определить следующим образом для любых ξ, η из диапазона их изменений:

$$(h_{11}, h_{12})X_2^T = H_{1(\cdot)}X_2^T \le X_1 H X_2^T, \qquad (2.41)$$

$$(h_{21}, h_{22})X_2^T = H_{2(\cdot)}X_2^T \le X_1 H X_2^T. \qquad (2.42)$$

Заметим еще раз, что

$$X_1 H X_2^T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\xi_i\eta_j = h_{11}\xi_1\eta_1 + h_{12}\xi_1\eta_2 + h_{21}\xi_2\eta_1 + h_{22}\xi_2\eta_2 = $$
$$= H(\xi, \eta) = H(X),$$

где $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = 1-\xi$, $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = 1-\eta$.

В выражениях (2.41), (2.42) через $H_{1(\cdot)}$ и $H_{2(\cdot)}$ обозначены, соответственно, 1-я и 2-я строки матрицы выигрышей H. Вообще, i-я строка матрицы обозначается $H_{i(\cdot)}$, а j-й столбец – $H_{(\cdot)j}$.

Выражения (2.41) , (2.42) можно переписать следующим образом:

$$H(1;\eta) \le X_1 H X_2^T, \qquad (2.43)$$

$$H(0;\eta) \le X_1 H X_2^T. \qquad (2.44)$$

Если ξ=1>0, то неравенства (2.41) , (2.43) обращаются в тождества и необходимым и доступным условием приемлемости ситуации (X_1, X_2) для 1-го игрока оказывается неравенство (2.42) или (2.44). Тогда можно записать:

$$H_{2(\cdot)}X_2^T = H(0;\eta) \le H_{1(\cdot)}X_2^T = H(1;\eta) \cdot \qquad (2.45)$$

Если ξ=0, 1- ξ =1>0, то в тождествах образуются неравенства (2.42) , (2.44), и условием приемлемости ситуации (X_1, X_2) для 1-го игрока оказывается неравенство (2.41) или (2.43). Тогда можно записать:

$$H_{1(\cdot)}X_2^T = H(1;\eta) \le H_{2(\cdot)}X_2^T = H(0;\eta) \cdot \qquad (2.46)$$

Если 0<ξ<1, то ξ_1=ξ>0 и ξ_2=1-ξ>0, поэтому на основании теоремы о дополнительной нежесткости можно установить, что в тождества обращаются оба неравенства (2.41), (2.42) или (2.43), (2.44). Условием приемлемости для игрока 1 ситуации (X_1, X_2) становится неравенство

$$H_{1(\cdot)}X_2^T = H_{2(\cdot)}X_2^T \quad \text{или} \quad H(1;\eta) = H(0;\eta) \cdot \qquad (2.47)$$

Распишем условие приемлемости в развернутом виде:

$$X_1HX_2^T = (\xi; 1-\xi)\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}(\eta; 1-\eta)^T = \xi\eta h_{11} + \xi(1-\eta)h_{12} +$$

$$+ (1-\xi)\eta_{21} + (1-\xi)(1-\eta)h_{22} = \xi\eta(h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}) +$$

$$+ \xi(h_{12} - h_{22}) + \eta(h_{21} - h_{22}) + h_{22} \qquad (2.48)$$

Тогда неравенства (2.45) – (2.47) можно переписать следующим образом:

$$\eta \cdot C \ge d_1 \qquad (\text{здесь } \xi = 1) \qquad (2.49),$$

$$\eta \cdot C \le d_1 \qquad (\text{здесь } \xi = 0) \qquad (2.50),$$

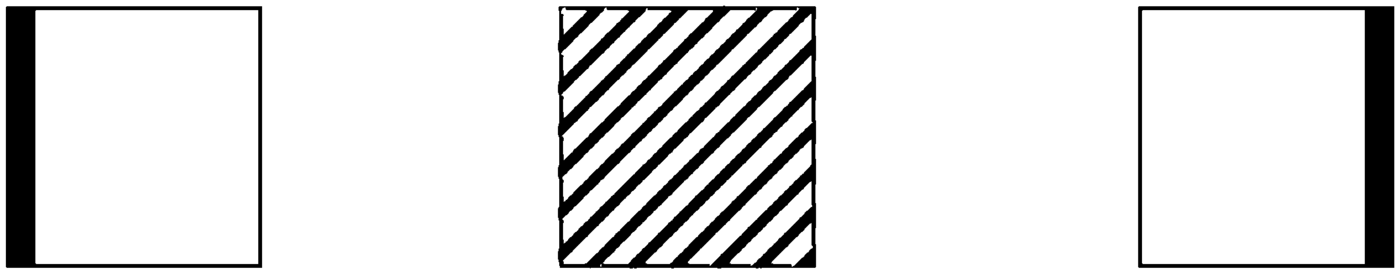
$$\eta \cdot C = d_1 \qquad (\text{здесь } 0 < \xi < 1) \qquad (2.51),$$

где $C=h_{11}- h_{12}- h_{21}+ h_{22}$ и $d_1=h_{22}- h_{12}$, (2.52)

Рассмотрим комбинации параметров C и d_1.

Если C=0 и d_1=0, то для 1-го игрока будут приемлемы все ситуации, возможные на единичном квадрате [0;1]×[0;1].

Если C=0 и $d_1 \neq 0$, то равенство (2.51) не может быть выполнено и поэтому будет выполняться со строгим знаком либо неравенство (2.49), либо неравенство (2.50), то есть множество всех η даст приемлемые для 1-го игрока ситуации либо при ξ=1, либо при ξ=0. Рассмотренные комбинации иллюстрируются рис. 2.9.



$C=0;d_1<0$ а) $C=0;d_1=0$ б) $C=0;d_1>0$ в)

Рис. 2.9

Если $C\neq 0$ и выполняется неравенство $0<\xi<1$, то $\eta=d_1/C$. Это значение η обозначим через $\eta^{\wedge}$, тогда

$$\eta^{\wedge}=\frac{h_{22}-h_{12}}{h_{11}-h_{12}-h_{11}+h_{22}}\;. \tag{2.53}$$

Поделив обе части неравенств (2.49) – (2.51) на C и, учитывая знак C, эти неравенства можно переписать:

$$\xi=1\Rightarrow \quad \eta\geq\eta^{\wedge} \text{ при } C>0 \text{ и } \eta\leq\eta^{\wedge} \text{ при } C<0\,, \tag{2.54}$$

$$\xi=0\Rightarrow \quad \eta\leq\eta^{\wedge} \text{ при } C>0 \text{ и } \eta\geq\eta^{\wedge} \text{ при } C<0\,, \tag{2.55}$$

$$0<\xi<1\Rightarrow \quad \eta=\eta^{\wedge} \text{ при любом } C\,. \tag{2.56}$$

Если не обращать внимание на то, что η должно принадлежать отрезку [0;1] (т.к. это вероятность), то при $C\neq 0$ множества, описываемые выражениями (2.54) – (2.56), будут представлять трехзвенные зигзаги. Множества приемлемых для 1-го игрока ситуаций – это пересечение данных зигзагов с квадратом $[0;1]\times[0;1]$. Зигзаг называется левым, если при изменении η от $-\infty$ до ∞ поворот на среднее звено выполняется влево. В противном случае зигзаг называется правым. Варианты пересечения зигзагов с единичным квадратом, то есть приемлемых для 1-го игрока ситуаций представлены на рис. 2.10.

Двойственным по отношению к игроку 1 способом можно описать приемлемые ситуации для 2-го игрока:

$$\eta=1\Rightarrow \quad X_1H_{(\cdot)1}\leq X_1H_{(\cdot)2}\,, \tag{2.57}$$

$$\eta=0\Rightarrow \quad X_1H_{(\cdot)2}\leq X_1H_{(\cdot)2}\,, \tag{2.58}$$

$$0<\eta<1\Rightarrow \quad X_1H_{(\cdot)1}\; X_1H_{(\cdot)2}\,. \tag{2.59}$$

Неравенства (2.57) – (2.59) можно переписать:

$$\xi\cdot C\leq d_2, \qquad \xi\cdot C\geq d_2, \qquad \xi\cdot C=d_2\,, \tag{2.60}$$

где C то же, что и в (2.52), $d_2=h_{22}-h_{21}$.

Все рассуждения относительно возможных комбинаций параметров C и d_2 можно осуществить подобно тому, как это было сделано при изучении ситуаций, приемлемых для 1-го игрока.

В случае, когда $C \neq 0$, $\xi^{\wedge}=d_2/C$, то есть

$$\xi^{\wedge} = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} \ . \qquad (2.61)$$

Таким образом, мы имеем:

$\eta=1 \Rightarrow \quad \xi \leq \xi^{\wedge}$ при $C>0$ и $\xi \geq \xi^{\wedge}$ при $C<0$, (2.62)

$\eta=0 \Rightarrow \quad \xi \geq \xi^{\wedge}$ при $C>0$ и $\xi \leq \xi^{\wedge}$ при $C<0$, (2.63)

$0<\eta<1 \Rightarrow \quad \xi=\xi^{\wedge}$ при любом C . (2.64)

Варианты пересечения трехзвенных зигзагов, описываемых выражениями (2.62) – (2.63), с единичным квадратом изображены на рис. 2.11.

Для каждой матричной игры ориентация зигзагов, на которых расположены приемлемые для обоих игроков ситуации, одинакова, то есть зигзаги оба правые или оба левые. Пересечения соответствующих игре зигзагов из рис. 2.10 и 2.11 дают в общем случае качественную картину решения игры.

Если рассчитанные по формулам (2.53), (2.61) величины $\eta^{\wedge}$ и $\xi^{\wedge}$ лежат в интервале (0;1), то $\eta^*=\eta^{\wedge}$ и $\xi^*=\xi^{\wedge}$. В этом случае цену игры можно определить, исходя из выражений (2.19),(2.53) и (2.61) следующим образом:

$$\nu = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} \ . \qquad (2.65)$$

Пример 2.6. Проанализируем игру, заданную матрицей

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

	x_2^1	x_2^2	α_i
x_1^1	1	2	1
x_1^2	4	6	4
α_i	4	6	

Игра имеет седловую точку h_{21}, что соответствует равновесной ситуации в чистых стратегиях $(x_1^2; x_2^1)$ или $\xi^*=0$, $\eta^*=1$.

$C=1-2-4+6=1>0$, $d_1=6-2=4>0$, $d_2=6-4=2>0$

$\xi^*=\xi^{\wedge}=2/1=2>1$, $\eta^*=\eta^{\wedge}=4/1=4>1$.

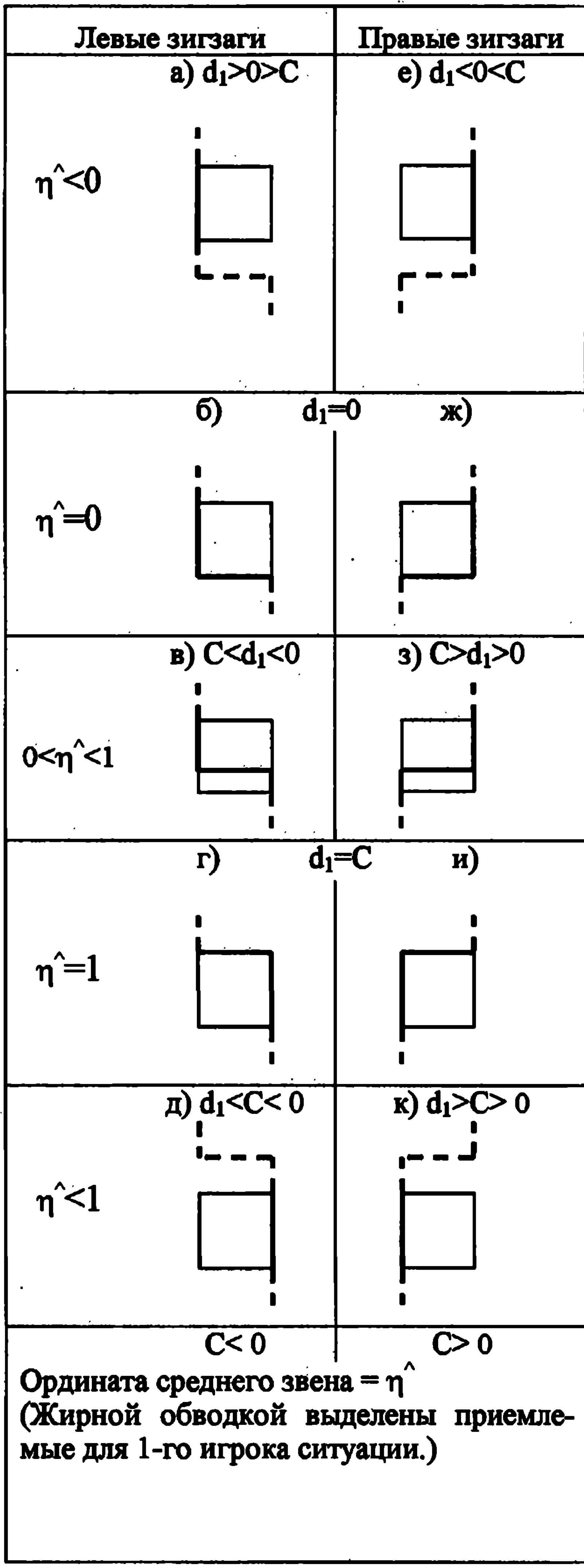


Рис. 2.10

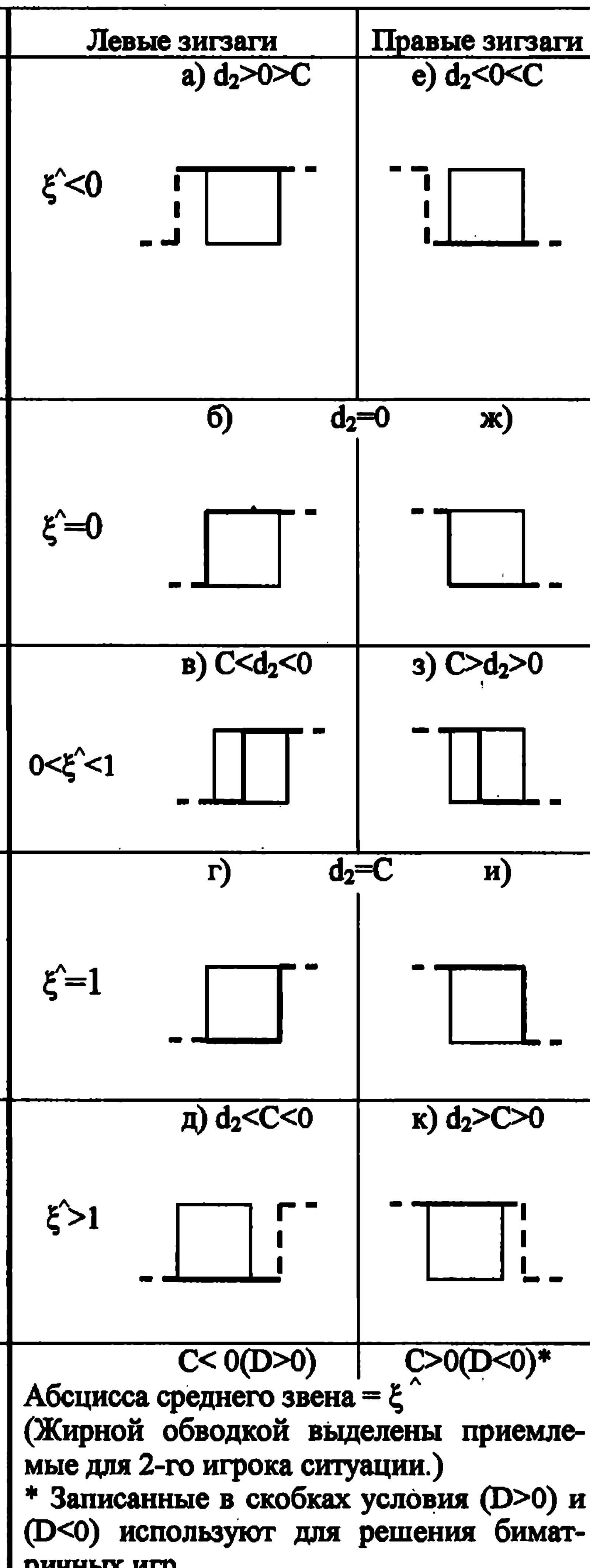
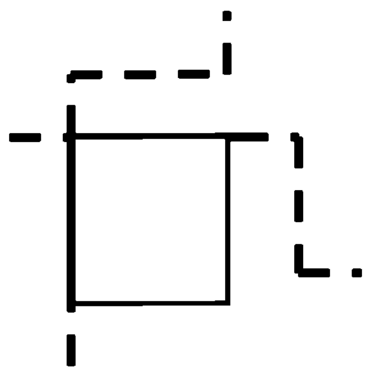


Рис. 2.11

Если обратиться к рис. 2.10 и 2.11, можно увидеть, что равновесная (оптимальная по Нэшу) ситуация образуется пересечением зигзагов рис. 2.10 к) и рис. 2.11 к) (см. рис. 2.12).



Равновесная ситуация (0;1)
Рис. 2.12

Можно убедиться, что игра формата 2×2, имеющая седловую точку в чистых стратегиях, содержит доминирующую стратегию хотя бы для одного игрока и наоборот. Действительно, $h_{21}>h_{11}$ и $h_{22}>h_{12}$, то есть 2-я стратегия 1-го игрока доминирует 1-ю: $x_1^2 D x_1^1$; $h_{11}<h_{12}$ и $h_{21}<h_{22}$, то есть 1-я стратегия 2-го игрока доминирует 2-ю: $x_2^1 D x_2^2$.

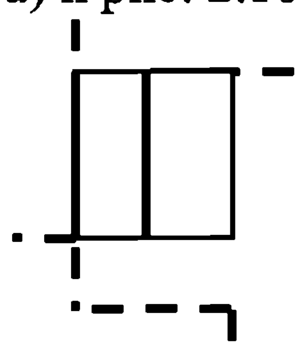
Пример 2.7. В игре с матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ $x_1^2 D x_1^1$, но для 2-го игрока доминирующая стратегия отсутствует.

h_{22} – седловая точка игры.

$C=1-2-6+4=-3<0$, $d_1=4-2=2>0$, $d_2=4-6=-2>0$

$\xi\hat{}=-2/-3=2/3<0$; $\xi\hat{}<0$; $\eta\hat{}=2/-3=-2/3<0$.

Данная ситуация соответствует пересечению зигзагов рис. 2.10 а) и рис. 2.10 в) (рис. 2.13).



Равновесная ситуация (0;0)
Рис. 2.13

Пример 2.8. В игре с матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ нет доминирующих стратегий ни у одного игрока.

$C= 1- 4 - 6 + 2=-7<0$, $d_1= 2 - 4= -2<0$,

$d_2 = 2 - 6 = -4<0$.

$\xi^* = \xi\hat{} = -4/-7=4/7>0$; $\eta^*= \eta\hat{}=-2/-7=2/7>0$; $0<\xi^*$, $\eta^*<1$.

Данная ситуация соответствует пересечению зигзагов рис. 2.10 в) и рис. 2.11 в). Равновесная ситуация (4/7; 2/7). Это означает, что 1-й игрок выбирает x_1^1 с вероятностью 4/7, а x_1^2 – с вероятностью 3/7; второй игрок выбирает x_2^1 с вероятностью 2/7, а x_2^2 – с вероятностью 5/7.

Полученные результаты в части геометрического истолкования множеств приемлемых ситуаций и положения равновесной точки на единичном квадрате ситуаций будут использованы в дальнейшем при изложении материала по биматричным играм.

Матричная игра, решение которой (ξ^*,η^*) удовлетворяет строгим неравенствам $0<\xi^*<1$ и $0<\eta^*<1$, называется ***вполне смешанной***.

Для вполне смешанных игр произвольного формата достаточно решить алгебраическую систему из m+n уравнений ($m=card\{x_1\}$, $n=card\{x_2\}$) с m+n неизвестными ξ_i, $i=\overline{1,m}$ и η_j, $j=\overline{1,n}$, не прибегая к традиционным методам решения задач линейного программирования. Упомянутая алгебраическая система в матричной форме имеет вид:

$$\begin{cases} P \cdot H^T = (1, 1, ..., 1), \\ H \cdot Q = (1, 1, ..., 1)^T \end{cases} \tag{2.66}$$

где $P=(p_1, p_2, ..., p_m)=(\xi_1/v,\ \xi_2/v, ..., \xi_m/v)$,

$Q=(q_1, q_2, ..., q_n)=(\eta_1/v, \eta_2/v, ..., \eta_n/v)$.

Далее осуществляется переход от p_i к ξ_i и от q_i к η_j по формулам:

$$\xi_i = p_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} p_i\ , \qquad \eta_j = q \Big/ \sum_{j=1}^{n} q_j\ , \tag{2.67}$$

а цена игры определяется как $v = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} q_j$. (2.68)

В связи с этим почти всегда имеет смысл попытаться решить систему вида (2.65), то есть предположить игру вполне смешанной и, если полученные значения ξ_i^*, η_j^* лежат в открытом единичном интервале (0;1), считать игру решенной. На практике большинство матричных игр достаточно большого формата являются вполне смешанными.

Располагая формулами (2.53), (2.61) для η^и ξ^ и рис. 2.10, 2.11, следует считать нецелесообразным применять графические способы решения игр 2×2. Для игр 2×n и m×2 эти способы вполне оправданы.

2.10. Приложения матричных игр в экономике

Как было сказано ранее, матричные игры – суть антагонистические игры. Вообще говоря, чисто антагонистические конфликты встречаются в социально-экономических и технико-экономических сферах не так уж и часто. Тем не менее соображения и результаты, полученные для матричных игр, являются весьма важными при исследовании и решении игр других классов. Так, например, аппарат матричных игр используется при решении задач теории статистических решений, позволяя вырабатывать способ поведения ЛПР (лица принимающего решение) в условиях полной или частичной неопределенности внешней обстановки, который будет обеспечивать гарантированные результаты в так называемых “играх с природой” – принятая в статистических играх терминология. Эти приложения матричных игр будут рассмотрены в отдельном разделе.

Матричной игровой моделью можно описать антагонистическую конкуренцию двух фирм.

Пример 2.9. Пусть фирма 1 производит сезонный товар, который имеет спрос в течение n единиц времени. Этот товар может поступать на рынок в дискретные моменты времени $i=1,2,...,n$. Для конкурентной борьбы с фирмой 1 дочерняя фирма 2 некоего концерна производит аналогичный товар, который может поступать на рынок в дискретные моменты $j=1,2,...,n$. Фирма 2 не заботится о собственных доходах, ее цель – вытеснить с рынка фирму 1. После этого легко будет наверстать упущенное, опираясь на капитал концерна. Для этой цели видятся два основных пути – продажа товара по пониженной цене либо оптимальный момент выброса товара на рынок. Рассмотрим ситуацию, когда 1-й путь исключается из-за некоторого соглашения между фирмами. В этом случае 2-й путь представляется единственным законным инструментом фирмы 2. Следовательно, она должна заблаговременно готовить свое производство к выпуску и продаже товара в выбранный период времени. Для того, чтобы вытеснить с рынка 1-ю фирму, 2-я должна минимизировать ее доходы.

Пусть качество конкурирующих товаров зависит от момента времени поступления их на рынок относительно друг друга. Чем позднее товар поступит на рынок, тем его качество выше ввиду дополнительного временного резерва на улучшение технологии и дизайна, а реализуется, главным образом, товар более высокого качества. Тогда, если фирма 1 выбросит на рынок товар в момент i, а фирма 2 – в момент $j>i$, то фирма 1, не имея конкурента в течение j-i единиц времени, получит доход $H_1=C(j-i)$, где C – доход от продажи в единицу времени.

Начиная с момента j, фирма 1 теряет рынок и далее дохода не получает. Если же $i>j$, то фирма 1, выбросив на рынок более качественный товар, будет получать доход в течение временного интервала $n-i+1$ (это число оставшихся единиц времени). Доход фирмы 1 в этом случае будет составлять $H_1=C(n-i+1)$. Если $i=j$, то товары будут иметь одинаковый спрос и доход фирмы 1 составит $H_1=C(n-i+1)/2$.

Фирма 1 выбирает i-ю единицу времени завоза товара, стремясь максимизировать свой доход, а фирма 2 путем выбора j-й единицы времени преследует прямо противоположную цель – минимизировать H_1, то есть здесь налицо антагонистический конфликт. Множество чистых стратегий $\{x_1\}=\{x_2\}=\{1,2,...,n\}$ означает, что матрица [H] будет квадратной. Запишем функцию выигрыша 1-го игрока, то есть фирмы 1:

$$H(i,j)=\begin{cases} C(i-i) & \text{при} \quad i<j \\ C(n-i+1)/2 & \text{при} \quad i=j \\ C(n-i+1) & \text{при} \quad i>j \end{cases}$$

Пусть $\{x_1\}=\{x_2\}=\{1, 2, 3, 4\}$, тогда

$$H=\begin{bmatrix} 2C & C & 2C & 3C \\ 3C & 3C/2 & C & 2C \\ 2C & 2C & C & 2C \\ C & C & C & C/2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } C>0.$$

Сведем эту игру к стратегически эквивалентной игре $Г^I$ с матрицей:

$$H^I=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

В этой игре $x_1^3Dx_1^4$; $x_2^2Dx_2^1$, следовательно, можно вычеркнуть 4-ю строку и 1-й столбец.

$$H^I=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

В этой матрице после упрощения игры i-я строка игры $Г^{II}$ соответствует i-й стратегии, а j-й столбец, – j+1 стратегии.

В игре $Г^{II}$ также можно провести дальнейшее упрощение, в результате которого получается игра $Г^{III}$ с матрицей 2×2 $H^{III}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

В этой матрице 1-я строка соответствует 1-й стратегии первоначальной игры, а 2-я – 3-й стратегии. Столбцы 1 и 2 соответствуют стратегиям 2-й и 3-й первоначальной игры Г. Матрица $[H^{III}]$ не имеет седловой точки, и игра $Г^{III}$ в чистых стратегиях не решается. Заметим также, что эта игра обладает свойством симметрии.

Вероятности $\eta^\wedge$ и $\xi^\wedge$, вычисленные по формулам (2.53) и (2.61), примут значения: $\eta^\wedge=\frac{1-2}{1-2-2+1}=\frac{1}{2}$; $\xi^\wedge=\frac{1-2}{1-2-2+1}=\frac{1}{2}$.

Таким образом, стратегия $X_1^*=(1/2;0;1/2;0)$ оптимальна для 1-й фирмы, а стратегия $X_2^*=(0;1/2;1/2;0)$ – для 2-й фирмы. Следовательно, фирма 1 с равными частотами должна завозить товар на рынок в

1-ю и 3-ю единицы времени, а фирма 2 – с равными частотами – во 2-ю и 3-ю единицы времени. В этом случае математическое ожидание дохода фирмы 1 составит 3С/2.

Пример 2.10. Этот пример касается планирования выпуска двумя предприятиями однородной продукции, которая сбывается на одном и том же рынке. Себестоимость и продажная цена всех типов продукции одинакова; различие товаров в дизайне, порядке эксплуатации и т.п., а назначение одно и то же – это могут быть утюги, электрочайники и др. Пусть первое предприятие может выпускать товары m типов $A_1, A_2, \ldots A_m$, а 2-е – другие товары также типов $B_1, B_2, \ldots B_m$. Маркетинговые исследования показали, что на рынке найдет сбыт N единиц товара всех типов, причем если 1-е предприятие будет выпускать продукцию A_i, 2-е – продукцию B_j, то будет реализовано $p_{ij} \cdot N$ товаров типа A_i и $(1- p_{ij}) \cdot N$ товаров типа B_j. Мощности предприятий таковы, что каждое из них в одиночку способно обеспечить рынок. Для простоты (не теряя при этом общности рассуждений) примем доход от продажи единицы товара за 1, а полезность 1-го игрока, то есть 1-го предприятия – равной его общему доходу. Тогда матрицу выигрышей 1-го предприятия можно записать:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \rho_{11}N & \rho_{12}N & \cdots & \rho_{1m}N \\ \rho_{21}N & \rho_{22}N & \cdots & \rho_{2m}N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{m1}N & \rho_{m2}N & \cdots & \rho_{mm}N \end{bmatrix}$$

то есть $(h_{ij})_1=\rho_{ij}N$. Точно так же можно составить матрицу выигрышей 2-го предприятия, состоящую из элементов $(h_{ij})_2=(1-\rho_{ij}) \cdot N$. Очевидно, что в любой ситуации сумма доходов предприятий 1 и 2 равна $N\rho_{ij}N+(1-\rho_{ij}) \cdot N$. Это означает, что увеличение выигрыша 1-го предприятия ведет к уменьшению выигрыша 2-го предприятия, и игра, заданная матрицей $H_1=H$, моделирует антагонистический конфликт. Ранее упоминалось, что антагонистическая игра – суть игра с нулевой суммой, но к такой игре путем аффинно эквивалентного преобразования может быть сведена любая игра с постоянной суммой. Таким образом, решение игры Г с матрицей H определяет а общем случае смешанные оптимальные стратегии X_1^* и X_2^*, а также математическое ожидание выигрыша игрока 1, равное ν. Для игрока 2, то есть 2-го предприятия, математическое ожидание проданных товаров составит N-ν (т.к. общая сумма проданных товаров равна N). Покажем решение игры на конкретном числовом материале. Пусть предприятие 1 выпускает игрушки типа $A_1, A_2, \ldots, A_5$, а предприятие 2 – игрушки типа $B_1, B_2, \ldots, B_5$. Затраты на производство каждого типа одинаковы, и реализуются игрушки по одной цене. Прогнозируемая доля сбыта игрушек 1-го предприятия в условиях конкуренции со стороны 2-го предприятия задана табл. 2.4.

Таблица 2.4

Предприятие 1	Предприятие 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,5	0,5	0,4	0,5	0,2
A_2	0,5	0,4	0,6	0,1	0,5
A_3	0,3	0,3	0,4	0,2	0,6
A_4	0,4	0,7	0,6	0,4	0,2
A_5	0,3	0,2	0,4	0,0	0,1

Ожидается, что в течение года будет продано всего 10 000 игрушек. Требуется определить типы игрушек, выпускаемых каждым предприятием и доли выпуска по типам в общей программе выпуска. В этом случае матрица выигрышей 1-го игрока будет иметь вид:

$$H = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}0 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Приведем игру Г к стратегически эквивалентной $Г^I$, разделив матрицу Н на число 10^3, с тем, чтобы получить в новой матрице удобные для расчетов целые числа:

$$H^I = \begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{5} & 4 & 5 & 2 \\ \cancel{5} & \cancel{4} & 6 & 1 & 5 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & 4 & 2 & 6 \\ \cancel{4} & \cancel{7} & 6 & 4 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

Легко убедиться, что игра $Г^I$ не имеет седловой точки в чистых стратегиях и следует искать решение игры в смешанном расширении.

Вначале упростим игру H^I. Для этой игры $x_1^1 D x_1^5$; $x_2^4 D x_2^1$; $x_2^4 D x_2^2$; поэтому вычеркнем 5-ю строку и 1-й и 2-й столбцы в H^I. Получим игру $Г^{II}$ с матрицей H^{II}

$$\left[H^{II}\right] = \begin{bmatrix} \cancel{4} & 5 & 2 \\ \cancel{6} & 1 & 5 \\ \cancel{4} & 2 & 6 \\ \cancel{6} & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

i-й строке матрицы H^{II} соответствует i-я строка игрока $Г^I$, а j-у столбцу (j+2)-я стратегия.

В игре Γ^{II} все стратегии обоих игроков оптимальны по Парето. В принципе, можно установить, что в матрице H^{II} 3-я стратегия 2-го игрока (1-й столбец) может доминировать с помощью некоторой смешанной стратегии, составленной из 2-го и 3-го столбцов, например, с вероятностью 1/2 и 1/2. Тогда осуществляется переход к игре Γ^{III} с матрицей H^{III}:

$$H^{III} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{5} \\ 2 & 6 \\ \cancel{6} & \cancel{2} \end{bmatrix}$$

Здесь i-й строке матрицы H^{III} соответствует i-я стратегия игры Γ^{I}, а j-у столбцу (j+3)-я стратегия. В игре Γ^{III} $x_1^1 D x_1^4$ и $x_1^3 D x_1^2$. В итоге, после вычеркивания 2-й и 4-й строк получаем игру Γ^{IV} с матрицей $H^{IV} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, которая не имеет седловой точки. В ней 1-я строка соответствует 1-й стратегии игры Γ^{I}, 2-я строка – 3-й стратегии, а j-й столбец (j+3)-й стратегии. По формулам (2.53) и (2.61) найдем $\eta^\wedge$ и $\xi^\wedge$:

$$\eta^\wedge = \frac{6-2}{5-2-2+6} = \frac{4}{7}; \quad \xi^\wedge = \frac{6-2}{5-2-2+6} = \frac{4}{7}; \quad \eta^* = \eta^\wedge,\ \xi^* = \xi^\wedge,$$

при этом $\nu^{I} = \dfrac{5\cdot 6 - 2\cdot 2}{5-2-2+6} = \dfrac{26}{7}$, $\nu = \dfrac{26000}{7}$.

Следовательно 1-е предприятие должно выпускать игрушки типа A_1 и A_3 с долевыми коэффициентами в объеме выпуска 4/7 и 3/7. 2-е предприятие должно выпускать игрушки типа B_4 и B_5 с долевыми коэффициентами в объеме выпуска 4/7 и 3/7.

Таким образом, $X_1^* = (4/7;\ 0;\ 3/7;\ 0;\ 0)$ и $X_2^* = (0\ ;0;\ 0; 4/7;\ 3/7)$. Математическое ожидание числа игрушек обоих типов, реализованных предприятием 1, составит $\dfrac{26000}{7}$, а реализованных предприятием 2-м составит $10000 - \dfrac{26000}{7} = \dfrac{44000}{7}$ (шт.).

Если не прибегать к непопулярному приему поиска факта доминирования смешанной стратегии над некоторой чистой стратегией, то можно решить игру Γ^{II} формата 4×3 методом линейного программирования.

3. ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

3.1.Особенности игр с природой

Во многих задачах, приводящихся к игровым, неопределенность проявляется как результат действия тех или иных “стихийных сил” (непознанной природы). Такие игры называются ***играми с природой***. При этом термин “природа” может быть использован как в традиционном смысле, означающем окружающую среду, погодные условия в данном районе, так и условия рынка, определяющие спрос на продукцию, объем перевозок, некоторое сочетание производственных факторов и т.д.

В теории статистических решений неопределенная для ЛПР ситуация в его “игре” с природой не имеет выраженной конфликтной окраски. Другими словами, в данной теории неизвестные условия, обстоятельства внешней среды зависят не от сознательного и активного противодействия противника, а от объективной действительности. В игре с природой ЛПР никто активно не мешает, но ему труднее обосновать свой выбор, чем в антагонистической игре, где противник также придерживается определенных правил выбора оптимального поведения и его действия каким-то образом могут быть предсказаны или спрогнозированы.

Человек (игрок А) в играх с природой старается действовать осмотрительно, используя некоторую оптимальную стратегию, позволяющую получить наибольший выигрыш или наименьший проигрыш. Игрок В (природа) действует совершенно случайно, возможные стратегии определяются как ее состояния.

Игра с природой описывается матрицей H, как и конечная антагонистическая игра (разумеется, при условии, что рассматривается конечное число “стратегий” природы, то есть реализаций тех или иных обстоятельств). ЛПР – игрок 1, максимизирующий свой выигрыш. Поэтому можно говорить о выделении множества стратегий ЛПР, оптимальных в смысле Парето, т.е. о вычеркивании доминирующих стратегий в процессе упрощения игры. Но выделять паретовское множество стратегий природы (игрока 2) нельзя, т.к. она не руководствуется никакими принципами оптимальности – это первое существенное отличие игры с природой от антагонистической. Предположим, что выигрыш $H_1(i,j)>H_1(k,s)$. Это может состояться не только за счет того, что ЛПР удачно выбрал стратегию x_1^i вместо x_1^k. Просто оказалось, что реализованное состояние природы x_2^j более выгодно для ЛПР, чем состояние x_2^s . Иногда же предпочтение одного состояния природы перед другим может выглядеть для ЛПР вполне очевидным. Здесь под словом “предпочтение” понимается, что ЛПР будет ориентировать свое поведение на какое-то вполне определенное состояние природы как наиболее вероятное или как наиболее нежелательное, которое следует по возможности парировать своими действиями.

Второй отличительной чертой игры с природой является тот факт, что стратегии природы за редчайшим исключением нельзя смешивать, т.е. следует считать, что природа оперирует только чистыми стратегиями. Смешивание стратегий ЛПР целесообразно только тогда, когда игра с природой может многократно повторяться, что имеет место весьма нечасто.

3.2. Критерии выбора решений

1. Критерий Байеса. Если неопределенность реализации состояний природы носит стохастический характер, то для каждого j-го состояния природы можно указать вероятность его реализации η_j:

$$j=\overline{1,n}; \qquad \sum_{j=1}^{n}\eta_j = 1 \ . \qquad (3.1)$$

Тогда для ЛПР оказывается целесообразным выбирать ту стратегию, которая дает максимальный взвешенный вероятностями выигрыш по строке матрицы H:

$$H_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n}\eta_j \cdot h_{ij} \ . \qquad (3.2)$$

Данный критерий оценки целесообразности называется критерием Т.Байеса (Bayes): $H_1=B_a$.

2. Критерий Лапласа. Если вероятности в принципе существуют, но неизвестны, тогда можно предположить, что все состояния природы равновероятны по принципу недостаточного основания Лапласа (Laplace). В таком случае $$H_1 = \max_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ij} \qquad (3.3)$$

– это критерий Лапласа H_1=La. Чтобы не прибегать к этому критерию (который в общем-то не очень объективен) можно найти ориентировочные значения η_j по методу экспертных оценок.

3. Если определенность природы нестохастична, то для принятия оптимального решения условия действия ЛПР существенно неблагоприятны. Задача отыскания действительно оптимального решения в этом случае подменяется задачей отыскания не самого худшего решения. К этой проблеме существует несколько подходов, которые выражаются через критерии выбора решения в условиях полной неопределенности. Основными из этой группы критериев является критерий Вальда (Wald), Сэвиджа (Savage) и Гурвица (Hurwicz).

Ниже эти критерии рассматриваются подробно.

а) критерий Вальда (критерий осторожного наблюдателя). Это максимальный критерий, согласно которому предполагается, что игра с природой ведется как с разумным и агрессивным противником, т.е. среда находится в самом неблагоприятном для ЛПР состоянии. Оптимальной для ЛПР считается стратегия, дающая гарантированный результат, т.е. нижнее значение игры α

$$Wa = \max_i \min_j h_{ij} . \tag{3.4}$$

Это весьма перестраховочный подход, который тем не менее бывает в ряде случаев оправдан;

б) критерий Сэвиджа. Это минимаксный критерий, который применяется не к значениям элементов матрицы H выигрышей ЛПР, а к элементам матрицы R рисков (по иной терминологии – матрицы сожалений):

$$Sa = \min_i \max_j r_{ij}, \quad \text{где } r_{ij} = \beta_i - h_{ij} = \max_i h_{ij} - h_{ij}. \tag{3.5}$$

Таким образом, риск, или сожаление выступает как плата за отсутствие информации.

В смысле степени пессимизма этот критерий сходен с критерием Вальда, но сам пессимизм здесь понимается по-другому;

в) критерий Гурвица. Этот критерий рекомендует при принятии решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни безудержным оптимизмом (который присущ, например, максимаксному критерию применительно к матрице H. Для реализации этих рекомендаций назначается коэффициент $0<L<1$, который можно назвать коэффициентом оптимизма. Критерий Гурвица имеет вид:

$$Hu = \max_i (L \max_j h_{ij} + (1-L) \min_j h_{ij}) . \tag{3.6}$$

При L=0 этот критерий вырождается в критерий Вальда (критерий перестраховщика, принцип осторожности); при L=1 – в максимаксный критерий абсолютного оптимиста. Коэффициент L в реальности назначают, исходя из достаточно субъективных соображений или на основе экспертных оценок складывающейся ситуации. Чем опаснее ситуация, чем меньше склонность к риску, тем ближе к 0 назначается L, и наоборот.

Существует модификация этого критерия, в которой он формируется не на основе матрицы выигрышей H, а на основе матрицы рисков R.

Пример 3.1. Задана матрица H игры ЛПР с природой и вектор априорных вероятностей $\eta_1=0,3$; $\eta_2=0,5$; $\eta_3=0,2$

$$H=\begin{bmatrix}20 & 30 & 15\\ 75 & 20 & 35\\ 25 & 80 & 25\\ 85 & 5 & 45\end{bmatrix}$$

Требуется выбрать предпочтительную для ЛПР стратегию по критериям Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при L=0,6.

1. По критерию Байеса

$$Ba=\underset{i=1,4}{\underline{\max}}\sum_{j=1}^{3}\eta_j h_{ij}=\underset{i=1,4}{\underline{\max}}(0,3\cdot20+0,5\cdot30+0,2\cdot15=24;\ 0,3\cdot75+0,5\cdot20+$$
$$+0,2\cdot35=39,5;\quad 0,3\cdot25+0,5\cdot80+0,2\cdot25=52,5;\quad 0,3\cdot85+0,5\cdot5+$$
$$+0,2\cdot45=37)=52,5;$$

$i^*=\arg Ba=3.$

2. По критерию Лапласа:

$$H^I=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 3/2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1/2\end{bmatrix}(20+30+15=65;\ 75+20+35=130;$$
$$25+80+25=130;\qquad 85+5+45=135)=135/3;$$

$i^*=\arg La=4.$

3. По критерию Вальда:

$$Wa=\underset{i=1,4}{\underline{\max}}\ \underset{j=1,3}{\underline{\min}}\ h_{ij}=\underset{i=1,4}{\underline{\max}}(15;\ 20;\ 25;\ 5)=25;$$

$i^*=\arg Wa=3.$

4. По критерию Сэвиджа:

Перейдем от матрицы H к матрице R, имея в виду, что $\beta_1=85$; $\beta_2=80$; $\beta_3=45$:

$$R=\begin{bmatrix}65 & 50 & 30\\ 10 & 60 & 10\\ 60 & 0 & 20\\ 0 & 75 & 0\end{bmatrix}$$

$$Sa=\underset{i=1,4}{\underline{\min}}\ \underset{j=1,3}{\underline{\max}}\ r_{ij}=\underset{i=1,4}{\underline{\min}}(65;\ 60;\ 60;\ 75)=60;$$

$i^*=\arg Sa=2\vee3.$

Заметим, что в матрице H $h_{31}=h_{33}=25$, но $(r_{31}=60)\neq(r_{33}=20)$!

5. По критерию Гурвица при L=0,6:

$$H_U = \max_{i=\overline{1,4}}(0{,}6\min_{j=\overline{1,3}} h_{ij} + 0{,}4\max_{j=\overline{1,3}} h_{ij}) = \max_{i=\overline{1,4}}(0{,}6\cdot 15+0{,}4\cdot 30=21;$$

$$0{,}6\cdot 20+0{,}4\cdot 75=42;\quad 0{,}6\cdot 25+0{,}4\cdot 80=47;$$

$$0{,}6\cdot 5+0{,}4\cdot 85=37)=47;$$

$i^*=\arg Hu=3$.

Сопоставив результаты оценки оптимальной стратегии ЛПР по 5 различным критериям, можно прийти к заключению, что наиболее целесообразной будет являться стратегия x_1^3.

3.3. Задача оптимизации систем в условиях неопределенности

При разработке технических или любых других систем необходимы данные об условиях применения и эксплуатации проектируемых систем, которые могут зависеть от состояния среды, в которой они будут эксплуатироваться. Однако часто исследователь сталкивается с ситуацией, когда информация о среде отсутствует или можно сделать некоторые предположения о ее состоянии.

Условия работы системы, как правило, сильно зависят от состояния среды, которое, в свою очередь, часто имеет вероятностный характер, что усложняет процесс определения оптимальных систем. В таких ситуациях целесообразно использовать байесовский метод принятия решений о ненаблюдаемых переменных, основанный на знании априорного распределения вероятностей и на условном распределении других переменных при заданном значении ненаблюдаемых переменных.

Сформулируем в общем виде задачу поиска оптимальной системы в условиях неопределенности. Допустим, проектировщик имеет или может определить:

$A = (A_1, A_2,..., A_i, ..., A_n)$ – множество всех возможных систем;

$B = (B_1, B_2,..., B_j, ..., A_m)$ – множество всех возможных состояний среды;

$C = (C_{11}, C_{12},..., C_{ij},..., C_{nm})$ – затраты при использовании всех возможных систем для всех возможных состояний среды,

где C_{ij} – затраты при использовании системы A_i при состоянии среды B_j. (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Вариант системы A_i	Состояние среды					
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1m}
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{im}
...	...	...	...	...	...	...
A_n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nj}	...	C_{nm}

Требуется спроектировать такую систему, которая обеспечивает минимальные затраты, то есть:

– вычислить ожидаемые затраты для каждой системы A_i ($i = 1, 2,..., n$), используя априорное распределение;

– выбрать систему с наименьшими затратами.

Возможны две ситуации:

1) известно априорное распределение вероятности состояния среды $P(B=B_j)$. На начальных этапах проектирования систем проектировщик может иметь некоторую информацию о среде или интуитивно догадываться на основании проектирования предыдущих систем о вероятностных параметрах среды, т.е. проектировщик имеет дело с априорной информацией.

Затраты вычисляются по формуле

$$C\,(A_i;B_j) = \sum_{i-1}^{m}(C_{ij} \cdot P(B = Bj)), \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (3.7)$$

2) исследователь не имеет информации о состоянии среды, но он имеет или может получить дополнительную информацию по тому или иному косвенному параметру среды, в которой предполагается работать системе. При этом бывают известны:

B – случайная переменная, характеризующая состояние среды;

X – случайная переменная, связанная так или иначе с переменной B;

$P(B_j)$ – априорное распределение B_j;

$Q(x\,|B=B_j)$ – условное распределение переменной B при X= x.

Для определения оптимальной системы требуется найти условное распределение переменной B при X= x. Распределение $H(B_j|X=x)$ называется ***апостериорным распределением переменной B***, которое получено на основании известной информации о переменной X.

Для определения апостериорной вероятности можно использовать формулу Байеса, которая связывает априорную и апостериорную вероятности:

$$H(B_i|X=x)=\frac{Q(x|B=B_j)\cdot P(B_j)}{\sum_{k=1}^{m}(Q(x=|B=B_k)\cdot P(B_k))} \qquad (3.8)$$

Затраты для каждой системы в этом случае будут равны:

$$C(A_i;B_j)=\sum_{j=1}^{m}(C_{ij}(B_i|X=x)) \qquad (i=\overline{1,n}) \qquad (3.9)$$

Окончательно можно представить следующий алгоритм действия исследователя при наличии дополнительной информации.

А. Имея таблицу затрат (табл. 3.1), априорное распределение $P(B_j)$ ($j=\overline{1,m}$), определить по формуле (3.7) ожидаемые затраты для каждой системы для различных состояний среды, выбрать систему, имеющую наименьшие затраты.

Б. Если априорное распределение неизвестно, то по условному распределению переменной X для данного состояния среды $B = B_j$, т.е. $Q(x|B=B_j)$, необходимо:

а) определить апостериорное распределение переменной B по формуле (3.8);

б) получить надежное значение случайной переменной X, скажем, x;

в) вычислить ожидаемые затраты для каждой системы, используя апостериорное распределение $H(B_j|X=x)$ по формуле (3.9);

г) выбрать систему, имеющую минимальные затраты.

Для определения оптимальной системы в условиях неопределенности с исходной информацией о среде и без нее целесообразно использовать ЭВМ, которая значительно ускоряет процесс поиска оптимальной системы.

3.4. Приложения игровых методов в теории статистических решений

Пример 3.2. Существует предприятие, которое занимается выпуском новой продукции. Ввиду ограниченности ресурсов предприятие может заниматься только одним видом деятельности, т.е. не имеет возможности одновременно заниматься двумя и более задачами. Возникает проблема: заниматься НИОКР, т.е. разработкой новой продукции (НП), либо модернизацией уже выпускаемой.

Срок разработки t_p новой продукции заранее неизвестен и может составлять 5, 10 или 15 лет. Это – “стратегия” природы: $t_{p1}=5 \rightarrow x_2^1$, $t_{p2}=10 \rightarrow x_2^2$, $t_{p3}=15 \rightarrow x_2^3$.

Эффект от деятельности оценивается в 15-летнем интервале планирования: T=15. ЛПР (руководство предприятия) имеет 2 стратегии: x_1^1 – проводить НИОКР, x_1^2 – не проводить НИОКР, т.е. ограничиться модернизацией.

Требуется оценить целесообразность того или иного решения пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица при L=0,4, Байеса при априорных вероятностях состояний природы $\eta_1=0{,}2$, $\eta_2=0{,}45$, $\eta_3=0{,}35$, а также найти равноэффективное значение параметров x.

Исходные данные для решения игровой задачи представлены в табл.3.2.

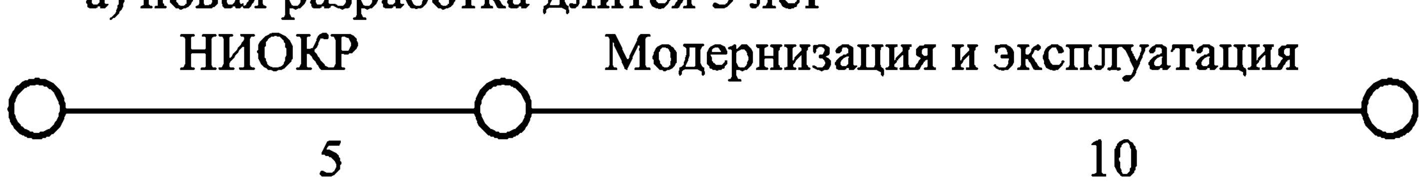
Таблица 3.2

Исходные данные (млн р./г.)

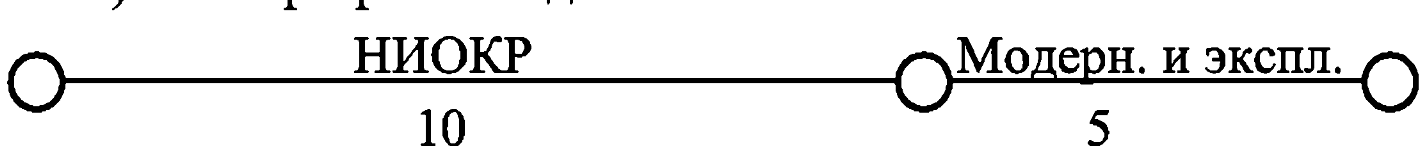
Затраты на НИОКР и внедрение	Эффект от новой продукции	Затраты на модернизацию	Эффект от модернизации
$С_н$=2,4	$Э_н$=14	$С_м$=1,2	$Э_м$=2,6

Расчет затрат и экономического эффекта в интервале планирования целесообразно представить в форме ситуационной таблицы (табл. 3.3), для чего вначале составляется графовая модель:

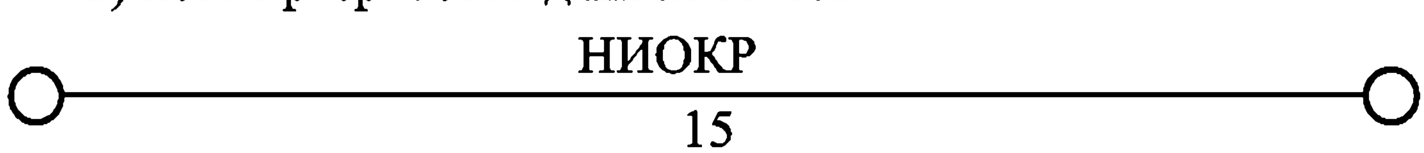
а) новая разработка длится 5 лет



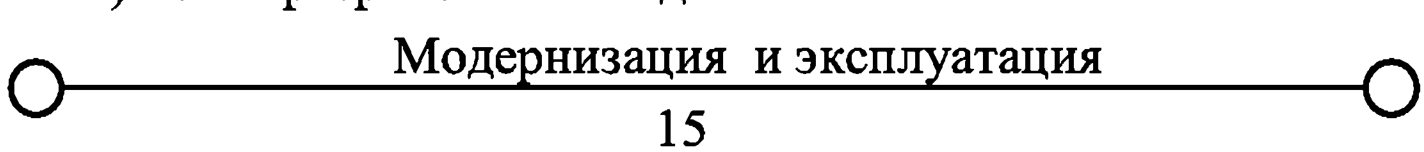
б) новая разработка длится 10 лет



в) новая разработка длится 15 лет



в) новая разработка не ведется



На основании табл. 3.3 составим матрицу H выигрышей ЛПР. Элементы матрицы h_{ij} вычисляется по формулам:

$h_{1j}=-С_м \cdot t_{pj}+(Э_н-С_м+Э_м)\cdot(T-t_{pj})$, $\quad h_{2j}=(С_м+Э_м)\cdot T$

$$H=\begin{bmatrix} 142 & 53 & -36 \\ 21 & 21 & 21 \end{bmatrix}$$

Оценим целесообразность стратегии ЛПР по критерию Вальда:

$Wa = \max\limits_{i=1,2} \min\limits_{j=1,3} h_{ij} = \max\limits_{i=1,2}(-36; 21;)=21;$

i^*=arg Wa=2, т.е. целесообразна стратегия x_1^2.

Таблица 3.3

Возможные ситуации

Стратегия ЛПР	Продолжительность разработки t_{pj}	Затраты на НИОКР и внедрение	Эффект от новой продукции	Затраты на модернизацию	Эффект от модернизации	Суммарный экономический эффект
	лет	(млн р.)	(млн р.)	(млн р.)	млн р.)	(млн р.)
Проводится НИОКР x_1^1	5	-12	140	-12	26	142
	10	-24	70	-6	13	53
	15	-36	0	0	0	-36
Не проводится НИОКР x_1^2	0	0	0	-18	39	21
	0	0	0	-18	39	21
	0	0	0	-18	39	21

Оценим целесообразность стратегии ЛПР по критерию Сэвиджа, для чего составим матрицу рисков: $r_{ij} = \max\limits_{i} h_{ij} - h_{ij}$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 57 \\ 121 & 32 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Sa = \min_{i=1,2} \max_{j=1,3} r_{ij} = \min_{i=1,2}(57;\ 121)=57;$$

i^*=arg Sa=1, т.е. целесообразна стратегия x_1^1.

Оценим целесообразность стратегии ЛПР по критерию Гурвица L=0,4:

$$Hu = \max_{i=1,2}(0{,}4 \max_{j=1,3} h_{ij} + 0{,}6 \min_{j=1,3} h_{ij}) = \max_{i=1,2}(0{,}4 \cdot 142+$$
$$+\,0{,}6 \cdot (-36)=35{,}2;\ 0{,}4 \cdot 21+0{,}6 \cdot 21=21)=35{,}2;$$

i^*=arg Hu=1, т.е. целесообразна стратегия 1.

Значение параметра L для равноэффективных решений ЛПР (критическое значение L) может быть найдено из уравнения:

$$L \cdot h_{11}+(1-L)h_{13}=Lh_{21}+(1-L)h_{23},$$

так как $h_{11} = \max\limits_{j=1,3} h_{1j}$, $h_{13} = \min\limits_{j=1,3} h_{1j}$, h_{21} и h_{23} находятся в тех же столбцах, что и h_{11} и h_{13} соответственно.

Итак: $L\cdot142+(1-L)(-36)=L21+(1-L)21$, $178L=57$, $L_{кр}=0,32$.

Оценим целесообразность стратегии ЛПР по критерию Байеса при априорных вероятностях состояний природы, характеризующих неопределенность ситуации, равных: $\eta_1=0,2$, $\eta_2=0,35$, $\eta_3=0,35$:

$$Ba=\max_{i=1,2}\sum_{j=1}^{3}\eta_j h_{ij}=\max_{i=1,2}(142\cdot0,2+53\cdot0,45-36\cdot0,35=39,65;$$

$21\cdot0,2+21\cdot0,45+21\cdot0,35=21)=39,65;$

$i^*=\arg Ba=1$, т.е. целесообразна стратегия x_1^1.

Сопоставляя результаты оценок по всем примененным критериям, ЛПР может сделать вывод о целесообразности проведения НИОКР.

Пример 3.3. Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых) и A_4 (шлюзовых). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.п. Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов. Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3 и P_4. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 8 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 12\\ 8 & 5 & 3 & 10\\ 1 & 4 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

Согласно критерию Вальда $\max_i\min_j a_{ij}=\max(2;2;3;1)=3$ следует выбрать решение A_3, т.е. предусмотреть строительства бесшлюзовой ГЭС.

Воспользуемся критерием Сэвиджа. Построим матрицу рисков:

$$R=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0 & 8\\ 6 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 7 & 1 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

Покажем, например, как были получены элементы первого столбца матрицы R. Имеем $\max a_{i1}=a_{31}=8$, поэтому $r_{11}=a_{31}-a_{11}=3$,

$r_{21} = a_{31} - a_{21} = 6$, $r_{31} = a31 - a_{31} = 0$, $r_{41} = a_{31} - a_{41} = 7$. Согласно критерию Севиджа определяем $\min_i \max_j r_{ij} = \min(8; 6; 5; 7\} = 5$.

В соответствии с этим критерием также предполагается решение Аз – строительства бесшлюзовой ГЭС.

Воспользуемся критерием Гурвица. Положим L = 0,5; тогда

$$\max_i \{L \cdot \max_j a_{ij} + (1-L) \min_j a_{ij}\} = \max(5; 7; 6{,}5; 4{,}5) = 7,$$

то есть следует принять решение А2 – строительство приплотинных ГЭС.

Рассмотрим принцип Байеса-Лапласа. Если предположить известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например считать эти состояния равновероятными ($q1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1/4$), то для принятия решения следует найти математические ожидания выигрыша:

$$M_1 = 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$$

$$M_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4} = 5\frac{3}{4}$$

$$M_3 = 8 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$$

$$M_4 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Так как максимальное значение имеет Мз, то следует выбрать решение Аз – строительство бесшлюзовой ГЭС.

4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ИГР

Бесконечной называется игра, в которой, по крайней мере, одна из сторон имеет бесконечное множество стратегий. Общие методы решения таких игр еще мало разработаны. Однако для практики могут представлять интерес некоторые частные случаи, которые допускают сравнительно простое решение.

Рассмотрим игру двух игроков А и В, каждый из которых имеет бесконечное (несчетное) множество стратегий; эти стратегии для игрока А соответствуют различным значениям непрерывно меняющегося параметра x, а для игрока В – параметра y. В данном случае вместо матрицы $[\ a_{ij}\ ]$ игру определяет некоторая функция двух непрерывно меняющихся аргументов a(x,y), которую мы будем называть *функцией выигрыша* (заметим, что сама функция a(x,y) необязательно должна быть непрерывной). Функцию выигрыша a(x,y) можно представить геометрически некоторой поверхностью a(x,y) над областью изменения аргументов (x,y) (рис. 4.1).

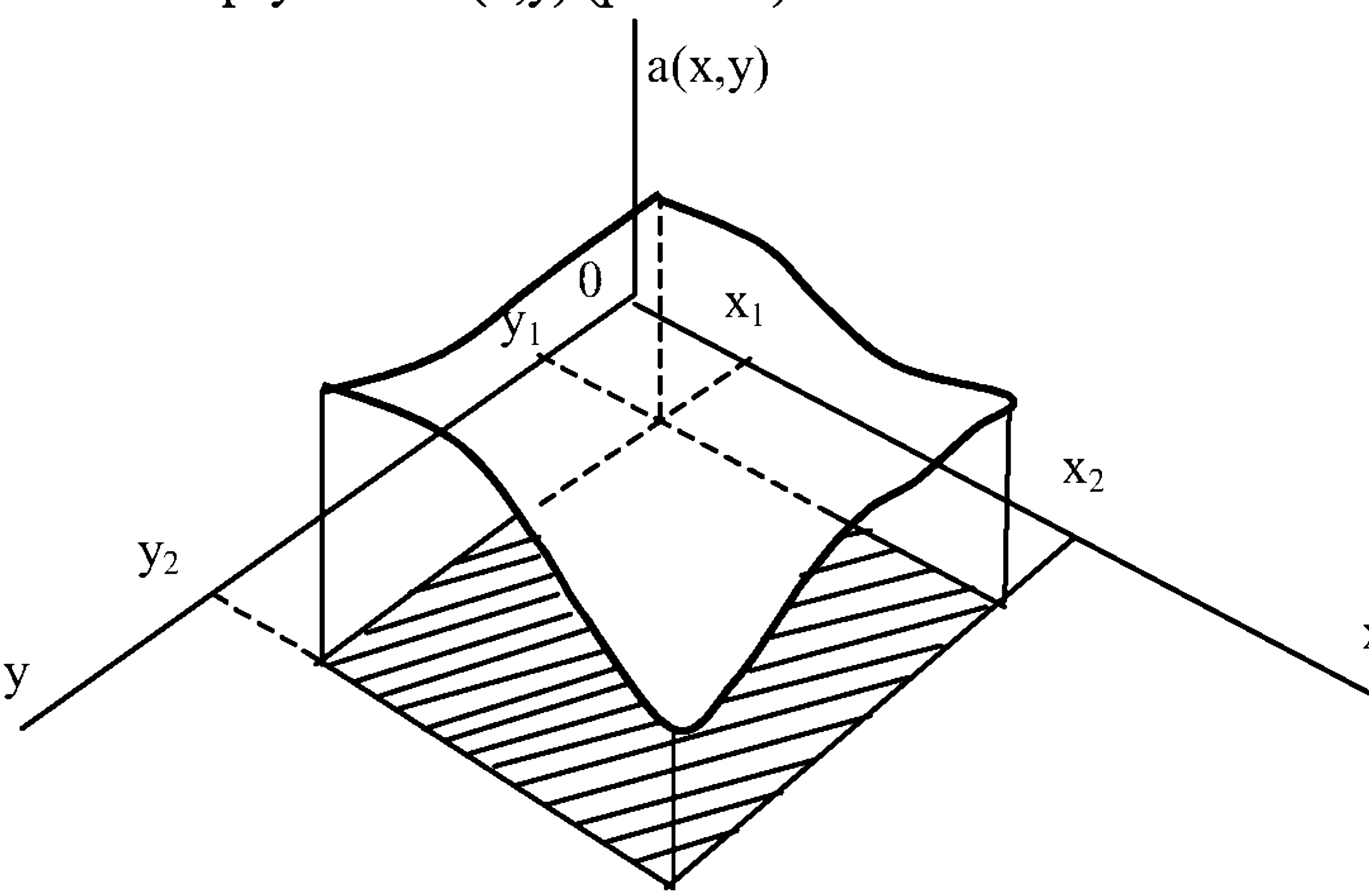


Рис. 4.1

Анализ функции выигрыша a(x,y) производится аналогично анализу платежной матрицы. Сначала находится нижняя цена игры α; для этого определяется для каждого x минимум a(x,y) функции a(x,y) по всем y:

$$\alpha_i = \min_y a(x, y) \ ;$$

затем ищется максимальное из этих значений по всем x (максимин):

$$\alpha = \max_x \min_y a(x,y)$$

Верхняя цена игры (минимакс) определяется аналогично:

$$\beta = \min_y \max_x a(x,y)$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha=\beta$.

Так как цена игры ν всегда заключена между α и β, то общее их значение и есть ν.

Равенство $\alpha=\beta$ означает, что поверхность a(x,y) имеет такую точку с координатами x_o, y_o, в которой a(x,y) является одновременно минимальным по y и максимальным по x (рис. 4.2), т.е. седловую точку.

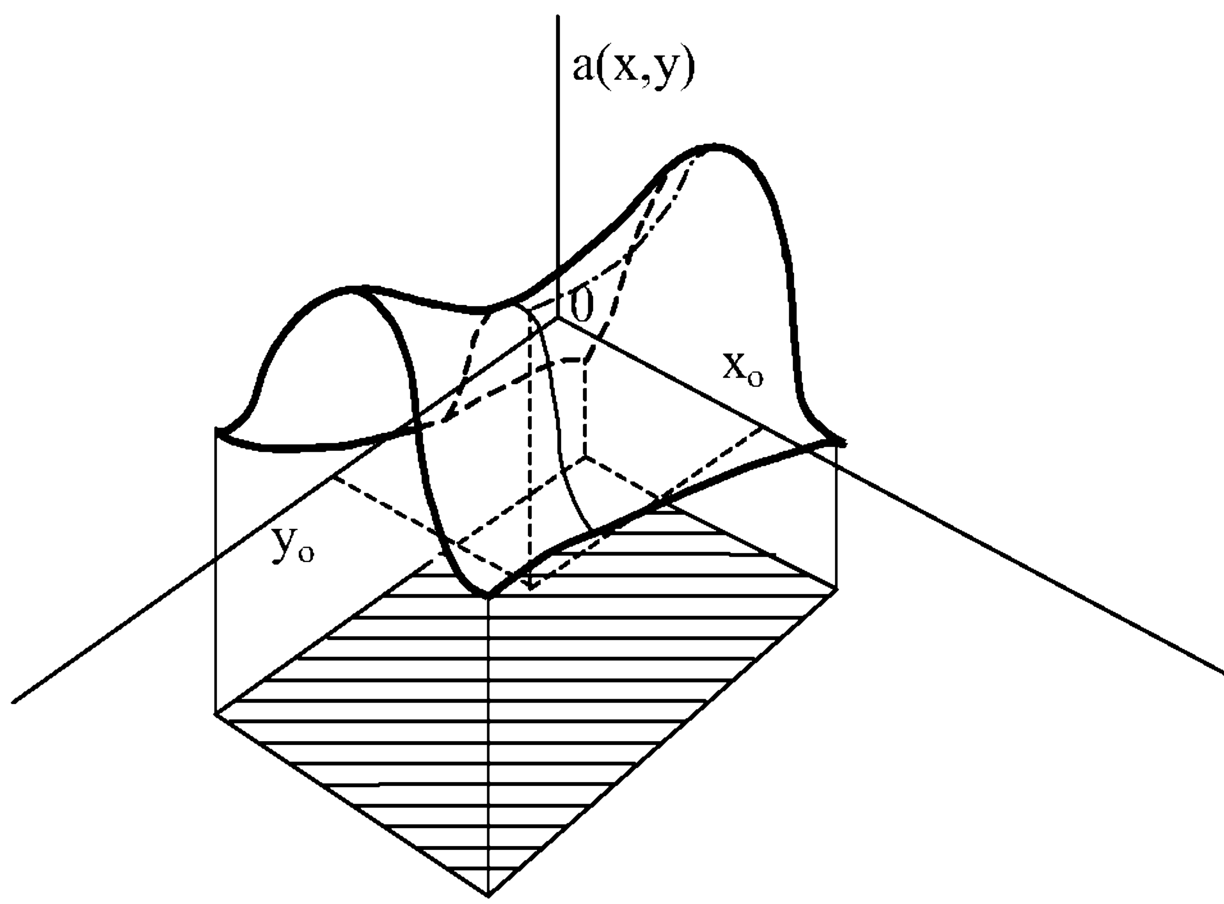


Рис. 4.2

Значение a(x,y) в этой точке и есть цена игры ν: $\nu = a(x_o,y_o)$.

Наличие седловой точки означает, что данная бесконечная игра имеет решение в области чистых стратегий; x_o, y_o представляют собой оптимальные чистые стратегии игроков A и B.

В общем случае, когда $\alpha\neq\beta$, игра может иметь решение только в области смешанных стратегий (возможно, не единственное).

Смешанная стратегия для бесконечных игр есть некоторое распределение вероятностей для стратегий x и y, рассматриваемых как случайные величины.

Это распределение может быть непрерывным и определяться плотностями $f_{1(x)}$ и $f_{2(y)}$; может быть дискретным, и тогда оптимальные стратегии состоят из набора отдельных чистых стратегий, выбираемых с какими-то отличными от нуля вероятностями.

В случае, когда бесконечная игра не имеет седловой точки, можно дать наглядную геометрическую интерпретацию нижней и верхней цене игры. Рассмотрим бесконечную игру со стратегиями x,y, заполняющими непрерывно отрезки осей (x_1,x_2) и (y_1,y_2) и с функцией выигрыша a(x,y), представленной геометрически поверхностью, приведенной на рис. 4.3.

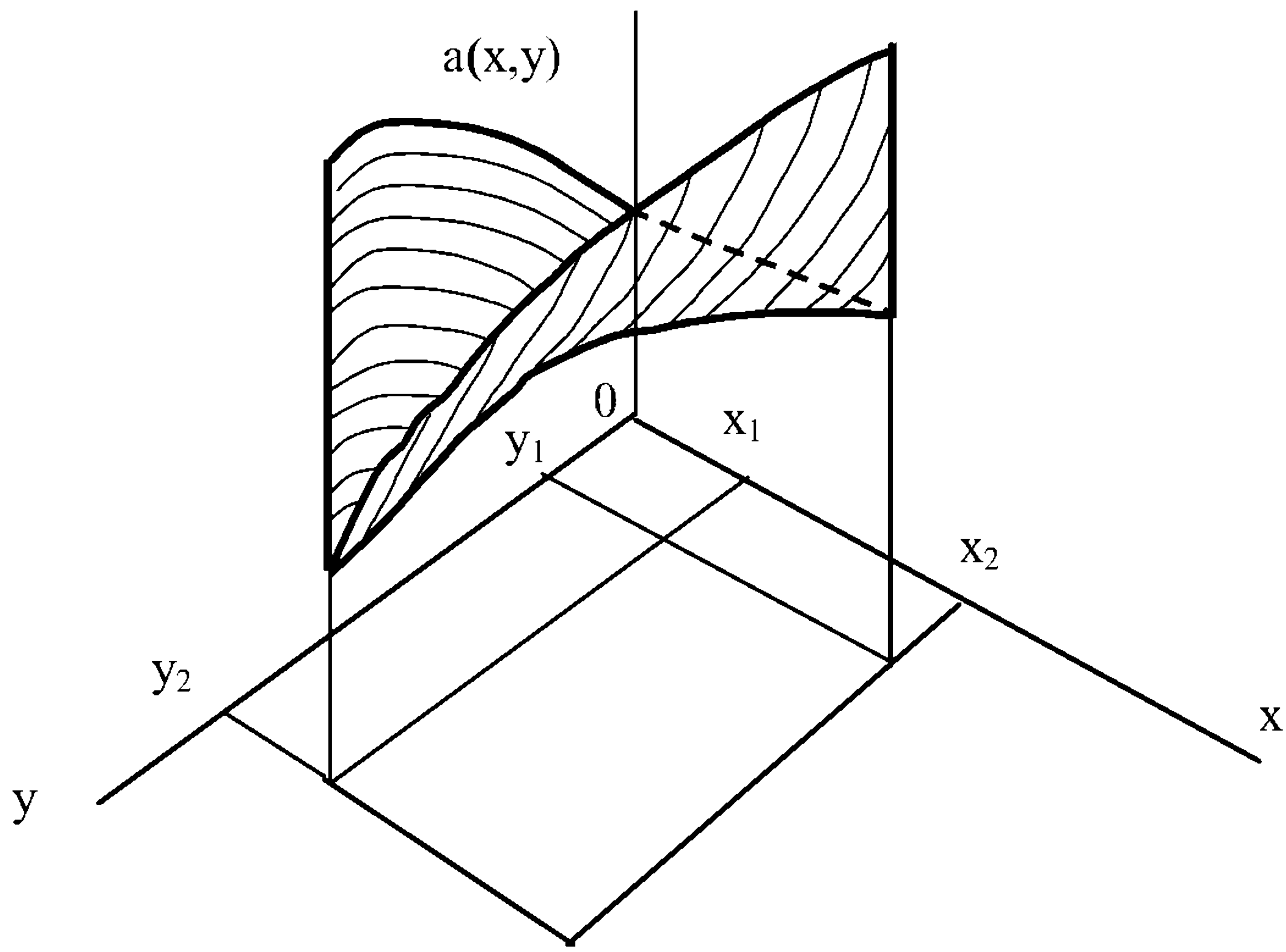
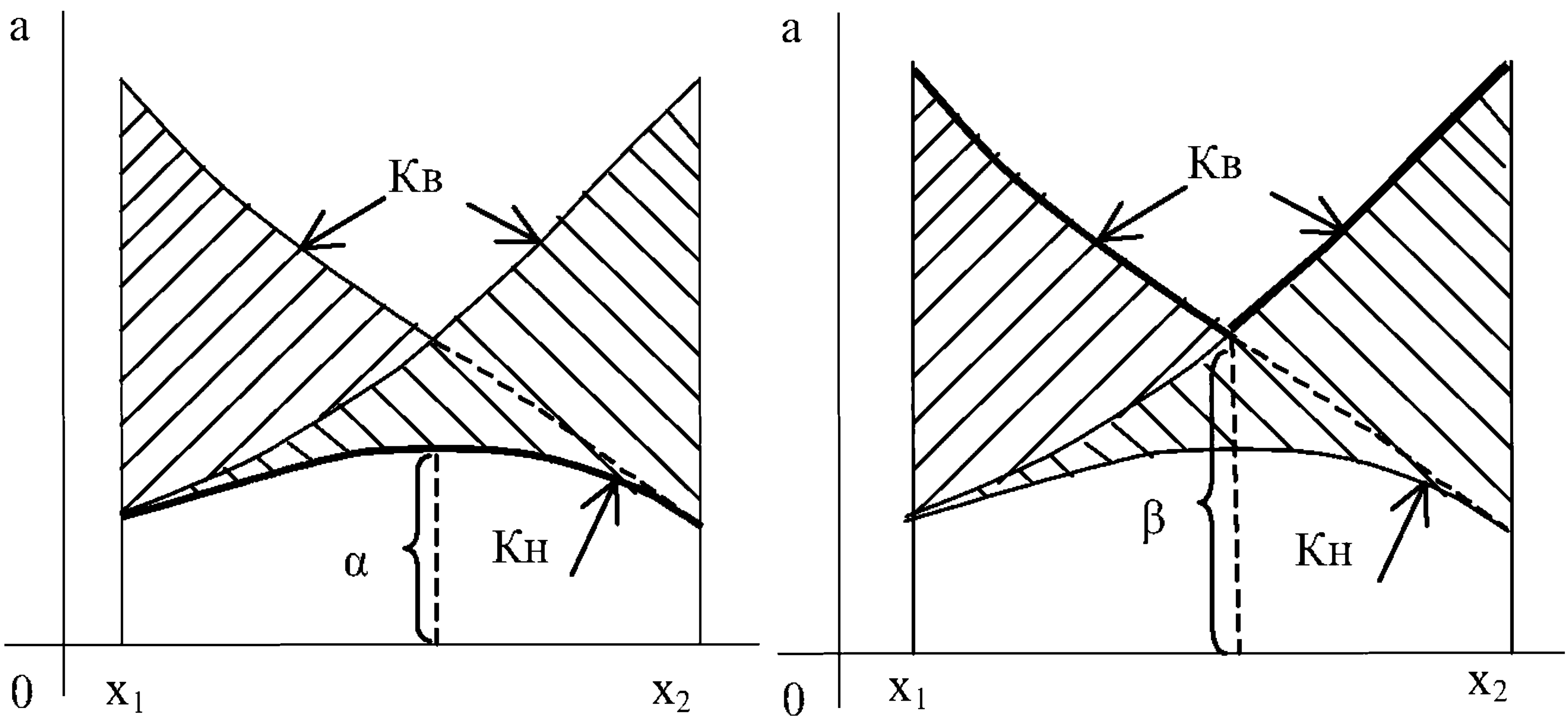


Рис. 4.3

Чтобы определить нижнюю цену игры α, нужно поверхность a(x,y) спроектировать на плоскость x0a (рис. 4.4,а). Получим некоторую фигуру, ограниченную с боков прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$, а сверху и снизу – кривыми Кв и Кн. Нижняя цена игры α, очевидно, есть не что иное, как максимальная ордината кривой Кн. Аналогично, чтобы найти верхнюю цену игры β, нужно поверхность a(x,y) спроектировать на плоскость y0a и найти минимальную ординату верхней границы Кв проекции (рис. 4.4,б).



а) б)

Рис. 4.4

Рассмотрим один элементарный пример бесконечной игры.

Пример 4.1. Игроки А и В имеют каждый множество возможных стратегий x и y, причем $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Функция выигрыша задана выражением $a(x,y) = (x - y)^2$. Найти решение игры.

Решение. Поверхность a(x,y) представляет собой параболический цилиндр (рис. 4.5) и не имеет седловой точки. Определим нижнюю цену игры; очевидно, $\min\limits_{y} a(x,y) = 0$ для всех x, отсюда $\alpha = \max\limits_{x} \min\limits_{y} a(x,y) = 0$. Определим верхнюю цену игры. Для этого при фиксированном y найдем $\min\limits_{x} a(x-y)^2$.

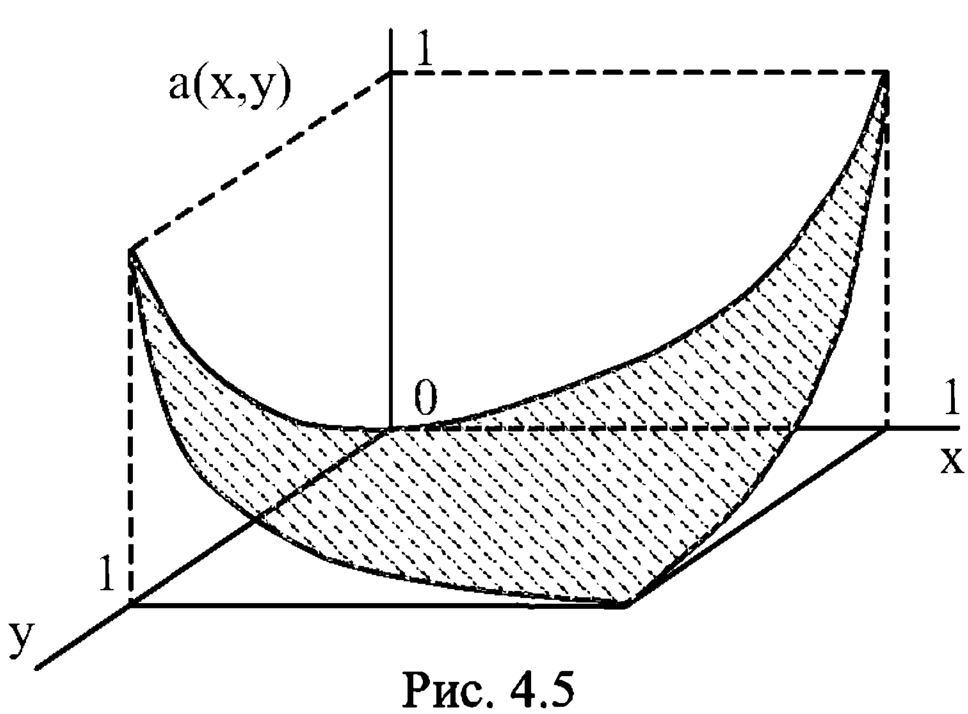


Рис. 4.5

В данном случае максимум достигается всегда на границе интервала (при $x = 0$, или $x = 1$), т.е. он равен большей из величин y^2 и $(1-y)^2$.

Изобразим графики этих функций (рис. 4.6), т.е. проекцию поверхности $a(x,y)$ на плоскость $y0a$.

Жирной линией на рис. 4.6 показана функция $\min\limits_{x} a(x-y)^2$. Очевидно, ее минимальное значение достигается при $y = 1/2$ и равно $1/4$. Следовательно, верхняя цена игры $\beta = 1/4$. В данном случае верхняя цена игры совпадает с ценой игры ν.

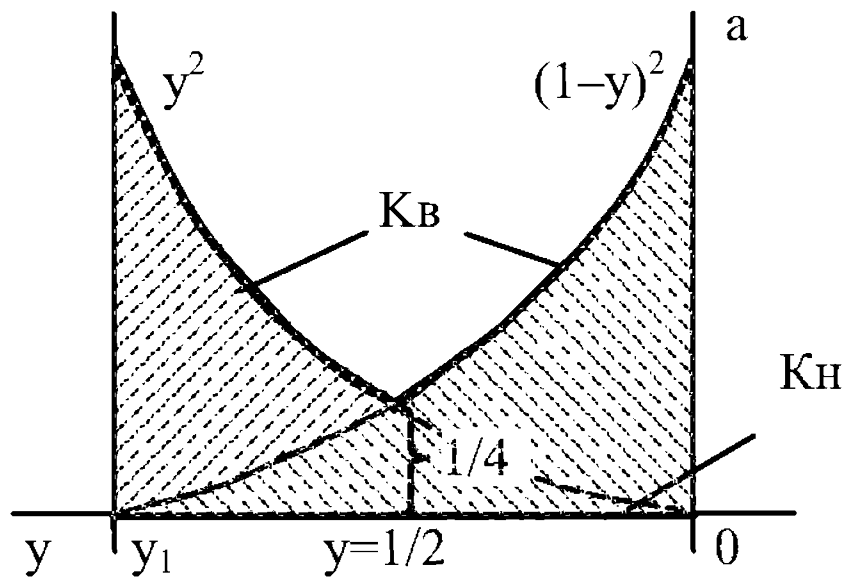


Рис. 4.6

Действительно, игрок А может применить смешанную стратегию $X_1^* = (1/2; 1/2)$, в которую крайние значения $x = 0$ и $x = 1$ входят с одинаковыми частотами: тогда при любой стратегии y игрока В средний выигрыш игрока А будет равен: $1/2 \cdot y^2 + 1/2 \cdot (1-y)^2$. Нетрудно убедиться, что эта величина при любых значениях y между 0 и 1 имеет значение не меньшее 1/4: $1/2 \cdot y^2 + 1/2 \cdot (1-y)^2 \geq 1/4$.

Таким образом, игрок А применением данной смешанной стратегии может гарантировать себе выигрыш, равный верхней цене игры; так как цена игры не может быть больше верхней цены, то данная стратегия S_a есть оптимальная: $S_a = S^*_a$.

Остается найти оптимальную стратегию игрока В.

Очевидно, что если цена игры ν равна верхней цене игры β, то оптимальной стратегией игрока В будет всегда его чистая минимаксная стратегия, гарантирующая ему верхнюю цену игры. В данном случае такой стратегией является $y_o = 1/2$. Действительно, при этой стратегии, что бы ни делал игрок А, выигрыш его не будет больше 1/4. Это следует из очевидного неравенства

$$(x - 1/2)^2 = x \cdot (x - 1) + 1/4 \leq 1/4.$$

5. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

5.1. Некоторые свойства бескоалиционных игр

Антагонистические игры (в т.ч. матричные, то есть конечные) описывают конфликты весьма частного вида и не затрагивают всех аспектов проблемы разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях. В реальности довольно часто встречаются конфликты более общего характера, участники которых преследуют различные, но не обязательно прямо противоположные интересы даже для случая двух участников.

Поскольку интересы игроков теперь не являются полностью противоположными, их поведение становится более разнообразным. Так, например, если в игре с нулевой суммой каждому игроку невыгодно было сообщать другому свою стратегию (это могло уменьшить его выигрыш), то в игре с ненулевой суммой становится желательным как-то координировать свои действия с партнером или каким-либо способом влиять на его действия.

Существуют две разновидности биматричных игр – *бескоалиционные (некооперативные)* игры, в которых исключается какое бы то ни было сотрудничество между игроками, и *кооперативные* игры, допускающие такое сотрудничество.

В бескоалиционных играх игроки принимают решение независимо друг от друга либо потому, что осуществление соглашения невозможно, либо потому, что оно запрещено правилами игры. В кооперативных же играх до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях.

Бескоалиционной игрой называется система, описанная в 1-м разделе выражением (1.1), так как данная игра есть конфликт наиболее общего вида. Бескоалиционные игры, как и антагонистические, могут быть конечными и бесконечными. Бескоалиционная игра двух лиц называется также биматричной, так как функции выигрышей обоих участников, заданные на множестве ситуаций, могут быть описаны двумя матрицами со скалярными элементами (табл. 5.1 и 5.2) или одной матрицей с векторными элементами длины 2 (табл. 5.3).

Таблица 5.1

B / A	x_2^1	…	x_2^m
x_1^1	a_{11}	…	a_{1m}
.	.	…	.
.	.	…	.
.	.	…	.
x_1^n	A_{n1}	…	a_{nm}

Таблица 5.2

B / A	x_2^1	…	x_2^m
x_1^1	b_{11}	…	b_{1m}
.	.	…	.
.	.	…	.
.	.	…	.
x_1^n	b_{n1}	…	b_{nm}

Таблица 5.3

B / A	x_2^1	…	x_2^m
x_1^1	(a_{11},b_{11})	…	(a_{1m}, b_{1m})
.	.	…	.
.	.	…	.
.	.	…	.
x_1^n	(a_{n1},b_{n1})	…	(a_{nm},b_{nm})

В качестве примеров биматричных бескоалиционных игр можно рассмотреть следующие игры.

Пример 5.1. Модель экологического конфликта. Два промышленных предприятия (А и В), расположенных вблизи обширного водоема, берут из него воду для технических нужд и после использования сбрасывают ее обратно в водоем. Если суммарный объем сбрасываемой (загрязненной) воды превышает некоторую допустимую величину, возникает проблема его восстановления за счет предприятий и, возможно, уплаты штрафов.

Чтобы избежать неприятных последствий, приходится строить очистные сооружения, стоимость которых пропорциональна количеству монтируемых блоков, и, следовательно, пропорциональна объему пропускаемой через них воды. Вопрос заключается в том, как выработать разумную политику по отношению к эксплуатируемому водоему.

Суть конфликта, возникающего между рассматриваемыми предприятиями, сводится к их стремлению обеспечить себе благоприятные условия деятельности путем более свободного расходования природной воды, отказа от полного ее восстановления и т.п. Это отрицательно влияет на состояние водоема и через него – на ход производства, технологические режимы, качество продукции обоих предприятий. Все оказывается взаимосвязанным, и появляется заинтересованность в поиске решений, приемлемых для конфликтующих сторон, хотя никакой договоренности между ними может и не быть. Очевидно, имеет смысл представить возникшую ситуацию как бескоалиционную игру двух лиц и попытаться получить на этой основе необходимые теоретические результаты.

Пример 5.2. Двое подростков едут навстречу друг другу на автомобилях; проигравшим считается тот, кто свернет в сторону. Если один свернул в сторону, а другой нет, то "выигравший" игрок получает 5, а "проигравший" (свернувший с дороги) получает (–5). Если сворачивают оба, то состязание оканчивается вничью и выигрыши равны нулю. Если же никто из них не свернул в сторону, то игра завершается аварией – выигрыш каждого равен (–100).

Решение. Игра состоит из двух ходов; оба – личные. У игроков по две стратегии. У игрока А: x_1^1 – свернуть в сторону; x_1^2 – не сворачивать. Аналогично у игрока В: x_2^1 – свернуть в сторону; x_2^2 – не сворачивать. Возможны следующие ситуации:

$x_1^1 - x_2^1$. Оба игрока свернули в сторону, "выигрыши" игроков равны 0;

$x_1^1 - x_2^2$. Игрок А свернул в сторону, игрок В – не свернул. Выигрыш игрока А равен (–5), выигрыш игрока В равен 5;

$x_1^2 - x_2^1$. Игрок В свернул в сторону, игрок А – не свернул. Выигрыш игрока А равен 5, выигрыш игрока В равен (–5);

$x_1^2 - x_2^2$. Ни один из игроков не свернул в сторону, игра завершается аварией, "выигрыши" обеих сторон равны (–100).

Игру можно представить в виде следующей таблицы.

Таблица 5.4

A \ B	x_2^1	x_2^2
x_1^1	(0,0)	(–5,5)
x_1^2	(5,–5)	(–100,–100)

Понятия аффинной или стратегической эквивалентности и изоморфности для бескоалиционных игр обобщают соответствующие понятия для антагонистических игр.

Игра Γ^I называется аффинно-эквивалентной игре Γ ($\Gamma^I \sim \Gamma$),

если $\quad I'=I, \quad \{X_i'\}=\{x_i\}$ и $H_i^1(x) = k_i H_i(x) + a$, $\quad$ (5.1)

где $k_i>0, \quad i \in I$.

Если все $k_i=k$, то игры Γ^I и Γ называются однородно аффинно-эквивалентными. Всякая бескоалиционная игра с постоянной суммой однородно аффинно-эквивалентна некоторой игре с нулевой суммой.

Игры Γ^I и Γ изоморфны, если существует система отображений

$$\pi = (\pi_I, \{\pi_i\}_{i \in I}) \qquad (5.2)$$

такая, что: $\pi_I: I \to I'$ есть взаимно однозначное соответствие, $\pi_i: \{x_i\} \to \{x'_{\pi i}\}$ есть взаимно однозначное соответствие и $H'_{\pi i}(\pi x) = H_{i(x)}$ для любой ситуации $x \in \{x\}$ и любого игрока $i \in I$. Если $\Gamma^I = \Gamma$, то такой изоморфизм называют автоморфизмом.

Выражение (1.3) описывает равновесный исход игры, а стало быть, и ситуацию. Очевидно, что свойство равновесности ситуации есть совокупное свойство ее приемлемости для каждого i-го игрока.

Множество всех ситуаций, приемлемых для игрока i, будем обозначать G_i. Множество G всех равновесных ситуаций (то есть приемлемых для всех игроков) образуется как пересечение

$$G = \bigcap_{i \in I} G_i \,.$$

Равновесной стратегией игрока в бескоалиционной игре называют всякую его стратегию, которая входит хотя бы в один из равновесных ситуаций.

Процесс нахождения ситуации равновесия в бескоалиционной игре называют решением игры.

5.2. Ситуации равновесия и поведение участников бескоалиционных игр

Один из подходов к решению некооперативных игр состоит в определении точек равновесия игр. *Ситуацией равновесия* называется такая игровая ситуация, при которой ни одна из сторон не имеет никаких разумных оснований для изменения своей оптимальной стратегии (если не хочет действовать против своих же интересов), *то есть ситуация, при которой любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.*

Для определения ситуации равновесия в антагонистических играх применяют принцип гарантированного результата или так называемый “принцип минимакса”.

В настоящее время неизвестны общие способы нахождения ситуаций равновесия, применимые к любым конечным бескоалиционным играм, и эта задача математически является чрезвычайно сложной. Однако для отдельных достаточно простых классов бескоалиционных игр она поддается решению. Одним из таких классов являются конечные бескоалиционные игры двух лиц.

Развитие любой бескоалиционной игры двух лиц происходит по тем же правилам, что и матричной игры: конфликтующие стороны А и В используют независимо друг от друга какие-то свои стратегии (чистые или смешанные), в результате чего добиваются определенных выигрышей, зависящих от конкретных значений a_{ij}, b_{ij}, $(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$ и характера предпринимаемых действий.

Однако, несмотря на указанное сходство моделей игр, к сожалению, редко удается предсказать исходы биматричных игр, и одна из главных причин этого заключается в отсутствии, как правило, связи между платежами (выигрышами) a_{ij}, b_{ij} сторон. В результате ослабляется влияние одной стороны на другую, для каждой из них появляется возможность действовать более самостоятельно, ориентируясь только на свой выигрыш, хотя подобная самостоятельность в каких-то случаях может дорого обойтись другому игроку.

Формально ситуация равновесия означает следующее. Допустив возможность многократного повторения ходов в игре, естественно предположить, что существует некоторое множество смешанных стратегий $X_1 = \{\xi_1, \xi_2,..., \xi_n\}$ и $X_2 = \{\eta_1, \eta_2,..., \eta_m\}$, применяемых сторонами с целью достижения средних выигрышей соответственно.

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} \cdot \xi_i \cdot \eta_j) \tag{5.3}$$

$$H_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (b_{ij} \cdot \xi_i \cdot \eta_j)$$

Если среди названных стратегий X_1, X_2 есть оптимальные стратегии X_1^* и X_2^*, удовлетворяющие требованиям

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} \cdot \xi_i \cdot \eta_j^*) \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ((a_{ij} \cdot \xi_i^* \eta_j^*) \tag{5.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (b_{ij} \cdot \xi_i^* \cdot \eta_j) \le \sum_{i=1}^{n} (b_{ij} \cdot \xi_i^* \eta_j^*),$$

то использование стратегий X_1^* и X_2^* создает ситуацию равновесия.

Теория утверждает, что каждая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия, определяемую неравенствами (5.4), однако, это утверждение нельзя применить непосредственно для поиска X_1^* и X_2^*.

5.3. Оптимальность ситуаций по Парето

Для сравнения ситуаций или исходов игры по выигрышам участников введем вектор выигрышей

$$H_I(x)= (H_1(x), H_2(x),..., H_n(x)) \qquad (5.5)$$

и проведем покомпонентное сравнение:

$$H_I(x^1)<H_I(x^2), \text{ если } H_i(x^1)<H_i(x^2) \text{ для всех } i\in I,$$

$$H_I(x^1)\leq H_I(x^2), \text{ если } H_i(x^1) \leq H_i(x^2) \text{ для всех } i\in I,$$

но $$H_I(x^1)\neq H_I(x^2). \qquad (5.6)$$

Ситуация x^0 в бескоалиционной игре называется оптимальной по Парето, если не существует ситуации $x^\wedge\in\{x\}$ такой, что $H_I(x^0)\leq H_I(x^\wedge)$.

В оптимальной по Парето (эффективной) ситуации игроки не могут совместными усилиями, то есть, образовав коалицию K=I или соглашение, увеличить выигрыш кого-либо из I, не уменьшив при этом выигрыш хотя бы одного кого-то другого.

Формально отличие равновесных ситуаций от эффективных заключается в следующем. Если ситуация равновесна, то есть $x\in NE$, то ни один участник i, действуя в одиночку, не сможет увеличить собственный результат $H_i(x)$; если ситуация эффективна, то все участники, действуя совместно, не смогут увеличить выигрыш каждого участника.

Вопросы о существовании и отыскании эффективных ситуаций в принципе решаются проще, чем аналогичные вопросы для равновесных ситуаций, так как оптимальность ситуации x по Парето определяется лишь положением вектора $H_I(x)$ в области допустимых векторов выигрышей, а для установления равновесности требуется учитывать зависимость каждой из компонент этого вектора от соответствующей переменной, то есть зависимость $H_i(x_i)$.

Аффинно-эквивалентные игры имеют одни и те же оптимальные по Парето ситуации. Множество PO всех оптимальных по Парето ситуаций обладает свойствами внутренней и внешней устойчивости.

Внутренняя устойчивость:

$$(\forall x^1,x^2\in PO)[H_I(x^1) \not\leq H_I(x^2)]. \qquad (5.7)$$

Внешняя устойчивость (в условиях ограниченности и замкнутости множества векторов $H_I(x)$ и непрерывности функций выигрыша $H_i(x)$:

$$(\forall x\notin PO)(\exists x^\wedge\in PO)[H_I(x) \leq H_I(x^\wedge)]. \qquad (5.8)$$

5.4. Смешанные расширения бескоалиционных игр

Понятие смешанной стратегии участника бескоалиционной игры определяется точно так же, как и для антагонистической игры, то есть вводится вероятностное распределение X_i на множестве стратегий $\{x_i\}$, $i \in I$. Если i-й игрок имеет в своем распоряжении m_i стратегий, то его смешанные стратегии можно представлять как точки (m_i-1)-мерного фундаментального симплекса, задаваемые своими барицентрическими координатами. Этот симплекс ограничен и замкнут, то есть компактен. Пусть каждый участник $i \in I$ применяет свою смешанную стратегию x_i, то есть выбирает свои чистые стратегии $x_i \in \{x_i\}$ с вероятностями $X_i(x_i)$ (вспомним, что для антагонистических игр $X_1(x_i)=\xi_i$,а $X_2(x_j)=\eta_j$). Пусть также смешанные стратегии всех участников независимы, как вероятностные распределения. Тогда можно перейти к вероятностному распределению X на множестве ситуаций $\{x\}$ в чистых стратегиях, которое будет задаваться соотношением

$$X(x)=X(x_1, x_2,\ldots,x_N)= X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)\cdot \ldots \cdot X_N(x_N). \qquad (5.9)$$

Такого рода вероятностные распределения называют ситуациями игры Г в смешанных стратегиях. Множество всех типов ситуаций – $\{X\}$. На смешанные расширения распространяются отношения аффинной (стратегической) эквивалентности и изоморфности бескоалиционных игр, а также теорема о дополняющей нежесткости.

5.5. Ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Теорема Нэша

Ситуация X^* является равновесной в смешанном расширении бескоалиционной игры Г, если для каждого i-го игрока и каждой его смешанной стратегии $X_i \in \{x_i\}$ имеет место неравенство

$$H_i(X^* \| X_i) \le H_i(X^*), \qquad (5.10)$$

где $i \in I$, $X_i \ne X_i^*$.

Неравенство (5.10) повторяет (1.3) и приводится для напоминания.

Для того, чтобы ситуация X^* в игре Г была равновесной в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы для каждого i-го игрока и каждой его чистой стратегии $x_i \in \{x_i\}$выполнялось неравенство

$$H_i(X^* \| x_i) \le H_i(X^*), \qquad (5.11)$$

где $(X^* \| x_i)$ означает, что в векторе X^* i-я компонента X_i заменена на чистую стратегию x_i.

Дж.Нэшем в 1950 г. было доказано, что для всякой конечной бескоалиционной игры существует хотя бы одна равновесная ситуация в смешанных стратегиях.

Равновесные решения игры индивидуально устойчивы, но не всегда наилучшие с точки зрения выигрыша всех участников, поскольку не все точки равновесия эффективны.

Заметим, что для антагонистических бескоалиционных игр решения игры в различных равновесных ситуациях в общем случае могут быть различны, тогда как для антагонистической игры все ситуации равновесия дают одинаковые значения выигрыша.

Теорема Нэша здесь приводится без доказательства, как и прочие теоремы и утверждения. Ее доказательство весьма громоздко и опирается на теорему Какутани (Kakytani) или на теорему Брауэра (Brouwer) о неподвижной точке.

Доказательство это совершенно неконструктивно, в связи с чем важность теоремы ограничивается вопросом существования ситуаций равновесия. Применять ее непосредственно для отыскания таких ситуаций не удается. Однако все методы приближенного нахождения неподвижных точек в непрерывных отображениях компактных множеств (особенно выпуклых) в себя могут быть использованы для приближенного решения конечных бескоалиционных игр.

5.6. Особенности решения бескоалиционных игр

Проблема отыскания равновесных исходов в бескоалиционной игре Г формата $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_N$ составит в решении системы из $\sum_{i=1}^{N} m_i$ неравенств типа (5.11) с $\prod_{i=1}^{N} m_i$ условиями неотрицательности и N условиями нормировки. С вычислительной точки зрения это весьма непростая проблема, которая усугубляется возможной множественностью решения. Лишь для отдельных классов бескоалиционных игр решение этой задачи поддается достаточно несложному описанию.

Действительно, пусть $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_N^*)$ – равновесная ситуация в смешанных стратегиях, а ситуация $X^* \| x_i$ есть ситуация X^*, в которой компонента X_i заменена на чистую стратегию x_i участника игры i. Если смешанная стратегия $X_i = (\xi_i^1, \xi_i^2, \ldots, \xi^{mi})$ представляет собой вектор вероятностей длины m_i, то ситуация x_i^k представляет собой вектор той же длины, у которого все компоненты нулевые, а k-я компонента равна 1.

Так как чистая стратегия – частный случай смешанной, то $x_i^k = (0^1, 0^2, 1^k, \ldots, 0^{mi})$ – вектор, подобный вектору X_i, у которого

$\xi_i^s = 0, s = \overline{1, m_i}, s \neq k; \xi_i^k = 1$. Таким образом, $k = \overline{1, m_i}$ – индекс, перечисляющий чистые стратегии i-го игрока при их векторной интерпретации.

Для каждого i (а этот индекс пробегает N значений) возможны m_i векторов вида x_i^k. Поскольку каждый вектор x_i^k входит в условие Нэша (5.11), то в развернутой системе функциональных ограничений будет присутствовать $\sum_{i=1}^{N} m_i$ записей условий Нэша.

Множество ситуаций в бескоалиционной игре N лиц может быть представлено параллелепипедом размера $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_N$, то есть размер параллелепипеда равен формату игры Г. Каждой ситуации X в смешанном расширении игры Г будет соответствовать своя вероятность ее реализации $\xi_1 \times \xi_2 \times \ldots \times \xi_N$, причем каждая из них должна быть неотрицательна. Таким образом возникают $\prod_{i=1}^{N} m_i$ условий неотрицательности.

Далее, для каждой i-й смешанной стратегии (а их в конкретной ситуации присутствует N) должно выполняться условие нормировки $\sum_{k=1}^{m_i} \xi_i^k = 1$. Таким образом возникает N условий нормировки.

Всего в алгебраической системе, которая определяет решения игры будет присутствовать $\sum_{i=1}^{N} m_i + \prod_{i=1}^{N} m_i + N$ выражений. (5.12)

Используя формулу (5.12) можно установить, что число выражений в алгебраической системе, описывающей биматричную игру, будет возрастать в зависимости от формата игры (игры считаем квадратными) следующим образом:

2×2 – 10 выражений, 3×3 – 17 выражений, 4×4 – 26 выражений, 5×5 – 37 выражений, 6×6 – 50 выражений, и т.д. График этой зависимости представлен на рис. 5.1.

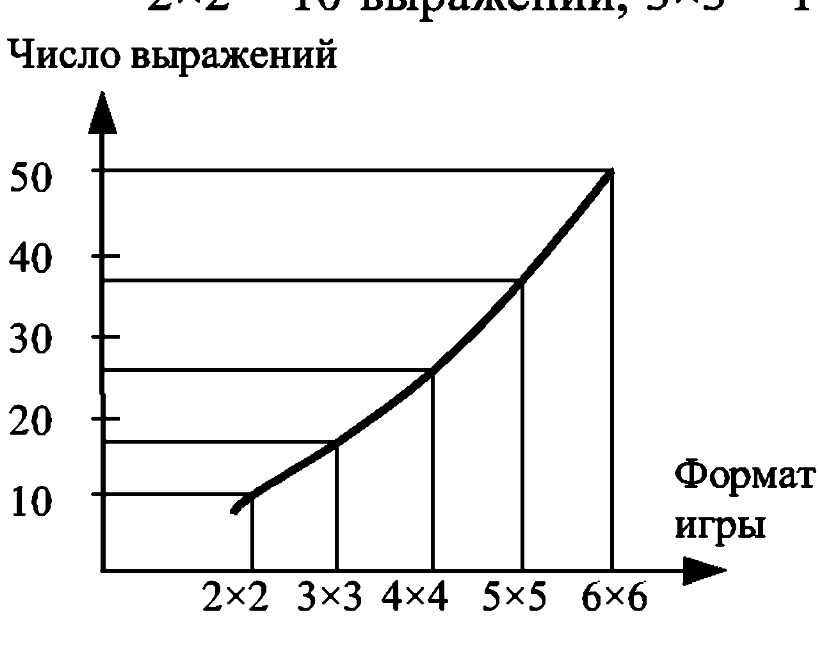


Рис. 5.1

В случае биматричной игры формата 2×2 для спектров стратегий каждого участника существует не более 3 вариантов и игру можно реально решить геометрически, либо алгебраически, подобно тому, как это было выполнено для антагонистических матричных игр. Еще раз отметим, что биматричная игра в общем случае есть игра с ненулевой суммой и потому неантагонистична. В такой игре интересы участников могут быть не только непротивоположны, но и прямо совпадать.

Пример 5.3. Для игры Г двух лиц формата 2×2 (биматричной игры 2×2) $N=2$, $m_1=2$, $m_2=2$.

Тогда:

а) в системе запишется $m_1+m_2=4$ условия Нэша:

$H_1(X^* \| x_1^1) \le H_1(X^*)$, $\quad H_1(X^* \| x_1^2) \le H_1(X^*)$,

$H_2(X^* \| x_2^1) \le H_2(X^*)$, $\quad H_2(X^* \| x_2^2) \le H_2(X^*)$;

б) в системе запишется $m_1 \times m_2=4$ условия неотрицательности:

$\xi_1^1\xi_2^1 = \xi_1\xi_2 > 0$, $\quad \xi_1^1\xi_2^2 = \xi_1(1-\xi_2) \ge 0$,

$\xi_1^2\xi_2^1 = (1-\xi_1)\xi_2 \ge 0$, $\quad \xi_1^2\xi_2^2 = (1-\xi_1)(1-\xi_2) \ge 0$;

в) в системе запишется $N=2$ условия нормировки:

$\xi_1^1 + \xi_1^2 = 1$, $\quad \xi_2^1 + \xi_2^2 = 1$.

Итого система будет содержать 4+4+2=10 выражений.

Пример 5.4. Для игры Г трех лиц формата 2×2 $N=3$, $m_1=2$, $m_2=2$, $m_3=2$.

Тогда:

а) число условий Нэша $m_1+m_2+m_3=6$;

б) число условий неотрицательности $m_1 \times m_2 \times m_3=8$;

в) число условий нормировки $N=3$.

Итого в системе 6+8+3=17 выражений.

С ростом числа игроков сложность системы будет расти линейно, а с ростом формата игры – в показательной зависимости.

5.7. Примеры биматричных игр

В качестве биматричных игр можно привести ставшие классическими примеры игр "Студент – Профессор", "Дилемма заключенного" и "Семейный спор".

Пример 5.5. "Студент – Профессор". Пусть игрок 1 – Студент – готовится к зачету, а игрок 2 – Профессор – этот зачет принимает.

Студент имеет 2 стратегии: x_1^1 – хорошо подготовиться и x_1^2 – плохо подготовиться. Профессор также располагает 2-мя стратегиями: x_2^1 поставить зачет и x_2^2 – не поставить зачет. Матрицы выигрышей Студента А и Профессора В имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Сумма $a_{ij}+b_{ij}\neq 0$, т.е. это игра с ненулевой суммой.

a_{11} – знания оценены по заслугам (2 ед.),

a_{12} – обидно, что не сдал (-1 ед.),

a_{21} – удалось словчить (1 ед.),

a_{22} – незачет по заслугам (0),

b_{11} – все в порядке (1 ед.),

b_{12} – проявил несправедливость (-2 ед.),

b_{21} – дал себя обмануть (-3 ед.),

b_{22} – нужно еще раз принимать зачет (-1 ед.).

Пример 5.6. "Дилемма заключенного". Два преступника ожидают суда. Каждому из них конфиденциально сообщается следующее:

а) если сам сознается и даст показания против сообщника, то освобождается от наказания, а сообщник получит 12 лет;

б) если оба сознаются, то за чистосердечное признание получат оба по 8 лет;

в) если оба не сознаются, то получат по 2 года только за незаконное хранение оружия.

Первый заключенный имеет 2 стратегии: x_1^1 – сознаться и x_1^2 – не сознаться. Точно такие же стратегии x_2^1 и x_2^2 имеет второй заключенный.

Матрицы выигрышей игрока 1 (А) и игрока 2 (В) имеют следующий вид:

$$A=\begin{bmatrix}-8 & 0\\ -12 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-8 & -12\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

Сумма $a_{ij}+b_{ij}\neq 0$, то есть это игра с ненулевой суммой.

Даже без подробных расчетов очевидно, что данная игра имеет единственную точку равновесия, причем в чистых стратегиях: $x^*=(x_1^1, x_2^1)$; однако ниже будет показано, что эта равновесная ситуация не является наилучшей для обоих участников.

Пример 5.7. "Семейный спор". Два экономических партнера договариваются о совместном проведении одного из двух действий: D_1 или D_2, каждое из которых требует необходимого совместного участия обоих партнеров.

В случае совместного осуществления действия D_1 игрок 1 получает одну единицу полезности, а игрок II – две единицы. Наоборот, в случае совместного осуществления D_2 игрок I получает две единицы, а игрок II – одну. Наконец, если игроки выполнят различные действия, то выигрыш каждого из них равен нулю. Таким образом, мы имеем 2×2 – биматричную игру с матрицами выигрышей $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Во многих популярных сочинениях по теории игр эту игру интерпретируют как одновременный выбор супругами совместного вечернего развлечения: посещения соревнований по боксу или же театра, причем в посещении бокса муж заинтересован в большей степени, чем жена, при посещении театра наблюдается обратная картина, а в случае непреодоленного разногласия вечер вообще оказывается испорченным. Ввиду такой интерпретации описанная игра обычно и называется “Семейным спором”.

5.8. Биматричные игры 2×2

Рассмотрим игру с матрицами выигрышей 1-го и 2-го игроков:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Смешанные стратегии игроков X_1 и X_2 можно полностью описать заданием вероятностей ξ_1^1 и ξ_2^1 выбора ими своих первых чистых стратегий. Для удобства примем $\xi_1^1 = x$, $\xi_2^1 = y$.

Вторые чистые стратегии, выбираются при этом, соответственно, с вероятностями 1-x и 1-y, то есть смешанные стратегии игроков могут быть выражены как $X = (x, 1\text{-}x)$ и $Y = (y, 1\text{-}y)$.

Поскольку должно быть $0 \le (x, y) \le 1$, каждая ситуация в биматричной 2×2-игре однозначно описывается некоторой точкой (x, y) единичного квадрата. Выигрыши игроков в этой ситуации мы будем для удобства обозначать через $H_1(x,y)$ и $H_2(x,y)$.

В обозначениях скалярных произведений средние выигрыши игроков можно записать в виде

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot A_{i(\cdot)} \cdot Y^T) = X \cdot A \cdot Y^T \qquad (5.13)$$

$$H_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (b_{ij} \cdot x_i \cdot y_j) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot B_{i(\cdot)} \cdot Y^T) = X \cdot B \cdot Y^T$$

Далее осуществляем следующие преобразования:

$$H_1(x,y) = X \cdot A \cdot Y^T = [x, 1-x] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = x \cdot y \cdot a_{11} + \qquad (5.14)$$

$$+ x \cdot (1-y) \cdot a_{12} + (1-x) \cdot y \cdot a_{21} + (1-x) \cdot (1-y) \cdot a_{22} =$$

$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) \cdot x \cdot y + (a_{12} - a_{22}) \cdot x +$$

$$+ (a_{21} - a_{22}) \cdot y + a_{22}$$

После аналогичных преобразований получим

$$H_2(x, y) = X \cdot B \cdot Y^T = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}) \cdot xy + (b_{12} - b_{22}) \cdot x +$$
$$+ (b_{21} - b_{22}) \cdot y + b_{22} \qquad (5.15)$$

Так как равновесность ситуации в бескоалиционной игре означает ее приемлемость для каждого из игроков, опишем в единичном квадрате ситуаций "геометрические места точек", соответствующих приемлемым ситуациям для игроков 1 и 2 отдельно.

Начнем с ситуаций, приемлемых для игрока 1. Для того, чтобы ситуация (x, y) была приемлемой для игрока 1, необходимо и достаточно, чтобы было

$$H_1(1,y) = A_1 \cdot Y^T \le X \cdot A \cdot Y^T = H_1(x,y) \qquad (5.16)$$

$$H_1(0,y) = A_2 \cdot Y^T \le X \cdot A \cdot Y^T = H_1(x,y). \qquad (5.17)$$

Видно, что эти условия никаким образом не связаны с матрицей B и будут идентичны для всех биматричных игр 2×2 с матрицей выигрышей 1-го игрока A.

Запишем на основании (5.4) выигрыши в развернутом виде:

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) \cdot y + (a_{12} - a_{22}) + (a_{21} - a_{22}) \cdot y + a_{22} \le$$
$$\le (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) \cdot xy + (a_{12} - a_{22}) \cdot x + (a_{21} - a_{22}) \cdot y + a_{22}, \qquad (5.18)$$

$$(a_{21}-a_{22})\cdot y+a_{22} \le (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})\cdot xy+(a_{12}-a_{22})\cdot x+$$
$$+(a_{21}-a_{22})\cdot y+a_{22} \qquad (5.19)$$

После очевидных упрощений эти равенства переписываются как

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})\cdot(1-x)\cdot y+(a_{12}-a_{22})\cdot(1-x) \le 0, \qquad (5.20)$$

$$(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})xy+(a_{12}-a_{22})\cdot x \ge 0, \qquad (5.21)$$

Положим для упрощения записи

$$a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = C,$$
$$a_{12} - a_{12} = d_1.$$

Неравенства (5.20) и (5.21) теперь приобретают вид

$$C\cdot(1-x)\cdot y-d_1\cdot(1-x)\le 0 \text{ или } (C\cdot y-d_1)(1-x)\le 0 \qquad (5.22)$$
$$C\cdot xy-d_1\cdot x\ge 0 \qquad \text{или } (C\cdot y-d_1)\cdot x\ge 0 \qquad (5.23)$$

Опираясь на результаты, полученные для матричных игр, можно установить, что множество всех приемлемых для 1-го игрока ситуаций есть либо трехзвенный зигзаг, либо квадрат [0;1]×[0;1]. При $C\neq 0$ множество приемлемых для 1-го игрока ситуаций опишется следующими выражениями:

(1; y), при $yC\ge d_1=a_{22}-a_{12}$,

(0; y), при $yC\le d_1$,

(x; y), при $yC= d_1$ и $y\in[0; 1]$ (5.24)

При C=0 и $d_1\neq 0$ множество опишется так:

(1; y) при $d_1>0$; (0; y) при $d_1<0$.

При C=0 и $d_1=0$ для 1-го игрока будут приемлемы все ситуации.

Для 2-го игрока множество приемлемых ситуаций в смешанном расширении игры опишется неравенствами:

$$XB_{(\cdot)1} \le XBY_2^T, \qquad (5.25)$$

$$XB_{(\cdot)2} \le XBY_2^T. \qquad (5.26)$$

Отметим отличие от матричной игры, для которой неравенства, подобные (2.25), (5.26), будут иметь противоположные знаки и A=B=H.

В результате оказывается, что приемлемое для 2-го игрока множество ситуаций опишется выражениями:

$$\begin{array}{lll} (x;\, 1;), & \text{при} & xD \ge d_2 = b_{22} - b_{21} \text{ и } D \ne 0 \\ (x;\, 0), & \text{при} & xD \le d_2 \text{ и } D \ne 0 \\ (x;\, y), & \text{при} & xD = d_2,\ x \in [0;1] \text{ и } D \ne 0 \end{array} \qquad (5.27)$$

где $D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$.

При D=0 и $d_2 \ne 0$ множество опишется так:

$(x;\, 1)$ при $d_2 > 0$; $(x;0)$ при $d_2 < 0$.

При D=0 и $d_2 = 0$ для 2-го игрока будут приемлемы все ситуации.

Ордината y' горизонтального звена зигзага для 1-го игрока опишется формулой

$$y' = \frac{d_1}{C} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \qquad (5.28)$$

а абсцисса x' вертикального звена зигзага для 2-го игрока – формулой

$$x' = \frac{d_2}{D} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} \qquad (5.29)$$

Если $0 \le y' \le 1$ и $0 \le x' \le 1$, то оптимальная в смысле равновесия по Нэшу ситуация x^* будет иметь вид $x^* = x'$, $y^* = y'$.

Отмечая, что для матричной игры множество приемлемых для 2-го игрока ситуаций описывается неравенствами $X_1H_{(\cdot)1} \ge X_1HX_2^T$ и $X_1H_{(\cdot)2} \ge X_1HX_2^T$, и сравнивая эти неравенства с (5.25) и (5.26), устанавливаем, что при использовании рис.2.13 для геометрического истолкования приемлемого для 2-го игрока множества ситуаций в биматричной игре следует считать, что для левого столбца (a,...,d) D>0, а для правого столбца (e,...,k) D<0, что указано на данном рисунке.

В отличие от матричной игры, для которой зигзаги приемлемых ситуаций всегда имеют одинаковую ориентацию (либо оба правые, либо оба левые), в биматричных играх зигзаги могут иметь различную ориентацию. При этом число равновесных точек будет равно 1 в двух случаях:

а) равновесная ситуация существует только в чистых стратегиях (одна из вершин единичного квадрата),

б) равновесная ситуация соответствует смешанной стратегии хотя бы одного игрока и зигзаги имеют одинаковую ориентацию.

Число равновесных точек будет равно 3, если существует равновесный исход в смешанных стратегиях и зигзаги ситуаций имеют различную ориентацию.

Таким образом, число точек равновесия будет нечетно (1 или 3). Утверждение распространяется не только на биматричные игры, но и на конечные бескоалиционные игры с любым конечным числом игроков, для которых число равновесных исходов всегда нечетно. Для биматричных игр возможные решения показаны на рис.5.2: а) – 1 точка и б) – 3 точки равновесия (отмечены кружками).

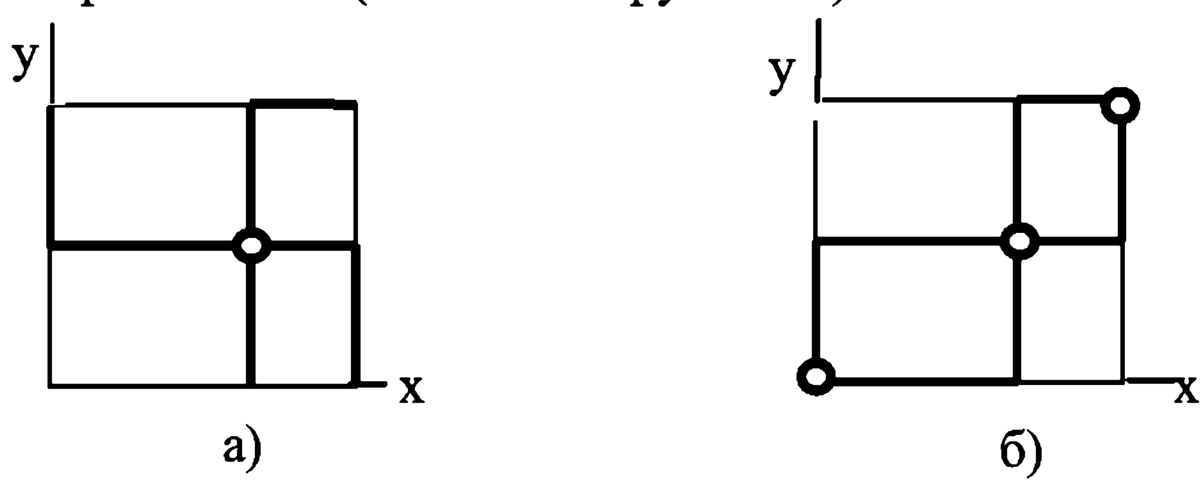


Рис. 5.2

Сравнение формул (5.28) и (5.29) соответственно, с формулами (2.53) и (2.61) убеждает, что равновесное поведение игроков в биматричной игре оказывается направленным не столько на максимизацию собственного выигрыша, сколько на минимизацию выигрыша оппонента. Таким образом, при отсутствии антагонизма интересов возникает антагонизм поведения: 1-й игрок ведет себя как игрок 1 в матричной игре с матрицей В, а 2-й игрок ведет себя как игрок 2 в матричной игре с матрицей А.

Теперь можно достаточно строгим образом рассмотреть ситуации равновесия в играх из примеров 5.5 и 5.7.

Пример 5.8. Для условий примера 5.5 имеем:

$$x^1 = \frac{-1+3}{1-1+2+3} = \frac{2}{5}, \quad 0 < x^1 < 1, \quad \text{поэтому } x^* = x^1;$$

$$y^1 = \frac{0+1}{2+0-1+1} = \frac{1}{2}, \quad 0 < y^1 < 1, \quad \text{поэтому } y^* = y^1$$

Поэтому Студент должен выучить 40% материалов по предмету, а Профессор должен быть в одинаковой степени склонен поставить или не поставить зачет, ориентируясь на качество знаний Студента, то есть, быть беспристрастным.

Графическая иллюстрация решения данной задачи представлена на рис. 5.3.

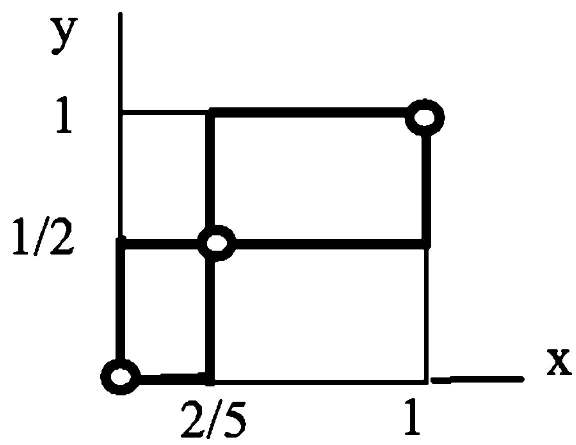


Рис. 5.3

Игра имеет 3 равновесных исхода, на рис. 5.3 они отмечены кружками. Ситуации в чистых стратегиях соответствуют по-житейски тривиальным исходам:

Студент весьма хорошо подготовился, а Профессор поставил зачет; Студент весьма плохо подготовился и Профессор зачет не поставил. Равновесное решение в смешанных стратегиях соответствует описанному несколько выше случаю: 40% – подготовка Студента и беспристрастное поведение Профессора.

Пример 5.9. Для условий примера 5.6 имеем:

$$x^1 = \frac{-2-0}{-8+12-0-2} = \frac{-2}{2} < 0, \quad x^1 < 0, \quad C > 0, \quad \text{потому} \quad x^* = 1;$$

$$y^1 = \frac{-2-0}{-8-0+12-2} = \frac{-2}{2} < 0, \quad y^1 < 0, \quad C < 0, \quad \text{потому} \quad y^* = 1$$

На рис. 5.4 изображены зигзаги, описывающие равновесное решение игры (отмечено кружком).

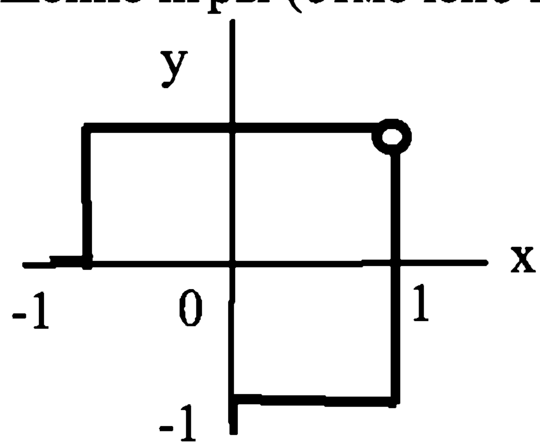


Рис. 5.4

В данной равновесной ситуации каждый игрок реализует 1-ю стратегию, т.е. сознается и теряет при этом 8 единиц полезности. Вместе с тем очевидно, что в ситуации (x_1^2, x_2^2) каждый игрок теряет только 2 единицы полезности, но эта ситуация весьма неустойчива, т.к. каждый игрок, отклонившись от нее в одностороннем порядке, будет нести нулевые потери.

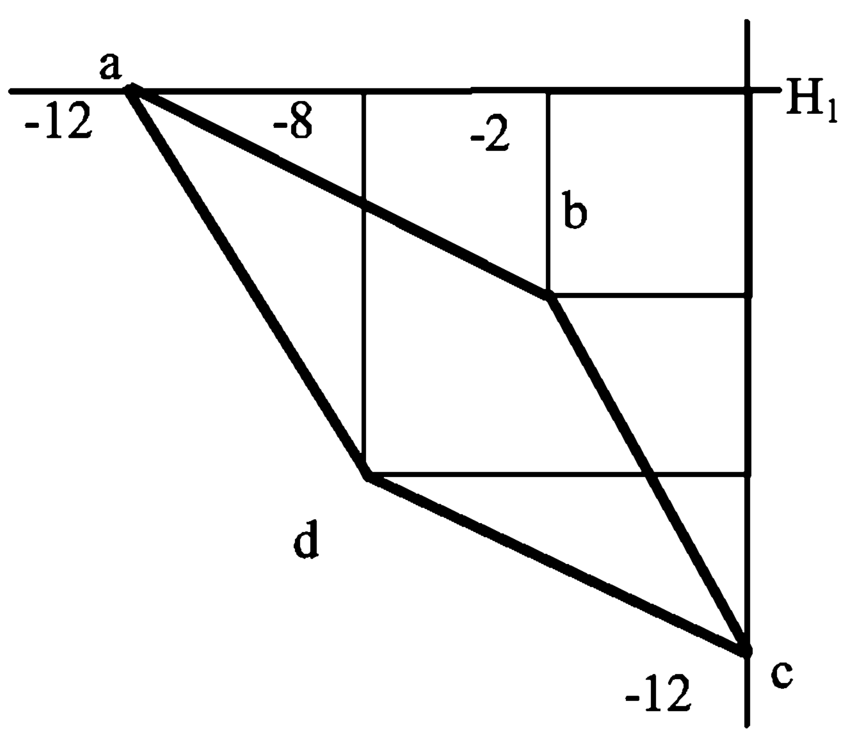


Рис. 5.5

На рис. 5.5 изображено множество всех реализуемых векторов выигрышей в 4 возможных ситуациях. Ситуации, обозначенные на рис. 5.5 точками a, b, c, оптимальны в смысле Парето и при этом точка “b”, в которой достигается наибольшие выигрыши обоих игроков (наименьшие потери $H_1(x_1^2, x_2^2) = H_2(x_1^2, x_2^2) = -2$) оказываются лучше для каждого игрока, чем точка равновесия “d”.

Так как рассматриваемая игра бескоалиционна, то есть, игроки играют "втемную", то здесь налицо выступает противоречие между равновесностью и выгодностью.

Пример 5.10. Для условий примера 5.7 имеем:

$$x^1 = \frac{1-0}{2-0-0+1} = \frac{1}{3}, \qquad x^* = x^1 = \frac{1}{3};$$

$$y^1 = \frac{2-0}{1-0-0+2} = \frac{2}{3}, \qquad y^* = y^1 = \frac{2}{3}.$$

Поэтому ситуации, приемлемые для игрока 1, составляют зигзаг, охватывающий следующие ситуации:

$(0, \eta)$, где $0 \le \eta \le 2/3$,

$(x, 2/3)$, где x произвольно,

$(1, y)$, где $2/3 \le y \le 1$.

Поэтому приемлемыми для игрока 2 будут ситуации:

$(x, 0)$, где $0 \le x \le 1/3$,

$(1/3, y)$, где y произвольно,

$(x, 1)$, где $1/3 \le x \le 1$.

Как видно из рис. 5.5, данная игра имеет три ситуации равновесия: (0, 0), (1, 1), (1/3, 2/3).

Здесь ситуации (0, 0) и (1, 1) соответствуют одновременному выбору игроками своих вторых или, соответственно, первых чистых стратегий, то есть договоренности о достоверных совместных действиях. Обычно так и понимаются всякого рода договоры. Однако в нашем случае имеется еще третья ситуация равновесия, состоящая в выборе игроками некоторых вполне определенных смешанных стратегий.

Формально ее можно считать основой возможного договора не в меньшей степени, чем первые две. Она даже "более справедлива", чем они, поскольку в ней оба игрока получают одинаковые выигрыши (по формулам 5.14, 5.15):

$$H_1=H_2= [1/3, 2/3]\cdot A\cdot[2/3, 1/3]^T=[1/3, 2/3]\cdot B\cdot[2/3, 1/3]^T=2/3.$$

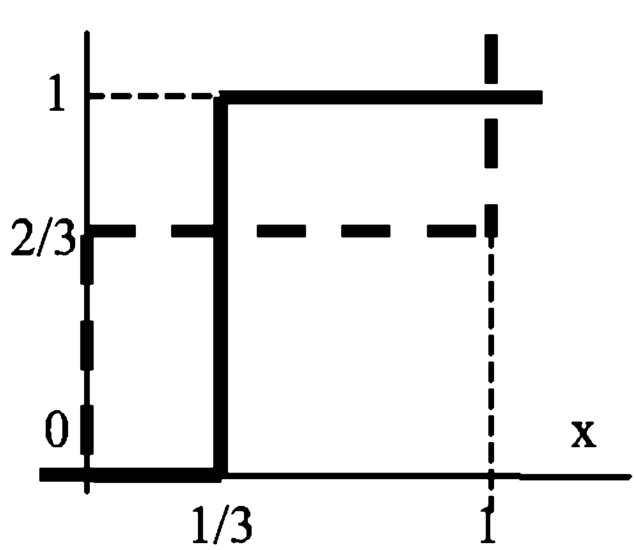


Рис. 5.6

Вместе с тем, выигрыши каждого из игроков в этой ситуации равновесия меньше, чем в двух других ситуациях равновесия, где они, соответственно, равны 1 и 2 в первой ситуации и 2 и 1 – во второй.

Так, сочетание устойчивости со справедливостью вступает в противоречие с сочетанием устойчивости и выгодности.

Ясно, что если игроки договорились бы играть оба, скажем, первую чистую стратегию, причем игрок 2 за получение большего выигрыша, чем игрок 1, заплатил бы ему 1/2, то выигрыш каждым полутора единиц можно было бы считать и выгодным, и справедливым. Однако в рамках теории бескоалиционных игр такого рода дележи не рассматриваются. Они изучаются в кооперативной теории игр, о которой будет говориться в следующем разделе.

5.9. Упрощение бескоалиционных игр

Упрощение бескоалиционных игр основано на тех же принципах, что и упрощение матричных игр, а именно на вычеркивании дублирующих друг друга и доминируемых стратегий. При этом, если в игре участвует более 2 лиц, вычеркивание какой-либо стратегии одного из участников с удалением целого слоя в N-мерном параллелепипеде ситуаций, и поэтому следует тщательно следить, чтобы слои повторяли или должным образом доминировали друг друга поэлементно. Для биматричных игр это легко выполнимо.

Для некоторого класса биматричных игр может быть использован прием приведения игры к антагонистической матричной игре. Действительно, если биматричная игра есть игра с постоянной суммой, то она стратегически эквивалентна игре с нулевой суммой, а такая игра попадает под класс матричных игр. В этом случае достаточно решить матричную игру на любой из матриц A или B биматричной игры, а затем подсчитать выигрыш для каждого игрока по своей матрице:

$$H_1 = X_1 A X_2^T, \quad H_2 = X_1 B X_2^T \cdot \qquad (5.30)$$

По существу, игра в примере 2.10 была игрой с постоянной суммой, в которой элементу $(h_{ij})_1 = p_{ij}N$ матрицы H_1 соответствовал элемент $(h_{ij})_2 = (1 - p_{ij})N$ матрицы H_2 и $(h_{ij})_1 + (h_{ij})_2 = N = const$.

Осуществив неявно переход к стратегически эквивалентной игре, производственно-торговый конфликт в примере 2.10 мы смоделировали антагонистической матричной игрой.

Попутно заметим, поскольку это не было сделано своевременно, что интерпретация ξ^* и η^* в примере 2.7 не как вероятностей или частот, а как долей выпуска продукции приводит к понятию физической смеси стратегий (в отличие от чисто вероятностной).

Биматричные игры с постоянной суммой достаточно легко решаются для любого формата, а не только 2×2, так как оказывается применим метод линейного программирования, которым пользуются при решении матричных игр.

Можно воспользоваться еще одним способом упрощения решения бескоалиционной игры для произвольного конечного числа участников, если каждый игрок располагает лишь двумя чистыми стратегиями. Такие бескоалиционные игры называют диадическими.

5.10. Диадические игры

Бескоалиционная игра $\Gamma = (I, \quad set\{x_i\}_{i\in I}; \quad \{H_i\})$ называется диадической, если каждый игрок в ней имеет 2 чистые стратегии: $\{x_i\}=\{1;0\}$, $i\in I$. В дальнейшем, если это не будет приводить к двусмысленности стратегий 1_i и 0_i, i-го игрока будем обозначать просто 1 и 0.

В такой игре всякая смешанная стратегия i-го игрока X_i полностью описывается вероятностью или частотой ξ_i выбора им своей первой чистой стратегии, то есть 1. Таким образом, множество $\{X_i\}$ всех смешанных стратегий игрока i лежит на отрезке [0;1], а множество всех ситуаций в смешанных стратегиях есть единичный N-мерный куб; вершины куба – ситуации в смешанных стратегиях. Положение вершин этого N-мерного куба в пространстве описывается двоичным вектором, и поэтому каждую вершину можно атрибутировать путем указания множества игроков, выбирающих в данной ситуации стратегию 1.

Пусть x – некоторая ситуация в чистых стратегиях в диадической игре Г, а $K^1(x)$, $K^0(x)$ – множества игроков, выбирающих в данной ситуации 1-ю или 2-ю стратегии, соответственно. Тогда вероятность реализации ситуации x будет определяться выражением

$$X(x) = \prod_{j\in K^1(x)} \xi_j \cdot \prod_{j\in K^0(x)} (1-\xi_j) \qquad (5.31)$$

Множество ситуаций, приемлемых для i-го игрока может быть описано следующим образом.

Выберем некоторое подмножество $K_i \subset I\setminus\{i\}$ и будем под ситуацией (ξ_i, K_i) понимать такую ситуацию, в которой i-й игрок выбирает такую смешанную стратегию X_i, что $X_i(1)= \xi_i$; игроки из K_i выбирают стратегию 1, а прочие игроки выбирают стратегию 0. Тогда

$$X(K_i) = \prod_{j\in K^1} \xi_j \cdot \prod_{\substack{j\notin K_i \\ j\neq i}} (1-\xi_j), \qquad (5.32)$$

а выигрыш i-го игрока в ситуации X:

$$H(X) = \xi_i \sum_{K_i} H_i(1,K_i)X(K_i) + (1-\xi_i)\sum_{K_i} H_i(0,K_i)X(K_i)\ . \qquad (5.33)$$

Приемлемость или индивидуальная рациональность ситуации X для i-го игрока состоит в выполнении условия

$$H_i(X \| \xi_i^\wedge) \le H_i(X) \quad \text{при} \quad \xi^\wedge = 0 \quad \text{и} \quad \xi^\wedge = 1\cdot \qquad (5.34)$$

С учетом (5.33) последнее условие перепишется:

$$\sum_{K_i} H_i(\xi_i^\wedge, K_i)X(K_i) \le \xi_i \sum_{K_i} H_i(1,K_i)X(K_i) + \qquad (5.35)$$
$$+ (1-\xi_i)\sum_{K_i} H_i(0,K_i)X(K_i)$$

Если $\xi_i^\wedge = 1$, то

$$(1-\xi_i)\sum_{K_i} H_i(1,K_i)X(K_i) \le (1-\xi_i)\sum_{K_i} H_i(0,K_i)X(K_i), \qquad (5.36)$$

а если $\xi_i^\wedge = 0$, то

$$\xi_i\sum_{K_i} H_i(0,K_i)X(K_i) \le \xi_i\sum_{K_i} H_i(1,K_i)X(K_i), \qquad (5.37)$$

При ξ=1 (5.36) выполняется тождественно, а (5.37) перепишется

$$\sum_{K_i} H_i(0,K_i)X(K_i) \le \sum_{K_i} H_i(1,K_i)X(K_i); \qquad (5.38)$$

при ξ_i=0 (5.37) выполняется тождественно, а (5.36) перепишется

$$\sum_{K_i} H_i(1,K_i)X(K_i) \le \sum_{K_i} H_i(0,K_i)X(K_i). \qquad (5.39)$$

Обозначим $\{X_1^i\}$ множество таких комбинаций игроков из $I / \{i\}$, что для ситуации вида $(1,X^i)$, где $X^i \in \{X_1^i\}$, условие (5.38) выполняется как строгое неравенство, далее, обозначим $\{x_0^i\}$ множество таких комбинаций, что для ситуаций вида $(0,X^i)$, где $X^i \in \{X_0^i\}$, условие (5.39) выполняется как строгое неравенство, и обозначим $\{X_\sim^i\}$ все остальные комбинации стратегий. В этом случае для i-го игрока окажутся приемлемыми ситуации следующих видов:

$$(1,X^i) \quad \text{при} \quad X^i \in \{X_1^i\}, \qquad (5.40)$$

$$(0,X^i) \quad \text{при} \quad X^i \in \{X_0^i\}, \qquad (5.41)$$

$$(\xi_i,X^i) \quad \text{при} \quad X^i \in \{X_\sim^i\} \quad \text{и} \quad \xi \in [0;1]. \qquad (5.42)$$

Множества ситуаций (5.40), (5.41) представляют собой не обязательно связные части (N-1)-мерных гиперплоскостей, а множества (5.42) – декартово произведение их общей (n-2)-мерной границы на отрезок [0;1], то есть, это будет часть какого-то (n-1)-мерного цилиндра.

Таким образом, множество равновесных ситуаций в диадической игре определяются как пересечение $NE = \bigcap_{i \in I} G_i$., (5.43)

где G_i – множество приемлемых ситуаций i-го игрока.

Множество (5.40)...(5.42) в диадической игре N лиц будут иметь 3^N пересечений. Если это множества “общего вида”, то число точек пересечения будет конечным.

Пример 5.11. Рассматривается диадическая игра 3 лиц. Эта игра будет иметь 2^3=8 ситуаций в чистых стратегиях, и каждая такая ситуация будет характеризоваться для каждого участника своим значением выигрыша (итого $3 \cdot 2^3$=24 параметра, характеризующих игру). Опишем функцию выигрыша в смешанных стратегиях и множества приемлемых ситуаций, например, для 3-го игрока, то есть, i=3. Вначале составим таблицу ситуаций, соответствующих им множеств K_3 и вероятностей $X(K_3)$.

Таблица 5.5

Ситуации	Множества K_3	Вероятности $X(K_3)$
000 001	$K_3^1 = \varnothing$ —”—	$X^1(K_3)=(1-\xi_1)(1-\xi_2)$ —”—
010 011	$K_3^2 = \{2\}$ —”—	$X^2(K_3)=(1-\xi_1)\,\xi_2$ —”—
100 101	$K_3^3 = \{1\}$ —”—	$X^3(K_3)=\xi_1(1-\xi_2)$ —”—
110 111	$K_3^4 = \{1;2\}$ —”—	$X^4(K_3)=\xi_1\xi_2$ —”—

Функция выигрыша H_3 3-го игрока запишется:

$$H_3(X)=\xi_3[H_3(0,0,1)(1-\xi_1)(1-\xi_2)+H_3(0,1,1)(1-\xi_1)\xi_2+H(1,0,1)\xi 1\times$$
$$\times(1-\xi_2)+H_3(1,1,1)\xi_1\xi_2]+(1-\xi_2)[H_3(0,0,0)(1-\xi_1)(1-\xi_2)+$$
$$+H_3(0,1,0)(1-\xi_1)\xi_2+H(1,0,0)\xi_1(1-\xi_2)+H_3(1,1,0)\xi_1\xi_2].$$

Множество $\{X_1^3\}$ опишется условием

$$H_3(0,0,0)(1-\xi_1)(1-\xi_2)+H_3(0,1,0)(1-\xi_1)\xi_2+H_3(1,0,0)\xi_1\times(1-\xi_2)+$$
$$+H_3(1,1,0)\xi_1\xi_2\le H_3(0,0,1)(1-\xi_1)(1-\xi_2)+H_3(0,1,1)(1-\xi_1)\xi_2+$$
$$+H_3(1,0,1)\xi_1(1-\xi_2)+H_3(1,1,1)\xi_1\xi_2.$$

Для описания множества $\{X_0^3\}$ следует в предыдущем условии заменить знак неравенства на противоположный, а для описания множества $\{X_{\sim}^3\}$ – применить знак равенства.

После приведения подобных членов записанное выше неравенство можно свести к виду

$$A\xi_1\xi_2+B\xi_1+C\xi_2+D\ge 0.$$

Если $A\neq 0$, то границей множества, описываемого данным неравенством, будут участки гиперболы, построенной в плоскости $0\xi_1\xi_2$. Если изменять переменную ξ_3 от 0 до 1, эти участки будут вычерчивать в 3-мерном пространстве цилиндрические поверхности, которые являются границей множества $\{X_{\sim}^3\}$.

5.11. Приложения бескоалиционных игр

Пример 5.12. Производится вылет вертолетных авиазвеньев в район боевых действий с задачей поиска и уничтожения танковых подразделений противника.

Противник осуществляет обнаружение и уничтожение вертолетов, используя миниракеты “земля – воздух”.

Пусть в некотором районе вертолеты и ракетные установки противника могут быть использованы по одному из 2-х возможных вариантов. Эффективность авиазвеньев оценивается математическим ожиданием числа уничтоженных танков и задана матрица А условных выигрышей, а эффективность ракетных средств оценивается математическим ожиданием числа уничтоженных вертолетов и задана матрица В условных полезностей противника.

Требуется отыскать оптимальные (по Нэшу) смешанные стратегии использования вертолетов и ракет и математические ожидания выигрышей обеих сторон.

Эти модельные боевые действия в теоретико-игровом плане существенным образом относятся к биматричному варианту игры. Действительно, антагонистическая модель окажется в данном случае неадекватной. Это объясняется тем, что в антагонистической игре стремлению вертолета уничтожить танк, должно соответствовать прямо противоположное стремление танка избежать уничтожения. В рассмотренной игровой модели противник стремится ракетными средствами уничтожить вертолет, по каковому действию и оценивается его выигрыш, то есть прямого антагонизма интересов здесь не наблюдается.

Приведем численные расчеты для матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 35 \\ 25 & 80 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 60 & 20 \end{bmatrix}$$

При данном числовом материале доминирующие стратегии в обеих матрицах отсутствуют и упростить игру до размера 1×2 или 2×1 не удается. Воспользуемся формулами (5.28), (5.29):

$$y^1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{80-50}{50-35-25+80} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7},$$

$$x^1 = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} = \frac{20-40}{40-60-60+20} = \frac{-20}{-60} = \frac{1}{3}.$$

Здесь $0< x^1<1$ и $0< y^1<1$, поэтому оптимальные вероятности применения 1-го способа действий составит: $x^*=1/3$ для вертолетных авиазвеньев, $y^*=3/7$ – для ракетных установок. Оптимальные вероятности применения двух способов действий составят, соответственно, 2/3 и 4/7.

Математическое ожидание условного выигрыша вертолетного авиазвена:

$$H_1=a_{11}x^*y^*+ a_{12}x^*(1-y^*)+ a_{21}(1-x^*)y^*+ a_{22}(1-x^*)(1-y^*)=51,43.$$

Математическое ожидание условного выигрыша ракетных средств:

$$H_2=b_{11}\,x^*y^* + b_{12}x^*(1-y^*)+ b_{21}(1-x^*)y^*+ b_{22}(1-x^*)(1-y^*)=46{,}19.$$

Пример 5.13. Каждое из 3 предприятий пользуется для производственных целей водой из одного и того же природного водоема; при этом каждое предприятие располагает двумя чистыми стратегиями: сбрасывать отработанную воду обратно в водоем без очистки (стратегия 1) или использовать очистные сооружения (стратегия 0).

Если воду без очистки сбрасывает не более одного предприятия, то вода за счет естественной очистки остается пригодной для дальнейшего использования и предприятия не несут убытков в связи с нарушением технологической дисциплины из-за использования в производстве нечистой воды. Если неочищенную воду сбрасывают в водоем 2 или 3 предприятия, то каждый пользователь несет ежегодные убытки 3 млн р. Стоимость эксплуатации очистных сооружений обходится каждому предприятию в 1 млн р./год.

Составим таблицу ситуаций и векторов выигрышей участников эколого-производственного конфликта (см. табл. 5.6)

Таблица 5.6

Ситуация	0,0,0	0,0,1	0,1,0	0,1,1	1,0,0	1,0,1	1,1,0	1,1,1
Вектор выигрышей	-1,-1,-1	-1,-1,0	-1,0,-1	-4,-3,-3	0,-1,-1	-3,-4,-3	-3,-3,-4	-3,-3,-3

Неравенство, определяющее множество $\{X_1^3\}$ для 3-го участника, будет иметь вид

$$-1(1-\xi_1)(1-\xi_2) -1(1-\xi_1)\xi_2 - 1\xi_1\,(1-\xi_2)-4\cdot\xi_1\xi_2 \le 0(1-\xi_1)(1-\xi_2)-$$
$$-3(1-\xi_1)\xi_2 - 3\xi_1\,(1-\xi_2)-3\cdot\xi_1\xi_2,$$

а после приведения подобных членов:

$$6\xi_1\xi_2 -3\xi_1-3\xi_2+1 \ge 0 \text{ или } \xi_2\ge\frac{1}{3}\cdot\frac{3\xi_1-1}{2\xi_1-1}.$$

Последнее выражение вырезает на единичном квадрате в плоскости $0\xi_1\xi_2$ два сектора (см. рис. 5.7). Для определения множества $\{X_0^3\}$ следует изменить знак в последнем неравенстве. На рис. 5.7 множество $\{X_0^3\}$ изображается криволинейным шестиугольником, а множество $\{X_{\sim}^3\}$ есть участки ветвей гиперболы на плоскости $0\xi_1\xi_2$ (проекция множества $\{X_{\sim}^3\}$ на данную плоскость).

Асимптоты параболы $\xi_2=(3\xi_1-1)/3(2\xi_1-1)$ – прямые $\xi_1=1/2$ и $\xi_2=1/2$.

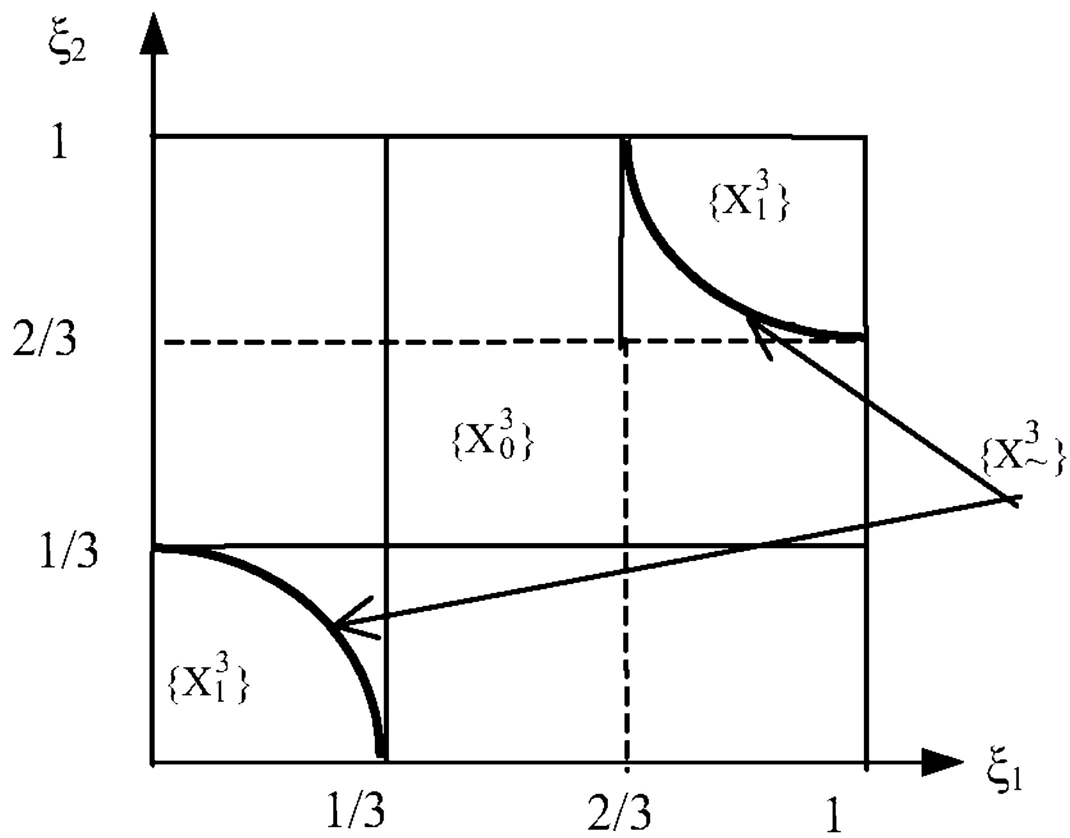


Рис. 5.7

На рис. 5.8 множества $\{X_1^3\}, \{X_0^3\}$, и $\{X_\sim^3\}$ изображены вписанными в единичный куб.

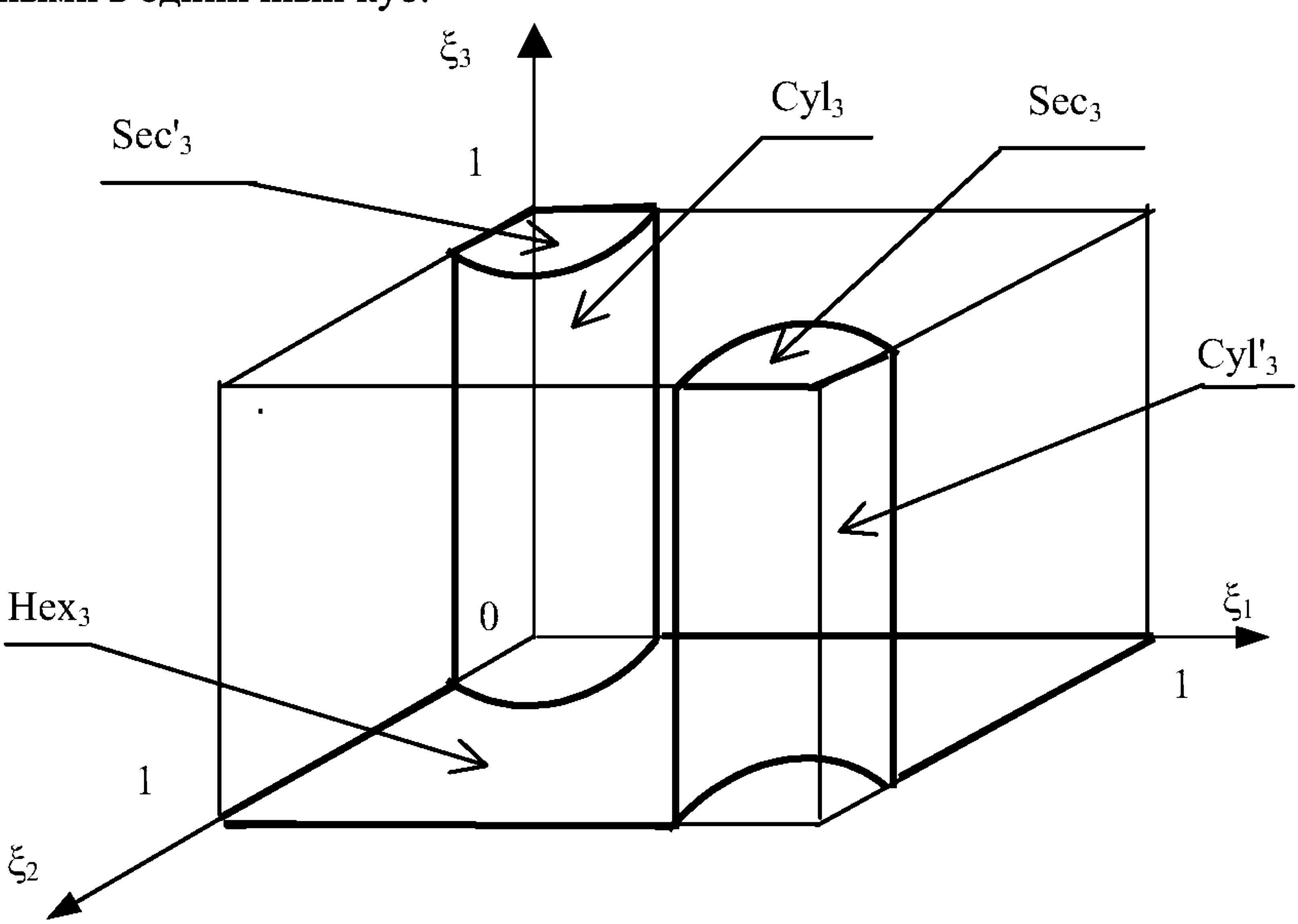


Рис. 5.8

Множество приемлемых для 3-го участника ситуаций $G_3 = \{X_1^3\} \cup \{X_0^3\} \cup \{X_\sim^3\}$ состоит из двух секторов Sec_3 и Sec'_3, криволинейного шестиугольника – Hex_3 и 2 цилиндрических поверхностей – Cyl_3 и Cyl'_3. Аналогичным образом могут быть описаны и построены множества G_1 и G_2 в силу симметрии игры; необходимо только соблюдать правильную ориентацию фигур относительно координатных осей.

Рассмотрим множество $NE = \bigcap_{i=1}^{3} G_i$.

Вначале рассмотрим те точки из NE, которые есть вершины единичного куба. Симметричной для всех участников является вершина (1,1,1) – пересечение секторов $Sec_1 \cap Sec_2 \cap Sec_3$. Эта точка равновесна и в ней каждое предприятие несет убытки 3 млн р./год. Это – "равновесие безнадежности", когда ни одно предприятие в одиночку не улучшает общее положение дел, а только усугубляет свой убыток. Еще три ситуации равновесия возникают как пересечение $Hex_1 \cap Hex_2 \cap Sec'_1$ (вершина (0,0,1) и симметричные ему пересечения в вершинах (0,1,0) и (1,0,0). Каждая из этих ситуаций связана с наличием "Диктатора", который сам исчерпывает весь лимит загрязнения, не неся убытков и заставляя своих оппонентов применять водоочистку (те из двух зол выбирают меньшее). Остальные вершины куба (в том числе и самая "добросовестная" – (0,0,0) не лежат в множестве NE.

Изучение рис.5.8 убеждает, что среди внутренних точек ребер единичного куба также нет равновесных.

Пересечение цилиндров с одной из граней главного ортанта системы $0\xi_1\xi_2\xi_3$ (в которой лежит соответствующий криволинейный шестиугольник) дает точку (1/3;1/3;0) – пересечение $Cyl_1 \cap Cyl_2 \cap Hex_3$, и симметричные ей точки: (0,1/3;1/3) – пересечение $Cyl_1 \cap Hex_2 \cap Cyl_3$ (0,1/3,1/3) – пересечение $Hex_1 \cap Cyl_2 \cap Cyl_3$.

Эти ситуации характеризуются присутствием "совестливого" пользователя водоресурсов. Выигрыши (точнее – затраты или убытки) 3-го предприятия в этих ситуациях могут быть вычислены по формуле

$$H_3(X)=\xi_3[-1\cdot(1-\xi_1)(1-\xi_2)-3\cdot(1-\xi_1)\xi_2-3\cdot \xi_1(1-\xi_2) -3\xi_1\xi_2]+$$
$$+(1-\xi_3)[-1\cdot(1-\xi_1)(1-\xi_2)-1\cdot(1-\xi_1)\xi_2-1\cdot \xi_1(1-\xi_2)-4\xi_1\xi_2].$$

Аналогичные формулы получаются для предприятий 1 и 2 циклической перестановкой индексов.

Внутри единичного куба ситуации равновесия могут быть образованы пересечением цилиндров $Cyl_1 \cap Cyl_2 \cap Cyl_3$ или $Cyl'_1 \cap Cyl'_2 \cap Cyl'_3$.

Вследствие симметричности игры цилиндры будут располагаться одинаковым образом относительно соответствующих координатных осей и точки равновесия, будучи точками пересечения цилиндров, будут симметричны, то есть для них будет выполняться равенство $\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi$.

Подставим $\xi_1=\xi_2=\xi$ в уравнение гиперболы $6\xi_1\xi_2-3\xi_1-3\xi_2+1=0$ и получим $6\xi^2-6\xi+1=0$.

Решением этого уравнения будет значение

$$\xi = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{12} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Таким образом, внутри куба окажется две симметричных ситуации равновесия (0,211; 0,211; 0,211) и (0,789; 0,789; 0,789).

Эти ситуации не только равновесны, но и справедливы ввиду их симметрии относительно участников конфликта. Можно вычислить по приведенной формуле для $H_3(X)$ выигрыш третьего игрока в этих ситуациях:

$$H_3^1(X) = -1{,}133, \qquad H_3^2(X) = -2{,}867 \cdot$$

Такие же значения выигрышей в этих двух ситуациях получают участники 1 и 2. Первая из равновесных ситуаций достаточно выгодна для участников конфликта, а вторая – невыгодна, так как близка к “равновесию безнадежности”.

Вероятности $\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi$ в двух последних ситуациях являются иррациональными числами. При изучении биматричных игр двух лиц было очевидным, что решение таких игр связано с проведением конечного числа рациональных математических операций над матрицами, в результате чего вероятности x^* и y^* в других обозначениях всегда оказывались рациональными числами.

Замеченный факт говорит о том, что решение игры трех (и более) лиц в принципе не может быть сведено к решению некоторых биматричных игр. В фундаментальных трудах по теории игр показывается, что какой бы ни была конечная игра N лиц, для нее существует конечная игра трех лиц, из равновесных ситуаций которой можно получить равновесные ситуации исходной игры вполне рациональным образом.

6. КОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

6.1. Основные классы коалиционных игр и формы кооперирования. Характеристические функции

Игра называется коалиционной или кооперативной, если до начала игры или в процессе ее игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях с целью их координирования и могут даже объединять усилия в надежде извлечь из этого выгоду.

Переход конфликтующих сторон к различным формам сотрудничества (кооперирования) создает качественно новые ситуации по сравнению с тем, что было рассмотрено в антагонистических играх.

Можно назвать три уровня взаимодействия, допустимого в кооперативных играх с N участниками:

1) обмен информацией о ходе игры и складывающейся обстановке;

2) совместный выбор стратегий на основе общей договоренности и взаимной информированности;

3) объединение активных средств (ресурсов) с соответствующей координацией предпринимаемых действий.

Каждая ступень кооперирования предполагает передачу каких-то сведений одними участниками игры другим ее участникам.

Характер сведений трудно оговорить заранее вне связи с конкретной задачей, однако, ясно, что они могут касаться и целевых установок конфликтующих сторон, и их готовности пойти на компромисс, и непредвиденных обстоятельств, мешающих какой-либо стороне достичь желаемого результата.

В дальнейшем будем предполагать, что сведения, которыми обмениваются участники конфликта, имеют объективную ценность. Это позволит сосредоточить внимание на более высоких уровнях кооперации и соответствующих подходах к проблеме поиска решений.

В данном разделе рассматриваются арбитражные схемы, то есть кооперативные игры без побочных платежей, и классические кооперативные игры. В арбитражных схемах допустимыми коалициями являются только одноэлементные коалиции (по сути – отдельные участники) и коалиция, состоящая из всего множества участников. В последнем случае игра как арбитражная схема отличается от соглашения тем, что в игре участники обязаны подчиняться вполне определенным правилам поведения, а исход соглашения может быть любым допустимым, в том числе и самым нерациональным с точки зрения здравого смысла, и зависит только от воли участников, от того, как они смогут договориться. В классических кооперативных играх исход зависит только от способа объединения участников в те или иные коалиции. Такими играми представляются модели рынка, схемы голосования, проблемы распределения прибыли и др.

В бескоалиционных играх отклонение одного из участников конфликта от ситуации равновесия не дает ему никакого преимущества и может разве лишь уменьшить его результат. Но при отклонении от этой ситуации нескольких игроков они могут получить больший (иногда существенный) выигрыш. Поэтому в условиях, где возможна кооперация между игроками, принцип равновесия не всегда оправдан. Поясним положительные результаты кооперирования на примере.

Пример 6.1. Задана биматричная игра двух лиц со следующими матрицами выигрышей: $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

В этой игре единственной равновесной ситуацией является ситуация, в которой каждый игрок применяет свою 2-ю чистую стратегию и выигрывает 2 единицы. Если же игроки договорятся о совместных действиях и применяют свои 1-е чистые стратегии, то каждый игрок может выиграть 6 единиц. Но эта ситуация весьма неустойчива, т.к. каждый игрок, в одиночку отклоняясь от нее, сможет увеличить свой выигрыш более чем вдвое.

Таким образом, при возможности кооперирования имеет место противоречие между устойчивостью ситуации и ее выгодностью. Это противоречие может быть разрешено путем расширения уже имеющихся множеств стратегий на основе тех или иных договоренностей. Так, в случае объединения всех игроков в коалицию множество ситуаций в смешанных стратегиях будет являться множеством всех вероятностных распределений на множестве ситуаций в чистых стратегиях, тогда как в бескоалиционных играх множеством ситуаций в смешанных стратегиях было декартово произведение вероятностных распределений, заданных на множестве чистых стратегий игроков.

6.2. Дележи в кооперативных играх. Аксиомы Нэша

Арбитражной схемой называют кортеж Г = (I, U, u*). (6.1)

В отличие от бескоалиционных игр в арбитражных схемах выигрыш участников будем обозначать буквой U. Так, U_i – выигрыш i-го участника, где i I I.

Через U обозначим множество всех возможных векторов выигрышей в игре N лиц при применении ими всех смешанных стратегий, заданных на параллелепипеде ситуаций в чистых стратегиях. Оно представляет собой в рассматриваемых случаях некоторое замкнутое, ограниченное и выпуклое подмножество N-мерного евклидова пространства: $U \; I \; R^N$. Действуя сообща, игроки могут получить в качестве результата любой вектор из допустимого множества U.

Пусть, $U_i^{\wedge}$ – решение антагонистической игры, в которой все игроки из множества $I \setminus \{i\}$ играют против i-го игрока, то есть стараются минимизировать его выигрыш. Вектор длины N $U^{\wedge} = (U_1^N, U_2^N, ..., U_N^{\wedge})$ можно понимать как вектор гарантированных выигрышей игроков в том случае, когда они не достигли никакого соглашения. Точку $U^{\wedge} \in R^N$ в теории игр принято называть точкой "status quo ante" или точкой угрозы.

Представляется совершенно очевидным, что игроки должны руководствоваться некоторыми объективными принципами справедливости. Другими словами, принципы оптимальности в арбитражных схемах формализуют процесс переговоров о справедливом выборе вектора решений. Эти принципы реализованы в аксиомах Нэша для общих арбитражных схем. Этим аксиомам должно удовлетворять правило φ, сопоставляющее каждому замкнутому подмножеству U и точке $U^{\wedge} \in R^N$ точку $u^* \in U$.

Эти аксиомы формулируются следующим образом:

1. *Реализуемость:* $u^* \in U$. (6.2)

2. *Индивидуальная рациональность:* $u^* \geq u^{\wedge}$. (6.3)

3. *Оптимальность по Парето:* не может быть решением такой набор платежей, помимо которого существует какой-либо другой набор платежей, более выгодный хотя бы для одного игрока.

$$(\forall u \in U,\ u \geq u^*)[u = u^*] \tag{6.4}$$

4. *Инвариантность относительно неубывающих линейных преобразований:* решение не зависит от монотонных линейных преобразований платежей, если

$$U^1 = \alpha U + \beta \quad (\text{где } \alpha > 0 \text{ и } u(U, u^{\wedge}) = u^*,$$

то $\varphi(U^1, \alpha u^{\wedge} + \beta) = \alpha u^* + \beta$. (6.5)

5. *Симметричность решения:* величины U_1', U_2', ..., U_n' сохраняются неизменными при любой перестановке участников игры, то есть решение не зависит от того, какие номера присвоены игрокам. Пусть π – произвольная перестановка игроков, для которой $u \in U \Rightarrow \pi u \in U$.

Пусть также $\pi u^{\wedge} = u^{\wedge}, \varphi(U, u^{\wedge}) = u^*$. Тогда $\pi u^* = u^*$.(6.6)

Эта аксиома постулирует равноправие игроков.

6. *Независимость от несущественных альтернатив:* то есть решение не изменится, если исключить из рассмотрения те возможные выборы, которые не использованы в решении. Вывод: участник $\{1\}_j$ ($1 \le j \le N$), присоединяющийся к любой коалиции $\{N'\}I\{N\}$, но не приносящий ей пользы, ничего не выигрывает, т.е. $U_j'=0$ при $U(\{N'\})U\{1\}_j = U(\{N'\})$.

$$(u^* \in U^1 \subset U)\xi(u^* = \varphi(U,u^\wedge)) \Rightarrow u^* = \varphi(U^1,u^\wedge)\cdot \qquad (6.7)$$

Этими правилами (или аксиомами) может руководствоваться исследователь, изучающий конфликтные ситуации и принимающий на себя, тем самым, роль арбитра.

Пусть в множестве U существуют векторы u, каждая i-я координата которых строго больше $u_i^\wedge$. Тогда имеет место следующая теорема, доказательство которой несложно, но достаточно громоздко и поэтому здесь опускается.

Существует единственная функция $\varphi(U,u^\wedge) = u^*$, определенная для арбитражных схем (6.1) и удовлетворяющая аксиомам Нэша (6.2)...(6.7). Эта функция определяется в виде

$$u(U,u^\wedge) = \{u^* \left| \max_{\substack{u \ge u^\wedge \\ u \in U}} g(u,U,u^\wedge) = g(u^*,U,u^\wedge)\right.\}\ , \qquad (6.8)$$

где $g(u,U,u^\wedge) = \prod_{i=1}^{N}(u_i - u_i^\wedge)$. $\qquad$ (6.9)

Распределение выигрышей согласно функции $u(U,u^\wedge)$ оптимально в смысле Парето и поэтому справедливо для всей совокупности участников, но оно имеет следующий недостаток:

Пусть имеется некоторое конечное множество игроков I. любое его подмножество KI I (включая само множество I и пустое множество) можно интерпретировать как некоторую коалицию игроков.

Могут сложиться такие обстоятельства, когда игроки из некоторой коалиции K, вступив в сепаратное соглашение, способны обеспечить себе выигрыши $u_i > u_i$ $(i \in K)$. В этом случае игроки из K не будут согласны с распределением выигрышей согласно вектору U*. Поэтому решение о распределении согласно вектору U* может быть принято третьим лицом (арбитром) или все игроки заранее должны подписать обязательство о соблюдении этого распределения. Отсюда возникает название “арбитражные схемы”.

Метод арбитражных схем эффективен не только в экономических приложениях и менеджменте, но и в чисто технических задачах многокритериальной оптимизации проектов.

В том случае, если конфликт описан в традиционной игровой форме, то есть посредством матриц или параллелепипедов выигрышей, за точку status quo ante может быть выбран либо вектор гарантированных, то есть максиминных результатов каждого участника (сравни с критерием Вальда), либо точка равновесия. Результаты арбитражного решения в том и другом случае будут, вообще говоря, неодинаковыми, но достаточно близкими.

Если же многокритериальная задача поставлена не в традиционной форме, метод арбитражных схем оказывается также легко применим в том смысле, что векторный критерий преобразуется в скалярный посредством свертки (6.9), и далее задача решается методом математического программирования (линейного, нелинейного, параметрического и др.). Для решения многокритериальной задачи все локальные целевые функции сводятся к максимизируемым и принимающим в рабочей области параметров неотрицательные значения. В качестве точки status quo ante выбирается вектор, составленный из минимальных значений каждой локальной целевой функции при любых значениях остальных целевых функций. При составлении данного вектора следует принимать во внимание, что подавляющее большинство экономически осмысленных максимизируемых целевых функций ограничены снизу условиями неотрицательности переменных, реже – функциональными условиями-ограничениями.

6.3. Парето-оптимальные решения кооперативных игр

Проиллюстрируем суть арбитражного решения меджу двумя конфликтующими сторонами (см. рис. 5.1).

В случае кооперативной игры двух лиц предполагается, что два игрока не могут воздействовать друг на друга, пока не придут к некоторому соглашению.

Криволинейный сектор в 1-м орtанте системы $u_1 0 u_2$ отсекает множество U допустимых решений, представляющее выигрыши игроков (рис. 6.1). Обычно предполагают, что множество U является замкнутым, выпуклым и ограниченным сверху.

Вертикальная и горизонтальная касательные (h_1 и h_2 на рис. 6.1) ограничивают точками касания область Парето-оптимальных решений PO или *Парето-оптимальное множество,* то есть множество точек, принадлежащих U, для которых увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша его партнера. Очевидно, множество таких точек образует северо-восточную границу множества U.

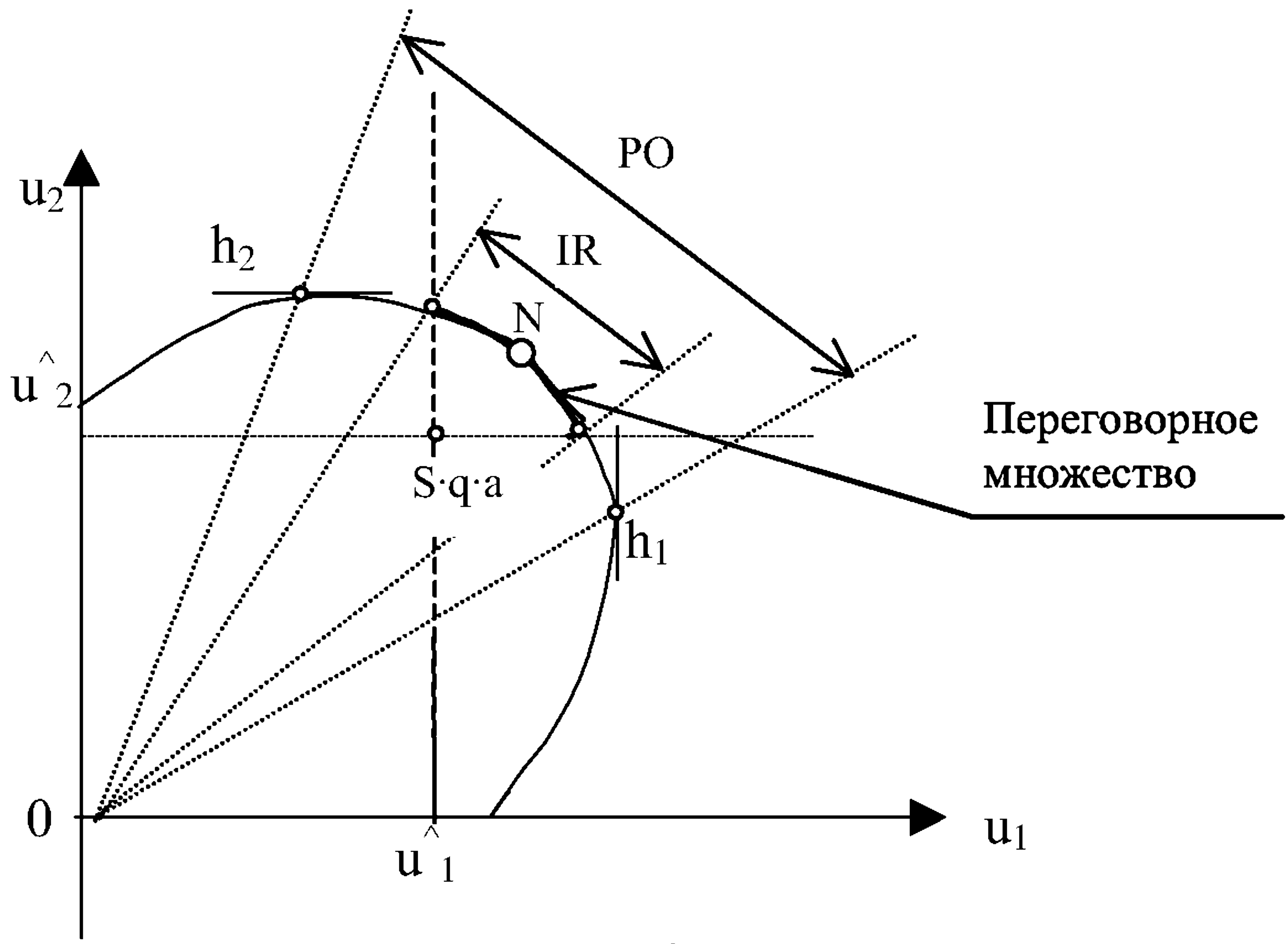


Рис.6.1

Кроме того, заданы два числа $u_1^{\wedge}, u_2^{\wedge}$, определяющие величины выигрышей, которые каждый из игроков может получить, не вступая в коалицию с партнером. Точка с координатами $(u_1^{\wedge}, u_2^{\wedge})$ есть *точка угрозы*.

Пересечение PO с множеством индивидуально рациональных решений IR, которые лежат правее и выше точки status quo ante образует переговорное множество – (здесь IR I PO, поэтому IR ∩ PO= IR – переговорное множество; на рис. 6.1 выделено жирным отрезком дуги). Очевидно, что игрокам нет смысла договариваться относительно решений, не принадлежащих переговорному множеству, либо потому, что положение одного из игроков может быть улучшено при сохранении положения его партнера и можно договариваться о более выгодных решениях, либо потому, что вне этого множества по крайней мере для одного из игроков теряет смысл вступать в коалицию со своим партнером – не худших результатов он может достичь и в одиночку.

На дуге переговорного множества располагается точка арбитражного решения N, в которой достигается максимум произведения превышения выигрышей каждого из игроков над гарантированными выигрышами, которые могут быть получены без вступления в коалицию: $\max(u_1 - u_1^{\wedge})(u_2 - u_2^{\wedge})$. (6.10)

В теории игр доказано, что *если множество возможных платежей S выпукло, замкнуто и ограничено сверху, то существует точка Нэша N, представляющая одно из возможных решений кооперативной игры, от которого нет оснований отказываться ни одному из игроков, и эта точка единственна.*

Пример 6.2. Требуется распределить 10 тонн цемента между 2 строительными организациями по векторному критерию $u = (u_1, u_2) = (x^2/100; 1 - x/10)$; где x I (0; 10), – количество цемента, выделенное 1-й организации. Графики зависимостей $u_1(x)$ и $u_2(x)$ приведены на рис. 6.2.

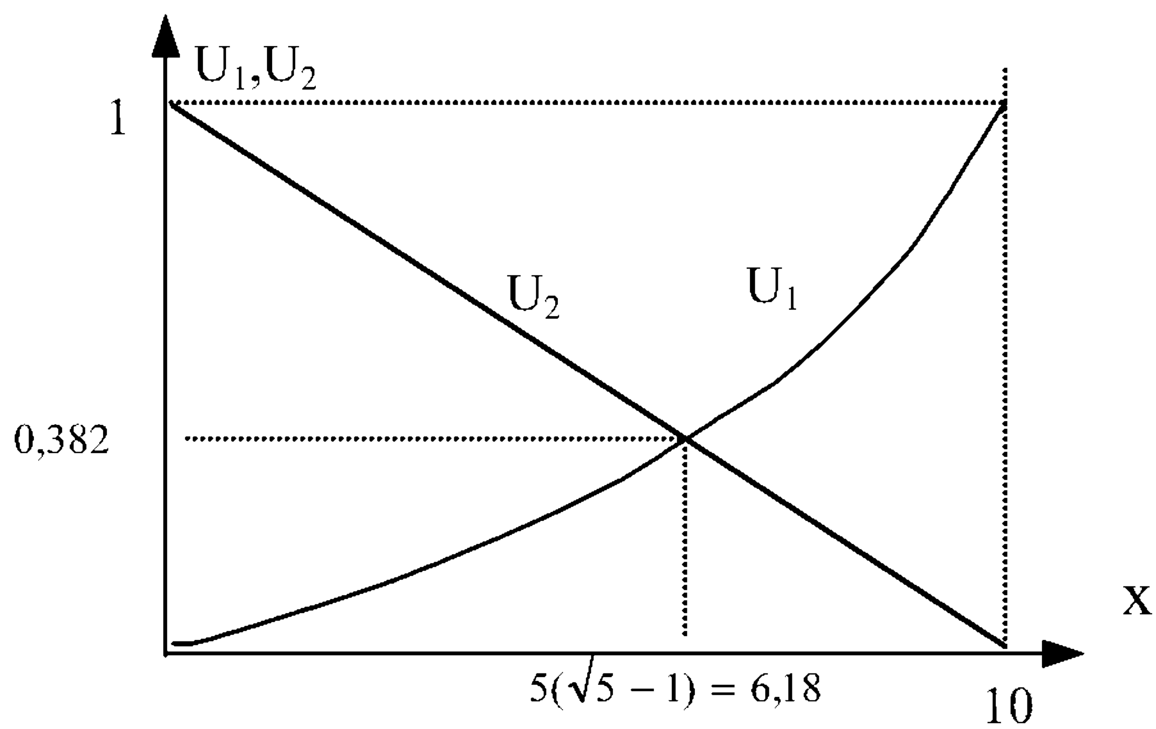


Рис.6.2

Построим арбитражную схему $\Gamma^A = (I, U, u^\wedge)$,

где $I = \{1;2\}$ $u^\wedge = (0;0)$, т.к. из рис. 6.2 видно, что при x=0, $x = 0$ $u_1 = 0$ $u_2 = 0$, а при $x = 10$ $u_1 = 1, u_2 = 0$. Скалярный критерий в соответствии с (5.9) примет вид

$$\prod_{i=1}^{2}(u_1 - \hat{u}_1)(u_2 - \hat{u}_2) = u_1 u_2 \to \max u_1 u_2 = 10^{-3} x^2 (10 - x);$$

$$d(u_1 u_2)/dx = 10^{-3}(20x - 3x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ \ x_2 = 20/3;$$

$$d^2(u_1 u_2)/dx^2 = 10^{-3}(20 - 6x)\ ;\ \text{при}\ x = 0\ d^2(u_1 u_2)/dx^2 > 0$$

и $x_1=0$ доставляет минимум целевой функции $u_1 u_2$; при $x = 20/3$ $d^2(u_1 u_2)/dx^2 < 0$ и $x_2 = 20/3$ доставляет максимум целевой функции $u_1 u_2 : x^* = 20/3$.

Таким образом, арбитражное решение устанавливает, что 1-й организации должно быть выделено 20/3 тонн цемента, а 2-й – 10/3 тонн. График функции $u_1 \cdot u_2$ от переменной x приведен на рис. 6.3.

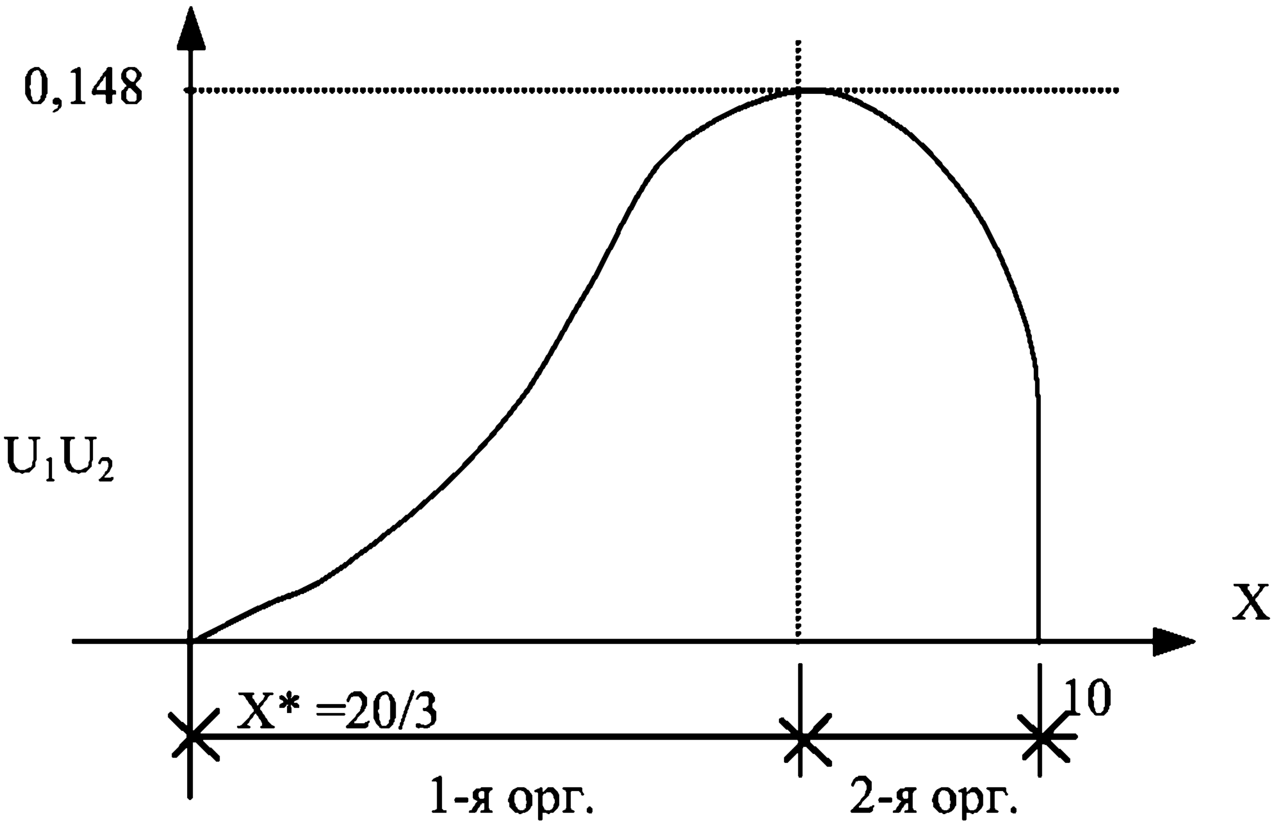


Рис.6.3

6.4. Классические кооперативные игры

Пусть условия неантагонистического конфликта таковы, что участники могут заключать взаимообязывающие соглашения о выборе стратегий, а выигрыши могут передаваться от одного игрока другому (побочные платежи). Шкалы функций полезности всегда могут быть выбраны таким образом, что полезности любых двух игроков передаются друг другу без изменения их численных значений, то есть без дополнительного масштабирования. В этом случае достаточно рассматривать только суммарный выигрыш игроков, составляющих коалицию K, а возможности коалиции можно полностью характеризовать значением некоторой функции υ (K).

Объединение игроков в коалицию превращает их в группового или кооперативного игрока 1, множество стратегий которого есть комбинация всех возможных совместных действий игроков из K, а выигрыш есть сумма выигрышей. В худшем для 1-го игрока (то есть коалиции K) случае игроки из множества I\K также могут объединиться в коллективного игрока 2 и прямо противопоставить свои интересы интересам игрока 1. В результате этого, коалиция может гарантировать себе по максиминному принципу некоторый выигрыш υ(K), равный цене возникающей антагонистической игры, то есть υ(K) – это матожидание выигрыша коалиции K, действующей против коалиции I\K.

Таким образом, кооперативной игрой N лиц называется кортеж длины 2 $\Gamma^к = (I, \upsilon)$, где $I = \{1,...,N\}$, а υ – функция, определенная на всех подмножествах KI I, является характеристической функцией кооперативной игры и область ее определения – это 2^N подмножеств множества I (заметим, что $\upsilon(\varnothing) = 0$).

Если для всех непересекающихся подмножеств KI I, K'I I и $K \bigcap K' = \varnothing$ выполняется неравенство

$$\upsilon(K) + \upsilon(K') \geq \upsilon(K \bigcup K'), \qquad (6.11)$$

то характеристическая функция υ, называется *супераддитивной*. Супераддитивность содержательно выражает целесообразность объединения игроков в коалиции с точки зрения увеличения суммарного выигрыша (синергический эффект). В дальнейшем будем рассматривать только супераддитивные игры.

Неравенство (6.11) обобщается на произвольное число коалиций:

$$\sum_{j=1}^{r} \tilde{o}(K_j) \leq \tilde{o}\Big(\bigcup_{j=1}^{r} K_j\Big), \qquad (6.12)$$

где K_j – непересекающиеся коалиции.

Отсюда можно получить для одноэлементных коалиций:

$$\sum_{i \in I} \tilde{o}(\{i\}) \leq \tilde{o}(I). \qquad (6.13)$$

В дальнейшем $\upsilon(\{i\})$ будет обозначаться $\upsilon(i)$.

Игра $Г^к=(I,\upsilon)$ называется существенной, если неравенство (6.13) выполняется как строгое, в противном случае – несущественной.

Кооперативные игры так же, как и бескоалиционные, могут обладать свойствами эквивалентности и изоморфности. Игра (I, υ') однородно аффинно-эквивалентна игре (I, υ), если существует число $k > 0$, и N таких произвольных действительных чисел C_i, что для любой коалиции $K \subset I$ выполняется равенство

$$\tilde{o}'(K) = k \cdot \tilde{o}(K) + \sum_{i \in K} C_i \,. \qquad (6.14)$$

Здесь обязательная однородность, то есть, единственное число k, а не набор из N чисел k_i, обусловлена тем, что полезности всех игроков исчисляются в единой шкале. Эквивалентность обозначают (I, υ)~(I, υ').

Игры (I, υ) и (I, υ') изоморфны, если существует такое взаимно-однозначное отображение π: $I \to I'$, что для любой коалиции из I выполняется равенство

$$\upsilon'(\pi K) = \upsilon(K)\,. \qquad (6.15)$$

Обозначим x_i сумму, которую получит i-й участник при распределении полезности, находящейся в распоряжении множества I; тогда дележом игры $Г^k$ называют вектор $x = (x_1, x_2,..., x_N)$, компоненты которого удовлетворяют следующим условиям для всех $i \in I$:

$$x_i \geq \upsilon(i)\,, \tag{6.16}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = \tilde{\upsilon}(I)\,. \tag{6.17}$$

Условия (6.16) и (6.17) представляют собой условия индивидуальной и коллективной рациональности соответственно. Первое из них вполне очевидно. Во втором условии знак “меньше” говорил бы о том, что не вся полезность распределена, а знак “больше” – о распределении несуществующей полезности, поэтому применен знак равенства.

Исходом классической кооперативной игры является дележ, который возникает в результате некоторых соглашений между участниками. В связи с этим в кооперативных играх по предпочтительности сравниваются не ситуации, а дележи, исходя из различных представлений об оптимальности. Эти принципы для данного класса игр оказываются достаточно разнообразными.

Между понятиями дележа и характеристической функции существует связь, основой которой служит соотношение между полезностями, полученными коалицией на основании того или иного дележа.

Для дележа x существует понятие эксцесса:

$$e(K, x) = \tilde{\upsilon}(K) - x(K)\cdot \tag{6.18}$$

Это разность между тем количеством полезности, на которое коалиция K может уверенно рассчитывать в условиях характеристической функции, и количеством, реализованным в результате некоторого дележа x.

Поэтому положительное значение эксцесса $e(K,x) > 0$ можно интерпретировать как степень неудовлетворенности игроков коалиции K. Дележи с неотрицательными эксцессами называют осуществимыми или реализуемыми, а также эффективными. Эффективность заключается в том, что игроки из коалиции K могут стремиться изменить дележ в лучшую для себя сторону. Подобным же образом можно понимать неэффективность дележа с неположительным эксцессом. Здесь дело состоит в том, что коалиция K, оказавшись в условиях неэффективного дележа, не будет иметь реальных возможностей изменить его в лучшую для себя сторону (такой дележ и так относят к нереализуемым) и не будет стремиться к изменению. Если дележ не эффективен ни для одной коалиции KI (абсолютно неэффективен), то он оказывается весьма устойчивым и, таким образом, в некотором смысле, оптимальным.

На множестве дележей можно задать отношение доминирования. Дележ x^1 доминирует дележ x^2 по коалиции K, если выполнены два условия:

а) дележ x^1 является эффективным, то есть $x(K) \leq \upsilon(K)$, б) дележ x^1 предпочтительнее дележа x^2 для всех членов коалиции K, то есть $x_i^1 > x_i^2$ для всех $i \in K$.

Формально это запишется следующим образом:

$$x^1 D_k x^2 \Leftrightarrow (\forall i \in K \subset I)[(x_i^1 > x_i^2) \& (x'(K) \le \tilde{o}(K))] . \quad (6.19)$$

Далее говорят, что дележ x^1доминирует дележ x^2, если существует хотя бы одна коалиция, для которой $x^1 D_k x^2$:

$$x^1 D_k x^2 \Leftarrow (\exists K_0 \subset I)[x^1 D_{k0} x^2] . \quad (6.20)$$

Отношение D антирефлексивно, но может оказаться симметричным, то есть $(x^1 D x^2) \& (x^2 D x^1)$. Это оказывается возможным, так как x^1 может доминировать x^2 по одной коалиции, а x^2 доминировать x^1 – по другой.

Понятие доминирования будет использовано при решении кооперативных игр.

6.5. Нормализация кооперативных игр

Каждая существенная кооперативная игра аффинно-эквивалентна некоторой игре в 0-1-редуцированной форме. Игра $\Gamma^k = (I, \upsilon)$ называется игрой в 0-1-редуцированной форме (или 0-1-нормализованной), если выполнены условия $\upsilon(i) = 0, \upsilon(I) = 1, i \in I$. (6.21)

Пусть 0-1-нормализованная игра имеет вид

$$\tilde{o}'(K) = k \cdot \tilde{o}(K) + \sum_{i \in K} C_i .$$

Для приведения игры (I, ϑ) к такой форме достаточно вычислить параметры k и C_i.

Это можно сделать, используя соотношения:

$$k = (\tilde{o}(I) - \sum_{i \in I} \tilde{o}(i))^{-1} > 0 , \quad (6.22)$$

$$Ci = -\upsilon(i) . \quad (6.23)$$

Нетрудно проверить, что в результате этих преобразований $\upsilon(i)=0$ и $\tilde{o}'(I) = \tilde{o}(I) \cdot k - k \cdot \sum_{i \in I} \tilde{o}(i) = 1$. (6.24)

Условие 0-1-нормализации может быть записано в такой форме:

$$\tilde{o}'(K) = \frac{\tilde{o}(K) - \sum_{i \in I} \tilde{o}(i}{\tilde{o}(I) - \sum_{i \in I} \tilde{o}(i)} . \quad (6.25)$$

После проведения 0-1-редукции игры дележом будет считаться любой вектор, для которого выполнены условия:

$$x_i \ge 0, \quad \sum_{i \in I} x_i = 1, \quad i \in I . \quad (6.26)$$

Таким образом, множество дележей в 0-1-редуцированной игре есть множество точек (N-1)-мерного фундаментального симплекса, заданных своими барицентрическими координатами.

Нормализация кооперативных игр используется для упрощения их изучения, упрощения ряда вторичных формул.

6.6. Решение классических кооперативных игр

Кроме рассмотренного подхода, существует ряд способов (подходов) определения или выбора справедливых дележей в кооперативных играх. Например, *С-решения* с применением понятия ядра игры, *решения по Нейману – Моргенштерну (или Н – М-решения)* с применением идеи доминирования дележей, но на уровне множеств и др. Эти подходы к определению оптимального (предпочтительного) выбора дележей по-разному трактуют интересы конфликтующих сторон, но всегда указывают разумную основу для соглашений.

Рассмотрим некоторую кооперативную игру $\Gamma^k=(I, \upsilon)$.

Если эта игра несущественная, она своим исходом имеет единственный дележ x $=(\upsilon(1),...,(\upsilon(2),...,\upsilon(N))$, а во всякой существенной игре (при $N \geq 2$) множество возможных дележей $X(\upsilon)$ в общем случае бесконечно.

Как будут относиться к этим дележам коалиции из I?

Пусть дележ x^1 доминирует дележ x^2, то есть хотя бы одна из коалиций предпочитает дележ x^1. Тогда всякая попытка предложить множеству игроков дележ x^2 встретит возражение со стороны данной коалиции. Предложение обществу любого недоминируемого дележа не должно встретить возражений никакой коалиции, то есть недоминируемый дележ будет обладать известной устойчивостью.

Другими словами, если игроки игры (I, υ) придут к выбору такого дележа x^*, который не доминируется никакими другими, то ни одна из коалиций KII не будет иметь резона отказаться от такого дележа x^*.

Множество недоминируемых дележей принято называть С-ядром игры (I, υ). Его обозначают $C(\upsilon)$:$C(\upsilon)$I $X(\upsilon)$. Для того, чтобы некоторый дележ принадлежал С-ядру, необходима и достаточна его абсолютная неэффективность:

$$x(K) \geq \upsilon\,(K),\ KI\ I. \qquad (6.27)$$

В этом условии через $x(K)$ обозначена сумма

$$x(K)=\sum_{i \in K} x_i\,. \qquad (6.28)$$

Действительно, пусть существуют такие дележи x^1 и x^2, что $x^1 D_k x^2$; тогда должно выполняться двойное неравенство

$$x^2(K) < x^1(K) \le \upsilon\,(K) \qquad (6.29)$$

(второе из них – условие эффективности доминирующего дележа). Но тогда доминируемый дележ $x^2(K) < \upsilon(K)$, что противоречит условию (6.27) – достаточность утверждения доказана.

Далее, для любого дележа xIC(υ) существует коалиция K, для которой $x(K) < \upsilon\,(K)$.

Положим (с учетом 0-1-редукции)

$$x_i^1 = x_i^2 + \frac{\tilde{o}\,(K) - x^2(K)}{\text{card } K} \qquad \text{при iIK,}$$

$$x_i^1 = \frac{1 - \tilde{o}(K)}{N - \text{card } K} \qquad \text{при iIK ;}$$

тогда $x^1(I)=1$, $x_i^1 \ge 0$ и $x^1 D_k x^2$ – этим доказывается необходимость.

Для некоторой игры С-ядро может оказаться пустым, например, для существенной игры со свойством дополнительности:

$$\upsilon\,(K) + \upsilon\,(I \backslash K) = \upsilon\,(I).$$

Оно может содержать лишь один элемент (несущественная игра), либо содержать вообще все дележи (игра 2 лиц, в которой какое-либо доминирование исключается). В остальных общих случаях C(υ) содержит бесконечно много дележей.

Условие (6.27) о составлении С-ядра абсолютно неэффективными дележами показывает, что компоненты таких дележей должны удовлетворять некоторой конечной системе неравенств. Это означает, что С-ядро в произвольной кооперативной игре является выпуклым замкнутым многогранником (возможно пустым), образованным пересечением гиперплоскостей.

Пример 6.3. Рассмотрим пример возможных С-ядер для кооперативной игры 3 лиц. Необходимое и достаточное условие абсолютной неэффективности для 0-1-редуцированной формы игры запишется:

$$x(1;2) = x_1 + x_2 \ge \upsilon(1;2),$$
$$x(1;3) = x_1 + x_3 \ge \upsilon(1;3),$$
$$x(2;3) = x_2 + x_3 \ge \upsilon(2;3).$$

Здесь не рассматриваются пустая и одноэлементная коалиции и все множество игроков I.

Множество дележей в 0-1-игре есть множество точек фундаментального симплекса $x_1+x_2+x_3=1$; $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ (см. рис.6.4).

Линии I, II, III – это линии пересечения плоскости симплекса с плоскостями $x_i = \upsilon\,(I \backslash \{i\})$, $i = \overline{1,3}$.

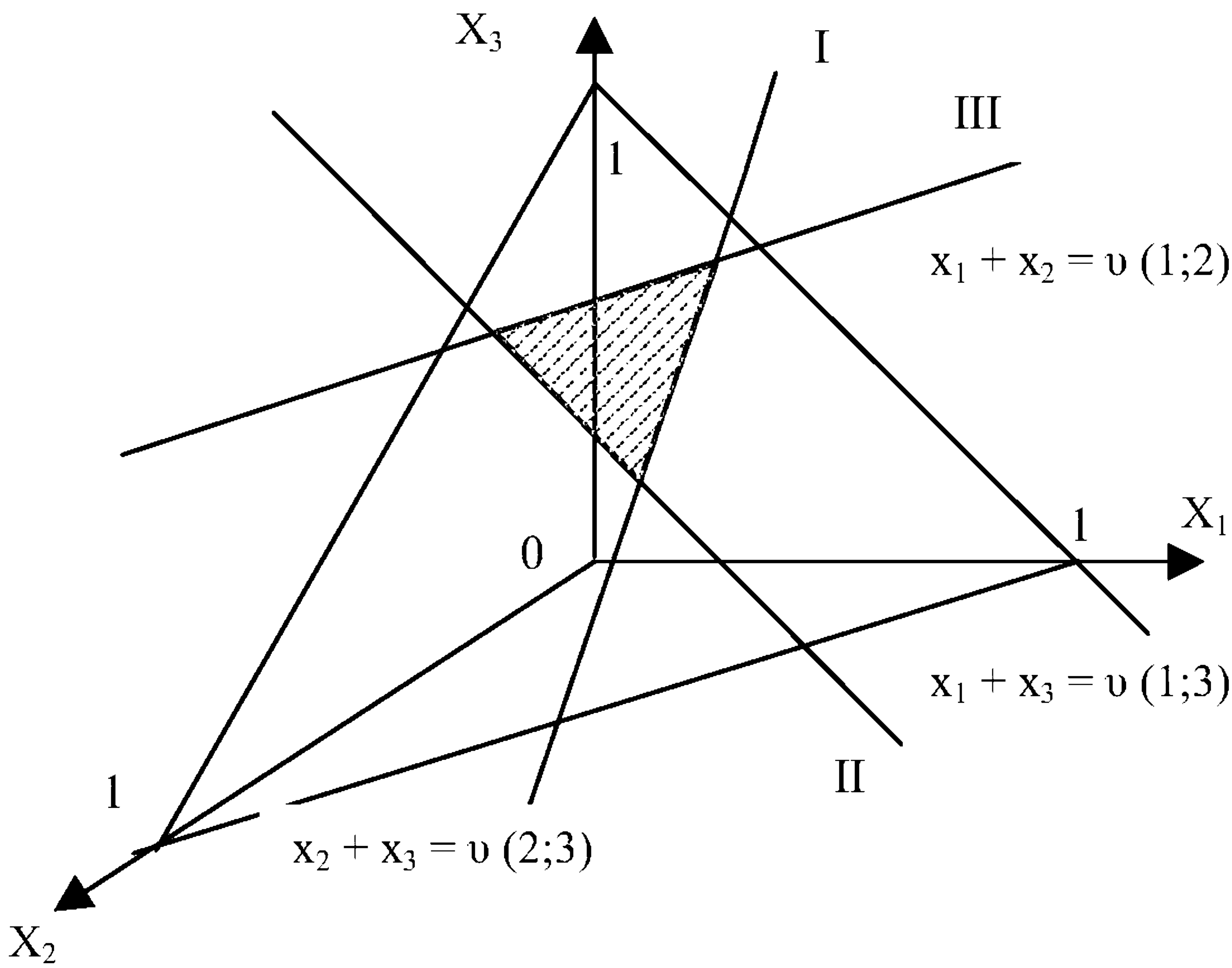


Рис.6.4

Образованное этими пересечениями С-ядро показано на рис.6.4 заштрихованным треугольником, то есть С-ядро представляет собой замкнутый выпуклый многогранник. Этот многогранник может быть пустым или иметь от одной до шести вершин в случае игры 3 лиц.

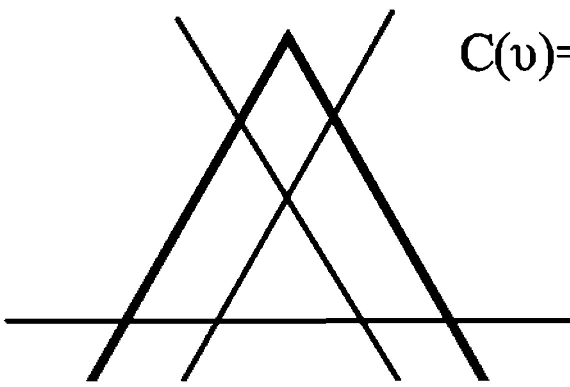
Проиллюстрируем это с помощью рис.6.5.

Множество доминируемых дележей dom X(υ) незамкнуто, т.к. граница многогранника С- ядра входит в ядро dom X(υ)=X(υ)\C(υ).

Идеальным решением представлялось бы решение, которое бы принадлежало С-ядру и доминировало все остальные дележи. Но такое единственное решение возможно только для несущественных игр, для которых x = (υ (1), υ (2), ..., υ (N)).

Нейман и Моргенштерн предложили в качестве решения игры подмножество дележей, обладающее свойствами внешней и внутренней устойчивости. Элементы этого подмножества доминируют все дележи, лежащие вне него, и не доминируют друг друга. Таким образом, Н – М-решение игры может быть определено так:

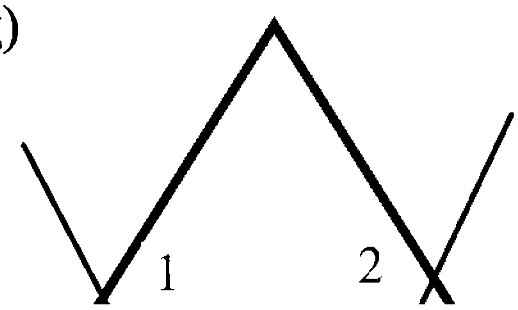
а)



$C(\upsilon)=\varnothing$

111

д)



Подмножество дележей NMIX(υ) кооперативной игры $\Gamma_к = (I, \upsilon)$ – является Н – М-решением, если

$$x^m D x^n \Leftrightarrow (x^m \notin NM) \vee (x^n \notin NM), \qquad (6.30)$$

$$(\forall x^m \notin NM)(\exists x^p \in NM)[x^p D x^m]$$

Если в кооперативной игре существует С-ядро и Н – М-решение, то C(υ)INM. Если для каждой коалиции K в 0-1-редуцированной игре (I, υ) выполняется неравенство

$$\upsilon\,(K) \le (N - \text{card}\,K+1)^{-1}, \qquad (6.31)$$

то С-ядро такой игры непусто и является ее Н – М-решением.

Известны примеры кооперативных игр, которые не имеют Н – М-решений. В настоящее время неизвестны какие-либо критерии, позволяющие установить наличие в игре Н – М-решений. Поэтому заложенный в Н – М-решении принцип оптимальности не является универсально реализуемым.

Рассмотренные выше решения кооперативной игры (С-ядро, множество NM) были тем или иным образом связаны с устойчивостью поведения игроков. Кроме принципов оптимальности, реализованных в данных решениях, которые можно назвать естественными, в теории игр конструируются иные принципы оптимальности путем задания их желаемых свойств. Такой подход является аксиоматическим. В 1953 году Шепли (Shapley) сформулировал принцип справедливого дележа, который воплощен в 4 аксиомах. Эти аксиомы относятся к вектору $\Phi(\upsilon) = (\Phi_1(\upsilon),\Phi_2(\upsilon),...,\Phi_N(\upsilon))$, поставленному в соответствие игре (I, υ), компоненты которого есть полезности, получаемые участниками в результате "справедливого" соглашения или решения 3-го лица (арбитра) – сравним с арбитражными схемами.

1. Эффективность:

$$(\forall K \subset I)[\tilde{o}(K \cup \{i\}) = \tilde{o}(K) \Rightarrow \Phi_i(\upsilon)=0]. \qquad (6.32)$$

2. Индивидуальная и групповая рациональность:

$$\Phi_i(\upsilon) \geq \upsilon\,(i)\,,\ iII\,; \qquad (6.33)$$

$$\sum_{i\in I} \Phi_i(\upsilon)= \upsilon\,(I)\,. \qquad (6.34)$$

3. Симметрия: для любого автоморфизма π:

$$\Phi_i(\upsilon) \geq \Phi_{\pi i}(\upsilon). \qquad (6.35)$$

(Напомним, что автоморфизм кооперативной игры есть ее изоморфизм на себя: $\upsilon(K) = \upsilon(\pi K)$.

4. Агрегация: если (I, υ'), (I, υ") – две игры с множеством игроков I и есть третья игра $\upsilon\,(K) = \upsilon'(K)+ \upsilon''(K)$ для любой KI I,

то $$\Phi_i(\upsilon) = \Phi_i(\upsilon') + \Phi_i(\upsilon'')\,,\ iII. \qquad (6.36)$$

Система из перечисленных аксиом полна и непротиворечива.

Пусть Ф – функция, которая ставит в соответствие всякой игре (I, υ) вектор Ф(υ) длины N=card I, удовлетворяющий аксиомам 1...4. Тогда $\Phi_i(\upsilon)$ называется *вектором Шепли.*

Доказывается, что такая функция Ф существует и единственна. Компоненты вектора Ф(υ) определяются выражением

$$\Phi_i(\upsilon) = \sum_{i\in K\subset I} \frac{(\mathrm{card}K-1)!\cdot(N-\mathrm{card}K)!}{N!} \cdot [\tilde{o}(K) - \tilde{o}(K \setminus \{i\})]\,. \qquad (6.37)$$

При высокой производительности современных вычислительных средств компоненты вектора Шепли легко вычисляются даже для больших I.

Многие методы решения кооперативных игр (I, υ) предполагают отыскание подмножеств оптимальных в некотором смысле дележей, так называемых ядер. Это С-ядро, Н – М-решение. В отличие от данных решений вектор Шепли единственен для каждой игры. С одной стороны это обстоятельство сужает круг приемлемых решений, с другой – избавляет от необходимости выбора “самого оптимального” решения из ядра. Он не обладает вынужденной устойчивостью (как, например, С-ядро), когда коалиции не переступают грани ядра лишь потому, что они от этого ничего не выигрывают. В этом отношении вектор Шепли носит нормативный характер, подобно арбитражной схеме.

Д.Шмайдлер (Schmeidler) в 1969 году определил понятие n-ядра, которое предполагает такое распределение полезностей между участниками игры (I, υ), при котором x(K), в некотором смысле, мало отличается от υ(K) для любой коалиции KI I. Его подход связан с составлением множества векторов эксцессов и их лексикографическим упорядочением. Каждому дележу ставится в соответствие (2^N-1)-мерный вектор эксцессов:

$$e(x) = (e(K_1, x), e(K_2, x), ..., e(K_m, x)) =$$
$$= (e_1(x), e_2(x), ..., e_m(x)),\ m = 2^N-1\ . \qquad (6.38)$$

Компоненты данного вектора упорядочены по убыванию (нумерация коалиций здесь приведена произвольно), то есть

$$e_1(x) \geq e_2(x) \geq ... \geq e_m(x). \qquad (6.39)$$

На множестве дележей X(ϑ) вводится следующее отношение предпочтения А. Пусть k-номер первой из координат вектора $e(x^1)$, которая отличается от соответствующей координаты вектора $e(x^2)$. Это означает, что

$$e_1(x^1) = e_1(x^2), ..., e_{k-1}(x^1) = e_{k-1}(x^2),\ e_k(x^1) \neq e_k(x^2).$$

Тогда $\qquad x^1 A\ x^2$, если $e_k(x^1) < e_k(x^2)$. (6.40)

Максимальный элемент относительно предпочтения А называется n-ядром игры. Для каждой кооперативной игры (I,υ) существует единственное n-ядро (обозначается N(υ)). Существование такого решения вполне очевидно.

Из определения n-ядра следует, что его можно найти, решая последовательно задачи линейного программирования (ЛП).

На 1-м шаге отыскивается min параметра y_1 при условиях:

$$y_1 \geq \upsilon(K) - x(K),\ KI\ I;$$
$$\sum_{i\in I} x_i = \tilde{o}(I), \quad x \geq \tilde{o}(i), \ i = \overline{1,N} \qquad (6.41)$$

Если {$K'_1, K'_2, ... K_\ell$} есть множество коалиций, для которых первые из неравенств (6.40) являются равенствами при всех решениях задачи ЛП, а значение минимума равно y_1^*, то на 2-м шаге решается задача минимизации y_2 при условиях:

$$y_2 \geq \upsilon(K) - x(K),\ K \neq K'_1,...,K'_\ell,$$

$$\tilde{o}(K') - x(K'_j) = y_1^*,\ i = \overline{1,\ell}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = \tilde{o}(I), \quad x_i \geq \tilde{o}(i), \quad i = \overline{1,N} \qquad (6.42)$$

и так далее, на r-м шаге решается задача минимизации y_r при условиях:

$$y_r \geq \upsilon(K)\text{-}x(K),$$

$$\upsilon(K_j^t) - x(K_j^t) = y_t^*,\ \ t = \overline{1, r-1},$$

$$\sum_{I \in I} x_i = \tilde{o}(I), \quad x_i > \tilde{o}(i), x = \overline{1,N}, \qquad (6.43)$$

где K_i^t – коалиции, на которых достигается min при всех решениях задачи ЛП на шаге t, а y_t^* – значение минимума.

Через конечное число шагов получается единственное решение, равное n-ядру.

Пример 6.4. Рассматривается игра 3 лиц с характеристической функцией

$\upsilon(1) = a \qquad \upsilon(1,2) = d\ \upsilon(1;2;3)=h$

$\upsilon(2) = b\ \upsilon(2,3) = f$

$\upsilon(3) = c\ \upsilon(3,1) = g$

1-й шаг. Решается задача 1 ЛП:

$y_1 \to \min, x_1, x_2, x_3 = var$

$x_1 + x_2 + x_3 = h$

$x_1 \geq a, x_2 \geq b, x_3 \geq c$

$y_1 \geq d\text{-} (x_1 + x_2),$

$y_1 \geq f\text{-} (x_2 + x_3),$

$y_1 \geq g\text{-} (x_3 + x_1).$

Пусть в результате решения задачи 1 ЛП $y_1^* = y_{1\min}$,

$y_1^* = d - (x_1 + x_2)$, тогда:

2-й шаг. Решается задача 2 ЛП:

$y_2 \to \min, x_3 = var$

$x_1 + x_2 + x_3 = h$

$x_1 \geq a, x_2 \geq b, x_3 \geq c$

$y_1^* \geq d\text{-} (x_1 + x_2),$

$y_2 \geq f\text{-} (x_2 + x_3),$

$y_2 \geq g\text{-} (x_3 + x_1).$

Пусть в результате решения задачи 2 ЛП

$y_2^* = y_{2\min}$,

$y_2^* = g\text{-} (x_3 + x_1)$, тогда

3-й шаг. Решается задача 3 ЛП:

$y_3 \to \min, x_2 = var$

$$x_1 + x_2 + x_3 = h$$
$$x_1 \geq a,\ x_2 \geq b,\ x_3 \geq c$$
$$y_1^* = d - (x_1 + x_2),$$
$$y_2^* \geq g - (x_3 + x_1),$$
$$y_3 \geq f - (x_2 + x_3)$$

Пусть в результате решения задачи 3 ЛП

$$y_3^* = y_{3\min},\ \text{тогда}$$
$$N(\tilde{o}) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*).$$

6.7. Сравнение решений кооперативных игр

Если существует возможность кооперирования участников неантагонистического конфликта, то теоретико-игровые концепции оптимальности либо связываются с устойчивостью поведения игроков, либо носят нормативный характер.

Первый случай предусматривает такие решения игры, как С-ядро и Н – М-решение. Эти решения в общем случае множественные, поэтому можно говорить о неполном совершенстве реализованного в них принципа оптимальности – данный принцип не в состоянии указать систему норм распределения выигрыша.

Усматривается также тот факт, что рассматриваемые решения, обладая известной устойчивостью, в недостаточной степени отражают черты справедливости. Тем не менее, в ряде экономических и социальных проблем поиск разрешения конфликтных ситуаций охотно ведут именно в этом направлении, направлении обеспечения стабильности. Это объясняется тем, что указанные проблемы зачастую вполне допускают множественные решения, а их природа не всегда позволяет четко установить сравнение решений по предпочтительности.

Между С-ядром и Н – М-решением имеется простая связь: если в игре существуют С-ядро и Н – М-решение, то $C(\tilde{o}) \subset NM$. Если же для характеристической функции игры в 0-1-редуцированной форме на всех коалициях выполняются неравенства $\tilde{o}((K) \leq (N - \mathrm{card}K + 1)^{-1}$, то $C(\upsilon) \neq \varnothing$ и $C(\upsilon) = NM$.

Если природа конфликта допускает побочные платежи (трансферабельная полезность), и множественное решение, устойчивое “целиком”, по какой-либо причине неприемлемо, на выручку приходят такие принципы оптимальности, как вектор Шепли и n-ядро, которые дают решение, состоящее из одного дележа.

Вектор Шепли нормативно распределяет выигрыш между участниками конфликта в зависимости от значимости каждого в данной игре. Эта значимость определяется, исходя из оценки дополнительного прироста полезности, получаемого коалициями при вхождении в них данного игрока. Построение вектора Шепли базируется на комбинаторных операциях над характеристическими функциями.

Вектор Шепли может как входить, так и не входить в С-ядро, причем вероятность невхождения тем выше, чем сильнее выражен "синергический эффект" от кооперации игроков. Если выполняется условие Ф(υ)IC(υ), то единственный исход игры является не только справедливым, но и устойчивым и поэтому может считаться идеальным.

В отличие от вектора Шепли n-ядро Шмайдлера всегда содержится в С-ядре, если последнее непусто. Поэтому n-ядро целесообразно использовать в качестве решения кооперативной игры, если Ф(υ)I C(υ).

Если $C(\upsilon) = \varnothing$, то n-ядро распределяет выигрыш между игроками более справедливо, нежели вектор Шепли.

Для кооперативных игр без побочных платежей большое практическое значение имеют арбитражные схемы, которые позволяют решать задачи многокритериальной оптимизации, используя скалярную свертку векторной целевой функции.

6.8. Кооперативная игра 3 лиц в 0-1-редуцированной форме

Для такой игры компоненты вектора Шепли легко вычисляются по формулам:

$$\Phi_1(\upsilon) = (2 - 2C_1 + C_2 + C_3) / 6, \qquad (6.44)$$

$$\Phi_2(\upsilon) = (2 - 2C_2 + C_3 + C_1) / 6, \qquad (6.45)$$

$$\Phi_3(\upsilon) = (2 - 2C_3 + C_1 + C_2) / 6, \qquad (6.46)$$

где $C_1 = \upsilon(2;3)$, $C_2 = \upsilon(3;1)$, $C_3 = \upsilon(1;2)$.

Рассмотрим пример такой игры.

Пример 6.5. Продавец S выставляет на рынок автомобиль (неделимый товар) и оценивает его в 120 тыс. рублей. На рынке есть 2 конкурирующих покупателя D1 и D2. Оба весьма заинтересованы в покупке данного автомобиля и D1 может предложить 130 тыс. рублей, а D2 – 140 тыс. рублей.

Рассмотрим значения характеристической функции игры для всех возможных $2^3 = 8$ коалиций.

$$\upsilon(\varnothing) = 0 \; \upsilon(S) = \upsilon(D1) = \upsilon(D2) = \upsilon(D1,D2) = 0$$

$$\upsilon\,(S,D1) = 130 - 120 = 10 \text{ (тыс. р.)}.$$

$$\upsilon(S,D2) = \upsilon(S,D1,D2) = 140\text{-}120 = 20 \text{ (тыс. р.)}.$$

Здесь интерес представляют коалиции, содержащие не менее 2 участников, причем один из них – обязательно продавец, иначе сделка в принципе не может состояться. Примем продавца за участника 1, первого покупателя – за участника 2 и второго покупателя – за участника 3. Проведем 0-1-редукцию игры и вычислим параметры C_1, C_2, C_3, необходимые для подстановки в формулы (6.37)...(6.39).

$$C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_3 = 1/2$$
$$\Phi_1(\upsilon) = (2 - 2\cdot 0 + 1 + {}^1/_2)\,/\,6 = {}^7/_{12},$$
$$\Phi_2(\upsilon) = (2 - 2\cdot 1 + {}^1/_2 + 0)\,/\,6 = {}^1/_{12},$$
$$\Phi_3(\upsilon) = (2 - 2({}^1/_2) + 0 + 1)\,/\,6 = {}^4/_{12}.$$

Монопольное положение продавца делает для него "справедливым" получение значения компоненты вектора Шепли более чем ${}^1/_3$ (всего участников 3); превышение $\Phi_3(\upsilon)$ над $\Phi_2(\upsilon)$ также выглядит справедливым, поскольку 2-й покупатель на рынке более конкурентоспособен.

Игры, в которых вектор Шепли принадлежит С-ядру, вызывают естественный интерес – такой дележ одновременно справедлив и устойчив. Условие $\Phi(\upsilon) \in C(\upsilon)$ для игры 3-х лиц решается просто: для того, чтобы вектор Шепли входил в С-ядро необходимо и достаточно соблюдение неравенств:

$$4C_1 + C_2 + C_3 \le 4,$$
$$4C_2 + C_3 + C_1 \le 4,$$
$$4C_3 + C_1 + C_2 \le 4.$$

Это вытекает из соображений:

$$\Phi(\upsilon) \in C(\upsilon) \Rightarrow x_i + x_j \ge Ck \Rightarrow \Phi_i(\upsilon) + \Phi_j(\upsilon) \ge Ck,$$

далее следует воспользоваться формулами (6.44) – (6.46).

6.9 Приложения коалиционных игр

Пример 6.6. Две фирмы I и II выпускают однородную продукцию и для улучшения сбыта могут прибегнуть к телевизионной рекламе. Если фирмы не смогут рекламировать свой товар, то вектор полезностей в условных единицах будет иметь значение $u = (u_1, u_2) = (3;2)$. Если одна из них будет рекламировать товар, а другая не будет, то полезность рекламирующей фирмы возрастает, а полезность нерекламирующей фирмы снизится за счет того, что произойдет смещение центра покупательской массы в сторону рекламируемого товара и, соответственно, снизится спрос на товар нерекламируемый. Если же фирмы станут рекламировать свою однородную продукцию как лучшую одновременно, то есть в один день, то покупатели усмотрят в этом некоторое противоречие и снизят долю приобретения товаров этих фирм (уменьшив их полезности до вектора u=(1;0), изыскивая товар-субститут среди продукции других фирм.

Матрицы выигрышей A и B фирм I и II имеют вид

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix},$$

где 1-я чистая стратегия каждой фирмы – рекламировать товар, а 2-я – не рекламировать.

Найдем равновесное решение этой биматричной игры, используя формулы (5.28), (5.29):

$$y'=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}=\frac{3-5}{1-5-2+3}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3},\quad \eta^*=\eta^{\wedge};\cdot$$

Для данной игры $0<x', y'<1$, поэтому устойчивое решение примет вид $x_1^*=x_2^*=2/3$.

Поскольку $x_1^*+x_2^*=4/3>1$, то для фирм I и II неизбежно возникает перекрытие по рекламному времени (феномен "антирекламы"), то есть решение $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ хотя и устойчиво, но не в полной мере выгодно для фирм. Очевидно, существует решение, которое будет выгоднее для обеих фирм, но которое может быть достигнуто при известном соглашении между партнерами (в биматричной игре они действуют независимо).

Воспользуемся методом арбитражных схем; в качестве точки угрозы (status guo ante) выберем вектор гарантированных максиминных результатов $u^{\wedge}=(2;1)$. Отыскание арбитражного решения есть отыскание вектора смешанной совместной стратегии

$Z=(\gamma_{11},\gamma_{12},\ldots\gamma_{mn})=(\gamma_{11},\gamma_{12},\gamma_{21},\gamma_{22})$, так как чистых стратегий обеих фирм m=n=2.

Здесь γ_{ij} – вероятность выбора игроками I и II (i,j)-й совместной стратегии, причем $\sum\limits_{i,j}\gamma_{ij}=1$.

Тогда математические ожидания выигрышей фирмы I и фирмы II определяются как:

$$u_1=\sum_{i,j}a_{ij}\gamma_{ij},\qquad u_2=\sum_{i,j}b_{ij}\gamma_{ij}.$$

Для формирования функции (6.9) сделаем преобразование

$$u_1'=u_1-u_1^{\wedge}=u_1-2,\qquad u_2'=u_2-u_2^{\wedge}=u_2-1$$

и построим допустимое множество U', которому принадлежит вектор $u'=(u_1',u_2')$. Очевидно, что после приведенного выше преобразования точка угрозы $u^{\wedge}=(u_1^{\wedge},u_2^{\wedge})$ смещается в начало координат, а допустимое множество U преобразуется в U'. Опорными точками для построения U' в координатах $u_1^\wedge, u_2^\wedge$ будут точки с координатами $(a_{11} - u_1^\wedge; b_{11} - u_2^\wedge)$, $(a_{12} - u_1^\wedge; b_{12} - u_2^\wedge)$, $(a_{21} - u_1^\wedge; b_{21} - u_2^\wedge)$, $(a_{22} - u_1^\wedge; b_{22} - u_2^\wedge)$, то есть точки (-1;-1), (3;0), (0;3), (1;1) (см. рис.6.6).

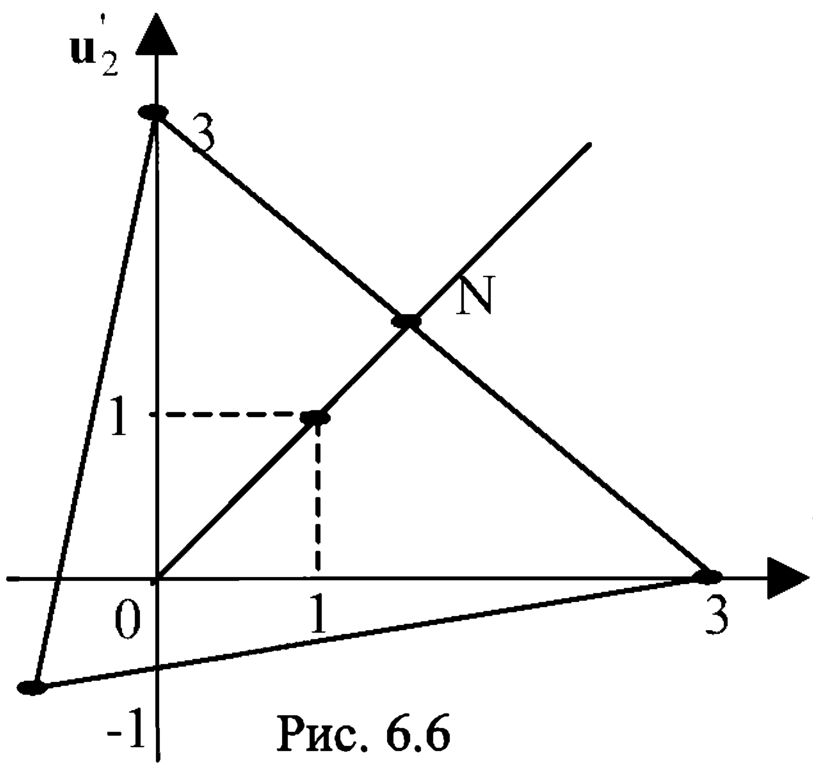


Рис. 6.6

Так как множество U' должно быть выпуклым, то точка (1;1) оказывается его внутренней точкой, а отрезок, соединяющий точки (3;0) и (0;3), есть Парето-оптимальное множество решений игры.

Точка арбитражного решения должна лежать на этом отрезке. Уравнение прямой, проходящей через точки (3;0) и (0;3), будет иметь вид $u_2' = -u_1' + 3$.

При этом максимизируемая функция g записывается: $g(u', U, u^\wedge) = u_1' u_2' = -(u_1')^2 + 3u_1'$.

Продифференцируем функцию g по u_1' и приравняем производную к нулю.

$$dg / du_1' = -2u_1' + 3 = 0; \text{ тогда: } u_1'^* = 3/2, \quad u_2'^* = -u_1'^* + 3 = 3/2$$

$$u_1^* = u_1'^* + 2 = 3{,}5, \quad u_2^* = u_2'^* + 1 = 2{,}5.$$

Таким образом, арбитражное решение имеет вид $u^* = (3{,}5;\ 2{,}5)$, тогда как для равновесного решения выигрыши составят:

$$H_1 = a_{11}x_1^* x_2^* + a_{12}x_1^*(1 - x_2^*) + a_{21}(1 - x_1^*)x_2^* + a_{22}(1 - x_1^*)(1 - x_2^*) =$$
$$= 7/3 \approx 2{,}33.$$

$$H_2 = b_{11}x_1^* x_2^* + b_{12}x_1^*(1 - x_2^*) + b_{21}(1 - x_1^*)x_2^* + b_{22}(1 - x_1^*)(1 - x_2^*) =$$
$$= 4/3 \approx 1{,}33.$$

Вычислим вероятности применения совместных смешанных стратегий γ_{ij} в арбитражном решении. Прямая Парето-оптимальных решений соответствует линейной комбинации совместных чистых стратегий $Z_{12}Z_{21}$, поэтому $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$, $\gamma_{12}, \gamma_{21} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{12}\gamma_{12} + a_{21}\gamma_{21} = u_1^* \\ b_{12}\gamma_{12} + b_{21}\gamma_{21} = u_2^* \end{cases}$$

В числах эта система будет выглядеть

$$\begin{cases} 5\cdot\gamma_{12}+2\cdot\gamma_{21}=3{,}5; \\ 1\cdot\gamma_{12}+4\cdot\gamma_{21}=2{,}5, \end{cases}$$

откуда легко находится $\gamma_{12}=\gamma_{21}={}^1/_2$. Это означает ,что фирмы с одинаковой частотой ½ должны реализовать свои совместные стратегии Z_{12} и Z_{21}. Поскольку $\gamma_{12}+\gamma_{21}=1$, то перекрытие по рекламному времени отсутствует и феномен “антирекламы” не возникает.

Решение $\gamma_{12}=\gamma_{21}={}^1/_2$ можно было легко получить и без решения системы, основываясь на симметрии множества U' относительно биссектрисы главного ортанта координатной системы $0u_1'u_2'$; на рис. 6.6 оно обозначено точкой N.

Пример 6.7. Пусть 3 предприятия выпускают товары ассортиментов А и В, причем 1-е предприятие выпускает товар А в объеме 1800 ед./год, 2-е предприятие – товар А в объеме 1400 ед./год, а 3-е предприятие – товар в объеме 2000 ед./год. Данные товары реализуют только комплектно – по 1 шт. А и 1 шт. В в комплекте. Прогнозируется спрос на 2000 таких комплектов.

Очевидно, что общие возможности 3 предприятий превышают прогнозируемый спрос, а поскольку каждое предприятие желает иметь максимальный сбыт, то мы имеем дело с производственно-экономическим конфликтом.

Если допустить, что предприятия могут вступить в кооперации и передавать друг другу компенсации (побочные платежи), то этот конфликт можно описать классической кооперативной игрой 3 лиц. Выигрыш каждой коалиции будем исчислять в единицах реализованного товара.

Из условий примера видно, что одноэлементные коалиции (по существу – предприятия) и коалиция K={1;2} не могут выпускать комплекты, то продукция таких коалиций не будет реализована. Это означает, что $\tilde{o}(1)=\tilde{o}(2)=\tilde{o}(3)=\tilde{o}(1;2)=0$. Коалиции K={1;2} и K={2;3} смогут выпустить соответственно 1800 и 1400 единиц товара, а коалиция K={1;2;3} способна реализовать все 2000 ед. товара В (в комплектах с товаром А). Отсюда можно записать характеристическую функцию игры:

$$\tilde{o}(K)\begin{cases} 0 \quad \text{для всех } K\{i\},\ i=I \text{ и } K=\{1;2;3\} \\ 3600 \quad \text{для} \quad K=\{1;3\} \\ 2800 \quad \text{для} \quad K=\{2;3\} \\ 4000 \quad \text{для} \quad K=\{1;2;3\} \end{cases}$$

Поскольку $\tilde{o}(K)=0$ для всех одноэлементных коалиций, игра весьма просто может быть сведена к 0-1-редуцированной форме путем деления всех $\tilde{o}(K) \neq 0$ на $\tilde{o}(I)=4000$; тогда

$$\tilde{o}(K)\begin{cases} 0 \quad \text{для всех } K\{i\}, i \in I \text{ и } K=\{1;2\} \\ 0{,}9 \quad \text{для} \quad K=\{1;3\}, \\ 0{,}7 \quad \text{для} \quad K=\{2;3\}, \\ 1 \quad \text{для} \quad K=I \end{cases}$$

Условие абсолютной неэффективности дележей, необходимое и достаточное для их принадлежности С-ядру запишется следующим образом:

$$\tilde{o}(K)\begin{cases} x(\{1;3\})=x_1+x_3 \geq 0{,}9 \\ x(\{2;3\})=x_2+x_3 \geq 0{,}7 \\ x(I)=x_1,x_2,x_3=1 \end{cases}$$

Любой дележ $x=(x_1,x_2,x_3)$, удовлетворяющий данной системе ограничений будет принадлежать С-ядру.

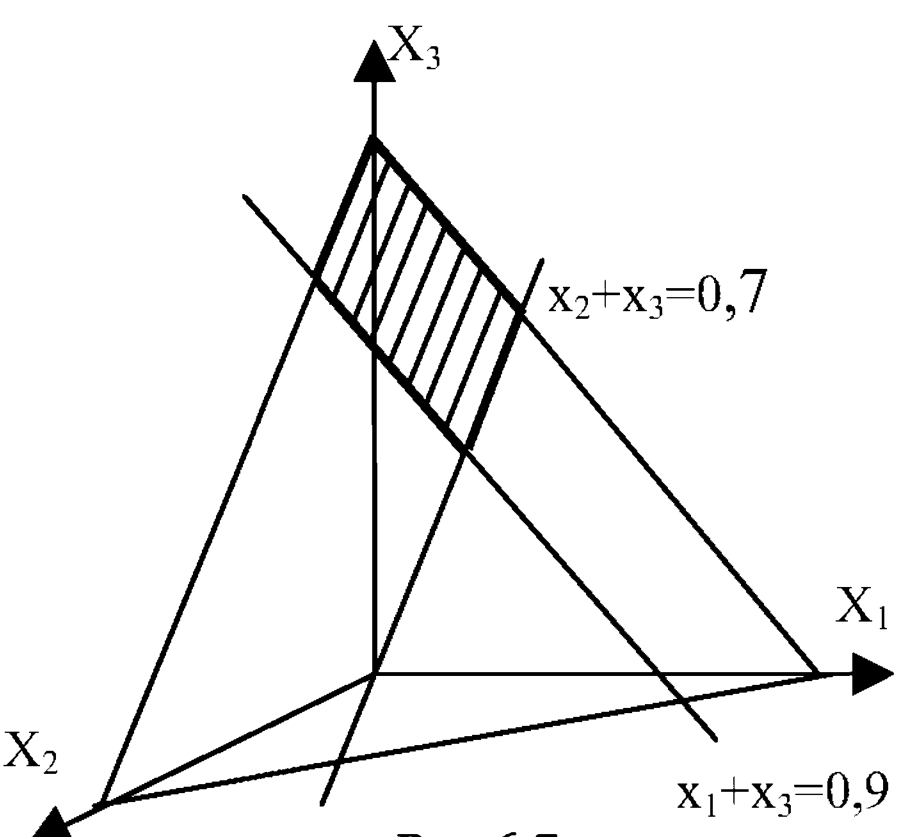


Рис.6.7

Геометрическая иллюстрация представлена на рис.6.7, где С-ядро – заштрихованный параллелограмм с его границами. Каждую точку этого параллелограмма можно считать решением игры, например, дележ x = (0,275; 0,075; 0,65) или после обратного перехода от 0-1-редуцированной формы к исходной игре x = (1100; 300; 2600) – принадлежит С-ядру и может быть принят в качестве решения.

Пример 6.8. Три предприятия, производящие ТНП, участвуют в ежегодной ярмарке. Свою продукцию они могут представлять и рекламировать независимо друг от друга, а могут и образовывать парные коалиции. Кроме того, они могут действовать на ярмарке все сообща. Данную ситуацию можно рассматривать как кооперативную игру с супераддитивной характеристической функцией. Это объясняется тем, что совместная демонстрация взаимнодополняющих товаров может существенно повысить интерес к продукции предприятий и прирост их полезностей.

При этом условимся считать, что отрицательный эффект от совместной демонстрации некоторых однотипных товаров намного меньше полезного эффекта от кооперации.

Характеристическая функция игровой модели $\tilde{\upsilon}(K)$ представлена в таблице:

K	1	2	3	1;2	2;3	3;1	1;2;3
$\tilde{\upsilon}(K)$ млн р.	12	12	18	30	42	46	72

Отыщем для коалиции {1;2;3} компоненты вектора Шепли:

$$\Phi_1(\tilde{\upsilon}) = \frac{2!0!}{3!}(72-42) + \frac{1!1!}{3!}(31-12) + \frac{1!1!}{3!}(46-18) + \frac{0!2!}{3!}(12-0) = 21{,}667$$

$$\Phi_2(\tilde{\upsilon}) = \frac{2!0!}{3!}(72-46) + \frac{1!1!}{3!}(30-12) + \frac{1!1!}{3!}(42-18) + \frac{0!2!}{3!}(12-0) = 19{,}667$$

$$\Phi_3(\tilde{\upsilon}) = \frac{2!0!}{3!}(72-30) + \frac{1!1!}{3!}(46-12) + \frac{1!1!}{3!}(42-12) + \frac{0!2!}{3!}(18-0) = 30{,}667$$

Теперь целесообразно проверить, не будет ли выигрыш партнеров в парных коалициях выше, нежели выигрыш в коалиции K=I. Для этого рассматривается выполнение неравенств

$$\Phi_i^k(\tilde{\upsilon}) > \Phi_i(\tilde{\upsilon}),$$

где Φ_i^k – компонент вектора Шепли игры card K лиц, характеристическая функция которой является сужением функции υ на множество K.

Рассмотрим коалицию K_1{1;2}. Для нее компоненты вектора Шепли определяется:

$$\Phi_1^1 = \frac{1!0!}{2!}(30-1) + \frac{0!1!}{2!}(12-0) = 9+6 = 15,$$

$$\Phi_2^1 = \frac{1!0!}{2!}(30-1) + \frac{0!1!}{2!}(12-0) = 9+6 = 15.$$

Очевидно, что кооперация 1-го и 2-го предприятий приводит к снижению выигрышей и того и другого по сравнению с совместным действием всех 3 предприятий. Подобная картина наблюдается и для коалиций K_2{2;3} K_3{3;1}.

Проведенные расчеты показывают, что предприятиям невыгодно действовать в одиночку и для них недостаточно выгодны парные коалиции.

Распределение ожидаемой прибыли согласно вектору Шепли будет следующим: 1-е предприятие получает 21,667 млн р., 2-е – 19,667 млн р., 3-е – 30,667 млн р. из общей суммы выигрыша коалиции {1;2;3} равной 72 млн р.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Для отопления помещения в зимний период необходимо приобрести топливо. Расход топлива и цены на него в зимнее время зависят от погоды: мягкая зима, нормальная или суровая (см. таблицу).

Зимняя погода	Мягкая	Нормальная	Суровая
Расход (т)	5	10	18
Цена (р./т)	200	320	400
Априорная вероятность погоды	0,2	0,7	0,1

До наступления зимы топливо можно приобрести по минимальной цене 200 р./т, а излишек может быть реализован весной по цене 100 р./т, (инфляция не учитывается). Топливо можно закупить одной из партий: 5, 8, 12, 15, 18 т, ориентируясь на степень суровости зимы.

Определить оптимальный размер запаса, основываясь:

а) на максимальном критерии Вальда,

б) минимуме риска по Сэвиджу,

в) Байесовской оценке минимума затрат.

Задача 2. Магазин может завести в различных пропорциях ассортимент товаров $S_1...S_5$. Их реализация и прибыль магазина зависит от вида товара и состояния спроса. Спрос трудно прогнозируем и характеризуется 3 состояниями D_1, D_2, D_3. Процент чистой прибыли (%) от реализованного товара и объем реализации V (тыс р.) связаны в рабочем диапазоне величин зависимостью (%) = 30(1-V/500).

Средний месячный объем реализации (тыс р.) при заданных состояниях спроса характеризуется матрицей

$$\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 150 & 100 \\ 160 & 120 & 140 \\ 120 & 130 & 160 \\ 150 & 180 & 150 \\ 150 & 130 & 110 \end{bmatrix} \end{array}$$

Определить оптимальные пропорции завоза товаров, исходя из условия средней гарантированной прибыли (антагонистический вариант игры).

Задача 3. Сложное оборудование после нескольких лет эксплуатации может оказаться в одном из 3 состояний:

x_2^1 – оборудование в рабочем состоянии и требует лишь профилактики и мелкого текущего ремонта;

x_2^2 – оборудование требует ремонта или замены некоторых узлов и агрегатов;

x_2^3 – дальнейшая эксплуатация оборудования весьма проблематична.

Предприятие, эксплуатирующее данное оборудование, располагает 3 стратегиями (способами действия):

x_1^1 – оставить оборудование в эксплуатации еще на год, проведя профилактику и текущий ремонт;

x_1^2 – провести капитальный ремонт силами бригады специалистов с завода – изготовителя;

x_1^3 – заменить оборудование на новое.

Потери (тыс. р.), которые несет предприятие при различных способах действия, приведены в таблице. В потери входит стоимость ремонтов и замены узлов, убытки из-за простоев и снижения качества продукции, убытки от невыработки срока амортизации и т.п.

Состояние оборудования	Стратегия предприятия		
	x_1^1	x_1^2	x_1^3
x_2^1	4	22	40
X_2^2	14	8	20
X_2^3	16	18	12

Определить оптимальные стратегии предприятия, используя критерий Гурвица для L =0,1...0,9 с шагом $\Delta L = 0{,}1$.

Вычислить значение L, при котором две крайние стратегии x_1^1 (ничего не обновлять) и x_1^3 (обновить все) оказывается равноэффективными.

Задача 4. Два предприятия выпускают однотипный товар, отличающийся только цветом, дизайном, порядком эксплуатации и т.п. и подлежащий реализации на едином рынке. Себестоимость и продажная цена всех типов продукции одинакова. Предприятие I выпускает товар S_1, S_2, S_3, а предприятие II – S_4, S_5, S_6. Каждое предприятие способно в одиночку обеспечить рынок. Ожидаемые месячные доходы (тыс р.) от реализации товаров заданы матрицами A и B для предприятий I и II, соответственно:

$$A = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 600 & 300 & 500 \\ 500 & 200 & 200 \\ 300 & 900 & 600 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 500 & 1500 & 1200 \\ 1000 & 1000 & 1500 \\ 2000 & 500 & 400 \end{bmatrix} \end{array}$$

Определить доли продукции Si в общем их объеме, которые целесообразно выпускать каждому предприятию, и математические ожидания доходов предприятий.

Задача 5. Условия и задание аналогичны условиям задачи 4.

Матрицы А и В имеют вид:

$$A = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 800 & 1000 & 600 \\ 1000 & 400 & 1400 \\ 1600 & 1000 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 600 & 600 & 1200 \\ 1200 & 1800 & 600 \\ 800 & 1000 & 800 \end{bmatrix} \end{array}$$

Задача 6. Организации I и II намерены построить и оснастить 6 объектов соцкультбыта, услугами которых будут пользоваться работники обеих организаций и члены их семей. Мощности генподрядчиков таковы, что каждый из них способен построить и оснастить все объекты. Организация I вкладывает средства в объекты $S_1,...S_4$, а организация II – в объекты T_1,T_2.

Полезность от эксплуатации каждого из объектов пропорциональна доле вложенных средств.

Ожидаемые показатели полезности в условных единицах указаны в таблице.

Объекты	Организация I		Организация II	
	T_1	T_2	T_3	T_4
S_1	12	4	8	16
S_2	6	18	14	2
S_3	8	10	12	16
S_4	10	4	6	10

Определить целесообразные в смысле равновесия по Нэшу доли финансирования объектов каждой организацией и ожидаемые полезности организаций в условных единицах.

Задача 7. Три фирмы рекламируют выпускаемые ими моющие средства как самые лучшие. Покупатели черпают информацию о новых товарах из телевизионной рекламы. Каждая фирма имеет 2 способа рекламирования – в дневной или вечерней телепрограмме.

Если одновременно рекламировать свою продукцию будет более одной фирмы, то покупатель скорее всего откажется от покупки товара из рекламируемого ассортимента однотипных товаров, усмотрев в факте рекламы противоречие.

Фирма, которая выставит рекламу в дневной передаче, сможет за счет увеличения сбыта обеспечить себе 1 добавочную условную единицу полезности, а фирма, которая выступает с рекламой в вечерней передаче, сможет обеспечить себе 2 добавочных единицы полезности (степени полезности указаны за вычетом затрат на рекламу).

Найти равновесные ситуации в данном конфликте в области рекламы, выделить среди них справедливую для всех партнеров ситуацию и оценить ее выгодность.

Задача 8. Составить на одном из языков высокого уровня программу вычисления вектора Шепли для кооперативной игры N лиц с побочными платежами, где $N=\overline{2;6}$.

Входными данными являются:

а) число участников N;

б) значения характеристической функции $\upsilon(K)$ (пределы: 0...100) для 2^N-1 коалиций.

Выходными данными являются значения N компонент вектора Шепли.

1. Используя данную программу, вычислить вектор Шепли для игры с характеристической функцией $\upsilon(K)$:

$\upsilon(1) = 10$, $\upsilon(2) = 12$, $\upsilon(3) = 22$, $\upsilon(1,2) = 16$,

$\upsilon(2;3) = 42$, $\upsilon(3;1) = 36$, $\upsilon(1;2;3) = 54$.

2. Исследовать вхождение вычисленного вектора Шепли в С-ядро игры.

Задача 9. Разработка сложного технического комплекса поручается трем проектным организациям (1,2,3). Организации могут работать в одиночку над отдельными частями проекта, либо попарно кооперироваться, либо работать над проектом совместно. Результативность разработки описывается характеристической функцией $\upsilon(K)$, где К – одноэлементная, двухэлементная или трехэлементная коалиция. Вознаграждение, предназначаемое за выполненный проект, пропорционально его результативности и для каждой организации зависит от ее вклада в разработку. Общая сумма вознаграждения 124 млн р.

Вычислить распределение вознаграждения между организациями, используя понятие n-ядра Шмайдлера, если характеристическая функция $\upsilon(K)$ имеет вид

$\upsilon(1) = 1{,}2$; $\upsilon(2) = 2{,}2$; $\upsilon(3) = 1{,}8$; $\upsilon(1,2)= 3{,}6$;

$\upsilon(2;3 = 4{,}6$; $\upsilon(3;1) = 3{,}1$; $\upsilon(1;2;3) = 6{,}8$.

Результативность указана в условных единицах.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.
3. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981.
4. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1997.
5. Исследование операций в экономике / Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. М.: Банки и биржи, 1997.
6. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. Т. 2. М.: Энергия, 1987.
7. Кузин Л.Т. Основы кибернетики. Т. 2. М.: Энергия, 1979.
8. Кукушкин Н.С., Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С. Конфликты и компромиссы. Серия математика, кибернетика. М.: Знание, 1986.
9. Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1995.
10. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1988.

Редакторы Н.П.Мирдак, Л.Л.Шигорина

Компьютерная верстка Т.В.Ростуновой

Сдано в набор 25.04.01. Подписано в печать 02.07.01.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,5. Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 100 экз. Заказ 89.
Цена договорная.

Челябинский государственный университет
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Полиграфический участок Издательского центра ЧелГУ
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б

ББК В 183я73-1
Б 405

Безруков А.Б., Саитгараев С.С.
Б 405 Прикладная теория игр: Учеб. пособие / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 2001. 127 с.
ISBN 5-7271-0535-8

В пособии изложены основные разделы теории игр, обобщен и систематизирован обширный материал, опубликованный в отечественной и зарубежной печати по данной тематике. В отличие от других учебников данного профиля в книге большое внимание уделяется вопросам применения методов теории игр для решения прикладных задач.

Предназначено студентам математического и экономического факультетов университетов, технических вузов, а также научным сотрудникам и инженерам, занимающимся разработкой рекомендаций для принятия рациональных решений в конфликтных ситуациях.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Челябинского государственного университета.

Рецензенты: кафедра экономики и информационных систем ЮУрГУ;
Тюлькин Б.М., д-р техн. наук, гл. науч. сотр. Государственного ракетного центра "КБ им. академика В.П.Макеева"

С $\frac{1702070000-023}{4к8(03)-01}$ Без объявл. ББК В183я73-1

ISBN 5-7271-0535-8